

# Preservare equilibri di movimento in 1D per equazioni di shallow water con batimetria con metodi ai volumi finiti

Etan Fiorentino

Gennaio 2025

## Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Il modello de Saint-Venant</b>	<b>3</b>
<b>2 Metodo ai volumi finito con flusso globale</b>	<b>5</b>
2.1 Equilibri di movimento . . . . .	9
2.2 Condizioni al bordo . . . . .	10
<b>3 Test numerici</b>	<b>12</b>
3.1 LAR: lake at rest . . . . .	12
3.2 Caso supercritico . . . . .	13
3.3 Caso subcritico . . . . .	15
3.4 Caso transcritico . . . . .	16
3.5 Sistema con attrito . . . . .	18
3.6 Perturbazioni . . . . .	20
3.7 Confronto tra metodi . . . . .	24

# Introduzione

La meccanica dei fluidi è uno degli argomenti che trovano maggiori applicazioni tra matematica e fisica. Questo perché è sempre stato imperativo per l'uomo imparare a controllare l'acqua, soprattutto nella forma di fiumi, laghi e mari. Per poter dar vita a sistemi ingegneristici che sfruttino o che controllino i fluidi, è fondamentale avere un modo di descrivere e prevedere il loro comportamento. Proprio a questo scopo nascono quindi dei modelli differenziali in grado di descrivere le dinamiche dei fluidi in alcune situazioni. Tuttavia, come spesso accade per i modelli differenziali, studiarli analiticamente può essere complicato, pertanto molte conclusioni vengono tratte con l'ausilio dell'analisi numerica.

In questo elaborato prenderemo in esame il sistema di shallow water di equazioni per acque basse, realizzato da de Saint-Venant, in una dimensione. Questo è un sistema di EDP non lineari, pertanto sarà importante affiancare il modello ad un buon metodo numerico. Nello specifico studieremo un fluido soggetto alla forza di gravità lungo la direzione verticale.

Dopo una breve descrizione del modello nel primo capitolo, procederemo nella seconda sezione con lo sviluppo del metodo numerico con cui lo studieremo. Infine, nell'ultimo capitolo, presenteremo alcune simulazioni effettuate mediante questo metodo, attraverso le quali cercheremo di comprendere le dinamiche di un fluido in acque basse in alcune situazioni tipiche.

# 1 Il modello de Saint-Venant

Quando si parla di shallow water, si sta implicando un'assunzione sul sistema in esame e sulle sue dinamiche: infatti l'ipotesi che fa da base a tutto questo studio è che la dimensione verticale del fluido in esame sia estremamente minore rispetto alla sua estensione orizzontale. Nel mondo reale possiamo fissare ad esempio l'immagine di uno stagno o di un laghetto, poco profondi, ma con una superficie che può ricoprire una grande area. Seguendo questa analogia, d'ora in avanti ci riferiremo al fluido chiamandolo banalmente acqua. Applicando l'ipotesi di shallow water alle equazioni di Navier-Stokes in una dimensione per un fluido incomprimibile, si raggiunge il seguente sistema [1]:

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -ghB_x - g\frac{n^2}{h^{\frac{7}{3}}}|q|q \end{cases}.$$

Spieghiamo cosa sono gli elementi presenti nelle equazioni:

- $h(t, x)$  è una funzione che rappresenta l'altezza della colonna d'acqua nel punto  $x$  al tempo  $t$ ; in poche parole ad ogni tempo indica la distanza nel punto  $x$  tra il fondale e la superficie dell'acqua;
- $u(t, x)$  è la velocità media dell'acqua nel punto  $x$  al tempo  $t$ ;
- $q(t, x)$  è la portata dell'acqua nel punto  $x$  al tempo  $t$  e si calcola come  $q(t, x) = u(t, x)h(t, x)$ ;
- $B(x)$  è la batimetria del problema, ovvero una funzione analitica che restituisce l'altezza del fondale nel punto  $x$ ;
- $g$  è la costante di accelerazione gravitazionale;
- $n$  è la costante di attrito di Manning, quindi tanto più sarà ruvida la superficie del fondale tanto più  $n$  sarà alto.

Da come è scritto il sistema, risulta evidente che le variabili su cui lavoreremo siano  $h$  e  $q$ . Il modello appena scritto prende il nome di sistema di de Saint-Venant, o anche equazioni di shallow water. Le due equazioni formano una legge di bilancio (in particolare la prima è una legge di conservazione e la seconda una legge di bilancio) e il sistema che ne scaturisce è iperbolico.

Gli equilibri possono essere di vario tipo. Il più banale corrisponde ad  $h = q = 0$ , ovvero non è presente il fluido e non ci sono sorgenti che lo

immettano nello spazio di riferimento. Successivamente possiamo osservare la presenza di alcuni equilibri stazionari, che devono soddisfare

$$\begin{cases} q_x = 0 \\ (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -ghB_x - g\frac{n^2}{h^{\frac{7}{3}}}|q|q \end{cases} .$$

Tra questi equilibri possiamo facilmente immaginare un lago con la superficie in quiete e piatta, ovvero  $q = 0$  e  $h + B = \text{costante}$ . Tuttavia ci sono anche degli equilibri di movimento e il nostro scopo è andarli ad analizzare tramite l'analisi numerica.

La tecnica che introdurremo adesso, ci permetterà di preservare gli equilibri di movimento, mantenendo contemporaneamente una buona stabilità numerica per i metodi che introdurremo in seguito, e prende il nome di flusso globale (Global Flux [3]). Tutto quello che facciamo è portare il termine sorgente della seconda equazione all'interno del flusso. Pertanto dobbiamo fare in modo che, derivando il nuovo termine rispetto ad  $x$ , si ottenga nuovamente il termine sorgente. Le nuove equazioni saranno

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + K_x = 0 \end{cases} ,$$

dove il flusso globale è dato da  $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} q \\ K \end{bmatrix}$ . Utilizzando la notazione  $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}$ , possiamo riscrivere il sistema come

$$\mathcal{U}_t + \mathcal{G}_x = 0 .$$

Rimane solo da specificare la nuova forma della seconda componente del flusso. Per inglobare la sorgente nel flusso, poniamo

$$K = hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \mathcal{R} ,$$

dove  $\mathcal{R}$  è uguale al seguente integrale:

$$\mathcal{R} = g \int_{-\infty}^x \left[ h(t, \xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} + \frac{n^2}{h(t, \xi)^{\frac{7}{3}}} |q(t, \xi)| q(t, \xi) \right] d\xi .$$

Come prima cosa osserviamo che la batimetria è stata inclusa nel flusso: proprio questo fattore garantisce una maggiore precisione dei metodi numerici. Sempre riguardo ai metodi numerici, concludiamo la sezione con una sottolineatura fondamentale. Infatti la nuova scrittura delle equazioni ha riportato il sistema ad una legge di conservazione, e non più solo di bilancio, permettendoci di conseguenza di applicare i metodi classici per le leggi di conservazione.

## 2 Metodo ai volumi finito con flusso globale

Per trattare un modello come quello descritto nella sezione precedente, esistono decine di metodi numerici. Quello utilizzato per il presente studio è un metodo ai volumi finiti che si appoggia su uno schema di tipo upwind. Come prima cosa quindi, introduciamo una discretizzazione dello spazio. Chiamiamo  $\Omega$  il dominio computazionale. Trattando il problema in una dimensione, sceglieremo sempre come dominio computazionale un intervallo della retta reale. Dividiamo  $\Omega$  in un numero  $N_x$  di sottoinsiemi, che possiamo indicare come  $\Omega_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ , con  $i = 1, \dots, N_x$ . Questi  $\Omega_i$  li chiameremo celle e saranno i volumi di controllo su cui lavoreremo. I punti  $x_i$  corrispondono ai baricentri delle celle  $\Omega_i$ , mentre i punti  $x_{i-\frac{1}{2}}$  e  $x_{i+\frac{1}{2}}$  sono rispettivamente il bordo sinistro e il bordo destro della cella  $i$ -esima. Supponendo di discretizzare  $\Omega$  con una griglia baricentrica uniforme, possiamo assumere che l'ampiezza di ogni cella sia pari a  $\Delta x = \frac{|\Omega|}{N_x}$ , dove  $|\Omega|$  è l'ampiezza del dominio computazionale.

Volendo utilizzare un metodo ai volumi finiti, procediamo con la prima considerazione: le quantità studiate tramite il sistema non le intenderemo come funzioni definite punto per punto, ma sfrutteremo la discretizzazione appena introdotta per poter parlare di medie di cella. La media di cella della variabile  $\mathcal{U}$  al tempo  $t$  nella cella  $i$  sarà data da

$$U_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{U}(t, \xi) d\xi .$$

Con questa notazione andiamo a scrivere la versione discreta della legge di conservazione per  $\mathcal{U}$ :

$$\frac{dU_i}{dt} + \frac{\hat{H}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{H}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 ,$$

dove  $\hat{H}_i = \begin{bmatrix} \hat{q}_i \\ \hat{K}_i \end{bmatrix}$  sarà una versione discreta del flusso globale  $\mathcal{G}$ . Per definire meglio il flusso numerico  $\hat{H}_i$ , facciamo un passo indietro e consideriamo il campo nel caso di assenza di sorgente, ovvero  $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix}$ . Pur essendo in una dimensione spaziale, le due variabili in analisi ci costringono ad un approccio matriciale, pertanto lo studio delle velocità caratteristico degli schemi upwind, andrà fatto tramite la matrice jacobiana  $J(\mathcal{F})$  data da

$$J(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{h^2} + gh & 2\frac{q}{h} \end{pmatrix} .$$

