

# Прикладные проблемы линейной алгебры

## Лекция 1

### Псевдообратная матрица.

Пусть имеется СЛУ

$$Ax = b$$

Тогда если  $\exists A^{-1}$ , то  $x = A^{-1}b$ .

Так как часто матрица является вырожденной или неквадратной, появляется необходимость ввести обобщение обратной матрицы.

Псевдообратная матрица  $A^+$  позволяет найти решение через явную формулу  $x = A^+b$  для любой матрицы  $A$ , если оно существует. Если решения нет, то  $x = A^+b$  будет наилучшим приближенным решением по евклидовой метрике, то есть, расстояние между  $Ax$  и  $b$  будет минимальным.

### Определение.

$C = A^+$  (где  $C_{n \times m}$ ,  $A_{m \times n}$ ) — псевдообратная матрица Мура-Пенроуза для матрицы  $A$ , если:

1.  $ACA = A$
2.  $CAC = C$
3.  $(AC)^* = AC = C^*A^*$
4.  $(CA)^* = CA$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-i \\ 2i & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-i & -2i \\ 3+i & 5 \end{pmatrix}$$

Если  $\det A \neq 0$ , то подходит  $C = A^{-1}$ .

**Теорема 1.** Если такая матрица  $C$  существует, то она единственная.

► Пусть  $B, C$  — две матрицы, удовлетворяющие свойствам 1 - 4.

$$\begin{aligned} AB &\stackrel{1}{=} \underbrace{ACA}_A B = (AC)(AB) \stackrel{3}{=} (AC)^*(AB)^* = C^* A^* B^* A^* = \\ &= C^*(ABA)^* \stackrel{1}{=} C^* A^* = (AC)^* \stackrel{3}{=} AC \end{aligned}$$

Аналогично выводится  $BA = CA$ . Тогда

$$B \stackrel{2}{=} BAB = \underbrace{BA}_{CA} B = C \underbrace{AB}_{AC} = CAC \stackrel{2}{=} C$$

Значит,  $B = C$ , то есть, псевдообратная матрица единственна. ■

### Пример 1.

Найти псевдообратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AA = A \Rightarrow A = A^+ \\ A^* = A \end{cases}$$

Мы доказали единственность, значит другая матрица не подойдет.

$$O_{m \times n}^+ = O_{n \times m}$$

$$A_{m \times n} = \begin{matrix} & r & n \\ r & \begin{pmatrix} X_{r \times r} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_{n \times m}^+ = \begin{matrix} & r & m \\ n & \begin{pmatrix} X_{r \times r}^+ & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{matrix}$$

### Пример 2.

Найти  $A^+$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$A^+ = (b_1 \cdots b_n), \quad b_1, \dots, b_n - ?$$

Из свойств получим:

$$\begin{aligned} A^+ A &= \langle A^+, A \rangle = C \in \mathbb{R} \\ CA^+ &= A^+ \Rightarrow C = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
\langle A, B \rangle &= A^* B = \bar{a}_1 b_1 + \dots + \bar{a}_n b_n \\
A^+ &= \frac{1}{\langle A, A \rangle} A^* = \frac{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)}{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2} \\
A^+ A &= \frac{A^* A}{\langle A, A \rangle} = 1 \\
\begin{cases} A^+ = \frac{1}{\lambda} A^* \\ A^+ A = 1 = C \end{cases} \\
A^+ A &= \frac{1}{\lambda} A^* A = \frac{1}{\lambda} \langle A, A \rangle = 1 \\
\lambda &= A^* A = \langle A, A \rangle = |A|^2
\end{aligned}$$

Другие свойства псевдообратной матрицы:

5.  $(A^+)^+ = A$  (проверяется по определению)

6.  $(A^*)^+ = (A^+)^*$

Докажем, например, что  $(A^*)^+ = (A^+)^*$ , удовлетворяет первому свойству:

►  $A^*(A^+)^*A^* = (AA^+A)^* = A^*$  ■

7.  $rk A^+ = rk A$

►  $rk(AB) \leq \min\{rk A, rk B\}$

Из свойства 1:  $rk A \leq rk A^+$

Из свойства 2:  $rk A^+ \leq rk A$  ■

**Теорема 2.** Пусть  $A_{m \times n}$  — матрица полного столбцового ранга (столбцы линейно независимы), то есть  $rk A = n$ . Тогда

$$A^+ = (A^* A)^{-1} A^*$$

Для доказательства существования  $(A^* A)^{-1}$  нам потребуется лемма.

**Лемма.**  $rk(A^* A) = rk A$

► Докажем, что  $Ker A^* A \subset Ker A$ :

$$x \in Ker A \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^* Ax = A^* 0 = 0$$

Докажем, что  $Ker A \subset Ker A^* A$ :

Пусть  $z \in Ker A^* A$

$$A^* Az = 0$$

$$z^* A^* A z = 0$$

$$(Az)^* Az = 0$$

$$|\tilde{z}_1|^2 + \dots + |\tilde{z}_n|^2 = 0$$

$$\tilde{z} = Az$$

$$\tilde{z}_1 = \dots = \tilde{z}_n = 0 \Rightarrow Az = 0 \Rightarrow z \in \text{Ker} A$$

Тогда  $\dim(\text{Im} A) = n - \dim(\text{Ker} A) = n - \dim(\text{Ker} A^* A) = \dim(\text{Im} A^* A)$

$$\Rightarrow rk A = rk(A^* A) \quad \blacksquare$$

Тогда если матрица  $A_{m \times n}$  имеет ранг  $n$ , то  $(A^* A)_{n \times n}$  невырождена.

Доказательство Теоремы 2:

► Проверим свойства определения при  $A^+ = (A^* A)^{-1} A$ .

$$1. AA^+ A = A$$

$$A^+ A = (A^* A)^{-1} A^* A = E$$

$$AE = A$$

$$2. A^+ AA^+ = A^+$$

$$EA^+ = A^+$$

$$3. (AA^+)^* = AA^+$$

$$(A(A^* A)^{-1} A^*)^* = (A^*)^* ((A^* A)^{-1})^* A^* = A((A^* A)^*)^{-1} A^* = A(A^* A)^{-1} A^* = AA^+$$

$$4. (A^+ A)^* = AA^+$$

$$E^* = E \quad \blacksquare$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $B$  — матрица полного строчного ранга. Тогда

$$B^+ = B^* (BB^*)^{-1}$$

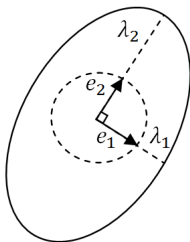
► Так как  $B^*$  — матрица полного столбцового ранга, то по Теореме 2,

$$(B^*)^+ = (B^* B)^{-1} B^*$$

По свойству 6,

$$B^+ = ((B^*)^+)^* = ((B^* B)^{-1} B^*)^* = B(BB^*)^{-1} \quad \blacksquare$$

$$S^* = S \rightarrow S' = U^* S U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}$$



**Пример 3.**

Найти  $A^+$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^* A) = 2 \cdot 3 - (2 - 1) + (1 - 2) = 6 - 1 - 1 = 4$$

$$(A^* A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Утверждение.** Любую прямоугольную матрицу  $A_{m \times n}$  можно представить в виде

$A_{m \times n} = B_{m \times r} C_{r \times n}$ ,  $r = rkA$ , где  $B$  — матрица полного столбцового ранга, а  $C$  — матрица полного строчного ранга.

Такое разложение называется **скелетным разложением** (разложением полного ранга).

#### Пример 4.

Найти скелетное разложение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Приведем к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rkA = 2$$

Надо найти такие  $B$  и  $C$ , что  $A_{3 \times 3} = B_{3 \times 2} C_{2 \times 3}$ .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Здесь  $B$  — столбцы исходной матрицы,  $C$  — канонический вид.

**Утверждение.** Для скелетного разложения  $A^+ = (BC)^+ = C^+ B^+$ , где  $B^+ = (B^* B)^{-1} B^*$ , так как столбцового ранга, а  $C^+ = C^* (C C^*)^{-1}$ , так как строчного ранга.

(продолжение решения)

$$B^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B^* B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(B B^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(CC^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = C^+ B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

### Домашнее задание 1

1. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^+$$

2. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^+$$

3. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^+$$

4. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^+$$

5. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^+$$

6. Пусть  $A$  — матрица размера  $m \times n$  с рангом  $r$  и пусть

$$K = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

имеет канонический вид, где  $G$  верхняя  $r \times n$  подматрица без нулевых строк и  $0$  означает нулевую подматрицу. Пусть  $i_1, \dots, i_r$  значения столбцов, где находятся

ведущие коэффициенты ступенчатого разложения, и пусть  $F$  подматрица  $A$  получена из столбцов  $i_1, \dots, i_r$ . Докажите, что

$$A = FG$$

и что это разложение полного ранга (скелетное разложение)  $A$ .

7. Найти разложение полного ранга (скелетное разложение)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^+$$

9. Пусть  $E_{ij}$  матрица размера  $n \times n$ , такая что ее элементы в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце единицы, а все остальные элементы нули. Найти разложение полного ранга и псевдообратную матрицу.

10. Докажите:

- (a)  $Im(AA^+) = Im(AA^*) = ImA$ ;
- (b)  $Ker(AA^+) = Ker(AA^*) = KerA^*$ ;
- (c)  $ImA^+ = ImA^*$ ;

## Лекция 2

### Пример 1.

Найти псевдообратную матрицу.

$$A = CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = B^+C^+ \\ B^+ = B^*(BB^*)^{-1}, C^+ = (A^*A)^{-1}A^*$$

$$BB^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$



$$(BB^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^*C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(C^*C)^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 15 \end{pmatrix}$$

$$C^+ = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -14 \\ -1 & -2 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = B^+C^+ = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -14 \\ -1 & -2 & -3 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 16 & 24 & -42 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -4 & -8 & -12 & 42 \end{pmatrix}$$

Если  $A = FG$  — скелетное разложение, то  $A^+ = G^+F^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = XY$  и  $X^* = X, Y^* = Y, rk(A^*A) = rkA$ .

**Утверждение.**  $X$  — решение  $AX = B$  тогда и только тогда, когда  $X$  — решение  $A^*AX = A^*B$ .

Если  $N = A^*A$ , то  $N^* = N$  — квадратная самосопряженная матрица.

**Пример 2.**

$$1. \operatorname{Im}(AA^*) \stackrel{?}{=} \operatorname{Im}A$$

Из доказательства леммы  $rk(A^*A) = rkA$  — ранги равны, значит и размерности равны.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}A &= \{AX\} \supset \{AA^*Y\} = \operatorname{Im}AA^* \\ \dim(\operatorname{Im}A) &= \dim(\operatorname{Im}AA^*) \end{aligned}$$

$$2. \operatorname{Im}(AA^*) = \operatorname{Im}A \stackrel{?}{=} \operatorname{Im}(AA^+)$$

$$ImA \supset Im(AA^+) \supset Im(AA^+A) \stackrel{1}{=} ImA$$

$$3. \quad \begin{aligned} ImA^* &\stackrel{?}{=} ImA^+ \\ KerA^* &\stackrel{?}{=} KerA^+ \end{aligned}$$

Достаточно доказать одно из утверждений.

$$\begin{aligned} ImA^+ &\supset Im(A^+A) \supset Im(A^+AA^+) = ImA^+ \\ ImA^+ &= (ImA^+A) \stackrel{4}{=} Im(A^+A)^* = Im(A^*(A^+)^*) \subset ImA^* \\ rkA^+ &= rk(FG)^+ = rk(G^+F^+) = rk(GF) \leq r = rkA \\ rkA &= rk(A^+)^+ \leq rkA^+ \end{aligned}$$

То есть получили, что  $rkA^+ = rkA = rkA^*$  — ранги равны, а значит равны и размерности:

$$\begin{aligned} ImA^+ &= ImA^* \\ KerA^+ &= KerA^* \end{aligned}$$

**Теорема.** Пусть  $A\bar{x} = \bar{b}$  — система линейных уравнений, которая может не иметь решение, тогда  $\bar{u}$  — решение системы по **методу наименьших квадратов**, если для  $\forall x$  длина вектора  $A\bar{x} - \bar{b}$  не меньше, чем длина вектора  $A\bar{u} - \bar{b}$ , то есть если  $f(x) = A\bar{x} - \bar{b} \in \mathbb{C}^n$ , то  $|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2$  минимально при  $\bar{x} = \bar{u}$ .

**Теорема.** Вектор  $\bar{u} = A^+\bar{b}$  является решением системы  $A\bar{x} = \bar{b}$  по методу наименьших квадратов (мнк), причем среди всех этих решений вектор  $\bar{u}$  имеет наименьшую длину. Решение по методу наименьших квадратов также называют псевдорешением.

### Пример 3.

Найти решение системы по методу наименьших квадратов.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 1) \right)^+ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 4 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$



### Сингулярное разложение (SVD).

$A = Q\Sigma P^*$   $A : X \rightarrow Y$  — отображение, где  $X$  — размерности  $n$ , а  $Y$  — размерности  $m$ .

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \sigma_r & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$Q$  — ортогональная матрица  $m \times m$ ,  $P$  — ортогональная матрица  $n \times n$ ,  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ .

Для  $A^*A$  существует базис из собственных векторов  $e_1, \dots, e_n$  (где она диагональна). Она неотрицательно определена и существуют собственные векторы  $A^*Ae_i = \sigma_i^2 e_i$ .

$$\begin{cases} f_1 = \frac{Ae_1}{\sigma_1} \\ \dots \\ f_r = \frac{Ae_r}{\sigma_r} \end{cases}$$

$$Ae_i = \begin{cases} \sigma_i f_i, & i \leq r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

$$A^* f_i = \begin{cases} \sigma_i e_i, & i \leq r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

В матрице  $Q$  по столбцам стоят векторы  $f_1, \dots, f_r$  (уже получены),  $f_{r+1}, \dots, f_m$  (из ортогонализации Грама-Шмидта) в базисе  $Y$ .

$P$  — столбцы координат  $e_1, \dots, e_n$  в базисе  $X$ .

### Пример 4.

Найти SVD.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^* \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения и векторы  $\tilde{A}^* A$ .

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$\lambda_4 = 4$$

Сингулярные числа надо расположить по убыванию.

$$\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$$

$$\sigma_2 = 1$$

$$\sigma_3 = 1$$

$$\sigma > 0$$

$$\Sigma_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы.

1.  $\lambda = 4$

$$(\tilde{A}^* \tilde{A} - \lambda_i E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}x_4, x_2 = \frac{1}{3}x_4, x_3 = \frac{1}{3}x_4$$

Получим собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot c, c \neq 0$$

$$e_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.  $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Получим собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2, \quad c_1^2 + c_2^2 > 0$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$f_1 = \frac{\tilde{A}e_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{\tilde{A}e_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \frac{\tilde{A}e_3}{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (f_1, f_2, f_3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} = Q\Sigma P^* &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^* = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

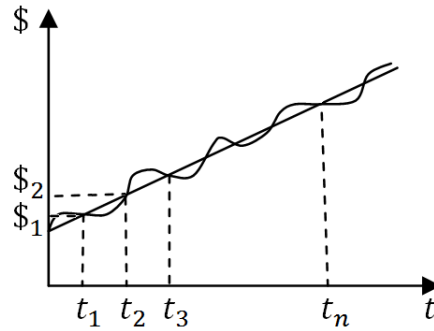
**Утверждение.** Если  $B = AU$ , где  $U^* = U^{-1}$  унитарная, то  $B^+ = U^+ A^+ = U^* A^+$ .

**Следствие.** Если  $A = Q\Sigma P^*$ , то

$$A^+ = P\Sigma^+ Q^* = P \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma_2^{-1} & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot Q^*$$

**Линейная регрессия.**

**Модель 1:**



$$\text{\$} = kt + b$$

$$\begin{cases} \$_1 = kt_1 + b \\ \$_2 = kt_2 + b \\ \dots \end{cases}$$

Надо найти  $k$  и  $b$ .

В матричном виде  $A\bar{X} = \bar{S}$ , где

$$X = \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}, A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \$_1 \\ \vdots \\ \$_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} = \bar{X} = A^+ \bar{S}$$

### Модель 2:

Если  $x(t)$  — цена на нефть, то  $\$(t)x(t) = k_1 t + b_1$ .

### Домашнее задание 2

1. Доказать утверждение о псевдообратной от произведения матриц. Если  $B = AU$ , где  $U^* = U^{-1}$  — унитарная матрица, а  $A$  — произвольная матрица порядка  $n$ , то

$$B^+ = U^+ A^+ = U^* A^+$$

2. С помощью линейной регрессии и псевдообратной матрицы сделать прогноз цены нефти  $Br$  в долларах, рублях. Сравнить результаты, полученные с помощью модели 1 и модели 2.

3. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -3i & 4 \end{pmatrix}$$

4. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Найти псевдообратную матрицу, используя SVD:

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 9 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

## Лекция 3

**Полиномиальная интерполяция.**

**Дано:**

$f(x)$  — неизвестный многочлен степени  $\leq n$

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Известны значения  $f(x)$  в точках  $x_0, \dots, x_n$  (всего  $n + 1$  значений)

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ \dots \\ y_n = f(x_n) \end{cases}$$

**Найти:**  $f(x)$

**Ответ:** многочлен Лагранжа

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

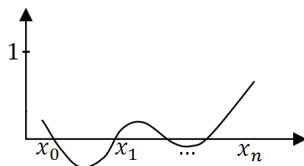
$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Матрица Вандермонда:  $V(x_0, \dots, x_n) = V$

$$V\bar{a} = \bar{y}, \bar{a} = V^{-1}\bar{y}$$

Определитель Вандермонда:  $v(x_0, \dots, x_n) = \det V(x_0, \dots, x_n) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \dots (x_n - x_0)(x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$



Многочлен Лагранжа:

$$f(x) = L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{\prod_j (x - x_j)}{\prod_j (x_i - x_j)} = \frac{\sum_{i=0}^n y_i v(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n)}{v(x_0, \dots, x_n)}.$$



**Пример 1.**

Дано:

$$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$y_0 = -2, y_1 = -1, y_2 = 2$$

Провести параболу через три точки. Найти  $f(x) = L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ .

$$f(x) = \frac{-2(0-x)(1-x) + (-1)(x+1)(1+1)(1-x) + 2(0+1)(x+1)(x-0)}{(0+1)(1+1)(1-0)} =$$

$$= x^2 + 2x - 1$$

$$f(x) = (x-1)g(x) \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$f(x) = (x-1)^2g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2(x-1)g(x) + (x-1)^2g'(x)$$

**Лемма.**

$$f(x) = (x-x_1)^k g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) = 0 \\ f'(x_1) = 0 \\ \dots \\ f^{(k-1)}(x_1) = 0 \end{cases}$$

**Интерполяция с кратными узлами.****Задача (кратко):** Восстановить многочлен  $f(x)$  по значениям в  $m$  точках кратностей  $k_1, \dots, k_m$ .**Формулировка:** Найти многочлен  $f(x)$  степени  $\leq n-1$  такой, что для некоторых различных узлов  $x_1, \dots, x_m$  и некоторых натуральных  $k_1, \dots, k_m$  (кратностей) верно

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1, f'(x_1) = y_1^{(1)}, \dots, f^{(k_1-1)}(x_1) = y_1^{(k_1-1)} \\ \dots \\ f(x_m) = y_m, f'(x_m) = y_m^{(1)}, \dots, f^{(k_m-1)}(x_m) = y_m^{(k_m-1)} \end{cases}$$

Количество условий равно количеству неизвестных  $k_1 + \dots + k_m = n$ .**Ответ:** Многочлен Эрмита (или Лагранжа-Сильвестра).**Утверждение.** Такой многочлен существует и он единственный при  $k_1 + \dots + k_m = n$ .Примечание: Если  $k_1 = \dots = k_m = 1$ , то  $m = n$  и  $f(x)$  - многочлен Лагранжа (то есть предыдущий случай).► Пусть существует два таких многочлена  $f(x)$  и  $g(x)$ , то для  $p(x) = f(x) - g(x)$ 

$$p^{(t)}(x_i) = 0, i = 1, \dots, m, t \leq k_i$$

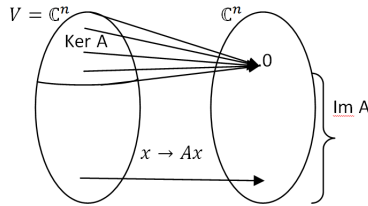
$$p(x) = C(x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_k)^{k_k} = C \text{ (многочлен степени } n+1)$$

$$\Rightarrow C = 0, p(x) = 0$$

Значит, если  $f(x)$  существует, то он единственный.Если  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ , то

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(k_m-1)} \end{pmatrix}$$

То есть, доказали, что система для любого  $\bar{y}$  имеет не больше одного решения  $\bar{a}$ .



$Im A = \{A\bar{x} | \bar{x} \in \mathbb{C}^n\}$ ,  $Ker A = \{\bar{a} | A\bar{a} = \bar{0}\} = \{\bar{0}\}$ , так как у системы  $A\bar{a} = \bar{0}$  не больше одного решения.

Так как  $A$   $n \times n$ , то  $dim(Im A) = rk A$ ,  $dim(Ker A) = n - rk A$ .

$Ker 0 \Leftrightarrow dim(Ker A) = 0$ , то есть  $rk A = n$  ( $A$  невырожденная).

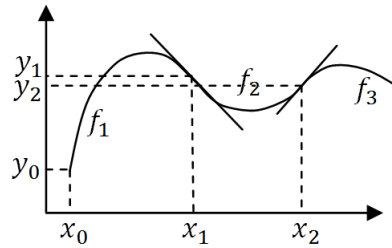
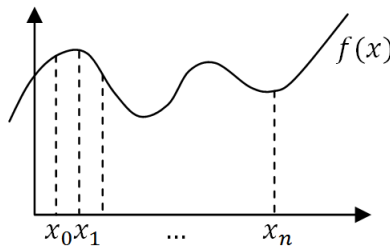
Матрица  $A$  невырожденная  $\Leftrightarrow rk A = n \Leftrightarrow Im A = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow Ker A = 0$ , значит,  $\bar{a} = A^{-1}\bar{y}$ , всегда существует решение. ■

## Сплайны.

### 1. Квадратичный.

Надо установить функцию  $f(x)$ .

Аппроксимация: соседние точки надо соединить прямыми (не плавно). Но мы хотим гладко, значит на каждом отрезке надо задать свою функцию.

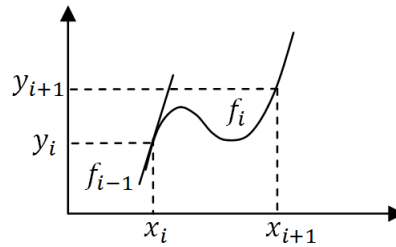


$$\begin{cases} f_1'(x_0) = d_0 \\ f_1(x_0) = y_0 \\ f_1(x_1) = y_1 \\ \begin{cases} f_1'(x_1) = f_2'(x_1) \\ f_2(x_1) = y_1 \\ f_2(x_2) = y_2 \end{cases} \end{cases}$$

..... и т.д.

## 2. Кубический.

$f_i(x)$  - кубическая парабола.



$$\begin{cases} f_i(x_i) = y_i \\ f_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ f_i'(x_i) = f_{i-1}'(x_i) \\ f_i''(x_i) = f_{i-1}''(x_i) \end{cases}$$

$$f_i(x) = a_0^i + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3 = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

### Пример 2.

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Аппроксимировать квадратичным сплайном с узлами  $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$ .

$$\begin{cases} f(0) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = -6 \\ f(2) = 0 \\ f(4) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ f_1'(0) = a_1 = 11 \\ f_1(0) = a_0 = -6 \\ f_1(2) = -6 + 11 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow a_2 = -4 \end{cases}$$

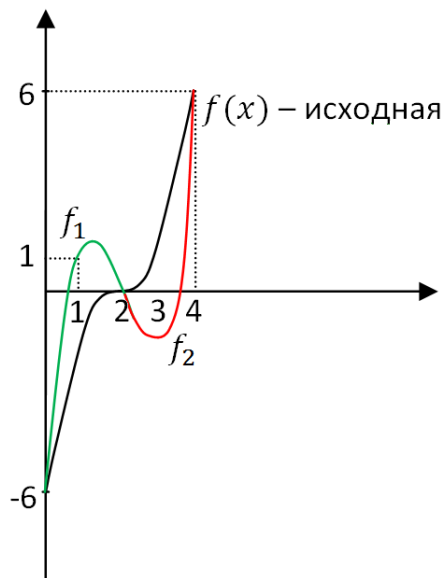
Получим  $f_1 = -6 + 11x - 4x^2$ .

$$\begin{cases} f_1 = -6 + 11x - 4x^2 \\ f_2'(2) = f_1'(2) = -5 \\ f_2(2) = 0 \\ f_2(4) = 6 \end{cases}$$

Подставим значения из предыдущих выражений.

$$\begin{cases} f_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 = 0 \\ b_1 + 4b_2 = -5 \\ b_0 + 4b_1 + 16b_2 = 6 \end{cases}$$

Получим  $f_2 = 4x^2 - 21x + 26$ .

