高数竞赛阶段练习 4 学号____________ 姓名____________

一、填空题

1. 设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=$______；

2. 设函数 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数，且 $F_u'\bullet F_v'>0$，函数 $y=f(x)$ 由

$F\left(\ln x-\ln y,\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=0$ 确定，则 $f'(x)=$______；

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(2,-2)$ 处可微，满足 $f(\sin(xy)+2\cos x,xy-2\cos y)=1+x^2+y^2$ $+0\left(x^2+y^2\right)$，$0\left(x^2+y^2\right)$ 表示比 x^2+y^2 为高阶无穷小（当 $(x,y)\to(0,0)$ 时），则该曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(2,-2,f(2,-2))$ 处的切平面方程 _______ ；

4. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \qquad x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续（填连续或不连续）____________ （填可微或不可微）；

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定，其中 f 可导且 $2z\neq f'\left(\frac{z}{y}\right)$，则

$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=$_________；

6. 函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值情况：_________ ；

7. 点 $(2,1,-3)$ 到直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{2}$ 的距离为________ ；

8. 点 $A(1,2-1)$，$B(5,-2,3)$ 在平面 $\prod:2x-y-2z=3$ 的两侧，过点 A,B 作球面 $\sum$ 使其在平面 $\prod$ 上截得的圆 Γ 最小, 则球面 $\sum$ 的球心坐标为_______ ；

9. 函数 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，算子 A 定义为 $A(u)=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$，则

1） $A(u-A(u))=$ _________ ；2)利用结论 1）以 $\xi=\frac{y}{x},\eta=x-y$ 为新的自变量改变方

程 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的形式为_______ ；

10. 函数 $f\left(x,y\right)=e^{-x}\left(ax+b-y^2\right)$ 中常数 a,b 满足条件_____时， $f\left(-1,0\right)$ 为其极大值.

11. 点 $\left(-1,6,1\right)$ 关于直线 $\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-2}$ 的对称点的坐标是______ ；

12. 已知函数 $F(u,v,w)$ 可微， $F_u'(0,0,0)=1$ ， $F_v'(0,0,0)=2$ ， $F_w'(0,0,0)=3$ ， 函数 $z=f(x,y)$ 由 $F(2x-y+3z,4x^2-y^2+z^2,xyz)=0$ 确定，满足 $f(1,2)=0$ ，则 $f_x'(1,2)=$__；

13. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+xy+y^2}{x^4+y^4}\sin\left(x^4+y^4\right)=$__________；

14. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\sin\left(x^2-xy+y^2\right)=$__________；

15. 设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$ ，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=\underline{4e}$.

二、设 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上可微，线段 PQ 位于 D 内，点 P,Q 的坐标为 $P(a,b)$ ，$Q(x,y)$ ，求证：在线段 PQ 上存在点 $M(\xi,\eta)$ ，使得

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x'(\xi,\eta)(x-a)+f_y'(\xi,\eta)(y-b).$$

三、已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

四、证明当 $x\ge 0$， $y\ge 0$ 时， $e^{x+y-2}\ge \frac{1}{12}\left(x^2+3y^2\right)$.

五、已知曲面 $x^2+2y^2+4z^2=8$ 与平面 $x+2y+2z=0$ 的交线 Γ 是椭圆，Γ 在 xOy 平面上的投影 Γ_1 也是椭圆.（1）求椭圆 Γ_1 的四个顶点 A_1,A_2,A_3,A_4 的坐标（A_i 位于第 i 象限，$i=1,2,3,4$）；（2）判断椭圆 Γ 的四个顶点在 xOy 平面上的投影是否是 A_1,A_2,A_3,A_4，写出理由.

六、已知二次锥面 $4x^2+\lambda y^2-3z^2=0$ 与平面 $x-y+z=0$ 的交线是一条直线 L.（1）求常数 λ 的值，并求直线 L 的标准方程；（2）平面 $\prod$ 通过直线 L，且与球面 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-2z+10=0$ 相切，求平面 $\prod$ 方程.

七、已知曲线$\Gamma: x^2+3y^2+2xy=4$是xOy平面上的椭圆.（1）求椭圆Γ的四个顶点的坐标，并求Γ所围平面图形的面积；（2）求椭圆Γ上纵坐标最大与最小的点的坐标.

八、求函数$f(x,y)=3(x-2y)^2+x^3-8y^3$的极值，并证明$f(0,0)=0$不是$f(x,y)$的极值.

九、已知直线$L_1:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{2}$，$L_2:\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.1）证明$L_1$与$L_2$是异面直线；2）若直线$L$与$L_1$、$L_2$皆垂直相交，交点分别为$P$、$Q$，试求点$P$与$Q$的坐标.3）求异面直线$L_1$与$L_2$的距离.

十、已知直线$L_1:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{2}$，$L_2:\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.1）若直线$L$与$L_1$、$L_2$皆垂直相交，交点分别为$P$、$Q$，试求点$P$与$Q$的坐标；2）求异面直线$L_1$与$L_2$的距离.