2022-2023 年清华大学离散数学 1 期末考试试题及解答

2023.01.06

说明：多选题全对得 3 分，少选得 1.5 分，有错选得 0 分

题目顺序是随机给出的，所以可以认为以下题目的先后顺序和难易度没有关系。本答案没有经过官方的校对，可能存在错误，请谨慎使用。

1. （1 分） 判断：若 R 为集合 A 上的反对称关系，则 $t(R)$ 一定是反对称的

解答： 错误。给出反例 $A=\{1,2,3\}, R=\{\prec 1,2\succ, \prec 2,3\succ, \prec 3,1\succ\}$。

2. （3 分） (多选) 设论域为 $\{1,2\}$，则以下表达式中可满足的有：
   A. $(\forall x)(\forall y)((P(x)\leftrightarrow P(y))\leftrightarrow Q(x,y))$
   B. $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\neg(P(x)\leftrightarrow P(y))\wedge\neg(P(y)\leftrightarrow P(z)))$
   C. $(\exists x)(\forall y)((P(x)\wedge\neg P(y))\vee(\neg Q(x)\wedge Q(y)))$
   D. $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg(P(x)\leftrightarrow P(y))\wedge(P(y)\leftrightarrow P(z)))$

解答： 答案为 ABD

A：给出解释：$P(x)$ 为真当且仅当 $x=1$,$Q(x,y)$ 为真当且仅当 $x=y$

B：给出解释：$P(x)$ 为真当且仅当 $x=1$，且取 $x=z=1,y=2$

C：取 $y=x$，则 $P(x)\wedge\neg P(y)$ 和 $\neg Q(x)\wedge Q(y)$ 都只能为假

D：给出解释：$P(x)$ 为真当且仅当 $x=1$，且取 $y=z=3-x$

3. （3 分） (多选) 根据无穷公理表示的自然数，下列计算结果正确的有：
   A. $\cup 2022=2021$
   B. $\cup\{2022,2026\}=2026$
   C. $\cap\{2022,2026\}=2022$
   D. $\cap 2022=0$

解答： 答案为 ABCD

提示：对于 A、D，$2022=\{0,1,\cdots,2021\}$；对于 B、C，注意到 2022 和 2026 在此处都是集合。

4. （1 分） 判断：空关系在任何情况下都不是等价关系。

解答： 错误。概念题。空集上的空关系是等价关系。

5. （2 分） (单选) 设 R 和 S 是集合 A 上的任意关系，则下列命题为真的是：
   A. 若 R 和 S 是传递的，则 $R\circ S$ 也是传递的。
   B. 若 R 和 S 是对称的，则 $R\circ S$ 也是对称的。
   C. 若 R 和 S 是自反的，则 $R\circ S$ 也是自反的
   D. 若 R 和 S 是反自反的，则 $R\circ S$ 也是反自反的。

解答： 答案为 C

不难发现 C 正确，显然 $\forall a \in A, \prec a, a \succ \in R$且 $\prec a, a \succ \in S$，所以 $\prec a, a \succ \in R \circ S$

对于 A，给出反例 $R = \{\prec 1,2 \succ, \prec 3,4 \succ\}, S = \{\prec 1,1 \succ, \prec 2,3 \succ\}$，则有 $R \circ S = \{\prec 1,2 \succ, \prec 2,4 \succ\}$ 不传递

对于 B，给出反例 $R = \{\prec 1,2 \succ, \prec 2,1 \succ, \prec 1,3 \succ, \prec 3,1 \succ\}, S = \{\prec 1,2 \succ, \prec 2,1 \succ\}$，则有 $\prec 2,3 \succ \in R \circ S$ 但 $\prec 3,2 \succ \notin R \circ S$，不对称

对于 D，给出反例 $R = \{\prec 1,2 \succ\}, S = \{\prec 2,1 \succ\}$，则有 $R \circ S = \{\prec 1,1 \succ\}$ 不反自反