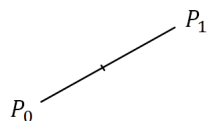


### Кривая Безье.

Есть набор из  $n$  точек, хотим построить прямую, хорошо вписываемую в оболочку.

Параметризация отрезка для 2 точек, степень полинома  $n = 1$ :

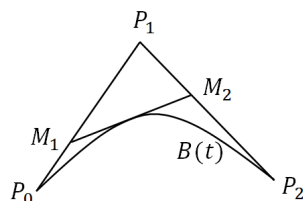
$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$



Параметризация отрезка для 3 точек, степень полинома  $n = 2$ .

Введем вспомогательные точки  $M_1, M_2$  такие, что

$$M_1 = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad M_2 = (1 - t)P_1 + tP_2 \\ B(t) = (1 - t)M_1 + tM_2 = (1 - t)^2P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2P_2$$

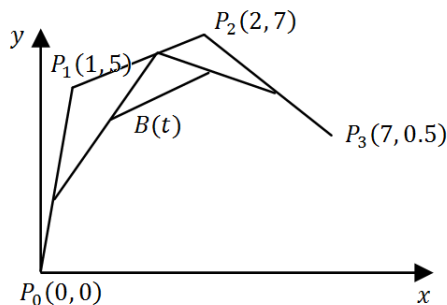


Параметризация отрезка для  $n + 1$  точек, степень полинома  $n$ .

$$B(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k (1-t)^{n-k} t^k P_k$$

### Пример 3.

Построить кубическую кривую Безье  $B_3(t)$  для 4 точек,  $t \in [0, 1]$ .



$$x(t) = 1 \cdot (1-t)^3 \cdot t^0 \cdot 0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t^1 \cdot 1 + 3 \cdot (1-t)^1 \cdot t^2 \cdot 2 + (1-t)^0 \cdot t^3 \cdot 7 = 4t^3 + 3t$$

$$y(t) = 1 \cdot (1-t)^3 \cdot t \cdot 0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot 5 + 3 \cdot (1-t)^1 \cdot t^2 \cdot 7 + 1 \cdot (1-t)^0 \cdot t^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}t^3 - 9t^2 + 15t$$

### Домашнее задание 3

1. Приблизить следующую функцию  $y(x)$  многочленом второй степени по методу наименьших квадратов:

$x$	-3	-1	0	1	3
$y$	-4	-0.8	1.6	2.3	1.5

2. Доказать, что кривая Безье касается первого и последнего отрезка ломаной.
3. Известно, что  $f(x)$  — многочлен третьей степени такой, что:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = -3 \\ f(2) = 17 \\ f(-2) = -19 \end{cases}$$

Найти  $f(x)$ .

4. Найти  $f(x)$  многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 5 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = -1 \end{cases}$$

5. Приблизить  $\sin x$  сплайном  $S(x)$  степени два с узлами  $\pi k$ ,  $\pi k + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Найти

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right), S\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

6. На плоскости 100 точек, любые 4 из них лежат на параболе вида  $y = ax^2 + bx + c$ .  
Доказать, что тогда все 100 точек будут лежать на одной и той же параболе.

## Лекция 4

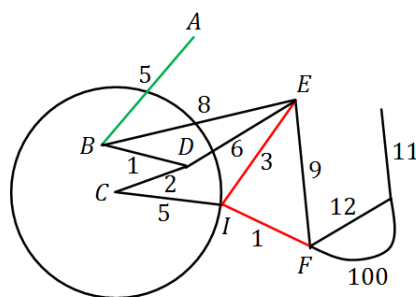
### Метрики, линейные пространства.

**Метрика**  $\rho$  на множестве  $M$  — это такая функция  $\rho(x, y) \geq 0$ , что

1.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
2.  $\rho(x, y) > 0, x \neq y, \rho(x, x) = 0$
3.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Дана карта с расстояниями между городами.

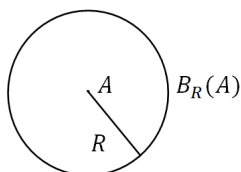
$M = \{ \text{города} \}$



$$\rho(A, B) = 5$$

$$\rho(E, F) = 4 \text{ (минимальное расстояние из возможных)}$$

### Шар в метрическом пространстве.



$B_R(A) = \{x | \rho(A, x) \leq R\}$  — **шар** радиуса  $R$  с центром в точке  $A$ .

$S_R(A) = \{x | \rho(A, x) = R\}$  — **сфера** радиуса  $R$  с центром в точке  $A$ .

$B_5(C) = \{C, B, D, I\}$  — все точки, которые туда входят.

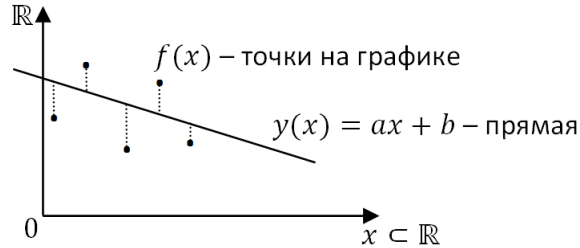
$S_5(C) = \{I\}$  — только те точки, которые лежат на окружности.

$B_{100}(C) = B_{50}(C) = M$  — все множество.

Метод наименьших квадратов — приближение функции в смысле следующей метрики

$$M = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}, X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\rho(f, y) = |\bar{y} - \bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y(x_i) - f(x_i))^2}$$

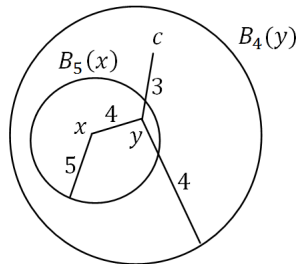


### Пример 1.

Найти такое метрическое пространство  $M$ , что

$$\begin{cases} B_5(x) \subset B_4(y) \\ B_5(x) \neq B_4(y) \end{cases}, \text{ где } x, y - \text{две точки.}$$

То есть доказать, что существует  $c \in B_4(y), c \notin B_5(x)$ .



$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho(y, x) = 4 \\ \rho(y, c) &= \rho(c, y) = 3 \\ \rho(x, c) &= \rho(c, x) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5(x) &= \{x, y\} \\ B_4(y) &= \{x, y, c\} \end{aligned}$$

То есть  $B_5(x) \subset B_4(y)$ .

Вспомним определение линейного пространства.

Если на непустом множестве заданы две бинарные операции "+" и "умножение на число", числа из поля  $F$ ,  $\forall a, b, c \in V$  то

1.  $a + (b + c) = (a + b) + c$
2.  $\exists 0 : a + 0 = 0 + a = a$
3.  $\exists (-a) : a + (-a) = 0$
4.  $a + b = b + a$

$$5. 1 \cdot x = x$$

$$6. (\mu\lambda)x = \mu(\lambda x)$$

$$7. (a + b)\lambda = a\lambda + b\lambda$$

$$8. (\mu + \lambda)a = \mu a + \lambda a$$

$V$  — **линейное пространство** (векторное пространство), если выполнены 8 предыдущих аксиом и

$$1. \forall \bar{u}, \bar{v}: \bar{u} + \bar{v} \in V$$

$$2. \forall \text{ числа } \alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \alpha \bar{u} \in V$$

(или  $\alpha \in F$  заданное поле, например,  $F_2 = \{0, 1\}$ )

Линейное пространство  $V$  — **нормированное**, если на нем задана такая норма  $\nu: V \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ , что

$$1. \nu(\bar{x}) > 0, \bar{x} \neq \bar{0}, \nu(\bar{0}) = 0$$

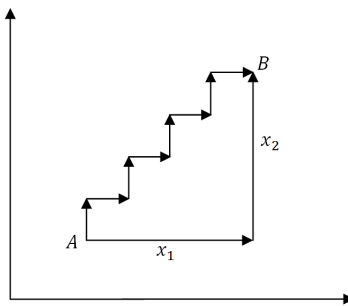
$$2. \nu(\alpha \bar{x}) = |\alpha| \nu(\bar{x})$$

$$3. \nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y}) \text{ для } \forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \forall \alpha$$

Из каждой нормы можно сделать метрику  $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \nu(\bar{y} - \bar{x})$ .

**Примеры норм:**

1. Манхэттенская норма (норма таксиста)  
(Можно ехать разными путями, но не по прямой)



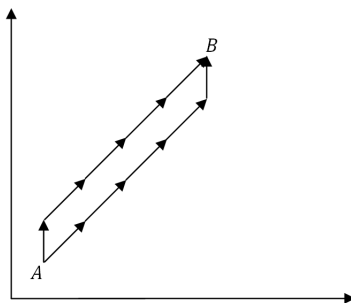
$$\nu_M(\bar{x}) = |x_1| + \dots + |x_n| \text{ в } \mathbb{R}^n, \text{ где } \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

2. Евклидова норма  
(Для приближения)

$$\nu_E(\bar{x}) = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \text{ в } \mathbb{R}^n$$



3. Норма максимума  
(Уменьшает ошибку по всем координатам)



$$\nu_{\max}(\bar{x}) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

4. Норма Гёльдера

$$\begin{aligned}\nu_p(\bar{x}) &= \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \text{ в } \mathbb{R}^n \\ \nu_1(\bar{x}) &= |x_1| + \dots + |x_n| = \nu_M(\bar{x}) \\ \nu_2(\bar{x}) &= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \nu_E(\bar{x}) \\ \nu_\infty(\bar{x}) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}\end{aligned}$$

Если  $|x_i| = \max |x_i|$ , то  $\sqrt[p]{|x_i|^p} \rightarrow |x_i|$ , получим:

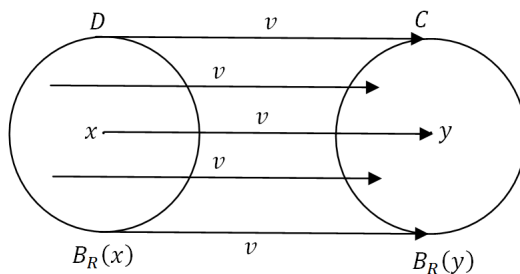
$$\nu_\infty(\bar{x}) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \nu_{\max}(\bar{x})$$

**Утверждение.** В нормированном пространстве  $V$  верно:

1.  $\forall \bar{x}, \bar{y}$   $B_R(\bar{x})$  равен  $B_R(\bar{y})$  (как геометрическая фигура).  
► Пусть  $\bar{v} = \bar{y} - \bar{x}$ , тогда

$$B_R(\bar{y}) = \bar{v} + B_R(\bar{x})$$

Ко всем точкам из  $B_R(\bar{x})$  прибавим одинаковый вектор  $\bar{v}$ .



$$\begin{aligned}C \in B_R(y) &\Leftrightarrow \nu(C - y) \leq R \\ \nu((C - (\bar{y} - \bar{x})) - \bar{x}) &\leq R\end{aligned}$$

То есть,  $D = C - (\bar{y} - \bar{x}) \in B_R(\bar{x})$ . ■

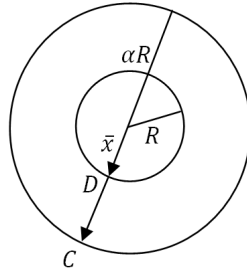
2. Шары  $B_R(\bar{x})$  и  $B_{\alpha R}(\bar{x})$ ,  $\alpha > 0$  подобны с коэффициентом подобия  $\alpha$ .



$$\nu(xD) = \frac{1}{\alpha} \nu(xC)$$

$$D = x + xD = x + \frac{1}{\alpha} xC$$

$$\rho(D, x) = \nu(xD) = \frac{1}{\alpha} \nu(C - x) = \nu\left(\frac{1}{\alpha}(C - x)\right)$$



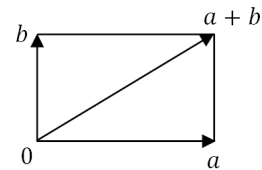
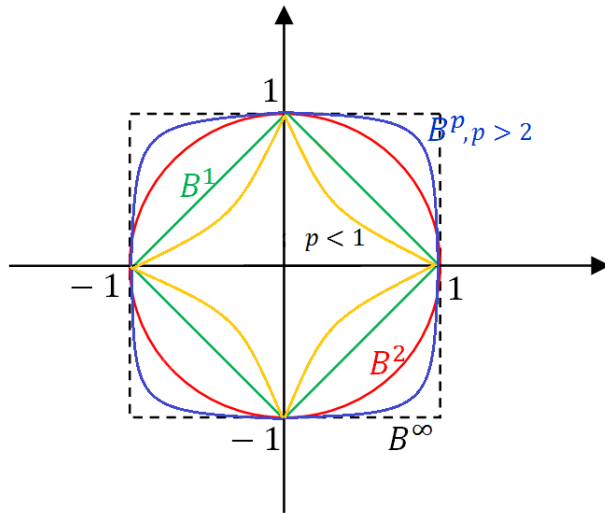
$$C \in B_{\alpha R}(x) \Leftrightarrow \nu(C - x) \leq \alpha R$$

$$\rho(D, x) = \nu\left(\frac{C - x}{\alpha}\right) \leq R$$

То есть  $D \in B_R(\bar{x})$ . ■

$\nu_p$  — норма только при  $p \geq 1$  (для невыпуклых — неверно, не выполняется неравенство треугольника).

$B^p = B_1(\bar{0})$  относительно  $\nu_p$ .



**Пример 2.**

Для каких  $R_1, R_2$  возможно  $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$ ?

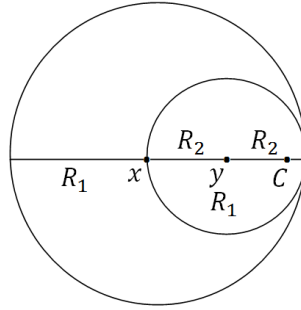
Если  $R_2 > R_1$  — возможно (даже при  $x = y$ ).

При  $R_1 = 5, R_2 = 4$  — возможно (из предыдущего примера).

Докажем, что при  $R_1 > R_2$  это не всегда верно, а именно: при  $2R_2 > R_1$  — верно, а при

$R_2 \leq \frac{R_1}{2}$  — нет.

Рассмотрим случай  $2R_2 = R_1$ .



Тогда  $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$ ,  $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$ , то есть  $B_{R_1}(x) = B_{R_2}(y)$  — множества совпадают, то есть уже не подходит.

Рассмотрим случай, когда  $R_1$  чуть меньше  $2R_2$ .

Тогда  $B_{R_1}(x) = \{x, y\}$ ,  $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$ , то есть  $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$  верно.

Рассмотрим случай, когда  $R_1$  чуть больше  $2R_2$ .

Тогда  $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$ ,  $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$ , то есть,  $B_{R_2}(y) \subseteq B_{R_1}(x)$ , значит не подходит.

Линейное пространство называется **евклидовым пространством**, если на нем задано скалярное произведение  $g(x, y)$ :

1.  $g(x, y) = g(y, x)$
2.  $g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$
3.  $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$
4.  $g(x, x) \geq 0, g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

В евклидовом пространстве есть стандартная норма  $\|x\| = \sqrt{g(x, x)}$ .

$L_2[0, 1]$  — множество функций, квадрат которых интегрируем по Риману.

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

$x_n \rightarrow x$  **сходится по норме**  $\nu(x)$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ , что  $\forall n > N(\varepsilon)$  верно  $\nu(x_n - x) < \varepsilon$ .

### Пример 3.

Является ли нормой на множестве непрерывно дифференцируемых функций  $C^1[a, b]$  следующее выражение:

$$\mu(f) = \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |f'(x)|) ?$$

Да, так как выполняются все свойства нормы.

$$1. \mu(f) > 0$$

$$2. \mu(\lambda f) = \lambda \mu(f)$$

$$3. \mu(f + g) = \max(|f + g| + |(f + g)'(x)|)$$

$$\mu(f) + \mu(g) = \max(|f| + |g| + |f'| + |g'|)$$

А так как  $|f + g| \leq |f| + |g|$ , то выполняется неравенство треугольника

$$\mu(f + g) \leq \mu(f) + \mu(g).$$

### Пример 4.

Следует ли из сходимости по норме  $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$  сходимость по  $\mu(f)$ , где

$$\mu(f) = \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |f'(x)|) ?$$

Верно ли обратное?

Докажем, что  $f_k(x) \xrightarrow{\|f\|} f(x)$  и  $f_k(x) \not\xrightarrow{\mu(f)} f(x)$ .

$$f = x, f' = 1$$

$$f_k = \frac{1}{k} \sin(xk^2) + x$$

$$|f - f_k| \leq \frac{1}{k} |\sin(xk^2)| \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0, \text{ то есть, сходится по норме.}$$

$$f'_k = 1 + k \cdot \cos(xk^2)$$

$\max\{|f(x) - f_k(x)| + |f'(x) - f'_k(x)|\} = \max\{|\frac{1}{k} \sin(xk^2)| + |1 - 1 - k \cdot \cos(xk^2)|\} \rightarrow \infty$ , то есть, не сходится по  $\mu(f)$ .

Обратное утверждение верно. При сходимости по  $\mu(f)$  получим, что  $|f(x) - f_k(x)| \rightarrow 0$ , то есть сходится по норме.

### Домашнее задание 4

$$1. B(x, y) = \{x^2 + axy + 4y^2 \leq 1\}$$

При каких  $a$  на множестве  $\mathbb{R}^2$  существует норма  $\nu$  такая, что  $B(x, y)$  — единичный шар относительно нее?

Найдите в этом случае

$$\nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Будет ли метрикой на  $\mathbb{R}$  функция  $\rho(x, y) =$

$$(a) |x^2 - y^2|$$

$$(b) \sin(x - y)$$

$$(c) |e^x - e^y|$$

3. Существует ли убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств с пустым пересечением (в произвольном метрическом пространстве)?

4. Доказать, что шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством. То есть доказать, что если  $x, y$  принадлежат шару, то и весь отрезок  $[x, y]$  принадлежит шару.

## Лекция 5

Множество **замкнутое**, если оно включает свою границу.

$V$  — линейное пространство,  $\nu$  — **норма** на  $V$  ( $\nu : V \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ ) если:

$$1. \nu(\bar{x}) > 0, \bar{x} \neq \bar{0}, \nu(\bar{0}) = \bar{0}$$

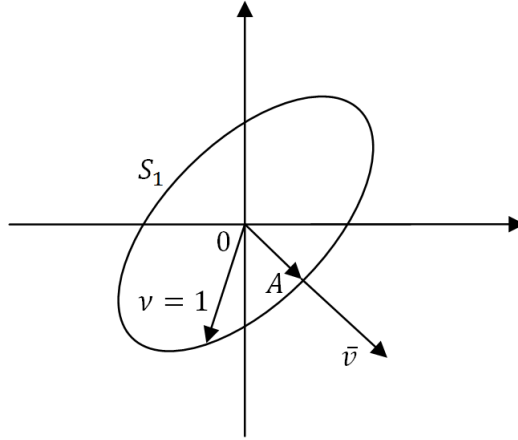
$$2. \nu(\alpha \bar{x}) = |\alpha| \nu(\bar{x})$$

$$3. \nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y}) \text{ для } \forall x, y \in V, \forall \alpha$$

$$\nu(x) = |x|$$

$$\mathbb{R}^2, \nu(\bar{x})=?, \nu(\bar{v})=?$$

$$B_1^\nu(\bar{0}) = B_1^\nu$$



$A = \text{луч} \cap S_1$ ,  $S_1$  — граница  
 $\nu(OA) = 1$

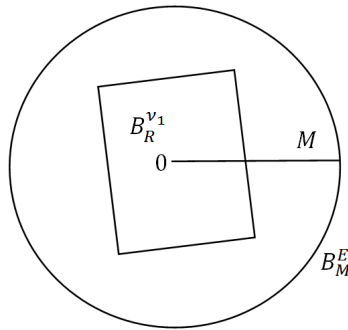
$$\nu(v) = \lambda \nu(OA) = \lambda, \text{ если } v = \lambda OA, \lambda = \frac{|v|}{|OA|}$$

**Лемма.** Пусть  $\nu_1, \nu_2$  — две нормы на  $\mathbb{R}^n$ , тогда существует такое  $c > 0$ , что любой шар одной нормы содержится в другом шаре другой нормы.

$$B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{\nu_2}.$$

**Следствие.** Любые две нормы в  $\mathbb{R}^n$  эквивалентны, то есть для  $\forall \nu_1, \nu_2 \exists c_1, c_2$ , что для  $\forall \bar{x}$  верно  $c_1 \nu_1(x) \leq \nu_2(x) \leq c_2 \nu_1(x)$ .

**Следствие.** Шар  $B_1^{\nu_1}$  — ограниченное множество, то есть  $B_R^{\nu_1} \subset \{\bar{x} \mid |\bar{x}| \leq M\} = B_M^E$  (евклидов шар).



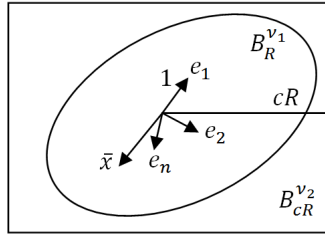
►  $\nu_2$  = евклидова длина,  $M = cR$  ■

**Доказательство леммы.**

► Пусть

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n \in B_1^{\nu_1} (R = 1)$$

$$\nu_2(\bar{x}) = \nu_2(x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n) \leq \nu_2(x_1e_1) + \dots + \nu_2(x_ne_n) = |x_1|\nu_2(e_1) + \dots + |x_n|\nu_2(e_n) \leq \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

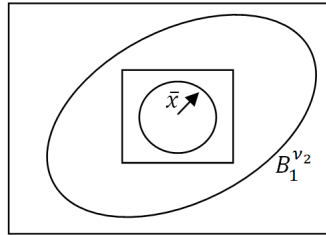


Пусть  $|\bar{x}|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ ,  $M = \max_{i=1,\dots,n} \nu_2(e_i)$ , тогда  $\nu_2(x) \leq |\bar{x}|_\infty nM$ , то есть

$$B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{|\cdot|_\infty}, c = nM.$$

Доказали, что любой единичный шар можно поместить в квадрат со стороной  $cR$ .

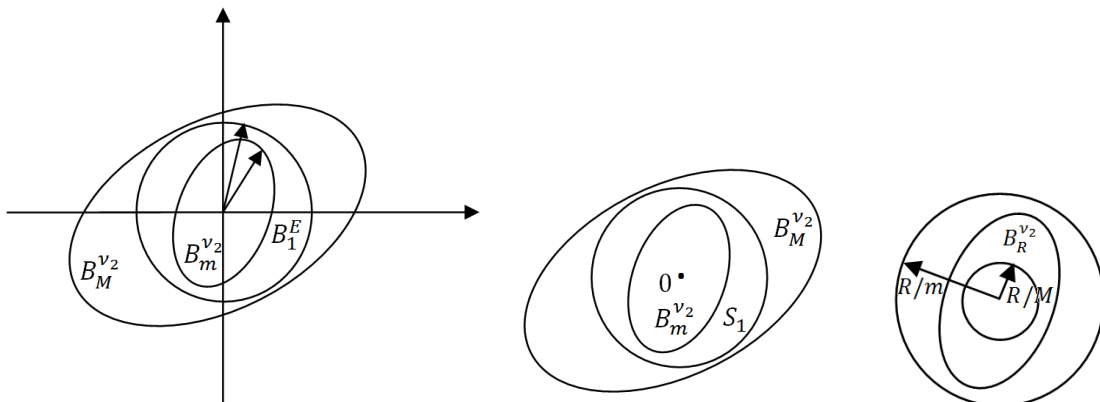
Если  $|x|_\infty \leq \frac{1}{nM}$ , то  $\nu_2(x) \leq 1, x \in B_1^{\nu_2}$ .



Внутри любого единичного шара существует квадрат, то есть существует куб, который содержит его целиком. Осталось доказать, что шар — ограниченное множество. Докажем от противного.

$$B_1^\nu = \{x | \nu(\bar{x}) \leq 1\}$$

Пусть существует  $\{x^1, x^2, \dots\} : \{|x^1|, |x^2|, \dots\} \rightarrow +\infty$ , тогда она существует, если  $B_1^\nu$  неотрицательное множество.



$m \leq \nu_2(B_1^E) \leq M$ , где  $m > 0$ ,  $M$  — ограниченное множество, тогда (так как все шары подобны):

$$\begin{cases} B_m^{\nu_2} \subset B_1^E \subset B_M^{\nu_2} \\ B_R^{\nu_2} \subset B_{R/m}^E \\ B_{R/M}^E \subset B_R^{\nu_2} \end{cases}$$

■

**Теорема Минковского.** Множество  $B \subset \mathbb{R}^n$  является единичным шаром  $B_1^\nu$  относительно какой-либо нормы  $\nu$  тогда и только тогда, когда  $B$ :

1. замкнуто
2. ограничено ( $B \subset B_M^E$ )
3. содержит окрестность нуля (то есть  $B \supset B_m^E$ )
4. выпукло
5. центрально симметрично (если  $\bar{x} \in B$ , то и  $-\bar{x} \in B$ )

**Пример 1.**

$$B = \{x^2 + axy + 4y^2 \leq 1\}$$

Существует ли такая норма  $\nu$ , что  $B$  — единичный шар относительно нее ( $B = B_1^\nu$ )?

