

# 两轮自平衡机器人动力学建模及其平衡控制

阮晓钢, 任红格

北京工业大学电子信息与控制工程学院 北京 (100022)

E-mail: [renhongge@emails.bjut.edu.cn](mailto:renhongge@emails.bjut.edu.cn)

**摘要:** 针对高阶次、不稳定、多变量、非线性、强耦合的两轮自平衡移动机器人系统, 采用 Lagrange 方程推导出动力学模型, 对其进行稳定性和可控性判断, 并利用 LQR 和龙伯格极点配置的方法在此模型的基础上对两轮自平衡机器人的姿态和速度进行控制, 可获得较为稳定的动态平衡过程。给出了数学模型推导的具体步骤, 分别采用以上两种方法做了仿真研究和比较, 通过仿真实验, 结果表明这两种控制方法对机器人的稳定性控制都是有效的。其中龙伯格极点配置控制方法使系统的跟踪速度更快、稳定性更高, 具有较高的实际应用价值。

**关键词:** 两轮自平衡移动机器人; 动力学模型; LQR; 龙伯格极点配置; 动态平衡控制

**中图分类号:** TP391

## 1. 引言

两轮自平衡机器人系统是一个高阶次、不稳定、多变量、非线性、强耦合的系统, 它实际上是一个可以行走的一级倒立摆。两轮自平衡机器人越来越多的引起了国内外学者的广泛关注, 由于该系统为欠驱动系统, 运动学方程不能完整的描述系统的行为, 并且此时系统为不可控, 因此, 要解决两轮自平衡机器人系统的平衡问题就必须考虑动力学对它的影响。Ha<sup>[1]</sup>等人对系统的线性化动力学方程中较早的进行了位置跟踪控制器的研究。Grasser<sup>[2]</sup>等人在采用牛顿法推导出了系统的动力学方程, 并在计算点附近对模型进行线性化, 设计了控制器。Salerno<sup>[3]</sup>等人根据倒立摆特性, 以两轮机器人的旋转角度为变量, 得到了系统的动力学方程。通过应用微分几何方法, 对系统各种控制器参数的状态变量进行了分析。

对于两轮机器人来说, 在静止状态下不能稳定平衡, 若要其移动必须采用动态平衡<sup>[4]</sup>, 机器人的平衡是一个动态过程, 机器人在平衡点附近不停的变化进行调节以保持平衡。通常采用Lagrange方程的方法推导出系统的动力学方程, 从而对机器人的位置和方向进行控制, 该动力学方程可以排除非完整约束力的限制, 因为动力学分析的方法是从总体能量的角度考虑的, 在模型的建立中不用考虑系统内部之间的作用力, 通过选用不同的状态变量可以达到不同的控制目的。

本文采用Lagrange方法建立了两轮自平衡机器人的多输入多输出的非线性动力学模型, 并进行了线性化处理, 利用LQR、Place极点配置和龙伯格极点配置的方法在此模型的基础上对两轮自平衡机器人的姿态和速度进行控制, 且都获得了较为稳定的动态平衡过程, 验证

本课题得到国家自然科学基金(项目编号: 60774077), 国家“863 计划”(项目编号: 2007AA04Z226), 高等学校博士学科点专项科研基金(项目编号: 63002011200601), 北京市教委和北京市自然科学基金重点项目的资助。

了控制算法的有效性。

## 2. 两轮自平衡移动机器人动力学模型

### 2.1 两轮自平衡机器人的结构特点

两轮自平衡机器人是基于典型的移动倒立摆模型设计的，它仅有两个轮子，以双轮差速方式布置，每个轮子由直流电机通过减速器直接驱动，以电机轴心线为中心前后转动。如图1所示：

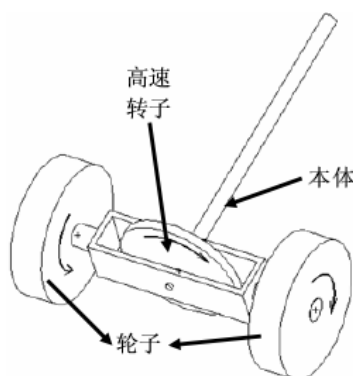


图1 机器人系统的结构图

根据运动特性可将机器人分为两个主要部分，第一部分为机械系统，包括两轮、减速机构、底盘、高速转子、本体、框架等，负责实现机器人的机构功能、承载硬件电路、搭建工作平台；第二部分为控制系统，包括：电机、驱动器、传感器、电池、电源转换电路以及DSP控制板等。其中传感器为系统提供反馈信号，构造闭环系统的状态空间方程，通过设计有效的控制算法来控制系统的平衡运动。