6. （3 分） (多选) 下列关于推理规则的叙述错误的是:
   - A. 前提引入规则: 在推理过程中可以随时引入前提
   - **B. 置换规则: 在推理过程中, 命题公式中的部分公式都可以用与之等值的命题公式来置换, 必须将原命题公式中该部分公式的所有出现变换为同一等值公式。**
   - C. 结论引用规则: 在推理过程中得到的中间结论可以作为后续推理的前提
   - D. 分离规则: 如果已知命题公式 $A \to B$ 和 A 则有命题公式 B
   - **E. 条件证明规则:**$A_1 \vee A_2 \Rightarrow B$ **与** $A_1 \Rightarrow A_2 \to B$ **等价**
   - F. 代入规则: 在推理过程中, 对重言式中的命题变项可使用代入规则

解答： 答案为 BE

B：可以不将所有出现的该部分公式都替换

E：应该将“或”改为“且”，即 $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \to B$ 等价

7. （2 分） (单选) 基于等值定理找出下列选项中错误的一项::
   - A. $(P \wedge Q) \to R = P \to (Q \to R)$
   - B. $P \to Q = \neg Q \to \neg P$
   - **C.** $(P \to Q) \to R = P \to (Q \to R)$
   - D. $P \wedge \neg P = Q \wedge \neg Q$

解答： 答案为 C

利用等值定理，C 选项左侧可化为 $(P \wedge \neg Q) \vee R$，右侧化为 $\neg P \vee \neg Q \vee R$，易见二者不等。

8. （2 分） (单选) 如果 R_1, R_2 是 A 上的传递关系，则下列说法中正确的数量为:

(1)$R_1 \cup R_2$ 是 A 上的传递关系　(2) $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的传递关系　(3)$R_1 \circ R_2$ 是 A 上的传递关系
   - A. 0
   - **B. 1**
   - C. 2
   - D. 3

解答： 答案为 B

(1) 是错误的，反例容易给出，如 $R_1 = \{\prec 1, 2 \succ\}, R_2 = \{\prec 2, 3 \succ\}$

(2) 是正确的，这是因为 $\forall \prec a, b \succ, \prec b, c \succ \in R_1 \cap R_2$，一定有 $\prec a, b \succ, \prec b, c \succ \in R_1$ 且 $\prec a, b \succ, \prec b, c \succ \in R_2$，那么 $\prec a, c \succ \in R_1$且 $\prec a, c \succ \in R_2$，所以 $\prec a, c \succ \in R_1 \cap R_2$

(3) 是错误的，这在第 (5) 题中已经给出

9. （2 分） (单选) 下列关于笛卡尔积的运算，错误的一项是：

   A. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

   B. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

   C. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   D. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

解答： 答案为 A

A 明显错误。同时易于发现 BCD 都是正确的。

10. （2 分） (单选) 设有限集合 A 的基数为 5，则 A 上分为 3 个等价类的等价关系有多少个?

   A. 25

   B. 40

   C. 15

   D. 10

解答： 注意到第二类 Strling 数有递推公式 $S(n, m) = mS(n-1, m) + S(n-1, m-1)$，同时由 $S(4, 3) = 6, S(4, 2) = 7$ 可以计算得到 $S(5, 3) = 25$

11. （2 分） (单选) 设 $A = \{a, b, c\}$, $P(A)$ 上的子集关系构成偏序关系，设 $P(A)$ 的子集 $B = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$，则下列说法中正确的数量有多少个?

   (1)$\{a, b\}$ 和 $\{b, c\}$ 都是 B 的极大元;

   (2)$\{a, b, c\}$ 是 B 的最大元;

   (3)$\{a, b, c\}$ 是 B 的上界，也是 B 的上确界。

   A. 0

   B. 1

   C. 2

   D. 3

解答： 答案为 C

(1) 是正确的，因为 $\{a, b\}$ 和 $\{b, c\}$ 都不小于 B 中的其他任何元素。

(2) 是错误的，因为一个集合的最大元必须在这个集合内，但 $\{a, b, c\}$ 不在 B 中。

(3) 是正确的，首先 $\{a, b, c\}$ 在 A 中，其次 B 中任意元素都小于 $\{a, b, c\}$，最后，$\{a, b, c\}$ 的任意子集 (即任意小于 $\{a, b, c\}$ 的元) 都无法成为 B 的上界，这验证了上确界正确。