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 - \frac{a^2}{4} > 0$$

То есть это эллипс, все 5 свойств из предыдущей теоремы выполняются, значит при  $|a| < 4$   $B$  — единичный шар относительно нормы.

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 - \frac{a^2}{4} < 0$$

В этом случае множество не будет замкнутым, то есть не выполняются все свойства из предыдущей теоремы, значит в этом случае  $B$  не будет единичным шаром относительно нормы.

При  $\Delta_2 = 0$ :  $a = \pm 4$  и  $x^2 \pm 4xy + 4y^2 \leq 1$ ,  $(x \pm 2y)^2 \leq 1$ . В этом случае получим множество между двумя параллельными прямыми, которое является незамкнутым, то есть в этом случае  $B$  тоже не будет единичным шаром относительно нормы.

Получили, что  $B = B_1^\nu$  только при  $|a| < 4$ .

$V$  — **евклидово пространство со скалярным произведением**, если задана  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , то есть, на нем задано скалярное произведение  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}$  такое, что для пространств над  $\mathbb{R}$  выполнено:



1.  $(u, v) = (v, u)$
2.  $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$
3.  $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $(u, u) > 0, u \neq \bar{0} \ ((u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$

Обозначение скалярного произведения:  $(u, v) = \langle u, v \rangle = \langle u | v \rangle$ .

Длина вектора — это  $|v| = \sqrt{(v, v)} \geq 0$  (норма).



$$|\alpha v| = \sqrt{(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 (v, v)} = |\alpha| |v|$$

$$|v| > 0, \text{ при } v \neq \bar{0}$$

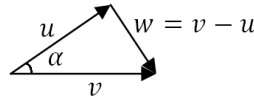
$$|u + v| \leq |u| + |v| \quad \blacksquare$$

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{(u, v)}{|u||v|}, u, v \neq \bar{0}$$

$V$  — **эрмитово пространство со скалярным произведением**, если задана  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , то есть, на нем задано скалярное произведение  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{C}$  такое, что для пространств над  $\mathbb{C}$  выполнено:

1.  $(u, v) = \overline{(v, u)}$
2.  $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$
3.  $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{C}$
4.  $\forall u \ (u, u) \geq 0, (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Как по норме  $|w|$  восстановить скалярное произведение  $(u, v)$ ?



$$|w|^2 = (w, w) = (v - u, v - u) = (v, v) - (u, v) - (v, u) + (u, u) = |v|^2 - 2(u, v) + |u|^2$$

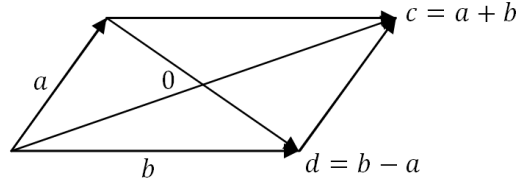
То есть,  $(u, v) = \frac{1}{2}(|v|^2 + |u|^2 - |v - u|^2)$ .

**Теорема (тождество параллелограмма).** Пусть  $V$  — нормированное пространство с нормой  $|v|$ . На  $V$  существует такое скалярное произведение, что  $|v| = \sqrt{(v, v)}$  в том и только том случае, когда в  $V$  выполняется тождество параллелограмма:

$$\forall a, b \ |a + b|^2 + |b - a|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

При  $c = a + b, d = b - a$  :

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$



► Если для  $\forall v \ |v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ , то  $|a+b|^2 + |b-a|^2 = \langle a+b, a+b \rangle + \langle b-a, b-a \rangle = \langle a, a \rangle + 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle + \langle b, b \rangle - 2\langle a, b \rangle + \langle a, a \rangle = 2(|a|^2 + |b|^2)$  ■

$H$  — **гильбертово пространство**, если на нем задано скалярное произведение и оно является полным (относительно метрики, порожденной скалярным произведением).

Набор  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}^{-e}$  называется **ортogonalной системой**, если

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Формально хотим представить  $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ .

$$\begin{aligned} (f, \varphi_j) &= c_j (\varphi_j, \varphi_j) \\ (\varphi_j, \varphi_j) &= 1 \\ c_j &= \frac{(f, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2} = (f, \varphi_j) \end{aligned}$$

$c_j$  — коэффициенты Фурье по ортogonalной системе.

**Теорема.** Если  $\varphi_j$  — ортogonalная система, тогда следующие условия эквивалентны:

1. система  $\{\varphi_j\}$  является базисом, то есть  $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$
2. выполнение равенства Парсеваля  $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_k^2$
3. система является полной, то есть  $\exists y \neq 0 : (\varphi_j, y) = 0$

Хотим приблизить  $f$  и минимизировать  $\|f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k\| \rightarrow \min$ .

$$\begin{aligned} (f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k) &= (\text{так как система ортogonalна}) = (f, f) - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k (f, \varphi_k) + \\ &+ \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 (\varphi_k, \varphi_k) = (c_k = (f, \varphi_k), (\varphi_k, \varphi_k) = 1) = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \end{aligned}$$

Выбором  $\alpha$  хотим минимизировать, минимальная норма будет там, где совпадают  $\alpha_k = c_k$ .

$a = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  — пространство  $\mathbb{R}_{n+1}$  многочленов степени  $\leq n$  на  $[-1, 1]$ , где

скалярное произведение  $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ . Применим к  $a$  процесс Грама-Шмидта, получим  $b$ .

$$a \rightarrow b = \{P_0(x) = 1\}$$

**Многочлены Лежандра:**

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k), k = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{k=0:} \quad P_0(x) = 1$$

$$\mathbf{k=1:} \quad P_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)' = x$$

$$\mathbf{k=2:} \quad P_2(x) = \frac{1}{8}((x^2 - 1)^2)'' = \frac{1}{8}(4x(x^2 - 1))' = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$\mathbf{k=3:} \quad P_3(x) = \frac{1}{48}((x^2 - 1)^3)''' = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\|P_1(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

**Домашнее задание 5**

- (а) Проверить ортогональность  $P_2(x)$  и  $P_3(x)$  относительно  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ .

- (b) Найти  $\|P_n(x)\|$ .

- Найти  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  на  $[-1, 1]$ :  $\|f - \sum_{k=0}^2 \alpha_k P_k(x)\| \rightarrow \min, d_j = \frac{(f, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2} = (f, \varphi_j)$ , где

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k), k = 1, \dots, n - \text{многочлены Лежандра.}$$

$$(a) \quad f_1(x) = xe^{-x}$$

$$(b) \quad f_2(x) = x^3$$

- Выразить скалярное произведение через длину вектора в эрмитовом пространстве.

# Лекция 6

Многочлены Чебышева 1 рода.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

...

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n \geq 2$$

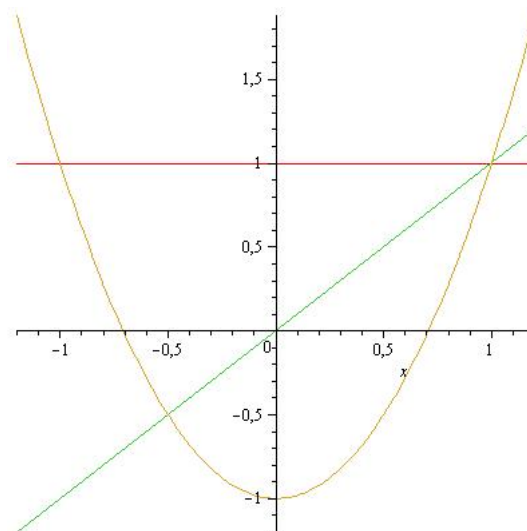
n	T(n)
0	1
1	$x$
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
9	$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$
10	$512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

Для главного члена в формуле  $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots, n \geq 1$ .

► По индукции:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x2^{n-1}x^n + \dots - 2^{n-2}x^{n-1} = 2^n x^{n+1} + \dots \text{ верно для } n+1. \blacksquare$$

Графики многочленов  $T_0(x)$ ,  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$ :



Графики многочленов  $T_3(x)$ ,  $T_4(x)$ ,  $T_5(x)$ :

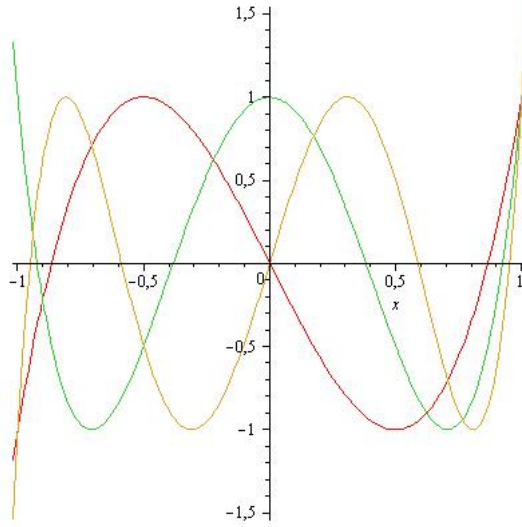
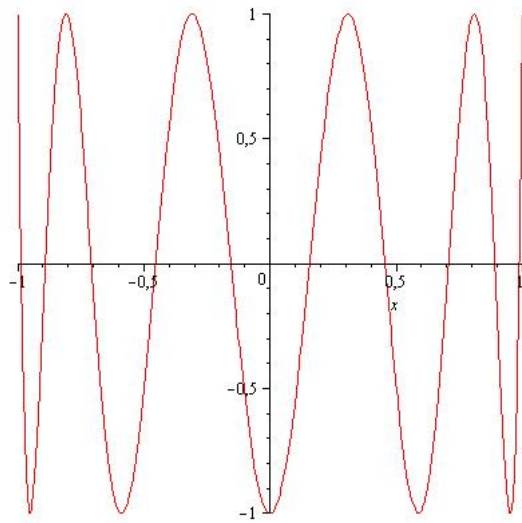


График многочлена  $T_{10}(x)$ :



**Теорема.**  $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$

**Следствие.**  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  при  $x \in [-1, 1]$

**Следствие.**  $T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$  при  $|x| \geq 1$

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \\ \cos(2\varphi) &= 2x^2 - 1 \\ \cos(3\varphi) &= 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ \cos(n\varphi) + \cos((n-2)\varphi) &= 2\cos\left(\frac{n+n-2}{2}\varphi\right)\cos\left(\frac{n-n+2}{2}\varphi\right) = 2\cos((n-1)\varphi)\cos\varphi \end{aligned}$$

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\varphi) = 0 \Leftrightarrow n\varphi = \pi k + \frac{\pi}{2} = \pi \frac{(2k+1)}{2}, \varphi \in [0, \pi]$$

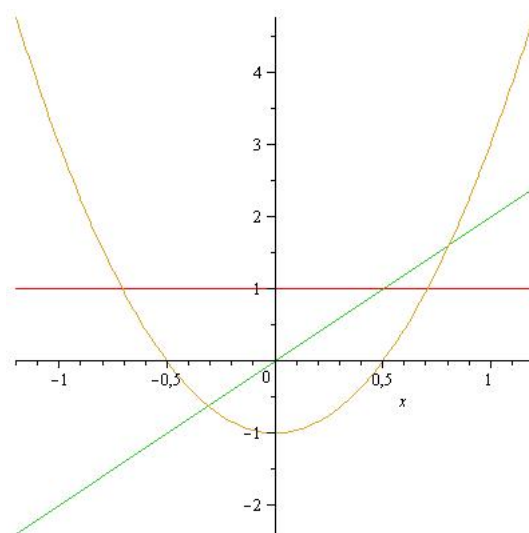
$$\varphi = \pi \frac{(2k+1)}{2n} \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{2k+1}{n} \pi\right)$$

**Многочлены Чебышева 2 рода.**

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) \text{ при } n \geq 0$$

n	U(n)
0	1
1	2x
2	4x <sup>2</sup> - 1
3	8x <sup>3</sup> - 4x
4	16x <sup>4</sup> - 12x <sup>2</sup> + 1
5	32x <sup>5</sup> - 32x <sup>3</sup> + 6x
6	64x <sup>6</sup> - 80x <sup>4</sup> + 24x <sup>2</sup> - 1
7	128x <sup>7</sup> - 192x <sup>5</sup> + 80x <sup>3</sup> - 8x
8	256x <sup>8</sup> - 448x <sup>6</sup> + 240x <sup>4</sup> - 40x <sup>2</sup> + 1
9	512x <sup>9</sup> - 1024x <sup>7</sup> + 672x <sup>5</sup> - 160x <sup>3</sup> + 10x
10	1024x <sup>10</sup> - 2304x <sup>8</sup> + 1792x <sup>6</sup> - 560x <sup>4</sup> + 60x <sup>2</sup> - 1

Графики многочленов  $U_0(x)$ ,  $U_1(x)$ ,  $U_2(x)$ :



Графики многочленов  $U_3(x)$ ,  $U_4(x)$ ,  $U_5(x)$ :

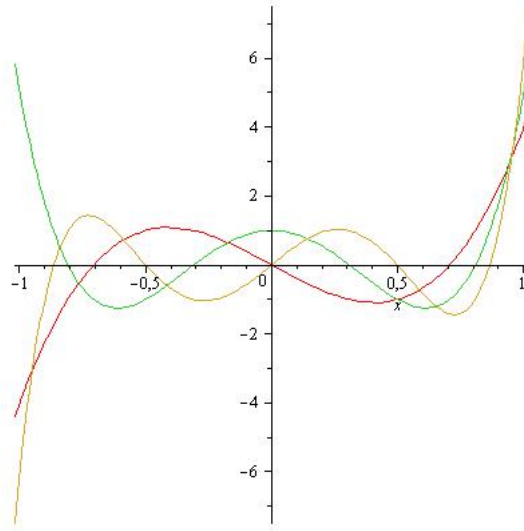
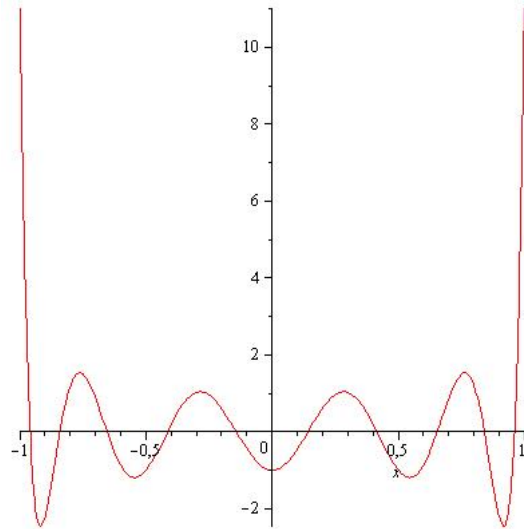


График многочлена  $U_{10}(x)$ :



**Теорема.**  $U_{n-1}(\cos\varphi)\sin\varphi = \sin(n\varphi)$

**Теорема.**  $U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$  при  $|x| \leq 1$

$$\sin(n\varphi) = \sin\varphi U_{n-1}(x), U_{n-1} = \frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi}$$

$$U_{n-1}(x) = 0 \Leftrightarrow n\varphi = \pi k, \varphi = \frac{\pi k}{n}$$

**Свойство.** Старший коэффициент многочлена  $T_n(x)$  равен  $2^{n-1}$ , а старший коэффициент многочлена  $U_n(x)$  равен  $2^n$ .

**Теорема.**

1. При  $n \geq 1$  многочлен  $T_n(x)$  имеет на отрезке  $[-1, 1]$  ровно  $n$  корней  $\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \dots, n$ .
2. Корни многочлена  $U_n(x)$  (они же - экстремумы многочлена  $T_{n+1}(x)$ ) также принадлежат отрезку  $[-1, 1]$ : это числа  $\cos \frac{\pi k}{n+1}, k = 1, \dots, n$ .

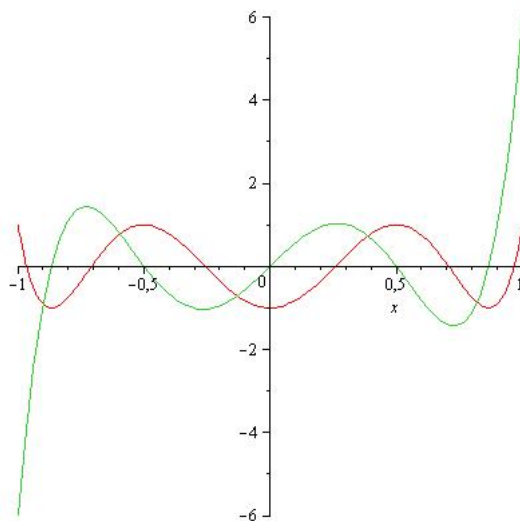
**Следствие.**

$$T_n(x) = 2^{n-1} \left( x - \cos \frac{\pi}{2n} \right) \left( x - \cos \frac{3\pi}{2n} \right) \cdots \left( x - \cos(2n-1) \frac{\pi}{2n} \right)$$

$$U_n(x) = 2^n \left( x - \cos \frac{\pi}{n+1} \right) \left( x - \cos \frac{2\pi}{n+1} \right) \cdots \left( x - \cos n \frac{\pi}{n+1} \right)$$

**Следствие.** Многочлен  $T_n(x)$  степени  $n$  на отрезке  $[-1, 1]$  достигает своих экстремальных значений, равных 1 и -1 в  $n+1$  точке, включая концы отрезка.

Пример:  $n = 6$  (график многочленов  $T_6(x)$  и  $U_5(x)$ ).

**Уклонение от нуля.**

Пусть  $f$  — функция на отрезке  $[-1, 1]$ . Как измерить, насколько она далека от нуля?  
Норма Чебышева

$$|f|_0 = \max_{[-1,1]} |f(x)| \text{ (максимум модуля на данном отрезке)}$$

и

$$|f|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx \text{ (площадь под графиком на данном отрезке).}$$



Пусть  $\|\cdot\|$  — норма на пространстве многочленов (например, одна из двух упомянутых). Многочлен  $f(x) = x^n + \dots$  степени  $n$  со старшим коэффициентом 1 называется наименее уклоняющимся от нуля относительно данной нормы, если для любого другого такого многочлена  $g(x) = x^n + \dots$  всегда  $\|f\| \leq \|g\|$ .

### Пример 1.

Относительно нормы Чебышева  $|f|_0$  уклонение от нуля многочлена  $\tilde{T}_3(x) = \frac{1}{4} T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$  равно

$$|\frac{1}{4} T_3(x)|_0 = \frac{1}{4} |T_3(x)|_0 = \frac{1}{4},$$

а, например, для многочлена  $x^3$  имеем  $|x^3|_0 = 1$ .

### Теорема.

1. (Чебышев) Наименее уклоняющимся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  относительно нормы Чебышева

$$|f|_0 = \max_{[-1,1]} |f(x)|$$

является многочлен  $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ .

2. (Коркин, Золотарев) Наименее уклоняющимся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  относительно нормы

$$|f|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

является многочлен  $\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} U_n(x)$ .

Дано: многочлен  $f(x) = x^n + \dots$  на  $[-1, 1]$

Надо найти:  $g(x) = c \cdot x^n + \dots$ , приближающий  $f(x)$  в смысле  $|\dots|_1$  или  $|\dots|_0$ .

$g \approx f \Leftrightarrow f - g$  — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, то есть  $f(x) - g(x) = \tilde{U}_n(x)$  или  $\tilde{T}_n(x)$ .

**Следствие.** Наименее уклоняющийся от нуля на отрезке  $[a, b]$  многочлен степени  $n$  относительно нормы Чебышева на этом отрезке  $|f|_0 = \max_{[a,b]} |f(x)|$  — это

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right).$$

Идея доказательства: сделать замену переменных  $y = \frac{2x - (b + a)}{b - a}$ , где  $x \in [a, b]$ , а  $y \in [-1, 1]$ , и свести задачу к поиску многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ .

### Пример 2.

Наименее уклоняющийся от нуля на отрезке  $[0, 1]$  многочлен степени  $n$  — это многочлен

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{2n-1}} T_n(2x - 1).$$

В частности,  $\bar{T}_2(x) = \frac{1}{2^{4-1}} T_2(2x - 1) = \frac{1}{8} (2(2x - 1)^2 - 1) = x^2 - x + \frac{1}{8}$ .  
 Скалярное произведение непрерывных функций на отрезке  $[-1, 1]$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ему соответствует норма:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}.$$

Соотношения ортогональности:

$$\langle T_m, T_n \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

Наилучшее приближение функции  $f$  многочленом степени  $\leq n$ :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\langle T_i, f \rangle}{\langle T_i, T_i \rangle} T_i(x)$$

### Пример 3.

$f(x) = x^3$  на  $[-1, 1]$  разложить в ряд по многочленам Чебышева.

T	K
1	1
$x$	$x$
$2x^2 - 1$	$x^2 - \frac{1}{2}$
$4x^3 - 3x$	$x^3 - \frac{3}{4}x$

$K = \tilde{T}$  — отнормированные значения.

$$f(x) = x^3 = \tilde{T}_3 + \frac{3}{4}T_1$$

$$x^3 = \sum_{i=0}^3 \frac{\langle \tilde{T}_i, f \rangle}{\langle \tilde{T}_i, \tilde{T}_i \rangle} \tilde{T}_i$$

**Пример 4.**

$\|x^3 - P_2(x)\|_{\infty} \rightarrow \min$  на отрезке  $[-1, 1]$  приблизить многочленом, где  $P_2(x)$  — любой многочлен второй степени.

Для отрезка  $[-1, 1]$ :

$$x^3 - P_2(x) = \tilde{T}_3(x)$$

$$x^3 - x^3 + \frac{3}{4}x = P_2(x)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{4}x$$

**Пример 5.**

$\|x^3 - P_2(x)\|_{\infty} \rightarrow \min$  на отрезке  $[2, 3]$  приблизить многочленом, где  $P_2(x)$  — любой многочлен второй степени.

$$x^3 - P_2(x) = \bar{T}_3(x)$$

$$P_2(x) = x^3 - \bar{T}_3(x)$$

Вычислим  $\bar{T}_3(x)$  по формуле  $\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$ .

$$\bar{T}_3(x) = \frac{(b-a)^3}{2^5} T_3\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = \frac{1}{2^5} T_3(2x-5) = \frac{1}{32} (4(2x-5)^3 - 3(2x-5)) =$$

$$= \frac{1}{32} (4(8x^3 - 60x^2 + 150x - 125) - 6x + 15) = \frac{1}{32} (32x^3 - 240x^2 + 600x - 500 - 6x + 15) =$$

$$= x^3 - 7.5x^2 + 18.5625x - 15.15625$$

Подставив  $\bar{T}_3(x)$  в  $P_2(x)$ , получим:

$$P_2(x) = x^3 - \bar{T}_3(x) = 7.5x^2 - 18.5625x + 15.15625$$

**Пример 6.**

Если  $U_n(x) = \frac{1}{n+1} (T_{n+1}(x))'$  будет ли верно  $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$  ?

**n:**

$$\frac{1}{n+1} (2xT_n(x) - T_{n-1}(x))' = \frac{1}{n+1} (2T_n(x) + 2xT_n(x)' - T_{n-1}(x)')$$

**n+1:**

$$\frac{1}{n+2} (2T_{n+1}(x) + 2xT_{n+1}(x)' - T_n(x)')$$

**n-1:**

$$\frac{1}{n} \left( 2T_{n-1}(x) + 2xT_{n-1}'(x) - T_{n-2}'(x) \right)$$

Подставим:

$$\frac{2T_{n+1} + 2xT_{n+1}' - T_n'}{n+2} \stackrel{?}{=} \frac{2x(2T_n + 2xT_n' - T_{n-1}')}{n+1} - \frac{2T_{n-1} + 2xT_{n-1}' - T_{n-2}'}{n}$$

## Домашнее задание 6

1. Доказать, что  $U_1(x) + U_3(x) + \dots + U_{2n-1}(x) = U_{n-1}(x)U_n(x)$ .
2. Доказать, что  $U_0(x) + U_2(x) + \dots + U_{2n-2}(x) = U_{n-1}^2(x)$ .
3. а)<sup>1</sup> Введем на множестве многочленов  $\mathbb{R}[x]_{<n}$  степени меньше  $n$  от одной переменной скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)g(x_j),$$

где  $x_0, \dots, x_{n-1}$  — нули многочлена Чебышева степени  $n$ . Докажите, что многочлены Чебышева  $T_0, \dots, T_{n-1}$  ортогональны друг другу относительно этого скалярного произведения, причем  $\langle T_j, T_j \rangle_n = n/2$  при  $j > 0$  и  $\langle T_0, T_0 \rangle_n = n$ .

б) Пусть  $f$  — произвольная действительная функция. Предположим, что  $P(x)$  — такой многочлен степени  $n$ , что

$$P(x_m) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle \hat{T}_j, f \rangle_n}{\langle \hat{T}_j, \hat{T}_j \rangle_n} \hat{T}_j(x_m)$$

для всех  $m = 0, \dots, n-1$ . Докажите, что  $P(x)$  является интерполяционным многочленом Лагранжа функции  $f$  с узлами в точках  $x_0, \dots, x_{n-1}$ .

