Прикладные проблемы линейной алгебры

Лекция 1

Псевдообратная матрица.

Пусть имеется СЛУ

$$Ax = b$$

Тогда если $\exists A^{-1}$, то $x = A^{-1}b$.

Так как часто матрица является вырожденной или неквадратной, появляется необходимость ввести обобщение обратной матрицы.

Псевдообратная матрица A^+ позволяет найти решение через явную формулу $x = A^+b$ для любой матрицы A, если оно существует. Если решения нет, то $x = A^+b$ будет наилучшим приближенным решением по евклидовой метрике, то есть, расстояние между Ax и b будет минимальным.

Определение.

$C = A^+$ (где $C_{n\times m}$, $A_{m\times n}$) — **псевдообратная матрица Мура-Пенроуза** для матрицы A, если:

1. $ACA = A$
2. $CAC = C$
3. $(AC)^* = AC = C^*A^*$
4. $(CA)^* = CA$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-i \\ 2i & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-i & -2i \\ 3+i & 5 \end{pmatrix}$$

Если $detA \neq 0$, то подходит $C = A^{-1}$.

Теорема 1. Если такая матрица C существует, то она единственная.

▶ Пусть B, C — две матрицы, удовлетворяющие свойствам 1 - 4.

$$AB \overset{1}{=} \underbrace{ACA}_{A} B = (AC)(AB) \overset{3}{=} (AC)^*(AB)^* = C^*A^*B^*A^* =$$

$$= C^*(ABA)^* \overset{1}{=} C^*A^* = (AC)^* \overset{3}{=} AC$$

Аналогично выводится $BA = CA$. Тогда

$$B \overset{2}{=} BAB = \underbrace{BA}_{CA} B = C \underbrace{AB}_{AC} = CAC \overset{2}{=} C$$

Значит, $B = C$, то есть, псевдообратная матрица единственна. ■

Пример 1.
Найти псевдообратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AA = A \Rightarrow A = A^+ \\ A^* = A \end{cases}$$

Мы доказали единственность, значит другая матрица не подойдет.

$O^+_{m\times n} = O_{n\times m}$

$$A_{m\times n} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} X_{r\times r} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{array}, \ A^+_{n\times m} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & m \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} X^+_{r\times r} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример 2.
Найти A^+.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$A^+ = (b_1 \cdots b_n),\ b_1, ..., b_n$ - ?

Из свойств получим:

$$A^+A =< A^+, A >= C \in \mathbb{R}$$
$$CA^+ = A^+ \Rightarrow C = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$< A, B >= A^*B = \bar{a}_1 b_1 + ... + \bar{a}_n b_n$$
$$A^+ = \frac{1}{< A, A >} A^+ = \frac{(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n)}{|a_1|^2 + ... + |a_n|^2}$$
$$A^+ A = \frac{A^* A}{< A, A >} = 1$$
$$\begin{cases} A^+ = \frac{1}{\lambda} A^* \\ A^+ A = 1 = C \end{cases}$$
$$A^+ A = \frac{1}{\lambda} A^* A = \frac{1}{\lambda} < A, A >= 1$$
$$\lambda = A^* A =< A, A >= |A|^2$$

Другие свойства псевдообратной матрицы:

5. $(A^+)^+ = A$ (проверяется по определению)

6. $(A^*)^+ = (A^+)^*$
   Докажем, например, что $(A^*)^+ = (A^+)^*$, удовлетворяет первому свойству:
   ► $A^*(A^+)^*A^* = (AA^+A)^* = A^*$ ■

7. $rkA^+ = rkA$
   ► $rk(AB) \leqslant min\{rkA, rkB\}$
   Из свойства 1: $rkA \leqslant rkA^+$
   Из свойства 2: $rkA^+ \leqslant rkA$ ■

Теорема 2. Пусть $A_{m \times n}$ — матрица полного столбцового ранга (столбцы линейно независимы), то есть $rkA = n$. Тогда

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$$

Для доказательства существования $(A^*A)^{-1}$ нам потребуется лемма.