12. （3 分） (多选) 设 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，下列说法中正确的有:

A. A 上的等价关系有 2^9 个

B. A 上的反对称的关系有 2^{36} 个

C. A 上的对称的关系有 2^{45} 个

D. A 上的反自反且反对称的关系有 3^{36} 个

> **解答:** 答案为 CD
>
> A 错误。事实上这个值涉及到 Bell 数的计算，但从 n 较小的情况下也很容易发现，n 个元素的集合上的等价关系并不等于 2^n。
>
> B 错误。对于每一对 $\prec a,b \succ$，可以选择包括 $\prec a,b \succ$、包括 $\prec b,a \succ$ 和不包括三种; 对于每一对 $\prec a,a \succ$，可以选择包括 $\prec a,a \succ$ 或者不包括，所以总数为 $2^9 3^{36}$ 种。
>
> C 正确。由于 $\prec a,b \succ$ 和 $\prec b,a \succ$ 都要同时包括，所以选择减少到 2^{45} 种。
>
> D 正确。由于增加了反自反的限制，只能不包括 $\prec a,a \succ$，所以选择减少到 3^{36} 种。

13. （1 分） (判断) 将某谓词逻辑公式化为仅保留全称量词的前束形 Skolem 标准型后, 虽然可能与原式不等值, 但在可满足的意义下两者是一致的。

> **解答:** 错误。应该为“在不可满足的意义上两者是一致的”。

14. （1 分） (判断) 蕴涵联结词 $P \to Q$ 能够表明前后两命题之间的因果关系。

> **解答:** 错误。只能表示二者的相关关系，而不一定表示因果关系。

15. （2 分） (单选) 对于任意长度为 105 且无重复元素的自然数数列，其最长单调子序列长度的下确界是

A. 12

B. 11

C. 10

D. 9

> **解答:** 答案为 B。将 A 上的 $\leq$ 关系定义为 $a \leq b$ 当且仅当 a 在序列中位置比 b 靠前且数值上 $a \leqslant b$。这样，A 上的一个单调上升子序列就成为偏序集 $< A, \leq >$ 上的一个链，而单调下降子序列则成为 $< A, \leq >$ 上的一个反链。因为 $105 = 10 \times 10 + 5$，由偏序集分解定理的推论，$< A, \leq >$ 上或者存在长度为 11 的链，或者存在长度为 11 的反链，所以答案至少为 11。经简单尝试，容易得到答案为 11 的构造（如：$5, 15, ..., 105, 4, 14, ..., 104, ..., 1, ..., 101, 10, ..., 100, ..., 6, ..., 96$），所以答案为 11。

16. （3 分） (多选) 下列选项中, 哪些不是重言式?

A. $(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$

B. $((P \to R) \vee (Q \to R)) \to ((P \vee Q) \to R)$

C. $((P \to R) \to (Q \to R)) \to (Q \to P)$

D. $((P \to Q) \to (Q \to R)) \to (P \to R)$

解答： 答案为 BCD

A 是重言式。因为 $\neg A$ 可以化为 $(P \to (Q \to R)) \wedge Q \wedge P \wedge \neg R$，容易发现这是不可满足的。

B 不是重言式。取 P 为假，Q 为真，R 为假，则原式为假。

C 不是重言式。取 P 为假，Q 为真，R 为真，则原式为假。

D 不是重言式。取 P 为真，Q 为假，R 为假，则原式为假。

17. （3 分） (多选) 下列关系 R 的闭包中，同时具有自反性 (r)、对称性 (s) 和传递性 (t) 这三种性质的有:

A. $tsr(R)$

B. $str(R)$

C. $trs(R)$

D. $rst(R)$

解答： 答案为 AC

三个性质中最容易出现问题的是传递性，因为一个关系的自反和对称性不会因为这个关系扩张而被破坏（但传递性会），所以最外层是传递闭包的两个选项一定正确。

对 B 和 D 给出反例，$R = \{\prec 1, 2 \succ, \prec 3, 2 \succ\}$，验证可得 str(R) 和 $rst(R)$ 都不传递。