Un modo semplice di studiare questa matrice è tramite la sua diagonalizzazione, ovvero scrivendola come

$$J(\mathcal{F}) = R\Lambda R^{-1} ,$$

con  $\Lambda$  la matrice diagonale contenente gli autovalori di  $J(\mathcal{F})$ . Conoscendo la matrice  $\Lambda$ , è possibile applicare le distinzioni sulle velocità per mettere in pratica lo schema upwind. Quello che faremo è sfruttare la diagonalizzazione appena vista per scrivere una forma compatta dello schema, che sia valida sia quando i valori andranno presi alla destra dei bordi cella, sia quando andranno presi alla sinistra. Per farlo sommeremo le formule di entrambe le situazioni, moltiplicandole per un elemento che faccia da interruttore automatico per scegliere quale delle due usare. Il ruolo dell'interruttore lo assegniamo a due matrici:  $\Lambda^+$  e  $\Lambda^-$ . Queste sono rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di  $\Lambda$ , ovvero  $\Lambda^+$  presenta degli 1 nelle posizioni in cui  $\Lambda$  è positiva (e parallelamente  $\Lambda^-$  li avrà dove è negativa). Possiamo quindi applicare lo schema upwind per il calcolo del flusso numerico nei bordi cella, ponendo

$$\begin{bmatrix} \hat{q}_{i+\frac{1}{2}} \\ \hat{K}_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = R\Lambda^+R^{-1} \begin{bmatrix} q_i \\ K_i \end{bmatrix} + R\Lambda^-R^{-1} \begin{bmatrix} q_{i+1} \\ K_{i+1} \end{bmatrix} .$$

Per poter svolgere materialmente questo calcolo dobbiamo capire quali dei parametri siano già a nostra disposizione e quali invece debbano essere calcolati prima di poter procedere.  $q_i$  sarà una delle due variabili incognite del problema, pertanto nel sistema differenziale che stiamo vedendo andremo a supporre delle condizioni iniziali su  $h$  e  $q$ . Ciò implica che al tempo  $t = 0$  la variabile  $q_i$  sarà rappresentata da una ricostruzione costante a tratti della funzione  $q(0, x) = q_0(x)$ , mentre ai tempi successivi sarà stata calcolata tramite il metodo che stiamo descrivendo, pertanto  $q_i$  è un dato noto dell'equazione. Dobbiamo quindi capire in che punti valutare la  $\mathcal{F}$  per la costruzione della jacobiana e come ricostruire  $\mathcal{G}$  sulle celle. Procediamo con la  $\mathcal{F}$ . Per il calcolo di  $\begin{bmatrix} \hat{q}_{i+\frac{1}{2}} \\ \hat{K}_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^T$ , dobbiamo conoscere il segno della velocità al bordo destro della cella  $i$ -esima, e questo implica dover valutare  $\mathcal{F}$  e la relativa  $J(\mathcal{F})$  su questo bordo per ogni cella. Tuttavia, similmente a quanto detto poco fa per  $q_i$ , anche  $h_i$  ad ogni tempo è nota solo sui baricentri delle celle. Pertanto, all'interno della matrice  $J(\mathcal{F})$ , sostituiamo ad  $h$  la media  $\frac{h_i+h_{i+1}}{2}$  e a  $q$  la media  $\frac{q_i+q_{i+1}}{2}$ . Così facendo siamo in grado di valutare correttamente un'approssimazione di  $J(\mathcal{F})$  utilizzabile per il calcolo del flusso sui bordi. L'ultimo ingrediente mancante è quindi  $K_i$ . Ricordiamo che  $K$  è

dato dalla formula

$$K = hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + g \int_{-\infty}^x \left[ h(t, \xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} + \frac{n^2}{h(t, \xi)^{\frac{7}{3}}} |q(t, \xi)| q(t, \xi) \right] d\xi ,$$

pertanto dobbiamo capire come approssimare il termine contenente l'integrale, che avevamo denominato  $\mathcal{R}$ . Ragioniamo nel caso in cui la frizione sia assente, ovvero supponiamo

$$\mathcal{R} = g \int_{-\infty}^x h(t, \xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} d\xi .$$

Chiamiamo  $\eta$  l'altezza della superficie dell'acqua, data quindi da  $\eta = h + B$ . In questo modo possiamo riscrivere la formula precedente nella forma

$$\mathcal{R} = g \int_{-\infty}^x \eta(t, \xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} d\xi - g \int_{-\infty}^x B(\xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} d\xi .$$

Tenendo conto della griglia spaziale precedentemente introdotta, la formula discreta del termine integrale diventa

$$\mathcal{R}(x_{i+1}) = \mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i + g \int_{x_i}^{x_{i+1}} \eta(t, \xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} d\xi - g \int_{x_i}^{x_{i+1}} B(\xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} d\xi .$$

Nel primo integrale consideriamo le approssimazioni

$$\eta = \frac{\eta_{i+1} + \eta_i}{2} \quad \frac{\partial B(x)}{\partial x} = \frac{B_{i+1} - B_i}{\Delta x} ,$$

così da ottenere il termine

$$\Delta x g \frac{\eta_{i+1} + \eta_i}{2} \frac{B_{i+1} - B_i}{\Delta x} ,$$

mentre dalla seconda parte dell'espressione si ricava

$$-g \int_{x_i}^{x_{i+1}} B(\xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{2} g (B_{i+1}^2 - B_i^2) .$$

Così facendo possiamo approssimare l'intero integrale ad ogni tempo come segue:

$$\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i + \Delta x g \frac{\eta_{i+1} + \eta_i}{2} \frac{B_{i+1} - B_i}{\Delta x} - \frac{1}{2} g (B_{i+1}^2 - B_i^2) .$$

A questo punto i  $K_i$  possono essere calcolati tramite la formula

$$K_i = \frac{q_i^2}{h_i} + \frac{1}{2} g h_i^2 + \mathcal{R}_i .$$

Facciamo vedere che con questa scelta di  $\mathcal{R}$  si preservano gli equilibri nella configurazione lake at rest (LAR). Per semplicità di notazione definiamo i due seguenti operatori lineari

$$\bar{f} = \frac{f_{i+1} + f_i}{2} \quad [f] = f_{i+1} - f_i ,$$

rispettivamente operatore di media e di salto. Scomponiamo  $(B_{i+1}^2 - B_i^2)$  nel prodotto somma per differenza ed applichiamo i nuovi operatori. Allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{i+1} &= \mathcal{R}_i + g\bar{\eta}[B] - g\bar{B}[B] = \\ &= \mathcal{R}_i + g(\bar{h} + \bar{B})[B] - g\bar{B}[B] = \\ &= \mathcal{R}_i + g(\bar{h} + \bar{B} - \bar{B})[B] = \\ &= \mathcal{R}_i + g\bar{h}[B] . \end{aligned}$$

Dimostriamo quindi che  $K$  è costante supponendo  $q_i = 0$  per ogni  $i$  e  $\eta_i = \eta_0$  per ogni  $i$ .

$$\begin{aligned} K_{i+1} - K_i &= \frac{q_{i+1}^2}{h_{i+1}} + \frac{1}{2}gh_{i+1}^2 + \mathcal{R}_{i+1} - \left( \frac{q_i^2}{h_i} + \frac{1}{2}gh_i^2 + \mathcal{R}_i \right) = \\ &= 0 + \frac{1}{2}gh_{i+1}^2 + \mathcal{R}_i + g\bar{h}[B] - 0 - \frac{1}{2}gh_i^2 - \mathcal{R}_i = \\ &= g\bar{h}[h] + g\bar{h}[B] = \\ &= g\bar{h}[h + B] = \\ &= g\bar{h}[\eta] = \\ &= 0 , \end{aligned}$$

in quanto nel caso LAR il salto di  $\eta$  è nullo ovunque. Questo dimostra che l'attuale scelta di  $\mathcal{R}$  preserva gli equilibri LAR.

**Osservazione.** In caso di presenza di frizione ( $n \neq 0$ ), nel momento in cui si separa l'integrale nella somma degli integrali calcolati tra i baricentri delle celle, basta ricordarsi che su ogni cella stiamo considerando  $h$  e  $q$  costanti. Dopodiché non rimane che spezzare ulteriormente gli integrali in modo tale che si concentrino su una sola cella alla volta ( $\int_{x_i}^{x_{i+1}} = \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} + \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+1}}$ ). Infine possiamo quindi tirare fuori dall'integrale  $h$  e  $q$ , ottenendo

$$\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i + g \frac{\eta_{i+1} + \eta_i}{2} (B_{i+1} - B_i) - \frac{g}{2} (B_{i+1}^2 - B_i^2) + \frac{\Delta x}{2} n^2 \left( \frac{|q_i|q_i}{h_i^{\frac{7}{3}}} + \frac{|q_{i+1}|q_{i+1}}{h_{i+1}^{\frac{7}{3}}} \right) .$$



Adesso che il flusso numerico  $\left[\hat{q}_{i+\frac{1}{2}}, \hat{K}_{i+\frac{1}{2}}\right]^T$  è calcolabile, non rimane che applicare un metodo numerico per l'evoluzione in tempo del sistema

$$\begin{cases} \frac{dh_i}{dt} + \frac{\hat{q}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{q}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \\ \frac{dq_i}{dt} + \frac{\hat{K}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{K}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \end{cases} ,$$

come ad esempio un metodo Runge-Kutta esplicito.