### 2.2 两轮自平衡机器人的动力学建模及其参数说明

采用Lagrange方程进行系统动力学建模<sup>[5]</sup>，其数学表达式如下：

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) = Q_k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1)$$

式中  $T$  为系统的总动能， $q_k$  为系统的广义坐标， $Q_k$  为广义力，其中：

$$T = \frac{1}{2} J_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{R^2 (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r)^2 L^2 \sin^2 \theta}{4 f^2} + (-\dot{\theta} L \cos \theta - \frac{1}{2} R (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r))^2 + \dot{\theta}^2 L^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2} m_l R^2 \dot{\theta}_l^2 + \frac{1}{2} m_r R^2 \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} J_l \dot{\theta}_l^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{8} (m_l + m_r) R^2 (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r)^2 + \frac{1}{2} \frac{J_\phi R^2 (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r)^2}{4 f^2} \quad (2)$$

系统的三个广义坐标  $q_k$  为  $\theta_l$ 、 $\theta_r$  和  $\theta$ ，广义坐标下的系统广义力  $Q_k$  为左轮转矩  $Q_{\theta_l}$ 、右轮转矩  $Q_{\theta_r}$  和车体作用在  $x$  轴的转矩  $Q_\theta$ ，其中：

$$\begin{aligned}
Q_{\theta_l} &= M_l = K_m(U_l - K_e \dot{\theta}_l) / R_a = 0.0328U_l - 0.0109\theta_l \\
Q_{\theta_r} &= M_r = K_m(U_r - K_e \dot{\theta}_r) / R_a = 0.0328U_r - 0.0109\theta_r \\
Q_{\theta} &= mgL \sin \theta - M_l - M_r = 9.8 \sin \theta - 0.0328(U_l + U_r) - 0.0109(\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)
\end{aligned} \quad (3)$$

把式(2)和(3)代入式(1)中, 可得:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial \theta_l} \right) = 0.0328U_l - 0.0109\theta_l \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial \theta_r} \right) = 0.0328U_r - 0.0109\theta_r \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 9.8 \sin \theta - 0.0328(U_l + U_r) - 0.0109(\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r) \end{cases} \quad (4)$$

根据以上系统的动力学方程选择状态变量为  $x = (\dot{\theta}_l, \dot{\theta}_r, \dot{\theta}, \theta)^T$ , 并进行线性化处理, 即对于

平衡点附近  $|\theta \leq 5^\circ|$  时, 令  $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta = 1$ , 整理上式便可得到系统的状态方程为:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_l \\ \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.0195 & -0.2293 & 0 & -65.2850 \\ -0.2293 & -0.0195 & 0 & -65.2850 \\ 0.3450 & 0.3450 & 0 & 244.8912 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_l \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0588 & 0.6900 \\ 0.6900 & -0.0588 \\ -1.0381 & -1.0381 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l \\ U_r \end{pmatrix} \\
y &= \begin{pmatrix} -0.075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.075 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_l \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l \\ U_r \end{pmatrix} \quad (5)
\end{aligned}$$

该机器人模型中的参数是根据欧鹏公司生产的两轮自平衡机器人的实际模型测量和计算得到的, 参数如表 1 所示:

表 1 机器人系统参数表

符号 <sup>o</sup>	名称 <sup>o</sup>	单位 <sup>o</sup>	数值 <sup>o</sup>
$m_l$ <sup>o</sup>	左车轮质量 <sup>o</sup>	公斤 <sup>o</sup>	0.8 <sup>o</sup>
$m_r$ <sup>o</sup>	右车轮质量 <sup>o</sup>	公斤 <sup>o</sup>	0.8 <sup>o</sup>
$M$ <sup>o</sup>	车体质量 <sup>o</sup>	公斤 <sup>o</sup>	10 <sup>o</sup>
$L$ <sup>o</sup>	车体质心到 X 轴的距离 <sup>o</sup>	米 <sup>o</sup>	0.1 <sup>o</sup>
$f$ <sup>o</sup>	两车轮轴距之一半 <sup>o</sup>	米 <sup>o</sup>	$\frac{0.450}{2} = 0.225$ <sup>o</sup>
$R$ <sup>o</sup>	车轮半径 <sup>o</sup>	米 <sup>o</sup>	0.075 <sup>o</sup>
$J_l$ <sup>o</sup>	左车轮转动惯量 <sup>o</sup>	公斤·米 <sup>2</sup> <sup>o</sup>	$J_l = J_r = J_w$ $= 1.25738e-005 + 0.8 * 0.5 * M * R^2$ $= 0.0018$
$J_r$ <sup>o</sup>	右车轮转动惯量 <sup>o</sup>	公斤·米 <sup>2</sup> <sup>o</sup>	
$J_{\theta}$ <sup>o</sup>	绕 X 轴的转动惯量 <sup>o</sup>	公斤·米 <sup>2</sup> <sup>o</sup>	
$J_{\theta_{z=0}}$ <sup>o</sup>	绕 Z 轴的转动惯量 <sup>o</sup>	公斤·米 <sup>2</sup> <sup>o</sup>	$I = M * L^2 = 0.1$ <sup>o</sup>
$R_a$ <sup>o</sup>	电机内阻 <sup>o</sup>	欧姆 <sup>o</sup>	1.11 <sup>o</sup>
$K_e$ <sup>o</sup>	反电动势系数 <sup>o</sup>	$v \cdot s / rad$ <sup>o</sup>	0.3323 <sup>o</sup>
$K_m$ <sup>o</sup>	力矩系数 <sup>o</sup>	$N \cdot m / A$ <sup>o</sup>	0.0364 <sup>o</sup>
$g$ <sup>o</sup>	重力加速度 <sup>o</sup>	$m / s^2$ <sup>o</sup>	9.8 <sup>o</sup>

### 3. 机器人系统的性能分析

#### 3.1 两轮自平衡机器人的能控能观性判别

能控性和能观性是控制器设计的前提, 能控性是分析输入对状态的控制能力, 是极点可实现任意配置的充分必要条件, 能观性是表征输出对状态的反映能力, 故在设计前进行系统的能控能观性分析<sup>[6]</sup>。

由能控性矩阵:

$$M = [B, AB, A^2B, A^3B]$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0588 & 0.6900 & -0.1594 & 0.0270 & 67.7657 & 67.8121 & -28.4431 & -28.4315 \\ 0.6900 & -0.0588 & 0.0270 & -0.1594 & 67.8121 & 67.7657 & -28.4315 & -28.4431 \\ -1.0381 & -1.0381 & 0.2178 & 0.2178 & -254.2772 & -254.2772 & 100.1035 & 100.1035 \\ 0 & 0 & -1.0381 & -1.0381 & 0.2178 & 0.2178 & -254.2772 & -254.2772 \end{bmatrix}$$

可知,  $\text{rank}(M) = 4$ , 系统可控。

同理, 由能观性矩阵  $N = [C, CA, CA^2, CA^3]^T$  可知,  $\text{rank}(N) = 4$ , 系统能观。

#### 3.2 两轮自平衡机器人的稳定性判别

稳定性是自动控制系统中最重要的特性, 因为一个不稳定的系统是无法完成预期的控制任务的。系统的稳定性, 是指系统在遭受外界扰动偏离原来的平衡状态, 而在扰动消失后, 系统自身仍有能力恢复到原来平衡状态的一种“顽症”。根据系统的特征值  $\lambda_1 = -15.7414$ ,  $\lambda_2 = 15.5575$ ,  $\lambda_3 = -0.0258$ ,  $\lambda_4 = 0.2489$ , 可由 *Lyapunov* 第一法进行稳定性判断, 由于系统特征值存在正实根, 所以在平衡点附近系统是一本质的不稳定系统, 且其响应特性不太好, 因此需采用各种控制器进行控制, 以达到预期控制目标。

### 4. 机器人系统的控制器设计

两轮自平衡移动机器人的运动控制, 最终表现为对其移动速度和转动角速度的控制。控制目标是, 通过电机控制两个独立轮, 使机器人按指定的移动速度和转动速度运动, 并且保持车体和摆杆平衡, 这实际上是一个信号跟踪问题<sup>[7,8]</sup>。

#### 4.1 LQR 控制器的设计

为了使两轮自平衡机器人的平衡性能好和控制能量少, 且使系统达到无差跟踪的效果, 本文采用线性二次型最优跟踪控制器<sup>[9]</sup>。

对上述所描述的机器人模型  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$ , 给定对于状态和控制的二次型性能

指标函数  $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$ , 其中,  $Q$  是正半定对称阵,  $R$  是正定对称阵, 这里