18. （3 分） (多选) 下列说法正确的是:

A. $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$

B. $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$

C. $\cup P(A) = A$

D. $P(\cup A) = A$

解答： 答案是 ABC

A 正确。因为假设 $\exists x \in A, x \notin B$，则一定有 $\{x\} \in P(A), \{x\} \notin P(B)$。

B 显然正确。

C 正确。$P(A)$ 的元素的元素都是 A 的元素，而且必然含有 A 的全部元素。

D 错误。$A = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$，则 $P(\cup A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$，二者不相等（事实上任何不包含空集的 A 都是反例）。

19. （2 分） (单选) 下列选项中正确的推理公式的数量是

$(1)(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \to R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to R(x))$

$(2)(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$

$(3)(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解答： 答案为 D
A 正确。这是三段论的谓词版本。B 是举例规则。C 显然正确。

20. （1 分） (判断) 命题逻辑的公理系统中非重言式不能被推出来。

解答： 正确。这保证了公理系统的正确性。

21. （2 分） (单选) 利用推理演算找出下列选项中错误的一项。
    A. $P \to (Q \to R), \neg S \vee P, Q \Rightarrow S \to R$
    B. $\neg R \vee S, \neg S \to Q, \neg Q \Rightarrow Q \leftrightarrow R$
    C. $P \vee Q \to R \wedge S, S \vee E \to U \Rightarrow P \to U$
    D. $P \vee Q, P \to S, Q \to R \Rightarrow S \vee R$

解答： 答案为 B
*说明：本题在实际考试过程中题目错误（没有正确选项），现在展示的题目为笔者改编后的版本。
A 正确。由 S 可推出 P，又由 Q 可推出 R。
B 错误。由 $\neg Q$ 只能推出 S，不能得到关于 R 的信息。
C 正确。由 P 可以推出 $R \wedge S$，从而推出 U。
D 正确。P 可以推 S，Q 可以推 R，从而 $P \vee Q$ 可以推出 $S \vee R$

22. （3 分） (多选) 下列选项中是命题的为：
    A. 本选项不是本题的正确选项。
    B. "我正在说假话" 这句话是命题。
    C. 本题有至少两个正确选项。
    D. 这道题好难啊！
    E. 本选项是本题的正确选项之一。

解答： 答案为 ABCE
首先注意到本题一定有确定的答案，所以 ACE 都是有确定的真值的，所以 ACE 都是命题。注意到 "我正在说假话" 虽然是悖论，但是 B 选项是一个命题，而且是一个假命题。而 D 选项显然不是命题。

23. （1 分） 若 A, B 是集合，则命题 $A \in B$ 和 $A \subset B$ 可能同时成立。

解答： 正确。如 $A = \{2\}, B = \{2, \{2\}\}$

24. （3 分） (多选) 根据无穷公理表示的自然数和连续统假设，下列正确的选项有：
    A. $card(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) = card(\mathbb{Q})$

B. ${2023^{\aleph_0}}^{10} = {\aleph_0}^{2023^{\aleph_0}}$

C. $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \approx P(\mathbb{Q})$

D. $\{f|f : \mathbb{R} \to (0, 1)\} \approx \{g|g : \mathbb{R} \to \{0, 1\}\}$

解答： 答案为 CD
A 错误，左侧为 $\aleph_1$，右侧为 $\aleph_0$。
B 错误，左侧为 $\aleph_1$，右侧为 $\aleph_2$。
C 正确，左侧为 $\aleph_1$，右侧为 $\aleph_1$。
D 正确，左侧为 $\aleph_1$，右侧为 $\aleph_1$。