Лемма. $rk(A^*A) = rkA$
► Докажем, что $KerA^*A \subset KerA$:

$$x \in KerA \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^*Ax = A^*0 = 0$$

Докажем, что $KerA \subset KerA^*A$:
Пусть $z \in KerA^*A$

$$A^*Az = 0$$

$$z^*A^*Az = 0$$

$$(Az)^*Az = 0$$

$$|\tilde{z_1}|^2 + ... + |\tilde{z_n}|^2 = 0$$

$$\tilde{z} = Az$$

$$\tilde{z_1} = ... = \tilde{z_n} = 0 \Rightarrow Az = 0 \Rightarrow z \in KerA$$

Тогда $\dim(ImA) = n - \dim(KerA) = n - \dim(KerA^*A) = \dim(ImA^*A)$

$$\Rightarrow rkA = rk(A^*A) \quad \blacksquare$$

Тогда если матрица $A_{m\times n}$ имеет ранг n, то $(A^*A)_{n\times n}$ невырожденна.

Доказательство Теоремы 2:

► Проверим свойства определения при $A^+ = (A^*A)^{-1}A$.

1. $AA^+A = A$
   $A^+A = (A^*A)^{-1}A^*A = E$
   $AE = A$

2. $A^+AA^+ = A^+$
   $EA^+ = A^+$

3. $(AA^+)^* = AA^+$
   $(A(A^*A)^{-1}A^*)^* = (A^*)^*((A^*A)^{-1})^*A^* = A((A^*A)^*)^{-1}A^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+$

4. $(A^+A)^* = AA^+$
   $E^* = E \quad \blacksquare$

Теорема 2.1. Пусть B — матрица полного строчного ранга. Тогда

$$B^+ = B^*(BB^*)^{-1}$$

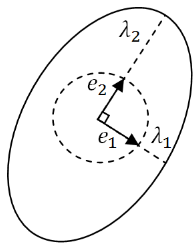
► Так как B^* - матрица полного столбцового ранга, то по Теореме 2,

$$(B^*)^+ = (B^{**}B^*)^{-1}B^{**} = (BB^*)^{-1}B$$

По свойству 6,

$$B^+ = ((B^*)^+)^* = ((BB^*)^{-1}B)^* = B^*(BB^*)^{-1} \quad \blacksquare$$

$$S^* = S \to S' = U^*SU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}$$



Пример 3.
Найти A^+.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(A^*A) = 2 \cdot 3 - (2-1) + (1-2) = 6 - 1 - 1 = 4$$

$$(A^*A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Утверждение. Любую прямоугольную матрицу $A_{m \times n}$ можно представить в виде

$A_{m\times n} = B_{m\times r}C_{r\times n}, r = rkA$, где B — матрица полного столбцового ранга, а C — матрица полного строчного ранга.
Такое разложение называется **скелетным разложением** (разложением полного ранга).

Пример 4.
Найти скелетное разложение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Приведем к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rkA = 2$
Надо найти такие B и C, что $A_{3\times 3} = B_{3\times 2}C_{2\times 3}$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Здесь B — столбцы исходной матрицы, C — канонический вид.

Утверждение. Для скелетного разложения $A^+ = (BC)^+ = C^+B^+$, где $B^+ = (B^*B)^{-1}B^*$, так как столбцевого ранга, а $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$, так как строчного ранга.

(продолжение решения)

$$B^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B^*B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(BB^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, CC^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(CC^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = C^+ B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание 1

1. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^+$$

2. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^+$$

3. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^+$$

4. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^+$$

5. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^+$$

6. Пусть A — матрица размера $m \times n$ с рангом r и пусть
$$K = \left[\begin{array}{c} G \\ \hline 0 \end{array}\right]$$
имеет канонический вид, где G верхняя $r \times n$ подматрица без нулевых строк и 0 означает нулевую подматрицу. Пусть $i_1, \ldots, i_r$ значения столбцов, где находятся

ведущие коэффициенты ступенчатого разложения, и пусть F подматрица A получена из столбцов $i_1, \ldots, i_r$. Докажите, что

$$A = FG$$

и что это разложение полного ранга (скелетное разложение) A.

7. Найти разложение полного ранга (скелетное разложение)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^+$$

9. Пусть E_{ij} матрица размера $n \times n$, такая что ее элементы в i-ой строке и j-ом столбце единицы, а все остальные элементы нули. Найти разложение полного ранга и псевдообратную матрицу.