## 2.1 Equilibri di movimento

Abbiamo già studiato l'equilibrio LAR nella sezione precedente. Cerchiamo adesso di analizzare meglio gli equilibri di movimento in assenza di frizione, ovvero che soddisfano

$$\begin{cases} q_x = 0 \\ \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = -ghB_x \end{cases} .$$

Dalla prima equazione ricaviamo subito  $q = q_0$  costante. Andiamo quindi a sostituirlo nella seconda equazione e, ricordando che consideriamo  $h > 0$ , procediamo con alcune manipolazioni algebriche [7].

$$\begin{aligned} \left(\frac{q_0^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2\right)_x &= -ghB_x \\ \Downarrow \\ -\frac{q_0^2}{h^2}h_x + gh h_x + ghB_x &= 0 \\ \Downarrow \\ -\frac{q_0^2}{h^3}h_x + gh_x + gB_x &= 0 \\ \Downarrow \\ \left(\frac{q_0^2}{2h^2} + g(h + B)\right)_x &= 0 . \end{aligned}$$

Questa condizione coincide con il richiedere che, dopo  $q$ , anche  $K$  sia costante. Prendendo un qualunque punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , possiamo integrare l'equazione nell'intervallo  $[x_0, x]$ , supponendo  $h(x_0) = h_0$  e  $B(x_0) = B_0$ , ottenendo

$$\frac{q_0^2}{2h^2} + g(h + B) - \frac{q_0^2}{2h_0^2} - g(h_0 + B_0) = 0 .$$

Derivando rispetto ad  $h$  il membro sinistro, scopriamo che deve valere l'uguaglianza

$$\frac{-q_0^2}{h^3} + g = 0 ,$$

dalla quale si deriva la condizione di equilibrio

$$h = \left( \frac{q_0^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} .$$

Quando risulterà  $h < \left( \frac{q_0^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$ , allora la velocità del fluido sarà superiore alla velocità di propagazione delle onde e parleremo di caso **supercritico**. Al contrario, quando  $h > \left( \frac{q_0^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$ , le onde si propagheranno con una velocità maggiore rispetto al flusso e rientreremo nel caso **subcritico**. Nei punti dove invece si avrà  $h = \left( \frac{q_0^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$ , sarà presente un passaggio tra regime supercritico e regime subcritico, e questo viene detto caso **transcritico**.

## 2.2 Condizioni al bordo

Nelle simulazioni di lake at rest immaginiamo di posizionare un fluido già in stato di equilibrio all'interno di un dominio fisico. Questo comporta che non ci sia alcuna quantità di fluido immesso nel sistema, in quanto non avviene nessuna fuoriuscita da compensare. A livello numerico possiamo sfruttare questo fatto per poterci disinteressare di eventuali condizioni da imporre sui bordi del dominio. Tuttavia il nostro obiettivo non è solo studiare i LAR, bensì studiare come situazioni di instabilità del fluido possano convergere verso un equilibrio di movimento, e per farlo dobbiamo capire quando e come imporre delle condizioni al bordo.

Nella sezione precedente abbiamo visto come il metodo ai volumi finiti che vogliamo adottare sia collegato agli autovalori della matrice jacobiana  $J(\mathcal{F})$ . Vediamo nel dettaglio cosa possiamo dedurre da questi elementi.

Gli autovalori che compongono la matrice  $\Lambda$  sono noti e corrispondono a

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh} .$$

Il segno di questi due autovalori stabilisce le possibili direzioni di propagazione delle onde. Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono concordi, significa che tutte le onde si muovono nella stessa direzione (caso supercritico). Questo implica che l'informazione del sistema uscirà tutta dalla stessa parte del dominio, pertanto sarà necessaria una sorgente nel bordo di provenienza delle onde. Numericamente significa che sarà necessario imporre, supponendo che la velocità sia

positiva,  $q(t, x_1)$  e  $h(t, x_1)$ . Altrimenti, per velocità negativa si deve controllare il bordo opposto:  $q(t, x_N)$  e  $h(t, x_N)$ . Quando invece i due autovalori sono discordi, le onde viaggiano in direzioni opposte (caso subcritico). Qui diventa necessario avere una condizione nella direzione di provenienza per ogni possibile direzione delle onde, ovvero va imposta una sola condizione su ogni bordo, ad esempio  $q(t, x_1)$  e  $h(t, x_N)$ . Infine può anche succedere che uno dei due autovalori sia nullo o lo diventi nello spazio o nel tempo (caso trascritico). In questa configurazione si mantiene la doppia condizione al bordo, supercritica o subcritica a seconda del caso, fintanto che gli autovalori rimangono diversi da 0. Nel momento in cui uno dei due si annulla, la condizione al bordo assegnata alle onde che si muovevano con quella velocità, viene meno. Procediamo quindi con alcune simulazioni.

### 3 Test numerici

In questa sezione riportiamo alcuni test numerici significativi eseguiti sul modello de Saint-Venant per mezzo del metodo ai volumi finiti con flusso globale. Per l'evoluzione temporale abbiamo adottato il metodo Runge-Kutta esplicito classico a 4 stadi di quarto ordine. Per quanto riguarda le condizioni al bordo per lo schema ai volumi finiti, ci riferiremo al Paragrafo 2.2. Nella pratica, andremo ad imporre le condizioni necessarie ai bordi nei vari casi solo alla fine di ogni iterazione temporale dello schema, imponendo manualmente il valore delle variabili. Inoltre, dove è necessario conoscere la cella di sinistra per la prima cella, e rispettivamente quella di destra per l'ultima cella, ampliamo il dominio fisico con una cella fantasma. Sulle celle fantasma adottiamo le condizioni di Neumann: la cella aggiunta a sinistra sarà una copia esatta della prima cella, mentre quella aggiunta a destra replicherà l'ultima cella. Per il momento ci limiteremo a studiare il sistema in assenza di attrito ( $n = 0$ ), mentre come costante gravitazionale prendiamo  $g = 9.80665$ . Infine specifichiamo che inizialmente adotteremo una griglia con 204 celle.

Le simulazioni sono state svolte con un passo temporale variabile, in modo tale da assicurare che la condizione CFL sia sempre pari a 0.9.

Inoltre specifichiamo che l'irregolarità osservabile sul bordo sinistro di alcune simulazioni dipende esclusivamente dal modo in cui sono implementate le celle fantasma. Le simulazioni sono delle variazioni di quelle presentate in [3, 6].

#### 3.1 LAR: lake at rest

Come abbiamo dimostrato nel capitolo precedente, il metodo ai volumi finiti, con le approssimazioni scelte per i termini integrali, conserva gli equilibri nel caso di lake at rest. Per vedere un esempio di questa proprietà basta scegliere una qualunque batimetria,  $h_0$  tale che  $\eta_0$  sia costante e  $q_0 = 0$  e lasciar andare la simulazione. Ad ogni tempo si vedrà sempre lo stesso profilo. Per questo esperimento ci siamo posti nel dominio  $[0, 25]$  ed abbiamo scelto [3]

$$B(x) = \begin{cases} 0.2 + 0.5 \exp\left(1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{|x-10|}{5}\right)^2}\right) & \text{se } |x - 10| < 5 \\ 0.2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$h_0(x) = 3 - B(x) .$$

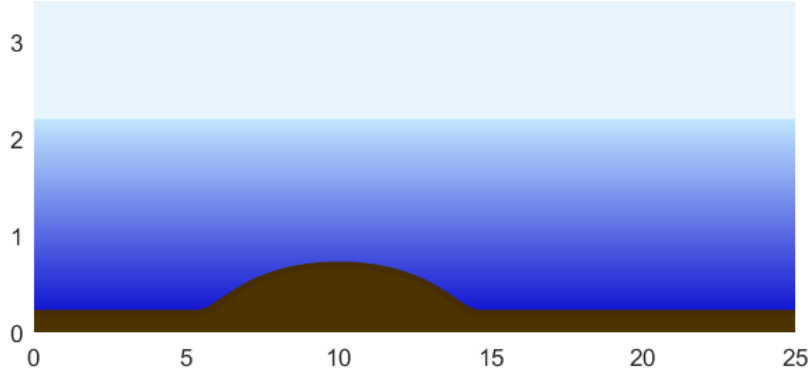


Figura 1: Esempio di LAR.

Chiaramente in questo contesto la forma del fondale non influenza il movimento dell'acqua. Ad esempio possiamo prendere come batimetria

$$B(x) = 0.4 + 0.1 \sin(\pi x) + 0.002x^2 ,$$

ottenendo la stessa dinamica per la superficie del fluido.

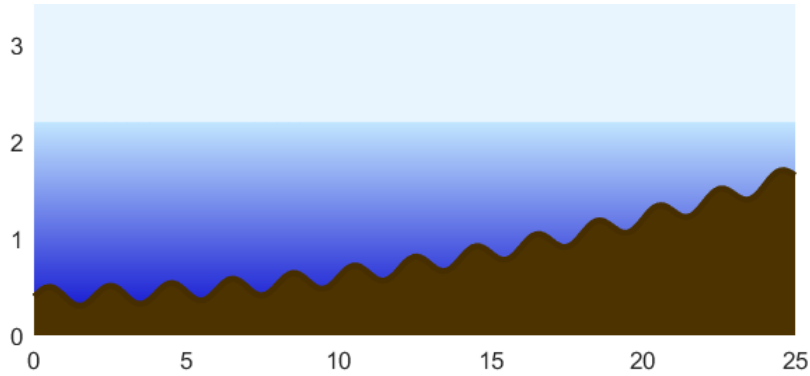


Figura 2: Esempio di LAR con batimetria sinusoidale.

### 3.2 Caso supercritico

Cominciamo studiando un caso supercritico. Come dominio e batimetria prendiamo gli stessi della Figura 1. L'altezza iniziale della colonna d'acqua è  $h_0(x) = 2.2 - B(x)$ , mentre il flusso è  $q_0(x) = 0$ . Vogliamo imporre delle condizioni che ci facciano rientrare nel caso supercritico, quindi imponiamo come condizione al bordo sul flusso un valore abbastanza grande, ovvero  $q(t, 0) = 24$ , mentre la condizione su  $h$  la imponiamo con  $h(t, 0) = 2$  [3].