25. （1 分） (判断) 归结推理过程中, 子句集 S 中的每一个子句不一定都需要被归结到。

解答： 正确。只要能归结出矛盾（空子句）就可以，剩余没有用到的子句不影响正确性。

26. （2 分） (单选) 下列选项对应的联结词集合不是完备集的是：

A. $\{\to\}$

B. $\{\neg, \vee\}$

C. $\{\downarrow\}$

D. $\{\uparrow\}$

解答： 答案为 A
$\{\neg, \to\}$ 才是联结词完备集。B 是完备集。注意与非和或非只需要一个联结词就能构成完备集。

27. （2 分） (单选) 设函数 $g : A \to B, f : B \to C$，下列说法正确的一项是：

A. 若 $f \circ g$ 是满射的，则 f 是满射的。

B. 若 f 是满射的，则 $f \circ g$ 是满射的。

C. 若 g 是单射的，则 $f \circ g$ 是单射的。

D. 若 $f \circ g$ 是双射的，则 f 是单射的。

解答： 答案为 A
注意到 f 满和 g 单都不能单独得出 $f \circ g$ 的性质。由于 $f \circ g$ 的值域是全集，所以 f 的值域也只能是全集。然而 D 是错误的，由 $f \circ g$ 是双射只能得出 f 是满射的以及 g 是单射的。

28. （1 分） (判断)$P(A) \in P(B) \Leftrightarrow A \in B$

解答： 错误。注意题目给出的是 $\in$ 而不是 $\subset$。

29. （3 分） (多选) 5 位运动员 a,b,c,d,e 参加了 10 米台跳水比赛, 有人让他们预测比赛结果:

a 选手说: b 第二, 我第三;

b 选手说: 我第二,e 第四;

c 选手说: 我第一,d 第二;

d 选手说: c 最后, 我第三;

e 选手说: 我第四,a 第一;

比赛结束后, 每位选手都说对了一半, 则下列说法必然错误的是:

A. b 选手排第二名

B. b 选手排第一名

C. d 选手排第四名

D. a 选手排第三名

> **解答：** 答案为 AC
> 本题一个简便易行的做法是假设某个选项正确，以此为基础进行推理，观察是否能推出自洽的结果。在此略过推理过程。

30. （4 分） 请按要求写出以下式子:

(a) 表达式 $(P \wedge Q) \leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee \neg Q))$ 所对应的逆波兰式。(可直接写出，不需要过程，总分 2 分)

(b) 表达式 $(P \wedge R) \vee Q$ 的主析取范式和主合取范式。(请注意真值表中各变项按字典序排序，可直接写出，不需要过程，总分 2 分)

> **解答：** (a)$PQ \wedge P \neg Q \vee PQ \neg \vee \rightarrow \leftrightarrow$
> (b) 主析取范式：$\bigvee_{2,3,5,6,7}$　主合取范式：$\bigvee_{3,6,7}$

31. （4 分） 用归结法证明:

$(\exists x)(\forall y)((P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge (Q(y) \rightarrow P(x))) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)((Q(x) \rightarrow P(y)) \wedge (P(y) \rightarrow Q(x)))$

> **解答：** 等价于证明 $(\exists x)(\forall y)((P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge (Q(y) \rightarrow P(x))) \wedge \neg(\forall x)(\exists y)((Q(x) \rightarrow P(y)) \wedge (P(y) \rightarrow Q(x)))$ 是矛盾式
> 前半部分引入约束变元 a 消去存在量词，得：$(\forall y)((P(a) \rightarrow Q(y)) \wedge (Q(y) \rightarrow P(a)))$
> 消去蕴含符号：$(\forall y)((\neg P(a) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(y) \vee P(a)))$
> 故子句集中应包含元素：$\neg P(a) \vee Q(y), \neg Q(y) \vee P(a)$
> 对后半部分取非：$(\exists x)(\forall y)(\neg(P(x) \rightarrow Q(y)) \vee \neg(Q(y) \rightarrow P(x)))$
> 消去存在量词和蕴含符号后得 $((P(x) \wedge \neg Q(b)) \vee (Q(b) \wedge \neg P(x))$
> 然而这个式子是用 $\vee$ 连接的，我们没办法直接把它转化为更小的句子的子句集，为此需要使用分配律，即：
> $(P(x) \vee Q(b)) \wedge (P(x) \vee \neg P(x)) \wedge (\neg Q(b) \vee Q(b)) \wedge (\neg Q(b) \vee \neg P(x))$
> 其中有两个永真的式子没有用，将其他的两个句子加入子句集，得到子句集为:
> $\neg P(a) \vee Q(y), \neg Q(y) \vee P(a), P(x) \vee Q(b), \neg Q(b) \vee \neg P(x)$