10. Докажите:

    (a) $Im(AA^+) = Im(AA^*) = ImA$;

    (b) $Ker(AA^+) = Ker(AA^*) = KerA^*$;

    (c) $ImA^+ = ImA^*$;

Лекция 2

Пример 1.
Найти псевдообратную матрицу.

$$A = CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = B^+C^+$$
$$B^+ = B^*(BB^*)^{-1},\ C^+ = (A^*A)^{-1}A^*$$

$$BB^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(BB^*)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^+ = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^*C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(C^*C)^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 15 \end{pmatrix}$$

$$C^+ = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -14 \\ -1 & -2 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = B^+C^+ = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -14 \\ -1 & -2 & -3 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 16 & 24 & -42 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -4 & -8 & -12 & 42 \end{pmatrix}$$

Если $A = FG$ — скелетное разложение, то $A^+ = G^+F^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = XY$ и $X^* = X, Y^* = Y$, $rk(A^*A) = rkA$.

Утверждение. X — решение $AX = B$ тогда и только тогда, когда X — решение $A^*AX = A^*B$.
Если $N = A^*A$, то $N^* = N$ — квадратная самосопряженная матрица.

Пример 2.

1. $Im(AA^*) \stackrel{?}{=} ImA$
   Из доказательства леммы $rk(A^*A) = rkA$ — ранги равны, значит и размерности равны.

$$ImA = \{AX\} \supset \{AA^*Y\} = ImAA^*$$
$$dim(ImA) = dim(ImAA^*)$$

2. $Im(AA^*) = ImA \stackrel{?}{=} Im(AA^+)$

$$ImA \supset Im(AA^+) \supset Im(AA^+A) \overset{1}{=} ImA$$

3. $ImA^* \overset{?}{=} ImA^+$
   $KerA^* \overset{?}{=} KerA^+$
   Достаточно доказать одно из утверждений.

$$ImA^+ \supset Im(A^+A) \supset Im(A^+AA^+) = ImA^+$$
$$ImA^+ = (ImA^+A) \overset{4}{=} Im(A^+A)^* = Im(A^*(A^+)^*) \subset ImA^*$$
$$rkA^+ = rk(FG)^+ = rk(G^+F^+) = rk(GF) \leqslant r = rkA$$
$$rkA = rk(A^+)^+ \leqslant rkA^+$$

То есть получили, что $rkA^+ = rkA = rkA^*$ — ранги равны, а значит равны и размерности:

$$ImA^+ = ImA^*$$
$$KerA^+ = KerA^*$$

Теорема. Пусть $A\bar{x} = \bar{b}$ — система линейных уравнений, которая может не иметь решение, тогда $\bar{u}$ — решение системы по **методу наименьших квадратов**, если для $\forall x$ длина вектора $A\bar{x} - \bar{b}$ не меньше, чем длина вектора $A\bar{u} - \bar{b}$, то есть если $f(x) = A\bar{x} - \bar{b} \in \mathbb{C}^n$, то $|f_1|^2 + ... + |f_n|^2$ минимально при $\bar{x} = \bar{u}$.

Теорема. Вектор $\bar{u} = A^+\bar{b}$ является решением системы $A\bar{x} = \bar{b}$ по методу наименьших квадратов (мнк), причем среди всех этих решений вектор $\bar{u}$ имеет наименьшую длину. Решение по методу наименьших квадратов также называют псевдорешением.

Пример 3.
Найти решение системы по методу наименьших квадратов.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^+ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 4 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Сингулярное разложение (SVD).
$A = Q\Sigma P^*$ $A : X \to Y$ — отображение, где X — размерности n, а Y — размерности m.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \sigma_r & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Q — ортогональная матрица $m \times m$, P — ортогональная матрица $n \times n$, $\sigma_1 \geqslant ... \geqslant \sigma_r > 0$.

Для A^*A существует базис из собственных векторов $e_1, ..., e_n$ (где она диагональна). Она неотрицательно определена и существуют собственные векторы $A^*Ae_i = \sigma_i^2 e_i$.

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{Ae_1}{\sigma_1} \\ \quad \cdots \\ f_r = \dfrac{Ae_r}{\sigma_r} \end{cases}$$

$$Ae_i = \begin{cases} \sigma_i f_i, & i \leqslant r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

$$A^* f_i = \begin{cases} \sigma_i e_i, & i \leqslant r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

В матрице Q по столбцам стоят векторы $f_1, ..., f_r$ (уже получены), $f_{r+1}, ..., f_m$ (из ортогонализации Грама-Шмидта) в базисе Y.
P — столбцы координат $e_1, ..., e_n$ в базисе X.