4. Для  $f(x) = x^x$  найти наилучшее линейное приближение на отрезке  $[1, 4]$  в норме  $\max_{[1,4]} |f(x)|$ .

## Лекция 7

### Матричные нормы.

Рассмотрим линейное пространство матриц размера  $n$  над комплексными числами. Норма  $\|\cdot\|$  на пространстве  $V = M_{n \times n}(\mathbb{C})$  называется **матричной нормой**, если

0. Это норма.

---

<sup>1</sup>Условие этой задачи несколько изменено по сравнению с тем, которое было на лекции.

1. Норма  $\|\cdot\|$  является **согласованной с операцией умножения**, то есть

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \text{ для любых } A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C}),$$

(удовлетворяет свойству субмультипликативности).

Свойства:

1.  $\|E\| \geq 1$   
 $\blacktriangleright \|E\| \leq \|E\| \|E\| \Rightarrow \|E\| \geq 1 \quad \blacksquare$
2. Матричная норма называется **сохраняющей единицу**, если  $\|E\| = 1$ .
3. Матричная норма называется **согласованной с векторной нормой**  $|\cdot|$  на  $\mathbb{C}^n$ , если

$$|M\bar{x}| \leq \|M\| \cdot |\bar{x}|.$$

Если  $\|M\|$  — матричная норма, тогда  $\|M\|_* = \|M\|$ ,  $x \geq 1$  — тоже матричная норма.

### Примеры матричных норм.

- $\|M\| = \sum_{i,j=1,\dots,n} |m_{ij}|$

$$M = (m_{ij})_{n \times n}$$

Проверим свойства:

0. Это норма Гельдера  $|\cdot|_1$  на  $\mathbb{C}^{n^2}$ .

1.  $\|M\| = |M^1|_1 + \dots + |M^n|_1$   
 $\|AB\| = \sum_{i,j} \left| \sum_t a_{it} b_{tj} \right| \leq \sum_{i,j,t} |a_{it}| |b_{tj}| \leq \sum_{i,j,t,s} |a_{i,s}| |b_{tj}| = \sum_{i,s} |a_{i,s}| \sum_{t,j} |b_{tj}| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
2.  $\|E\| = n$  — не выполняется, не сохраняет единицу.

3. — Согласована ли с  $|\cdot|_1$  ?

$$|Mx|_1 \stackrel{?}{\leq} \|M\| \cdot |x|_1$$

$$|Mx|_1 = \left\| M \cdot \left( \bar{x} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right) \right\|, \quad |x|_1 = \|B\|$$

То есть, согласована.

- Согласована с  $|\cdot|_\infty$  ?

$$M_{n \times n} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}, \quad Mx = \begin{pmatrix} M_1 x \\ \vdots \\ M_n x \end{pmatrix}$$

$$|Mx| = \max_i |x_i| \leq |x|_\infty \sum_{i,j} |m_{ij}| \leq |x|_\infty \|M\|$$

То есть, согласована.

• **Норма Фробениуса**  $\|M\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |m_{ij}|^2}$

0. Это Евклидова норма на пространстве.

1.  $\|M\|_F^2 = \text{tr}(M^*M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(M^*M) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$  — сумма квадратов сингулярных значений (согласованность с умножением).

Если  $U$  — унитарная матрица, например, поворот, то есть,  $U^* = U^{-1}$ , то

$$\|U^{-1}MU\|_F^2 = \text{tr}((U^*MU)^*U^*MU) = \text{tr}(U^*M^*MU) = \text{tr}(M^*M) = \|M\|_F^2$$

Более того:  $\|UM\|_F = \text{tr}(M^*U^*UM) = \text{tr}(M^*M) = \|M\|_F^2$ .

$M = U\Sigma V^*$ ,  $U$  и  $V$  — ортогональные

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\|M\| = \|\Sigma\|$$

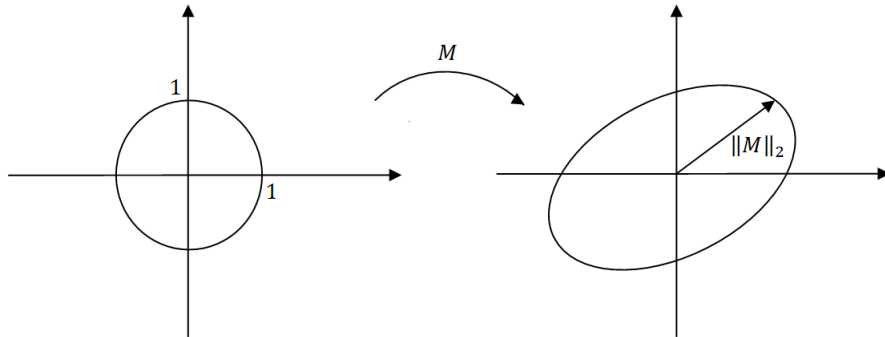
Норма Фробениуса  $\|M\|_F$  согласована с евклидовой  $|\bar{x}|_2$ .

Пусть на  $\mathbb{C}^n$  задана норма  $|\cdot|_1$ . Функция из  $M_n$  в  $\mathbb{C}$ :  $\|M\| = \max_{x \neq 0} \frac{|Mx|}{|x|}$  называется **матричной нормой, индуцированной векторной нормой  $|\cdot|_1$** .

Если  $c = |x|$ ,  $y = \frac{x}{|x|}$ ,  $|y| = 1$ , то  $Mx = M(cy) = cMy$ . А так как  $c > 0$ , то  $|Mx| = c|My|$ .

То есть, здесь максимум достигается, так как:

$$\max_{x \neq y} \frac{|Mx|}{|x|} = \max_{|y|=1} \frac{c|My|}{c} = \max_{|y|=1} |My| = \max_{y \in B_1} |My|$$



**Теорема.**

Пусть  $\|\cdot\|_\star$  индуцирована  $|\cdot|_\star$ , тогда

1.  $\|\cdot\|$  — матричная норма, выполнены свойства 0, 1
2.  $\|\cdot\|_\star$  согласована с  $|\cdot|_\star$   
 $\blacktriangleright |Mx|_\star = \frac{|Mx|_\star}{|x|_\star} |x|_\star \leq \max_z \frac{|Mz|_\star}{|z|_\star} |x|_\star = \|M\|_\star |x|_\star \quad \blacksquare$
3.  $\|\cdot\|_\star$  сохраняет единицу  
 $\blacktriangleright \|E\|_\star = \max_{|y|_\star=1} |Ey|_\star = \max_{|y|_\star=1} |y|_\star = 1 \quad \blacksquare$
4. Если существует другая норма  $\|\cdot\|$ , согласованная с  $\|\cdot\|_\star$ , то  $\|M\| \geq \|M\|_\star$  ( $\|M_\star\|$  минимальна).  
 $\blacktriangleright$  Пусть  $|y|_\star = 1$  и  $\|M\|_\star = |My|_\star$ , тогда длина матрицы  $\|M\|_\star = |My|_\star \leq \|M\| \cdot |y|_\star = \|M\| \quad \blacksquare$

**Теорема.**

Векторная норма $ \cdot _\star$	Индуцированная норма $\ \cdot\ _\star$
$ \bar{x} _1 = \sum_{i=1}^n  x_i $	$\ M\ _1 = \max_j  M^j _1 = \max_j \sum_i  m_{ij}  = \ M^*\ _1$
$ \bar{x} _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n  x_i ^2}$	$\sigma(M) = \sqrt{\max \lambda_{M^*M}}$ (сингулярный радиус матрицы)
$ \bar{x} _\infty = \max_{1 \leq i \leq n}  x_i $	$\ M\ _\infty = \max_i  M_i _1 = \max_i \sum_j  m_{ij} $

Докажем, что векторной норме  $|\bar{x}|_1$  соответствует индуцированная матричная норма  $\|M\|_1$ .

$\blacktriangleright$

$$\begin{aligned}
 M &= (M^1, \dots, M^n) \\
 Mx &= M^1 x_1 + \dots + M^n x_n \\
 |Mx|_1 &\leq |M^1 x_1 + \dots + M^n x_n|_1 \leq |x_1| |M^1|_1 + \dots + |x_n| |M^n|_1 \\
 &= (|x_1| + \dots + |x_n|) \max_j |M^j|_1 \leq |\bar{x}|_1 \max_j |M^j|_1
 \end{aligned}$$

Пусть максимум достигается на первом столбце, тогда  $|Mx|_1 = \sum_{j=1}^n |m_{1j}| = \|M\|_1$ .

Оценка достигается, значит это и есть максимум.  $\blacksquare$

**Домашнее задание 7**

1. Доказать, что векторной норме  $|\bar{x}|_2$  соответствует индуцированная матричная норма  $\sigma(M)$ .
2. Доказать, что векторной норме  $|\bar{x}|_\infty$  соответствует индуцированная матричная норма  $\|M\|_\infty$ .

3. Является ли матричной нормой  $f(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$  ?

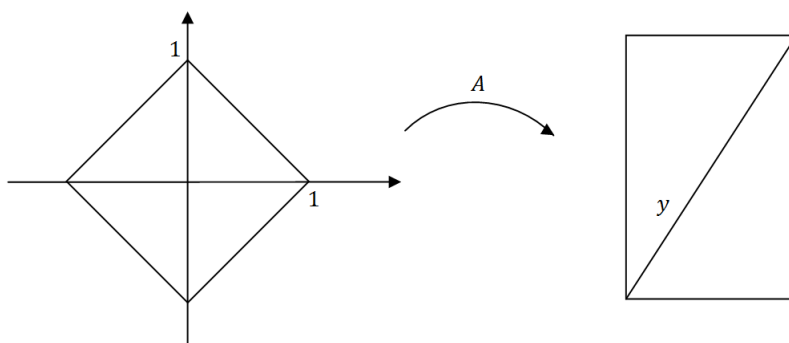
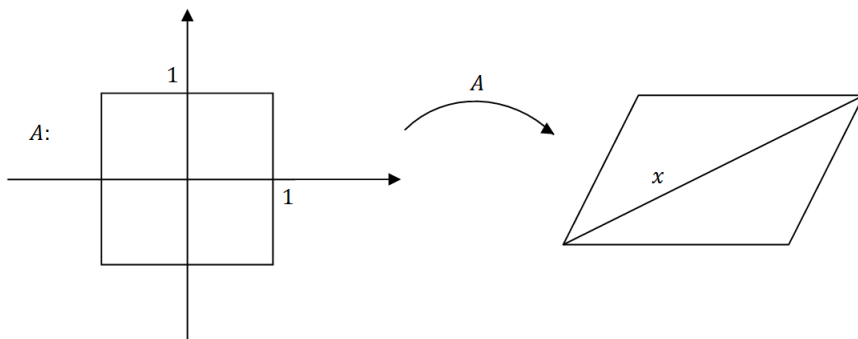
4. Доказать  $\|A^{-1}\| \geq \frac{\|E\|}{\|A\|}$ .

5. Найти все нормы:  $\|A\|_\infty$ ,  $\|A\|_1$ ,  $\sigma(A)$  для матрицы

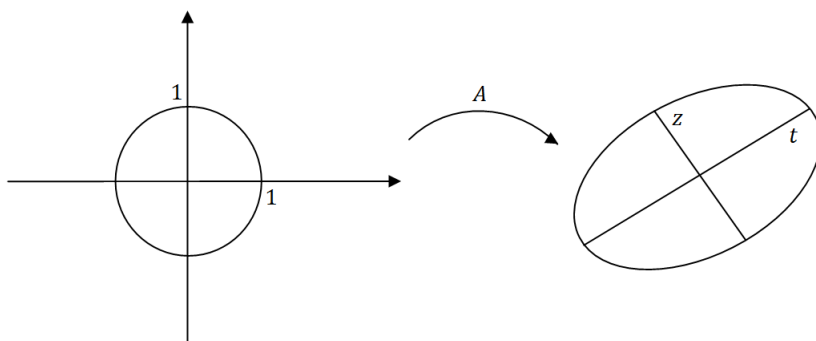
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

6. Найти  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  для матрицы  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$







## Лекция 8

Повторим несколько утверждений из предыдущих лекций.

В каждом векторном пространстве  $V(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  есть норма  $\nu(\bar{x}) \geq 0$  такая, что:

1.  $\nu(\bar{x}) > 0, \bar{x} \neq \bar{0}, \nu(\bar{0}) = 0$
2.  $\nu(\alpha \bar{x}) = |\alpha| \nu(\bar{x})$
3.  $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$  для  $\forall x, y \in V, \forall \alpha$

Норма Гёльдера:

$$\begin{aligned} |\bar{x}|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ |\bar{x}|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ |\bar{x}|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \end{aligned}$$

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Свойства матричной нормы  $M \in M_n$ :

1.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
2. Матричная норма  $\|\cdot\|$  на  $M_n$  согласована с векторной нормой  $|\cdot|$  на  $\mathbb{C}^n$ , если

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$$

3. Матричная норма сохраняет единицу, если  $\|E\| = 1$ .

Норма Фробениуса:  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ .

Она удовлетворяет свойствам 1, 2 для  $|\cdot|_1, 2, \infty$ , но не удовлетворяет свойству 3.

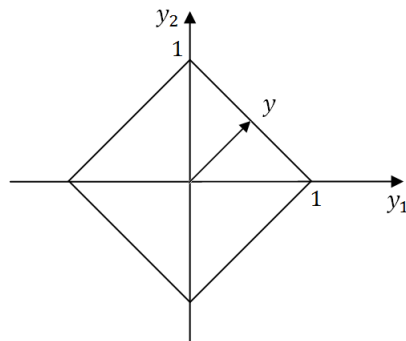
$\|\cdot\|_\star$  — индуцированная матричная норма, если верно

$$\|A\|_\star = \max_{\bar{x} \neq \bar{0}} \frac{|Ax|_\star}{|\bar{x}|_\star} = \left( y = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|_\star} \right) = \max_{|y|_\star=1} |Ay|_\star$$

**Пример 1.**

Найти  $y$  для матрицы  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$||A||_1 = \max |A\bar{y}| = \max_{|y_1|+|y_2|=1} |y_1 + 2y_2| + |3y_1 + 4y_2|$$

Максимум получим при  $y_1 = 0$  и  $y_2 = 1$ :  $||A||_1 = 2 + 4 = 6$ .

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Сингулярное разложение матрицы (SVD):

$$A = V\Sigma U^*$$

$V$ ,  $U$  — унитарные матрицы ( $U^* = U^{-1}$ )

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(A^*A)^* = A^*A = U\Sigma V^*V\Sigma U^* = U\Sigma^2 U^*$$

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$  — сингулярные значения матрицы.

Аналогично

$$AA^* = V\Sigma^2 V^*$$

Здесь  $U^1, \dots, U^n$  — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы  $A^*A$ , а  $V^1, \dots, V^n$  — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы  $AA^*$ .  $U^i$  и  $V^i$  — правые и левые сингулярные векторы соответственно.

$$\|A\|_2 = \sigma(A)$$

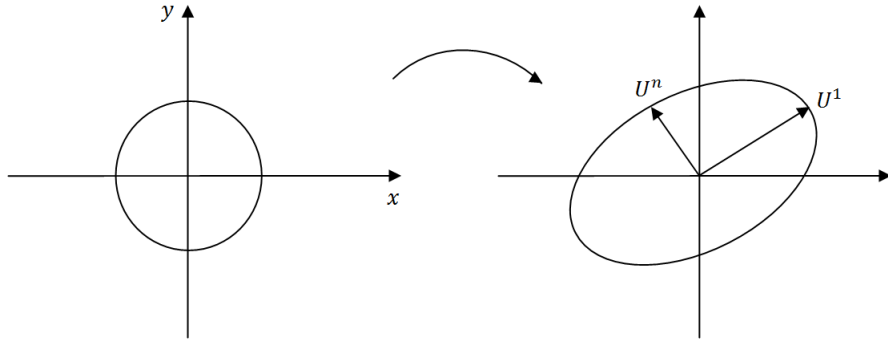
►

$$\|A\|_2 = \max_{|x|_2=1} |Ax|_2 = \max_{|x|_2=1} \sqrt{(Ax, Ax)} = \max_{|x|_2=1} \sqrt{(Ax)^* Ax} = \max_{|x|_2=1} \sqrt{x^* A^* A x}$$

$$A^* A \xrightarrow{U} \Sigma^2$$

$$x = \sum_i \alpha_i U_i, \quad \sum_i |\alpha_i|^2 = 1$$

$$xx^* = \sum_i \alpha_i U_i U_i^* \alpha_i = \sum_i \alpha_i U_i U_i^{-1} \alpha_i = \sum_i |\alpha_i|^2$$



Подставим в  $\|A\|_2$ :

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max_{|x|_2=1} \sqrt{x^* A^* A x} = (\text{в базисе } U) = \max_{|x|_2=1} \sqrt{x \Sigma^2 x^*} = \max_{\alpha: \sum_i |\alpha_i|^2=1} \sqrt{\sum_i \sigma_i^2 |\alpha_i|^2} = \\ &= \max_{\alpha: \sum_i |\alpha_i|^2=1} \sqrt{\sigma_1^2 |\alpha_1|^2 + \dots + \sigma_n^2 |\alpha_n|^2} \leq \max_{\alpha: \sum_i |\alpha_i|^2=1} \sqrt{\sigma_1^2 (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)} = \sigma_1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Норма Фробениуса:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)}$$

$$\begin{aligned} A^* A &= \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ \vdots & * & * \\ a_{n1} & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} a_{11} + \dots + \bar{a}_{n1} a_{n1} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} |a_{11}|^2 + \dots + |a_{n1}|^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Получим  $\sqrt{\text{tr}(A^*A)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\|A\| = 1$  ?

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|A\|_F \geq \|A\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F = \sqrt{7}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \max\{1, 5\} = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max\{3, 3\} = 3$$

**Спектральный радиус**  $\rho(A) = |\lambda_{\max}(A)| = \max_i |\lambda_i|$

**Теорема.** Если матричная норма  $\|\cdot\|$  согласована с некоторой векторной нормой, то

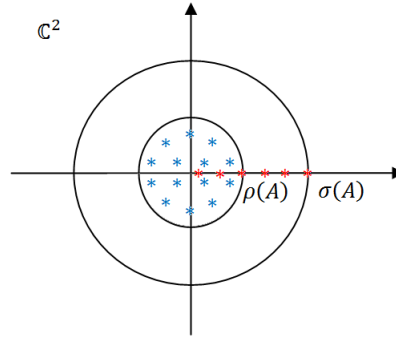
$$\|A\| \geq \rho(A)$$

►  $Av = \lambda v$ ,  $v \neq 0$  — для собственного значения существует собственный вектор.

Из определения согласованности векторной нормы:  $|Av| \leq \|A\| \cdot |v|$ . С другой стороны,  $|Av| = |\lambda v| = |\lambda| |v|$ . Получим, что  $|\lambda| \leq \|A\|$ , то есть, норма не меньше, чем  $\lambda$ . ■

**Следствие.** В частности

$$\sigma(A) \geq \rho(A)$$



Здесь  $\sigma_i(A)$  — сингулярные собственные значения, а  $\rho(A)$  ( $\lambda_i(A)$ ) — собственные значения.

**Утверждение.** Для любой матрицы  $A$  и  $\forall \varepsilon > 0$  существует матричная норма  $\|\cdot\|$ , согласованная с некоторой векторной нормой  $|\cdot|$ , и такая, что

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

С помощью  $\varepsilon$  можно добиться равенства.

Разложение матрицы  $A_{n \times n} = A_{n \times r} \cdot A_{r \times n}$ ,  $A$  ранга  $r$ .

**Как получить приближенное разложение матрицы?**

$A \approx X$ ,  $X$  ранга  $r$ ,  $X - ?$

**Задача:** найти  $X$  ранга  $\leq r$  такое, что

$$\|X - A\| \rightarrow \min$$

**Ответ:** для матричных норм  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_F$  (и любой ортогонально инвариантной)

$$A = V \Sigma U^*$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A_r = V \Sigma_r U^*$$

Для  $\|A\| = \|A\|_2 = \sigma(A)$ .

►  $U^1, \dots, U^n$  — правый сингулярный базис. Пусть  $\bar{w} \in \langle U^1, \dots, U^{r+1} \rangle \cap \text{Ker} X$ , где  $\text{Ker} X \geq n - r$ , а  $X$  ранга  $\leq r$ ,  $|w| = 1$ .

Так как  $|Mx| \leq \|M\|$ ,  $|x| = 1$ , тогда

$$\begin{aligned} (\|X - A\|_2)^2 &\geq (|(X - A)w|_2)^2 = |Xw - Aw|^2 = |Aw|^2 = (\text{в базисе } U) = \\ &= \left| V \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{r+1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| V \begin{pmatrix} \sigma_1 w_1 \\ \vdots \\ \sigma_{r+1} w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} \sigma_1 w_1 \\ \vdots \\ \sigma_{r+1} w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \\ &= \sigma_1^2 |w_1|^2 + \cdots + \sigma_{r+1}^2 |w_{r+1}|^2 \geq \sigma_{r+1}^2 (|w_1|^2 + \cdots + |w_{r+1}|^2) = \sigma_{r+1}^2 |w| = \sigma_{r+1}^2 \end{aligned}$$

для любой матрицы  $X$ , где

$$\|A_r - A\|_2 = \|V(\Sigma - \Sigma_r)U^*\|_2 = \|\Sigma - \Sigma_r\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{r+1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \right\|_2 = \sigma_{r+1}$$

Достигается для  $r$ , значит она оптимальна (меньше нет). Для евклидовой нормы это лучшее приближение. ■

### Пример 2.

Найти наилучшее приближение  $A_1$  ранга 1 для матрицы  $A$  в норме  $\|\cdot\|_2$  и найти  $\|A - A_1\|_2$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Так как матрица  $A$  симметричная, можно не находить  $A^*A$ . Найдём сразу собственное значение и собственный вектор.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Хотим построить сингулярное разложение  $A = V\Sigma U^*$ . Если  $A^* = A$ , то  $V = U$ . После решения СЛАУ  $(A - \lambda_i E)x = 0$  из  $\lambda_i$  получим  $v_i$ .

$$V = U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A_1 = V\Sigma_r U^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы  $A_1$  равен 1,  $\|A - A_1\|_2 = 9$  (наибольший из остальных  $\sigma$ ).

### Домашнее задание 8

1. Найти наилучшее приближение ранга 2 по фробениусовой норме для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Найти наилучшее приближение  $B_1$  ранга 1 для матрицы  $B$  в норме  $\|\cdot\|_2$  и найти  $\|B - B_1\|_2$ , где

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 30 & -21 \\ 17 & 10 & -22 \end{pmatrix}$$

3. Доказать утверждение из лекции: для любой матрицы  $A$  и  $\forall \varepsilon > 0$  существует матричная норма  $\|\cdot\|$ , согласованная с некоторой векторной нормой  $|\cdot|$  и такая, что

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

## Лекция 9

### Оценка собственных значений

**Оценка:** Если  $\|A\|$  — матричная норма, согласованная с некоторой векторной нормой, то

$$|\lambda| \leq \|A\|,$$

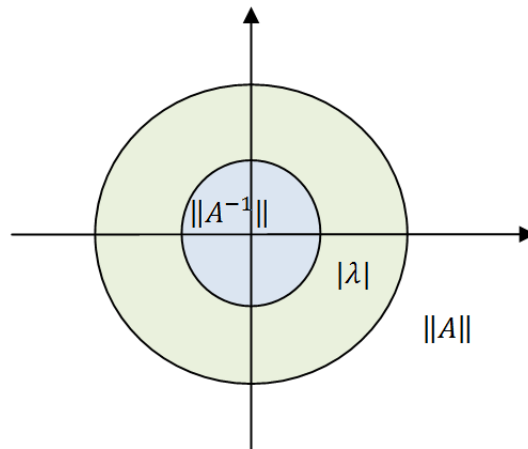
где  $\lambda$  — любое собственное значение матрицы  $A$ .

То же можно применить и к обратной матрице.

**Утверждение.** Если матрица  $A$  — невырожденная, то для любого собственного значения  $\lambda$  верно

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|$$

Все собственные значения матрицы  $A$  находятся между двумя кольцами.



► Пусть  $\lambda$  — собственное значение матрицы  $A$ , то есть,  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$  для некоторого  $\bar{x} \neq \bar{0}$ , тогда

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \lambda A^{-1} \bar{x} \\ \lambda^{-1} \bar{x} &= A^{-1} \bar{x}\end{aligned}$$

То есть,  $\lambda^{-1}$  — собственное значение для матрицы  $A^{-1}$ .

$$|\lambda^{-1}| \leq \|A^{-1}\| \text{ (из оценки)}$$

$$\begin{aligned}|\lambda|^{-1} &\leq \|A^{-1}\| \\ |\lambda| &\geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\end{aligned}$$

С учетом оценки, получим

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\| \quad \blacksquare$$

Матрица называется матрицей с **диагональным преобладанием**, если каждое из чисел на диагонали больше суммы модулей по строке, то есть,

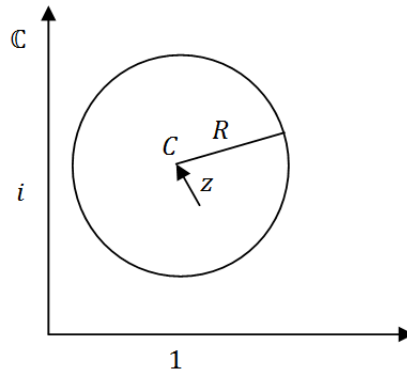
$$\forall i = 1, \dots, n \quad |a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|.$$

**1-я Теорема Гершгорина.** Все собственные значения матрицы  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим:  $R_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|$ .

