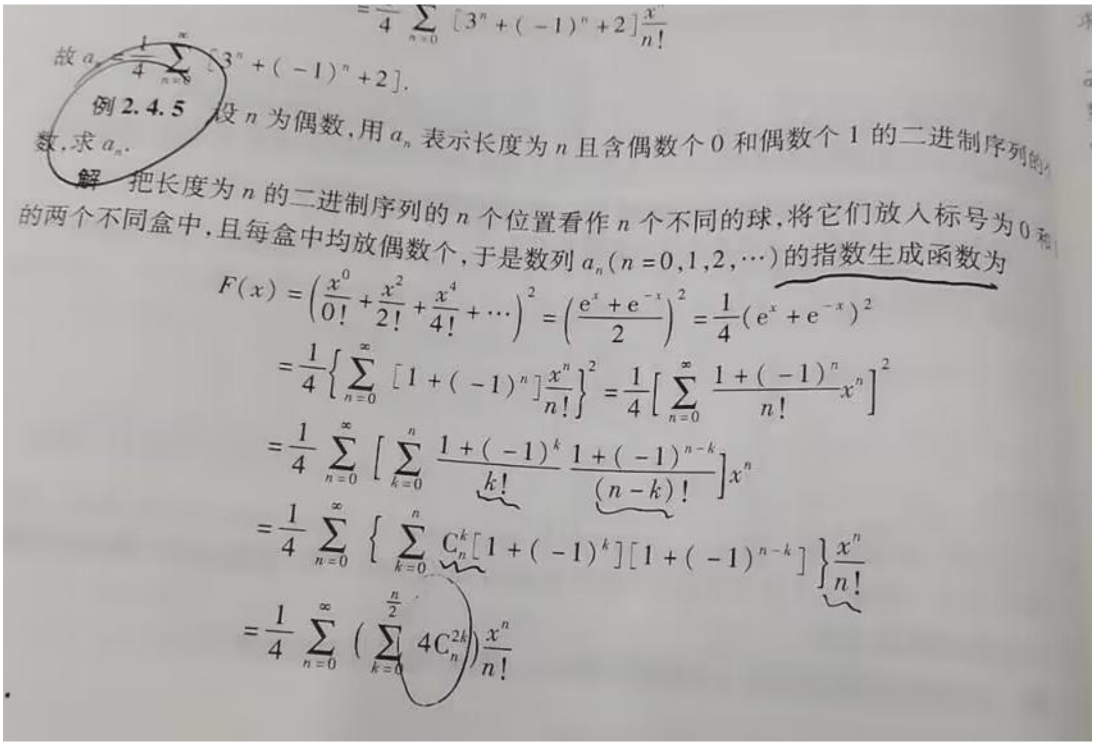
第一次测试



$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}[3^n+(-1)^n+2]\frac{x^n}{n!}$$

故 $a_n = \frac{1}{4}[3^n+(-1)^n+2]$.

例 2.4.5 设 n 为偶数，用 a_n 表示长度为 n 且含偶数个 0 和偶数个 1 的二进制序列的个数. 求 a_n.

解 把长度为 n 的二进制序列的 n 个位置看作 n 个不同的球，将它们放入标号为 0 和 1 的两个不同盒中，且每盒中均放偶数个，于是数列 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 的指数生成函数为

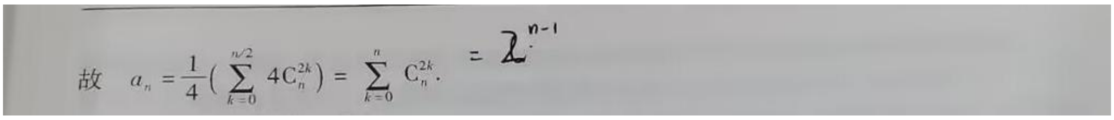
$$F(x)=\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n]\frac{x^n}{n!}\right\}^2=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1+(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1+(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right]x^n$$