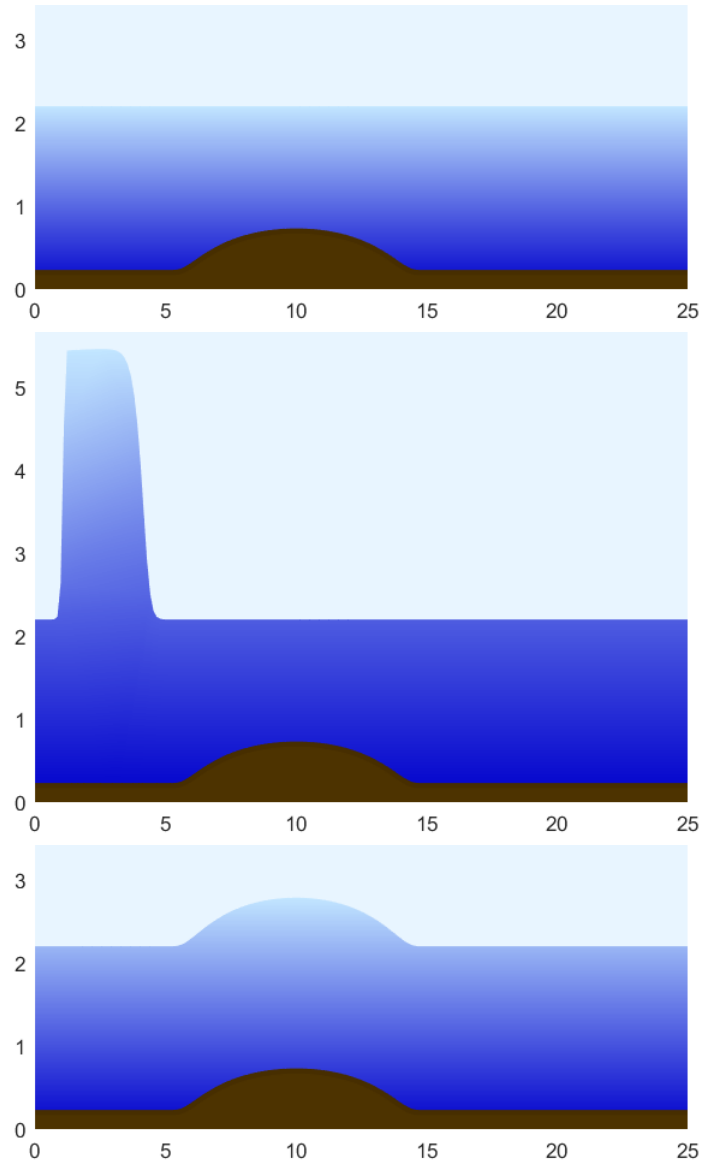


Figura 3: Una dinamica supercritica. L'equilibrio viene raggiunto al tempo  $t = 15.4478$  rispetto ad una tolleranza di  $10^{-6}$  confrontata con la differenza tra due iterazioni consecutive.

In questo caso il flusso imposto sul bordo sinistro del dominio origina un'onda molto alta e veloce. L'onda si muove verso destra e ogni sezione di volume d'acqua si muove verso destra (autovalori concordi e positivi) e l'equilibrio è caratterizzato da un profilo della superficie che segue quello della batimetria, con un rialzamento esattamente dove la batimetria ne presenta uno.

### 3.3 Caso subcritico

Per ottenere una configurazione subcritica dobbiamo cercare delle condizioni che facciano viaggiare le onde in direzioni opposte. Come prima cosa quindi, abbassiamo il valore di  $u$  ponendo  $q(t, 0) = 3.42$ . Questo genererà un'onda entrante dal bordo sinistro nel dominio, di intensità estremamente minore rispetto al precedente esempio supercritico. Trattandosi di caso subcritico, la condizione su  $h$  non la porremo al bordo sinistro, bensì al destro, in affinità con quanto spiegato nel Paragrafo 2.2, e sarà  $h(t, 25) = 2$  [3].

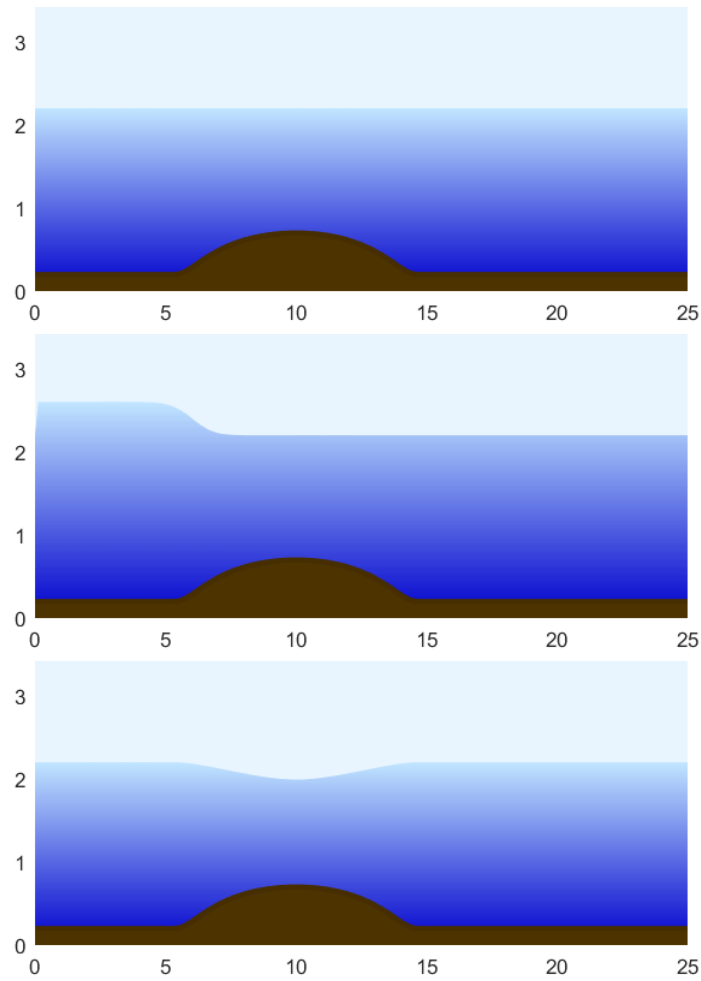


Figura 4: Una dinamica subcritica. L'equilibrio viene raggiunto al tempo  $t = 61.0963$  rispetto ad una tolleranza di  $10^{-6}$  confrontata con la differenza tra due iterazioni consecutive.

Specularmente al caso supercritico, quando la superficie dell'acqua raggiunge l'equilibrio, possiamo osservare come in corrispondenza del picco della batimetria, dove prima si vedeva un picco della superficie stessa, si trovi invece una buca. Questa caratteristica è ciò che maggiormente caratterizza i casi subcritici. Durante l'intera dinamica studiata nell'ultima sezione, l'onda partiva da sinistra ed usciva da destra, lasciando depositare il fluido man mano che scorreva sul fondale. Al contrario, nel caso attualmente in esame, l'onda ha una sorta di riflessione una volta arrivata al bordo destro, che la fa ripartire verso sinistra. Infatti prima di raggiungere l'equilibrio, le onde passeranno più volte e in entrambe le direzioni sulla superficie prima di smorzarsi definitivamente. Questo implica che per poter raggiungere l'equilibrio nel caso subcritico sarà necessario un tempo di studio maggiore.

### 3.4 Caso transcritico

Per il caso transcritico presentiamo due simulazioni. Nella prima osserviamo il seguente comportamento: l'acqua cerca di mantenere un flusso uniforme, ma quando raggiunge un punto critico, la colonna d'acqua si abbassa repentinamente, generando un grande dislivello tra l'acqua in entrata nel dominio e quella in uscita. Per questa simulazione scegliamo  $h_0(x) = 0.8 - B(x)$ , ovvero abbassiamo notevolmente la colonna d'acqua, con condizioni al bordo  $q(t, 0) = 1.58$  e  $h(t, 25) = 0.6$  fintanto che  $h^{(k)}(t^{(k)}, 25) > 0.6$ .



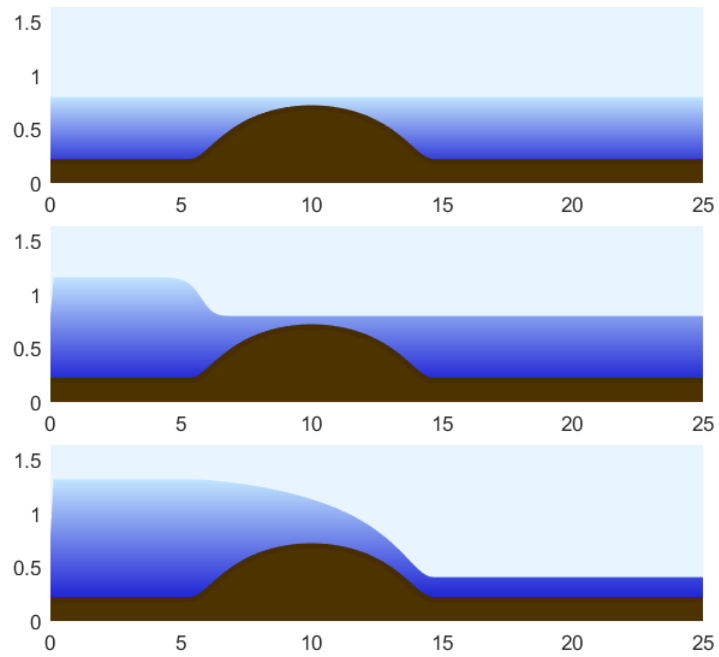


Figura 5: Prima dinamica transcritica. L'equilibrio viene raggiunto al tempo  $t = 44.5596$  rispetto ad una tolleranza di  $10^{-6}$  confrontata con la differenza tra due iterazioni consecutive.