Каждое из собственных значений  $\lambda$  матрицы  $A$  всегда расположено в одном из кругов.



$$|z - C| \leq R$$

$$\begin{pmatrix} * & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$



Круг с центром в точке  $C = a_{ii}$  и радиусом  $R = R_i = \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$ .

Если  $\lambda$  — собственное значение матрицы  $A$ , то

$$|A - \lambda E| = |(A - \lambda E)^T| = |A^T - \lambda E| = 0$$

Получили, что  $\lambda$  — собственное значение матрицы  $A^T$ .

У матрицы  $A^T$  собственные значения те же, что и у матрицы  $A$ , а строки  $A^T$  — столбцы  $A$ , такие что:

**Следствие.** Все собственные значения матрицы  $A$  содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ki}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим:  $C_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ki}|$ .

**Доказательство теоремы.**

► Пусть  $\lambda$  — собственное значение  $A$ , докажем, что  $\lambda$  находится в объединении кругов Гершгорина.

У каждого собственного значения существует собственный вектор:

$$Ax = \lambda x, \bar{x} \neq \bar{0}.$$

Пусть, например,  $|x_1|$  — наибольший из модулей  $|x_i|$ , то есть,  $|x_1| \geq |x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|$ . Тогда из  $Ax = \lambda x$  следует

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ (\lambda - a_{11})x_1 &= a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ |\lambda - a_{11}||x_1| &= |a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n| \leq \sum_{k=2}^n |a_{1k}||x_k| \leq \sum_{k=2}^n |a_{1k}||x_1| = |x_1|R_1 \\ |\lambda - a_{11}| &\leq R_1 = \sum_{k=2}^n |a_{1k}| \end{aligned}$$

Получили, что если  $x_1$  — наибольший, то собственное значение попадает в первый круг Гершгорина. И так далее, если  $x_n$  — наибольший, то собственное значение попадет в  $n$ -ый круг Гершгорина. ■

**Следствие.** Матрица с диагональным преобладанием является невырожденной.

► Доказательство следует из того, что в такой матрице все собственные значения  $\lambda \neq 0$  ■

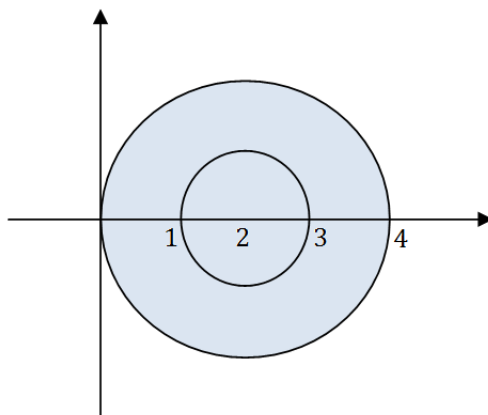
**Пример 1.**

Дана матрица  $n \times n$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим круги Гершгорина.

№	Центр	Радиус
1	2	$ -1 =1$
$2 - (n-1)$	2	$ -1 + -1 =2$
n	2	$ -1 =1$



Все собственные значения содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$\begin{aligned} |\lambda - 2| &\leq 1 \\ |\lambda - 2| &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A^* = A \\ A \in M_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Получили, что  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \lambda_i \leq 4$ .

Если  $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{k_s}$ , где  $\lambda_i$  различны, то числа  $k_i$  называют кратностями соответствующих собственных значений.

**2-я Теорема Гершгорина.** Если объединение  $U$   $r$  кругов Гершгорина не пересекается с остальными  $(n - r)$  кругами, то  $U$  содержит ровно  $r$  собственных значений с учетом кратностей.

► Пусть  $D$  — диагональная часть матрицы  $A$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

а матрица  $B = A - D$  — матрица  $A$  без диагональных элементов

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим непрерывное непрерывное семейство матриц

$$A_t = D + tB$$

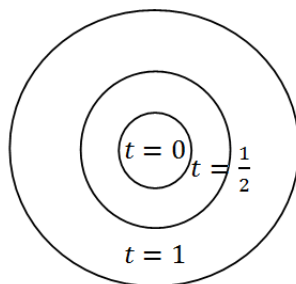
Это непрерывная функция из  $\mathbb{R}$  в  $M_n(\mathbb{C})$ . Здесь  $A_0 = D$ ,  $A_1 = A$ .

Корни характеристического многочлена матрицы  $A_t$  непрерывно зависят от  $t_0$ . При  $t = 0$  — это  $\lambda_1(0) = a_{11}, \dots, \lambda_n(0) = a_{nn}$ , а при  $t = 1$  — это собственные числа матрицы  $A$ .

По первой теореме Гершгорина  $\forall t \lambda \in U$  в объединении кругов Гершгорина с центрами  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  и радиусами

$$R_i(t) = tR_i.$$

С ростом  $t$  круги "раздуваются" из точек (движение по непрерывной кривой).



Если объединение некоторых  $r$  кругов Гершгорина не пересекаются с остальными при  $t = 1$ , то и при  $t < 1$  тоже, значит каждое из соответствующих  $r$  собственных значений  $\lambda_i$  движется из  $a_{ii}$  по непрерывной кривой внутри  $U$ . ■

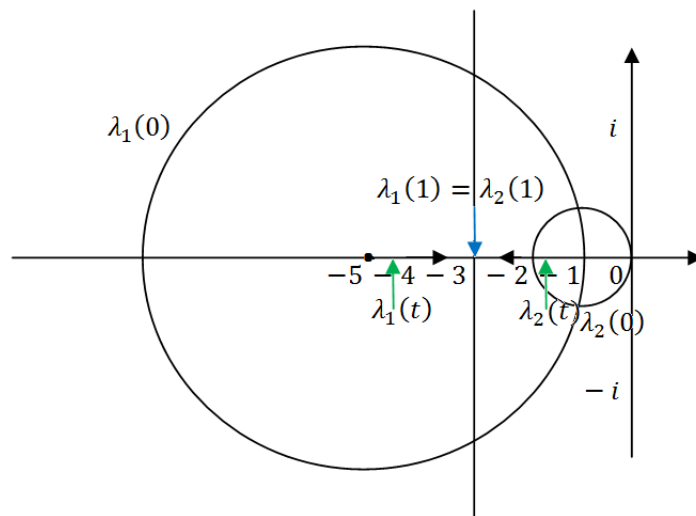
## Пример 2.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -4 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2$$

Получили, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ .



$$A = \begin{pmatrix} -1 & t \\ -4t & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен

$$\chi_{A_t}(\lambda) = |A_t - \lambda E| = \lambda^2 + 6\lambda + 5 + 4t^2$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{1-t^2}, \quad t < 1$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm i \cdot 2\sqrt{1-t^2}, \quad t > 1$$

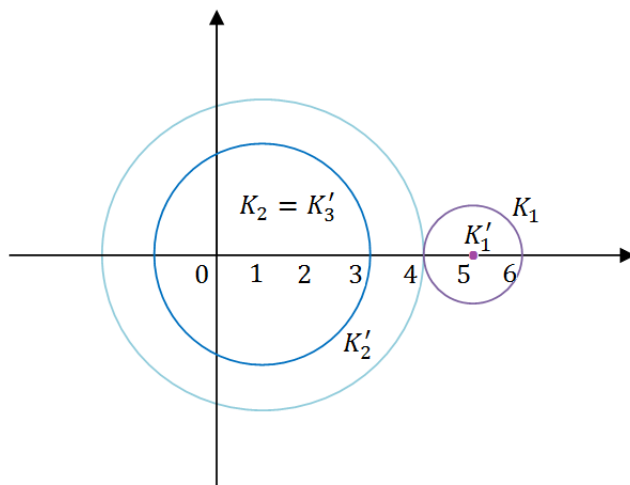
**Пример 3.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для матрицы  $A$ :

$$|\lambda - 5| \leq 1$$

$$|\lambda - 1| \leq 2 \quad - 2 \text{ раза}$$



В  $K_1$  находится одно собственное значение  $\lambda_1$ , в  $K_2$  — два  $\lambda_2, \lambda_3$ .  
Для матрицы  $A^T$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K'_1 : |\lambda - 5| = 0 \Rightarrow \lambda'_1 = 5$$

$$K'_2 : |\lambda - 1| \leq 3$$

$$K'_3 : |\lambda - 1| \leq 2$$

То есть,  $\lambda'_2, \lambda'_3 \in K'_2 = K'_2 \cup K'_3$ .

Так как  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3\}$  — те же собственные значения, то  $\lambda_1 = \lambda'_1 = 5$ .

Значит  $\lambda'_2$  и  $\lambda'_3$  — те же, что  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ , то есть,  $\lambda'_2, \lambda'_3 \in K_2$ .

Итог для матрицы  $A$ :  $\lambda_1 = 5$ , а  $\lambda_2, \lambda_3$  удовлетворяют условию  $|\lambda - 1| \leq 2$ .

### Домашнее задание 9

1. Нарисовать круги Гершгорина для матрицы  $A$  и с их помощью оценить собственные значения. Вычислить собственные значения и сравнить результаты.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.3 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. С помощью теоремы Гершгорина нарисовать область, где находятся собственные значения матрицы  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Доказать, что определитель матрицы  $A$  не равен 0 ( $\det A \neq 0$ ). Нарисовать наименьшую область, содержащую собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \cos x & \cos^2 x \\ 0 & 5 & \sin^2 x \\ 3\sin^2 x & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Доказать, что в номерах 1, 2 и 3 все собственные значения — положительные действительные числа и оценить их.

Подсказка: если  $\lambda$  — собственное значение матрицы  $A$ , то и  $\bar{\lambda}$  — тоже ее собственное значение, так как  $|\overline{A - \lambda E}| = |A - \bar{\lambda} E| = 0$ .

## Лекция 10

### Функции от матрицы.

Пусть  $A$  — квадратная матрица ( $A \in M_n(\mathbb{C})$ )

$$A^m = A \cdot \dots \cdot A, \quad A^0 = E$$

Если  $A$  невырожденная, то

$$A^{-m} = (A^{-1})^m$$

**Многочлен от матрицы:** если  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ , то  $f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_mA^m$  — тоже матрица.

### Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

Тогда

$$f(A) = A^2 - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

**Утверждение.** Если  $C$  — невырожденная матрица (например,  $C = Te \rightarrow e'$  — матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  в  $\mathbb{C}^n$ ) и  $A' = C^{-1}AC$  (то есть,  $A'$  — матрица того же линейного оператора, что и  $A$ , в новом базисе  $e'$  вместо старого  $e$ ), то для любого многочлена  $f(x)$  верно  $f(A') = C^{-1}f(A)C$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{Если } f(x) = \sum_{i=0}^n a_i A^i, \text{ то } f(A') &= \sum_{i=0}^n a_i A'^i = \sum_{i=0}^n a_i C^{-1}AC \cdot C^{-1}AC \cdot C^{-1} \dots AC = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i C^{-1}A^i C = C^{-1} \left( \sum_{i=0}^n a_i A^i \right) C = C^{-1}f(A)C \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Следствие.

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(A') = 0$$

Если  $A'$  — диагональная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$

то

$$f(A') = \sum_{i=0}^n a_i (A')^i = \sum_{i=0}^n a_i \begin{pmatrix} d_1^i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(d_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(d_n) \end{pmatrix}$$

В частности, если все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  различны, то

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad C = (v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n)$$

Причем,  $v_1$  — собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_1$  (то есть,  $Av_1 = \lambda_1 v_1$ ),  $\dots$ ,  $v_n$  — собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_n$  ( $Av_n = \lambda_n v_n$ ), тогда  $A = CA'C^{-1}$

$$f(A) = Cf(A')C^{-1} = C \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} C^{-1}$$

**Жорданова форма.**

**Жорданова клетка** — это матрица вида

$$J = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} C^{-1}$$

Например,

$$J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Например, если  $V = P_n = \mathbb{C}[x]_{\leq n} = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ ,  $D : V \rightarrow V : f(x) \mapsto f'(x)$  — дифференцирование.  $f$  — собственный вектор для  $D$  тогда и только тогда, когда  $Df = \lambda f$ , то есть  $f'(x) = \lambda f(x)$ , где  $\lambda$  — число, тогда  $f(x) = a_0 = \text{const}$ ,  $f'(x) = 0 \cdot f(x) = 0$ .

**Базис Маклорена.**

$$e_0 = 1, e_1 = \frac{x}{1!}, \dots, e_u = \frac{x^u}{u!}$$

В этом базисе

$$D(e_k) = \left( \frac{x^k}{k!} \right)' = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e_{k-1}$$

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_n(0)$$

$$J_n(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \frac{1}{k} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \frac{1}{k+1} & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \ddots & \frac{1}{n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(так как  $D^k(e_u) = e_{n-k}$  и т.д.)

**Предложение.** Если  $f(x)$  — многочлен, то

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & \ddots & \cdots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

► Так как  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , то достаточно проверить формулу для  $f(x) = x^i$ . Тогда в

каждой клетке получаем  $\sum_{i=0}^n a_i \frac{(x^i)^{(t)}}{t!} = \frac{f^{(t)}(x)}{t!}$  для подходящего  $t$ .

Имеем: при  $f(x) = x^i$

$$\begin{aligned} f(J_k(\lambda)) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}^i = \left( \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right)^i = \\ &= (\lambda E + J_k(0))^i = \sum_{t=0}^i \lambda^t J_k(0)^{i-t} C_i^t \end{aligned}$$

Ненулевые элементы только в клетках с координатами  $(a, a + (i - t))_i$ , в этих клетках стоит

$$\lambda^t C_i^t = \frac{\lambda^t i!}{t!(i-t)!},$$

при этом

$$f^{(i-t)}(\lambda) = \frac{i!}{t!} \lambda^t$$

**Теорема о Жордановой форме.** Для любого линейного оператора  $\phi$  в  $\mathbb{C}^n$  существует базис (жорданов базис), в котором матрица оператора  $\phi$  приобретает вид

$$\phi_i = J(\phi) = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_T \end{pmatrix},$$

где  $J_i$  — жордановы клетки.

Если  $A$  — матрица  $n \times n$ , что

$$\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_i - \lambda)^{k_i},$$



то  $k_i$  — кратности собственных значений  $\lambda_i$ .

$$J(A) = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & 0 & \lambda_2 & \\ \hline & & & \lambda_3 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ & & & 0 & \cdots & \lambda_3 & \\ \hline 0 & 0 & & & & & \ddots \end{array} \right)$$

**Следствие.** Если  $J = J(A)$  — жорданова форма  $A$ ,  $C$  — матрица, в которой по столбцам записан жорданов базис, то

$$f(J) = C^{-1}f(A)C \Leftrightarrow f(A) = Cf(J)C^{-1},$$

где

$$f(J) = \left( \begin{array}{c|c|c} f(J_1) & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & f(J_2) & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \ddots \end{array} \right)$$

**Аннулирующий многочлен** матрицы  $A$  — такой многочлен  $f(x)$ , что  $f(A) = 0$ .

**Минимальный многочлен** матрицы  $A$  (обозначается  $m_A(x)$ ) — это аннулирующий многочлен наименьшей возможной степени со старшим коэффициентом 1.

**Пример 2.**

$\chi_A(\lambda)$  — аннулирующий многочлен для  $A$  (по теореме Гамильтона-Кели).

$$\chi_A(A) = C^{-1}\chi_A(J)C = C^{-1}((\lambda_1 E - J)^{k_1} \cdots (\lambda_i E - J)^{k_i})C =$$

$$= C^{-1} \left( \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix} \end{array} \right)^{k_i} \cdots C = C^{-1}OC$$

Получим  $\chi_A(\lambda) = 0$ .

Пусть  $m_i$  — порядок наибольшей жордановой клетки с  $\lambda = \lambda_i$  (геометрическая кратность собственного значения). Тогда  $m_i \leq k_i$  и  $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$  — минимальный многочлен матрицы  $A$  (он же — минимальный многочлен  $J$ ).

Как вычислить  $f(A)$ , зная минимальный многочлен  $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$ ? Если  $f(x) = m_A(x)q(x) + R(x)$  — деление с остатком, где  $\deg R(x) < d$  ( $d = \deg m_A(x)$  — степень минимального многочлена), то  $f(A) = 0 \cdot q(A) + R(A) = R(A)$  — **многочлен Лагранжа-Сильвестра**.

$\lambda_1, \dots, \lambda_s$  — спектр,  $R_1, \dots, R_s$  — соответствующие алгебраические кратности.

$$\begin{array}{ccc} f(\lambda_1) & \dots & f(\lambda_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(k_1-1)}(\lambda_1) & \dots & f^{(k_s-1)}(\lambda_s) \\ k_1 + \dots + k_s = u \end{array}$$

$P$  — многочлен Лагранжа-Сильвестра.

$$\begin{array}{c} P(\lambda_j) = f(\lambda_k) \\ \vdots \\ P^{(k_j-1)}(\lambda_j) = f^{(k_j-1)}(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, s \end{array}$$

Определяющий многочлен

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

многочлены

$$\phi_j = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_j)^{k_j}}$$

Тогда искомый многочлен

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \sum_{j=1}^s (\alpha_{j1} + \alpha_{j2}(\lambda - \lambda_j) + \dots + \alpha_{jk_j}(\lambda - \lambda_j)^{k_j-1}) \psi_j(\lambda) \\ \alpha_{jl} &= \frac{1}{(l-1)!} \left( \frac{f(\lambda)}{\psi_j(\lambda)} \right)_{\lambda=\lambda_j}^{(l-1)}, \quad l = 1, \dots, k_j, \quad j = 1, \dots, s \\ P(\lambda) &= \sum_{j=1}^s (f(\lambda_j) \phi_{j1}(\lambda) + f'(\lambda_j) \phi_{j2}(\lambda) + \dots + f^{(k_j-1)}(\lambda_j) \phi_{jk_j}(\lambda)) \end{aligned}$$

Спектральное разложение:

$$P(A) = \sum_{j=1}^s (f(\lambda_j)z_{j1} + f'(\lambda_j)z_{j2} + \dots + f^{(k_j-1)}(\lambda_j)z_{jk_j}),$$

где  $z_{ij}$  — спектральные компоненты матрицы  $A$ .

**Замечание.** Спектральные компоненты зависят только от матрицы.

**Утверждение.**  $z_{ij}$  являются многочленами от матрицы  $A$  степени меньшей, чем степень минимального многочлена.

**Утверждение.** Для любой матрицы  $A$  компонентные матрицы (спектральные компоненты) являются линейно независимыми.

**Утверждение.** Спектральные компоненты  $z_{ij}$  коммутируют между собой и с  $A$ .

Задача: Написать формулу для  $A^{-1}$  в виде многочлена от  $A$ .

►

$$\begin{aligned} \det(A) &\neq 0 \text{ (так как существует } A^{-1}) \\ (-1)^n(A^n + C_1A^{n-1} + C_2A^{n-2} + \dots) + \det A \cdot E &= 0 \Rightarrow \\ A((-1)^n(A^{n-1} + C_1A^{n-2} + \dots)) &= -\det A \cdot E \\ A\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\det A}(A^{n-1} + C_1A^{n-2} + \dots)\right) &= A \cdot A^{-1} = E \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$  сходится к матрице  $F$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall N > N(\varepsilon)$

$$\left\| \sum_{k=0}^N \alpha_k A^k - F \right\| < \varepsilon$$

Функция  $f$  называется **регулярной** на множестве  $S$ , если для любого  $A \in S$  существует степенной ряд

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$$

**Утверждение.**

$$T^{-1}f(A)T = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (T^{-1}A^kT)$$

**Теорема.**  $f$  определена на матрице  $A$ .

**Пример 3.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

Найти  $e^A$ .

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Собственные значения матрицы:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ .

Тогда жорданова матрица

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e^J = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^A = T e^T T^{-1}$$

Подставим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e - e^2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

$$f(A) = f(1)z_{11} + f(2)z_{21}$$

1.  $f(\lambda) = \lambda - 2, \quad A - 2E = (-1)z_{11} \Rightarrow$

$$z_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.  $f(\lambda) = \lambda - 1, \quad A - E = z_{21} \Rightarrow$

$$z_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = f(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sin\left(\frac{\pi A}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Утверждение.** Если  $\|A\| < 1$ , то  $E - A$  обратима и  $(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ .

$$(E - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=1}^{\infty} A^k = E$$

Критерий Коши:

$$\left\| \sum_{k=0}^N A^k - (E - A)^{-1} \right\| \leq \left\| \sum_{k=M}^N A^k \right\| \leq \sum_{k=M}^N \|A\|^k,$$

причем последовательность чисел  $\|A\|^k = q^k$ ,  $|q| < 1$  является сходящейся.

## Домашнее задание 10

1. Дана жорданова форма

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти спектральное разложение для  $A$  и вычислить:

- $f(\lambda) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)$
- $f(\lambda) = e^{\lambda t}$
- $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$
- $f(\lambda) = \lambda^{100}$

2. Решить задачу Коши.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1, & x_1|_{t=0} = 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3, & x_2|_{t=0} = 1 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3, & x_3|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

3. Проскуряков "Сборник задач" №1164, 1165, 1167 – 1170.

# Лекция 11

## Решение систем линейных уравнений.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} x + 0.99y = 1.01 \\ x + 1.01y = 0.99 \end{cases}$$

Надо найти приближительное решение. Все коэффициенты известны с точностью до 1%.  
Либо  $x + y = 1$  — бесконечное множество решений, либо  $\begin{cases} x + y = 1.01 \\ x + y = 0.99 \end{cases}$  — нет решений.

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Если считать, что коэффициенты точно известны, то можно найти решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \frac{1}{0.02} \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

При малом изменении коэффициентов (даже на 1%) решение может испортиться.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{— устойчивая система.}$$

Коэффициенты известны с точностью до 1%.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm 2\%$$

Даже если  $b$  известен точно, при изменении матрицы все может измениться. Есть два типа ошибок — неточная матрица и неточная правая часть.

### Общая постановка задачи.

Найти  $\bar{x}$ , удовлетворяющий системе  $A\bar{x} = \bar{b}$ .

Пусть  $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$  — решение приближенной системы (*hat* $A$ , *hat* $x$ , *hat* $b$  считаем известными).

Обозначим:

$$\Delta A = \hat{A} - A$$

$$\Delta x = \hat{x} - x$$

$$\Delta b = \hat{b} - b$$

Мы хотим оценить  $\Delta x$ , причем  $\Delta b$  считаем "малыми".

Так как  $A$  и  $b$  неизвестны, считаем  $x \approx \hat{x}$ .

Абсолютная погрешность:  $|\Delta x|$

Относительная погрешность:  $\frac{|\Delta x|}{|x|}$ , где  $|\cdot|$  — неоторая векторная норма.

Оценивая  $|b|_1(|b|_\infty)$  можем оценить  $|\Delta x|_1(|\Delta x|_\infty)$ .

**Упрощенный вариант  $\hat{A} = A$**

Дано:

$$\begin{cases} Ax = b \\ A(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax = b & (*) \\ A\Delta x = \Delta b & (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = A^{-1}b & (v) \\ \Delta x = A^{-1}\Delta b & (vv) \end{cases}$$

Считаем, что  $|x| \approx |\hat{x}|$ ,  $|b| \approx |\hat{b}|$ .

Из (\*) получим

$$|b| \leq \|A\| |x| \Leftrightarrow |x| \geq \frac{|b|}{\|A\|} \quad (1),$$

а из (\*\*)

$$|\Delta b| \leq \|A\| |\Delta x| \quad (2)$$

Из (v) получим

$$|x| \leq \|A^{-1}\| |b| \quad (3),$$

а из (vv)

$$|\Delta x| \leq \|A^{-1}\| |\Delta b| \quad (4)$$

Тогда относительная погрешность:

$$\begin{aligned} \delta x = \frac{|\Delta x|}{|x|} &\stackrel{(1),(4)}{\leq} \frac{\|A^{-1}\| |\Delta b|}{|b|/\|A\|} = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{|\Delta b|}{|b|} \\ \delta x &\stackrel{(2),(3)}{\geq} \frac{|\Delta b|/\|A\|}{\|A^{-1}\| |b|} = \frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\|} \frac{|\Delta b|}{|b|} \end{aligned}$$

Обозначение:  $\|A\| \|A^{-1}\| = \text{cond}(A) = \chi(A)$  — **число обусловленности**.