然后就可以着手进行归结，注意子句集中的 x 和 y 都是自由变元：

$\neg P(a) \vee Q(b)$	子句 1 UI	(1)
$\neg Q(b) \vee P(a)$	子句 2 UI	(2)
$P(a) \vee Q(b)$	子句 3 UI	(3)
$\neg Q(b) \vee \neg P(a)$	子句 4 UI	(4)
$Q(b) \vee Q(b)$	(1)(3) 归结	(5)
$Q(b)$	由 (5)	(6)
$\neg Q(b) \vee \neg Q(b)$	(2)(4) 归结	(7)
$\neg Q(b)$	由 (7)	(8)
$\square$	(6)(8) 归结	(9)

32. （4 分） 形式化下列语句:(论域为总论域，每小题 2 分，共 4 分)
   (a) 存在物体满足、但并非所有的物体都满足“看起来像鸭子，游泳像鸭子，且叫声是嘎嘎嘎的物体是鸭子”
   (b) 对于平面上两条不平行的直线，它们共同经过了恰好一个点（“在平面上”，“平行”，直线“经过”点等基本概念可以直接用谓词表达。）

解答： (a) 令 $L(x) : x$ 看起来像鸭子，$S(x) : x$ 游泳像鸭子，$G(x) : x$ 叫声是嘎嘎嘎的，$D(x) : x$ 是鸭子

形式化：$(\exists x)(L(x) \wedge S(x) \wedge G(x) \wedge D(x)) \wedge \neg(\forall y)(L(x) \wedge S(x) \wedge G(x) \to D(x))$

(b) 令 $D(x) : x$ 是一个点，$L(x) : x$ 是一条直线，$M(x, y) : x, y$ 在同一平面上，$P(x, y) : x, y$ 平行，$J(x, y) : x$ 经过 y，$E(x, y) : x$ 和 y 相同

形式化：$(\forall x)(\forall y)(L(x) \wedge L(y) \wedge M(x, y) \wedge \neg P(x, y)) \to (\exists z)(D(z) \wedge J(x, z) \wedge J(y, z) \wedge (\forall w)(P(w) \wedge J(x, w) \wedge J(y, w) \to E(w, z)))$

33. （4 分） 用推理规则证明：

前提：$Q \to \neg R, (P \vee R) \to Q$

推论：$((P \to Q) \to (P \vee R)) \to P$

解答：

$(P \vee R) \to Q$	前提引入	(1)
$Q \to \neg R$	前提引入	(2)
$(P \vee R) \to \neg R$	(1)(2) 三段论	(3)
$(P \to Q) \to (P \vee R)$	附加前提引入	(4)
$(P \to Q) \to Q$	(1)(4) 三段论	(5)
$\neg(P \vee R) \vee \neg R$	(3) 蕴含等值式	(6)
$(\neg P \wedge \neg R) \vee \neg R$	(6) 德摩根律	(7)
$\neg R$	(7) 基本推理公式	(8)
$(P \to Q) \wedge (R \to Q)$	(1) 前提析取合并	(9)
$P \to Q$	(9) 基本推理公式	(10)
$P \vee R$	(4)(10) 分离	(11)
$\neg R \to \neg P$	(11) 蕴含等值式	(12)
P	(8)(12) 分离	(13)
$((P \to Q) \to (P \vee R)) \to P$	条件证明规则	(14)

34. （6 分） 求使得 $(A-B)\cap(A-C)=A$ 成立的充要条件，并证明之。

解答： 原命题

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (A\cap -B)\cup(A\cap -C)=A\\
&\Leftrightarrow A\cap(-B\cup -C)=A\\
&\Leftrightarrow A\subseteq(-B\cup -C)\\
&\Leftrightarrow A\subseteq -(B\cap C)\\
&\Leftrightarrow A\cap(B\cap C)=\varnothing\\
&\Leftrightarrow A\cap B\cap C=\varnothing
\end{aligned}$$

