

Дополнительные главы Лине́йной Алге́бры

Дмитрий Игоревич Пионтковский

Содержание

1	Лекция 1	2
1.1	Псевдообратная матрица	2
1.2	Скелетное разложение	5
1.3	Домашнее задание 1	7
2	Лекция 2	9
2.1	Скелетное разложение (продолжение)	9
2.2	Решение по МНК	10
2.3	Сингулярное разложение (SVD)	11
2.4	Линейная регрессия	14
2.5	Домашнее задание 2	15
3	Лекция 3	16
3.1	Полиномиальная интерполяция	16
3.2	Интерполяция с кратными узлами	17
3.3	Сплаины	18
3.4	Кривая Безье	20
3.5	Домашнее задание 3	21
4	Лекция 4	22
4.1	Метрики	22
4.2	Нормы	23
4.3	Домашнее задание 4	27
5	Лекция 5	29
5.1	Теорема Минковского	29
5.2	Скалярное произведение	32
5.3	Ортогональные системы	34
5.4	Домашнее задание 5	35
6	Лекция 6	36
6.1	Многочлены Чебышева 1 рода	36
6.2	Многочлены Чебышева 2 рода	38
6.3	Уклонение от нуля и норма Чебышева	40
6.4	Домашнее задание 6	43
7	Лекция 7	44
7.1	Матричные нормы	44
7.2	Индукцированные нормы	45

7.3	Домашнее задание 7	46
8	Лекция 8	48
8.1	Сингулярный и Спектральный радиусы	48
8.2	Приближённое разложение меньшего ранга	51
8.3	Домашнее задание 8	53
9	Лекция 9	54
9.1	Оценка собственных значений	54
9.2	Кратности собственных значений	57
9.3	Домашнее задание 9	59
10	Лекция 10	61
10.1	Функции от матриц	61
10.2	Жорданова форма	62
10.3	Домашнее задание 10	67
11	Лекция 11	68
11.1	Решение систем линейных уравнений	68
11.2	Ошибка для обратной матрицы	71
11.3	Домашнее задание 11	73
12	Лекция 12	74
12.1	Итеративные методы решения систем алгебраических уравнений	74
12.2	Метод Зейделя	76
12.3	Домашнее задание 12	78
13	Лекция 13	79
13.1	Итеративное решение систем линейных уравнений.	79
13.2	Метод итераций	81
13.3	Домашнее задание 13	84
14	Лекция 14	85
14.1	Положительные и неотрицательные матрицы	85
14.2	PageRank	85
14.3	Модель Леонтьева и продуктивные матрицы	87
14.4	Домашнее задание 14	90
15	Лекция 15	92
15.1	Теоремы Перрона	92
15.2	Метод вращений (метод Якоби)	95
15.3	Домашнее задание 15	98
16	Лекция 16	99
16.1	Алгебраические зависимости в системах экономических показателей	99
16.2	Описание алгоритма. Базис Гребнера	100
16.3	Домашнее задание 16	103
17	Лекция 17	104
17.1	Линейная Алгебра в теории кодирования	104
18	Лекция 18	105
18.1	Задача линейного программирования	105
18.2	Линейная производственная модель	107

1 Лекция 1

1.1 Псевдообратная матрица

Пусть имеется СЛУ

$$Ax = b$$

Тогда если $\exists A^{-1}$, то $x = A^{-1}b$.

Так как часто матрица является вырожденной или неквадратной, появляется необходимость ввести обобщение обратной матрицы.

Псевдообратная матрица A^+ позволяет найти решение через явную формулу $x = A^+b$ для любой матрицы A , если оно существует. Если решения нет, то $x = A^+b$ будет наилучшим приближенным решением по евклидовой метрике, то есть, расстояние между Ax и b будет минимальным.

Определение. $C = A^+$ (где $C_{n \times m}$, $A_{m \times n}$) — **псевдообратная матрица Мура-Пенроуза** для матрицы A , если:

1. $ACA = A$
2. $CAC = C$
3. $(AC)^* = AC = C^*A^*$
4. $(CA)^* = CA$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-i \\ 2i & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-i & -2i \\ 3+i & 5 \end{pmatrix}$$

Если $\det A \neq 0$, то подходит $C = A^{-1}$.

Теорема. Если такая матрица C существует, то она единственная.

Доказательство. Пусть B, C — две матрицы, удовлетворяющие свойствам 1 - 4.

$$\begin{aligned} AB &\stackrel{1}{=} \underbrace{ACA}_A B = (AC)(AB) \stackrel{3}{=} (AC)^*(AB)^* = C^*A^*B^*A^* = \\ &= C^*(ABA)^* \stackrel{1}{=} C^*A^* = (AC)^* \stackrel{3}{=} AC \end{aligned}$$

Аналогично выводится $BA = CA$. Тогда

$$B \stackrel{2}{=} BAB = \underbrace{BA}_{CA} B = C \underbrace{AB}_{AC} = CAC \stackrel{2}{=} C$$

Значит, $B = C$, то есть, псевдообратная матрица единственна. □

Пример 1.

Найти псевдообратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AA = A \Rightarrow A = A^+ \\ A^* = A \end{cases}$$

Мы доказали единственность, значит другая матрица не подойдет.

$$O_{m \times n}^+ = O_{n \times m}$$

$$A_{m \times n} = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} X_{r \times r} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_{n \times m}^+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} X_{r \times r}^+ & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Пример 2.

Найти A^+ .

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$A^+ = (b_1 \cdots b_n), \quad b_1, \dots, b_n - ?$$

Из свойств получим:

$$\begin{aligned} A^+A &= \langle A^+, A \rangle = C \in \mathbb{R} \\ CA^+ &= A^+ \Rightarrow C = 1 \\ A &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \langle A, B \rangle &= A^*B = \bar{a}_1b_1 + \dots + \bar{a}_nb_n \\ A^+ &= \frac{1}{\langle A, A \rangle} A^+ = \frac{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)}{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2} \\ A^+A &= \frac{A^*A}{\langle A, A \rangle} = 1 \\ \begin{cases} A^+ &= \frac{1}{\lambda} A^* \\ A^+A &= 1 = C \end{cases} \\ A^+A &= \frac{1}{\lambda} A^*A = \frac{1}{\lambda} \langle A, A \rangle = 1 \\ \lambda &= A^*A = \langle A, A \rangle = |A|^2 \end{aligned}$$

Лемма (Ещё свойства псевдообратной матрицы).

$$5. (A^+)^+ = A \text{ (проверяется по определению)}$$

$$6. (A^*)^+ = (A^+)^*$$

Докажем, например, что $(A^*)^+ = (A^+)^*$, удовлетворяет первому свойству:

$$\blacktriangleright A^*(A^+)^*A^* = (AA^+A)^* = A^* \quad \blacksquare$$

$$7. rkA^+ = rkA$$

$$\blacktriangleright rk(AB) \leq \min\{rkA, rkB\}$$

$$\text{Из свойства 1: } rkA \leq rkA^+$$

$$\text{Из свойства 2: } rkA^+ \leq rkA \quad \blacksquare$$

Лемма. $rk(A^*A) = rkA$

Доказательство. Докажем, что $\text{Ker} A^* A \subset \text{Ker} A$:

$$x \in \text{Ker} A \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^* Ax = A^* 0 = 0$$

Докажем, что $\text{Ker} A \subset \text{Ker} A^* A$:

Пусть $z \in \text{Ker} A^* A$

$$A^* Az = 0$$

$$z^* A^* Az = 0$$

$$(Az)^* Az = 0$$

$$|\tilde{z}_1|^2 + \dots + |\tilde{z}_n|^2 = 0$$

$$\tilde{z} = Az$$

$$\tilde{z}_1 = \dots = \tilde{z}_n = 0 \Rightarrow Az = 0 \Rightarrow z \in \text{Ker} A$$

Тогда $\dim(\text{Im} A) = n - \dim(\text{Ker} A) = n - \dim(\text{Ker} A^* A) = \dim(\text{Im} A^* A)$

$$\Rightarrow \text{rk} A = \text{rk}(A^* A)$$

□

Теорема. Пусть $A_{m \times n}$ — матрица полного столбцового ранга (столбцы линейно независимы), то есть $\text{rk} A = n$. Тогда

$$A^+ = (A^* A)^{-1} A^*$$

Доказательство. По Лемме выше, если матрица $A_{m \times n}$ имеет ранг n , то $(A^* A)_{n \times n}$ невырожденная. Проверим, что матрица $(A^* A)^{-1} A^*$ удовлетворяет свойствам определения 1.

1. $AA^+A = A$
 $A^+A = (A^* A)^{-1} A^* A = E$
 $AE = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
 $EA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^* = AA^+$
 $(A(A^* A)^{-1} A^*)^* = (A^*)^* ((A^* A)^{-1})^* A^* = A((A^* A)^*)^{-1} A^* = A(A^* A)^{-1} A^* = AA^+$
4. $(A^+A)^* = AA^+$
 $E^* = E$

□

Теорема. Пусть B — матрица полного строчного ранга. Тогда

$$B^+ = B^*(BB^*)^{-1}$$

Доказательство. Так как B^* — матрица полного столбцового ранга, то по Теореме 2,

$$(B^*)^+ = (B^{**} B^*)^{-1} B^{**} = (BB^*)^{-1} B$$

По свойству 6,

$$B^+ = ((B^*)^+)^* = ((BB^*)^{-1} B)^* = B^*(BB^*)^{-1}$$

□

Пример 3.Найти A^+ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^*A) = 2 \cdot 3 - (2 - 1) + (1 - 2) = 6 - 1 - 1 = 4$$

$$(A^*A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Скелетное разложение**Утверждение.** Любую прямоугольную матрицу $A_{m \times n}$ можно представить в виде

$$A_{m \times n} = F_{m \times r} G_{r \times n}$$

где $r = rkA$, F — матрица полного столбцового ранга, а G — матрица полного строчного ранга.Это представление называется **скелетным разложением** матрицы A .*Доказательство.* Приведём алгоритм построения.

Некоторый набор из r столбцов $A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_r}$ образует базис в линейной оболочке всех столбцов A . То есть, если F — матрица из базисных столбцов, то любой столбец матрицы A представляется в виде $A^j = \lambda_{j1}F^1 + \dots + \lambda_{jr}F^r = F\lambda_j$ для некоторого вектора коэффициентов λ_j .

Положим $G = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Тогда $A = FG$. □**Теорема.** Если $A = FG$ — разложение полного ранга, то $A^+ = G^+F^+$.

Доказательство. По предыдущим теоремам, $F^+ = (F^*F)^{-1}F^*$, $G^+ = G^*(GG^*)^{-1}$.

Тогда $G^+F^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$. Легко проверить, что G^+F^+ удовлетворяет всем свойствам определения 1. \square

Теорема. Пусть A — матрица размера $m \times n$ с рангом r и пусть

$$A = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеет канонический вид, где G верхняя $r \times n$ подматрица без нулевых строк и 0 означает нулевую подматрицу. Пусть i_1, \dots, i_r значения столбцов, где находятся ведущие коэффициенты ступенчатого разложения. Тогда если F составлена из столбцов A с номерами i_1, \dots, i_r , то

$$A = FG$$

— разложение полного ранга.

Пример 4.

Найти скелетное разложение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Приведем к каноническому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk A = 2$$

Надо найти такие B и C , что $A_{3 \times 3} = B_{3 \times 2} C_{2 \times 3}$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Здесь B — столбцы исходной матрицы, C — канонический вид.

$$B^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^*B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(BB^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad CC^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(CC^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = C^+ B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

1.3 Домашнее задание 1

1. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^+$$

2. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^+$$

3. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^+$$

4. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^+$$

5. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^+$$

6. Пусть A — матрица размера $m \times n$ с рангом r и пусть

$$K = \left[\frac{G}{0} \right]$$

имеет канонический вид, где G верхняя $r \times n$ подматрица без нулевых строк и 0 означает нулевую подматрицу. Пусть i_1, \dots, i_r значения столбцов, где находятся ведущие коэффициенты ступенчатого разложения, и пусть F подматрица A получена из столбцов i_1, \dots, i_r . Докажите, что

$$A = FG$$

и что это разложение полного ранга (скелетное разложение) A .

7. Найти разложение полного ранга (скелетное разложение)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^+$$

9. Пусть E_{ij} матрица размера $n \times n$, такая что ее элементы в i -ой строке и j -ом столбце единицы, а все остальные элементы нули. Найти разложение полного ранга и псевдообратную матрицу.

10. Докажите:

(a) $Im(AA^+) = Im(AA^*) = ImA$;

(b) $Ker(AA^+) = Ker(AA^*) = KerA^*$;

(c) $ImA^+ = ImA^*$;

2 Лекция 2

2.1 Скелетное разложение (продолжение)

Пример 3.

Найти псевдообратную матрицу.

$$A = CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = B^+C^+$$

$$B^+ = B^*(BB^*)^{-1}, \quad C^+ = (A^*A)^{-1}A^*$$

$$BB^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(BB^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^*C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(C^*C)^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 15 \end{pmatrix}$$

$$C^+ = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -14 \\ -1 & -2 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = B^+C^+ = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -14 \\ -1 & -2 & -3 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 16 & 24 & -42 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -4 & -8 & -12 & 42 \end{pmatrix}$$

Предложение. Если $A = FG$ — скелетное разложение, то $A^+ = G^+F^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = XY$ и $X^* = X, Y^* = Y, rk(A^*A) = rkA$.

Утверждение. X — решение $AX = B$ тогда и только тогда, когда X — решение $A^*AX = A^*B$. Если $N = A^*A$, то $N^* = N$ — квадратная самосопряженная матрица.

Пример 2.

$$1. \operatorname{Im}(AA^*) \stackrel{?}{=} \operatorname{Im}A$$

Из доказательства леммы $rk(A^*A) = rkA$ — ранги равны, значит и размерности равны.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}A &= \{AX\} \supset \{AA^*Y\} = \operatorname{Im}AA^* \\ \dim(\operatorname{Im}A) &= \dim(\operatorname{Im}AA^*) \end{aligned}$$

$$2. \operatorname{Im}(AA^*) = \operatorname{Im}A \stackrel{?}{=} \operatorname{Im}(AA^+)$$

$$\operatorname{Im}A \supset \operatorname{Im}(AA^+) \supset \operatorname{Im}(AA^+A) \stackrel{1}{=} \operatorname{Im}A$$

$$\begin{aligned} 3. \operatorname{Im}A^* &\stackrel{?}{=} \operatorname{Im}A^+ \\ \operatorname{Ker}A^* &\stackrel{?}{=} \operatorname{Ker}A^+ \end{aligned}$$

Достаточно доказать одно из утверждений.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}A^+ &\supset \operatorname{Im}(A^+A) \supset \operatorname{Im}(A^+AA^+) = \operatorname{Im}A^+ \\ \operatorname{Im}A^+ &= (\operatorname{Im}A^+A) \stackrel{4}{=} \operatorname{Im}(A^+A)^* = \operatorname{Im}(A^*(A^+)^*) \subset \operatorname{Im}A^* \\ rkA^+ &= rk(FG)^+ = rk(G^+F^+) = rk(GF) \leq r = rkA \\ rkA &= rk(A^+)^+ \leq rkA^+ \end{aligned}$$

То есть получили, что $rkA^+ = rkA = rkA^*$ — ранги равны, а значит равны и размерности:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}A^+ &= \operatorname{Im}A^* \\ \operatorname{Ker}A^+ &= \operatorname{Ker}A^* \end{aligned}$$

2.2 Решение по МНК

Определение. Пусть $A\bar{x} = \bar{b}$ — система линейных уравнений, которая может не иметь решение, тогда \bar{u} — решение системы по **методу наименьших квадратов**, если для $\forall x$ длина вектора $A\bar{x} - \bar{b}$ не меньше, чем длина вектора $A\bar{u} - \bar{b}$, то есть если $f(x) = A\bar{x} - \bar{b} \in \mathbb{C}^n$, то $|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2$ минимально при $\bar{x} = \bar{u}$.

Теорема. Вектор $\bar{u} = A^+\bar{b}$ является решением системы $A\bar{x} = \bar{b}$ по методу наименьших квадратов (мнк), причем среди всех этих решений вектор \bar{u} имеет наименьшую длину. Решение по методу наименьших квадратов также называют псевдорешением.

Пример 3.

Найти решение системы по методу наименьших квадратов.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 1) \right)^+ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 4 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$



2.3 Сингулярное разложение (SVD)

Определение. $A = Q\Sigma P^*$ $A : X \rightarrow Y$ — отображение, где X — размерности n , а Y — размерности m .

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \sigma_r & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Q — ортогональная матрица $m \times m$, P — ортогональная матрица $n \times n$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Для A^*A существует базис из собственных векторов e_1, \dots, e_n (где она диагональна). Она неотрицательно определена и существуют собственные векторы $A^*Ae_i = \sigma_i^2 e_i$.

$$\begin{cases} f_1 = \frac{Ae_1}{\sigma_1} \\ \dots \\ f_r = \frac{Ae_r}{\sigma_r} \end{cases}$$

$$Ae_i = \begin{cases} \sigma_i f_i, & i \leq r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

$$A^*f_i = \begin{cases} \sigma_i e_i, & i \leq r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

В матрице Q по столбцам стоят векторы f_1, \dots, f_r (уже получены), f_{r+1}, \dots, f_m (из ортогонализации Грама-Шмидта) в базисе Y .

P — столбцы координат e_1, \dots, e_n в базисе X .

Пример 4.
Найти SVD.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^* \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения и векторы $\tilde{A}^* \tilde{A}$.

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$\lambda_4 = 4$$

Сингулярные числа надо расположить по убыванию.

$$\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$$

$$\sigma_2 = 1$$

$$\sigma_3 = 1$$

$$\sigma > 0$$

$$\Sigma_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы.

1. $\lambda = 4$

$$(\tilde{A}^* \tilde{A} - \lambda_i E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}x_4, x_2 = \frac{1}{3}x_4, x_3 = \frac{1}{3}x_4$$

Получим собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot c, c \neq 0$$

$$e_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Получим собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2, c_1^2 + c_2^2 > 0$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$f_1 = \frac{\tilde{A}e_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{\tilde{A}e_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \frac{\tilde{A}e_3}{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (f_1, f_2, f_3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = Q\Sigma P^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^* =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

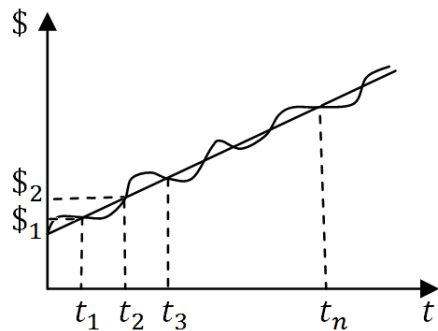
Утверждение. Если $B = AU$, где $U^* = U^{-1}$ унитарная, то $B^+ = U^+ A^+ = U^* A^+$.

Следствие. Если $A = Q\Sigma P^*$, то

$$A^+ = P\Sigma^+ Q^* = P \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma_2^{-1} & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot Q^*$$

2.4 Линейная регрессия

Модель 1:



$$\$ = kt + b$$

$$\begin{cases} \$1 = kt_1 + b \\ \$2 = kt_2 + b \\ \dots \end{cases}$$

Надо найти k и b .

В матричном виде $A\bar{X} = \bar{S}$, где

$$X = \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}, A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \$1 \\ \vdots \\ \$n \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} = \bar{X} = A^+ \bar{S}$$

Модель 2:

Если $x(t)$ — цена на нефть, то $\$(t)x(t) = k_1 t + b_1$.

2.5 Домашнее задание 2

1. Доказать утверждение о псевдообратной от произведения матриц. Если $B = AU$, где $U^* = U^{-1}$ — унитарная матрица, а A — произвольная матрица порядка n , то

$$B^+ = U^+ A^+ = U^* A^+$$

2. С помощью линейной регрессии и псевдообратной матрицы сделать прогноз цены нефти Br в долларах, рублях. Сравнить результаты, полученные с помощью модели 1 и модели 2.
3. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -3i & 4 \end{pmatrix}$$

4. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Найти псевдообратную матрицу, используя SVD:

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 9 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

3 Лекция 3

3.1 Полиномиальная интерполяция

Дано:

$f(x)$ — неизвестный многочлен степени $\leq n$

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Известны значения $f(x)$ в точках x_0, \dots, x_n (всего $n + 1$ значений)

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ \dots \\ y_n = f(x_n) \end{cases}$$

Найти: $f(x)$

Ответ: многочлен Лагранжа

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

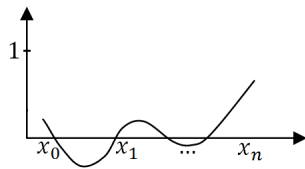
$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Матрица Вандермонда: $V(x_0, \dots, x_n) = V$

$$V\bar{a} = \bar{y}, \bar{a} = V^{-1}\bar{y}$$

Определитель Вандермонда: $v(x_0, \dots, x_n) = \det V(x_0, \dots, x_n) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \dots (x_n - x_0)(x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$



Многочлен Лагранжа:

$$f(x) = L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{\prod_j (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \frac{\sum_{i=0}^n y_i v(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n)}{v(x_0, \dots, x_n)}.$$

Пример 1.

Дано:

$$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$y_0 = -2, y_1 = -1, y_2 = 2$$

Провести параболу через три точки. Найти $f(x) = L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

$$f(x) = \frac{-2(0-x)(1-x) + (-1)(x+1)(1+1)(1-x) + 2(0+1)(x+1)(x-0)}{(0+1)(1+1)(1-0)} = \\ = x^2 + 2x - 1$$

$$f(x) = (x-1)g(x) \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$f(x) = (x-1)^2g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2(x-1)g(x) + (x-1)^2g'(x)$$

$$\textbf{Лемма. } f(x) = (x-x_1)^k g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) = 0 \\ f'(x_1) = 0 \\ \dots \\ f^{(k-1)}(x_1) = 0 \end{cases}$$

3.2 Интерполяция с кратными узлами

Задача (кратко): Восстановить многочлен $f(x)$ по значениям в m точках кратностей k_1, \dots, k_m .

Формулировка: Найти многочлен $f(x)$ степени $\leq n-1$ такой, что для некоторых различных узлов x_1, \dots, x_m и некоторых натуральных k_1, \dots, k_m (кратностей) верно

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1, f'(x_1) = y_1^{(1)}, \dots, f^{(k_1-1)}(x_1) = y_1^{(k_1-1)} \\ \dots \\ f(x_m) = y_m, f'(x_m) = y_m^{(1)}, \dots, f^{(k_m-1)}(x_m) = y_m^{(k_m-1)} \end{cases}$$

Количество условий равно количеству неизвестных $k_1 + \dots + k_m = n$.

Ответ: Многочлен Эрмита (или Лагранжа-Сильвестра).

Утверждение. Такой многочлен существует и он единственный при $k_1 + \dots + k_m = n$.

Примечание: Если $k_1 = \dots = k_m = 1$, то $m = n$ и $f(x)$ - многочлен Лагранжа (то есть предыдущий случай).

Доказательство. Пусть существует два таких многочлена $f(x)$ и $g(x)$, то для $p(x) = f(x) - h(x)$

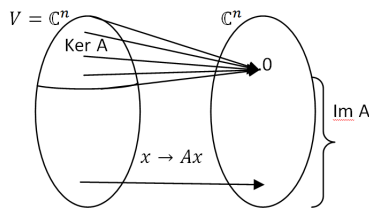
$$p^{(t)}(x_i) = 0, i = 1, \dots, m, t \leq k_i \\ p(x) = C(x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_k)^{k_k} = C \text{ (многочлен степени } n+1) \\ \Rightarrow C = 0, p(x) = 0$$

Значит, если $f(x)$ существует, то он единственный.

Если $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, то

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(k_m-1)} \end{pmatrix}$$

То есть, доказали, что система для любого \bar{y} имеет не больше одного решения \bar{a} .



$\text{Im } A = \{A\bar{x} | x \in \mathbb{C}^n\}$, $\text{Ker } A = \{\bar{a} | A\bar{a} = \bar{0}\} = \{\bar{0}\}$, так как у системы $A\bar{a} = \bar{0}$ не больше одного решения.

Так как A $n \times n$, то $\dim(\text{Im } A) = \text{rk } A$, $\dim(\text{Ker } A) = n - \text{rk } A$.

$\text{Ker } 0 \Leftrightarrow \dim(\text{Ker } A) = 0$, то есть $\text{rk } A = n$ (A невырожденная).