选取  $Q = [1000, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0; 0, 0, 100, 0; 0, 0, 0, 0]$ ,  $R = eye(2)$ 。所谓 LQR 最优控制问题, 就是寻找一控制量  $u^*(\bullet)$ , 在保证性能指标  $J$  最小的同时, 使系统接近于平衡状态, 并使输出跟踪输入。上述中,  $u^*(t) = -K^* x^*(t)$ ,  $K^* = R^{-1} B^T P$ , 且  $P$  是矩阵 *Riccati* 代数方程  $PA + A^T P + Q - PBR^{-1} B^T P = 0$  的解阵。由于解 *Riccati* 方程比较困难, 所以借助 *Matlab* 函数  $[K, P, E] = lqr(A, B, Q, R)$  来解, 可得到最优状态反馈矩阵  $K^*$ 。

## 4.2 龙伯格极点配置控制算法的实现

龙伯格规范性状态反馈阵相对于其它反馈矩阵求解方法唯一, 能够保证矩阵各元素的绝对值最小, 且使系统具有良好的动态响应, 所以本文现采用龙伯格极点配置算法来计算状态反馈矩阵  $K$ , 以实现机器人系统的稳定性控制<sup>[6]</sup>。

通过对系统的性能分析, 可知系统为完全能控的多输入多输出连续时间线性时不变系统  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ , 由  $\bar{A} = S^{-1}AS, \bar{B} = S^{-1}B, \bar{C} = CS$  可导出其龙伯格规范形为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 6.3254 & 244.8912 & -0.2098 & 0.0000 \\ 33.6201 & -0.0000 & 0.0000 & 0.2489 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -6.1601 & 0.0129 & 0.0044 & -0.0562 \\ 7.5877 & -0.0129 & -0.0518 & 0.0562 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0000 & -1.0381 & 0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix} x$$

其中, 龙伯格能控规范形的变换矩阵为  $S^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0525 & -0.0525 & -0.0319 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.9633 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.9633 & -0.0000 \\ 7.0976 & 5.7622 & 3.4281 & -0.2209 \end{bmatrix}$ 。

选取合适的系统的期望闭环极点  $P^*$ , 便可得到系统的龙伯格规范形状态反馈矩阵  $K$ , 其中,  $K = \bar{K} * S^{-1}$ 。

## 5. 仿真结果及分析

为了验证以上两种控制算法的有效性, 对系统做了相应的仿真实验, 并进行了比较。在 LQR 控制器的设计中, 巧妙的选取了  $Q$  和  $R$ , 得到最优状态反馈矩阵  $K^*$ , 使控制器具有

了良好的控制性能，其中， $K^* = \begin{bmatrix} -18.4701 & -0.2722 & -22.0152 & -269.3405 \\ 25.9062 & -0.5229 & -11.5688 & -200.8902 \end{bmatrix}$ 。当静止

时给机器人一个扰动，即  $x_0 = [0, 0, 0, 0.2]$ ，得到系统的仿真响应曲线如图 2 所示。

在龙伯格极点配置的算法中，设系统的期望闭环极点为  $P^* = [0.7 + 0.8i, -0.7 - 0.8i, -8, -56]$ ，可得系统的龙伯格规范状态反馈矩阵

$K = \bar{K} * S^{-1} = \begin{pmatrix} -400.0401 & -324.9272 & -202.1677 & -235.3463 \\ 399.2328 & 324.1200 & 192.8243 & -12.4248 \end{pmatrix}$ 。当静止时也给机器人一个