Пример 4.
Найти SVD.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^*\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения и векторы $\tilde{A}^*A$.

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 1$$
$$\lambda_3 = 1$$
$$\lambda_4 = 4$$

Сингулярные числа надо расположить по убыванию.

$$\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$$
$$\sigma_2 = 1$$
$$\sigma_3 = 1$$
$$\sigma > 0$$
$$\Sigma_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы.

1. $\lambda = 4$

$$(\tilde{A}^*\tilde{A} - \lambda_i E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}x_4,\ x_2 = \frac{1}{3}x_4,\ x_3 = \frac{1}{3}x_4$$

Получим собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot c, c \neq 0$$

$$e_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Получим собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2,\ c_1^2 + c_2^2 > 0$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$f_1 = \frac{\tilde{A}e_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{\tilde{A}e_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \frac{\tilde{A}e_3}{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (f_1, f_2, f_3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = Q\Sigma P^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^* =$$

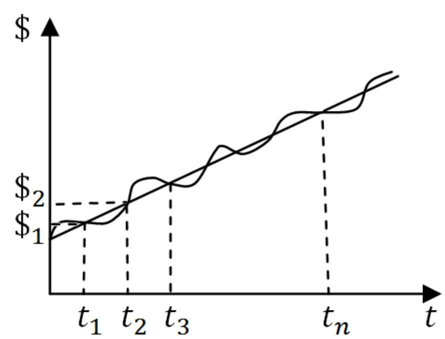
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Утверждение. Если $B = AU$, где $U^* = U^{-1}$ унитарная, то $B^+ = U^+A^+ = U^*A^+$.

Следствие. Если $A = Q\Sigma P^*$, то

$$A^+ = P\Sigma^+Q^* = P \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma_2^{-1} & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot Q^*$$

Линейная регрессия.
Модель 1:



$\$ = kt + b$

$$\begin{cases} \$_1 = kt_1 + b \\ \$_2 = kt_2 + b \\ \quad \dots \end{cases}$$

Надо найти k и b.
В матричном виде $A\bar{X} = \bar{S}$, где

$$X = \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}, A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \$_1 \\ \vdots \\ \$_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} = \bar{X} = A^+\bar{S}$$

Модель 2:
Если $x(t)$ — цена на нефть, то $\$(t)x(t) = k_1 t + b_1$.

Домашнее задание 2

1. Доказать утверждение о псевдообратной от произведения матриц. Если $B = AU$, где $U^* = U^{-1}$ — унитарная матрица, а A — произвольная матрица порядка n, то
$$B^+ = U^+A^+ = U^*A^+$$
2. С помощью линейной регрессии и псевдообратной матрицы сделать прогноз цены нефти Br в долларах, рублях. Сравнить результаты, полученные с помощью модели 1 и модели 2.
3. Найти SVD для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -3i & 4 \end{pmatrix}$$
4. Найти SVD для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$
5. Найти псевдообратную матрицу, используя SVD:
$$A = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 9 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Лекция 3

Полиномиальная интерполяция.
Дано:
$f(x)$ — неизвестный многочлен степени $\leq n$
$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$
Известны значения $f(x)$ в точках $x_0, ..., x_n$ (всего $n+1$ значений)
$\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ \quad \cdots \\ y_n = f(x_n) \end{cases}$
Найти: $f(x)$
Ответ: многочлен Лагранжа

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + ... + a_n x_0^n = y_0 \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + ... + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

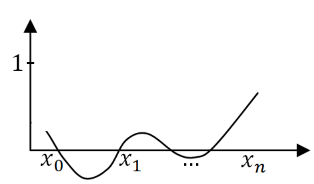
$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & x_n & ... & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Матрица Вандермонда: $V(x_0, ..., x_n) = V$

$$V\bar{a} = \bar{y},\ \bar{a} = V^{-1}\bar{y}$$

Определитель Вандермонда: $v(x_0, ..., x_n) = detV(x_0, ..., x_n) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)...(x_n - -x_0)(x_2 - x_1)...(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1}) = \prod\limits_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & x_n & ... & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & ... & x_1^n - x_0^n \\ \hdotsfor{4} \end{vmatrix}$$



Многочлен Лагранжа:

$$f(x) = L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{\prod\limits_{i} (x - x_j)}{\prod\limits_{j} (x_i - x_j)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} y_i v(x_0, ..., \underset{i}{x}, ..., x_n)}{v(x_0, ..., x_n)}.$$

