

2022-2023 年清华大学离散数学 1 期末考试

2023.01.06

说明：多选题全对得 3 分，少选得 1.5 分，有错选得 0 分

题目顺序是随机给出的，所以可以认为以下题目的先后顺序和难易度没有关系。

1. (1 分) 判断：若 R 为集合 A 上的反对称关系，则 $t(R)$ 一定是反对称的
2. (3 分) (多选) 设论域为 $\{1, 2\}$ ，则以下表达式中可满足的有：
 - A. $(\forall x)(\forall y)((P(x) \leftrightarrow P(y)) \leftrightarrow Q(x, y))$
 - B. $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\neg(P(x) \leftrightarrow P(y)) \wedge \neg(P(y) \leftrightarrow P(z)))$
 - C. $(\exists x)(\forall y)((P(x) \wedge \neg P(y)) \vee (\neg Q(x) \wedge Q(y)))$
 - D. $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg(P(x) \leftrightarrow P(y)) \wedge (P(y) \leftrightarrow P(z)))$
3. (3 分) (多选) 根据无穷公理表示的自然数，下列计算结果正确的有：
 - A. $\cup 2022 = 2021$
 - B. $\cup\{2022, 2026\} = 2026$
 - C. $\cap\{2022, 2026\} = 2022$
 - D. $\cap 2022 = 0$
4. (1 分) 判断：空关系在任何情况下都不是等价关系。
5. (2 分) (单选) 设 R 和 S 是集合 A 上的任意关系，则下列命题为真的是：
 - A. 若 R 和 S 是传递的，则 $R \circ S$ 也是传递的。
 - B. 若 R 和 S 是对称的，则 $R \circ S$ 也是对称的。
 - C. 若 R 和 S 是自反的，则 $R \circ S$ 也是自反的
 - D. 若 R 和 S 是反自反的，则 $R \circ S$ 也是反自反的。
6. (3 分) (多选) 下列关于推理规则的叙述错误的是：
 - A. 前提引入规则：在推理过程中可以随时引入前提
 - B. 置换规则：在推理过程中，命题公式中的部分公式都可以用与之等值的命题公式来置换，必须将原命题公式中该部分公式的所有出现变换为同一等值公式。
 - C. 结论引用规则：在推理过程中得到的中间结论可以作为后续推理的前提
 - D. 分离规则：如果已知命题公式 $A \rightarrow B$ 和 A 则有命题公式 B
 - E. 条件证明规则： $A_1 \vee A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价
 - F. 代入规则：在推理过程中，对重言式中的命题变项可使用代入规则
7. (2 分) (单选) 基于等值定理找出下列选项中错误的一项：
 - A. $(P \wedge Q) \rightarrow R = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
 - B. $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
 - C. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
 - D. $P \wedge \neg P = Q \wedge \neg Q$
8. (2 分) (单选) 如果 R_1, R_2 是 A 上的传递关系，则下列说法中正确的数量为：
 - (1) $R_1 \cup R_2$ 是 A 上的传递关系
 - (2) $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的传递关系
 - (3) $R_1 \circ R_2$ 是 A 上的传递关系
 - A. 0
 - B. 1

- C. 2
D. 3
9. (2 分) (单选) 下列关于笛卡尔积的运算, 错误的一项是:
- A. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
B. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
C. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
D. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
10. (2 分) (单选) 设有限集合 A 的基数为 5, 则 A 上分为 3 个等价类的等价关系有多少个?
- A. 25
B. 40
C. 15
D. 10
11. (2 分) (单选) 设 $A = \{a, b, c\}$, $P(A)$ 上的子集关系构成偏序关系, 设 $P(A)$ 的子集 $B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, 则下列说法中正确的数量有多少个?
- (1) $\{a, b\}$ 和 $\{b, c\}$ 都是 B 的极大元;
(2) $\{a, b, c\}$ 是 B 的最大元;
(3) $\{a, b, c\}$ 是 B 的上界, 也是 B 的上确界。
- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
12. (3 分) (多选) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 下列说法中正确的有:
- A. A 上的等价关系有 2^9 个
B. A 上的反对称的关系有 2^{36} 个
C. A 上的对称的关系有 2^{45} 个
D. A 上的反自反且反对称的关系有 3^{36} 个
13. (1 分) (判断) 将某谓词逻辑公式化为仅保留全称量词的前束形 Skolem 标准型后, 虽然可能与原式不等值, 但在可满足的意义下两者是一致的。
14. (1 分) (判断) 蕴涵联结词 $P \rightarrow Q$ 能够表明前后两命题之间的因果关系。
15. (2 分) (单选) 对于任意长度为 105 且无重复元素的自然数数列, 其最长单调子序列长度的下确界是
- A. 12
B. 11
C. 10
D. 9
16. (3 分) (多选) 下列选项中, 哪些不是重言式?
- A. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$
B. $((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)$
C. $((P \rightarrow R) \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow P)$
D. $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