Vediamo ora cosa succede diminuendo leggermente il flusso in entrata, ovvero  $q(t, 0) = 0.58$ . La dinamica che ne scaturisce è molto particolare.

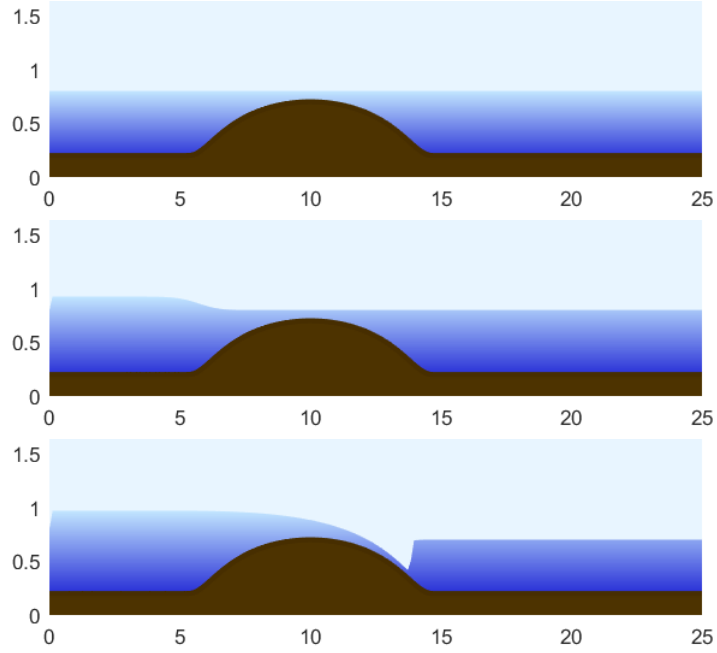


Figura 6: Seconda dinamica transcritica con shock idraulico. L'equilibrio viene raggiunto al tempo  $t = 45.4835$  rispetto ad una tolleranza di  $10^{-6}$  confrontata con la differenza tra due iterazioni consecutive.

Un regime come questo si può verificare quando, ad esempio, il fondale presenta una brusca riduzione della pendenza, richiedendo quindi una quantità di energia per mantenere il regime supercritico, che il fluido non possiede. Si ha quindi il passaggio al regime subcritico, che avviene con una dissipazione di energia in calore e turbolenze. Tali turbolenze possono generare una particolare situazione fisica, detta shock idraulico, dove l'acqua forma una discontinuità nel suo profilo.

### 3.5 Sistema con attrito

Prima di passare allo studio delle perturbazioni degli equilibri appena presentati, riportiamo un paio di esempi dove è presente l'attrito con la superficie del fondale. Imponiamo quindi  $n = 0.05$  per il coefficiente di attrito di Manning. Presentiamo le simulazioni corrispondenti alla Figura 3 e alla Figura 5.

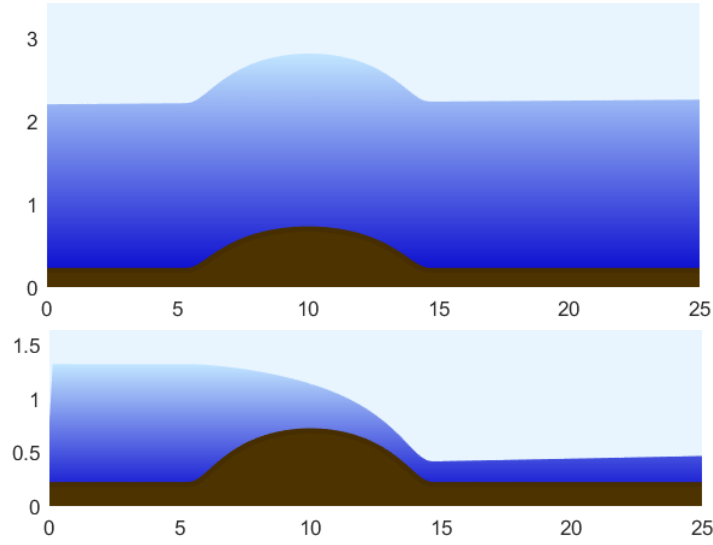


Figura 7: Equilibrio supercritico ed equilibrio transcritico in presenza di attrito. Gli equilibri vengono raggiunti rispettivamente ai tempi  $t = 16.0251$  e  $t = 54.6900$  rispetto ad una tolleranza di  $10^{-6}$  confrontata con la differenza tra due iterazioni consecutive.

Per il caso subcritico della Figura 4, solamente per ragioni di leggibilità del grafico, aumentiamo  $n$  a 0.35.

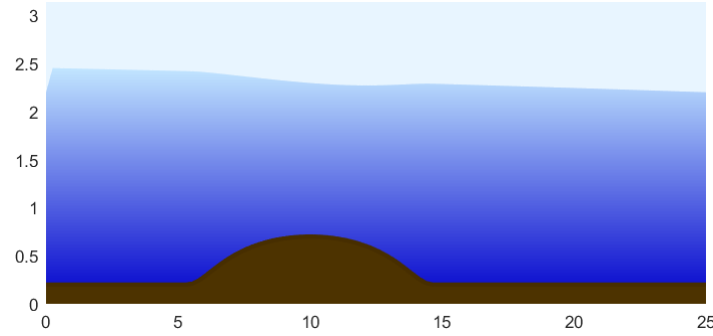


Figura 8: Equilibrio subcritico in presenza di attrito. L'equilibrio viene raggiunto al tempo  $t = 47.9818$  rispetto ad una tolleranza di  $10^{-6}$  confrontata con la differenza tra due iterazioni consecutive.

Quello che maggiormente si nota da queste simulazioni, è che il profilo della superficie del fluido, una volta raggiunto l'equilibrio, risulta inclinato rispetto al caso senza frizione. Nello specifico l'inclinazione è inversa nel caso subcritico.

### 3.6 Perturbazioni

Dopo aver studiato gli equilibri nelle varie configurazioni possibili del sistema, procediamo chiedendoci cosa succede perturbando il sistema in equilibrio. Chiaramente nel caso LAR ci limiteremo a perturbare il sistema di partenza, essendo già in equilibrio, mentre negli altri casi introdurremo la perturbazione solo una volta raggiunto il profilo finale della dinamica. Per perturbare il sistema aggiungeremo alla colonna d'acqua nella posizione di equilibrio il valore 0.05 nell'intervallo  $[3.8, 4.5]$ . Ciò che più ci interessa far vedere con questo studio, è che il metodo ai volumi finiti che stiamo utilizzando riesce ad approssimare queste oscillazioni molto bene, anche con un numero ridotto di celle. Con questa motivazione passiamo a studiare i casi precedenti considerando una discretizzazione spaziale del dominio con 100 celle. Dato l'ordine di grandezza dell'oscillazione che stiamo introducendo, ci limiteremo a riportare il profilo della superficie a confronto con la posizione di equilibrio che abbiamo perturbato.

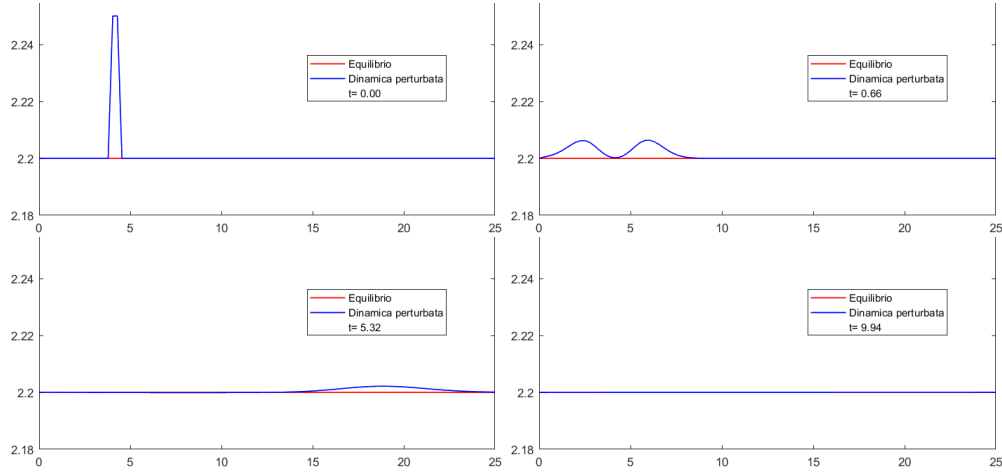


Figura 9: Dinamica LAR perturbata.

Nel caso di lake at rest, la perturbazione genera due onde simmetriche che viaggiano specularmente sulla superficie del fluido, fino a fuoriuscire dal dominio, una da un lato e una dall'altro. Vediamo ora la dinamica perturbata relativa al caso supercritico.