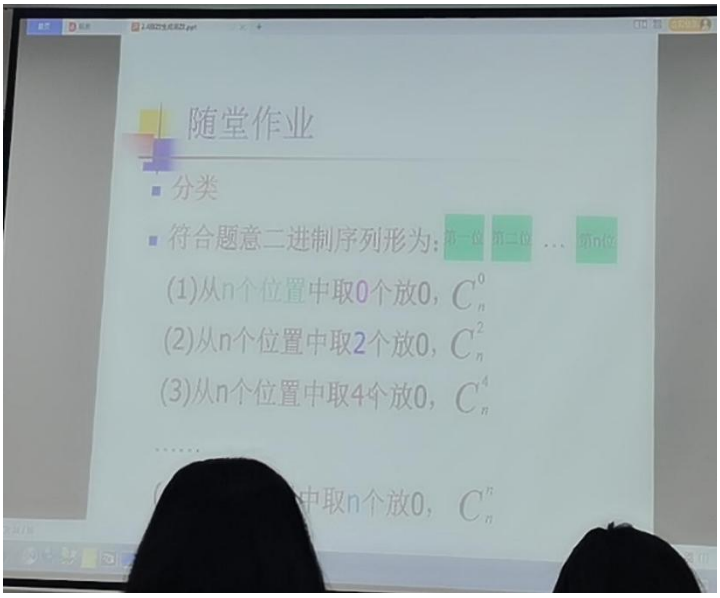
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}C_n^k[1+(-1)^k][1+(-1)^{n-k}]\right\}\frac{x^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}4C_n^{2k}\right)\frac{x^n}{n!}$$



故 $a_n=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n/2}4C_n^{2k}\right)=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}$. $=2^{n-1}$

方法一如上　方法二如下^-^



方法三:第一个选 1/0　　2
第二个选 1/0　　2
……
第 n 个必然固定　　要么 1　要么
0故有 2^n-1

第二次测试

合肥工業大学

随堂作业.

设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则集合 A 上有几个等价关系？

解：<解题思路——问题转化>

由于集合 A 的划分与 A 的等价关系一一对应，则此题题意为把5个不同球放入 k 个相同盒中且各盒非空的方案个数。

<法一> 利用类Pascal表求解（最快方法）

求解不同划分个数可用第二类Stirling数 $S(p,k)$

即求 $\sum_{k=1}^{5} S(5,k)$

构造第二类Stirling数类Pascal三角形如下：$S_2(p,k)=kS_2(p-1,k)+S_2(p-1,k-1)$

p \ k	0	1	2	3	4	5 …
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	15	25	10	1
⋮						

故 $\sum_{k=1}^{5} S(5,k)=S(5,1)+S(5,2)+\cdots+S(5,5)$
$=1+15+25+10+1=52$

∴ 集合 A 上有52个等价关系

<法二> 列差分表

数列 $h_n=n^5\ (n=0,1,2,\ldots)$ 的差分表

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 1 & & 32 & & 243 & & 1024 & & 3125 \\
 & 1 & & 31 & & 211 & & 781 & & 2101 & \\
 & & 30 & & 180 & & 570 & & 1320 & & \\
 & & & 150 & & 390 & & 750 & & & \\
 & & & & 240 & & 360 & & & & \\
 & & & & & 120 & & & & &
\end{array}
$$

$S_2(p,k)=\dfrac{\Delta^k h_0}{k!}\ (k=0,1,2,\ldots,p)$

$S_2(5,1)=1$，$S_2(5,2)=15$

$S_2(5,3)=25$，$S_2(5,4)=10$

$S_2(5,5)=1$

故 $\sum_{i=1}^{5} S_2(5,i)=1+15+25+10+1=52$

∴ 集合 A 上有52个等价关系（其余方法见背面）

〈法三〉直接用显式公式（较麻烦）

对于 p个元素集合A的k划分，其不同方案数为 $S_2(p,k)=\frac{1}{k!}\sum_{t=1}^{k}(-1)^{k-t}C_k^t t^p$

故 $S_2(p,1)=1$. $S_2(p,2)=15$，$S_3(p,3)=25$. $S_4(p,4)=10$，$S_2(p,5)=1$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}S(5,k)=1+15+25+10+1=52$

∴ 集合A上有52个等价关系

〈法四〉直接划分列举

5个 …… 1个

4个 + 1个 …… $C_5^4=5$个

3个 + 2个 …… $C_5^2C_3^3=10$个

3个 + 1个 + 1个 …… $C_5^3=10$个

2个 + 2个 + 1个 …… $\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}=15$个

2个 + 1个 + 1个 + 1个 …… $C_5^2=10$个

1个 + 1个 + 1个 + 1个 + 1个 …… 1个

故 $1+5+10+10+15+10+1=52$个

∴ 集合A上有52个等价关系

第三次测试

合肥工业大学

△ 以求 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 为例，介绍两种数列求和的方法.