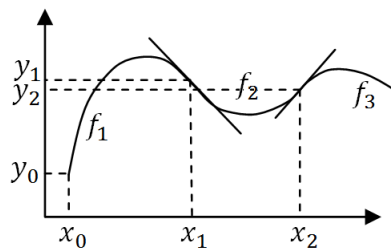
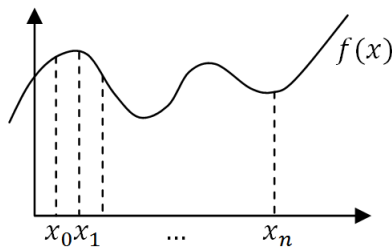
Матрица A невырожденная $\Leftrightarrow \text{rk } A = n \Leftrightarrow \text{Im } A = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \text{Ker } A = 0$, значит, $\bar{a} = A^{-1}\bar{y}$, всегда существует решение. \square

3.3 Сплайны

1. Квадратичный.

Надо установить функцию $f(x)$.

Аппроксимация: соседние точки надо соединить прямыми (не плавно). Но мы хотим гладко, значит на каждом отрезке надо задать свою функцию.

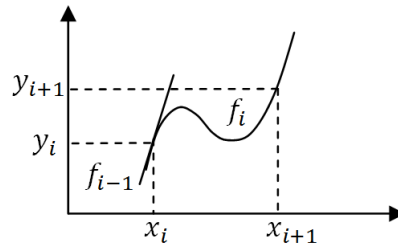


$$\begin{cases} f_1'(x_0) = d_0 \\ f_1(x_0) = y_0 \\ f_1(x_1) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} f_1'(x_1) = f_2'(x_1) \\ f_2(x_1) = y_1 \\ f_2(x_2) = y_2 \end{cases}$$

..... и т.д.

2. Кубический.

$f_i(x)$ - кубическая парабола.



$$\begin{cases} f_i(x_i) = y_i \\ f_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ f'_i(x_i) = f'_{i-1}(x_i) \\ f''_i(x_i) = f''_{i-1}(x_i) \end{cases}$$

$$f_i(x) = a_0^i + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3 = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Пример 2.

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Аппроксимировать квадратичным сплайном с узлами $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$.

$$\begin{cases} f(0) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = -6 \\ f(2) = 0 \\ f(4) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ f'_1(0) = a_1 = 11 \\ f_1(0) = a_0 = -6 \\ f_1(2) = -6 + 11 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow a_2 = -4 \end{cases}$$

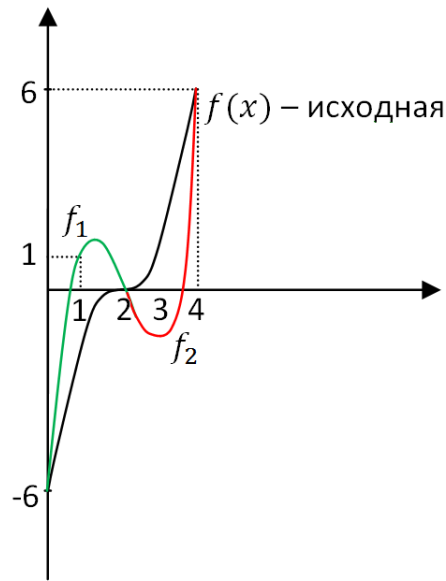
Получим $f_1 = -6 + 11x - 4x^2$.

$$\begin{cases} f_1 = -6 + 11x - 4x^2 \\ f'_2(2) = f'_1(2) = -5 \\ f_2(2) = 0 \\ f_2(4) = 6 \end{cases}$$

Подставим значения из предыдущих выражений.

$$\begin{cases} f_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 = 0 \\ b_1 + 4b_2 = -5 \\ b_0 + 4b_1 + 16b_2 = 6 \end{cases}$$

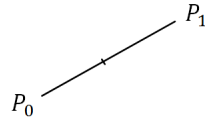
Получим $f_2 = 4x^2 - 21x + 26$.



3.4 Кривая Безье

Есть набор из n точек, хотим построить прямую, хорошо вписываемую в оболочку.
 Параметризация отрезка для 2 точек, степень полинома $n = 1$:

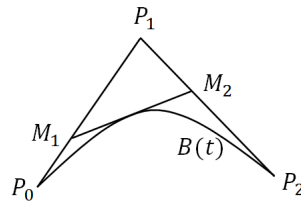
$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$



Параметризация отрезка для 3 точек, степень полинома $n = 2$.
 Введем вспомогательные точки M_1, M_2 такие, что

$$M_1 = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad M_2 = (1 - t)P_1 + tP_2$$

$$B(t) = (1 - t)M_1 + tM_2 = (1 - t)^2P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2P_2$$

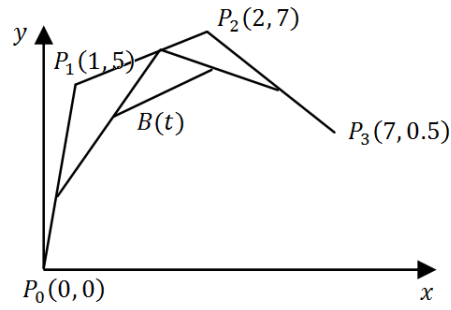


Параметризация отрезка для $n + 1$ точек, степень полинома n .

$$B(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k (1 - t)^{n-k} t^k P_k$$

Пример 3.

Построить кубическую кривую Безье $B_3(t)$ для 4 точек, $t \in [0, 1]$.



$$x(t) = 1 \cdot (1-t)^3 \cdot t^0 \cdot 0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t^1 \cdot 1 + 3 \cdot (1-t)^1 \cdot t^2 \cdot 2 + (1-t)^0 \cdot t^3 \cdot 7 = 4t^3 + 3t$$

$$y(t) = 1 \cdot (1-t)^3 \cdot t^0 \cdot 0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t^1 \cdot 5 + 3 \cdot (1-t)^1 \cdot t^2 \cdot 7 + 1 \cdot (1-t)^0 \cdot t^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}t^3 - 9t^2 + 15t$$

3.5 Домашнее задание 3

1. Приблизить следующую функцию $y(x)$ многочленом второй степени по методу наименьших квадратов:

x	-3	-1	0	1	3
y	-4	-0.8	1.6	2.3	1.5

2. Доказать, что кривая Безье касается первого и последнего отрезка ломаной.
3. Известно, что $f(x)$ — многочлен третьей степени такой, что:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = -3 \\ f(2) = 17 \\ f(-2) = -19 \end{cases}$$

Найти $f(x)$.

4. Найти $f(x)$ многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 5 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = -1 \end{cases}$$

5. Приблизить $\sin x$ сплайном $S(x)$ степени два с узлами $\pi k, \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Найти $S\left(\frac{\pi}{4}\right), S\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
6. На плоскости 100 точек, любые 4 из них лежат на параболе вида $y = ax^2 + bx + c$. Доказать, что тогда все 100 точек будут лежать на одной и той же параболе.

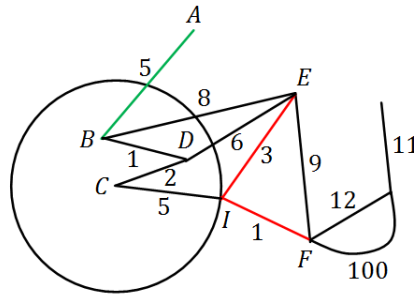
4 Лекция 4

4.1 Метрики

Определение. *Метрика* ρ на множестве M — это такая функция $\rho(x, y) \geq 0$, что

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
2. $\rho(x, y) > 0, x \neq y, \rho(x, x) = 0$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

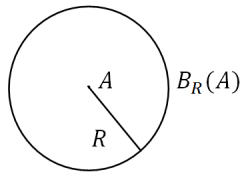
Дана карта с расстояниями между городами.
 $M = \{ \text{города} \}$



$$\rho(A, B) = 5$$

$$\rho(E, F) = 4 \text{ (минимальное расстояние из возможных)}$$

Определение. *Шар* в метрическом пространстве.



$$B_R(A) = \{x | \rho(A, x) \leq R\} \text{ — шар радиуса } R \text{ с центром в точке } A.$$

$$S_R(A) = \{x | \rho(A, x) = R\} \text{ — сфера радиуса } R \text{ с центром в точке } A.$$

$$B_5(C) = \{C, B, D, I\} \text{ — все точки, которые туда входят.}$$

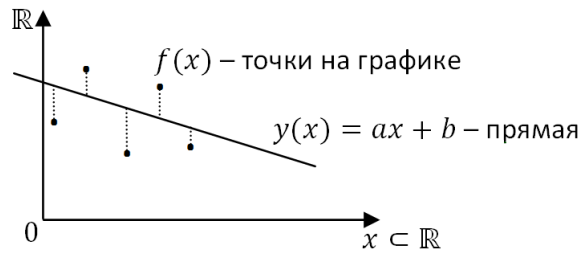
$$S_5(C) = \{I\} \text{ — только те точки, которые лежат на окружности.}$$

$$B_{100}(C) = B_{50}(C) = M \text{ — все множество.}$$

Замечание. Метод наименьших квадратов — приближение функции в смысле следующей метрики

$$M = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}, X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\rho(f, y) = |\bar{y} - \bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y(x_i) - f(x_i))^2}$$

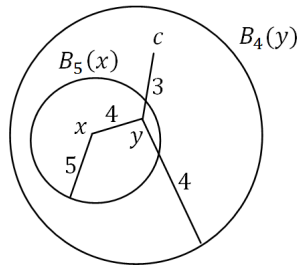


Пример 1.

Найти такое метрическое пространство M , что

$$\begin{cases} B_5(x) \subset B_4(y) \\ B_5(x) \neq B_4(y) \end{cases}, \text{ где } x, y - \text{ две точки.}$$

То есть доказать, что существует $c \in B_4(y), c \notin B_5(x)$.



$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho(y, x) = 4 \\ \rho(y, c) &= \rho(c, y) = 3 \\ \rho(x, c) &= \rho(c, x) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5(x) &= \{x, y\} \\ B_4(y) &= \{x, y, c\} \end{aligned}$$

То есть $B_5(x) \subset B_4(y)$.

4.2 Нормы

Вспомним определение линейного пространства.

Если на непустом множестве заданы две бинарные операции "+" и "умножение на число" из поля F , $\forall a, b, c \in V$ то

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $\exists 0 : a + 0 = 0 + a = a$
3. $\exists (-a) : a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$
5. $1 \cdot x = x$
6. $(\mu\lambda)x = \mu(\lambda x)$
7. $(a + b)\lambda = a\lambda + b\lambda$
8. $(\mu + \lambda)a = \mu a + \lambda a$

Определение. V — *линейное пространство* (векторное пространство), если выполнены 8 предыдущих аксиом и

1. $\forall \bar{u}, \bar{v}: \bar{u} + \bar{v} \in V$

2. \forall числа $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \alpha \bar{u} \in V$

(или $\alpha \in F$ заданное поле, например, $F_2 = \{0, 1\}$)

Определение. Линейное пространство V — **нормированное**, если на нем задана такая норма $\nu: V \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$, что

1. $\nu(\bar{x}) > 0, \bar{x} \neq \bar{0}, \nu(\bar{0}) = 0$

2. $\nu(\alpha \bar{x}) = |\alpha| \nu(\bar{x})$

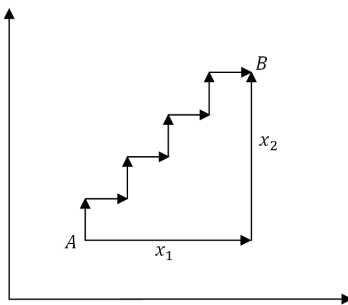
3. $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$ для $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \forall \alpha$

Замечание. Из каждой нормы можно сделать метрику $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \nu(\bar{y} - \bar{x})$.

Примеры норм:

1. Манхэттенская норма (норма таксиста)

(Можно ехать разными путями, но не по прямой)



$$\nu_M(\bar{x}) = |x_1| + \dots + |x_n| \text{ в } \mathbb{R}^n, \text{ где } \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

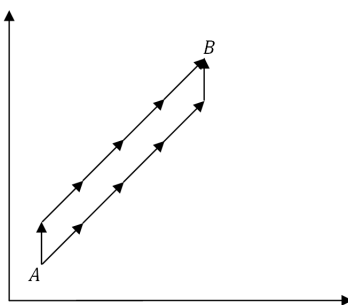
2. Евклидова норма

(Для приближения)

$$\nu_E(\bar{x}) = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

3. Норма максимума

(Уменьшает ошибку по всем координатам)



$$\nu_{max}(\bar{x}) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

4. Норма Гёльдера

$$\nu_p(\bar{x}) = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

$$\nu_1(\bar{x}) = |x_1| + \dots + |x_n| = \nu_M(\bar{x})$$

$$\nu_2(\bar{x}) = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \nu_E(\bar{x})$$

$$\nu_{\infty}(\bar{x}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

Если $|x_i| = \max |x_i|$, то $\sqrt[p]{|x_i|^p} \rightarrow |x_i|$, получим:

$$\nu_{\infty}(\bar{x}) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \nu_{\max}(\bar{x})$$

Утверждение. В нормированном пространстве V верно:

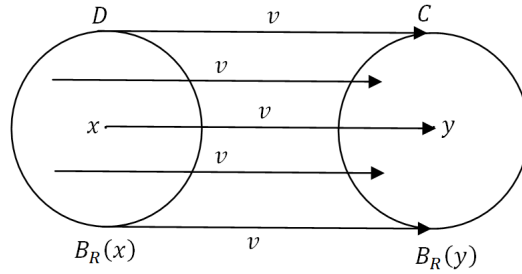
1. $\forall \bar{x}, \bar{y}$ $B_R(\bar{x})$ равен $B_R(\bar{y})$ (как геометрическая фигура).
2. Шары $B_R(\bar{x})$ и $B_{\alpha R}(\bar{x})$, $\alpha > 0$ подобны с коэффициентом подобия α .

Доказательство.

1. Пусть $\bar{v} = \bar{y} - \bar{x}$, тогда

$$B_R(\bar{y}) = \bar{v} + B_R(\bar{x})$$

Ко всем точкам из $B_R(\bar{x})$ прибавим одинаковый вектор \bar{v} .



$$\begin{aligned} C \in B_R(y) &\Leftrightarrow \nu(C - y) \leq R \\ \nu((C - (\bar{y} - \bar{x})) - \bar{x}) &\leq R \end{aligned}$$

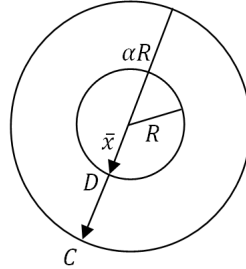
То есть, $D = C - (\bar{y} - \bar{x}) \in B_R(\bar{x})$

- 2.

$$\nu(xD) = \frac{1}{\alpha} \nu(xC)$$

$$D = x + xD = x + \frac{1}{\alpha} xC$$

$$\rho(D, x) = \nu(xD) = \frac{1}{\alpha} \nu(C - x) = \nu\left(\frac{1}{\alpha}(C - x)\right)$$



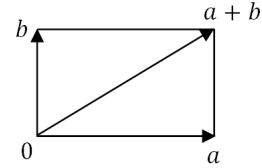
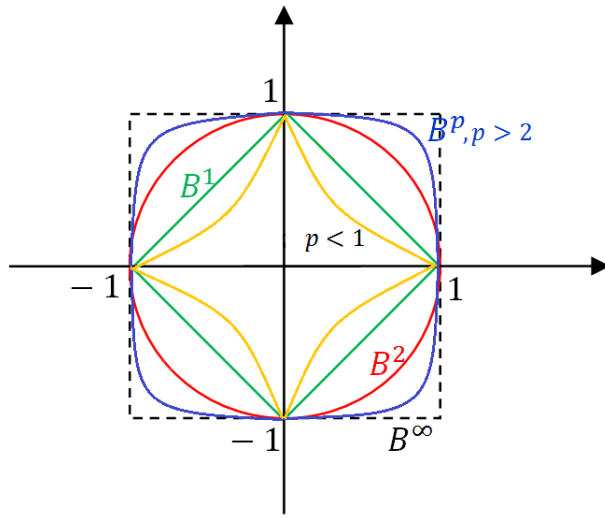
$$C \in B_{\alpha R}(x) \Leftrightarrow \nu(C - x) \leq \alpha R$$

$$\rho(D, x) = \nu\left(\frac{C - x}{\alpha}\right) \leq R$$

То есть $D \in B_R(\bar{x})$.

□

Замечание. ν_p — норма только при $p \geq 1$ (для невыпуклых — неверно, не выполняется неравенство треугольника). $B^p = B_1(\bar{0})$ относительно ν_p .



Пример 2.

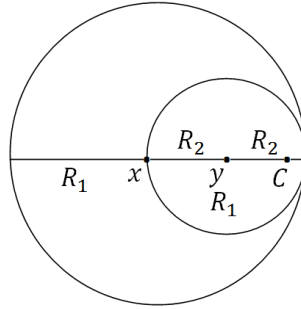
Для каких R_1, R_2 возможно $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$?

Если $R_2 > R_1$ — возможно (даже при $x = y$).

При $R_1 = 5, R_2 = 4$ — возможно (из предыдущего примера).

Докажем, что при $R_1 > R_2$ это не всегда верно, а именно: при $2R_2 > R_1$ — верно, а при $R_2 \leq \frac{R_1}{2}$ — нет.

Рассмотрим случай $2R_2 = R_1$.



Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_1}(x) = B_{R_2}(y)$ — множества совпадают, то есть уже не подходит.

Рассмотрим случай, когда R_1 чуть меньше $2R_2$.

Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$ верно.

Рассмотрим случай, когда R_1 чуть больше $2R_2$.

Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть, $B_{R_2}(y) \subseteq B_{R_1}(x)$, значит не подходит.

Определение. Линейное пространство называется **евклидовым пространством**, если на нем задано скалярное произведение $g(x, y)$:

1. $g(x, y) = g(y, x)$
2. $g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$
3. $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$
4. $g(x, x) \geq 0, g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

В евклидовом пространстве есть стандартная норма $\|x\| = \sqrt{g(x, x)}$. $L_2[0, 1]$ — множество функций, квадрат которых интегрируем по Риману.

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

$x_n \rightarrow x$ **сходится по норме** $\nu(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ верно $\nu(x_n - x) < \varepsilon$.

Пример 3.

Является ли нормой на множестве непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a, b]$ следующее выражение:

$$\mu(f) = \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |f'(x)|) ?$$

Да, так как выполняются все свойства нормы.

$$1. \mu(f) > 0$$

$$2. \mu(\lambda f) = \lambda \mu(f)$$

$$3. \mu(f + g) = \max(|f + g| + |(f + g)'(x)|) \\ \mu(f) + \mu(g) = \max(|f| + |g| + |f'| + |g'|)$$

А так как $|f + g| \leq |f| + |g|$, то выполняется неравенство треугольника

$$\mu(f + g) \leq \mu(f) + \mu(g).$$

Пример 4.

Следует ли из сходимости по норме $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ сходимость по $\mu(f)$, где

$$\mu(f) = \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |f'(x)|) ?$$

Верно ли обратное?

Докажем, что $f_k(x) \xrightarrow{\|f\|} f(x)$ и $f_k(x) \nrightarrow$ по $\mu(f)$.

$$f = x, f' = 1$$

$$f_k = \frac{1}{k} \sin(xk^2) + x$$

$$|f - f_k| \leq \frac{1}{k} |\sin(xk^2)| \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0, \text{ то есть, сходится по норме.}$$

$$f'_k = 1 + k \cdot \cos(xk^2)$$

$\max\{|f(x) - f_k(x)| + |f'(x) - f'_k(x)|\} = \max\{|\frac{1}{k} \sin(xk^2)| + |1 - 1 - k \cdot \cos(xk^2)|\} \rightarrow \infty$, то есть, не сходится по $\mu(f)$.

Обратное утверждение верно. При сходимости по $\mu(f)$ получим, что $|f(x) - f_k(x)| \rightarrow 0$, то есть сходится по норме.

4.3 Домашнее задание 4

$$1. B(x, y) = \{x^2 + axy + 4y^2 \leq 1\}$$

При каких a на множестве \mathbb{R}^2 существует норма ν такая, что $B(x, y)$ — единичный шар относительно нее?

Найдите в этом случае

$$\nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Будет ли метрикой на \mathbb{R} функция $\rho(x, y) =$

- (a) $|x^2 - y^2|$
- (b) $\sin(x - y)$
- (c) $|e^x - e^y|$

3. Существует ли убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств с пустым пересечением (в произвольном метрическом пространстве)?

4. Доказать, что шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством. То есть доказать, что если x, y принадлежат шару, то и весь отрезок $[x, y]$ принадлежит шару.

5 Лекция 5

5.1 Теорема Минковского

Определение. Множество **замкнутое**, если оно включает свою границу.

Определение. V — линейное пространство, ν — **норма** на V ($\nu : V \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$) если:

1. $\nu(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\nu(\bar{0}) = 0$
2. $\nu(\alpha\bar{x}) = |\alpha|\nu(\bar{x})$
3. $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$ для $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \forall \alpha$
 $\nu(\bar{x}) = |\bar{x}|$

Теорема (Минковского). Множество $B \subset \mathbb{R}^n$ является единичным шаром с центром 0 $B_1^\nu(0)$ относительно какой-либо нормы ν тогда и только тогда, когда B :

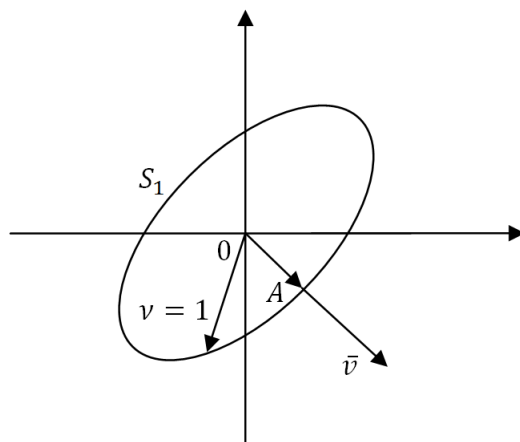
1. замкнуто
2. ограничено ($B \subset B_M^E$)
3. содержит окрестность нуля (то есть $B \supset B_\varepsilon^\nu(0)$)
4. выпукло
5. центрально симметрично (если $\bar{x} \in B$, то и $-\bar{x} \in B$)

Доказательство. Для начала зададим нужную норму. Если B удовлетворяет свойствам 1–5, то определим норму ν по следующему алгоритму:

1. Ясно, что граница единичного шара — это единичная сфера $S_1^\nu(0)$. Запишем её уравнение.
2. Пусть w — вектор, равный пересечению луча $\{\alpha \cdot v \mid \alpha > 0\}$ со сферой S . Тогда $\nu(w) = 1$ и $w = \alpha \cdot v$.
Отсюда $\alpha = \frac{|w|}{|v|}$, где $|\cdot|$ — обычная евклидова норма.
3. Теперь можно вычислить норму любого вектора v :

$$\nu(v) = \nu\left(\frac{1}{\alpha} \cdot w\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \nu(w) = \frac{1}{\alpha} = \frac{|w|}{|v|}$$

Пример:



$A = \text{луч} \cap S_1$, S_1 — граница
 $\nu(OA) = 1$

$$\nu(v) = \lambda\nu(OA) = \lambda, \text{ если } v = \lambda OA, \lambda = \frac{|v|}{|OA|}$$

Покажем, что B – единичный шар относительно данной нормы. Понятно, что граница луча A лежит в множестве B . Поскольку множество ограничено, то луч выходит за множество. Так как множество выпукло и содержит окрестность нуля, то луч пересечёт границу ровно 1 раз. Тогда можно задать на каждом луче единичный вектор w , а на каждом противоположном – вектор $-w$. Так как B центрально симметрично, то $-w$ тоже лежит в B . Осталось показать, что ν – норма.

$$\forall v : \nu(\alpha \cdot v) = \left| \alpha \cdot \frac{|w|}{|v|} \right| = |\alpha| \cdot \frac{|w|}{|v|} = |\alpha| \cdot \nu(v)$$

$$\forall v \neq 0 : \nu(v) = \frac{|w|}{|v|} > 0$$

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 : \nu(v_1 + v_2) &= \nu(\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2) = |\alpha + \beta| \cdot \nu \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot w_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot w_2 \right) = \\ &\Downarrow \text{ по выпуклости } \Downarrow \\ &= |\alpha + \beta| \cdot \nu(w^*) = |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = |\alpha| \cdot \nu(w_1) + |\beta| \cdot \nu(w_2) = \nu(v_1) + \nu(v_2) \end{aligned}$$

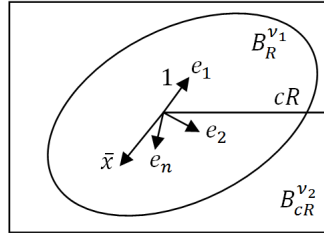
Теперь покажем, что B – единичный шар относительно некоторой нормы, только если выполняются свойства 1–5. Для этого установим ряд фактов.

1. Любой единичный шар B содержит окрестность нуля.