35. （6 分） 用容斥原理计算分母为 140 的正最简真分数的个数。(最简真分数: 分子小于分母，且分子分母的最大公因数为 1 的分数)

解答： 分解质因数:

$$140 = 2\times 2\times 5\times 7$$

题目相当于求小于 140 的数中不能被 2、5、7 中任何一个数整除的数的个数。

被 2 整除的数的个数 $\lfloor\frac{139}{2}\rfloor = 69$

被 5 整除的数的个数 $\lfloor\frac{139}{5}\rfloor = 29$

被 7 整除的数的个数 $\lfloor\frac{139}{7}\rfloor = 19$

被 10 整除的数的个数 $\lfloor\frac{139}{10}\rfloor = 13$

被 14 整除的数的个数 $\lfloor\frac{139}{14}\rfloor = 9$
被 35 整除的数的个数 $\lfloor\frac{139}{35}\rfloor = 3$
被 70 整除的数的个数 $\lfloor\frac{139}{70}\rfloor = 1$
所求 $= 69 + 29 + 19 - 13 - 9 - 3 + 1 = 48$

36. （6 分） 通过构造双射函数证明：$\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

解答： 注意到我们可以通过把一个实数分解成整数部分和小数部分来构造一个从 $\mathbb{R}$ 到 $[0,1) \times \mathbb{Z}$ 的双射，同时我们注意到 $[0,1) \approx \mathbb{R}$，为了实现后者，我们需要复合以下两个映射：

$$
\begin{aligned}
&f : [0,1) \to (0,1) \\
&x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \\ \frac{x}{2} & , \quad x = 2^{-n}, n = 1,2,3\cdots \\ x & , \quad x \neq 0 \wedge x \neq 2^{-n} \end{cases}
\end{aligned}
$$

以及：

$$
\begin{aligned}
&g : (0,1) \to \mathbb{R} \\
&x \mapsto \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

注意到以上三个映射都是双射，由于双射的复合还是双射，只需要复合以上三个映射即可得到答案。

37. （6 分） 用罗素公理系统证明：$\vdash (\neg Q \to P) \to (\neg P \to Q)$ (可以使用书上的定义 1-3，公理 1-4，定理 1-8)

解答：

$$
\begin{array}{lll}
\vdash \neg\neg P \to P & \text{定理 } 5 & (1) \\
\vdash \neg\neg Q \to Q & (1)\ \dfrac{P}{Q} & (2) \\
\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R)) & \text{定理 } 8 & (3) \\
\vdash (\neg\neg Q \to Q) \to ((\neg P \to \neg\neg Q) \to (\neg P \to Q)) & (3)\ \dfrac{P}{\neg P}, \dfrac{Q}{\neg\neg Q}, \dfrac{R}{Q} & (4) \\
\vdash (\neg P \to \neg\neg Q) \to (\neg P \to Q) & (2)(4) & (5) \\
\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P) & \text{定理 } 6 & (6) \\
\vdash (\neg Q \to P) \to (\neg P \to \neg\neg Q) & (6)\ \dfrac{P}{\neg Q}, \dfrac{Q}{\neg P} & (7) \\
\vdash ((\neg P \to \neg\neg Q) \to (\neg P \to Q)) \to (& & \\
\quad ((\neg Q \to P) \to (\neg P \to \neg\neg Q)) \to & & \\
\quad ((\neg Q \to P) \to (\neg P \to Q))\ ) & (3)\ \dfrac{P}{\neg Q \to P}, \dfrac{Q}{\neg P \to \neg\neg Q}, \dfrac{R}{\neg P \to Q} & (8) \\
\vdash ((\neg Q \to P) \to (\neg P \to \neg\neg Q)) \to & & \\
\quad ((\neg Q \to P) \to (\neg P \to Q)) & (5)(8) & (9) \\
\vdash (\neg Q \to P) \to (\neg P \to Q) & (7)(9) & (10)
\end{array}
$$