$x_0 = [0, 0, 0, 0.2]$  的扰动，即得到系统的仿真响应曲线如图 3 所示。

以上仿真结果表明，当机器人在静止时加入一个扰动，LQR 控制和龙伯格极点配置控

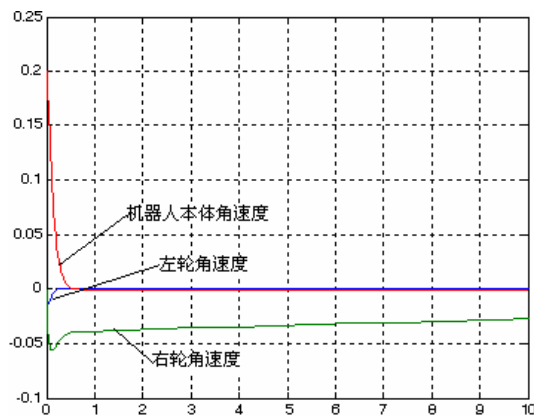


图 2 机器人系统在 LQR 控制中的响应曲线

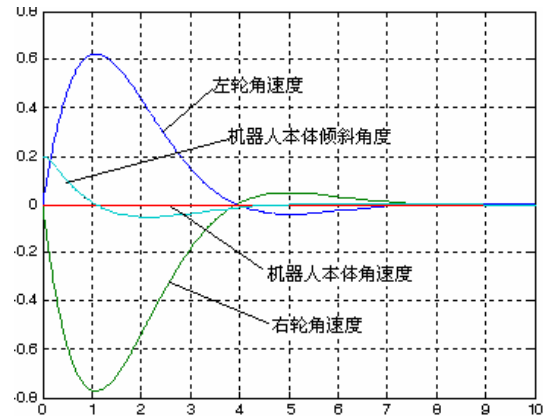


图 3 机器人系统在龙伯格极点配置控制中的响应曲线

制均能较好的控制系统的稳定性，最终使机器人处于稳定状态。两种控制方法相比较而言，LQR 控制虽然比龙伯格极点配置控制的超调量小，控制方法简单，但在系统跟踪速度上却慢得多，稳定性也较差，所以龙伯格极点配置控制在实际中具有更高的应用价值。

## 6. 结论

本文研究两轮自平衡移动机器人在平衡中的运动控制问题，利用 Lagrange 方法建立了系统的动力学模型，对其进行了性能分析，通过 LQR 控制方法和龙伯格极点配置控制算法，设计了控制器并做了相应的控制和仿真，结果表明，这两种方法都能使两轮自平衡机器人保持平衡，达到良好的控制效果。相比较而言，龙伯格极点配置控制算法在系统跟踪速度和稳定性上都优于 LQR 控制方法，具有更高的实用性。

### 参考文献：

- [1] Ha, Y-S. and Yuta, S., "Trajectory tracking control for navigation of the inverse pendulum type self-contained mobile robot" [J]. Robotics and Autonomous Systems, 17, pp. 65-80, 1996.
- [2] Grasser, F., D'Arrigo, A., Colombi, S., and Rufer, A., "Joe: A mobile, inverted pendulum" [J], IEEE Trans. Industrial Electronics, vol. 49, no. 1, pp. 107, no. 114, 2002.

- [3] Salerno, A. and Angeles, J., "On the Nonlinear Controllability of a Quasiholonomic Mobile Robot" [J]. Proc. IEEE I.C.R.A., Taiwan 2003.
- [4] 屠运武,徐俊艳等.自平衡控制系统的建模与仿真[J].系统仿真学报.2004,4,16(4): 839~841.
- [5] 孔祥宣,曹其新.自主式双轮动态移动机器人的控制系统研究[D]. 上海交通大学学位论文, 2007, (2):26-35.
- [6] 郑大钟.线性系统理论[M]. 清华大学出版社.2005,2, 135-223.
- [7] Grasser F. A mobile, inverted pendulum[J]. IEEE Transaction on Industrial Electronics, 2002, 49(1):107-114.
- [8] 杨兴明,丁学明等.两轮移动式倒立摆的运动控制[J].合肥工业大学学报.2005,11,28(11): 1485~1488.
- [9] 胡跃明.非线性控制系统理论与应用[M].国防工业出版社.2002.

## Two-wheeled self-balancing mobile robot Dynamic Model and Balancing Control

RUAN Xiao-gang, REN Hong-ge

Beijing University of Technology, School of Electronic & Control Engineering, Beijing, (100022)

### Abstract

Aiming to the two-wheeled self-balancing mobile robot system with high-rank unstable multi-variable strongly coupling complicated dynamic nonlinear property, We establish the dynamic model applied Lagrange program, and carrying on the stability and the controllability judgment to it, and based on this model using LQR and the dragon Bergh extreme disposition method carries on the control to the two-wheeled self-balancing mobile robot in the posture and the speed, we may obtain the stable dynamical balance process. Listing some material steps at establishing the mathematics model, and used above two methods to do the simulation research and the comparison separately. It indicated through the simulation experiment that these two control method to the robot stable control all are effective. Dragon Bergh extreme disposition control method causes the system the track speed to be quicker, the stability is higher, and it has the high practical application value.

**Key words:** *Two-wheeled self-balancing mobile robot; Dynamics model; LQR; Dragon Bergh Extreme disposition; Dynamical balance control*

详细作者简介: 阮晓钢(1958-), 男, 四川人, 汉, 教授、博士生导师, 研究方向为机器人、自动控制与人工智能等。任红格(1979-), 女, 河北石家庄人, 汉, 博士研究生, 研究方向为机器人及其智能控制等。