Пусть

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n \in B_1^{\nu_1} (R = 1)$$

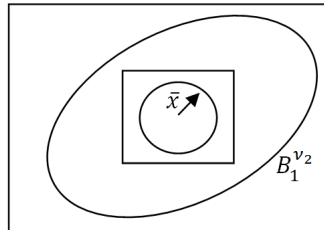
$$\begin{aligned} \nu_2(\bar{x}) &= \nu_2(x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n) \leq \nu_2(x_1 e_1) + \dots + \nu_2(x_n e_n) = |x_1| \nu_2(e_1) + \dots + |x_n| \nu_2(e_n) \leq \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \{ |x_i| \}. \end{aligned}$$



Пусть $|\bar{x}|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$, $M = \max_{i=1, \dots, n} \nu_2(e_i)$, тогда $\nu_2(x) \leq |\bar{x}|_\infty nM$, то есть $B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{|\cdot|_\infty}$, $c = nM$.

Доказали, что любой единичный шар можно поместить в квадрат со стороной cR .

Если $|x|_\infty \leq \frac{1}{nM}$, то $\nu_2(x) \leq 1$, $x \in B_1^{\nu_2}$ откуда и следует требуемое.



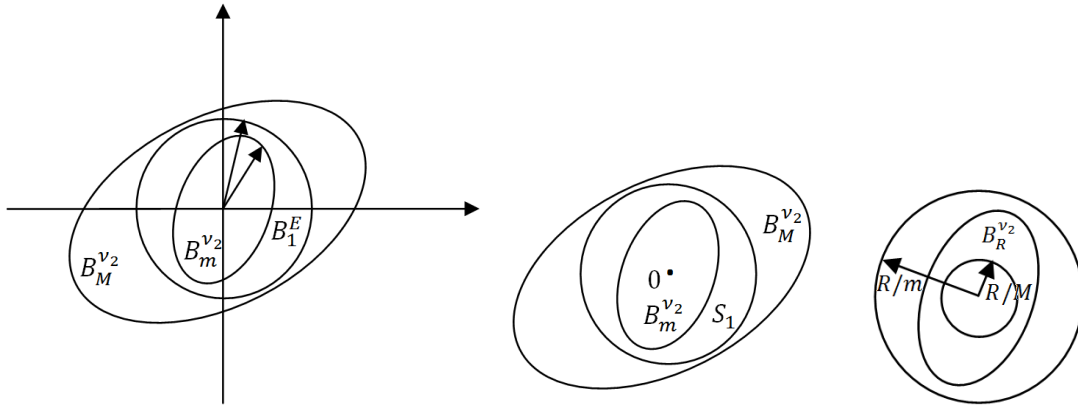
2. Шар B – ограниченное и замкнутое множество.

Докажем от противного.

$$B_1^\nu = \{x | \nu(\bar{x}) \leq 1\}$$

Рассмотрим S^2 – евклидова сфера $S_1^{\nu_2} = \{x | |x|_2 = 1\}$. Если множество ограничено и замкнуто, то любая функция на нём достигает максимума и минимума. Покажем, что норма как функция на шаре удовлетворяет такому условию.

Пусть $m = \min_{x \in S} \nu(x)$, тогда при $|x|_2 = 1$ выполнено всегда, что $m \leq \nu(x) \iff m \cdot \nu_2(x) \leq \nu(x)$. Но если $x \in S$, то $\nu(x) = 1$ и $\nu_2(x) \leq \frac{1}{m}$, то есть, $S \subset B^{\nu_2} \left(R = \frac{1}{m} \right)$. Но тогда и $B \subset B^{\nu_2} \left(R = \frac{1}{m} \right)$, следовательно, B – ограниченное множество.



Теперь покажем, что B замкнуто. Для этого установим непрерывность нормы.

Лемма. Норма $\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна.

Докажем определение непрерывности для нормы:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | |x - x_0|_2 < \delta \Rightarrow |\nu(x) - \nu(x_0)| < \varepsilon$$

Положим $\delta = \frac{1}{M \cdot n} \cdot \varepsilon$, где M и n мы взяли те же, что и в пункте про окрестность нуля. Тогда $B_{x_0}^{\nu_2} \left(\frac{1}{M \cdot n} \right) \subset B_{x_0}^\nu(1)$ (шар содержит окрестность нуля), откуда $B_{x_0}^{\nu_2} \left(\frac{\varepsilon}{M \cdot n} \right) \subset B_{x_0}^\nu(\varepsilon)$. Тогда:

$$|x - x_0|_2 < \delta \implies \nu(x - x_0) < \varepsilon$$

Теперь, воспользовавшись свойствами нормы, получаем требуемое:

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \nu(x - x_0 + x_0) \leq \nu(x - x_0) + \nu(x_0) \leq \varepsilon + \nu(x_0) \\ \nu(x_0) &= \nu(x_0 - x + x) \leq \nu(x_0 - x) + \nu(x) < \varepsilon + \nu(x) \\ -\varepsilon &< \nu(x) - \nu(x_0) < \varepsilon \\ |\nu(x) - \nu(x_0)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Докажем теперь замкнутость шара. Так как ν непрерывна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \neq x_0 | x_\varepsilon \in B \cap \cup_\varepsilon(x_0)$$

Но это означает, что $\nu(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu(x_\varepsilon) \leq 1$, так как $\nu(x_\varepsilon) \leq 1$. Следовательно, предельная точка также содержится в единичном шаре B . А это ни что иное, как определение замкнутости.

3. Любой шар B радиуса R – выпуклое множество.

Пусть $x \in B$, $y \in B$. Тогда $\nu(x) \leq R$, $\nu(y) \leq R$. Пусть $z = t \cdot x + (1 - t) \cdot y$ – точка, являющаяся выпуклой комбинацией x и y . Тогда:

$$\nu(z) = \nu(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \leq \nu(t \cdot x) + \nu((1 - t) \cdot y) = t \cdot \nu(x) + (1 - t) \cdot \nu(y) \leq t \cdot R + (1 - t) \cdot R = R$$

4. Любой шар центрально симметричен

Пусть $x \in B \Rightarrow \nu(x) \leq R$. В то же время, в силу свойств нормы:

$$-x = (-1) \cdot x \Rightarrow \nu(-x) = |-1| \cdot \nu(x) \leq R$$

Из доказанных выше утверждений напрямую следует факт, что B – единичный шар относительно нормы ν , если и только если выполнены вышеуказанные свойства.

□

Пример 1.

$$B = \{x^2 + axy + 4y^2 \leq 1\}$$

Существует ли такая норма ν , что B – единичный шар относительно нее ($B = B_1^\nu$)?

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 - \frac{a^2}{4} > 0$$

То есть это эллипс, все 5 свойств из предыдущей теоремы выполняются, значит при $|a| < 4$ B – единичный шар относительно нормы.

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 - \frac{a^2}{4} < 0$$

В этом случае множество не будет замкнутым, то есть не выполняются все свойства из предыдущей теоремы, значит в этом случае B не будет единичным шаром относительно нормы.

При $\Delta_2 = 0$: $a = \pm 4$ и $x^2 \pm 4xy + 4y^2 \leq 1$, $(x \pm 2y)^2 \leq 1$. В этом случа получим множество между двумя параллельными прямыми, которое является незамкнутым, то есть в этом случае B тоже не будет единичным шаром относительно нормы.

Получили, что $B = B_1^\nu$ только при $|a| < 4$.

5.2 Скалярное произведение

Определение. V – *евклидово пространство со скалярным произведением*, если задана $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, то есть, на нем задано скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}$ такое, что для пространств над \mathbb{R} выполнено:

1. $(u, v) = (v, u)$
2. $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{R}$

$$4. (u, u) > 0, u \neq \bar{0} \quad ((u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$$

Обозначение скалярного произведения: $(u, v) = \langle u, v \rangle = \langle u | v \rangle$.

Предложение. Длина вектора — это $|v| = \sqrt{(v, v)} \geq 0$ (норма).

Доказательство.

$$\begin{aligned} |\alpha v| &= \sqrt{(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 (v, v)} = |\alpha| |v| \\ |v| &> 0, \text{ при } v \neq \bar{0} \\ |u + v| &\leq |u| + |v| \end{aligned}$$

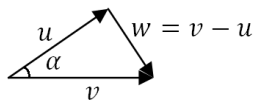
□

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{(u, v)}{|u||v|}, u, v \neq \bar{0}$$

Определение. V — эрмитово пространство со скалярным произведением, если задана $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, то есть, на нем задано скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{C}$ такое, что для пространств над \mathbb{C} выполнено:

1. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
2. $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{C}$
4. $\forall u \quad (u, u) \geq 0, (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Как по норме $|w|$ восстановить скалярное произведение (u, v) ?



$$|w|^2 = (w, w) = (v - u, v - u) = (v, v) - (u, v) - (v, u) + (u, u) = |v|^2 - 2(u, v) + |u|^2$$

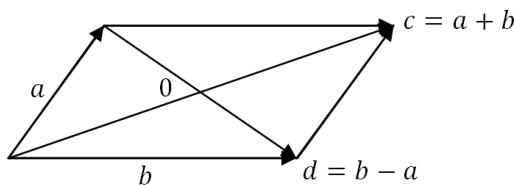
То есть, $(u, v) = \frac{1}{2}(|v|^2 + |u|^2 - |v - u|^2)$.

Теорема (Тождество параллелограмма). Пусть V — нормированное пространство с нормой $|v|$. На V существует такое скалярное произведение, что $|v| = \sqrt{(v, v)}$ в том и только том случае, когда в V выполняется тождество параллелограмма:

$$\forall a, b \quad |a + b|^2 + |b - a|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

При $c = a + b, d = b - a$:

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$



Доказательство. Если для $\forall v \ |v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, то $|a+b|^2 + |b-a|^2 = \langle a+b, a+b \rangle + \langle b-a, b-a \rangle = \langle a, a \rangle + 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle + \langle b, b \rangle - 2\langle a, b \rangle + \langle a, a \rangle = 2(|a|^2 + |b|^2)$ \square

5.3 Ортогональные системы

Определение. H — *гильбертово пространство*, если на нем задано скалярное произведение и оно является полным (относительно метрики, порожденной скалярным произведением).

Определение. Набор $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}^{-e}$ называется *ортогональной системой*, если

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Формально хотим представить $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$.

$$\begin{aligned} (f, \varphi_j) &= c_j (\varphi_j, \varphi_j) \\ (\varphi_j, \varphi_j) &= 1 \\ c_j &= \frac{(f, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2} = (f, \varphi_j) \end{aligned}$$

c_j — коэффициенты Фурье по ортогональной системе.

Теорема. Если φ_j — ортогональная система, тогда следующие условия эквивалентны:

1. система $\{\varphi_j\}$ является базисом, то есть $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$
2. выполнение равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$
3. система является полной, то есть $\exists y \neq 0 : (\varphi_j, y) = 0$

Хотим приблизить f и минимизировать $\|f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k\| \rightarrow \min$.

$$\begin{aligned} (f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k) &= (\text{так как система ортогональна}) = (f, f) - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k (f, \varphi_k) + \\ &+ \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 (\varphi_k, \varphi_k) = (c_k = (f, \varphi_k), (\varphi_k, \varphi_k) = 1) = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \end{aligned}$$

Выбором α хотим минимизировать, минимальная норма будет там, где совпадают $\alpha_k = c_k$.

$a = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ — пространство \mathbb{R}_{n+1} многочленов степени $\leq n$ на $[-1, 1]$, где скалярное произведение $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. Применим к a процесс Грама-Шмидта, получим b .

$$a \rightarrow b = \{P_0(x) = 1\}$$

Определение. *Многочленами Лежандра* называются многочлены вида:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k), k = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{k=0:} \ P_0(x) = 1$$

$$\mathbf{k=1:} \ P_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)' = x$$

$$\mathbf{k=2:} \ P_2(x) = \frac{1}{8}((x^2 - 1)^2)'' = \frac{1}{8}(4x(x^2 - 1))' = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$\mathbf{k=3:} \quad P_3(x) = \frac{1}{48}((x^2 - 1)^3)''' = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\| P_1(x) \| = \sqrt{\int_{-1}^1 x \cdot x \, dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

5.4 Домашнее задание 5

$$1. \quad (\text{a}) \quad \text{Проверить ортогональность } P_2(x) \text{ и } P_3(x) \text{ относительно } \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx.$$

$$(\text{b}) \quad \text{Найти } \| P_n(x) \|.$$

$$2. \quad \text{Найти } \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \text{ на } [-1, 1]: \| f - \sum_{k=0}^2 \alpha_k P_k(x) \| \rightarrow \min, \quad d_j = \frac{(f, \varphi_j)}{\| \varphi_j \|^2} = (f, \varphi_j), \text{ где } P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k)^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n \text{ — многочлены Лежандра.}$$

$$(\text{a}) \quad f_1(x) = x e^{-x}$$

$$(\text{b}) \quad f_2(x) = x^3$$

$$3. \quad \text{Выразить скалярное произведение через длину вектора в эрмитовом пространстве.}$$

6 Лекция 6

6.1 Многочлены Чебышева 1 рода

Определение. Многочленами Чебышева 1 рода называются следующие многочлены:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

...

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n \geq 2$$

n	$T(n)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
9	$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$
10	$512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

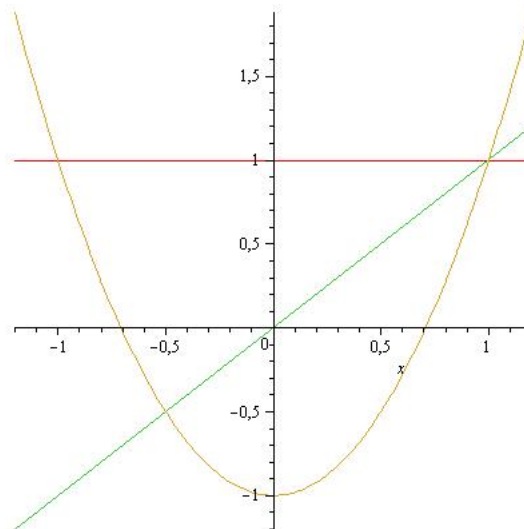
Утверждение. Для главного члена в формуле $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots, n \geq 1$.

Доказательство. По индукции:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x2^{n-1}x^n + \dots - 2^{n-2}x^{n-1} = 2^n x^{n+1} + \dots \text{ верно для } n + 1.$$

□

Графики многочленов $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$:



Графики многочленов $T_3(x)$, $T_4(x)$, $T_5(x)$:

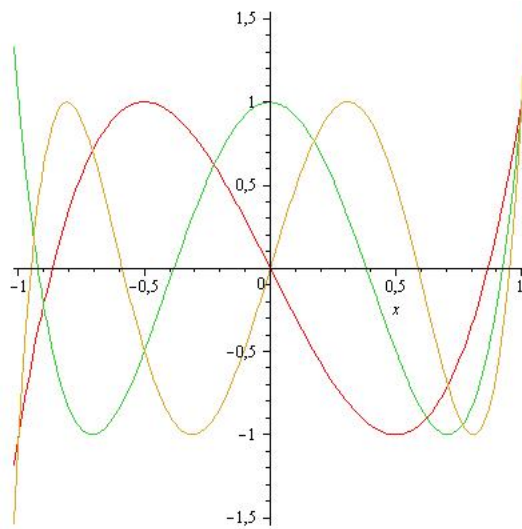
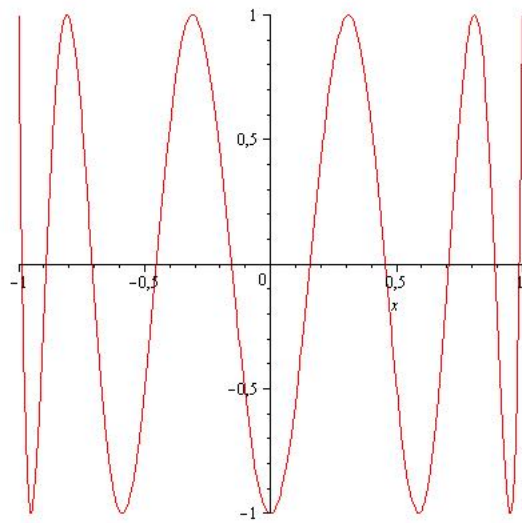


График многочлена $T_{10}(x)$:



Теорема. $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \varphi \\
 \cos(2\varphi) &= 2x^2 - 1 \\
 \cos(3\varphi) &= 4x^3 - 3x \\
 &\vdots \\
 \cos(n\varphi) + \cos((n-2)\varphi) &= 2\cos\left(\frac{n+n-2}{2}\varphi\right)\cos\left(\frac{n-n+2}{2}\varphi\right) = 2\cos((n-1)\varphi)\cos\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_n(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(n\varphi) = 0 \Leftrightarrow n\varphi = \pi k + \frac{\pi}{2} = \pi \frac{(2k+1)}{2}, \varphi \in [0, \pi] \\
 \varphi &= \pi \frac{(2k+1)}{2n} \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{2k+1}{n} \pi\right)
 \end{aligned}$$

□

Следствие.

- $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ при $x \in [-1, 1]$
- $T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$ при $|x| \geq 1$

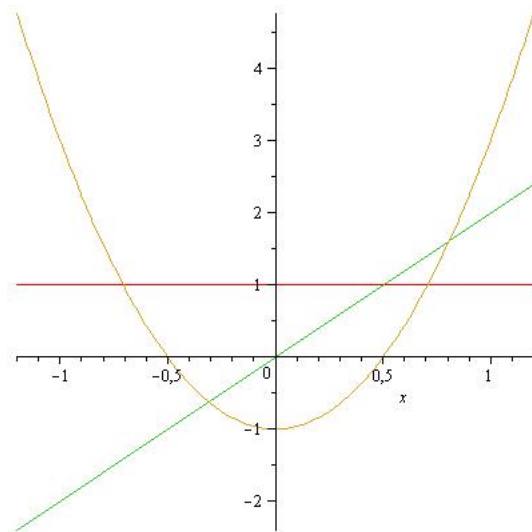
6.2 Многочлены Чебышева 2 рода

Определение. *Многочленами Чебышева 2 рода называются следующие многочлены:*

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) \text{ при } n \geq 0$$

n	$U(n)$
0	1
1	$2x$
2	$4x^2 - 1$
3	$8x^3 - 4x$
4	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
7	$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
8	$256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$
9	$512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$
10	$1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1$

Графики многочленов $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$:



Графики многочленов $U_3(x)$, $U_4(x)$, $U_5(x)$:

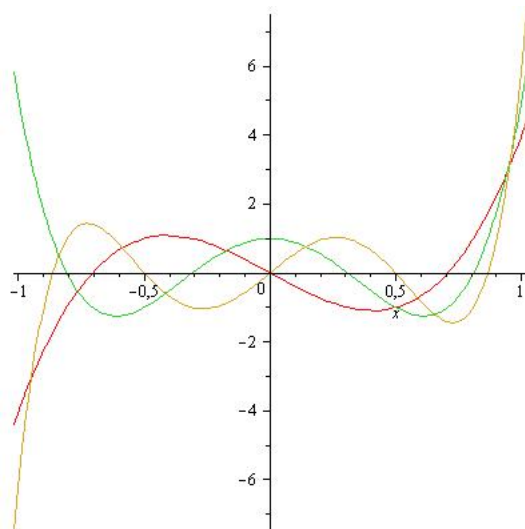
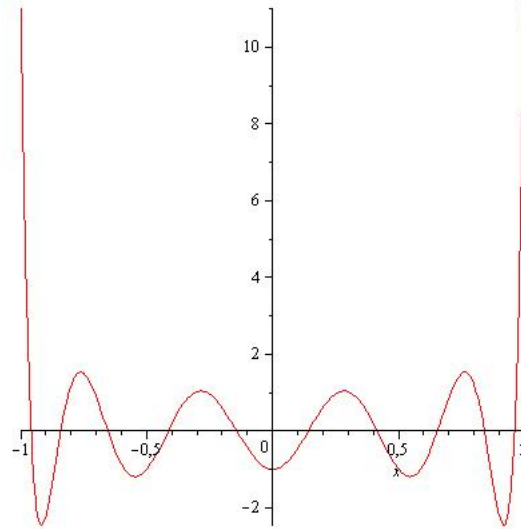


График многочлена $U_{10}(x)$:



Теорема.

1. $U_{n-1}(\cos \varphi) \sin \varphi = \sin(n\varphi)$
2. $U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$ при $|x| \leq 1$

Доказательство.

1. $\sin(n\varphi) = \sin \varphi U_{n-1}(x), U_{n-1} = \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}$
2. $U_{n-1}(x) = 0 \Leftrightarrow n\varphi = \pi k, \varphi = \frac{\pi k}{n}$

□

Замечание. Старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ равен 2^{n-1} , а старший коэффициент многочлена $U_n(x)$ равен 2^n .

Теорема.

1. При $n \geq 1$ многочлен $T_n(x)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ ровно n корней $\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \dots, n$.
2. Корни многочлена $U_n(x)$ (они же - экстремумы многочлена $T_{n+1}(x)$) также принадлежат отрезку $[-1, 1]$: это числа $\cos \frac{\pi k}{n+1}, k = 1, \dots, n$.

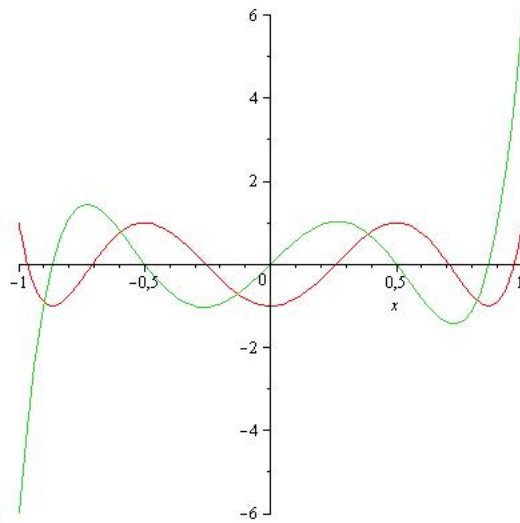
Следствие.

$$T_n(x) = 2^{n-1} \left(x - \cos \frac{\pi}{2n} \right) \left(x - \cos \frac{3\pi}{2n} \right) \cdots \left(x - \cos(2n-1) \frac{\pi}{2n} \right)$$

$$U_n(x) = 2^n \left(x - \cos \frac{\pi}{n+1} \right) \left(x - \cos \frac{2\pi}{n+1} \right) \cdots \left(x - \cos n \frac{\pi}{n+1} \right)$$

Следствие. Многочлен $T_n(x)$ степени n на отрезке $[-1, 1]$ достигает своих экстремальных значений, равных 1 и -1 в $n+1$ точке, включая концы отрезка.

Пример: $n = 6$ (график многочленов $T_6(x)$ и $U_5(x)$).



6.3 Уклонение от нуля и норма Чебышева

Пусть f — функция на отрезке $[-1, 1]$. Как измерить, насколько она далека от нуля?

Определение. *Норма Чебышева*

$$|f|_0 = \max_{[-1,1]} |f(x)| \text{ (максимум модуля на данном отрезке)}$$

и

$$|f|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx \text{ (площадь под графиком на данном отрезке).}$$

Определение. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на пространстве многочленов (например, одна из двух упомянутых). Многочлен $f(x) = x^n + \dots$ степени n со старшим коэффициентом 1 называется **наименее уклоняющимся от нуля** относительно данной нормы, если для любого другого такого многочлена $g(x) = x^n + \dots$ всегда $\|f\| \leq \|g\|$.

Пример 1.

Относительно нормы Чебышева $|f|_0$ уклонение от нуля многочлена $\tilde{T}_3(x) = \frac{1}{4} T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ равно

$$|\frac{1}{4} T_3(x)|_0 = \frac{1}{4} |T_3(x)|_0 = \frac{1}{4},$$

а, например, для многочлена x^3 имеем $|x^3|_0 = 1$.

Теорема.

1. (Чебышев) Наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ относительно нормы Чебышева

$$|f|_0 = \max_{[-1,1]} |f(x)|$$

является многочлен $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

2. (Коркин, Золотарев) Наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ относительно нормы

$$|f|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

является многочлен $\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}U_n(x)$.

Дано: многочлен $f(x) = x^n + \dots$ на $[-1, 1]$

Надо найти: $g(x) = c \cdot x^n + \dots$, приближающий $f(x)$ в смысле $|\dots|_1$ или $|\dots|_0$.

$g \approx f \Leftrightarrow f - g$ — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, то есть $f(x) - g(x) = \tilde{U}_n(x)$ или $\tilde{T}_n(x)$.

Следствие. Наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$ многочлен степени n относительно нормы Чебышева на этом отрезке $|f|_0 = \max_{[a,b]} |f(x)|$ — это

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right).$$

Идея доказательства. Сделать замену переменных $y = \frac{2x - (b+a)}{b-a}$, где $x \in [a, b]$, а $y \in [-1, 1]$, и свести задачу к поиску многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[-1, 1]$. \square

Пример 2.

Наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0, 1]$ многочлен степени n — это многочлен

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{2n-1}} T_n(2x - 1).$$

В частности, $\bar{T}_2(x) = \frac{1}{2^{4-1}} T_2(2x - 1) = \frac{1}{8} (2(2x - 1)^2 - 1) = x^2 - x + \frac{1}{8}$.

