

文章编号: 1005-3026(2002) 04-0333-05

倒立摆系统的 Lagrange 方程 建模与模糊控制

宋君烈, 肖 军, 徐心和

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 针对多变量、非线性和强耦合性的倒立摆系统, 采用分析力学中的 Lagrange 方程来建立其动力学方程, 并提出一种基于模糊组合变量的控制方法。研究结果表明, 利用分析动力学方法来建立倒立摆系统的数学模型可以大大降低建模的复杂性, 仿真研究和实际物理系统的实验结果证明了所提出控制方法的有效性。

关 键 词: 自动控制; 倒立摆; Lagrange 方程; 模糊控制

中图分类号: TP 13 **文献标识码:** A

倒立摆系统是一个典型的多变量、非线性、强耦合和快速运动的自然不稳定系统。在控制过程中能反映控制中的许多关键问题, 如镇定问题^[1]、非线性问题^[2]、鲁棒性问题^[3]、随动问题^[4]以及跟踪问题等。各国专家学者在这一领域进行了长期不懈的研究和探索^[5~7]。对于倒立摆系统这样一个多变量、非线性和强耦合系统, 目前还没有一个确定的方法来实现其控制问题。为减少实验的盲目性, 通常先建立系统的数学模型, 然后进行仿真研究, 在此基础上进行实际系统的实验。在建立倒立摆系统的模型时, 一般采用牛顿运动定律, 结果要解算大量的微分方程组, 而且考虑到质点组受到的约束条件, 建模问题将更加复杂, 为此本文采用分析力学方法中的 Lagrange 方程^[8]推导倒立摆的系统模型。Lagrange 方程有如下特点。

①它是以广义坐标表达的任意完整系统的运动方程式, 方程式的数目和系统的自由度数是一致的。

②理想约束反力不出现在方程组中, 因此在建立运动方程式时, 只需分析已知的主动力, 而不必分析未知的约束反力。

③Lagrange 方程是以能量观点建立起来的运动方程式, 为了列出系统的运动方程式, 只需要从两个方面去分析, 一个是表征系统运动的动力学量—系统的动能, 另一个是表征主动力作用的动力学量—广义力。因此用 Lagrange 方程来求解系统的动力学方程可以大大

简化建模过程。本文首先利用 Lagrange 方程建立倒立摆系统的数学模型, 根据所研究对象的多变量、非线性特性, 提出一种基于模糊组合变量的控制方法, 并对所提出的方法进行了仿真研究和实际物理系统的实验, 实验结果证明了该方法的有效性。

1 倒立摆系统数学模型的推导

倒立摆系统的结构和工作原理如图 1 所示。

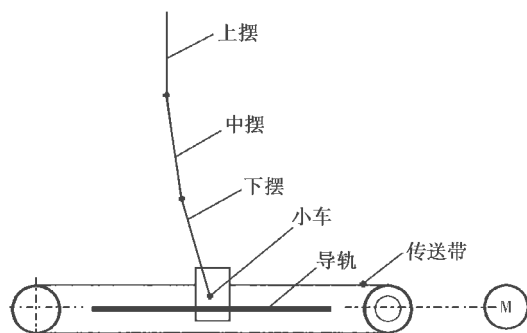


图 1 倒立摆装置示意图

Fig. 1 The inverted pendulum system

倒立摆装置由沿导轨运动的小车和通过转轴固定在小车上的摆体组成。在轨道一端装有用来测量小车位移的电位计。摆体与小车之间、摆体与摆体之间由轴承连接, 并在连接处有 3 个电位器分别用来测量下摆、中摆和上摆的角度。直流电机通过传送带控制小车的运动, 从而使倒立摆稳定

收稿日期: 2001-10-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69875003)。

作者简介: 宋君烈(1946—), 男, 辽宁大连人, 东北大学副教授; 徐心和(1940—), 男, 河北山海关人, 东北大学教授, 博士生导师。

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

竖立在垂直位置。

建立被控对象的数学模型一般采用牛顿力学的方法。例如文献[9]采用牛顿力学定律来推导三级倒立摆系统的数学模型。首先分析小车和各个摆体的受力情况,然后列出小车和各个摆体在 X 方向和 Y 方向的运动方程以及各摆体相对各个转轴处的转动力矩平衡式。再通过求解各摆体运动方程和各个转轴处的转动力矩平衡方程得到倒立摆系统的数学模型。不难看出,此法分析复杂而且要计算大量的微分方程组。