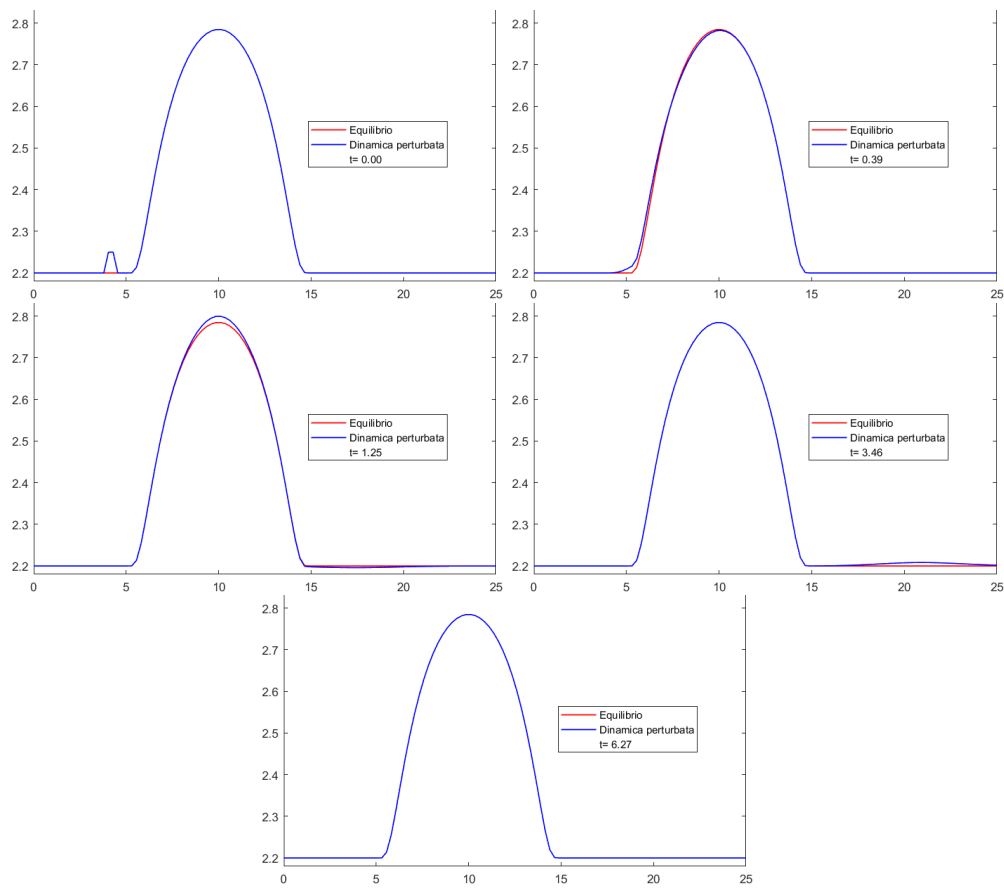


Figura 10: Dinamica supercritica perturbata.

In questo caso le onde generate dalla perturbazione viaggiano nella stessa direzione, facendo innalzare il livello dell'acqua in alcuni punti e abbassandolo in altri. Le onde scompaiono una volta uscite dal bordo di destra. Perturbiamo ora il caso subcritico.

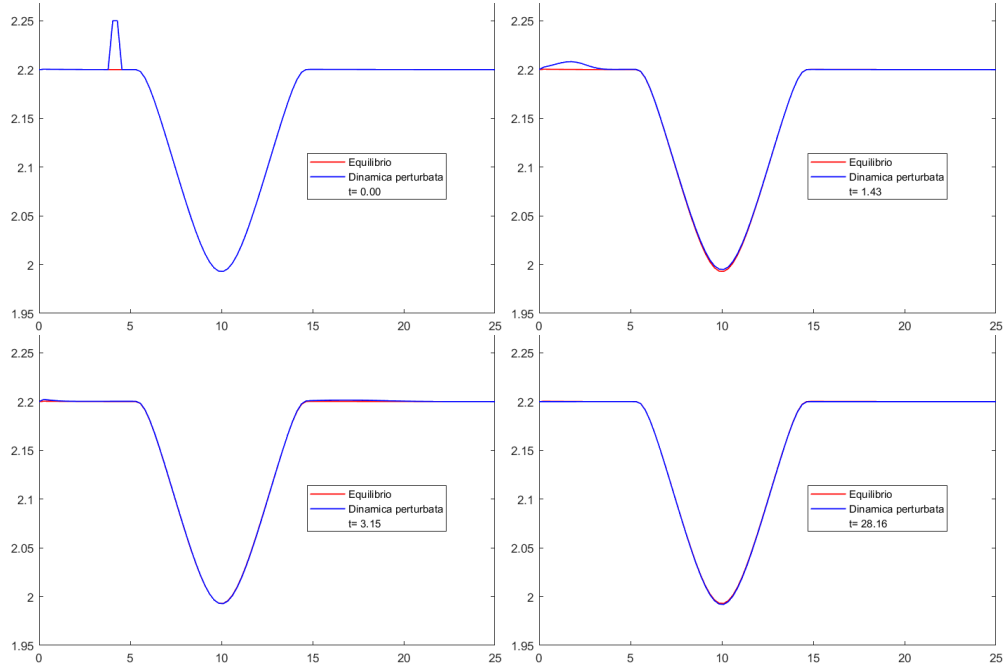


Figura 11: Dinamica subcritica perturbata.

Similmente a quanto visto con la configurazione LAR, anche qui le due onde nate dall'oscillazione introdotta viaggiano in senso opposto una all'altra. La cosa interessante da sottolineare è che, mentre nell'esperimento relativo alla Figura 10 le onde si limitano ad uscire dal dominio, in questo caso, proprio come abbiamo osservato per la dinamica subcritica non perturbata, l'onda che viaggia verso destra rimbalza sul bordo del dominio. Anche qui quindi sarà necessario un tempo maggiore per tornare all'equilibrio rispetto al caso supercritico. Concludiamo riportando le due simulazioni transcritiche.

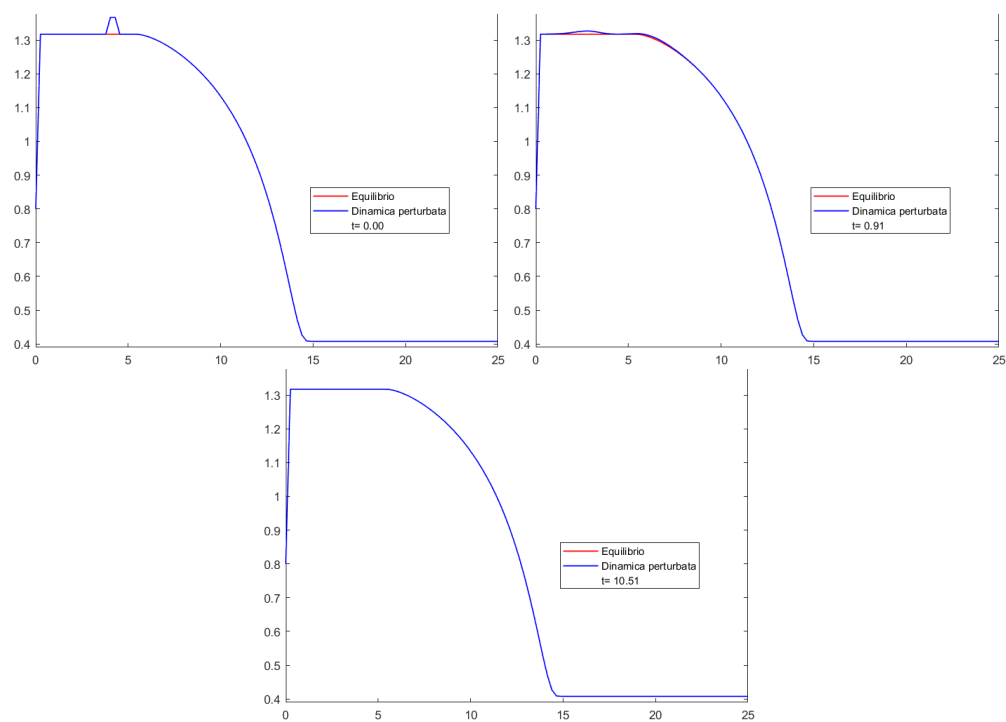


Figura 12: Dinamica transcritica perturbata.

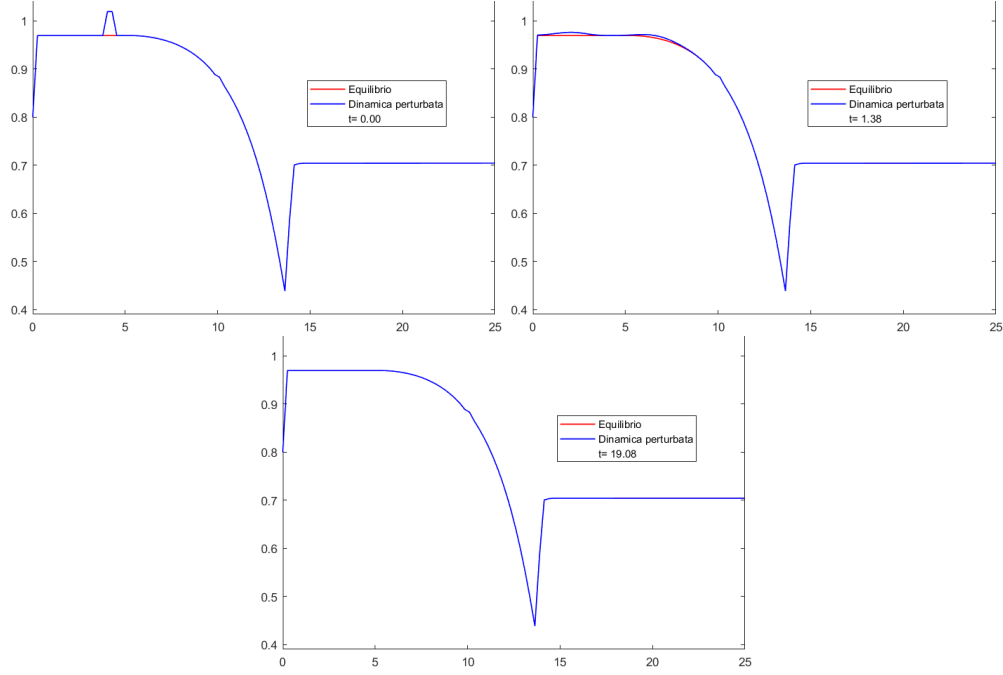


Figura 13: Dinamica transcritica con shock idraulico perturbata.