Замечание. Скалярное произведение непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ему соответствует норма:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}.$$

Соотношения ортогональности:

$$\langle T_m, T_n \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

Наилучшее приближение функции f многочленом степени $\leq n$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\langle T_i, f \rangle}{\langle T_i, T_i \rangle} T_i(x)$$

Пример 3.

$f(x) = x^3$ на $[-1, 1]$ разложить в ряд по многочленам Чебышева.

T	K
1	1
x	x
$2x^2 - 1$	$x^2 - \frac{1}{2}$
$4x^3 - 3x$	$x^3 - \frac{3}{4}x$

$K = \tilde{T}$ — отнормированные значения.

$$f(x) = x^3 = \tilde{T}_3 + \frac{3}{4}T_1$$

$$x^3 = \sum_{i=0}^3 \frac{<\tilde{T}_i, f>}{<\tilde{T}_i, \tilde{T}_i>} \tilde{T}_i$$

Пример 4.

$\|x^3 - P_2(x)\|_{\infty} \rightarrow \min$ на отрезке $[-1, 1]$ приблизить многочленом, где $P_2(x)$ — любой многочлен второй степени.

Для отрезка $[-1, 1]$:

$$x^3 - P_2(x) = \tilde{T}_3(x)$$

$$x^3 - x^3 + \frac{3}{4}x = P_2(x)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{4}x$$

Пример 5.

$\|x^3 - P_2(x)\|_{\infty} \rightarrow \min$ на отрезке $[2, 3]$ приблизить многочленом, где $P_2(x)$ — любой многочлен второй степени.

$$x^3 - P_2(x) = \bar{T}_3(x)$$

$$P_2(x) = x^3 - \bar{T}_3(x)$$

Вычислим $\bar{T}_3(x)$ по формуле $\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$.

$$\begin{aligned} \bar{T}_3(x) &= \frac{(b-a)^3}{2^5} T_3\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = \frac{1}{2^5} T_3(2x-5) = \frac{1}{32} (4(2x-5)^3 - 3(2x-5)) = \\ &= \frac{1}{32} (4(8x^3 - 60x^2 + 150x - 125) - 6x + 15) = \frac{1}{32} (32x^3 - 240x^2 + 600x - 500 - 6x + 15) = \\ &= x^3 - 7.5x^2 + 18.5625x - 15.15625 \end{aligned}$$

Подставив $\bar{T}_3(x)$ в $P_2(x)$, получим:

$$P_2(x) = x^3 - \bar{T}_3(x) = 7.5x^2 - 18.5625x + 15.15625$$

Пример 6.

Если $U_n(x) = \frac{1}{n+1} (T_{n+1}(x))'$ будет ли верно $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$?

n:

$$\frac{1}{n+1} (2xT_n(x) - T_{n-1}(x))' = \frac{1}{n+1} (2T_n(x) + 2xT_n'(x) - T_{n-1}(x)')$$

n+1:

$$\frac{1}{n+2} (2T_{n+1}(x) + 2xT_{n+1}'(x) - T_n(x)')$$

n-1:

$$\frac{1}{n} (2T_{n-1}(x) + 2xT_{n-1}'(x) - T_{n-2}(x)')$$

Подставим:

$$\frac{2T_{n+1} + 2xT_{n+1}' - T_n'}{n+2} \stackrel{?}{=} \frac{2x(2T_n + 2xT_n' - T_{n-1}')}{n+1} - \frac{2T_{n-1} + 2xT_{n-1}' - T_{n-2}'}{n}$$

6.4 Домашнее задание 6

1. Доказать, что $U_1(x) + U_3(x) + \dots + U_{2n-1}(x) = U_{n-1}(x)U_n(x)$.
2. Доказать, что $U_0(x) + U_2(x) + \dots + U_{2n-2}(x) = U_{n-1}^2(x)$.
3. а) Введем на множестве многочленов $\mathbb{R}[x]_{<n}$ степени меньше n от одной переменной скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)g(x_j),$$

где x_0, \dots, x_{n-1} — нули многочлена Чебышева степени n . Докажите, что многочлены Чебышева T_0, \dots, T_{n-1} ортогональны друг другу относительно этого скалярного произведения, причем $\langle T_j, T_j \rangle_n = n/2$ при $j > 0$ и $\langle T_0, T_0 \rangle_n = n$.

б) Пусть f — произвольная действительная функция. Предположим, что $P(x)$ — такой многочлен степени n , что

$$P(x_m) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle \hat{T}_j, f \rangle_n}{\langle \hat{T}_j, \hat{T}_j \rangle_n} \hat{T}_j(x_m)$$

для всех $m = 0, \dots, n-1$. Докажите, что $P(x)$ является интерполяционным многочленом Лагранжа функции f с узлами в точках x_0, \dots, x_{n-1} .

4. Для $f(x) = x^x$ найти наилучшее линейное приближение на отрезке $[1, 4]$ в норме $\max_{[1,4]} |f(x)|$.

7 Лекция 7

7.1 Матричные нормы

Определение. Рассмотрим линейное пространство матриц размера n над комплексными числами. Норма $\|\cdot\|$ на пространстве $V = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ называется **матричной нормой**, если

0. Это норма.

1. Норма $\|\cdot\|$ является **согласованной с операцией умножения**, то есть

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \text{ для любых } A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C}),$$

(удовлетворяет свойству субмультипликативности).

Лемма (Свойства).

1. $\|E\| \geq 1$

► $\|E\| \leq \|E\| \|E\| \Rightarrow \|E\| \geq 1$ ■

2. Матричная норма называется **сохраняющей единицу**, если $\|E\| = 1$.

3. Матричная норма называется **согласованной с векторной нормой** $|\cdot|$ на \mathbb{C}^n , если

$$|M\bar{x}| \leq \|M\| \cdot |\bar{x}|.$$

4. Если $\|M\|$ — матричная норма, тогда $\|M\|_* = \|M\|$, $x \geq 1$ — тоже матричная норма.

Примеры матричных норм.

- $\|M\| = \sum_{i,j=1,\dots,n} |m_{ij}|$

$$M = (m_{ij})_{n \times n}$$

Проверим свойства:

0. Это норма Гельдера $|\cdot|_1$ на \mathbb{C}^{n^2} .

1. $\|M\| = |M^1|_1 + \dots + |M^n|_1$
 $\|AB\| = \sum_{i,j} \left| \sum_t a_{it} b_{tj} \right| \leq \sum_{i,j,t} |a_{it}| |b_{tj}| \leq \sum_{i,j,t,s} |a_{i,s}| |b_{tj}| = \sum_{i,s} |a_{i,s}| \sum_{t,j} |b_{tj}| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

2. $\|E\| = n$ — не выполняется, не сохраняет единицу.

3. — Согласована ли с $|\cdot|_1$?

$$|Mx|_1 \stackrel{?}{\leq} \|M\| \cdot |x|_1$$
$$|Mx|_1 = \left\| M \cdot \left(\bar{x} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right) \right\|, \quad |x|_1 = \|B\|$$

То есть, согласована.

— Согласована с $|\cdot|_\infty$?

$$M_{n \times n} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}, \quad Mx = \begin{pmatrix} M_1 x \\ \vdots \\ M_n x \end{pmatrix}$$

$$|Mx| = \max_i | \langle Mx, \bar{x} \rangle | \leq |x_{\max}| \sum_{i,j}^n |m_{ij}| \leq |x|_{\infty} \|M\|$$

То есть, согласована.

• **Норма Фробениуса** $\|M\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |m_{ij}|^2}$

0. Это Евклидова норма на пространстве.

1. $\|M\|_F^2 = \text{tr}(M^*M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(M^*M) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ — сумма квадратов сингулярных значений (согласованность с умножением).

Если U — унитарная матрица, например, поворот, то есть, $U^* = U^{-1}$, то

$$\|U^{-1}MU\|_F^2 = \text{tr}((U^*MU)^*U^*MU) = \text{tr}(U^*M^*MU) = \text{tr}(M^*M) = \|M\|_F^2$$

Более того: $\|UM\|_F = \text{tr}(M^*U^*UM) = \text{tr}(M^*M) = \|M\|_F^2$.

$M = U\Sigma V^*$, U и V — ортогональные

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\|M\| = \|\Sigma\|$$

Норма Фробениуса $\|M\|_F$ согласована с евклидовой $|\bar{x}|_2$.

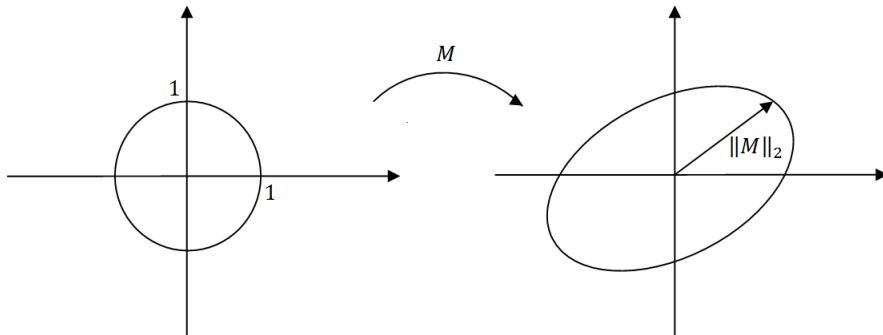
7.2 Индуцированные нормы

Определение. Пусть на \mathbb{C}^n задана норма $|\cdot|_1$. Функция из M_n в \mathbb{C} : $\|M\| = \max_{x \neq 0} \frac{|Mx|}{|x|}$ называется **матричной нормой, индуцированной векторной нормой $|\cdot|_1$** .

Если $c = |x|$, $y = \frac{x}{|x|}$, $|y| = 1$, то $Mx = M(cy) = cMy$. А так как $c > 0$, то $|Mx| = c|My|$.

То есть, здесь максимум достигается, так как:

$$\max_{x \neq y} \frac{|Mx|}{|x|} = \max_{|y|=1} \frac{c|My|}{c} = \max_{|y|=1} |My| = \max_{y \in B_1} |My|$$



Теорема. Пусть $\|\cdot\|_{\star}$ индуцирована $|\cdot|_{\star}$, тогда

1. $\|\cdot\|$ — матричная норма, выполнены свойства 0, 1

2. $\|\cdot\|_\star$ согласована с $|\cdot|_\star$
3. $\|\cdot\|_\star$ сохраняет единицу
4. Если существует другая норма $\|\cdot\|$, согласованная с $\|\cdot\|_\star$, то $\|M\| \geq \|M\|_\star$ ($\|M_\star\|$ минимальна).

Доказательство.

1. Очевидно.
2. $|Mx|_\star = \frac{|Mx|_\star}{|x|_\star} |x|_\star \leq \max_z \frac{|Mz|_\star}{|z|_\star} |x|_\star = \|M\|_\star |x|_\star$
3. $\|E\|_\star = \max_{|y|_\star=1} |Ey|_\star = \max_{|y|_\star=1} |y|_\star = 1$
4. Пусть $|y|_\star = 1$ и $\|M\|_\star = |My|_\star$, тогда длина матрицы $\|M\|_\star = |My|_\star \leq \|M\| \cdot |y|_\star = \|M\|$

□

Теорема.

Векторная норма $ \cdot _\star$	Индукцированная норма $\ \cdot\ _\star$
$ \bar{x} _1 = \sum_{i=1}^n x_i $	$\ M\ _1 = \max_j M^j _1 = \max_j \sum_i m_{ij} = \ M^*\ _1$
$ \bar{x} _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i ^2}$	$\sigma(M) = \sqrt{\max \lambda_{M^*M}}$ (сингулярный радиус матрицы)
$ \bar{x} _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} x_i $	$\ M\ _\infty = \max_i M_i _1 = \max_i \sum_j m_{ij} $

Доказательство. Докажем, что векторной норме $|\bar{x}|_1$ соответствует индуцированная матричная норма $\|M\|_1$.

$$M = (M^1, \dots, M^n)$$

$$Mx = M^1 x_1 + \dots + M^n x_n$$

$$|Mx|_1 \leq |M^1 x_1 + \dots + M^n x_n|_1 \leq |x_1| |M^1|_1 + \dots + |x_n| |M^n|_1 \leq (|x_1| + \dots + |x_n|) \max_j |M^j|_1 \leq |\bar{x}|_1 \max_j |M^j|_1$$

Пусть максимум достигается на первом столбце, тогда $|Mx|_1 = \sum_{j=1}^n |m_{1j}| = \|M\|_1$.

Оценка достигается, значит это и есть максимум.

□

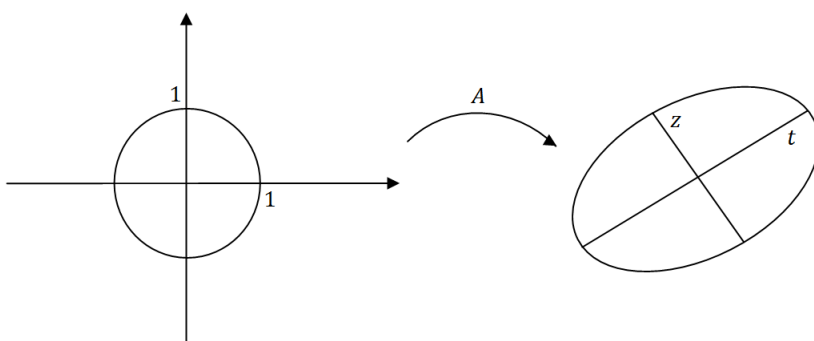
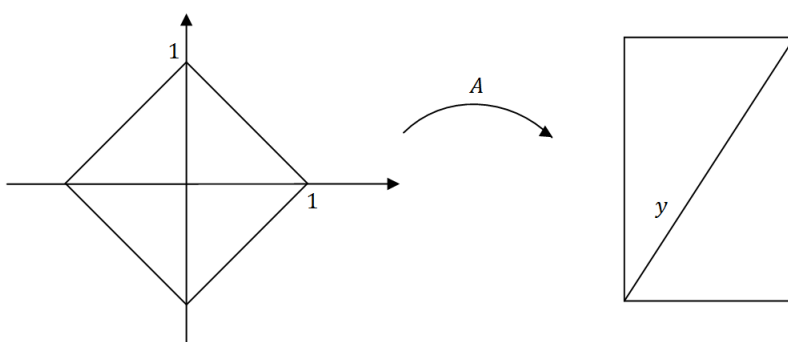
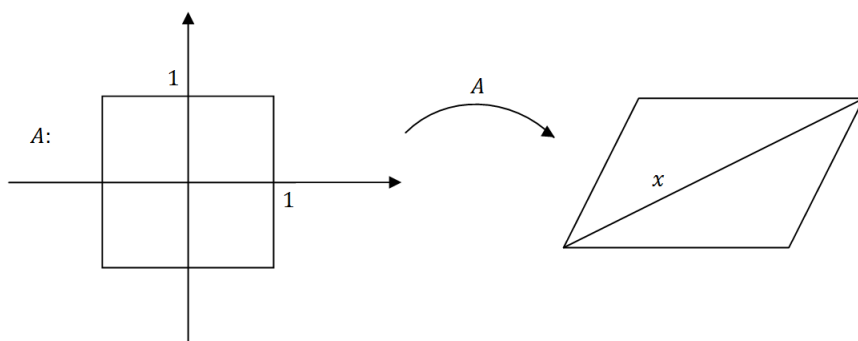
7.3 Домашнее задание 7

1. Доказать, что векторной норме $|\bar{x}|_2$ соответствует индуцированная матричная норма $\sigma(M)$.
2. Доказать, что векторной норме $|\bar{x}|_\infty$ соответствует индуцированная матричная норма $\|M\|_\infty$.
3. Является ли матричной нормой $f(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$?
4. Доказать $\|A^{-1}\| \geq \frac{\|E\|}{\|A\|}$.
5. Найти все нормы: $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\sigma(A)$ для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

6. Найти x, y, z, t для матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



8 Лекция 8

8.1 Сингулярный и Спектральный радиусы

Повторим несколько утверждений из предыдущих лекций.

- В каждом векторном пространстве $V(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ есть норма $\nu(\bar{x}) \geq 0$ такая, что:

- $\nu(\bar{x}) > 0, \bar{x} \neq \bar{0}, \nu(\bar{0}) = 0$
- $\nu(\alpha \bar{x}) = |\alpha| \nu(\bar{x})$
- $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$ для $\forall x, y \in V, \forall \alpha$

- Норма Гёльдера:

$$\begin{aligned} |\bar{x}|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ |\bar{x}|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ |\bar{x}|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \end{aligned}$$

- В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

- Свойства матричной нормы $M \in M_n$:

- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
- Матричная норма $\|\cdot\|$ на M_n согласована с векторной нормой $|\cdot|$ на \mathbb{C}^n , если

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$$

- Матричная норма сохраняет единицу, если $\|E\| = 1$.

- Норма Фробениуса: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$. Она удовлетворяет свойствам 1, 2 для $|\cdot|_1, |\cdot|_2, |\cdot|_\infty$, но не удовлетворяет свойству 3.

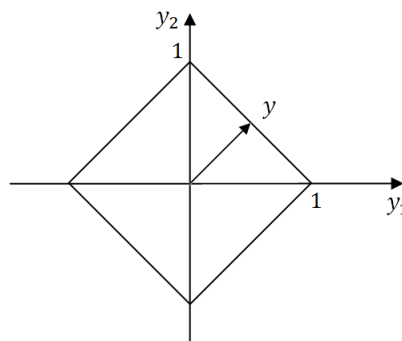
- $\|\cdot\|_\star$ — индуцированная матричная норма, если верно

$$\|A\|_\star = \max_{\bar{x} \neq \bar{0}} \frac{|Ax|_\star}{|x|_\star} = \left(y = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|_\star} \right) = \max_{|y|_\star=1} |Ay|_\star$$

Пример 1.

Найти y для матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{|y_1|+|y_2|=1} |A\bar{y}| = \max_{|y_1|+|y_2|=1} |y_1 + 2y_2| + |3y_1 + 4y_2|$$

Максимум получим при $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$: $\|A\|_1 = 2 + 4 = 6$.

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Определение. *Сингулярным радиусом матрицы A называется её максимальное сингулярное значение: $\sigma(A) = \sigma_1$.*

Теорема. $\|A\|_2 = \sigma(A)$

Доказательство. Вспомним, что такое сингулярное разложение матрицы (SVD):

$$A = V\Sigma U^*$$

V, U — унитарные матрицы ($U^* = U^{-1}$). Найдём сингулярное разложение для матрицы AA^* .

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(A^*A)^* = A^*A = U\Sigma V^*V\Sigma U^* = U\Sigma^2 U^*$$

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ — сингулярные значения матрицы.

Аналогично

$$AA^* = V\Sigma^2 V^*$$

Здесь U^1, \dots, U^n — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A^*A , а V^1, \dots, V^n — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы AA^* . U^i и V^i — правые и левые сингулярные векторы соответственно.

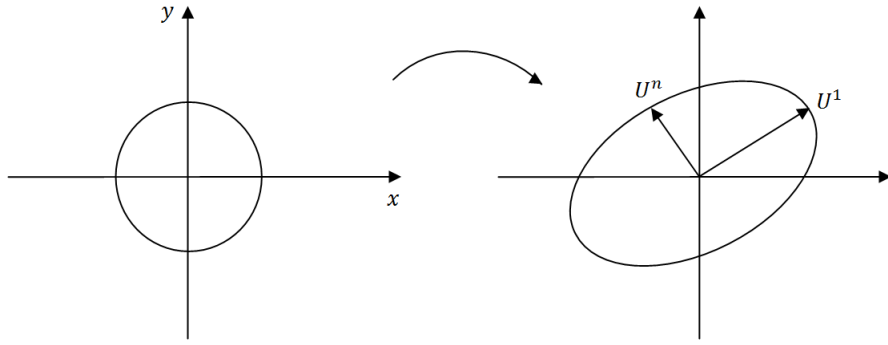
Теперь перейдём к доказательству.

$$\|A\|_2 = \max_{|x|_2=1} |Ax|_2 = \max_{|x|_2=1} \sqrt{(Ax, Ax)} = \max_{|x|_2=1} \sqrt{(Ax)^* Ax} = \max_{|x|_2=1} \sqrt{x^* A^* Ax}$$

$$A^*A \xrightarrow{\alpha \rightarrow U} \Sigma^2$$

$$x = \sum_i \alpha_i U_i, \quad \sum_i |\alpha_i|^2 = 1$$

$$xx^* = \sum_i \alpha_i U_i U_i^* \alpha_i = \sum_i \alpha_i U_i U_i^{-1} \alpha_i = \sum_i |\alpha_i|^2$$



Подставим в $\|A\|_2$:

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max_{|x|_2=1} \sqrt{x^* A^* A x} = (\text{в базисе } U) = \max_{|x|_2=1} \sqrt{x \Sigma^2 x^*} = \max_{\alpha: \sum_i |\alpha_i|^2=1} \sqrt{\sum_i \sigma_i^2 |\alpha_i|^2} = \\ &= \max_{\alpha: \sum_i |\alpha_i|^2=1} \sqrt{\sigma_1^2 |\alpha_1|^2 + \dots + \sigma_n^2 |\alpha_n|^2} \leq \max_{\alpha: \sum_i |\alpha_i|^2=1} \sqrt{\sigma_1^2 (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)} = \sigma_1 \end{aligned}$$

□

Определение. Матричная норма Фробениуса:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)}$$

Утверждение. $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} A^* A &= \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ \vdots & * & * \\ a_{n1} & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} a_{11} + \dots + \bar{a}_{n1} a_{n1} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} |a_{11}|^2 + \dots + |a_{n1}|^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Получим $\sqrt{\text{tr}(A^* A)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$.

□

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\|A\| = 1$?

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|A\|_F \geq \|A\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F = \sqrt{7}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \max\{1, 5\} = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max\{3, 3\} = 3$$

Определение. Спектральный радиус матрицы A – это модуль её наибольшего собственного значения. $\rho(A) = |\lambda_{\max}(A)| = \max_i |\lambda_i|$

Теорема. Если матричная норма $\|\cdot\|$ согласована с некоторой векторной нормой, то

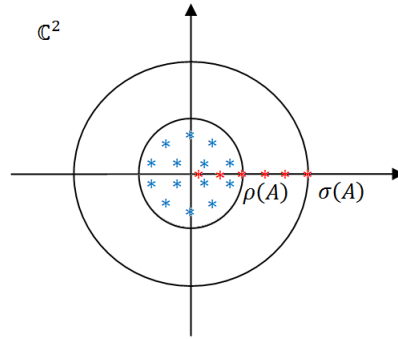
$$\|A\| \geq \rho(A)$$

Доказательство. $Av = \lambda v$, $v \neq 0$ — для собственного значения существует собственный вектор.

Из определения согласованности векторной нормы: $|Av| \leq \|A\| \cdot |v|$. С другой стороны, $|Av| = |\lambda v| = |\lambda| |v|$. Получим, что $|\lambda| \leq \|A\|$, то есть, норма не меньше, чем λ . \square

Следствие. В частности

$$\sigma(A) \geq \rho(A)$$



Здесь $\sigma_i(A)$ — сингулярные собственные значения, а $\rho(A)$ ($\lambda_i(A)$) — собственные значения.

Утверждение. Для любой матрицы A и $\forall \varepsilon > 0$ существует матричная норма $\|\cdot\|$, согласованная с некоторой векторной нормой $|\cdot|$, и такая, что

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

С помощью ε можно добиться равенства.

8.2 Приближённое разложение меньшего ранга

Разложение матрицы $A_{n \times n} = A_{n \times r} \cdot A_{r \times n}$, A ранга r .

Как получить приближенное разложение матрицы?

$A \approx X$, X ранга r , X — ?

Задача: найти X ранга $\leq r$ такое, что

$$\|X - A\| \rightarrow \min$$

Ответ: для матричных норм $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_F$ (и любой ортогонально инвариантной)

$$A = V \Sigma U^*$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A_r = V \Sigma_r U^*$$

Для $\|A\| = \|A\|_2 = \sigma(A)$.

Корректность. U^1, \dots, U^n — правый сингулярный базис. Пусть $\bar{w} \in \langle U^1, \dots, U^{r+1} \rangle \cap \text{Ker} X$, где $\text{Ker} X \geq n - r$, а X ранга $\leq r$, $|w| = 1$.