本文采用分析力学中的 Lagrange 方程^[10, 11]来建立倒立摆系统的数学模型。其基本假设为:①一、二、三级摆体视为刚体。②各部分的摩擦力(力矩)与相对速度(角速度)成正比。③施加在小车上的驱动力与加在功率放大器上的输入电压成正比,并且无延时地施加到小车上。④皮带轮与传送带之间无滑动,转送带无伸长现象。于是对于同时受到保守力和耗散力作用的倒立摆系统的 Lagrange 方程应为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}=F_{q_i} \quad (1)$$

其中, q_i 为广义坐标,在本文中为小车的位移 r 和各摆体的角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; F_{q_i} 为作用在系统上的广义力,当 $q_i=r$ 时, $F_{q_i}=G_0U$, U 为控制量, G_0 为增益常数,当 $q_i=\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 时, $F_{q_i}=0$; T 、 V 和 D 是系统的动能、势能和耗散能,分别为

$$T=\sum_{i=0}^n T_i, V=\sum_{i=0}^n V_i, D=\sum_{i=0}^n D_i \quad (2)$$

n 为倒立摆的级数, T_i 为小车和各级倒立摆的动能, V_i 为小车和各级倒立摆的势能, D_i 为小车和各级倒立摆的耗散能,分别为

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} M_0 \dot{r}^2; \\ T_1 &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_1 \times \\ &\quad \left\{ \left[\frac{d}{dt}(r + l_1 \sin \theta_1) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(l_1 \cos \theta_1) \right]^2 \right\} = \\ &\quad \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_1 \times \\ &\quad \left[\left(\dot{r} + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \right)^2 + \left(l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \right)^2 \right]; \\ T_2 &= \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} M_2 \times \\ &\quad \left\{ \left[\frac{d}{dt}(r + L_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{d}{dt}(L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \right]^2 \right\} = \\ &\quad \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} M_2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left[\left(\dot{r} + L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left[L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \right]^2 \right]; \\ T_3 &= \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} M_3 \times \\ &\quad \left[\frac{d}{dt}(r + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 + \right. \\ &\quad \left. l_3 \sin \theta_3) \right]^2 + \frac{1}{2} M_3 \left[\frac{d}{dt}(L_1 \cos \theta_1 + \right. \\ &\quad \left. L_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \right]^2 = \\ &\quad \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} M_3 \times \\ &\quad \left[\left(\dot{r} + L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \right)^2 + \frac{1}{2} M_3 \left(L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \right)^2 \right]. \\ V_0 &= 0, V_1 = M_1 g l_1 \cos \theta_1, \\ V_2 &= M_2 g (L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2), \\ V_3 &= M_3 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3); \\ D_0 &= \frac{1}{2} F_0 \dot{r}^2, D_1 = \frac{1}{2} F_1 \dot{\theta}_1^2, \\ D_2 &= \frac{1}{2} F_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2, \\ D_3 &= \frac{1}{2} F_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

式中, M_0, M_1, M_2, M_3 为小车、下摆、中摆、上摆的质量; l_1, l_2, l_3 为下摆、中摆、上摆的质心到对应的转轴的距离; J_1, J_2, J_3 为下摆、中摆、上摆的转动惯量; L_1, L_2, L_3 为下摆、中摆、上摆的摆长; F_0, F_1, F_2, F_3 为小车与导轨之间,下摆、中摆、上摆与对应的转轴之间的摩擦系数; g 为重力加速度。

将式(2)、(3)代入式(1),可以得到一级倒立摆系统的数学模型为

$$\begin{bmatrix} M_0 + M_1 & M_1 l_1 \cos \theta_1 \\ M_1 l_1 \cos \theta_1 & J_1 + M_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 & -M_1 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 & F_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 U \\ M_1 g l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

二级倒立摆系统的数学模型为

$$M(\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + N(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = G(U, \theta_1, \theta_2) \quad (5)$$