Например, для евклидовой нормы

$$\chi_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

В итоге, получим:

$$\frac{1}{\chi(A)} \delta b \leq \delta x \leq \chi(A) \delta b, \quad \delta b = \frac{|\Delta b|}{|b|}$$

А для общей задачи, если  $(A + \Delta A)\hat{x} = b + \Delta b$ ,  $\Delta x = \hat{x} - x$  ( $\Delta b, \Delta A, \Delta x$  — малые), то

$$\frac{1}{\chi(A)}(\delta b + \delta A) \leq \delta x \leq \chi(A)(\delta b + \delta A), \quad \delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

**Пример 1.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

Пусть у нас норма  $|\cdot|_1$ , тогда число обусловленности

$$\chi_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \right\|_1 \cdot 50 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = 2 \cdot 50 \cdot 2.01 = 201$$

$$\delta x \leq 201\delta b$$

Чтобы было  $\delta x < 1\%$  надо  $\delta b < \frac{1}{201} \cdot 1\%$ .

**Пример 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

У  $b$  ошибка в 1%. На сколько изменится  $x$  при изменении  $b$ ?

Найдем число обусловленности.

$$\chi_{\infty}(A) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \left\| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 3 \cdot 3 = 9$$

$\delta x < 1\%$ , если  $\delta b < 0.1\%$ .

**Свойства числа обусловленности:**

1.  $\chi(A) \geq 1$  (так как для любой нормы  $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$ )

Существует такая матрица  $A$ , что  $\chi(A) = 1$  только, если  $\|E\| = 1$  — норма сохраняет единицу, так как иначе  $\chi(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|E\|$

2.  $\chi(AB) \leq \chi(A)\chi(B)$

►  $\chi(A)\chi(B) = \|A\| \|A^{-1}\| \|B\| \|B^{-1}\| \geq \|AB\| \|B^{-1}A^{-1}\| = \|AB\| \|(AB)^{-1}\| = \chi(AB)$  ■

3.  $\chi(A^{-1}) = \chi(A)$

4. Для евклидовой нормы  $\|\cdot\|_2$ : если  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$  — сингулярные собственные значения, что

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)},$$

$$\sigma_n = \sqrt{\lambda_{\min}(A^*A)},$$

тогда  $\chi_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1(A) \sigma_1(A^{-1}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

Например, если  $A = A^*$  — самосопряженная матрица, то

$$\chi_2(A) = \left| \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \right|$$

5. Для любой матричной нормы  $\|\cdot\|$ , согласованной с некоторой векторной нормой  $|\cdot|$

$$\chi(A) \geq \left| \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \right|$$



$$\blacktriangleright \|A\| \geq \rho(A) = |\lambda_{\max}(A)|$$

$$\|A^{-1}\| \geq \rho(A^{-1}) = \left| \frac{1}{\lambda_{\min}(A)} \right| \Rightarrow \chi(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}$$

Так как  $\lambda$  — собственное значение  $A$ , то  $\frac{1}{\lambda}$  — собственное значение  $A^{-1}$ . ■

**Пример 3.**

$$\begin{pmatrix} 0.97 & 1.98 \\ 0.99 & 3.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.01 \\ 3.97 \end{pmatrix}$$

Решить приближенно и оценить погрешность решения.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \hat{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Относительно какой нормы ошибка меньше? ( $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty, |\cdot|_2$ )

$$\chi(A) \approx \chi(\hat{A}) \approx \|\hat{A}\| \|\hat{A}^{-1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\chi_\infty(A) = \max\{3, 4\} \cdot \max\{5, 2\} = 20$$

$$\chi_1(A) = \max\{2, 5\} \cdot \max\{4, 3\} = 20$$

$$\chi_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^*A)}{\lambda_{\min}(A^*A)}}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Собственные значения  $A^*A$ :  $\lambda_{\max} = 14.93$ ,  $\lambda_{\min} = 0.069$ , тогда  $\chi_2(A) = \sqrt{\frac{14.93}{0.069}} \approx 15$

$$\Delta b = \hat{b} - b = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.03 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 b = \frac{|\Delta b|_1}{|b|_1} \approx \frac{|\Delta b|_1}{|\hat{b}|_1} = \frac{0.01 + 0.03}{3 + 4} = 0.0057$$

$$\delta_2 b = \frac{\sqrt{0.01^2 + 0.03^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0.0063$$

$$\delta_\infty b = \frac{0.03}{4} = 0.0075$$

$$\delta_1 A = \frac{\|\Delta A\|_1}{\|A\|_1} = \frac{0.04}{5} = 0.008$$

$$\delta_\infty A = \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{0.05}{4} = 0.0125$$

Собственные значения для  $\Delta A^* \Delta A$ :  $\lambda_{\min} = 0.000487$ ,  $\lambda_{\max} = 0.00131$ ,  $\chi_2(\Delta A) =$   
 $= \sqrt{\frac{0.00131}{0.000487}} = 1.64$ , тогда

$$\begin{aligned}\delta_2 A &= \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\sigma_1(\Delta A)}{\sigma_1(A)} = \frac{\sqrt{0.00131}}{\sqrt{14.93}} = 0.009 \\ \delta_1 x &\leq \chi_1(A)(\delta_1 b + \delta_1 A) = 20 \cdot (0.0057 + 0.008) = 0.27 \\ \delta_2 x &\leq \chi_2(A)(\delta_2 b + \delta_2 A) = 15 \cdot (0.0063 + 0.009) = 0.23 \\ \delta_\infty x &\leq \chi_\infty(A)(\delta_\infty b + \delta_\infty A) = 20 \cdot (0.0075 + 0.0125) = 0.4\end{aligned}$$

Норма  $|\cdot|_2$  дала наименьшее значение ошибки 0.23, а  $|\cdot|_\infty$  — наибольшее 0.4.

**Оценить ошибку для обратной матрицы.**

$A = \hat{A} + \varepsilon$ , если знаем  $\hat{A}^{-1}$ . Ошибка приближения  $A^{-1} \approx \hat{A}^{-1}$ ?

$$\chi(A) \approx \chi(\hat{A})$$

Надо оценить

$$\begin{aligned}\delta A^{-1} &= \frac{\|(\hat{A} + \varepsilon)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{\|-\hat{A}^{-1}(E - \hat{A}(\hat{A} + \varepsilon)^{-1})\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{\|-\hat{A}^{-1}(E - (E - \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1})\|}{\|A^{-1}\|} \approx \\ &\approx \frac{\|\hat{A}^{-1}(E - (E + \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1})\|}{\|\hat{A}^{-1}\|} \leq \frac{\|\hat{A}^{-1}\|}{\|\hat{A}^{-1}\|} \|E - (E + \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1}\| \\ E - (E - \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1} &= E - (E - Y)^{-1} = E - (E + Y + Y^2 + Y^3 + \dots) = -(Y + Y^2 + \dots) \\ \left\| \sum_{t=1}^{\infty} (\hat{A}^{-1}\varepsilon)^t \right\| &\leq \sum_{t=1}^{\infty} \|\hat{A}^{-1}\|^t \|\varepsilon\|^t = \frac{\|\hat{A}^{-1}\| \|\varepsilon\|}{1 - \|\hat{A}^{-1}\| \|\varepsilon\|} \approx \|\hat{A}^{-1}\| \|\varepsilon\| = \frac{\chi(\hat{A})}{\|\hat{A}\|} \|\varepsilon\| = \chi(\hat{A}) \frac{\|\varepsilon\|}{\|\hat{A}\|}\end{aligned}$$

Более точно

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\chi(\hat{A})\delta\varepsilon}{1 - \chi(\hat{A})\delta\varepsilon}, \quad \delta\varepsilon = \frac{\|\varepsilon\|}{\|\hat{A}\|}$$

**Пример 4.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти  $f(A) = A^{100}$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} A\right)$ .

Минимальный многочлен для матрицы  $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ . Тогда для любой функции  $f(\lambda)$ , определенной на спектре матрицы  $A$  спектральное разложение будет иметь вид

$$f(A) = f(1)z_{11} + f'(1)z_{12} + f(2)z_{21}$$

$$f_1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$f_1(A) = f_1(2)z_{21}$$

$$A^2 - 2A + E = (2^2 - 2 \cdot 2 + 1)z_{21}$$

Получим, что

$$z_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= \lambda - 2 \\
A - 2E &= (-1)z_{11} + 1 \cdot z_{12} \\
f_3 &= 1 \\
E &= 1 \cdot z_{21} + 1 \cdot z_{11}
\end{aligned}$$

Получим, что

$$\begin{aligned}
& z_{11} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& z_{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Для  $A^{100}$ :  $f(1) = 1^{100}$ ,  $f'(1) = 100 \cdot 1^{99}$ ,  $f(2) = 2^{100}$

Получим

$$A_{100} = 1^{100} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 100 \cdot 1^{99} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} A\right) = \begin{pmatrix} \sin \pi & 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Домашнее задание 11

1. Доказать утверждение из лекции. Если  $(A + \Delta A)\hat{x} = b + \Delta b$ ,  $\Delta x = \hat{x} - x$ , то

$$\frac{1}{\chi(A)}(\delta b + \delta A) \leq \delta x \leq \chi(A)(\delta b + \delta A),$$

где  $\delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$  для малых  $\Delta b, \Delta A, \Delta x$ .

2. Вычислить  $\ln A$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

Элементы главной диагонали могут меняться на  $\varepsilon_1$ , а элементы правой части на  $\varepsilon_2$ . Оценить возможное изменение решения для нормы  $\|A\| = \max \sqrt{\lambda^* \lambda}$ .

4. Решить пример Крылова. ( $\sqrt{7}$  берется с разной точностью).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ \sqrt{7}x_1 + 2\sqrt{7}x_2 = 3\sqrt{7} \end{cases}$$

## Лекция 12

### Итеративные методы решения систем алгебраических уравнений.

Дана система уравнений

$$A\bar{x} = \bar{B} \quad (1)$$

Перепишем ее в виде

$$\bar{x} + (A - E)\bar{x} = \bar{B}$$

или

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{b}$$

Тут  $P = E - A$ ,  $\bar{b} = \bar{B}$ .

Для  $c \neq 0$ :  $cA\bar{x} = c\bar{B} \Rightarrow \bar{x} = (E - cA) + c\bar{B}$ , где  $P = E - cA$ ,  $\bar{b} = c\bar{B}$ .

Если  $C$  — матрица, тогда  $P = E - CA$ ,  $\bar{b} = C\bar{B}$ .

### Метод итераций.

Пусть  $\bar{x}^0$  — любой вектор (начальное приближение к  $\bar{x}$ ), тогда итеративная формула для вычисления  $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k$  имеет вид

$$x^{k+1} = Px^k + \bar{b}$$

Если последовательность векторов  $\lim\{\bar{x}^i\} = \bar{x}^\infty$  сходится, то

$$x^\infty = Px^\infty + \bar{b}, \quad x = x^\infty,$$

где  $x = x^\infty$  — решение системы.

**Теорема.** Описанный метод простых итераций сходится, то есть существует  $\bar{x}^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \{\bar{x}^i\}$ , которое будет решением системы при любом значении  $x^0$  тогда и только тогда, когда спектральный радиус  $\rho(P) < 1$ .

► Пусть спектральный радиус  $\rho(P) < 1$ , тогда существуют согласованные матричные  $\|\cdot\|$  и векторные  $|\cdot|$  нормы, что  $\|P\| < 1$ .

Предположим, что решение системы существует. Если  $\bar{x}$  — решение системы, то

$$\begin{aligned} x^{k+1} - x &= (Px^k + \bar{b}) - (Px + \bar{b}) = P(x^k - x) \\ |x^{k+1} - x| &\leq \|P\| |x^k - x| \quad (2) \end{aligned}$$

Значит  $|x^{k+1} - x| \leq \dots \leq \|P\|^{k+1}|x^0 - x| \rightarrow 0$ . То есть, если решение  $\bar{x}$  существует, то  $\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = x$  — решение системы.

Если же решения нет  $|\lambda_1| = \rho(P) \geq 1$ , то существует  $\bar{v} \neq 0$  :  $Pv = \lambda_1 v$  — собственный вектор, и для  $x^0 = v + \bar{x}$  получим

$$x^{k+1} - x = P(x^k - x) = \dots = P^{k+1}(x^0 - x) = P^{k+1}v = \lambda^{k+1}v \not\rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Если  $\|P\| < N$ , то  $|x^k - x| \leq N^k|x^0 - x|$ .

Число верных значащих цифр  $-c \cdot \log_{10}|x^k - x| = \xi(x^k)$ , где  $c$  зависит от нормы.

**Предложение.**

$$-const \cdot \log_{10}(\rho(P)) \leq \xi(x^{k+1}) - \xi(x^k)$$

Для нормы  $|\cdot|_\infty$   $const = 1$ .

►

$$\begin{aligned} \rho(P) &\approx \|P\| \geq \frac{|x^{k+1} - x|}{|x^k - x|} \\ \log_{10}(\rho(P)) &\geq \log_{10}|x^{k+1} - x| - \log_{10}|x^k - x| \\ -\log_{10}(\rho(P)) &\leq \frac{1}{c}(\xi(x^{k+1}) - \xi(x^k)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Надо, чтобы спектральный радиус был маленький.

**Утверждение.**

$$|x - x^k| \leq \frac{|x^{k+1} - x^k|}{1 - \|P\|}, \text{ если } \|P\| < 1$$

►

$$|x^{k+p} - x^k| \leq |x^{k+p} - x^{k+p-1}| + \dots + |x^{k+1} - x^k| \stackrel{(2)}{\leq} (\|P\|^p + \dots + \|P\| + 1)|x^{k+1} - x^k| \leq \frac{|x^{k+1} - x^k|}{1 - \|P\|}$$

$$|x - x^k| = |x^\infty - x^k| = \lim_{p \rightarrow \infty} |x^{k+p} - x^k| \leq \frac{|x^{k+1} - x^k|}{1 - \|P\|} \quad \blacksquare$$

**Следствие 1.**

$$|x - x^k| \leq \frac{\|P\|^k}{1 - \|P\|} |x^1 - x^0|$$

**Следствие 2.**

$$\text{Если } \bar{x}^0 = \bar{b}, \text{ то } |x - x^k| \leq \frac{\|P\|^{k+1}}{1 - \|P\|} |\bar{b}|$$

►  $x^1 = Px^0 + b$ . Если  $x^0 = b$ , то  $x^1 = Pb + b$ .

$$|x^1 - x^0| = |Pb| \leq \|P\| |b| \quad \blacksquare$$

**Пример 1.**

Методом итераций решить систему.

$$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 68 \\ 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 = 41 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 = 60 \end{cases}$$

Тогда матрица  $C$  будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$CAx = CB, \quad x = Px + b = (E - CA)x + CB$$

То есть,

$$P = E - CA = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = CB = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Посчитаем норму матрицы:  $\|P\|_c = 0.9 < 1$ ,  $\|P\|_1 = 0.4 < 1$ . Так как ее значения меньше 1, значит процесс итераций будет сходящимся.

Возьмем в качестве первого приближения

$$x^0 = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Подставим это значение в  $x^1 = Px^0 + b$ , получим

$$x^1 \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Теперь вместо  $x^0$  подставляем  $x^1$  и получаем  $x^2$ , и так далее, пока значение  $x$  не будет больше изменяться.

**Метод Зейделя.**

Этот метод является модификацией метода итераций.

$$x = Px + b$$

Представим матрицу  $P$  в виде суммы верхней и нижней треугольных матриц.

$$P = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда итеративная формула вычисления будет иметь вид

$$x^{k+1} = P_1 x^{k+1} + P_2 x^k + b$$

### Пример 2.

Сделаем пример 1 с помощью метода Зейделя. В нем мы вычислили

$$P = E - CA = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Представим ее в виде суммы верхней и нижней треугольных матриц.

$$P = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ 0 & 0 & -0.15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут также за нулевое приближение возьмем

$$x^0 = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x'_1 = 0 \cdot x'_1 - (0.15 \cdot 2.05 + 0.05 \cdot 6) + 3.4 = 2.7925$$

$$x'_2 = -0.1x'_1 - 0.15 \cdot 6 + 2.05 = 0.87075$$

$$x'_3 = -0.3x'_1 - 0.1x'_2 - 0 + 6 = 5.075175$$

### Приведение к виду, удобному для итераций.

$$Ax = b$$

$$\tau Ax = \tau b$$

$$x = (E - \tau A)x + \tau b$$

Надо найти такое оптимальное  $\tau$ , что  $\min_{\tau} \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} |1 - \tau\lambda|$ .

**Утверждение.** Если все собственные числа матрицы  $\lambda_i > 0$ , то оптимальное значение

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}.$$

### Пример 3.

Привести к виду, удобному для итераций.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Собственные значения матрицы  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 10$ . Так как все они положительные, получим:

$$\tau = \frac{2}{10+1} = \frac{2}{11}$$
$$E - \tau A = \begin{pmatrix} 1-2\tau & -2\tau & 2\tau \\ -2\tau & 1-5\tau & 4\tau \\ 2\tau & 4\tau & 1-5\tau \end{pmatrix}$$

Тогда  $\max\{|1-2\tau|, |1-5\tau|, |1-5\tau|\}$ .

### Домашнее задание 12

1. Доказать утверждение из лекции. Если все собственные числа матрицы  $\lambda_i > 0$ , то оптимальное значение  $\tau = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$ .
2. Привести к виду, удобному для итераций.

$$(a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$
$$(b) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

## Лекция 13

Итеративное решение систем линейных уравнений.

$$Ax = b \quad (1)$$

Если матрица  $A$  не является симметричной (и положительно определенной), то надо перейти от (1) к нормальной системе

$$A^*Ax = A^*b$$



**Метод Крылова.**

Для любого оператора существует минимальный многочлен  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \dots + p_1x + p_0$$

**Задача:** найти коэффициенты  $\varphi(x)$

$$(A^m + p_{m-1}A^{m-1} + \dots + p_1A + p_0E)v = 0$$

$L = \langle v_0, Av_0, \dots, A^{m-1}v_0 \rangle$  — зависит от  $v_0$ , причем  $v_{m-1} = Av_{m-2}$ .

Выразим:

$$A^m v = -p_{m-1}A^{m-1}v - \dots - p_0Ev \quad (2)$$

Замечание:  $L(v_0)$  инвариантно относительно линейного оператора  $A$ .

**Метод:** возьмем  $v_0$  и решим (2) относительно  $m$  неизвестных  $p_0, \dots, p_{m-1}$ .

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

Если матрица приводится к виду

$$J = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ & \vdots & \ddots & 1 & & 0 \\ & 0 & \dots & \lambda_1 & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & & & & & \vdots & \ddots & 1 \\ & & 0 & & & 0 & \dots & \lambda_2 \end{array} \right)$$

где кратность  $\lambda_1$  равна  $k$ , а кратность  $\lambda_2$  равна  $m$ , то

$$\chi_J(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^k (\lambda_2 - \lambda)^m$$

**Циклическая клетка** — это матрица вида

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Однако не все матрицы можно привести к такому виду.

**Фробениусова форма** — это матрица вида

$$F_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Данная матрица получена отражением относительно побочной диагонали.

Найдем характеристический многочлен у циклической клетки.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{C_2} = \det(C_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & a_0 \\ 1 & a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{C_3} = \det(C_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 a_2 + \lambda a_1 + a_0$$

Тогда для  $C_n$  получим

$$\chi_{C_n} = \det(C_n - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_0)$$

Как приводить матрицу к фробениусовой форме?

Надо составить базис. Выберем  $v_0$  случайным образом.

$$v_0, Av_0 = v_1, Av_1 = v_2, Av_2 = v_3, \dots$$

Эти векторы  $v_0, v_1, \dots$  — базис линейного пространства.

$$v_{n-1} = A^{n-1}v_0, \quad v_n = A^{n-1}v_1 = a_0v_0 + a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1}$$

$$(v_0)_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (v_1)_v = (Av_0)_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots$$

$$A_v = ((Av_0)_v \mid (Av_1)_v \mid \dots) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A \cdot M_{n-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{a_{n1}}{a_{n,n-1}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{n,n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A_1 = AM_{n-1} = \left( \begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$B_1 = M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = \left( \begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$M_{n-1}^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**Интерполяционный метод.**

$\chi_A(\lambda)$  — многочлен степени  $m$  — вычисляется как интерполяционный многочлен Лагранжа по значениям в  $(m+1)$  точке.

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E), \quad \lambda = 0, 1, \dots, m$$

То есть, надо  $m$  раз вычислить определитель.

### Метод итераций.

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{b}$$

Итеративный шаг:  $x^{k+1} = Px^k + \bar{b}$ .

Матрица называется симметрической, если  $A^T = A$ ,  $A$  — действительная.  
 $A^*A$  — симметрическая матрица.

Пусть  $A^* = A$  — эрмитова матрица (например, симметрическая). Нам неизвестны  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные значения и соответствующие им собственные векторы  $X_1, \dots, X_n$ .

Пусть

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix}$$

Если  $X_1$  — собственный вектор, то и  $c \cdot X$  — собственный вектор, то есть  $X_1$  определен с точностью до пропорциональности. Считаем  $x_n^1 = 1$ .

Получим  $A\bar{x}_1 = \lambda_1\bar{x}_1$  или

$$\begin{cases} a_{11}x_1^1 + \dots + a_{1n} \cdot 1 = \lambda_1 x_1^1 \\ \dots \\ a_{n-1,1}x_1^1 + \dots + a_{n-1,n} \cdot 1 = \lambda_1 x_{n-1}^1 \\ a_{n1}x_1^1 + \dots + a_{nn} \cdot 1 = \lambda_1 \\ \lambda_1 = a_{n1}x_1^1 + \dots + a_{nn} \\ x_1^1 = \frac{1}{\lambda_1}(a_{11}x_1^1 + \dots + a_{1n}) \\ \dots \\ x_{n-1}^1 = \frac{1}{\lambda_1}(a_{n-1,1}x_1^1 + \dots + a_{n-1,n}) \end{cases}$$

$$\bar{Y} = f(\bar{Y})$$

Итеративный процесс

$$\begin{cases} \lambda_1^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{1(k)} + \dots + a_{nn} \\ x_1^{1(k+1)} = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}}(a_{11}x_1^{1(k)} + \dots + a_{1n}) \\ \dots \\ x_{n-1}^{1(k+1)} = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}}(a_{n-1,1}x_1^{1(k)} + \dots + a_{n-1,n}) \end{cases}$$

Начальное условие  $\lambda_1^0 = a_{nn}$ ,  $x_1^0 = \frac{a_{1n}}{a_{nn}}, \dots$ .

Для  $X_2$  те же уравнения (аналогичные) и условие  $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ .

$$x_1^1 x_1^2 + \dots + x_n^1 x_n^2 = 0$$

### Приведение к виду, удобному для итераций.

Приведем систему уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$  к виду  $A^*Ax = A^*b$ .

Для итеративного метода

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{B}$$

$$x = (E - A)x + b$$

Возьмем число  $\tau : \tau Ax = \tau b$

$$x = (E - \tau A)x + \tau b, \quad P = E - \tau A$$

Собственные значения матрицы  $P : \lambda_i(P) = 1 - \tau \lambda_i(A)$ .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(P) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n(A) \end{pmatrix}$$

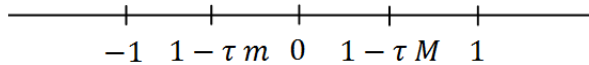
Пусть  $m \leq |\lambda_i(A)| \leq M$ , то есть  $M = \varsigma(A) = \rho(A)$ ,  $m = \frac{1}{\varsigma(A^{-1})} = \frac{1}{\rho(A^{-1})}$ .

Это верно только для  $\lambda_i \geq 0$ .

$$\max_i |\lambda_i(P)| \rightarrow \min$$

$$\max_i |\lambda_i(P)| \leq \max\{|1 - \tau m|, |1 - \tau M|\}$$

Какое выбрать  $\tau$ ?



Лучше взять  $\tau < \frac{2}{m+M}$ , чем  $\tau > \frac{2}{m+M}$ . Лучше всего выбрать  $\tau = \frac{2}{m+M}$ .

Если  $\tau = \tau_0 = \frac{2}{m+M}$ , то  $\rho(P) = \max\{|1 - \tau_0 m|, |1 - \tau_0 M|\} = \max\left\{\left|\frac{M-m}{m+M}\right|, \left|\frac{m-M}{m+M}\right|\right\} = \frac{M-m}{M+m} = \frac{\chi_2 - 1}{\chi_2 + 1}$ , где  $\chi_2(A) = \frac{M}{m}$  — число обусловленности.

Если нет собственных значений, то можно взять  $\tau = \frac{2}{a}$ , где  $a \geq \|A\| \geq \rho(A)$

(какая-то норма  $\|A\| = \|A\|_\infty$  или  $\|A\| = \frac{1}{n} \sum_{i,j} |a_{ij}|$ ).

### Пример 1.

Методом итераций найти собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножим на

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(предполагаем, что найдется такой вектор).

$$A\bar{x}_1 = \lambda\bar{x}_1$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 7 = \lambda x_3 = \lambda \\ \lambda^{(k+1)} = 2x_1^{(k)} + 7 \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}}(6x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + 2) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}} = \frac{1}{\lambda^{(k)}}(-2x_1^{(k)} + 5x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Через итерации получим

$$\lambda_1 = 9, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем  $\lambda_2, v_2$ .