Так как $|Mx| \leq \|M\|$, $|x| = 1$, тогда

$$\begin{aligned} (\|X - A\|_2)^2 &\geq |(X - A)w|_2^2 = |Xw - Aw|^2 = |Aw|^2 = (\text{в базисе } U) = \\ &= \left| V \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{r+1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| V \begin{pmatrix} \sigma_1 w_1 \\ \vdots \\ \sigma_{r+1} w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} \sigma_1 w_1 \\ \vdots \\ \sigma_{r+1} w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \\ &= \sigma_1^2 |w_1|^2 + \dots + \sigma_{r+1}^2 |w_{r+1}|^2 \geq \sigma_{r+1}^2 (|w_1|^2 + \dots + |w_{r+1}|^2) = \sigma_{r+1}^2 |w| = \sigma_{r+1}^2 \end{aligned}$$

для любой матрицы X , где

$$\|A_r - A\|_2 = \|V(\Sigma - \Sigma_r)U^*\|_2 = \|\Sigma - \Sigma_r\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{r+1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \right\|_2 = \sigma_{r+1}$$

Достигается для r , значит она оптимальна (меньше нет). Для евклидовой нормы это лучшее приближение. \square

Пример 2.

Найти наилучшее приближение A_1 ранга 1 для матрицы A в норме $\|\cdot\|_2$ и найти $\|A - A_1\|_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Так как матрица A симметричная, можно не находить A^*A . Найдем сразу собственное значение и собственный вектор.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= 0 \\ \lambda_1 &= 18, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Хотим построить сингулярное разложение $A = V\Sigma U^*$. Если $A^* = A$, то $V = U$.

После решения СЛАУ $(A - \lambda_i E)x = 0$ из λ_i получим v_i .

$$V = U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A_1 = V \Sigma_r U^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A_1 равен 1, $\|A - A_1\|_2 = 9$ (наибольший из остальных σ).

8.3 Домашнее задание 8

1. Найти наилучшее приближение ранга 2 по фробениусовой норме для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Найти наилучшее приближение B_1 ранга 1 для матрицы B в норме $\|\cdot\|_2$ и найти $\|B - B_1\|_2$, где

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 30 & -21 \\ 17 & 10 & -22 \end{pmatrix}$$

3. Доказать утверждение из лекции: для любой матрицы A и $\forall \varepsilon > 0$ существует матричная норма $\|\cdot\|$, согласованная с некоторой векторной нормой $|\cdot|$ и такая, что

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

9 Лекция 9

9.1 Оценка собственных значений

Оценка: Если $\|A\|$ — матричная норма, согласованная с некоторой векторной нормой, то

$$|\lambda| \leq \|A\|,$$

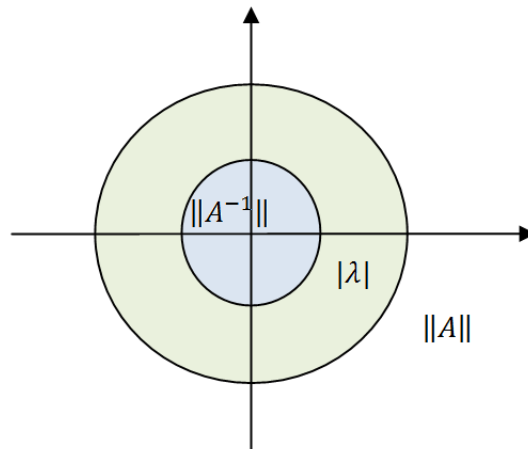
где λ — любое собственное значение матрицы A .

То же можно применить и к обратной матрице.

Утверждение. Если матрица A — невырожденная, то для любого собственного значения λ верно

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|$$

Иными словами, все собственные значения матрицы A находятся между двумя кольцами.



Доказательство. Пусть λ — собственное значение матрицы A , то есть, $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ для некоторого $\bar{x} \neq \bar{0}$, тогда

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \lambda A^{-1}\bar{x} \\ \lambda^{-1}\bar{x} &= A^{-1}\bar{x}\end{aligned}$$

То есть, λ^{-1} — собственное значение для матрицы A^{-1} .

$$|\lambda^{-1}| \leq \|A^{-1}\| \text{ (из оценки)}$$

$$\begin{aligned}|\lambda|^{-1} &\leq \|A^{-1}\| \\ |\lambda| &\geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\end{aligned}$$

С учетом оценки, получим

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|$$

□

Определение. Матрица называется матрицей с **диагональным преобладанием**, если каждое из чисел на диагонали больше суммы модулей по строке, то есть,

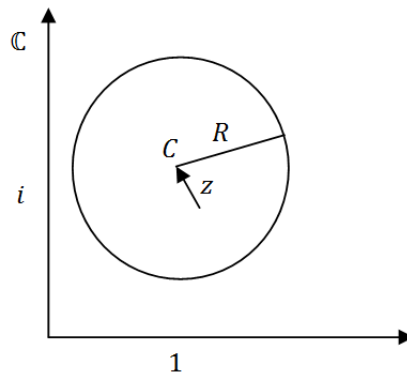
$$\forall i = 1, \dots, n \quad |a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|.$$

Теорема (1-я Теорема Гершгорина). Все собственные значения матрицы $A_{n \times n} = (a_{ij})$ содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим: $R_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|.$

Иными словами, каждое из собственных значений λ матрицы A всегда расположено в одном из кругов.



$$|z - C| \leq R$$

$$\begin{pmatrix} * & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

Круг с центром в точке $C = a_{ii}$ и радиусом $R = R_i = \sum_{k \neq i} |a_{ik}|.$

Если λ — собственное значение матрицы A , то

$$|A - \lambda E| = |(A - \lambda E)^T| = |A^T - \lambda E| = 0$$

Получили, что λ — собственное значение матрицы A^T .

У матрицы A^T собственные значения те же, что и у матрицы A , а строки A^T — столбцы A . Тогда получаем следствие:

Следствие. Все собственные значения матрицы A содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ki}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим: $C_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ki}|.$

Доказательство. Пусть λ — собственное значение A , докажем, что λ находится в объединении кругов Гершгорина.

У каждого собственного значения существует собственный вектор:

$$Ax = \lambda x, \bar{x} \neq \bar{0}.$$

Пусть, например, $|x_1|$ — наибольший из модулей $|x_i|$, то есть, $|x_1| \geq |x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|$. Тогда из $Ax = \lambda x$ следует

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ (\lambda - a_{11})x_1 &= a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ |\lambda - a_{11}||x_1| &= |a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n| \leq \sum_{k=2}^n |a_{1k}||x_k| \leq \sum_{k=2}^n |a_{1k}||x_1| = |x_1|R_1 \\ |\lambda - a_{11}| &\leq R_1 = \sum_{k=2}^n |a_{1k}| \end{aligned}$$

Получили, что если x_1 — наибольший, то собственное значение попадает в первый круг Гершгорина. И так далее, если x_n — наибольший, то собственное значение попадет в n -ый круг Гершгорина. \square

Следствие. Матрица с диагональным преобладанием является невырожденной.

Доказательство. Доказательство следует из того, что в такой матрице все собственные значения $\lambda \neq 0$ \square

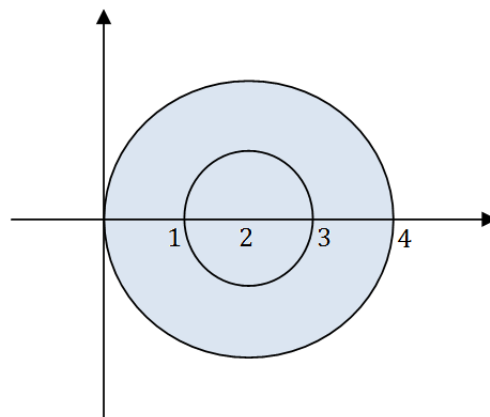
Пример 1.

Дана матрица $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим круги Гершгорина.

№	Центр	Радиус
1	2	$ -1 =1$
$2 - (n-1)$	2	$ -1 + -1 =2$
n	2	$ -1 =1$



Все собственные значения содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$\begin{aligned} |\lambda - 2| &\leq 1 \\ |\lambda - 2| &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A^* = A \\ A \in M_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Получили, что $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda_i \leq 4$.

9.2 Кратности собственных значений

Определение. Если $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{k_s}$, где λ_i различны, то числа k_i называют **кратностями** соответствующих собственных значений.

Теорема (2-я Теорема Гершгорина). Если объединение U r кругов Гершгорина не пересекается с остальными $(n - r)$ кругами, то U содержит ровно r собственных значений с учетом кратностей.

Доказательство. Пусть D — диагональная часть матрицы A

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

а матрица $B = A - D$ — матрица A без диагональных элементов

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим непрерывное семейство матриц

$$A_t = D + tB$$

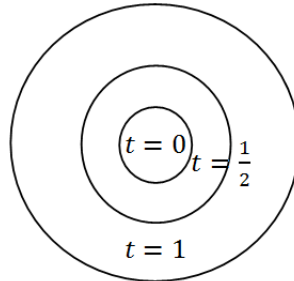
Это непрерывная функция из \mathbb{R} в $M_n(\mathbb{C})$. Здесь $A_0 = D$, $A_1 = A$.

Корни характеристического многочлена матрицы A_t непрерывно зависят от t_0 . При $t = 0$ — это $\lambda_1(0) = a_{11}, \dots, \lambda_n(0) = a_{nn}$, а при $t = 1$ — это собственные числа матрицы A .

По первой теореме Гершгорина $\forall t \lambda \in U$ в объединении кругов Гершгорина с центрами a_{11}, \dots, a_{nn} и радиусами

$$R_i(t) = tR_i.$$

С ростом t круги "раздуваются" из точек (движение по непрерывной кривой).



Если объединение некоторых r кругов Гершгорина не пересекаются с остальными при $t = 1$, то и при $t < 1$ тоже, значит каждое из соответствующих r собственных значений λ_i движется из a_{ii} по непрерывной кривой внутри U . \square

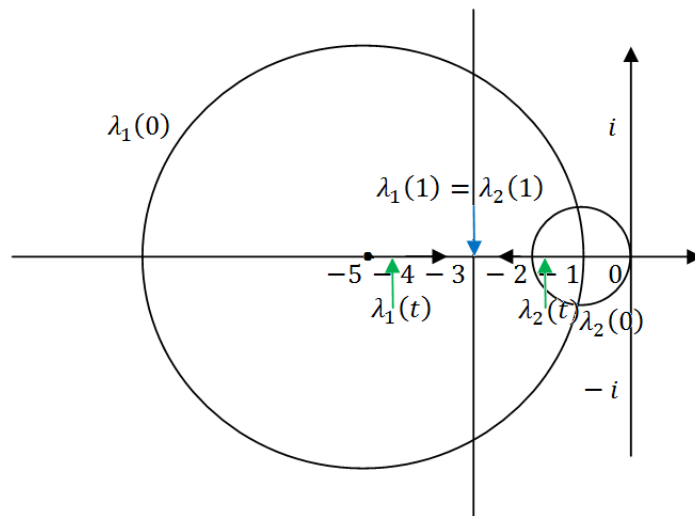
Пример 2.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -4 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2$$

Получили, что $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.



$$A = \begin{pmatrix} -1 & t \\ -4t & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен

$$\chi_{A_t}(\lambda) = |A_t - \lambda E| = \lambda^2 + 6\lambda + 5 + 4t^2$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{1 - t^2}, t < 1$$

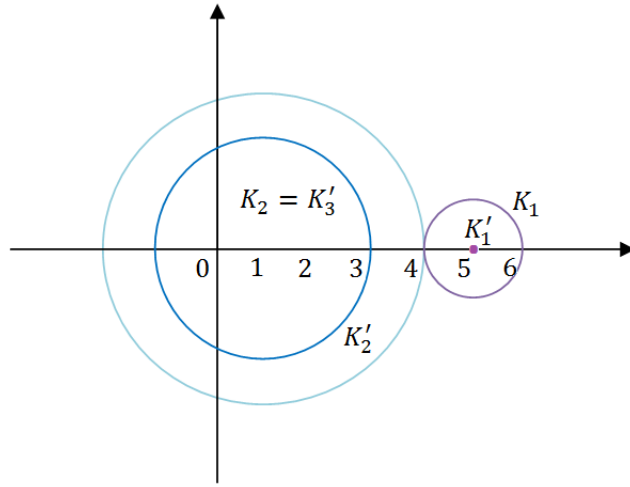
$$\lambda_{1,2} = -3 \pm i \cdot 2\sqrt{1 - t^2}, t > 1$$

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для матрицы A:

$$\begin{aligned} |\lambda - 5| &\leq 1 \\ |\lambda - 1| &\leq 2 - 2 \text{ раза} \end{aligned}$$



В K_1 находится одно собственное значение λ_1 , в K_2 — два λ_2, λ_3 .
Для матрицы A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K'_1: |\lambda - 5| = 0 \Rightarrow \lambda'_1 = 5$$

$$K'_2: |\lambda - 1| \leq 3$$

$$K'_3: |\lambda - 1| \leq 2$$

То есть, $\lambda'_2, \lambda'_3 \in K'_2 = K'_2 \cup K'_3$.

Так как $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3\}$ — те же собственные значения, то $\lambda_1 = \lambda'_1 = 5$.

Значит λ'_2 и λ'_3 — те же, что λ_2 и λ_3 , то есть, $\lambda'_2, \lambda'_3 \in K_2$.

Итог для матрицы A : $\lambda_1 = 5$, а λ_2, λ_3 удовлетворяют условию $|\lambda - 1| \leq 2$.

9.3 Домашнее задание 9

1. Нарисовать круги Гершгорина для матрицы A и с их помощью оценить собственные значения. Вычислить собственные значения и сравнить результаты.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.3 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. С помощью теоремы Гершгорина нарисовать область, где находятся собственные значения матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Доказать, что определитель матрицы A не равен 0 ($\det A \neq 0$). Нарисовать наименьшую область, содержащую собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \cos x & \cos^2 x \\ 0 & 5 & \sin^2 x \\ 3\sin^2 x & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Доказать, что в номерах 1, 2 и 3 все собственные значения — положительные действительные числа и оценить их.

Подсказка: если λ — собственное значение матрицы A , то и $\bar{\lambda}$ — тоже ее собственное значение, так как $\overline{|A - \lambda E|} = |A - \bar{\lambda} E| = 0$.

10 Лекция 10

10.1 Функции от матриц

Пусть A — квадратная матрица ($A \in M_n(\mathbb{C})$)

$$A^m = A \cdot \dots \cdot A, A^0 = E$$

Если A невырожденная, то

$$A^{-m} = (A^{-1})^m$$

Определение. Многочлен от матрицы: если $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, то $f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_mA^m$ — тоже матрица.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

Тогда

$$f(A) = A^2 - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Утверждение. Если C — невырожденная матрица (например, $C = Te \rightarrow e'$ — матрица перехода от базиса e к базису e' в \mathbb{C}^n) и $A' = C^{-1}AC$ (то есть, A' — матрица того же линейного оператора, что и A , в новом базисе e' вместо старого e), то для любого многочлена $f(x)$ верно $f(A') = C^{-1}f(A)C$.

Доказательство. Если $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, то $f(A') = \sum_{i=0}^n a_i A'^i = \sum_{i=0}^n a_i C^{-1}AC \cdot C^{-1}AC \cdot C^{-1} \dots AC =$
 $= \sum_{i=0}^n a_i C^{-1}A^i C = C^{-1}(\sum_{i=0}^n a_i A^i)C = C^{-1}f(A)C$ □

Следствие.

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(A') = 0$$

Если A' — диагональная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$

то

$$f(A') = \sum_{i=0}^n a_i (A')^i = \sum_{i=0}^n a_i \begin{pmatrix} d_1^i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(d_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(d_n) \end{pmatrix}$$

В частности, если все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A различны, то

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad C = (v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n)$$

Причем, v_1 — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1 (то есть, $Av_1 = \lambda_1 v_1$), \dots , v_n — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_n ($Av_n = \lambda_n v_n$), тогда $A = CA'C^{-1}$

$$f(A) = C f(A') C^{-1} = C \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} C^{-1}$$

10.2 Жорданова форма

Определение. *Жорданова клетка* — это матрица вида

$$J = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} C^{-1}$$

Например,

$$J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Например, если $V = P_n = \mathbb{C}[x]_{\leq n} = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\}$, $D : V \rightarrow V : f(x) \mapsto f'(x)$ — дифференцирование. f — собственный вектор для D тогда и только тогда, когда $Df = \lambda f$, то есть $f'(x) = \lambda f(x)$, где λ — число, тогда $f(x) = a_0 = \text{const}$, $f'(x) = 0 \cdot f(x) = 0$.

Определение. *Базис Маклорена:*

$$e_0 = 1, e_1 = \frac{x}{1!}, \dots, e_u = \frac{x^u}{u!}$$

В этом базисе

$$D(e_k) = \left(\frac{x^k}{k!} \right)' = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e_{k-1}$$

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J_n(0)$$

$$J_n(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \frac{1}{k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \frac{1}{k+1} & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \frac{1}{n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(так как $D^k(e_u) = e_{u-k}$ и т.д.)

Предложение. Если $f(x)$ — многочлен, то

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & \ddots & \cdots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Так как $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, то достаточно проверить формулу для $f(x) = x^i$. Тогда в каждой клетке получаем $\sum_{i=0}^n a_i \frac{(x^i)^{(t)}}{t!} = \frac{f^{(t)}(x)}{t!}$ для подходящего t .
Имеем: при $f(x) = x^i$

$$\begin{aligned} f(J_k(\lambda)) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}^i = \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right)^i = \\ &= (\lambda E + J_k(0))^i = \sum_{t=0}^i \lambda^t J_k(0)^{i-t} C_i^t \end{aligned}$$

Ненулевые элементы только в клетках с координатами $(a, a + (i - t))_i$, в этих клетках стоит

$$\lambda^t C_i^t = \frac{\lambda^t i!}{t!(i-t)!},$$

при этом

$$f^{(i-t)}(\lambda) = \frac{i!}{t!} \lambda^t$$

□

Теорема (О Жордановой форме). *Для любого линейного оператора ϕ в \mathbb{C}^n существует базис (жорданов базис), в котором матрица оператора ϕ приобретает вид*

$$\phi_i = J(\phi) = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_T \end{pmatrix},$$

где J_i — жордановы клетки.

Если A — матрица $n \times n$, что

$$\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_i - \lambda)^{k_i},$$

то k_i — кратности собственных значений λ_i .

$$J(A) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & 0 & \lambda_2 & \\ \hline & & & \lambda_3 & 1 & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ & & & 0 & \cdots & \lambda_3 & \\ \hline 0 & 0 & & & & & \ddots \\ & 0 & & 0 & & & \end{array} \right)$$

Следствие. Если $J = J(A)$ — жорданова форма A , C — матрица, в которой по столбцам записан жорданов базис, то

$$f(J) = C^{-1}f(A)C \Leftrightarrow f(A) = Cf(J)C^{-1},$$

где

$$f(J) = \left(\begin{array}{c|c|c} f(J_1) & \dots & 0 \\ \hline \vdots & f(J_2) & \vdots \\ \hline 0 & \dots & \ddots \end{array} \right)$$

Определение. **Аннулирующий многочлен** матрицы A — такой многочлен $f(x)$, что $f(A) = 0$.

Определение. **Минимальный многочлен** матрицы A (обозначается $m_A(x)$) — это аннулирующий многочлен наименьшей возможной степени со старшим коэффициентом 1.

Пример 2.

$\chi_A(\lambda)$ — аннулирующий многочлен для A (по теореме Гамильтона-Кели).

$$\chi_A(A) = C^{-1}\chi_A(J)C = C^{-1}((\lambda_1 E - J)^{k_1} \dots (\lambda_i E - J)^{k_i})C =$$

$$= C^{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \hline 0 & \dots & \dots & \ddots \end{array} \right)^{k_i} \dots C = C^{-1}OC$$

Получим $\chi_A(\lambda) = 0$.

Пусть m_i — порядок наибольшей жордановой клетки с $\lambda = \lambda_i$ (геометрическая кратность собственного значения). Тогда $m_i \leq k_i$ и $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_i)^{m_i}$ — минимальный многочлен матрицы A (он же — минимальный многочлен J).

Как вычислить $f(A)$, зная минимальный многочлен $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$?

Если $f(x) = m_A(x)q(x) + R(x)$ — деление с остатком, где $\deg R(x) < d$ ($d = \deg m_A(x)$ — степень минимального многочлена), то $f(A) = 0 \cdot q(A) + R(A) = R(A)$ — **многочлен Лагранжа-Сильвестра**.

Определение. $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — спектр, R_1, \dots, R_s — соответствующие алгебраические кратности.

$$\begin{array}{ccc} f(\lambda_1) & \dots & f(\lambda_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(k_1-1)}(\lambda_1) & \dots & f^{(k_s-1)}(\lambda_s) \\ k_1 + \dots + k_s = u \end{array}$$

P — многочлен Лагранжа-Сильвестра:

$$\begin{array}{c} P(\lambda_j) = f(\lambda_k) \\ \vdots \\ P^{(k_j-1)}(\lambda_j) = f^{(k_j-1)}(\lambda_j), j = 1, \dots, s \end{array}$$

Определение. Определяющий многочлен

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

многочлены

$$\phi_j = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_j)^{k_j}}$$

Тогда искомым многочлен

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^s (\alpha_{j1} + \alpha_{j2}(\lambda - \lambda_j) + \cdots + \alpha_{jk_j}(\lambda - \lambda_j)^{k_j-1}) \psi_j(\lambda)$$

$$\alpha_{jl} = \frac{1}{(l-1)!} \left(\frac{f(\lambda)}{\psi_j(\lambda)} \right)_{\lambda=\lambda_j}^{(l-1)}, \quad l = 1, \dots, k_j, \quad j = 1, \dots, s$$

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^s (f(\lambda_j) \phi_{j1}(\lambda) + f'(\lambda_j) \phi_{j2}(\lambda) + \cdots + f^{(k_j-1)}(\lambda_j) \phi_{jk_j}(\lambda))$$

Определение. Спектральное разложение:

$$P(A) = \sum_{j=1}^s (f(\lambda_j) z_{j1} + f'(\lambda_j) z_{j2} + \cdots + f^{(k_j-1)}(\lambda_j) z_{jk_j}),$$

где z_{ij} — спектральные компоненты матрицы A .

Определение. Спектральные компоненты зависят только от матрицы.

Утверждение. z_{ij} являются многочленами от матрицы A степени меньшей, чем степень минимального многочлена.

Утверждение. Для любой матрицы A компонентные матрицы (спектральные компоненты) являются линейно независимыми.

Утверждение. Спектральные компоненты z_{ij} коммутируют между собой и с A .

Задача: Написать формулу для A^{-1} в виде многочлена от A .

►

$$\begin{aligned} \det(A) &\neq 0 \text{ (так как существует } A^{-1}) \\ (-1)^n (A^n + C_1 A^{n-1} + C_2 A^{n-2} + \cdots) + \det A \cdot E &= 0 \Rightarrow \\ A((-1)^n (A^{n-1} + C_1 A^{n-2} + \cdots)) &= -\det A \cdot E \\ A \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\det A} (A^{n-1} + C_1 A^{n-2} + \cdots) \right) &= A \cdot A^{-1} = E \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Определение. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$ сходится к матрице F , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall N > N(\varepsilon)$

$$\left\| \sum_{k=0}^N \alpha_k A^k - F \right\| < \varepsilon$$

Определение. Функция f называется **регулярной** на множестве S , если для любого $A \in S$ существует степенной ряд

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$$

Утверждение.

$$T^{-1} f(A) T = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (T^{-1} A^k T)$$

Теорема. f определена на матрице A .

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Найти e^A .

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Собственные значения матрицы: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Тогда жорданова матрица

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$e^J = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^A = T e^J T^{-1}$$

Подставим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e - e^2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

$$f(A) = f(1)z_{11} + f(2)z_{21}$$

$$1. f(\lambda) = \lambda - 2, A - 2E = (-1)z_{11} \Rightarrow$$

$$z_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. f(\lambda) = \lambda - 1, A - E = z_{21} \Rightarrow$$

$$z_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = f(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sin\left(\frac{\pi A}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Утверждение. Если $\|A\| < 1$, то $E - A$ обратима и $(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

Доказательство.

$$(E - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=1}^{\infty} A^k = E$$

Критерий Коши:

$$\left\| \sum_{k=0}^N A^k - (E - A)^{-1} \right\| \leq \left\| \sum_{k=M}^N A^k \right\| \leq \sum_{k=M}^N \|A\|^k,$$

причем последовательность чисел $\|A\|^k = q^k$, $|q| < 1$ является сходящейся.

□

10.3 Домашнее задание 10

1. Дана жорданова форма

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти спектральное разложение для A и вычислить:

- $f(\lambda) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)$
- $f(\lambda) = e^{\lambda t}$
- $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$
- $f(\lambda) = \lambda^{100}$

2. Решить задачу Коши.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1, & x_1|_{t=0} = 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3, & x_2|_{t=0} = 1 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3, & x_3|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

3. Проскуряков "Сборник задач". №1164, 1165, 1167 – 1170.

11 Лекция 11

11.1 Решение систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} x + 0.99y = 1.01 \\ x + 1.01y = 0.99 \end{cases}$$

Надо найти приближительное решение. Все коэффициенты известны с точностью до 1%. Либо $x + y = 1$ — бесконечное множество решений, либо $\begin{cases} x + y = 1.01 \\ x + y = 0.99 \end{cases}$ — нет решений.