其中,

$$M(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} M_0 + M_1 + M_2 & (M_1 l_1 + M_2 L_1) \cos \theta_1 & M_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (M_1 l_1 + M_2 L_1) \cos \theta_1 & (J_1 + M_1 l_1^2 + M_2 L_1^2) & M_2 L_2 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ M_2 l_2 \cos \theta_2 & M_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & (J_2 + M_2 l_2^2) \end{bmatrix};$$
$$N(\theta_1, \theta_2, \theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} F_0 & -(M_1 l_1 + M_2 L_1) \sin \theta_1 \theta_1 & -M_2 l_2 \sin \theta_2 \theta_2 \\ 0 & F_1 + F_2 & -M_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \theta_2 - F_2 \\ 0 & M_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \theta_1 - F_2 & F_2 \end{bmatrix};$$
$$G(U, \theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} G_0 U \\ (M_1 l_1 + M_2 L_1) g \sin \theta_1 \\ M_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}.$$

三级倒立摆系统的数学模型为

$$M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + N(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = G_0(U, \theta_1, \theta_2, \theta_3).$$

(6)

其中,

$$M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \cos \theta_1 & K_2 \cos \theta_2 & M_3 l_3 \cos \theta_3 \\ K_1 \cos \theta_1 & K_3 & K_2 L_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) & M_2 L_1 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) \\ K_2 \cos \theta_2 & K_2 L_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) & K_4 & M_3 L_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ M_3 l_3 \cos \theta_3 & M_3 L_1 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) & M_3 L_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) & J_3 + M_3 l_3^2 \end{bmatrix};$$
$$N(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} F_0 & -K_1 \sin \theta_1 \theta_1 & -K_2 \sin \theta_2 \theta_2 & -M_3 l_3 \sin \theta_3 \theta_3 \\ 0 & F_1 + F_2 & -K_2 L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \theta_2 - F_2 & -M_3 L_1 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) \theta_3 \\ 0 & K_2 L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \theta_1 - F_2 & F_2 + F_3 & -M_3 L_2 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \theta_3 - F_3 \\ 0 & M_3 L_1 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) \theta_1 & M_3 L_2 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \theta_2 - F_3 & F_3 \end{bmatrix};$$
$$G(U, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = [G_0 U \quad K_1 g \sin \theta_1 \quad K_2 g \sin \theta_2 \quad M_3 g l_3 \sin \theta_3]^T,$$
$$K_0 = M_0 + M_1 + M_2 + M_3, K_1 = M_1 l_1 + M_2 L_1 + M_3 L_1, K_2 = M_2 l_2 + M_3 L_2,$$
$$K_3 = J_1 + M_1 l_1^2 + M_2 L_1^2 + M_3 L_1^2, K_4 = J_2 + M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2.$$

2 基于模糊组合变量的控制方法

从得到的数学模型可以看出, 倒立摆系统是一个多变量、非线性的控制对象。必须采取有效的方法才能实现其控制目标。近年来, 模糊控制在非线性系统中取得了丰硕的成果^[12, 13], 但对于多变量模糊控制系统, 由于可能的控制规则集的数目是输入变量数的指数, 因此, 如何有效地减少多变量模糊控制系统中的控制规则的数目, 以利于理论上的设计和工程应用上的实现有着非常重要的意义。文献[3]提出一种基于经验的解耦方法来设计模糊控制器, 通过构造中间变量, 形成分级结构来降低模糊控制器的维数, 并给出了仿真结果。但在其仿真结果中上摆摆幅超过了下摆摆幅, 这应该是一种发散现象, 在实际中是不可能实现的。本文提出一种基于模糊组合变量的控制方法对各级倒立摆系统进行研究。

首先根据系统的特点, 由系统的输入变量利用模糊逻辑系统构造组合变量, 即根据下摆的角度 θ_1 和角速度 $\dot{\theta}_1$ 按照表 1 所示的语言规则定义下摆的模糊误差 E_{θ_1} 。