17. (3 分) (多选) 下列关系 R 的闭包中, 同时具有自反性 (r)、对称性 (s) 和传递性 (t) 这三种性质的有:
- $tsr(R)$
 - $str(R)$
 - $trs(R)$
 - $rst(R)$
18. (3 分) (多选) 下列说法正确的是:
- $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$
 - $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$
 - $\cup P(A) = A$
 - $P(\cup A) = A$
19. (2 分) (单选) 下列选项中正确的推理公式的数量是
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$
 - $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$
 - $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$
- 0
 - 1
 - 2
 - 3
20. (1 分) (判断) 命题逻辑的公理系统中非重言式不能被推出来。
21. (2 分) (单选) 利用推理演算找出下列选项中错误的一项。
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R), \neg S \vee P, Q \Rightarrow S \rightarrow R$
 - $\neg R \vee S, \neg S \rightarrow Q, \neg Q \Rightarrow Q \leftrightarrow R$
 - $P \vee Q \rightarrow R \wedge S, S \vee E \rightarrow U \Rightarrow P \rightarrow U$
 - $P \vee Q, P \rightarrow S, Q \rightarrow R \Rightarrow S \vee R$
22. (3 分) (多选) 下列选项中是命题的为:
- 本选项不是本题的正确选项。
 - “我正在说假话” 这句话是命题。
 - 本题有至少两个正确选项。
 - 这道题好难啊!
 - 本选项是本题的正确选项之一。
23. (1 分) 若 A, B 是集合, 则命题 $A \in B$ 和 $A \subset B$ 可能同时成立。
24. (3 分) (多选) 根据无穷公理表示的自然数和连续统假设, 下列正确的选项有:
- $\text{card}(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Q})$
 - $2023^{\aleph_0^{10}} = \aleph_0^{2023^{\aleph_0}}$
 - $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \approx P(\mathbb{Q})$
 - $\{f|f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)\} \approx \{g|g: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}\}$
25. (1 分) (判断) 归结推理过程中, 子句集 S 中的每一个子句不一定都需要被归结到。
26. (2 分) (单选) 下列选项对应的联结词集合不是完备集的是:

- A. $\{\rightarrow\}$
 B. $\{\neg, \vee\}$
 C. $\{\downarrow\}$
 D. $\{\uparrow\}$
27. (2 分) (单选) 设函数 $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$, 下列说法正确的一项是:
 A. 若 $f \circ g$ 是满射的, 则 f 是满射的。
 B. 若 f 是满射的, 则 $f \circ g$ 是满射的。
 C. 若 g 是单射的, 则 $f \circ g$ 是单射的。
 D. 若 $f \circ g$ 是双射的, 则 f 是单射的。
28. (1 分) (判断) $P(A) \in P(B) \Leftrightarrow A \in B$
29. (3 分) (多选) 5 位运动员 a,b,c,d,e 参加了 10 米台跳水比赛, 有人让他们预测比赛结果:
 a 选手说: b 第二, 我第三;
 b 选手说: 我第二,e 第四;
 c 选手说: 我第一,d 第二;
 d 选手说: c 最后, 我第三;
 e 选手说: 我第四,a 第一;
 比赛结束后, 每位选手都说对了一半, 则下列说法必然错误的是:
 A. b 选手排第二名
 B. b 选手排第一名
 C. d 选手排第四名
 D. a 选手排第三名
30. (4 分) 请按要求写出以下式子:
 (a) 表达式 $(P \wedge Q) \leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee \neg Q))$ 所对应的逆波兰式。(可直接写出, 不需要过程, 总分 2 分)
 (b) 表达式 $(P \wedge R) \vee Q$ 的主析取范式和主合取范式。(请注意真值表中各变项按字典序排序, 可直接写出, 不需要过程, 总分 2 分)
31. (4 分) 用归结法证明:
 $(\exists x)(\forall y)((P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge (Q(y) \rightarrow P(x))) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)((Q(x) \rightarrow P(y)) \wedge (P(y) \rightarrow Q(x)))$
32. (4 分) 形式化下列语句:(论域为总论域, 每小题 2 分, 共 4 分)
 (a) 存在物体满足、但并非所有的物体都满足“看起来像鸭子, 游泳像鸭子, 且叫声是嘎嘎嘎的物体是鸭子”
 (b) 对于平面上两条不平行的直线, 它们共同经过了恰好一个点 (“在平面上”, “平行”, 直线 “经过” 点等基本概念可以直接用谓词表达。)
33. (4 分) 用推理规则证明:
 前提: $Q \rightarrow \neg R, (P \vee R) \rightarrow Q$
 推论: $((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee R)) \rightarrow P$
34. (6 分) 求使得 $(A - B) \cap (A - C) = A$ 成立的充要条件, 并证明之。
35. (6 分) 用容斥原理计算分母为 140 的正最简真分数的个数。(最简真分数: 分子小于分母, 且分子分母的最大公因数为 1 的分数)
36. (6 分) 通过构造双射函数证明: $\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$
37. (6 分) 用罗素公理系统证明: $\vdash (\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$ (可以使用书上的定义 1-3, 公理 1-4, 定理 1-8)