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Если считать, что коэффициенты точно известны, то можно найти решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \frac{1}{0.02} \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

При малом изменении коэффициентов (даже на 1%) решение может испортиться.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \text{ — устойчивая система.}$$

Коэффициенты известны с точностью до 1%.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm 2\%$$

Даже если b известен точно, при изменении матрицы все может измениться. Есть два типа ошибок — неточная матрица и неточная правая часть.

Общая постановка задачи.

Найти \bar{x} , удовлетворяющий системе $A\bar{x} = \bar{b}$.

Пусть $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ — решение приближенной системы ($\hat{A}, \hat{x}, \hat{b}$ считаем известными).

Обозначим:

$$\Delta A = \hat{A} - A$$

$$\Delta x = \hat{x} - x$$

$$\Delta b = \hat{b} - b$$

Мы хотим оценить Δx , причем Δb считаем "малыми".

Так как A и b неизвестны, считаем $x \approx \hat{x}$.

Абсолютная погрешность: $|\Delta x|$

Относительная погрешность: $\frac{|\Delta x|}{|x|}$, где $|\cdot|$ — неоторая векторная норма.

Оценивая $|b|_1(|b|_\infty)$ можем оценить $|\Delta x|_1(|\Delta x|_\infty)$.

Упрощенный вариант $\hat{A} = A$

Дано:

$$\begin{cases} Ax = b \\ A(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax = b & (*) \\ A\Delta x = \Delta b & (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = A^{-1}b & (v) \\ \Delta x = A^{-1}\Delta b & (vv) \end{cases}$$

Считаем, что $|x| \approx |\hat{x}|$, $|b| \approx |\hat{b}|$.

Из (*) получим

$$|b| \leq \|A\| |x| \Leftrightarrow |x| \geq \frac{|b|}{\|A\|} \quad (1),$$

а из (**)

$$|\Delta b| \leq \|A\| |\Delta x| \quad (2)$$

Из (v) получим

$$|x| \leq \|A^{-1}\| |b| \quad (3),$$

а из (vv)

$$|\Delta x| \leq \|A^{-1}\| |\Delta b| \quad (4)$$

Тогда относительная погрешность:

$$\begin{aligned} \delta x = \frac{|\Delta x|}{|x|} &\stackrel{(1),(4)}{\leq} \frac{\|A^{-1}\| |\Delta b|}{|b|/\|A\|} = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{|\Delta b|}{|b|} \\ \delta x &\stackrel{(2),(3)}{\geq} \frac{|\Delta b|/\|A\|}{\|A^{-1}\| |b|} = \frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\|} \frac{|\Delta b|}{|b|} \end{aligned}$$

Определение. $\|A\| \|A^{-1}\| = \text{cond}(A) = \chi(A)$ — *число обусловленности*.

Например, для евклидовой нормы

$$\chi_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

В итоге, получим:

$$\frac{1}{\chi(A)} \delta b \leq \delta x \leq \chi(A) \delta b, \quad \delta b = \frac{|\Delta b|}{|b|}$$

А для общей задачи, если $(A + \Delta A)\hat{x} = b + \Delta b$, $\Delta x = \hat{x} - x$ ($\Delta b, \Delta A, \Delta x$ — малые), то

$$\frac{1}{\chi(A)}(\delta b + \delta A) \leq \delta x \leq \chi(A)(\delta b + \delta A), \quad \delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

Пусть у нас норма $|\cdot|_1$, тогда число обусловленности

$$\chi_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \right\|_1 \cdot 50 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = 2 \cdot 50 \cdot 2.01 = 201$$

$$\delta x \leq 201 \delta b$$

Чтобы было $\delta x < 1\%$ надо $\delta b < \frac{1}{201} \cdot 1\%$.

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

У b ошибка в 1%. На сколько изменится x при изменении b ?

Найдем число обусловленности.

$$\chi_{\infty}(A) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \left\| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 3 \cdot 3 = 9$$

$\delta x < 1\%$, если $\delta b < 0.1\%$.

Лемма (Свойства числа обусловленности).

1. $\chi(A) \geq 1$
2. $\chi(AB) \leq \chi(A)\chi(B)$
3. $\chi(A^{-1}) = \chi(A)$
4. Для евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$: если $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ — сингулярные собственные значения, что

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)},$$

$$\sigma_n = \sqrt{\lambda_{\min}(A^*A)},$$

$$\text{тогда } \chi_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1(A) \sigma_1(A^{-1}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Например, если $A = A^*$ — самосопряженная матрица, то

$$\chi_2(A) = \left| \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \right|$$

5. Для любой матричной нормы $\|\cdot\|$, согласованной с некоторой векторной нормой $|\cdot|$

$$\chi(A) \geq \left| \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \right|$$

Доказательство.

1. Неравенство выполнено, так как для любой нормы $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$. Кроме того, существует такая матрица A , что $\chi(A) = 1$ только, если $\|E\| = 1$ — норма сохраняет единицу, так как иначе $\chi(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|E\|$
2. $\chi(A)\chi(B) = \|A\| \|A^{-1}\| \|B\| \|B^{-1}\| \geq \|AB\| \|B^{-1}A^{-1}\| = \|AB\| \|(AB)^{-1}\| = \chi(AB)$
3. Очевидно.
4. Проверка по определению.
5. $\|A\| \geq \rho(A) = |\lambda_{\max}(A)|$
 $\|A^{-1}\| \geq \rho(A^{-1}) = \left| \frac{1}{\lambda_{\min}(A)} \right| \Rightarrow \chi(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}$

Так как λ — собственное значение A , то $\frac{1}{\lambda}$ — собственное значение A^{-1} .

□

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} 0.97 & 1.98 \\ 0.99 & 3.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.01 \\ 3.97 \end{pmatrix}$$

Решить приближенно и оценить погрешность решения.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \hat{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Относительно какой нормы ошибка меньше? ($|\cdot|_1, |\cdot|_\infty, |\cdot|_2$)

$$\chi(A) \approx \chi(\hat{A}) \approx \|\hat{A}\| \|\hat{A}^{-1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\chi_\infty(A) = \max\{3, 4\} \cdot \max\{5, 2\} = 20$$

$$\chi_1(A) = \max\{2, 5\} \cdot \max\{4, 3\} = 20$$

$$\chi_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^*A)}{\lambda_{\min}(A^*A)}}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Собственные значения A^*A : $\lambda_{\max} = 14.93$, $\lambda_{\min} = 0.069$, тогда $\chi_2(A) = \sqrt{\frac{14.93}{0.069}} \approx 15$

$$\Delta b = \hat{b} - b = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.03 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 b = \frac{|\Delta b|_1}{|b|_1} \approx \frac{|\Delta b|_1}{|\hat{b}|_1} = \frac{0.01 + 0.03}{3 + 4} = 0.0057$$

$$\delta_2 b = \frac{\sqrt{0.01^2 + 0.03^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0.0063$$

$$\delta_\infty b = \frac{0.03}{4} = 0.0075$$

$$\delta_1 A = \frac{\|\Delta A\|_1}{\|A\|_1} = \frac{0.04}{5} = 0.008$$

$$\delta_\infty A = \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{0.05}{4} = 0.0125$$

Собственные значения для $\Delta A^* \Delta A$: $\lambda_{\min} = 0.000487$, $\lambda_{\max} = 0.00131$, $\chi_2(\Delta A) =$

$$= \sqrt{\frac{0.00131}{0.000487}} = 1.64, \text{ тогда}$$

$$\delta_2 A = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\sigma_1(\Delta A)}{\sigma_1(A)} = \frac{\sqrt{0.00131}}{\sqrt{14.93}} = 0.009$$

$$\delta_1 x \leq \chi_1(A)(\delta_1 b + \delta_1 A) = 20 \cdot (0.0057 + 0.008) = 0.27$$

$$\delta_2 x \leq \chi_2(A)(\delta_2 b + \delta_2 A) = 15 \cdot (0.0063 + 0.009) = 0.23$$

$$\delta_\infty x \leq \chi_\infty(A)(\delta_\infty b + \delta_\infty A) = 20 \cdot (0.0075 + 0.0125) = 0.4$$

Норма $|\cdot|_2$ дала наименьшее значение ошибки 0.23, а $|\cdot|_\infty$ — наибольшее 0.4.

11.2 Ошибка для обратной матрицы

$A = \hat{A} + \varepsilon$, если знаем \hat{A}^{-1} . Ошибка приближения $A^{-1} \approx \hat{A}^{-1}$?

$$\chi(A) \approx \chi(\hat{A})$$

Надо оценить

$$\begin{aligned}\delta A^{-1} &= \frac{\|(\hat{A} + \varepsilon)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{\|-\hat{A}^{-1}(E - \hat{A}(\hat{A} + \varepsilon)^{-1})\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{\|-\hat{A}^{-1}(E - (E - \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1})\|}{\|A^{-1}\|} \approx \\ &\approx \frac{\|\hat{A}^{-1}(E - (E + \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1})\|}{\|\hat{A}^{-1}\|} \leq \frac{\|\hat{A}^{-1}\|}{\|\hat{A}^{-1}\|} \|E - (E + \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1}\| \\ E - (E - \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1} &= E - (E - Y)^{-1} = E - (E + Y + Y^2 + Y^3 + \dots) = -(Y + Y^2 + \dots) \\ \left\| \sum_{t=1}^{\infty} (\hat{A}^{-1}\varepsilon)^t \right\| &\leq \sum_{t=1}^{\infty} \|\hat{A}^{-1}\|^t \|\varepsilon\|^t = \frac{\|\hat{A}^{-1}\| \|\varepsilon\|}{1 - \|\hat{A}^{-1}\| \|\varepsilon\|} \approx \|\hat{A}^{-1}\| \|\varepsilon\| = \frac{\chi(\hat{A})}{\|\hat{A}\|} \|\varepsilon\| = \chi(\hat{A}) \frac{\|\varepsilon\|}{\|\hat{A}\|}\end{aligned}$$

Более точно

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\chi(\hat{A})\delta\varepsilon}{1 - \chi(\hat{A})\delta\varepsilon}, \quad \delta\varepsilon = \frac{\|\varepsilon\|}{\|\hat{A}\|}$$

Пример 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти $f(A) = A^{100}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} A\right)$.

Минимальный многочлен для матрицы $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$. Тогда для любой функции $f(\lambda)$, определенной на спектре матрицы A спектральное разложение будет иметь вид

$$\begin{aligned}f(A) &= f(1)z_{11} + f'(1)z_{12} + f(2)z_{21} \\ f_1 &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ f_1(A) &= f_1(2)z_{21} \\ A^2 - 2A + E &= (2^2 - 2 \cdot 2 + 1)z_{21}\end{aligned}$$

Получим, что

$$\begin{aligned}z_{21} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f_2 &= \lambda - 2 \\ A - 2E &= (-1)z_{11} + 1 \cdot z_{12} \\ f_3 &= 1 \\ E &= 1 \cdot z_{21} + 1 \cdot z_{11}\end{aligned}$$

Получим, что

$$\begin{aligned}z_{11} &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ z_{12} &\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Для A^{100} : $f(1) = 1^{100}$, $f'(1) = 100 \cdot 1^{99}$, $f(2) = 2^{100}$

Получим

$$A_{100} = 1^{100} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 100 \cdot 1^{99} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} A\right) = \begin{pmatrix} \sin \pi & 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.3 Домашнее задание 11

1. Доказать утверждение из лекции. Если $(A + \Delta A)\hat{x} = b + \Delta b$, $\Delta x = \hat{x} - x$, то

$$\frac{1}{\chi(A)}(\delta b + \delta A) \leq \delta x \leq \chi(A)(\delta b + \delta A),$$

где $\delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ для малых $\Delta b, \Delta A, \Delta x$.

2. Вычислить $\ln A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

Элементы главной диагонали могут меняться на ε_1 , а элементы правой части на ε_2 . Оценить возможное изменение решения для нормы $\|A\| = \max \sqrt{\lambda^* \lambda}$.

4. Решить пример Крылова. ($\sqrt{7}$ берется с разной точностью).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ \sqrt{7}x_1 + 2\sqrt{7}x_2 = 3\sqrt{7} \end{cases}$$

12 Лекция 12

12.1 Итеративные методы решения систем алгебраических уравнений

Дана система уравнений

$$A\bar{x} = \bar{B} \quad (1)$$

Перепишем ее в виде

$$\bar{x} + (A - E)\bar{x} = \bar{B}$$

или

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{b}$$

Тут $P = E - A$, $\bar{b} = \bar{B}$.

Для $c \neq 0$: $cA\bar{x} = c\bar{B} \Rightarrow \bar{x} = (E - cA) + c\bar{B}$, где $P = E - cA$, $\bar{b} = c\bar{B}$.

Если C — матрица, тогда $P = E - CA$, $\bar{b} = C\bar{B}$.

Метод итераций.

Пусть \bar{x}^0 — любой вектор (начальное приближение к \bar{x}), тогда итеративная формула для вычисления $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k$ имеет вид

$$x^{k+1} = Px^k + \bar{b}$$

Если последовательность векторов $\lim\{\bar{x}^i\} = \bar{x}^\infty$ сходится, то

$$x^\infty = Px^\infty + \bar{b}, \quad x = x^\infty,$$

где $x = x^\infty$ — решение системы.

Теорема. *Описанный метод простых итераций сходится, то есть существует $\bar{x}^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \{\bar{x}^i\}$, которое будет решением системы при любом значении x^0 тогда и только тогда, когда спектральный радиус $\rho(P) < 1$.*

Доказательство. Пусть спектральный радиус $\rho(P) < 1$, тогда существуют согласованные матричные $\|\cdot\|$ и векторные $|\cdot|$ нормы, что $\|P\| < 1$.

Предположим, что решение системы существует. Если \bar{x} — решение системы, то

$$\begin{aligned} x^{k+1} - x &= (Px^k + \bar{b}) - (Px + \bar{b}) = P(x^k - x) \\ |x^{k+1} - x| &\leq \|P\| |x^k - x| \quad (2) \end{aligned}$$

Значит $|x^{k+1} - x| \leq \dots \leq \|P\|^{k+1} |x^0 - x| \rightarrow 0$. То есть, если решение \bar{x} существует, то $\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = x$ — решение системы.

Если же решения нет $|\lambda_1| = \rho(P) \geq 1$, то существует $\bar{v} \neq 0$: $Pv = \lambda_1 v$ — собственный вектор, и для $x^0 = v + \bar{x}$ получим

$$x^{k+1} - x = P(x^k - x) = \dots = P^{k+1}(x^0 - x) = P^{k+1}v = \lambda^{k+1}v \nrightarrow 0$$

□

Если $\|P\| < N$, то $|x^k - x| \leq N^k |x^0 - x|$.

Число верных значащих цифр $-c \cdot \log_{10} |x^k - x| = \xi(x^k)$, где c зависит от нормы.

Предложение.

$$-const \cdot \log_{10}(\rho(P)) \leq \xi(x^{k+1}) - \xi(x^k)$$

Для нормы $|\cdot|_\infty$ $const = 1$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\rho(P) &\approx ||P|| \geq \frac{|x^{k+1} - x|}{|x^k - x|} \\ \log_{10}(\rho(P)) &\geq \log_{10}|x^{k+1} - x| - \log_{10}|x^k - x| \\ -\log_{10}(\rho(P)) &\leq \frac{1}{c}(\xi(x^{k+1}) - \xi(x^k))\end{aligned}$$

□

Надо, чтобы спектральный радиус был маленький.

Утверждение.

$$|x - x^k| \leq \frac{|x^{k+1} - x^k|}{1 - ||P||}, \text{ если } ||P|| < 1$$

Доказательство.

$$|x^{k+p} - x^k| \leq |x^{k+p} - x^{k+p-1}| + \dots + |x^{k+1} - x^k| \stackrel{(2)}{\leq} (||P||^p + \dots + ||P|| + 1)|x^{k+1} - x^k| \leq \frac{|x^{k+1} - x^k|}{1 - ||P||}$$

$$|x - x^k| = |x^\infty - x^k| = \lim_{p \rightarrow \infty} |x^{k+p} - x^k| \leq \frac{|x^{k+1} - x^k|}{1 - ||P||}$$

□

Следствие.

$$|x - x^k| \leq \frac{||P||^k}{1 - ||P||} |x^1 - x^0|$$

Следствие.

$$\text{Если } \bar{x}^0 = \bar{b}, \text{ то } |x - x^k| \leq \frac{||P||^{k+1}}{1 - ||P||} |\bar{b}|$$

Доказательство. $x^1 = Px^0 + b$. Если $x^0 = b$, то $x^1 = Pb + b$.

$$|x^1 - x^0| = |Pb| \leq ||P|| |b|$$

□

Пример 1.

Методом итераций решить систему.

$$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 68 \\ 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 = 41 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 = 60 \end{cases}$$

Тогда матрица C будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$CAx = CB, x = Px + b = (E - CA)x + CB$$

То есть,

$$P = E - CA = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = CB = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Посчитаем норму матрицы: $\|P\|_c = 0.9 < 1$, $\|P\|_1 = 0.4 < 1$. Так как ее значения меньше 1, значит процесс итераций будет сходящимся.

Возьмем в качестве первого приближения

$$x^0 = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Подставим это значение в $x^1 = Px^0 + b$, получим

$$x^1 \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Теперь вместо x^0 подставляем x^1 и получаем x^2 , и так далее, пока значение x не будет больше изменяться.

12.2 Метод Зейделя

Этот метод является модификацией метода итераций.

$$x = Px + b$$

Представим матрицу P в виде суммы верхней и нижней треугольных матриц.

$$P = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда итеративная формула вычисления будет иметь вид

$$x^{k+1} = P_1 x^{k+1} + P_2 x^k + b$$

Пример 2.

Сделаем пример 1 с помощью метода Зейделя. В нем мы вычислили

$$P = E - CA = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Представим ее в виде суммы верхней и нижней треугольных матриц.

$$P = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ 0 & 0 & -0.15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут также за нулевое приближение возьмем

$$x^0 = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x'_1 = 0 \cdot x'_1 - (0.15 \cdot 2.05 + 0.05 \cdot 6) + 3.4 = 2.7925$$

$$x'_2 = -0.1x'_1 - 0.15 \cdot 6 + 2.05 = 0.87075$$

$$x'_3 = -0.3x'_1 - 0.1x'_2 - 0 + 6 = 5.075175$$

Приведение к виду, удобному для итераций.

$$Ax = b$$

$$\tau Ax = \tau b$$

$$x = (E - \tau A)x + \tau b$$

Надо найти такое оптимальное τ , что $\min_{\tau} \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} |1 - \tau \lambda|$.

Утверждение. Если все собственные числа матрицы $\lambda_i > 0$, то оптимальное значение $\tau = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$.

Пример 3.

Привести к виду, удобному для итераций.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Собственные значения матрицы $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$. Так как все они положительные, получим:

$$\tau = \frac{2}{10 + 1} = \frac{2}{11}$$

$$E - \tau A = \begin{pmatrix} 1 - 2\tau & -2\tau & 2\tau \\ -2\tau & 1 - 5\tau & 4\tau \\ 2\tau & 4\tau & 1 - 5\tau \end{pmatrix}$$

Тогда $\max\{|1 - 2\tau|, |1 - 3\tau|, |1 + \tau|\}$.

12.3 Домашнее задание 12

1. Доказать утверждение из лекции. Если все собственные числа матрицы $\lambda_i > 0$, то оптимальное значение $\tau = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$.
2. Привести к виду, удобному для итераций.

$$(a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

13 Лекция 13

13.1 Итеративное решение систем линейных уравнений.

$$Ax = b \quad (1)$$

Если матрица A не является симметричной (и положительно определенной), то надо перейти от (1) к нормальной системе

$$A^*Ax = A^*b$$

Метод Крылова.

Для любого оператора существует минимальный многочлен $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \dots + p_1x + p_0$$

Задача: найти коэффициенты $\varphi(x)$

$$(A^m + p_{m-1}A^{m-1} + \dots + p_1A + p_0E)v = 0$$

$L = \langle v_0, Av_0, \dots, A^{m-1}v_0 \rangle$ — зависит от v_0 , причем $v_{m-1} = Av_{m-2}$.

Выразим:

$$A^m v = -p_{m-1}A^{m-1}v - \dots - p_0Ev \quad (2)$$

Замечание: $L(v_0)$ инвариантно относительно линейного оператора A .

Метод: возьмем v_0 и решим (2) относительно m неизвестных p_0, \dots, p_{m-1} .

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

Если матрица приводится к виду

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ & \vdots & \ddots & 1 & & 0 \\ & 0 & \dots & \lambda_1 & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & & & & & \vdots & \ddots & 1 \\ & & 0 & & & 0 & \dots & \lambda_2 \end{array} \right)$$

где кратность λ_1 равна k , а кратность λ_2 равна m , то

$$\chi_J(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^k (\lambda_2 - \lambda)^m$$

Определение. *Циклическая клетка* — это матрица вида

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен у циклической клетки.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{C_2} = \det(C_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & a_0 \\ 1 & a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{C_3} = \det(C_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 a_2 + \lambda a_1 + a_0$$

Тогда для C_n получим

$$\chi_{C_n} = \det(C_n - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_0)$$

Однако не все матрицы можно привести к такому виду.

Определение. Фробениусова форма — это матрица вида

$$F_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Данная матрица получена отражением относительно побочной диагонали.

Как приводить матрицу к фробениусовой форме?

Надо составить базис. Выберем v_0 случайным образом.

$$v_0, Av_0 = v_1, Av_1 = v_2, Av_2 = v_3, \dots$$

Эти векторы v_0, v_1, \dots — базис линейного пространства.

$$v_{n-1} = A^{n-1}v_0, v_n = A^{n-1}v_1 = a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_{n-1}v_{n-1}$$

$$(v_0)_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, (v_1)_v = (Av_0)_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots$$

$$A_v = ((Av_0)_v \mid (Av_1)_v \mid \dots) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A \cdot M_{n-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{a_{n1}}{a_{n,n-1}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{n,n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A_1 = AM_{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$B_1 = M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$M_{n-1}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Интерполяционный метод.

$\chi_A(\lambda)$ — многочлен степени m — вычисляется как интерполяционный многочлен Лагранжа по значениям в $(m+1)$ точке.

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E), \quad \lambda = 0, 1, \dots, m$$

То есть, надо m раз вычислить определитель.

13.2 Метод итераций

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{b}$$

Итеративный шаг: $x^{k+1} = Px^k + \bar{b}$.

Матрица называется симметрической, если $A^T = A$, A — действительная.

A^*A — симметрическая матрица.

Пусть $A^* = A$ — эрмитова матрица (например, симметрическая). Нам неизвестны $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения и соответствующие им собственные векторы X_1, \dots, X_n .

Пусть

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix}$$

Если X_1 — собственный вектор, то и $c \cdot X$ — собственный вектор, то есть X_1 определен с точностью до пропорциональности. Считаем $x_n^1 = 1$.

Получим $A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1$ или

$$\begin{cases} a_{11}x_1^1 + \dots + a_{1n} \cdot 1 = \lambda_1 x_1^1 \\ \dots \\ a_{n-1,1}x_1^1 + \dots + a_{n-1,n} \cdot 1 = \lambda_1 x_{n-1}^1 \\ a_{n1}x_1^1 + \dots + a_{nn} \cdot 1 = \lambda_1 \\ \lambda_1 = a_{n1}x_1^1 + \dots + a_{nn} \\ x_1^1 = \frac{1}{\lambda_1}(a_{11}x_1^1 + \dots + a_{1n}) \\ \dots \\ x_{n-1}^1 = \frac{1}{\lambda_1}(a_{n-1,1}x_1^1 + \dots + a_{n-1,n}) \end{cases}$$

$$\bar{Y} = f(\bar{Y})$$

Итеративный процесс

$$\begin{cases} \lambda_1^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{1(k)} + \dots + a_{nn} \\ x_1^{1(k+1)} = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}}(a_{11}x_1^{1(k)} + \dots + a_{1n}) \\ \dots \\ x_{n-1}^{1(k+1)} = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}}(a_{n-1,1}x_1^{1(k)} + \dots + a_{n-1,n}) \end{cases}$$

Начальное условие $\lambda_1^0 = a_{nn}$, $x_1^0 = \frac{a_{1n}}{a_{nn}}, \dots$.

Для X_2 те же уравнения (аналогичные) и условие $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$.

$$x_1^1 x_1^2 + \dots + x_n^1 x_n^2 = 0$$

Приведение к виду, удобному для итераций.

Приведем систему уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ к виду $A^*Ax = A^*b$.

Для итеративного метода

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{B}$$

$$x = (E - A)x + b$$

Возьмем число τ : $\tau Ax = \tau b$

$$x = (E - \tau A)x + \tau b, \quad P = E - \tau A$$

Собственные значения матрицы P : $\lambda_i(P) = 1 - \tau\lambda_i(A)$.