Osserviamo che nella simulazione relativa alla Figura 13, l'onda che viaggia verso destra risale lo shock per continuare a viaggiare.

### 3.7 Confronto tra metodi

Per le ultime simulazioni proviamo ad eseguire un confronto tra il metodo utilizzato fino ad ora e un altro metodo più comune. Nello specifico i prossimi test sono stati eseguiti grazie al metodo Lax-Friedrichs. La differenza sostanziale sta nel fatto che, in questo caso, non tenteremo di inglobare il termine sorgente all'interno del flusso globale. Ci limiteremo infatti ad approssimarne e a trattarlo esternamente al flusso. Nello specifico, supponendo sempre che non ci sia frizione con il fondale, al posto del termine sorgente utilizziamo l'approssimazione  $-gh_i \frac{(B_{i+1} - B_{i-1})}{2\Delta x}$ . Uno degli argomenti principali che abbiamo portato in favore del metodo ai volumi finiti, è la conservazione degli equilibri di tipo LAR. Sorge quindi spontaneo chiedersi cosa possa succedere cambiando metodo con i lake at rest. Tentiamo quindi di replicare la simulazione relativa alla Figura 1. Per i prossimi test abbiamo portato la CFL a 0.5. Il risultato è il seguente.



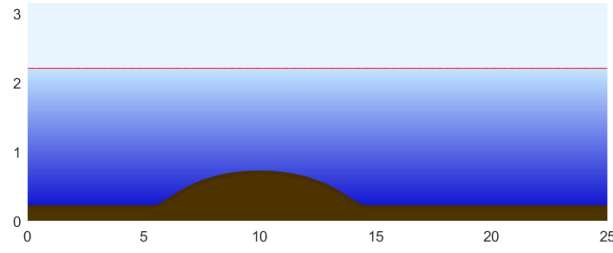


Figura 14: Caso LAR con il metodo di Lax-Friedrichs.

La linea rossa indica il profilo della superficie dell'acqua calcolato con il nostro metodo ai volumi finiti nello stesso istante di tempo. Qui il metodo ai volumi finiti riesce a mantenersi fermo durante tutta la durata dello studio. Basandosi solo sul profilo dell'acqua, sembra che il metodo di Lax-Friedrichs stia funzionando egregiamente. Vediamo quindi cosa si vede con un ingrandimento sulla superficie. Specifichiamo che nella legenda dei grafici  $h$  indica la funzione  $h + B$ . Questo non crea problemi di coerenza con le conclusioni che trarremo, in quanto  $B$  è una funzione regolare e indipendente dal tempo, pertanto ogni comportamento osservabile al variare del tempo è da attribuirsi esclusivamente ad  $h$ .

Nei prossimi grafici la legenda indica con il nome "volumi finiti" il metodo global flux.

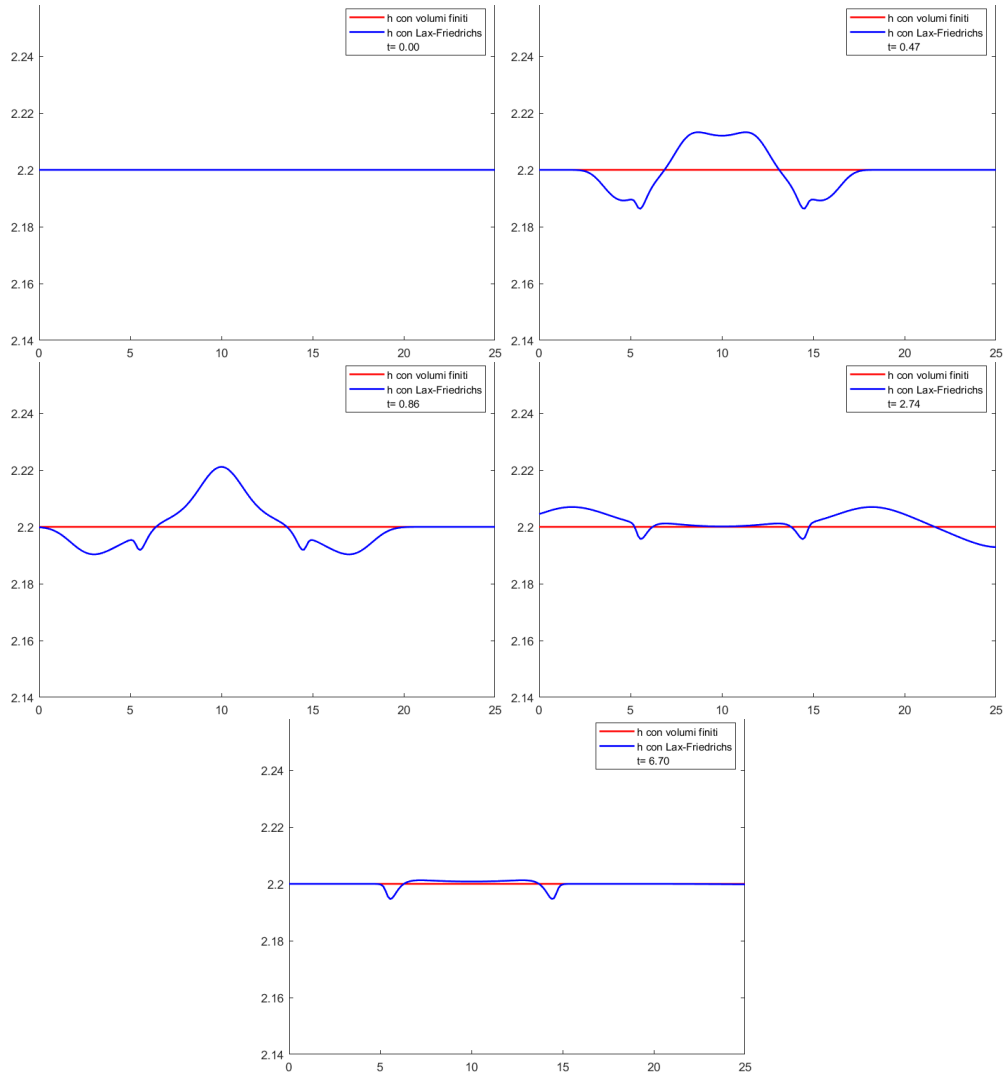


Figura 15: Studio della superficie nel caso LAR con il metodo di Lax-Friedrichs.

Già qui risultano più evidenti i limiti, in questo contesto, del metodo di Lax-Friedrichs. In particolare si nota subito come lo schema non stia conservando l'equilibrio: nello specifico la  $q$  non sta rimanendo costante.

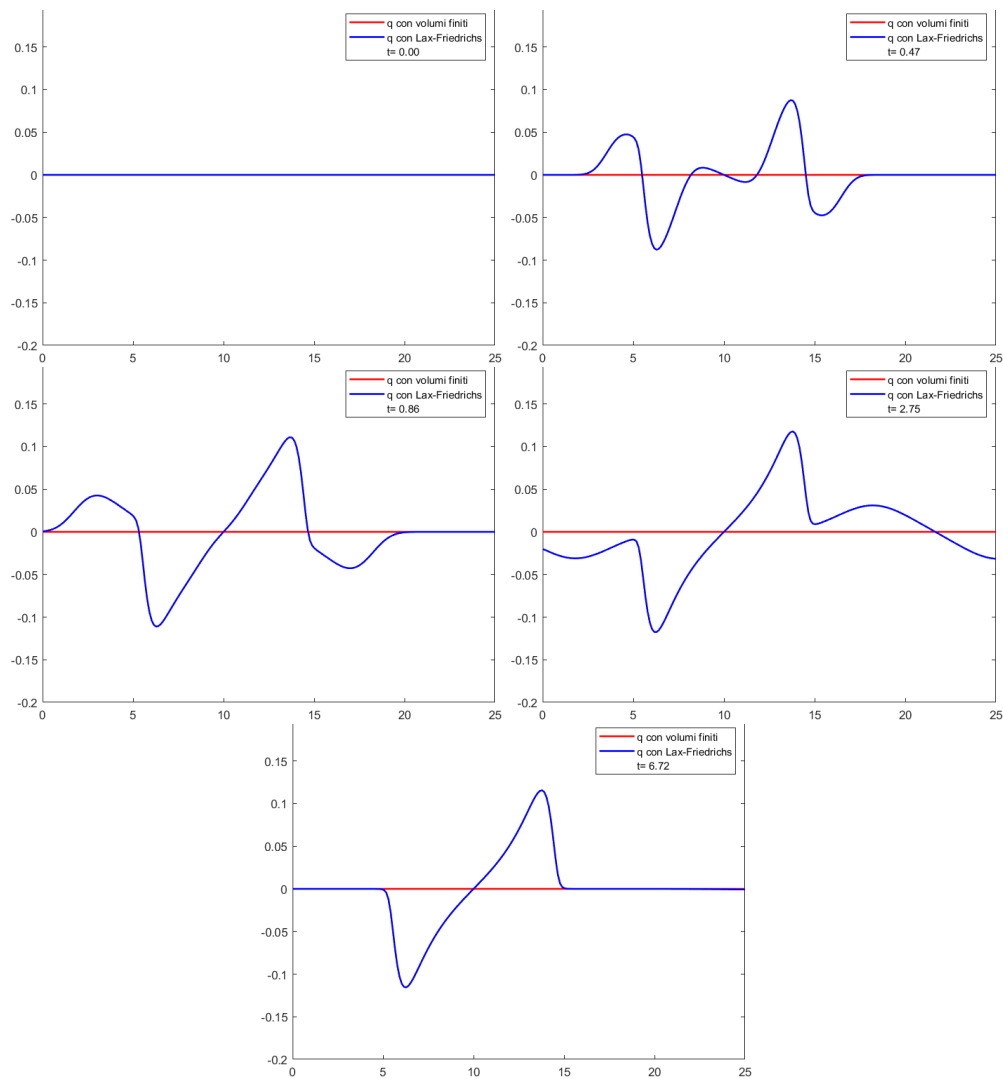


Figura 16: Studio di  $q$  nel caso LAR con il metodo di Lax-Friedrichs.