解：方法一：差分表求和

记 $h_n=n^3\ (n\geq 0)$ 从0开始!!! 列差分表. 如下：

得：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 1 & & 8 & & 27 & & 64 \\
 & 1 & & 7 & & 19 & & 37 & \\
 & & 6 & & 12 & & 18 & & \\
 & & & 6 & & 6 & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

故 $\sum_{k=0}^{n}k^3 = 0C_{n+1}^{1}+1C_{n+1}^{2}+6C_{n+1}^{3}+6C_{n+1}^{4}$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 6\frac{n(n+1)(n-1)}{6} + 6\frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{24}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}[2+4(n-1)+(n-1)(n-2)]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

方法二：递归求解.

由题意 $\begin{cases} S_0=0 \\ S_n=S_{n-1}+n^3 \end{cases}$ 补充，$S_1=1$ $S_2=9$，$S_3=36$，$S_4=100$

① 求 $S_n=S_{n-1}$ 通解. 此特征方程为 $x-1=0$ 故特征根 $x=1$

可知通解为 $S_n=c$ （c为任意常数）

② $F(n)=n^3\times 1^n$ （$\overset{\text{对}}{s}=1$，是1重根，$m=1$）

故特解形式可表示为 $S_n=n^1(P_3n^3+P_2n^2+P_1n+P_0)\cdot 1^n$

（其中 P_3、P_2、P_1、P_0 为待定系数.

见反面

代入初始条件 $S_0=0\ \ S_1=1\ \ S_2=9\ \ S_3=36\ \ S_4=100$

$$\begin{cases} P_3+P_2+P_1+P_0=1 \\ 16P_3+8P_2+4P_1+2P_0=9 \\ 81P_3+27P_2+9P_1+3P_0=36 \\ 256P_3+64P_2+16P_1+4P_0=100 \end{cases}$$

解出 $P_3=\frac{1}{4}\ \ P_2=\frac{1}{2}\ \ P_1=\frac{1}{4}\ \ P_0=0$

故得 $S_n=S_{n-1}+n^3$ 的一个特解为 $S_n=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

故 $S_n=S_{n-1}+n^3$ 的通解为 $S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+C$

代入 $S_0=0$ 得 $C=0$ 故递归解为 $S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

方法三：生成函数求和 设 $a_n=n^3(n=0,1,2\cdots)$ 则 $b_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=1^3+\cdots+n^3$

再设 $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n\cdots=\frac{1}{1-x}$ $\ f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}$

$xf'(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}$ $\ [xf'(x)]'=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

$x[xf'(x)]'=x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots+n^2x^n+\cdots=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

$\{x[xf'(x)]'\}'=1+2^3x+3^3x^2+\cdots+n^3x^{n-1}+\cdots=\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$

由此可见 $a_n=n^3(n=0,1,2\cdots)$ 的生成函数为 $h(x)=x\{x[xf'(x)]'\}'=\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$

故由定理知 $b_n(n=0,1,2\cdots)$ 的生成函数为 $H(x)=\frac{h(x)}{1-x}=\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^5}$

$$H(x)=(x^3+4x^2+x)(1+C_5^1x+C_{5+1}^2x^2+\cdots+C_{5+n-1}^n x^n+\cdots)$$

$$=x+(4+C_5^1)x^2+(1+4C_5^1+C_{5+1}^2)x^3+\cdots+\underline{(C_{5+n-3}^{n-2}+4C_{5+n-2}^{n-1}+C_{5+n-1}^{n})}x^{n+1}+\cdots$$

$$\text{故 } b_n=C_{5+n-3-1}^{n-2-1}+4C_{5+n-2-1}^{n-1-1}+C_{5+n-1-1}^{n-1}$$

$$=C_{n+1}^{n-3}+4C_{n+2}^{n-2}+C_{n+3}^{n-1}$$

$$=C_{n+1}^4+4C_{n+2}^4+C_{n+3}^4$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)(n-2)}{4!}+4\cdot\frac{(n+2)(n+1)\cdot n(n-1)}{4!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)}{4!}[(n+1)(n-2)+4(n-1)(n+2)+(n+2)(n+3)]$$

$$=\frac{n(n+1)}{24}6n(n+1)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

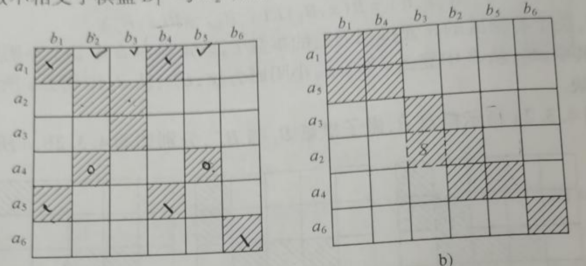
综上可得 $S_n=1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