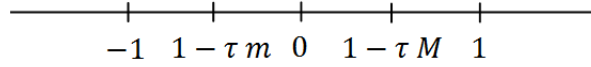
$$\begin{pmatrix} \lambda_1(P) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n(A) \end{pmatrix}$$

Пусть $m \leq |\lambda_i(A)| \leq M$, то есть $M = \varsigma(A) = \rho(A)$, $m = \frac{1}{\varsigma(A^{-1})} = \frac{1}{\rho(A^{-1})}$.

Это верно только для $\lambda_i \geq 0$.

$$\begin{aligned} \max_i |\lambda_i(P)| &\rightarrow \min \\ \max_i |\lambda_i(P)| &\leq \max\{|1 - \tau m|, |1 - \tau M|\} \end{aligned}$$

Какое выбрать τ ?



Лучше взять $\tau < \frac{2}{m+M}$, чем $\tau > \frac{2}{m+M}$. Лучше всего выбрать $\tau = \frac{2}{m+M}$.

Если $\tau = \tau_0 = \frac{2}{m+M}$, то $\rho(P) = \max\{|1 - \tau_0 m|, |1 - \tau_0 M|\} = \max\left\{\left|\frac{M-m}{m+M}\right|, \left|\frac{m-M}{m+M}\right|\right\} = \frac{M-m}{M+m} =$

$\frac{\chi_2 - 1}{\chi_2 + 1}$, где $\chi_2(A) = \frac{M}{m}$ — число обусловленности.

Если нет собственных значений, то можно взять $\tau = \frac{2}{a}$, где $a \geq \|A\| \geq \rho(A)$ (какая-то норма $\|A\| = \|A\|_\infty$

или $\|A\| = \frac{1}{n} \sum_{i,j} |a_{ij}|$).

Пример 1.

Методом итераций найти собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножим на

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(предполагаем, что найдется такой вектор).

$$A\bar{x}_1 = \lambda\bar{x}_1$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 7 = \lambda x_3 = \lambda \\ \lambda^{(k+1)} = 2x_1^{(k)} + 7 \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}}(6x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + 2) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}}(-2x_1^{(k)} + 5x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Через итерации получим

$$\lambda_1 = 9, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем λ_2, v_2 .

Для \bar{x}_2 те же уравнения и $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle = 0$, то есть

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 7x_3 = \lambda x_3 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Так как сумма собственных значений равна следу $= 18$, то из этого выражения, зная λ_1, λ_2 можно найти λ_3 .

13.3 Домашнее задание 13

1. Дорешать Пример 1 с лекции.
2. Методом Крылова найти минимальный характеристический многочлен.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Методом Данилевского найти характеристический многочлен.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Найти собственные значения и собственные векторы методом итераций.

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 6 & -6 \\ 6 & 21 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

14 Лекция 14

14.1 Положительные и неотрицательные матрицы

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, тогда

$$A \geq B \Leftrightarrow a_{ij} \geq b_{ij} \quad \forall i, j$$

$$A > B \Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij} \quad \forall i, j$$

Однако не все матрицы сравнимы.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица называется **неотрицательной**, если $A \geq 0$ тогда и только тогда, когда все $a_{ij} \geq 0$.

Определение. Матрица называется **положительной**, если $A > 0$ тогда и только тогда, когда все $a_{ij} > 0$.

Определение. Матрица смежности $G > 0$, $G \not\leq 0$ — матрица с элементами g_{ij} , причем $g_{ij} = 1$, если есть ребро из вершины i в вершину j и $g_{ij} = 0$ иначе (вместо единицы может также стоять какое-либо число k , равное количеству ребер из вершины i в j или весу ребра).

Теорема (Перрона). Если $A > 0$ матрица положительная, то существует такое $\hat{\lambda}_A > 0$ — собственное значение матрицы A , что $\hat{\lambda}_A > |\lambda|$ для всех остальных собственных значений A и соответствующий собственный вектор \hat{x} положителен

$$A\hat{x} = \hat{\lambda}_A \hat{x}, \quad \hat{x} > 0.$$

В частности,

$$\rho(A) = \hat{\lambda}_A.$$

Следствие. Вектор \hat{x} , соответствующий $\hat{\lambda}_A$ единственный с точностью до пропорциональности. В частности, $\hat{\lambda}$ — простое, кратности один.

14.2 PageRank

Есть конечное число состояний и вероятности перехода из одного состояния в другое. Какова вероятность на каком-то шаге n попасть в состояние i ? (Какова вероятность, что пользователь окажется на нашем сайте?)

$$\bar{x}_n = (p_1 \cdots p_i \cdots p_n)^T$$

$$P = (p_{ij}) : x_n = P^n \cdot x_0$$

Стабильным состоянием системы называется

$$x_{n+1} = Px_n = x_n.$$

При $n \rightarrow \infty$ $\hat{x} = x_\infty$ $Px_n = 1 \cdot x_n$, где собственное значение равно единице. Не все p_{ij} могут быть даны (на каких-то сайтах нет ссылок).

Собственный вектор $(x_1 \cdots x_n)^T$, где x_i — соответствующие вероятности попадет на какую-то страницу. Тогда первой страницей будет выдаваться страница с наибольшим собственным значением и так далее по убыванию.

$$\bar{x} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + \cdots + x_N P^N$$

Вместо P в PageRank можно также смотреть подправленное значение

$$\tilde{P} = P(1 - \beta) + \beta Q$$

Обычно берут $\beta = 0.15$, а

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

где n — количество всех страниц в интернете.

Следствие. Пусть $A \geq 0$ неотрицательная матрица, тогда

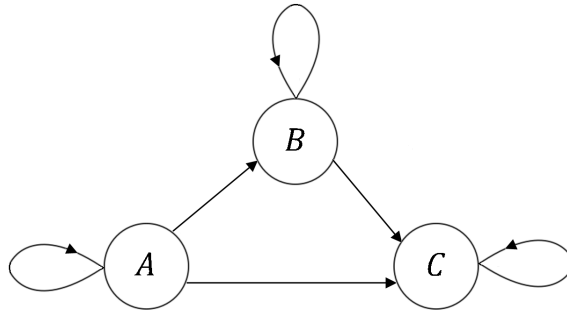
1. Существует собственное значение, равное спектральному радиусу

$$\exists \hat{\lambda}_A = \rho(A) \geq 0$$

2. Собственный вектор $\hat{x}_A \geq 0$ (не обязательно единственный)

Пример 2.

Найти самую влиятельную вершину в графе, сформировать предпочтения.



Составим матрицу по графу:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В начальном состоянии рангии равны:

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.333 \\ 0.333 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим дальше:

$$\bar{x}_1 = P^T \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.111 \\ 0.277 \\ 0.611 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = P^T \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} \\ \frac{19}{108} \\ \frac{85}{108} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.037 \\ 0.175 \\ 0.787 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получили ранги:

$$C = 1, \quad A = B = 0,$$

значит самая влиятельная вершина в графе это C .

Определение. Матрица A называется **неразложимой матрицей**, если одновременно перестановкой строк и столбцов матрицу A нельзя привести к виду

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & R \end{array} \right),$$

где P и R — квадратные матрицы, а O — нулевая матрица.

Теорема (Перрона Фробениуса). Пусть $A \geq 0$ и A — неразложимая матрица, тогда $\hat{\lambda}_A > 0$ и $\hat{x} > 0$ — единственный с точностью до множителя.

14.3 Модель Леонтьева и продуктивные матрицы

Есть несколько отраслей и несколько категорий продукции. Матрица Леонтьева имеет вид:

$o \mid p$	1	2	\dots	n
1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}
\vdots	\vdots	\dots	\ddots	\vdots
m	a_{m1}	\dots	\dots	a_{mn}

$$A\bar{x} + \bar{d} = \bar{x}$$

$A = (a_{ij})$, где a_{ij} — количество продукции j в отрасли i для производства (матрица прямых затрат), d — конечный спрос, а x — выпуск. Продукция отрасли i :

$$x_i = d_i + \sum_j a_{ij}x_j,$$

первое слагаемое означает употребление, а второе — использование для производства.

Определение. Матрица A называется **продуктивной**, если $A \geq 0$ и для некоторого $\bar{x} > \bar{0}$ верно

$$A\bar{x} < \bar{x}.$$

Если $A \geq 0$, $B \geq 0$, то $A - B = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} \geq 0$, $c \geq 0$.

Лемма.

1. Если матрица неотрицательная $A \geq 0$ и $x_1 \geq x_2$, то $Ax_1 \geq Ax_2$.
2. Если матрица A продуктивная, то $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$.
3. Если матрица A — продуктивная и для какого-то \bar{y}

$$\bar{y} \geq A\bar{y},$$

то \bar{y} — неотрицательный вектор.

Доказательство.

1. Надо проверить $Ax_1 - Ax_2 \stackrel{?}{\geq} 0$.

$$A(x_1 - x_2) \geq 0,$$

так как $A \geq 0$ и $x_1 - x_2 \geq 0$.

2. По определению продуктивной матрицы $A\bar{x} < \bar{x}$, тогда существует число $0 < \alpha < 1$, где α — константа сжатия, что:

$$Ax < \alpha x$$

$$0 \leq A^n x < \alpha^n x$$

При $n \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow 0$, тогда получим $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = 0$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, так как x — положительный вектор.

Подробнее: если $A^n = (b_{ij})$, то

$$A^n \bar{x} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj}x_j \end{pmatrix} = \bar{0},$$

где $x_j > 0$, $b_{ij} \geq 0$. Значит все $b_{ij} = 0$, $A^\infty = 0$ по первой части леммы.

3. Будем подставлять y в наше условие много раз:

$$y \geq Ay \geq A^2y \geq \dots \geq A^ny \geq \dots \geq A^\infty y = \bar{0}$$

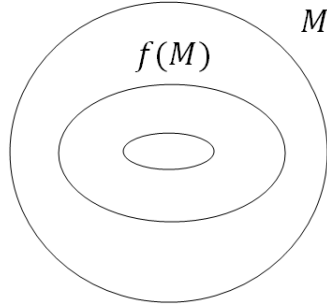
по лемме 2, значит $\bar{y} \geq 0$.

□

Теорема. Пусть M — полное метрическое пространство (например, $M = \mathbf{R}^n$ или $M \subset \mathbf{R}^n$ — замкнутое ограниченное множество), $f : M \rightarrow M$ — сжимающее, то есть существует $0 < \alpha < 1$ такое, что для $\forall x, y \in M$

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y),$$

тогда существует единственная неподвижная точка — такое $z \in M$, что $f(z) = z$.



M отображается в $f(M)$ и так далее. В пределе диаметр стремится к нулю.

Лемма. Если матрица A — продуктивная, то существует $(E - A)^{-1} \geq 0$. (А если $A > 0$, то $(E - A)^{-1}$ положительная матрица.)

Как следствие, если $A \geq 0$ — неразложимая и продуктивная матрица, то $(E - A)^{-1} > 0$.

Доказательство. $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^n + \dots$ — ряд сходится, так как $A^n \rightarrow 0$, тогда $\rho(A) < 1$ и так далее.

$$(E - A)^{-1} \geq E + A \geq A$$

Если $A > 0$, то $(E - A)^{-1} > 0$, а если $A \geq 0$, то $(E - A)^{-1} \geq 0$ □

Теорема. Если A — продуктивная, то для любого $\bar{d} \geq \bar{0}$ система $A\bar{x} + \bar{d} = \bar{x}$ имеет единственное решение \bar{x} , причем $\bar{x} \geq 0$.

Доказательство. Выразим $x - Ax = d$ или $(E - A)\bar{x} = \bar{d}$. Так как матрица A продуктивная из леммы 4 и следствия выше получим $\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{d} \geq 0$ □

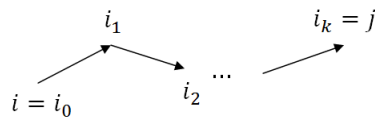
Следствие. Для $d > 0$ система имеет решение $x \geq 0$ тогда и только тогда, когда матрица A продуктивная.

Доказательство. Если $(E - A)\bar{x} = \bar{d}$, $\bar{d} > 0$, то $x = Ax + d > 0$, причем $x > Ax$, а это по определению означает, что матрица A продуктивная. □

Утверждение.

1. Матрица A является неразложимой тогда и только тогда, когда для $\forall i, j, i \neq j$ существует такая последовательность вершин

$$i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_k = j : a_{i_t i_{t+1}} \neq 0, t = 0, \dots, k - 1$$



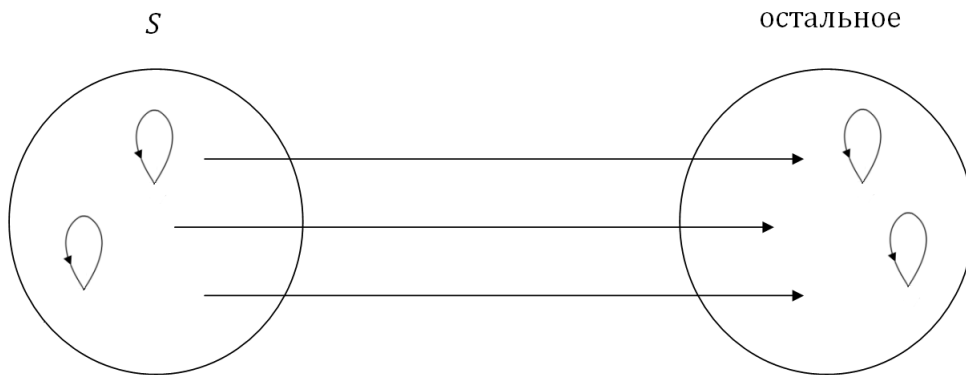
2. Матрица A неразложима тогда и только тогда, когда для любых вершин $\forall i, j$ существует $\exists m < n$, что

$$(A^m)_{ij} \neq 0.$$

3. Неотрицательная матрица $A \geq 0$ неразложима тогда и только, когда $(E + A)^{n-1} > 0$, где n — порядок матрицы.

Доказательство.

1. Матрица A является разложимой тогда и только тогда, когда существует $\exists S = \{i_1, \dots, i_s\} \subsetneq [1, \dots, n]$. Тогда $a_{ij} = 0$ при $j \in S, i \notin S$, где $1 \leq |S| \leq n - 1$.



(Можем перенумеровать индексы.)

Стрелка $i \rightarrow j$ существует тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$.

В разложимой матрице какого-то пути нет, в неразложимой матрице все пути есть.

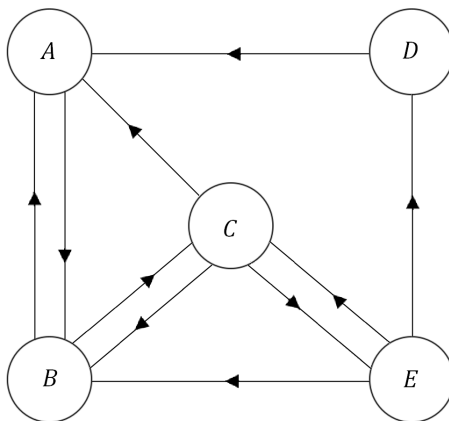
2. a_{ij} равно количеству путей $i \rightarrow j$ длины один, а $(A^m)_{ij}$ равно количеству путей $i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{m-1}$ длины m .

3. Путь длины $n - 1$ $(E + A)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m A^m > 0$, так как в каком-то слагаемом будет ненулевой элемент, то есть получим положительное число.

□

14.4 Домашнее задание 14

1. Найти самую влиятельную вершину в графе.



2. Разложима ли матрица A ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Разложима ли матрица B ? Найти λ и v из теоремы Перрона.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

15 Лекция 15

15.1 Теоремы Перрона

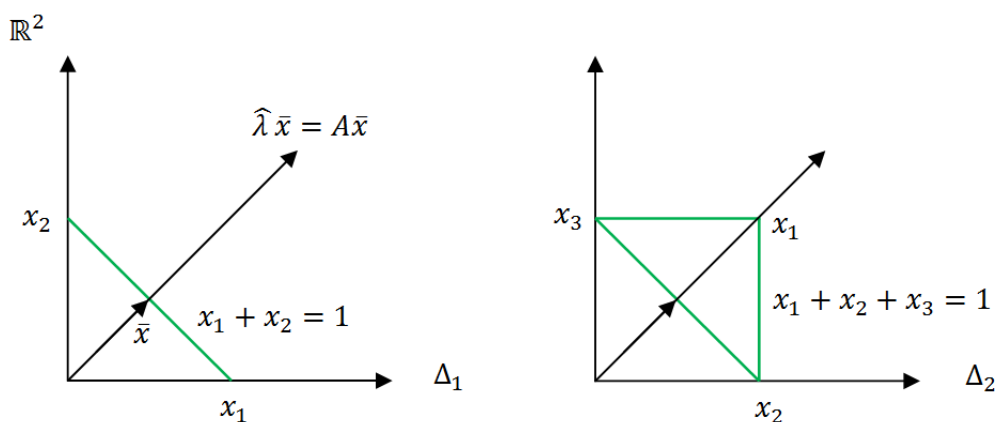
Теорема (О сжимающем отображении). *Существует единственное $\bar{x} \geq 0$: $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$ — неподвижная точка, то есть*

$$\frac{1}{|Ax|_1} Ax = \bar{x}$$

$$Ax = \hat{\lambda}x, \quad \hat{\lambda} = |Ax|_1$$

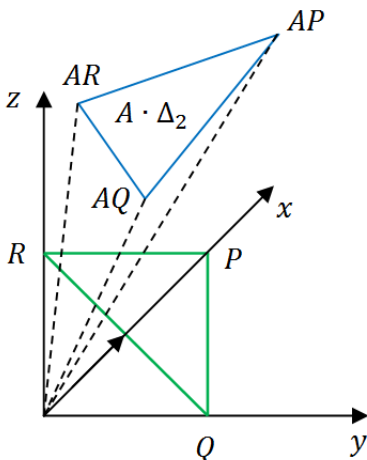
Теорема (Перрона). *Если $A > 0$ (то есть все $a_{ij} > 0$), то у матрицы A существует положительное собственное значение $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_A$: $\hat{\lambda} = \rho(A)$ и $\hat{\lambda} > |\lambda|$ для всех остальных собственных значений λ матрицы A . Этому собственному значению отвечает положительный собственный вектор $\hat{x} > 0$ — единственный с точностью до пропорциональности: в частности $\hat{\lambda}$ — простое, то есть кратности один.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\bar{x} \mapsto A\bar{x} \rightarrow \frac{A\bar{x}}{|A\bar{x}|_1}$.



Рассмотрим на множестве $\Delta = \Delta_{n-1} = \{x_1 \geq \bar{0}, \dots, x_n \geq \bar{0} \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

При отображении $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ множество $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, где $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, переходит в $\mathbb{R}_{> 0}^n$ (с учетом $\bar{0} \mapsto \bar{0}$), так как $\forall 0 \neq \bar{x} \geq 0 \quad A\bar{x} > \bar{0}$, то есть $A\Delta \subset \mathbb{R}^n_{> 0} = \{(x_1 \dots x_n)^T \mid x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$.



Функция $c(x, y) = \frac{\rho(\varphi(x), \varphi(y))}{\rho(x, y)}$ непрерывна на компактном Δ , причем $c(x, y) < 1$. Тогда существует $\varepsilon : \forall x, y \ c(x, y) < \varepsilon < 1$, значит φ — сжимающее отображение (оно сжимает расстояние в $\geq \varepsilon$ раз). Воспользуемся теоремой о сжимающем отображении. Здесь $\hat{\lambda} > 0$ (так как $\bar{x} \in \Delta$, то $\bar{x} \neq \bar{0}$, так что $Ax > 0$, $|Ax|_1$ равен сумме всех координат вектора $A\bar{x}$, а значит > 0).

$$x = \frac{1}{\lambda} Ax > \bar{0}$$

Это единственный положительный собственный вектор (как неподвижная точка). □



$$\|A\|_1 = \max_{|x|_1=1} \frac{|Ax|_1}{|x|_1} \geq \rho(A)$$

$$\bar{x} \rightsquigarrow |\bar{x}| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$$

Тогда $|\bar{x}|_1 = \|\bar{x}\|_1$, $|Ax|_1 \leq |A|\bar{x}|_1$. Значит $\max_{|x|=1} |Ax|_1 = \max_{\bar{x} \in \Delta} |Ax|_1 = \|A\|_1 > \rho(A)$. Оценка $\|A\|_1 \geq \hat{\lambda}$.

Теорема (Перрона-Фробениуса). Если $A \geq 0$ — неразложимая матрица, то

1. $\exists \hat{\lambda}_A \geq 0$, причем $\hat{\lambda}_A = \rho(A)$ — самое большое по модулю собственное значение A
2. при этом соответствующий собственный вектор $\hat{x}_A \geq 0$
3. если при этом $A\bar{y} \geq \mu\bar{y}$ для некоторого $\bar{y} \geq \bar{0}$, $\mu \in \mathbb{R}$, то $\mu \leq \hat{\lambda}_A$
4. в частности, для любого собственного значения λ матрицы A всегда $|\lambda| \leq \hat{\lambda}_A$

Доказательство. Пусть $\forall \bar{x} \geq \bar{0} \ r_x = \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \max\{\rho > 0 \mid \rho x \leq Ax\}$, $\rho \leq \frac{(Ax)_i}{x_i}$.

Тогда пусть $M = S_1 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, где S_1 радиуса один. Найдем $\max_x r_x$. Почему он существует?

1. r_x непрерывна по \bar{x} при $\bar{x} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ (то есть $\bar{x} > 0$).

Но если $y = \frac{x}{|x|}$, то $y \in M$ и $r_x = r_y$, поэтому

$$\max_{x \geq 0} r_x = \max_{\bar{x} \in M} r_y$$

До этого было утверждение о том, что если матрица A — неразложима, то $B = (E + A)^{n-1} > 0$. Пусть $N = B(M) = \{\bar{z} = (E + A)^{n-1}y \mid y \in M\}$, тогда $N \subset \mathbb{R}^n > 0$. Если $y \in M$, то $r_y y \leq Ay$ и для $z = By$

$$r_y B_y \leq AB_y$$

(То есть $AB = BA$). Значит $r_y z \leq Az$

$$r_y \leq \frac{|Az|_i}{|z|_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$r_y \leq r_z$$

Так как

$$\max_{x \geq 0} r_x = \max_{y \in M} r_y \leq \max_{z \in B} r_z \leq \max_{x \geq 0} r_x,$$

значит существует

$$\max_{z \in N} r_z = \max_{x \geq 0} r_x = \max_{y \in M} r_y$$

(так как N — компактно, r непрерывно на $N \subset \mathbb{R}^n > 0$)

Обозначим $r = \hat{\lambda} = \max_{z \in N} r_z$. Так как $u = (1 \cdots 1)^T > 0$, то $r_u - \min_i \frac{|A_i|_1}{1} > 0$ (так как A разложима), то $r > 0$.

2. Докажем, что r — собственное значение, то есть найдем собственный вектор. Пусть

$$r = r_z, z = (E + A)^{n-1}y, (E + A)^{n-1} \in N, y \in M$$

Докажем, что $Az = rz$, то есть $\bar{z} > 0$ — собственный вектор с собственным значением $\hat{\lambda} = r > 0$.

Сначала докажем $A\bar{y} = r\bar{y}$. Иначе $Ay - ry \geq 0$, $B(Ay - ry) > 0$

$$ABy - rBy = Az - rz > 0$$

$$Az > rz \Rightarrow Az > \varepsilon rz, \varepsilon > 1$$

Тогда $\varepsilon r \leq \frac{Az_i}{z_i}$ для всех i . $\varepsilon r \leq r$ — противоречие с $\varepsilon > 1$. Тогда y — собственный вектор

$$Ay = ry.$$

Но тогда и z — собственный вектор, так как

$$BAy = rBy$$

$$ABy = rBy$$

$$Az = rz$$

$z > 0$ — собственный вектор с собственным значением $\hat{\lambda} = r > 0$.

$$(z = (A + E)^{n-1}y = (1 + \hat{\lambda})^{n-1}\bar{y} > 0 \Rightarrow \bar{y} > 0)$$

3. Надо доказать, что если $A\bar{t} \geq \mu\bar{t}$ для некоторого $\bar{t} \geq \bar{0}$, то $\mu \leq \hat{\lambda}$. Можем считать $t \in M$, тогда

$$At \geq \mu t \Rightarrow \mu \leq \frac{(At)_i}{t_i}$$

то есть $At \geq \mu t \Leftrightarrow \mu \leq r_t \leq \max_{t \in M} r_t = r = \hat{\lambda}$.