Для  $\bar{x}_2$  те же уравнения и  $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle = 0$ , то есть

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 7x_3 = \lambda x_3 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Так как сумма собственных значений равна следу  $= 18$ , то из этого выражения, зная  $\lambda_1, \lambda_2$  можно найти  $\lambda_3$ .

### Домашнее задание 13

1. Дорешать Пример 1 с лекции.
2. Методом Крылова найти минимальный характеристический многочлен.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Методом Данилевского найти характеристический многочлен.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Найти собственные значения и собственные векторы методом итераций.

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 6 & -6 \\ 6 & 21 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

## Лекция 14

**Положительные и неотрицательные матрицы.**

Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , тогда

$$A \geq B \Leftrightarrow a_{ij} \geq b_{ij} \quad \forall i, j$$

$$A > B \Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij} \quad \forall i, j$$

Однако не все матрицы сравнимы.

**Пример 1.**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \not\asymp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица называется **неотрицательной**, если  $A \geq 0$  тогда и только тогда, когда все  $a_{ij} \geq 0$ .

Матрица называется **положительной**, если  $A > 0$  тогда и только тогда, когда все  $a_{ij} > 0$ .

**Матрица смежности**  $G > 0$ ,  $G \not\asymp 0$  — матрица с элементами  $g_{ij}$ , причем  $g_{ij} = 1$ , если есть ребро из вершины  $i$  в вершину  $j$  и  $g_{ij} = 0$  иначе (вместо единицы может также стоять какое-либо число  $k$ , равное количеству ребер из вершины  $i$  в  $j$  или весу ребра).

**Теорема Перрона.** Если  $A > 0$  матрица положительная, то существует такое  $\hat{\lambda}_A > 0$  — собственное значение матрицы  $A$ , что  $\hat{\lambda}_A > |\lambda|$  для всех остальных собственных значений  $A$  и соответствующий собственный вектор  $\hat{x}$  положителен

$$A\hat{x} = \hat{\lambda}_A\hat{x}, \quad \hat{x} > 0.$$

В частности,

$$\rho(A) = \hat{\lambda}_A.$$

**Следствие.** Вектор  $\hat{x}$ , соответствующий  $\hat{\lambda}_A$  единственный с точностью до пропорциональности. В частности,  $\hat{\lambda}$  — простое, кратности один.

### PageRank.

Есть конечное число состояний и вероятности перехода из одного состояния в другое. Какова вероятность на каком-то шаге  $n$  попасть в состояние  $i$ ? (Какова вероятность, что пользователь окажется на нашем сайте?)

$$\bar{x}_n = (p_1 \cdots p_i \cdots p_n)^T$$

$$P = (p_{ij}) : x_n = P^n \cdot x_0$$

Стабильным состоянием системы называется

$$x_{n+1} = Px_n = x_n.$$

При  $n \rightarrow \infty$   $\hat{x} = x_\infty$   $Px_n = 1 \cdot x_n$ , где собственное значение равно единице. Не все  $p_{ij}$  могут быть даны (на каких-то сайтах нет ссылок).

Собственный вектор  $(x_1 \cdots x_n)^T$ , где  $x_i$  — соответствующие вероятности попадет на какую-то страницу. Тогда первой страницей будет выдаваться страница с наибольшим собственным значением и так далее по убыванию.

$$\bar{x} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + \cdots + x_N P^N$$



Вместо  $P$  в PageRank можно также смотреть подправленное значение

$$\tilde{P} = P(1 - \beta) + \beta Q$$

Обычно берут  $\beta = 0.15$ , а

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

где  $n$  — количество всех страниц в интернете.

**Следствие.** Пусть  $A \geq 0$  неотрицательная матрица, тогда

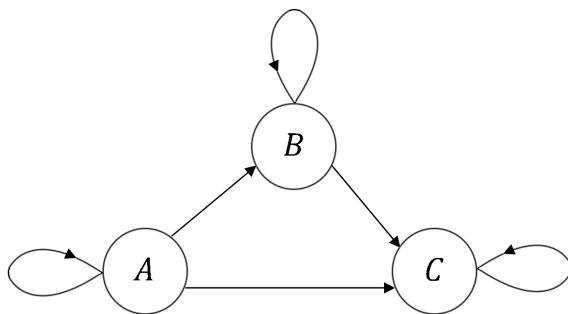
1. Существует собственное значение, равное спектральному радиусу

$$\exists \hat{\lambda}_A = \rho(A) \geq 0$$

2. Собственный вектор  $\hat{x}_A \geq 0$  (не обязательно единственный)

**Пример 2.**

Найти самую влиятельную вершину в графе, сформировать предпочтения.



Составим матрицу по графу:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В начальном состоянии рангии равны:

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.333 \\ 0.333 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим дальше:

$$\bar{x}_1 = P^T \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.111 \\ 0.277 \\ 0.611 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = P^T \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} \\ \frac{19}{108} \\ \frac{85}{108} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.037 \\ 0.175 \\ 0.787 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получили ранги:

$$C = 1, \quad A = B = 0,$$

значит самая влиятельная вершина в графе это  $C$ .

Матрица  $A$  называется **неразложимой матрицей**, если одновременно перестановкой строк и столбцов матрицу  $A$  нельзя привести к виду

$$A = \left( \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & R \end{array} \right),$$

где  $P$  и  $R$  — квадратные матрицы, а  $O$  — нулевая матрица.

**Теорема Фробениуса (Перрона-Фробениуса).** Пусть  $A \geq 0$  и  $A$  — неразложимая матрица, тогда  $\hat{\lambda}_A > 0$  и  $\hat{x} > 0$  — единственный с точностью до множителя.

**Модель Леонтьева.**

Есть несколько отраслей и несколько категорий продуктов. Матрица Леонтьева имеет вид:

$o \mid p$	1	2	$\dots$	$n$
1	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$
2	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\ddots$	$\vdots$
$m$	$a_{m1}$	$\dots$	$\dots$	$a_{mn}$

$$A\bar{x} + \bar{d} = \bar{x}$$

$A = (a_{ij})$ , где  $a_{ij}$  — количество продукции  $j$  в отрасли  $i$  для производства (матрица прямых затрат),  $d$  — конечный спрос, а  $x$  — выпуск. Продукция отрасли  $i$ :

$$x_i = d_i + \sum_j a_{ij}x_j,$$

первое слагаемое означает употребление, а второе — использование для производства.

Матрица  $A$  называется **продуктивной**, если  $A \geq 0$  и для некоторого  $\bar{x} > \bar{0}$  верно

$$A\bar{x} < \bar{x}.$$

**Лемма 1.** Если матрица неотрицательная  $A \geq 0$  и  $x_1 \geq x_2$ , то  $Ax_1 \geq Ax_2$ .

► Надо проверить  $Ax_1 - Ax_2 \stackrel{?}{\geq} 0$ .

$$A(x_1 - x_2) \geq 0,$$

так как  $A \geq 0$  и  $x_1 - x_2 \geq 0$ . ■

Если  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ , то  $A - B = (c_{ij})$ , где  $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} \geq 0$ ,  $c \geq 0$ .

**Лемма 2.** Если матрица  $A$  продуктивная, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$ .

► По определению продуктивной матрицы  $A\bar{x} < \bar{x}$ , тогда существует число  $0 < \alpha < 1$ , где  $\alpha$  — константа сжатия, что:

$$Ax < \alpha x$$

$$0 \leq A^n x < \alpha^n x$$

При  $n \rightarrow \infty$   $\alpha \rightarrow 0$ , тогда получим  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = 0$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$ , так как  $x$  — положительный вектор.

Подробнее: если  $A^n = (b_{ij})$ , то

$$A^n \bar{x} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj}x_j \end{pmatrix} = \bar{0},$$

где  $x_j > 0$ ,  $b_{ij} \geq 0$ . Значит все  $b_{ij} = 0$ ,  $A^\infty = 0$  по лемме 1. ■

**Лемма 3.** Если матрица  $A$  — продуктивная и для какого-то  $\bar{y}$

$$\bar{y} \geq A\bar{y},$$

то  $\bar{y}$  — неотрицательный вектор.

► Будем подставлять  $y$  в наше условие много раз:

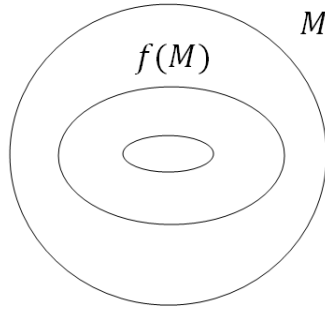
$$y \geq Ay \geq A^2y \geq \dots \geq A^ny \geq \dots \geq A^\infty y = \bar{0}$$

по лемме 2, значит  $\bar{y} \geq 0$ . ■

**Теорема.** Пусть  $M$  — полное метрическое пространство (например,  $M = \mathbf{R}^n$  или  $M \subset \mathbf{R}^n$  — замкнутое ограниченное множество),  $f : M \rightarrow M$  — сжимающее, то есть существует  $0 < \alpha < 1$  такое, что для  $\forall x, y \in M$

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y),$$

тогда существует единственная неподвижная точка — такое  $z \in M$ , что  $f(z) = z$ .



$M$  отображается в  $f(M)$  и так далее. В пределе диаметр стремится к нулю.

**Лемма 4.** Если матрица  $A$  — продуктивная, то существует  $(E - A)^{-1} \geq 0$ . (А если  $A > 0$ , то  $(E - A)^{-1}$  положительная матрица.)

►  $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^n + \dots$  — ряд сходится, так как  $A^n \rightarrow 0$ , тогда  $\rho(A) < 1$  и так далее.

$$(E - A)^{-1} \geq E + A \geq A$$

Если  $A > 0$ , то  $(E - A)^{-1} > 0$ , а если  $A \geq 0$ , то  $(E - A)^{-1} \geq 0$  ■

**Задача.** Если  $A \geq 0$  — неразложимая и продуктивная матрица, то  $(E - A)^{-1} > 0$ .

**Теорема.** Если  $A$  — продуктивная, то для любого  $\bar{d} \geq \bar{0}$  система  $A\bar{x} + \bar{d} = \bar{x}$  имеет единственное решение  $\bar{x}$ , причем  $\bar{x} \geq 0$ .

**Следствие.** Для  $d > 0$  система имеет решение  $x \geq 0$  тогда и только тогда, когда матрица  $A$  продуктивная.

**Доказательство теоремы.**

► Выразим  $x - Ax = d$  или  $(E - A)\bar{x} = \bar{d}$ . Так как матрица  $A$  продуктивная из леммы 4 и следствия выше получим  $\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{d} \geq 0$  ■

**Доказательство следствия.**

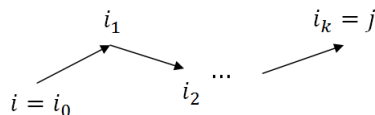
► Если  $(E - A)\bar{x} = \bar{d}$ ,  $\bar{d} > 0$ , то  $x = Ax + d > 0$ , причем  $x > Ax$ , а это по определению

означает, что матрица  $A$  продуктивная. ■

### Утверждение.

1. Матрица  $A$  является неразложимой тогда и только тогда, когда для  $\forall i, j, i \neq j$  существует такая последовательность вершин

$$i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_k = j : a_{i_t i_{t+1}} \neq 0, t = 0, \dots, k-1$$

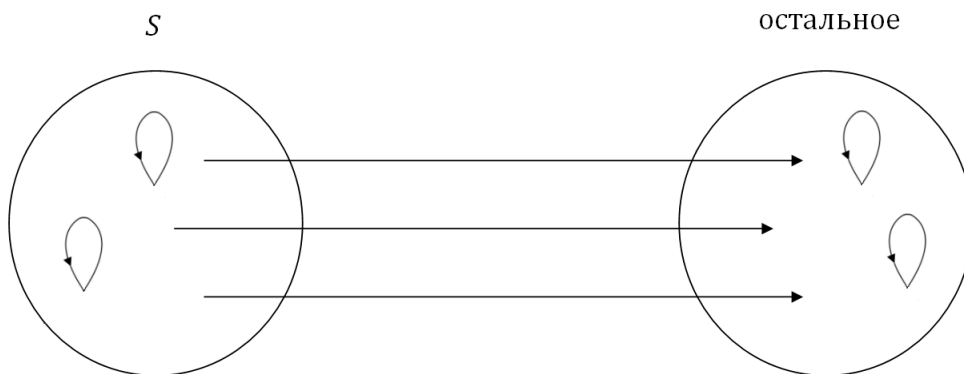


2. Матрица  $A$  неразложима тогда и только тогда, когда для любых вершин  $\forall i, j$  существует  $\exists m < n$ , что

$$(A^m)_{ij} \neq 0.$$

3. Неотрицательная матрица  $A \geq 0$  неразложима тогда и только, когда  $(E + A)^{n-1} > 0$ , где  $n$  — порядок матрицы.

1. Матрица  $A$  является разложимой тогда и только тогда, когда существует  $\exists S = \{i_1, \dots, i_s\} \subsetneq [1, \dots, n]$ . Тогда  $a_{ij} = 0$  при  $j \in S, i \notin S$ , где  $1 \leq |S| \leq n-1$ .



(Можем перенумеровать индексы.)

Стрелка  $i \rightarrow j$  существует тогда и только тогда, когда  $a_{ij} \neq 0$ .

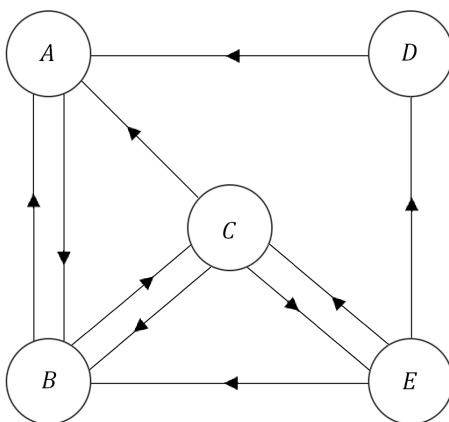
В разложимой матрице какого-то пути нет, в неразложимой матрице все пути есть.

2.  $a_{ij}$  равно количеству путей  $i \rightarrow j$  длины один, а  $(A^m)_{ij}$  равно количеству путей  $i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{m-1}$  длины  $m$ .

3. Путь длины  $n - 1$   $(E + A)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m A^m > 0$ , так как в каком-то слагаемом будет ненулевой элемент, то есть получим положительное число.

### Домашнее задание 14

1. Найти самую влиятельную вершину в графе.



2. Разложима ли матрица  $A$ ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Разложима ли матрица  $B$ ? Найти  $\lambda$  и  $v$  из теоремы Перрона.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

## Лекция 15

**Теорема о сжимающем отображении.** Существует единственное  $\bar{x} \geq 0$  :  $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$  — неподвижная точка, то есть

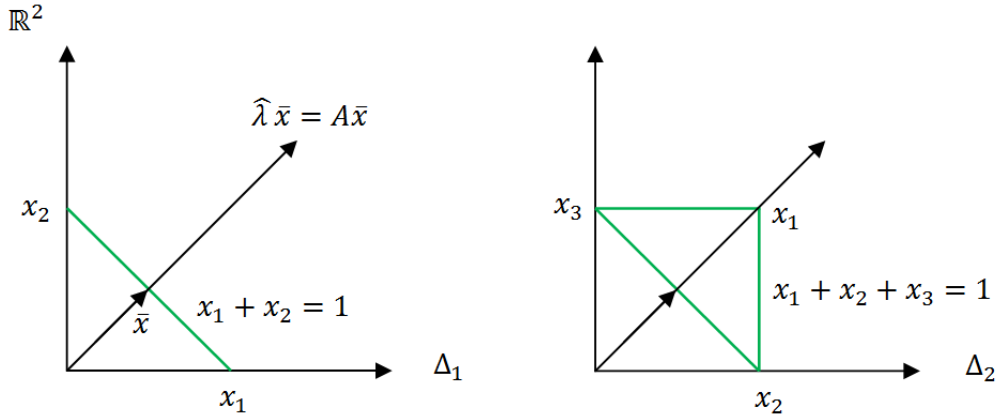
$$\frac{1}{|Ax|_1} Ax = \bar{x}$$

$$Ax = \hat{\lambda}x, \quad \hat{\lambda} = |Ax|_1$$

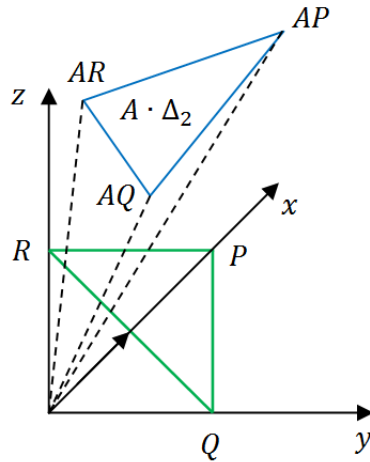
Докажем теорему Перрона с прошлой лекции.

**Теорема Перрона.** Если  $A > 0$  (то есть все  $a_{ij} > 0$ ), то у матрицы  $A$  существует положительное собственное значение  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_A$  :  $\hat{\lambda} = \rho(A)$  и  $\hat{\lambda} > |\lambda|$  для всех остальных собственных значений  $\lambda$  матрицы  $A$ . Этому собственному значению отвечает положительный собственный вектор  $\hat{x} > 0$  — единственный с точностью до пропорциональности: в частности  $\hat{\lambda}$  — простое, то есть кратности один.

► Рассмотрим отображение  $\bar{x} \mapsto A\bar{x} \rightarrow \frac{A\bar{x}}{|A\bar{x}|_1}$ .



Рассмотрим на множестве  $\Delta = \Delta_{n-1} = \{x_1 \geq \bar{0}, \dots, x_n \geq \bar{0} \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$ . При отображении  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  множество  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , где  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ , переходит в  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  (с учетом  $\bar{0} \mapsto \bar{0}$ ), так как  $\forall 0 \neq \bar{x} \geq 0 \quad A\bar{x} > \bar{0}$ , то есть  $A\Delta \subset \mathbb{R}^n > 0 = \{(x_1 \cdots x_n)^T \mid x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ .



Функция  $c(x, y) = \frac{\rho(\varphi(x), \varphi(y))}{\rho(x, y)}$  непрерывна на компактном  $\Delta$ , причем  $c(x, y) < 1$ . Тогда существует  $\varepsilon : \forall x, y \quad c(x, y) < \varepsilon < 1$ , значит  $\varphi$  — сжимающее отображение (оно

сжимает расстояние в  $\geq \varepsilon$  раз).

Воспользуемся теоремой о сжимающем отображении. Здесь  $\hat{\lambda} > 0$  (так как  $\bar{x} \in \Delta$ , то  $\bar{x} \neq \bar{0}$ , так что  $Ax > 0$ ,  $|Ax|_1$  равен сумме всех координат вектора  $A\bar{x}$ , а значит  $> 0$ ).

$$x = \frac{1}{\lambda} Ax > \bar{0}$$

Это единственный положительный собственный вектор (как неподвижная точка). ■



$$||A||_1 = \max_{|x|_1=1} \frac{|Ax|_1}{|x|_1} \geq \rho(A)$$

$$\bar{x} \rightsquigarrow |\bar{x}| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$$

Тогда  $|\bar{x}|_1 = ||\bar{x}||_1$ ,  $|Ax|_1 \leq |A||\bar{x}|_1$ . Значит  $\max_{|x|=1} |Ax|_1 = \max_{\bar{x} \in \Delta} |Ax|_1 = ||A||_1 > \rho(A)$ .

Оценка  $||A||_1 \geq \hat{\lambda}$ .

**Теорема Перрона-Фробениуса.** Если  $A \geq 0$  — неразложимая матрица, то

1.  $\exists \hat{\lambda}_A \geq 0$ , причем  $\hat{\lambda}_A = \rho(A)$  — самое большое по модулю собственное значение  $A$
2. при этом соответствующий собственный вектор  $\hat{x}_A \geq 0$
3. если при этом  $A\bar{y} \geq \mu\bar{y}$  для некоторого  $\bar{y} \geq \bar{0}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , то  $\mu \leq \hat{\lambda}_A$
4. в частности, для любого собственного значения  $\lambda$  матрицы  $A$  всегда  $|\lambda| \leq \hat{\lambda}_A$

► Пусть  $\forall \bar{x} \geq \bar{0}$   $r_x = \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \max\{\rho > 0 \mid \rho x \leq Ax\}$ ,  $\rho \leq \frac{(Ax)_i}{x_i}$ .

Тогда пусть  $M = S_1 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ , где  $S_1$  радиуса один.

Найдем  $\max_x r_x$ . Почему он существует?

1.  $r_x$  непрерывна по  $\bar{x}$  при  $\bar{x} \in \mathbb{R}_{>0}^n$  (то есть  $\bar{x} > 0$ ).

Но если  $y = \frac{x}{|x|}$ , то  $y \in M$  и  $r_x = r_y$ , поэтому

$$\max_{x \geq \bar{0}} r_x = \max_{\bar{x} \in M} r_y$$

До этого было утверждение о том, что если матрица  $A$  — неразложима,

то  $B = (E + A)^{n-1} > 0$ . Пусть  $N = B(M) = \{\bar{z} = (E + A)^{n-1}y \mid y \in M\}$ , тогда



$N \subset \mathbb{R}^n > 0$ .

Если  $y \in M$ , то  $r_y y \leq Ay$  и для  $z = By$

$$r_y By \leq AB_y$$

(То есть  $AB = BA$ ). Значит  $r_y z \leq Az$

$$r_y \leq \frac{|Az|_i}{|z|_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$r_y \leq r_z$$

Так как

$$\max_{x \geq 0} r_x = \max_{y \in M} r_y \leq \max_{z \in B} r_z \leq \max_{x \geq 0} r_x,$$

значит существует

$$\max_{z \in N} r_z = \max_{x \geq 0} r_x = \max_{y \in M} r_y$$

(так как  $N$  — компактно,  $r$  непрерывно на  $N \subset \mathbb{R}^n > 0$ )

Обозначим  $r = \hat{\lambda} = \max_{z \in N} r_z$ . Так как  $u = (1 \dots 1)^T > 0$ , то  $r_u - \min_i \frac{|A_i|_1}{1} > 0$  (так как  $A$  разложима), то  $r > 0$ .

2. Докажем, что  $r$  — собственное значение, то есть найдем собственный вектор. Пусть

$$r = r_z, \quad z = (E + A)^{n-1}y, \quad (E + A)^{n-1} \in N, \quad y \in M$$

Докажем, что  $Az = rz$ , то есть  $\bar{z} > 0$  — собственный вектор с собственным значением  $\hat{\lambda} = r > 0$ . Сначала докажем  $A\bar{y} = r\bar{y}$ . Иначе  $Ay - ry \geq 0$ ,  $B(Ay - ry) > 0$

$$AB_y - rBy = Az - rz > 0$$

$$Az > rz \Rightarrow Az > \varepsilon rz, \quad \varepsilon > 1$$

Тогда  $\varepsilon r \leq \frac{Az_i}{z_i}$  для всех  $i$ .  $\varepsilon r \leq r$  — противоречие с  $\varepsilon > 1$ . Тогда  $y$  — собственный вектор

$$Ay = ry.$$

Но тогда и  $z$  — собственный вектор, так как

$$BAy = rBy$$

$$AB_y = rBy$$

$$Az = rz$$

$z > 0$  — собственный вектор с собственным значением  $\hat{\lambda} = r > 0$ .

$$(z = (A + E)^{n-1}y = (1 + \hat{\lambda})^{n-1}\bar{y} > 0 \Rightarrow \bar{y} > 0)$$

3. Надо доказать, что если  $A\bar{t} \geq \mu\bar{t}$  для некоторого  $\bar{t} \geq \bar{0}$ , то  $\mu \leq \hat{\lambda}$ . Можем считать  $t \in M$ , тогда

$$At \geq \mu t \Rightarrow \mu \leq \frac{(At)_i}{t_i}$$

то есть  $At \geq \mu t \Leftrightarrow \mu \leq r_t \leq \max_{t \in M} r_t = r = \hat{\lambda}$ .

4. Надо доказать, что если  $\lambda$  — другое собственное значение, то  $|\lambda| \leq \hat{\lambda}$ . Пусть  $A\bar{s} = \lambda\bar{s}$ , где  $s \neq 0$  — собственный вектор. Можем считать, что  $|s|_2 = 1$ . При этом если

$$|\bar{s}| = \begin{pmatrix} |s_1| \\ \vdots \\ |s_n| \end{pmatrix}$$

(модуль  $\bar{s}$ ), то

$$A|\bar{s}| \geq_{A \geq 0} |\bar{A}s| = |\lambda||\bar{s}|$$

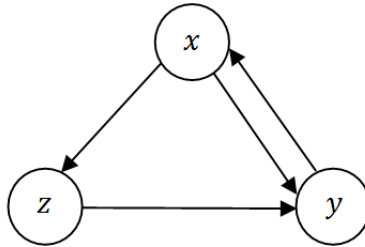
Так как  $|\bar{s}| \geq 0$  (из 3.), то  $|\lambda| \leq \hat{\lambda}$ . В частности,  $\hat{\lambda} = \rho(A)$

$$\hat{\lambda} = \max_{\substack{\bar{x} > 0, \\ x \in M, \\ x \in \Delta}} \min_{i: x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

■

### Пример 1.

Найти ранги.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z)P = (x, y, z)$$

Получим (0.4, 0.4, 0.2).