表 1 定义下摆误差 E_{θ_1} 的语言规则

Table 1 Fuzzy rules of the bottom pendulum error

摆体角度 θ_1	摆体角速度 $\dot{\theta}_1$						
	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NM	NM	NS	ZE
NM	NB	NB	NM	NM	NS	ZE	PS
NS	NB	NM	NM	NS	ZE	PS	PM
ZE	NM	NM	NS	ZE	PS	PM	PM
PS	NM	NS	ZE	PS	PM	PM	PB
PM	NS	ZE	PS	PM	PM	PB	PB
PB	ZE	PS	PM	PM	PB	PB	PB

类似地可以定义中摆、上摆模糊误差 E_{θ_2} 、 E_{θ_3} 和小车的模糊误差 E_r , 考虑到倒立摆系统的控制目标是“摆体不倒, 小车停住”, 运行的过程以稳定摆体为主, 然后再考虑小车的水平位移, 并且在摆体的控制中, 稳定上摆是第一位的, 其次是稳定中摆和下摆。因此采用加权控制方法, 综合考虑摆体和小车的模糊误差信息, 赋予模糊组合变量上摆误差、中摆误差、下摆误差和小车误差以不同的权重, 并综合各方面的作用从而得到最后的控制 u :

$$u = K_1 E_r + K_2 E_{\theta_1} + K_3 E_{\theta_2} + K_4 E_{\theta_3}.$$

式中, $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$ 。

将所提出的方法应用到一级、二级、三级倒立摆系统的仿真研究中,仿真实验表明所提出的方法可以稳定各级倒立摆系统。三级倒立摆中摆和上摆的角度曲线仿真结果如图 2 和图 3 所示。

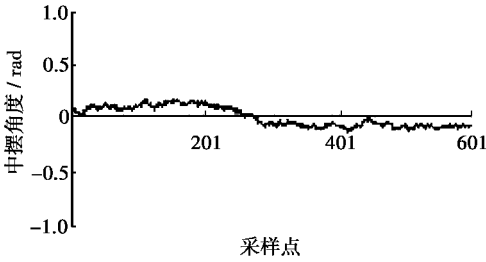


图 2 中摆角度曲线
Fig. 2 The middle pendulum angular curve

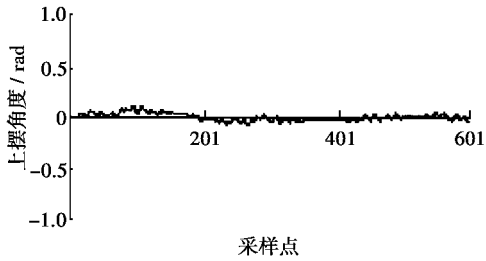


图 3 上摆角度曲线
Fig. 3 The top pendulum angular curve

在此基础上,将该控制方法应用到一级和二级倒立摆的实际系统中,实验结果表明该方法不但可以将倒立摆稳定在轨道的中间,而且可以实现倒立摆系统的摆姿控制和在水平轨道及倾斜轨道上的自由行走。图 4 和图 5 所示为二级倒立摆系统在水平轨道和倾斜轨道上的行走曲线。

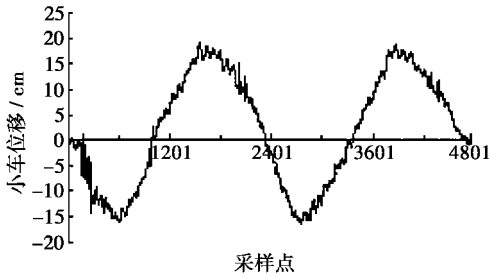


图 4 小车在水平轨道上的行走
Fig. 4 The cart's moving on the horizon rail

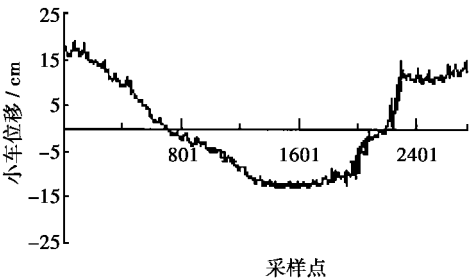


图 5 小车在倾斜轨道上的行走
Fig. 5 The cart's moving on the inclined rail

3 结 束 语

本文利用 Lagrange 方程完成了倒立摆系统的建模推导,从推导过程可以看出,用 Lagrange 方程推导动力学方程,避开了牛顿力学定律中一些比较繁琐的内容,简化了推导过程。针对倒立摆系统多变量、非线性的特点,提出了一种基于模糊组合变量的控制方法,并进行了仿真研究,实验结果证明了该方法的有效性。