4. Надо доказать, что если λ — другое собственное значение, то $|\lambda| \leq \hat{\lambda}$. Пусть $A\bar{s} = \lambda\bar{s}$, где $s \neq 0$ — собственный вектор. Можем считать, что $|s|_2 = 1$. При этом если

$$|\bar{s}| = \begin{pmatrix} |s_1| \\ \vdots \\ |s_n| \end{pmatrix}$$

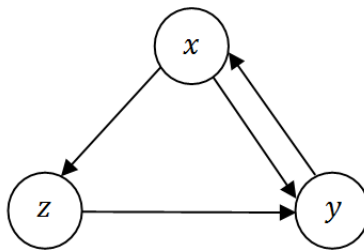
(модуль \bar{s}), то

$$A|\bar{s}| \geq_{A \geq 0} |\bar{A}s| = |\lambda||\bar{s}|$$

Так как $|\bar{s}| \geq 0$ (из 3.), то $|\lambda| \leq \hat{\lambda}$. В частности, $\hat{\lambda} = \rho(A)$

$$\hat{\lambda} = \max_{\substack{x \geq 0, \\ x \in M, \\ x \in \Delta}} \min_{i: x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

Пример 1. Найти ранги.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z)P = (x, y, z)$$

Получим (0.4, 0.4, 0.2).

15.2 Метод вращений (метод Якоби)

Пусть матрица A — симметрическая (матрица A^*A — всегда симметрическая). Хотим построить процесс

$$A_0 = A_1, \dots, A_k \rightarrow \Lambda$$

$$T_0 = E, T_1, \dots, T_k \rightarrow T$$

$$A = T\Lambda T^{-1} = T\Lambda T^T,$$

Λ — диагональная матрица.

Последовательные матрицы перехода

$$A_{k+1} = T_{ij}^T A_k T_{ij},$$

T_{ij} — матрица простых вращений.

$$T_{k+1} = T_k T_{ij}$$

В матрице A_k находим элемент, лежащий не на диагонали, с максимальным модулем $a_{ij}^{(k)}$.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & O & & \vdots & & O & \\ & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cos \varphi & \cdots & \cdots & \cdots & -\sin \varphi & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & O & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & O & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \sin \varphi & \cdots & \cdots & \cdots & \cos \varphi & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\ & O & & \vdots & & O & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $\cos \varphi$ и $-\sin \varphi$ стоят в i строке, а $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в j строке.

Угол выбираем так, чтобы

$$a_{ij}^{(k+1)} = (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) a_{ij}^{(k)} + \cos \varphi \cdot \sin \varphi (a_{ij}^{(k)} - a_{ii}^{(k)})$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}$$

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}$$

Знак $\sin \varphi$ равен знаку $a_{ij}^{(k)}(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)})$.

Пример 2.

Найти собственные значения матрицы A методом вращений.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}} = \frac{2 \cdot (-4)}{14 - 14} = -\infty$$

$$2\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Подставим значения в матрицу T_{23} .

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A_{k+1} = T_{23}^T A T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 18 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$T_{13} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot (-\frac{4}{\sqrt{2}})}{17 - 10} = -\frac{8}{7\sqrt{2}}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64}{49 \cdot 2}}} = \frac{7}{9}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \varphi = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Подставим значения в матрицу T_{13} .

$$T_{13} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = T_{13}^T A_1 T_{13} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 18 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Получили собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = 9$.

Найдем соответствующие собственные векторы.

$$T_1 = T_0 T_{23} = E T_{23}, T_2 = T_1 T_{13}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Каждый из столбцов матрицы T_2 является собственным вектором λ_1 , λ_2 и λ_3 соответственно.

15.3 Домашнее задание 15

1. Найти собственные векторы и собственные значения методом вращений (методом Якоби).

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2-i & 0 \\ 2+i & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

матрица удовлетворяет условию $A^* = A$, что гарантирует, что у нее есть диагональная форма.

16 Лекция 16

16.1 Алгебраические зависимости в системах экономических показателей

Постановка задачи.

Пусть x_1, \dots, x_n — первичные показатели, а y_1, \dots, y_m — расчетные (производные) показатели, $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$.

Надо описать функциональные зависимости между показателями y_1, \dots, y_m , то есть все такие функции $\phi(z_1, \dots, z_m)$, что

$$\phi(y_1, \dots, y_m) = 0$$

Предположение:

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{p_i(x_1, \dots, x_n)}{q_i(x_1, \dots, x_n)} -$$

дробно-рациональная функция, где p_i, q_i — многочлены от n переменных.

Тогда можно считать функции ϕ многочленами от m переменных.

Решение: для линейных многочленов p_i, q_i — Клейнер.

Пример 1.

Для некоторого предприятия:

x_1 — размер выручки предприятия от реализации продукции

x_2 — издержки производства

x_3 — размер капитала

x_4 — численность занятых на предприятии

Расчетные показатели:

$$y_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_2} - \text{рентабельность производства}$$

$$y_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_3} - \text{рентабельность капитала}$$

$$y_3 = \frac{x_1}{x_3} - \text{средняя производительность капитала}$$

$$y_4 = \frac{x_1}{x_4} - \text{средняя производительность труда}$$

Решение по методу Клейнер: существует функциональная зависимость

$$y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2 = 0$$

Любая другая полиномиальная зависимость имеет вид

$$\phi(y_1, y_2, y_3)(y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2) = 0$$

Пример 2.

Сравнительный анализ производительности труда на двух предприятиях.

Первичные показатели:

x_1 — доход первого предприятия

x_2 — численность занятых на первом предприятии

x_3 — доход второго предприятия

x_4 — численность занятых на втором предприятии

Расчетные показатели:

$$y_1 = x_3 \frac{x_2}{x_1} - x_4 - \text{экономия затрат труда на втором предприятии по сравнению с первым}$$

$y_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2}$ — прирост (уменьшение) дохода, приходящийся на одногодополнительного занятого (высвобожденного) работника на втором предприятии по сравнению с первым

$y_3 = x_3 \frac{x_2}{x_4} - x_1$ — часть прироста (уменьшения) дохода второго предприятия по сравнению с первым, обусловленная различием в их производительности труда

$y_4 = \frac{x_3}{x_4} - \frac{x_1}{x_2}$ — прирост производительности труда на втором предприятии по сравнению с первым

$y_5 = \left(\frac{x_3}{x_4} / \left(\frac{x_2}{x_1} - 1 \right) \right) \cdot 100$ — относительное (процентное) изменение производительности труда на втором предприятии по сравнению с первым

Пример 3.

Анализ эффективности использования основных факторов производства.

Первичные показатели:

x_1 — размер капитала предприятия

x_2 — численность занятых на предприятии

Расчетные показатели:

y_1 — рентабельность затрат на производство

y_2 — рентабельность капитала

y_3 — рентабельность труда

Выпуск и издержки предприятия описываются двумя производственными функциями от размеров труда и капитала:

$$z = f(x_1, x_2), u = g(x_1, x_2),$$

где

$$f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 -$$

квадратичная функция с коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_{22}

$$g = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 -$$

линейная функция с коэффициентами b_0, b_1, b_2 .

Расчетные формулы:

$$y_1 = \frac{f - g}{g} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_0}$$

$$y_2 = \frac{f - g}{x_1} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_1}$$

$$y_3 = \frac{f - g}{x_2} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_2}$$

16.2 Описание алгоритма. Базис Гребнера

Пусть $y_1 = \frac{f_1}{g_1}, y_2 = \frac{f_2}{g_2}, \dots, y_m = \frac{f_m}{g_m}$, где f_i, g_i — многочлены от переменных x_1, \dots, x_n , причем

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m \neq 0$$

Введем новые многочлены от $n + m + 1$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m, u$:

$$h_1 = g_1z_1 - f_1$$

$$h_2 = g_2 z_2 - f_2$$

...

$$h_m = g_m z_m - f_m$$

$$h_{m+1} = g \cdot u - 1$$

Отметим, что $h_j(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, g^{-1}) = 0$ для $j = 1, \dots, m+1$.

Пусть $I = \{\sum_j c_j h_j\}$ (где c_j — многочлены от $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m, u$) — полиномиальный идеал, порожденный многочленами h_j .

Будем сравнивать мономы от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m, u$ лексикографически так, что

$$u > x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 > z_m > z_{m-1} > \dots > z_1$$

Например, старший член многочлена $f = 4x_2 x_1 + 3z_1 x_2 + 2u$ есть $\hat{f} = 2u$.

Определение. Базисом Гребнера идеала I называется такое множество $G = \{q_1, q_2, \dots\}$ элементов I , что старший член \hat{f} любого элемента $f \in I$ делится на один из старших членов $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots$ элементов G .

Базис Гребнера G **редуцированный**, если ни один из \hat{q}_i не делится на остальные.

Утверждение. Пусть $G = \{q_1, q_2, \dots\}$ — редуцированный базис Гребнера I , и пусть среди его элементов только q_1, \dots, q_k зависят от переменных z_1, z_2, \dots, z_m . Тогда минимальный набор тождеств для y_1, y_2, \dots, y_m :

$$q_1(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

...

$$q_k(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

Если же таких множеств в G нет, то показатели y_1, y_2, \dots, y_m — независимы.

В этом случае любое другое полиномиальное соотношение имеет вид

$$c_1 q_1(y_1, y_2, \dots, y_m) + \dots + c_k q_k(y_1, y_2, \dots, y_m),$$

где c_i — многочлены от переменных y_1, y_2, \dots, y_m .

Пример 3 с частными значениями коэффициентов.

Пусть

$$f = 2 + x_1 + x_2 + 3x_1 x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2,$$

$$g = 1 + x_2 + x_1$$

Тогда

$$y_1 = \frac{f - g}{g} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1 x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_1 + x_1 + 1}$$

$$y_2 = \frac{f - g}{x_1} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1 x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_1}$$

$$y_3 = \frac{f - g}{x_2} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1 x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_2}$$

Последовательность расчетов: выписываем h_1, \dots, h_4 , потом строим редуцированный базис Гребнера идеала I и получаем $G = \{q_1, \dots, q_{17}\}$, где

$$q_{17} = z_2^2 z_3^2 z_1 - z_2 z_3^2 z_1^2 - z_2^2 z_3 z_1^2 + 2z_2^2 z_3 z_1 - 5z_2 z_3 z_1^2 - 6z_2^2 z_1^2 + 2z_2 z_3^2 z_1 - z_2^2 z_3^2 - 5z_3^2 z_1^2$$

Можно выразить любой из z_1, z_2, z_3 через остальные...

Пример 3 в почти общем виде.

Пусть $a_{11} = a_{22} = 0$. Тогда

$$f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{f_1}{g_1} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_0} \\ y_2 &= \frac{f_2}{g_2} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_1} \\ y_3 &= \frac{f_3}{g_3} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} h_1 &= z_1g_1 - f_1 = z_1(b_1x_1 + b_2x_2 + b_0) - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0) \\ h_2 &= z_2g_2 - f_2 = z_2x_1 - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0) \\ h_3 &= z_3g_3 - f_3 = z_3x_2 - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0) \\ h_4 &= g \cdot u - 1 = u \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 - 1 = u(b_1x_1 + b_2x_2 + b_0)x_1x_2 - 1 \end{aligned}$$

Строим базис Гребнера с коэффициентами в поле $F = \mathbb{R}(a_0, a_1, a_2, a_{12}, b_0, b_1, b_2)$:

$G = \{q_1, \dots, q_{16}\}$, причем

$$\begin{aligned} q_{16} &= (-b_2^2a_0 + b_2b_0a_2)z_2^2z_1^2 - b_2b_0z_3z_2^2z_1^2 + (-a_0 + b_0)z_3^2z_2^2 + (-2b_2b_1a_0 + b_1b_0a_2 + b_2b_0a_1 - \\ &\quad - a_{12}b_0^2)z_3z_2z_1^2 - b_0b_1z_3^2z_2z_1^2 + (-b_2b_0 + 2b_2a_0 - b_0a_2)z_3z_2^2z_1 + (-b_0b_1 + 2b_1a_0 - b_0a_1)z_3^2z_2z_1 + \\ &\quad + (-a_0b_1^2 + b_0a_1b_1)z_3^2z_1^2 + b_0z_3^2z_2^2z_1 \end{aligned}$$

Пример 2, решение (продолжение).

$$y_1 = \frac{x_3x_2 - x_4x_1}{x_1}$$

$$y_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2}$$

$$y_3 = \frac{x_3x_2 - x_4x_1}{x_4}$$

$$y_4 = \frac{x_3x_2 - x_1x_4}{x_2x_4}$$

$$y_5 = 100 \frac{x_3x_2}{x_4x_1 - 1}$$

Упрощение:

$$y'_1 = \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_4}{x_1}$$

$$y'_2 = y_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2}$$

$$y'_3 = y_3 = \frac{x_3x_2 - x_4x_1}{x_4}$$

$$y'_4 = \frac{y_3}{y_4} = x_2$$

$$y'_5 = 100 \frac{y_3}{y_4y_5} = \frac{x_1x_4 - 1}{x_3}$$

Тогда

$$q_{25} = -z_1 + z_4^2 + z_1^2 z_4 z_2^2 z_5 - z_1^2 z_2 z_3 z_5 + z_4 z_5 - z_1 z_3 z_5 - z_1 z_4^2 z_2^2 z_5^2 + 4z_1 z_4^2 z_2 - 2z_4 z_1 z_3 + \\ + 4z_4 z_5 z_2 z_1 - 2z_4^3 z_2^2 z_5 z_1 - 2z_1^2 z_2 z_3 z_4 + z_1^2 z_3 z_4^2 z_2^2 z_5 + z_1^2 z_2^2 z_5^2 z_3 z_4 - z_3^2 z_2 z_4 z_5 z_1^2 + z_3^2 z_1^2 + \\ + z_3 z_5^2 z_2 z_4 z_1 + z_4^2 z_3 z_5 z_2 z_1 - z_1 z_2^2 z_4^2 + z_1^2 z_4^2 z_2^2$$

Для исходных переменных y_1, \dots, y_5 :

$$0 = -y_1 y_4^4 y_5^2 + y_3^3 y_4^2 y_5^2 + 100 y_1^2 y_2^2 y_3 y_4^2 y_5 - 100 y_1^2 y_2 y_3 y_4^3 y_5 + 100 y_4^3 y_3^2 y_5 - 100 y_1 y_3^2 y_4^3 y_5 - \\ - 10000 y_1 y_4^4 y_5^2 + 4 y_1 y_3^2 y_2 y_4^2 y_5^2 - 2 y_1 y_3^2 y_4^3 y_5^2 + 400 y_1 y_3^2 y_2 y_4^2 y_5 - 200 y_1 y_4^4 y_2^2 y_5 - 2 y_1^2 y_2 y_3 y_4^3 y_5^2 + \\ + 100 y_1^2 y_4^3 y_2^2 y_3 y_5 + 10000 y_1^2 y_4^3 y_2^2 y_3 - 100 y_4^3 y_2 y_1^2 y_4^2 y_5 + y_1^2 y_3 y_4^4 y_5^2 + 10000 y_4^4 y_2 y_1 y_3 + \\ + 100 y_4^3 y_2 y_1 y_4 y_5 - y_1 y_4^4 y_2^2 y_5^2 + y_1^2 y_2^2 y_3 y_4^2 y_5^2$$

Пример 4.

$$p_1 = xy^2 - y^3 + 1, \quad p_2 = x^2 y + 2xy - 1$$

Надо построить базис Гребнера $G = \{p_1, p_2\}$.

Выберем лексикографический порядок, пусть $lex(y > x)$, то

$$y^3 > xy^2 > x^2 y > xy > 1$$

Пусть $p'_1 = y^3 - xy^2 - 1$.

$$p_1 = LT(p_1) + \dots, \quad p_2 = LT(p_2) + \dots$$

$$L = lcm(LT(p_1), LT(p_2))$$

$$m_1 = \frac{L}{LT(p_1)}, \quad m_2 = \frac{L}{LT(p_2)}$$

(lcm — НОК)

Тогда **S-полином** равен $S(p_1, p_2) = m_1 p_1 - m_2 p_2$.

У нас

$$L = lcm(y^3, x^2 y) = x^2 y^3$$

$$S_1 = S(p_1, p_2) = x^2(y^3 - xy^2 - 1) - y^2(x^2 y + 2xy - 1) = -x^3 y^2 - x^2 - 2xy^3 + y^2$$

Разделим S_1 на p'_1 , получим

$$R(S_1) = S'_1 = S_1 - 2xp'_1 = x^3 y^2 - 2x^2 y^2 + y^2 - x^2 - 2x$$

Разделим S'_1 на p_2 , получим

$$R(S'_1) = S''_1 = S'_1 - xyp_2 = y^2 + xy - x^2 - 2x$$

И так далее.

16.3 Домашнее задание 16

1. Решить с помощью базисов Грёбнера систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y + x^2 z - 2xz = 0 \\ x^2 + 2yz - 3 = 0 \\ x^4 - y^2 z^2 = 0 \end{cases}$$

2. Найти базис Грёбнера

$$\begin{cases} f_1 = x^3 y + 2xy^3 - 3x^2 y^2 \\ f_2 = xy^2 - 2y^2 + x - 1 \\ f_3 = x^4 \end{cases}$$

и решить систему уравнений $f_1 = f_2 = f_3 = 0$.

17 Лекция 17

17.1 Линейная Алгебра в теории кодирования

18 Лекция 18

18.1 Задача линейного программирования

Пусть

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Нужно максимизировать линейную функцию

$$f(\bar{x}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

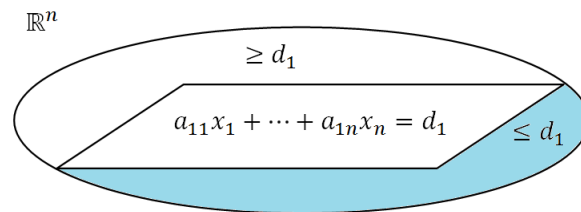
при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq d_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq d_m \end{cases}$$

$$A\bar{x} \leq \bar{d}$$

$$x_i \geq 0 \Leftrightarrow -x_i \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq d \text{ и } x_1 + x_2 \geq d \Leftrightarrow -x_1 - x_2 \leq -d \Leftrightarrow x_1 + x_2 = d$$



Вариант:

$$\begin{cases} f(\bar{x}) = \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle \rightarrow \min \\ A\bar{x} \leq \bar{d} \in \mathbb{R}^m \\ \bar{x} \geq \bar{0} \quad (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0) \end{cases}$$

Задача о диете.

Дано несколько продуктов E_1, \dots, E_n (еда) и информация о них, например, У – углеводы, Б – белки, К – калории. Также дана цена каждого продукта (\$).

	У	Б	К	Цена \$
E_1		\bar{a}_1		
\vdots		\dots		
E_n		\bar{a}_n		

Пусть $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ – количество употребленных единиц пищи каждого типа.

Ограничения:

$$\langle \bar{a}_i, \bar{y} \rangle \geq c_i, \quad i = 1, \dots, m$$

или

$$\begin{cases} A\bar{y} \geq \bar{c} \\ \bar{y} \geq \bar{0} \end{cases}$$

Вектор цен: $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$ – цены на y_1, \dots, y_n .

Матрица A имеет размер $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix}$$

Функция $f(\bar{y}) = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle$.

Общая постановка:

$$\begin{cases} A\bar{y} \geq \bar{c} \\ \bar{y} \geq \bar{0} \\ f(\bar{y}) = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle \rightarrow \min \end{cases}$$

Всего $\approx C_m^n$ вершин, то есть меньше $\frac{m^{m-n}}{n!}$.

Пример 1.

	Б	Ж	У	Цена
Мясо	60	30	10	100
Торт	10	40	50	150
Норма c_i	30	30	40	

$\bar{a}_1 = (60, 10)$ – белки

$\bar{a}_2 = (30, 40)$ – жиры

$\bar{a}_3 = (10, 50)$ – углеводы

$$A\bar{y} \geq \bar{c}$$

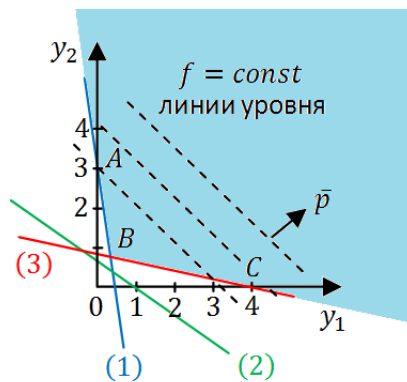
$$\begin{pmatrix} 60 & 10 \\ 30 & 40 \\ 10 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{y}) = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = \bar{p}^T \bar{y} = 100y_1 + 150y_2 \rightarrow \min$$

$$60y_1 + 10y_2 \geq 30 \quad (1)$$

$$30y_1 + 40y_2 \geq 30 \quad (2)$$

$$10y_1 + 50y_2 \geq 40 \quad (3)$$



Надо найти в какой вершине будет достигаться минимум функции $f(\bar{y})$. Посмотрим значения в точках A , B и C .

$$f(A) = 100 \cdot 0 + 3 \cdot 150 = 450$$

$$f(C) = 100 \cdot 4 + 150 \cdot 0 = 400$$

$$f(B) = 100y_1 + 150y_2$$

Найдем пересечение (1) и (3):

$$\begin{cases} 60y_1 + 10y_2 = 30 \\ 10y_1 + 50y_2 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y_1 + y_2 = 3 \\ 6y_1 + 30y_2 = 24 \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{21}{29}, \quad y_1 = 4 - \frac{5 \cdot 21}{29} = \frac{11}{29}$$

Получим

$$f(B) = 100 \cdot \frac{11}{29} + 150 \cdot \frac{21}{29} = \frac{4250}{29} \approx 147$$

Таким образом, наименьшее значение $f(\bar{y})$ достигается в точке B и принимает значение 147.

18.2 Линейная производственная модель

Пусть \bar{x} – выпуск m видов продукции

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

цены на эти виды продукции

$$\bar{c} = (c_1, \dots, c_m),$$

а доход

$$\bar{y} = c_1x_1 + \dots + c_mx_m = \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle \rightarrow \max$$

Имеются ресурсы $1, \dots, n$ и указаны ограничения на них (запасы)

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

a_{ij} – число единиц j ресурса для производства единицы i типа продукции. Для производства x_i надо $x_i a_{i1}$ ресурса 1, \dots , $x_i a_{ij}$ ресурса j , \dots , $x_i a_{in}$ ресурса n .

Всего потратим ресурса j :

$$x_1 a_{1j} + \dots + x_n a_{nj} = \bar{x}^T A^j \leq d_j$$

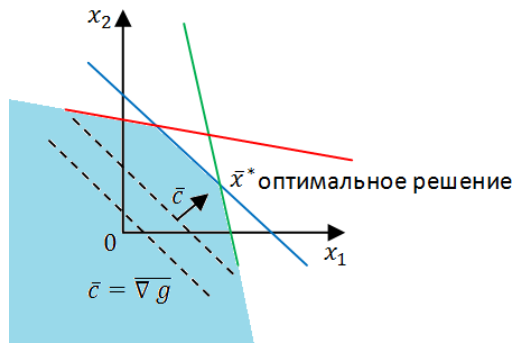
ограничения:

$$\bar{x}^T A \leq \bar{d}^T$$

Прямая задача:

$$\begin{cases} \bar{x}^T A \leq \bar{d} & \Leftrightarrow & A^T \bar{x} \leq \bar{d} \\ \bar{x} \geq 0 \\ g(\bar{x}) = \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle = c_1x_1 + \dots + c_mx_m \rightarrow \max \end{cases}$$

Пусть $\bar{x}^* \in \mathbb{R}^m$ – оптимальное решение, такое что $g_{\max} = \langle \bar{c}, \bar{x}^* \rangle$.



Двойственная задача линейного программирования.

Дано:

$$\begin{cases} A\bar{y} \geq 0, \bar{c} \in \mathbb{R}^m, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, A_{m \times n} \\ \bar{y} \geq 0 \\ f(\bar{y}) = \langle \bar{d}, \bar{y} \rangle \rightarrow \min \end{cases}$$

Тогда y^* – решение, то есть $f(y^*) = \langle d, y^* \rangle = f_{\min}$.

Теорема (Основная двойственности).

1. Если \bar{x} – допустимый для прямой задачи, а \bar{y} – допустимый для двойственной задачи, то

$$g(x) \leq f(y), \quad \langle c, x \rangle \leq \langle d, y \rangle$$

2. Если x^*, y^* – решения прямой и двойственной задач, то $f(y) = g(x)$, то есть

$$\langle c, x^* \rangle = \langle d, y^* \rangle = f_{\min} = g_{\max}$$

Доказательство.

1.

$$\begin{cases} x^T A \leq d^T \\ Ay \geq c \end{cases}$$

$$\langle c, x \rangle = x^T c \leq x^T Ay \leq d^T y = f(y) = \langle d, y \rangle$$

2. Так как значения оптимальны, то вместо неравенств в доказательстве пункта 1 теоремы везде будут стоять равенства, потому что $\langle x^T A, y^* \rangle = \langle d^T, y^* \rangle$, либо они несущественны и равны 0. Значит $\langle c, x^* \rangle = \langle d, y^* \rangle$

□