Метод вращений (метод Якоби).

Пусть матрица  $A$  — симметрическая (матрица  $A^*A$  — всегда симметрическая). Хотим построить процесс

$$\begin{aligned} A_0 &= A_1, \dots, A_k \rightarrow \Lambda \\ T_0 &= E, T_1, \dots, T_k \rightarrow T \\ A &= T\Lambda T^{-1} = T\Lambda T^T, \end{aligned}$$

$\Lambda$  — диагональная матрица.

Последовательные матрицы перехода

$$A_{k+1} = T_{ij}^T A_k T_{ij},$$

$T_{ij}$  — матрица простых вращений.

$$T_{k+1} = T_k T_{ij}$$

В матрице  $A_k$  находим элемент, лежащий не на диагонали, с максимальным модулем  $a_{ij}^{(k)}$ .

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & O & \vdots & & O & \\ & & 1 & \vdots & & & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \cos \varphi & \dots & \dots & \dots & -\sin \varphi & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & & & & \\ & O & & \vdots & & \ddots & \vdots & & O & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \sin \varphi & \dots & \dots & \dots & \cos \varphi & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & & \vdots & & 1 & & \\ & O & & \vdots & & O & \vdots & & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & \vdots & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\cos \varphi$  и  $-\sin \varphi$  стоят в  $i$  строке, а  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  в  $j$  строке.

Угол выбираем так, чтобы

$$a_{ij}^{(k+1)} = (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) a_{ij}^{(k)} + \cos \varphi \cdot \sin \varphi (a_{ij}^{(k)} - a_{ii}^{(k)})$$

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(k+1)} &= 0 \\
tg\ 2\varphi &= \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4} \\
\cos 2\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\varphi}} \\
\cos \varphi &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} \\
\sin \varphi &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}
\end{aligned}$$

Знак  $\sin \varphi$  равен знаку  $a_{ij}^{(k)}(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)})$ .

### Пример 2.

Найти собственные значения матрицы  $A$  методом вращений.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \\
T_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\
tg\ 2\varphi &= \frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}} = \frac{2 \cdot (-4)}{14 - 14} = -\infty \\
2\varphi &= -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Подставим значения в матрицу  $T_{23}$ .

$$\begin{aligned}
T_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
A_1 = A_{k+1} = T_{23}^T A T_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 18 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & 10 \end{pmatrix} \\
T_{13} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot (-\frac{4}{\sqrt{2}})}{17 - 10} = -\frac{8}{7\sqrt{2}}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64}{49 \cdot 2}}} = \frac{7}{9}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \varphi = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Подставим значения в матрицу  $T_{13}$ .

$$T_{13} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = T_{13}^T A_1 T_{13} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 18 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Получили собственные значения  $\lambda_1 = \lambda_2 = 18$ ,  $\lambda_3 = 9$ .

Найдем соответствующие собственные векторы.

$$T_1 = T_0 T_{23} = E T_{23}, \quad T_2 = T_1 T_{13}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Каждый из столбцов матрицы  $T_2$  является собственным вектором  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  соответственно.

### Домашнее задание 15

1. Найти собственные векторы и собственные значения методом вращений (методом Якоби).

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2-i & 0 \\ 2+i & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

матрица удовлетворяет условию  $A^* = A$ , что гарантирует, что у нее есть диагональная форма.

## Лекция 16

### Алгебраические зависимости в системах экономических показателей.

#### Постановка задачи.

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — первичные показатели, а  $y_1, \dots, y_m$  — расчетные (производные) показатели,  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ .

Надо описать функциональные зависимости между показателями  $y_1, \dots, y_m$ , то есть все такие функции  $\phi(z_1, \dots, z_m)$ , что

$$\phi(y_1, \dots, y_m) = 0$$

Предположение:

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{p_i(x_1, \dots, x_n)}{q_i(x_1, \dots, x_n)} -$$

дробно-рациональная функция, где  $p_i, q_i$  — многочлены от  $n$  переменных.

Тогда можно считать функции  $\phi$  многочленами от  $m$  переменных.

Решение: для линейных многочленов  $p_i, q_i$  — Клейнер.

#### Пример 1.

Для некоторого предприятия:

$x_1$  — размер выручки предприятия от реализации продукции

$x_2$  — издержки производства

$x_3$  — размер капитала

$x_4$  — численность занятых на предприятии

Расчетные показатели:

$$y_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_2} \text{ — рентабельность производства}$$

$$y_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_3} \text{ — рентабельность капитала}$$

$$y_3 = \frac{x_1}{x_3} \text{ — средняя производительность капитала}$$

$$y_4 = \frac{x_1}{x_4} \text{ — средняя производительность труда}$$

Решение по методу Клейнер: существует функциональная зависимость

$$y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2 = 0$$

Любая другая полиномиальная зависимость имеет вид

$$\phi(y_1, y_2, y_3)(y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2) = 0$$

### Пример 2.

Сравнительный анализ производительности труда на двух предприятиях.

Первичные показатели:

$x_1$  — доход первого предприятия

$x_2$  — численность занятых на первом предприятии

$x_3$  — доход второго предприятия

$x_4$  — численность занятых на втором предприятии

Расчетные показатели:

$$y_1 = x_3 \frac{x_2}{x_1} - x_4 \text{ — экономия затрат труда на втором предприятии по сравнению с первым}$$

$$y_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2} \text{ — прирост (уменьшение) дохода, приходящийся на одного дополнительного занятого (высвобожденного) работника на втором предприятии по сравнению с первым}$$

$$y_3 = x_3 \frac{x_2}{x_4} - x_1 \text{ — часть прироста (уменьшения) дохода второго предприятия по сравнению с первым, обусловленная различием в их производительности труда}$$

$$y_4 = \frac{x_3}{x_4} - \frac{x_1}{x_2} \text{ — прирост производительности труда на втором предприятии по сравнению с первым}$$

$$y_5 = \left( \frac{x_3}{x_4} / \left( \frac{x_2}{x_1} - 1 \right) \right) \cdot 100 \text{ — относительное (процентное) изменение производительности труда на втором предприятии по сравнению с первым}$$

### Пример 3.

Анализ эффективности использования основных факторов производства.

Первичные показатели:

$x_1$  — размер капитала предприятия

$x_2$  — численность занятых на предприятии

Расчетные показатели:

$y_1$  — рентабельность затрат на производство

$y_2$  — рентабельность капитала

$y_3$  — рентабельность труда

Выпуск и издержки предприятия описываются двумя производственными функциями от размеров труда и капитала:

$$z = f(x_1, x_2), \quad u = g(x_1, x_2),$$

где

$$f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 -$$

квадратичная функция с коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_{22}$

$$g = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 -$$

линейная функция с коэффициентами  $b_0, b_1, b_2$ .

Расчетные формулы:

$$y_1 = \frac{f - g}{g} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_0}$$

$$y_2 = \frac{f - g}{x_1} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_1}$$

$$y_3 = \frac{f - g}{x_2} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_2}$$

### Описание алгоритма.

Пусть  $y_1 = \frac{f_1}{g_1}, y_2 = \frac{f_2}{g_2}, \dots, y_m = \frac{f_m}{g_m}$ , где  $f_i, g_i$  — многочлены от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , причем

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_m \neq 0$$

Введем новые многочлены от  $n + m + 1$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m, u$ :

$$h_1 = g_1z_1 - f_1$$

$$h_2 = g_2z_2 - f_2$$

$$\dots$$

$$h_m = g_mz_m - f_m$$

$$h_{m+1} = g \cdot u - 1$$

Отметим, что  $h_j(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, g^{-1}) = 0$  для  $j = 1, \dots, m + 1$ .

Пусть  $I = \left\{ \sum_j c_j h_j \right\}$  (где  $c_j$  — многочлены от  $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m, u$ ) — полиномиальный идеал, порожденный многочленами  $h_j$ .



Будем сравнивать мономы от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m, u$  лексикографически так, что

$$u > x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 > z_m > z_{m-1} > \dots > z_1$$

Например, старший член многочлена  $f = 4x_2x_1 + 3z_1x_2 + 2u$  есть  $\hat{f} = 2u$ .

**Базисом Гребнера** идеала  $I$  называется такое множество  $G = \{q_1, q_2, \dots\}$  элементов  $I$ , что старший член  $\hat{f}$  любого элемента  $f \in I$  делится на один из старших членов  $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots$  элементов  $G$ .

Базис Гребнера  $G$  **редуцированный**, если ни один из  $\hat{q}_i$  не делится на остальные.

**Утверждение.** Пусть  $G = \{q_1, q_2, \dots\}$  — редуцированный базис Гребнера  $I$ , и пусть среди его элементов только  $q_1, \dots, q_k$  зависят от переменных  $z_1, z_2, \dots, z_m$ . Тогда минимальный набор тождеств для  $y_1, y_2, \dots, y_m$ :

$$q_1(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

...

$$q_k(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

Если же таких множеств в  $G$  нет, то показатели  $y_1, y_2, \dots, y_m$  — независимы. В этом случае любое другое полиномиальное соотношение имеет вид

$$c_1q_1(y_1, y_2, \dots, y_m) + \dots + c_kq_k(y_1, y_2, \dots, y_m),$$

где  $c_i$  — многочлены от переменных  $y_1, y_2, \dots, y_m$ .

**Пример 3 с частными значениями коэффициентов.**

Пусть

$$f = 2 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2,$$

$$g = 1 + x_2 + x_1$$

Тогда

$$y_1 = \frac{f - g}{g} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_1 + x_1 + 1}$$

$$y_2 = \frac{f - g}{x_1} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_1}$$

$$y_3 = \frac{f - g}{x_2} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_2}$$

Последовательность расчетов: выписываем  $h_1, \dots, h_4$ , потом строим редуцированный базис Гребнера идеала  $I$  и получаем  $G = \{q_1, \dots, q_{17}\}$ , где

$$q_{17} = z_2^2 z_3^2 z_1 - z_2 z_3^2 z_1^2 - z_2^2 z_3 z_1^2 + 2z_2^2 z_3 z_1 - 5z_2 z_3 z_1^2 - 6z_2^2 z_1^2 + 2z_2 z_3^2 z_1 - z_2^2 z_3^2 - 5z_3^2 z_1^2$$

Можно выразить любой из  $z_1, z_2, z_3$  через остальные...

**Пример 3 в почти общем виде.**

Пусть  $a_{11} = a_{22} = 0$ . Тогда

$$f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{f_1}{g_1} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_0} \\ y_2 &= \frac{f_2}{g_2} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_1} \\ y_3 &= \frac{f_3}{g_3} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} h_1 &= z_1g_1 - f_1 = z_1(b_1x_1 + b_2x_2 + b_0) - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0) \\ h_2 &= z_2g_2 - f_2 = z_2x_1 - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0) \\ h_3 &= z_3g_3 - f_3 = z_3x_2 - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0) \\ h_4 &= g \cdot u - 1 = u \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 - 1 = u(b_1x_1 + b_2x_2 + b_0)x_1x_2 - 1 \end{aligned}$$

Строим базис Гребнера с коэффициентами в поле  $F = \mathbb{R}(a_0, a_1, a_2, a_{12}, b_0, b_1, b_2)$  :

$G = \{q_1, \dots, q_{16}\}$ , причем

$$\begin{aligned} q_{16} &= (-b_2^2a_0 + b_2b_0a_2)z_2^2z_1^2 - b_2b_0z_3z_2^2z_1^2 + (-a_0 + b_0)z_3^2z_2^2 + (-2b_2b_1a_0 + b_1b_0a_2 + b_2b_0a_1 - \\ &- a_{12}b_0^2)z_3z_2z_1^2 - b_0b_1z_3^2z_2z_1^2 + (-b_2b_0 + 2b_2a_0 - b_0a_2)z_3z_2^2z_1 + (-b_0b_1 + 2b_1a_0 - b_0a_1)z_3^2z_2z_1 + \\ &+ (-a_0b_1^2 + b_0a_1b_1)z_3^2z_1^2 + b_0z_3^2z_2^2z_1 \end{aligned}$$

**Пример 2, решение (продолжение).**

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_3x_2 - x_4x_1}{x_1} \\ y_2 &= \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2} \\ y_3 &= \frac{x_3x_2 - x_4x_1}{x_4} \\ y_4 &= \frac{x_3x_2 - x_1x_4}{x_2x_4} \\ y_5 &= 100 \frac{x_3x_2}{x_4x_1 - 1} \end{aligned}$$

Упрощение:

$$y'_1 = \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_4}{x_1}$$

$$y'_2 = y_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2}$$

$$y'_3 = y_3 = \frac{x_3x_2 - x_4x_1}{x_4}$$

$$y'_4 = \frac{y_3}{y_4} = x_2$$

$$y'_5 = 100 \frac{y_3}{y_4y_5} = \frac{x_1x_4 - 1}{x_3}$$

Тогда

$$q_{25} = -z_1 + z_4^2 + z_1^2z_4z_2^2z_5 - z_1^2z_2z_3z_5 + z_4z_5 - z_1z_3z_5 - z_1z_4^2z_2^2z_5^2 + 4z_1z_4^2z_2 - 2z_4z_1z_3 +$$

$$+ 4z_4z_5z_2z_1 - 2z_4^3z_2^2z_5z_1 - 2z_1^2z_2z_3z_4 + z_1^2z_3z_4^2z_2^2z_5 + z_1^2z_2^2z_5^2z_3z_4 - z_3^2z_2z_4z_5z_1^2 + z_3^2z_1^2 +$$

$$+ z_3z_5^2z_2z_4z_1 + z_4^2z_3z_5z_2z_1 - z_1z_2^2z_4^2 + z_1^2z_4^2z_2^2$$

Для исходных переменных  $y_1, \dots, y_5$ :

$$0 = -y_1y_4^4y_5^2 + y_3^3y_4^2y_5^2 + 100y_1^2y_2^2y_3y_4^2y_5 - 100y_1^2y_2y_3y_4^3y_5 + 100y_4^3y_3^2y_5 - 100y_1y_3^2y_4^3y_5 -$$

$$- 10000y_1y_4^4y_2^2 + 4y_1y_3^2y_2y_4^2y_5^2 - 2y_1y_3^2y_4^3y_5^2 + 400y_1y_3^2y_2y_4^2y_5 - 200y_1y_4^4y_2^2y_5 - 2y_1^2y_2y_3y_4^3y_5^2 +$$

$$+ 100y_1^2y_4^3y_2^2y_3y_5 + 10000y_1^2y_4^3y_2^2y_3 - 100y_4^3y_2y_1^2y_4^2y_5 + y_1^2y_3y_4^4y_5^2 + 10000y_4^4y_2y_1y_3 +$$

$$+ 100y_4^3y_2y_1y_4y_5 - y_1y_4^4y_2^2y_5^2 + y_1^2y_2^2y_3y_4^2y_5^2$$

**Пример 4.**

$$p_1 = xy^2 - y^3 + 1, \quad p_2 = x^2y + 2xy - 1$$

Надо построить базис Гребнера  $G = \{p_1, p_2\}$ .

Выберем лексикографический порядок, пусть  $lex(y > x)$ , то

$$y^3 > xy^2 > x^2y > xy > 1$$

Пусть  $p'_1 = y^3 - xy^2 - 1$ .

$$p_1 = LT(p_1) + \dots, \quad p_2 = LT(p_2) + \dots$$

$$L = lcm(LT(p_1), LT(p_2))$$

$$m_1 = \frac{L}{LT(p_1)}, \quad m_2 = \frac{L}{LT(p_2)}$$

( $lcm$  — НОК)

Тогда **S-полином** равен  $S(p_1, p_2) = m_1p_1 - m_2p_2$ .

У нас

$$L = lcm(y^3, x^2y) = x^2y^3$$

$$S_1 = S(p_1, p_2) = x^2(y^3 - xy^2 - 1) - y^2(x^2y + 2xy - 1) = -x^3y^2 - x^2 - 2xy^3 + y^2$$

Разделим  $S_1$  на  $p'_1$ , получим

$$R(S_1) = S'_1 = S_1 - 2xp'_1 = x^3y^2 - 2x^2y^2 + y^2 - x^2 - 2x$$

Разделим  $S'_1$  на  $p_2$ , получим

$$R(S'_1) = S''_1 = S'_1 - xyp_2 = y^2 + xy - x^2 - 2x$$

И так далее.

## Домашнее задание 16

1. Решить с помощью базисов Грёбнера систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + x^2z - 2xz = 0 \\ x^2 + 2yz - 3 = 0 \\ x^4 - y^2z^2 = 0 \end{cases}$$

2. Найти базис Грёбнера

$$\begin{cases} f_1 = x^3y + 2xy^3 - 3x^2y^2 \\ f_2 = xy^2 - 2y^2 + x - 1 \\ f_3 = x^4 \end{cases}$$

и решить систему уравнений  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ .

## Лекция 17

**Линейная алгебра в теории кодирования.**

Презентация.

## Лекция 18

**Задача линейного программирования.**

Пусть

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Нужно максимизировать линейную функцию

$$f(\bar{x}) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max$$

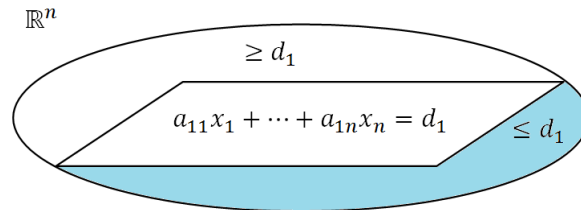
при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq d_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq d_m \end{cases}$$

$$A\bar{x} \leq \bar{d}$$

$$x_i \geq 0 \Leftrightarrow -x_i \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq d \text{ и } x_1 + x_2 \geq d \Leftrightarrow -x_1 - x_2 \leq -d \Leftrightarrow x_1 + x_2 = d$$



Вариант:

$$\begin{cases} f(\bar{x}) = \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle \rightarrow \min \\ A\bar{x} \leq \bar{d} \in \mathbb{R}^m \\ \bar{x} \geq \bar{0} \quad (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0) \end{cases}$$

### Задача о диете.

Дано несколько продуктов  $E_1, \dots, E_n$  (еда) и информация о них, например, У – углеводы, Б – белки, К – калории. Также дана цена каждого продукта (\$).

	У	Б	К	Цена \$
$E_1$		$\bar{a}_1$		
$\vdots$		$\dots$		
$E_n$		$\bar{a}_n$		

Пусть  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$  – количество употребленных единиц пищи каждого типа.

Ограничения:

$$\langle \bar{a}_i, \bar{y} \rangle \geq c_i, \quad i = 1, \dots, m$$

или

$$\begin{cases} A\bar{y} \geq \bar{c} \\ \bar{y} \geq \bar{0} \end{cases}$$

Вектор цен:  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$  – цены на  $y_1, \dots, y_n$ .

Матрица  $A$  имеет размер  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix}$$

Функция  $f(\bar{y}) = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle$ .

Общая постановка:

$$\begin{cases} A\bar{y} \geq \bar{c} \\ \bar{y} \geq \bar{0} \\ f(\bar{y}) = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle \rightarrow \min \end{cases}$$

Всего  $\approx C_m^n$  вершин, то есть меньше  $\frac{m^{m-n}}{n!}$ .

**Пример 1.**

	Б	Ж	У	Цена
Мясо	60	30	10	100
Торт	10	40	50	150
Норма $c_i$	30	30	40	

$\bar{a}_1 = (60, 10)$  – белки

$\bar{a}_2 = (30, 40)$  – жиры

$\bar{a}_3 = (10, 50)$  – углеводы

$$A\bar{y} \geq \bar{c}$$

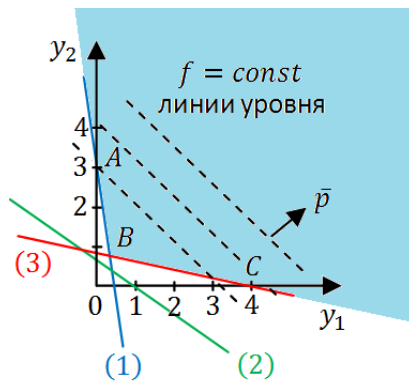
$$\begin{pmatrix} 60 & 10 \\ 30 & 40 \\ 10 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{y}) = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = \bar{p}^T \bar{y} = 100y_1 + 150y_2 \rightarrow \min$$

$$60y_1 + 10y_2 \geq 30 \quad (1)$$

$$30y_1 + 40y_2 \geq 30 \quad (2)$$

$$10y_1 + 50y_2 \geq 40 \quad (3)$$



Надо найти в какой вершине будет достигаться минимум функции  $f(\bar{y})$ . Посмотрим значения в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

$$f(A) = 100 \cdot 0 + 3 \cdot 150 = 450$$

$$f(C) = 100 \cdot 4 + 150 \cdot 0 = 400$$

$$f(B) = 100y_1 + 150y_2$$

Найдем пересечение (1) и (3):

$$\begin{cases} 60y_1 + 10y_2 = 30 \\ 10y_1 + 50y_2 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y_1 + y_2 = 3 \\ 6y_1 + 30y_2 = 24 \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{21}{29}, \quad y_1 = 4 - \frac{5 \cdot 21}{29} = \frac{11}{29}$$

Получим

$$f(B) = 100 \cdot \frac{11}{29} + 150 \cdot \frac{21}{29} = \frac{4250}{29} \approx 147$$

Таким образом, наименьшее значение  $f(\bar{y})$  достигается в точке  $B$  и принимает значение 147.

### Линейная производственная модель.

Пусть  $\bar{x}$  – выпуск  $m$  видов продукции

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

цены на эти виды продукции

$$\bar{c} = (c_1, \dots, c_m),$$

а доход

$$\bar{y} = c_1x_1 + \dots + c_mx_m = \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle \rightarrow \max$$

Имеются ресурсы  $1, \dots, n$  и указаны ограничения на них (запасы)

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  – число единиц  $j$  ресурса для производства единицы  $i$  типа продукции. Для производства  $x_i$  надо  $x_ia_{i1}$  ресурса 1,  $\dots$ ,  $x_ia_{ij}$  ресурса  $j$ ,  $\dots$ ,  $x_ia_{in}$  ресурса  $n$ .

Всего потратим ресурса  $j$ :

$$x_1a_{1j} + \dots + x_na_{nj} = \bar{x}^T A^j \leq d_j$$

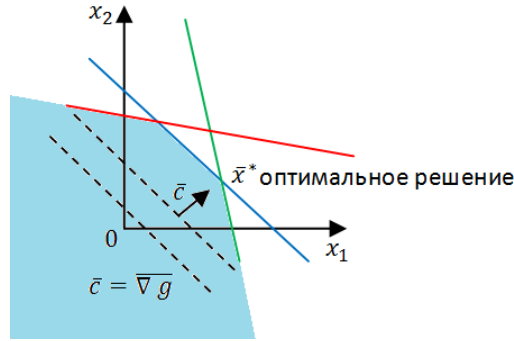
ограничения:

$$\bar{x}^T A \leq \bar{d}^T$$

Прямая задача:

$$\begin{cases} \bar{x}^T A \leq \bar{d} \Leftrightarrow A^T \bar{x} \leq \bar{d} \\ \bar{x} \geq 0 \\ g(\bar{x}) = \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle = c_1x_1 + \dots + c_mx_m \rightarrow \max \end{cases}$$

Пусть  $\bar{x}^* \in \mathbb{R}^m$  – оптимальное решение, такое что  $g_{max} = \langle \bar{c}, x^* \rangle$ .



Двойственная задача линейного программирования.

Дано:

$$\begin{cases} A\bar{y} \geq 0, \bar{c} \in \mathbb{R}^m, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, A_{m \times n} \\ \bar{y} \geq 0 \\ f(\bar{y}) = \langle \bar{d}, \bar{y} \rangle \rightarrow \min \end{cases}$$

Тогда  $y^*$  – решение, то есть  $f(y^*) = \langle d, \bar{y}^* \rangle = f_{min}$ .

**Теорема.**

1. Если  $\bar{x}$  – допустимый для прямой задачи, а  $\bar{y}$  – допустимый для двойственной задачи, то

$$g(x) \leq f(y), \quad \langle c, x \rangle \leq \langle d, y \rangle$$

►

$$\begin{cases} x^T A \leq d^T \\ Ay \geq c \end{cases}$$

$$\langle c, x \rangle = x^T c \leq x^T Ay \leq d^T y = f(y) = \langle d, y \rangle \quad \blacksquare$$

2. Если  $x^*, y^*$  – решения прямой и двойственной задач, то  $f(y) = g(x)$ , то есть

$$\langle c, x^* \rangle = \langle d, y^* \rangle = f_{min} = g_{max}$$

► Так как значения оптимальны, то вместо неравенств в доказательстве пункта 1 теоремы везде будут стоять равенства, потому что  $\langle x^T A, y^* \rangle = \langle d^T, y^* \rangle$ , либо они несущественны и равны 0. Значит  $\langle c, x^* \rangle = \langle d, y^* \rangle \quad \blacksquare$