参考文献:

- [1] 何希勤,张化光。多变量模糊系统稳定性的一个充分条件 [J]。东北大学学报(自然科学版),1997,18(3):293-297。
(He X Q, Zhang H G. A abundant condition of multivariable fuzzy system stability [J]. *Journal of Northeastern University(Natural Science)*, 1997, 18(3): 293-297.)
- [2] Xiao J, Zhang S, Xu X H. A weighted fuzzy control of double inverted pendulum [A]. *Proceeding of the Third Asian Control Conferenæ* [C]. Shanghai, 2000. 1604-1607.
- [3] Furuta K, Kajiura H, Kosuge K. Digital control of a double inverted pendulum on an inclined rail [J]. *Int J Control*, 1980, 32(5): 907-924.
- [4] Meier H, Zu Farwig, Unbehauen H. Discrete computer control of a triple-inverted pendulum [J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 1990, 11(2): 157-171.
- [5] Zhang H G, Chen L J. A fuzzy decision-making technique with two kind of uncertainty [J]. *Science in China*, 1991, 34(12): 1508-1518.
- [6] Yu C W, Lu Y Z. Decoupling in fuzzy system; a cascade compensation approach [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 29(2): 177-185.
- [7] Gupta M M. Multivariable structure of fuzzy control systems [J]. *IEEE Trans on SMC*, 1986, 16(16): 638-656.
- [8] 陈文良,洪嘉振,周鉴如,等。分析动力学 [M]。北京:清华大学出版社,1994. 158-276。
(Chen W L, Hong J Z, Zhou J R, et al. *Analysis mechanics* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994. 158-276.)
- [9] 何彦彦,沈程智。三级倒立摆系统的可控性与可观性分析 [J]。北京航空航天大学学报,1996,22(5):545-549。
(He Y Y, Shen C Z. Controllability and observability analysis of triple inverted pendulum system [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 1996, 22(5): 545-549.)
- [10] Hamberg J. General matching conditions in the theory of controlled Lagrangians [A]. *Proc 38th IEEE Conf Decision Control* [C]. Phoenix AI, 1999. 2520-2523.
- [11] Bloch A M, Leonard N E, Marsden J E. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2253-2260.
- [12] Zhang H M, Ma X W, Xu W, et al. Design fuzzy controllers for complex systems with an application to 3-stage inverted pendulum [J]. *Info Sci*, 1993, 72(2): 271-284.
- [13] Auckly D, Kapitanski L, White W. Control of nonlinear under-actuated systems [J]. *Comm Pure Appl Mathe*, 2000, 53: 3554-3567.

Modeling and Control Method of the Inverted Pendulum System

SONG Jun-lie, XIAO Jun, XU Xin-he
(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: SONG Jun-lie, associate professor, E-mail: songjunlie@263.com)

Abstract The Lagrange method was used to derive the inverted pendulum equations, and the control method based on fuzzy composed variables was proposed for the nonlinear strongly-coupling inverted-pendulum system of multivariables. On the foundation of the models of the inverted pendulum, experiments of simulation and real system were made. The experiment results validated the proposed method.

Key words automatic control; inverted pendulum; Lagrange equation; fuzzy control
(Received October 23, 2001)

待发表文章
摘要 预 报

T-S 模糊广义系统的 H_{∞} 控制

刘 晓 东，张 庆 灵

研究了 T-S 模糊广义系统基于状态反馈的 H_{∞} 控制问题。首先给出了使得 T-S 模糊广义系统二次可稳的一个新的充分条件,最后给出了相应的 H_{∞} 控制存在的一个新的充分条件,其条件用一个负定矩阵的形式给出。给出的条件不但简洁而且包含了系统之间的相互作用。

文本内容主题的识别方法

朱 靖 波，姚 天 顺

提出了一种有效的内容主题识别方法,可以描述为:主题识别= 主题特征识别+ 主题特征集聚。详细介绍了主题特征识别技术和主题特征集聚技术,最后给出了实验结果和评价。