Studiando la  $q$  risulta molto più evidente la forza del metodo ai volumi finiti che stiamo studiando: Infatti con questo metodo la portata si mantiene esattamente costante durante tutta la simulazione. Vediamo invece cosa succede nel caso di perturbazioni. Come perturbazione utilizziamo la stessa della Figura 9.

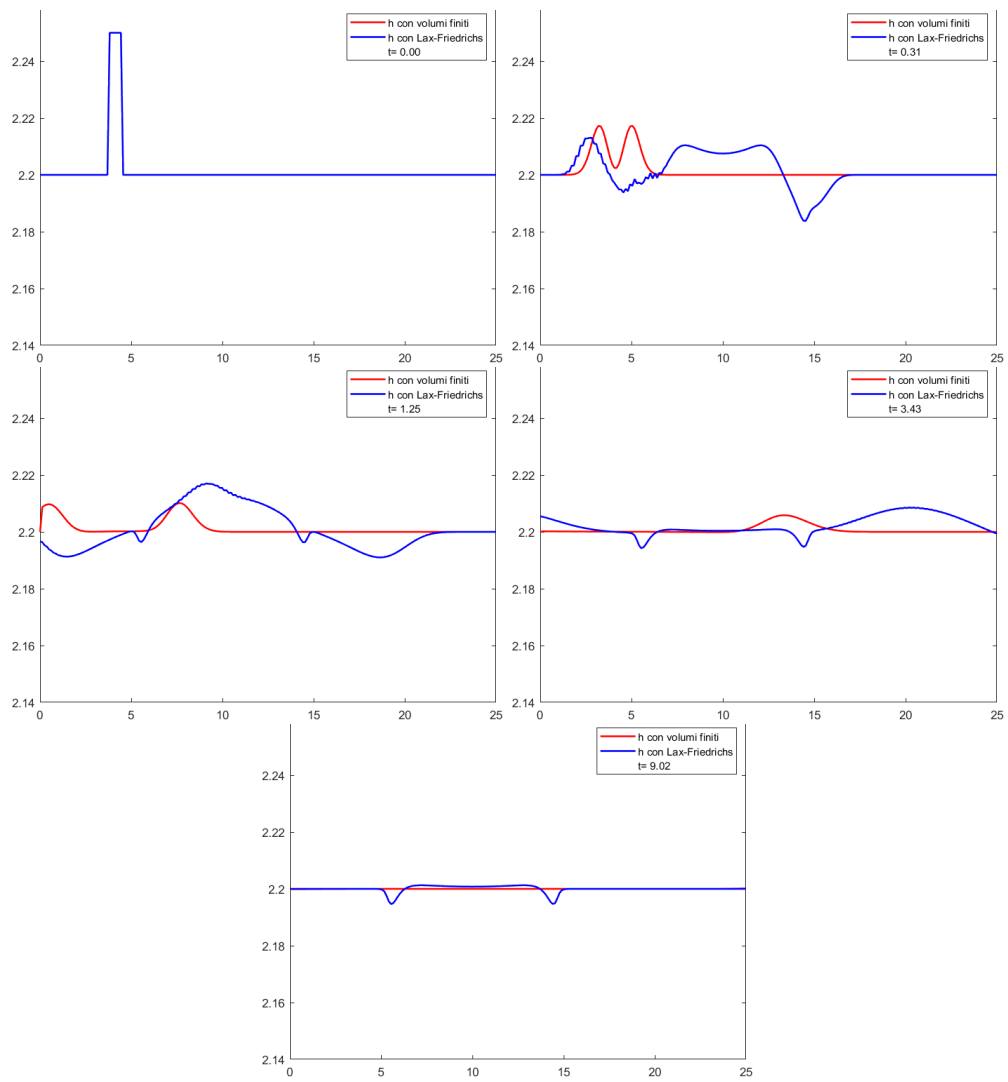


Figura 17: Studio della superficie nel caso LAR perturbato con il metodo di Lax-Friedrichs.

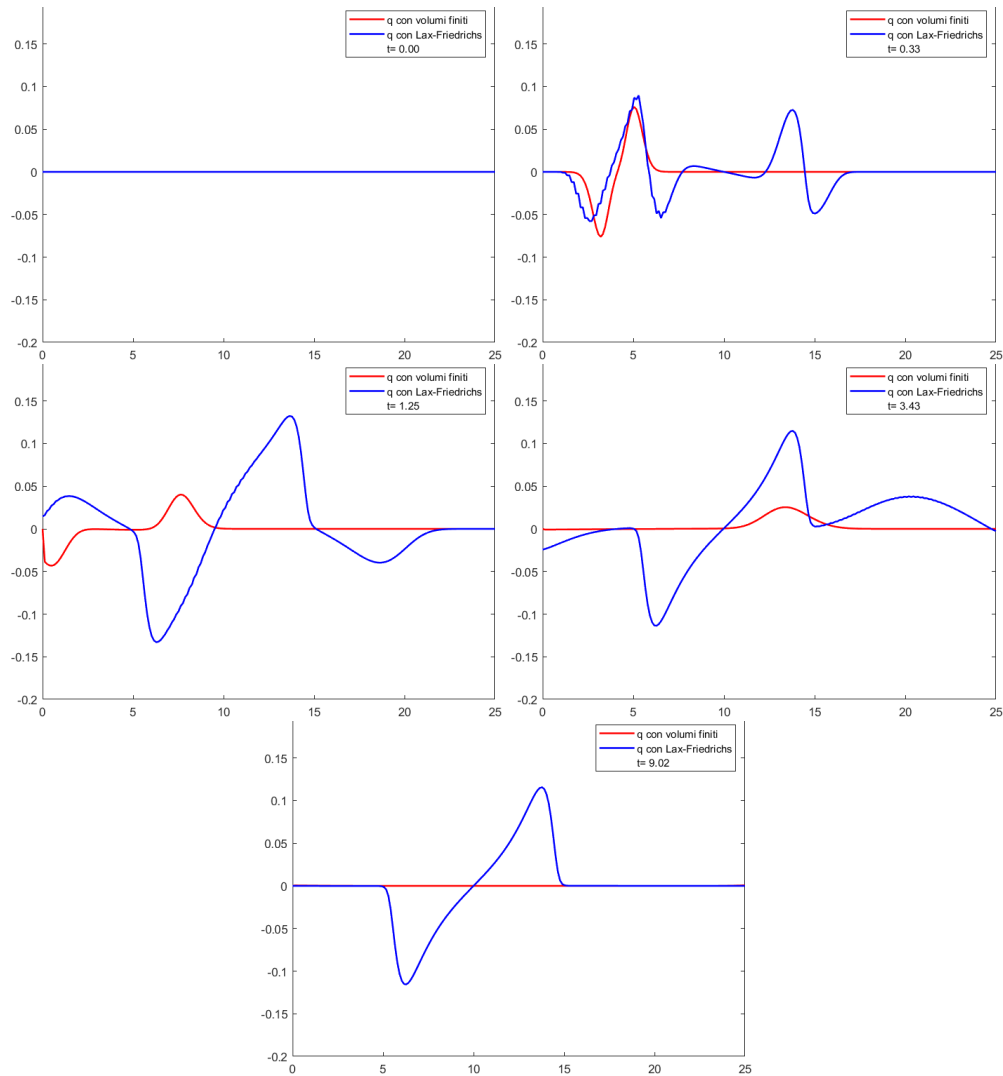


Figura 18: Studio di  $q$  nel caso LAR perturbato con il metodo di Lax-Friedrichs.

Nel caso di Lax-Friedrichs, la perturbazione genera diverse oscillazioni sia sulla superficie sia su  $q$ . Al contrario, il metodo ai volumi finiti con flusso globale riesce a rimanere stabile durante tutta la dinamica, dimostrandosi più adatto per lo studio dei sistemi di shallow water.

## Riferimenti bibliografici

- [1] de Saint-Venant A. - *Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Vol. 73, pp. 147-154, 1871
- [2] Cheng D., Chertock A., Herty M., Kurganov A., Wu T. - *A New Approach for Designing Moving-Water Equilibria Preserving Schemes for the Shallow Water Equations*, Journal of Scientific Computing, Vol. 80(1), pp. 538-554, 2019
- [3] Ciallella L., Torlo D., Ricchiuto M. - *Arbitrary High Order WENO Finite Volume Scheme with Flux Globalization for Moving Equilibria Preservation*, Journal of Scientific Computing, Vol. 96(53), 2023
- [4] Courant R., Isaacson E., Rees M. - *On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 5(3), pp. 243-255, 1952
- [5] Gascón L., Corberán J. M. - *Construction of Second-Order TVD Schemes for Nonhomogeneous Hyperbolic Conservation Laws*, Journal of Computational Physics, Vol. 172(1), pp. 261-297, 2001
- [6] Delestre O., Lucas C., Ksinant P.-A., Darboux F., Laguerre C., Vo T. N. T., James F., Cordier S. - *SWASHES: a compilation of Shallow Water Analytic Solutions for Hydraulic and Environmental Studies*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 72(3), pp.269-300, 2013
- [7] Angelini A. - *Well-balanced numerical scheme for Shallow Water equations with topography and entropy-based indicators for shock detection*, Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, Università di Roma "La Sapienza", Dr. Visconti G., a.a 2024-2025