考

例 4.3.1 有 6 名教师 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$，另有 6 门课程 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$，要分配每名

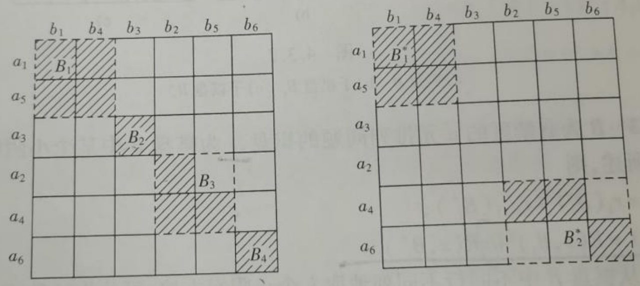
教师负责一门课程，且 a_1 不胜任 b_1 和 b_4；a_2 不胜任 b_2 和 b_3；a_3 不胜任 b_3；a_4 不胜任 b_2 和 b_5；a_5 不胜任 b_1 和 b_4；a_6 不胜任 b_6. 问这样的工作分配方法有几种？

解　这是一个有禁区的 6 元排列问题，其对应的棋盘 B 如图 4.3.3a 所示，把棋盘 B 做行与列的适当交换，让小阴影方块相对集中，并选定小阴影方块 S，如图 4.3.3b 所示. 做图 4.3.3b 所示棋盘的子棋盘 B_s 与 B_s^*. 关于 B_s 再做不相交的子棋盘 B_1, B_2, B_3, B_4，如图 4.3.4a 所示；关于 B_s^* 做不相交子棋盘 B_1^* 与 B_2^*，如图 4.3.4b 所示.



a)　　　b)

图　4.3.3



a)　　　b)

Bs　　　Bs*

图　4.3.4

a) 棋盘 B_s　b) 棋盘 B_s^*

关于 B_s 有

(1) $r_1(B_1)=4, r_2(B_1)=2, r_3(B_1)=r_4(B_1)=0, R(x,B_1)=1+4x+2x^2$；

(2) $r_1(B_2)=1, R(x,B_2)=1+x$；

(3) $r_1(B_3)=3, r_2(B_3)=1, r_3(B_3)=0, R(x,B_3)=1+3x+x^2$；

(4) $r_1(B_4)=1, R(x,B_4)=1+x$.

所以由推论 4.3.1 有

$$\begin{aligned} R(x,B_s) &= R(x,B_1)R(x,B_2)R(x,B_3)R(x,B_4) \\ &= (1+4x+2x^2)(1+x)(1+3x+x^2)(1+x) \\ &= 1+9x+30x^2+47x^3+37x^4+14x^5+2x^6 \end{aligned}$$

关于 B_s^* 有：

(1) $r_1(B_1^*)=4, r_2(B_1^*)=2, r_3(B_1^*)=r_4(B_1^*)=0, R(x,B_1^*)=1+4x+2x^2$；

(2) $r_1(B_2^*)=3, r_2(B_2^*)=2, r_3(B_2^*)=0, R(x,B_2^*)=1+3x+2x^2$.

所以由推论 4.3.1 有

$$\begin{aligned} R(x,B_s^*) &= R(x,B_1^*)R(x,B_2^*) \\ &= (1+4x+2x^2)(1+3x+2x^2) \\ &= 1+7x+16x^2+14x^3+4x^4 \end{aligned}$$

于是，由定理 4.3.3 有

$$\begin{aligned} R(x,B) &= R(x,B_s)+xR(x,B_s^*) \\ &= 1+10x+37x^2+63x^3+51x^4+18x^5+2x^6 \end{aligned}$$

因此，再由定理 4.3.1 知，满足题意的工作分配方法的数目为

$$6!-10\times 5!+37\times 4!-63\times 3!+51\times 2!-18\times 1!+2\times 0!=116$$

全排列，但每个全排列中所有元素都不在