Пример 1.
Дано:
$x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$
$y_0 = -2$, $y_1 = -1$, $y_2 = 2$
Провести параболу через три точки. Найти $f(x) = L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

$$f(x) = \frac{-2(0-x)(1-x) + (-1)(x+1)(1+1)(1-x) + 2(0+1)(x+1)(x-0)}{(0+1)(1+1)(1-0)} =$$
$$= x^2 + 2x - 1$$

$$f(x) = (x-1)g(x) \Leftrightarrow f(1) = 0$$
$$f(x) = (x-1)^2g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$
$$f'(x) = 2(x-1)g(x) + (x-1)^2g'(x)$$

Лемма.

$$f(x) = (x-x_1)^kg(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) = 0 \\ f'(x_1) = 0 \\ \cdots \\ f^{(k-1)}(x_1) = 0 \end{cases}$$

Интерполяция с кратными узлами.
Задача (кратко): Восстановить многочлен $f(x)$ по значениям в m точках кратностей $k_1, ..., k_m$.
Формулировка: Найти многочлен $f(x)$ степени $\leq n-1$ такой, что для некоторых различных узлов $x_1, ..., x_m$ и некоторых натуральных $k_1, ..., k_m$ (кратностей) верно
$$\begin{cases} f(x_1) = y_1, f'(x_1) = y_1^{(1)}, ..., f^{(k_1-1)}(x_1) = y_1^{(k_1-1)} \\ ... \\ f(x_m) = y_m, f'(x_m) = y_m^{(1)}, ..., f^{(k_m-1)}(x_m) = y_m^{(k_m-1)} \end{cases}$$
Количество условий равно количеству неизвестных $k_1 + ... + k_m = n$.
Ответ: Многочлен Эрмита (или Лагранжа-Сильвестра).

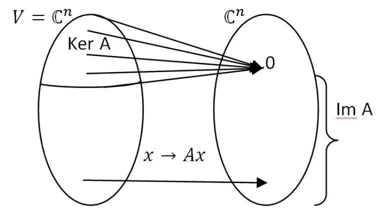
Утверждение. Такой многочлен существует и он единственный при $k_1 + ... + k_m = n$.
Примечание: Если $k_1 = ... = k_m = 1$, то $m = n$ и $f(x)$ - многочлен Лагранжа (то есть предыдущий случай).
► Пусть существует два таких многочлена $f(x)$ и $g(x)$, то для $p(x) = f(x) - h(x)$

$$p^{(t)}(x_i) = 0, i = 1, ..., m, t \leq k_i$$
$$p(x) = C(x-x_1)^{k_1}...(x-x_k)^{k_k} = C \text{ (многочлен степени } n+1)$$
$$\Rightarrow C = 0, p(x) = 0$$

Значит, если $f(x)$ существует, то он единственный.
Если $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$, то

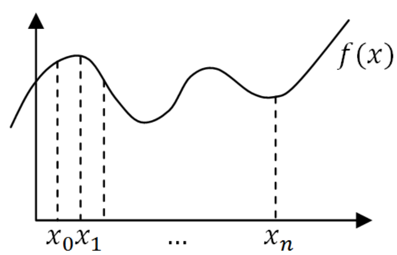
$$A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(k_m-1)} \end{pmatrix}$$

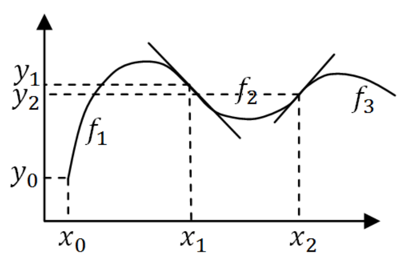
То есть, доказали, что система для любого $\bar{y}$ имеет не больше одного решения $\bar{a}$.



$ImA = \{A\bar{x}|x \in \mathbb{C}^n\}$, $KerA = \{\bar{a}|A\bar{a} = \bar{0}\} = \{\bar{0}\}$, так как у системы $A\bar{a} = \bar{0}$ не больше одного решения.
Так как A $n \times n$, то $dim(ImA) = rkA$, $dim(KerA) = n - rkA$.
$Ker\ 0 \Leftrightarrow dim(KerA) = 0$, то есть $rkA = n$ (A невырожденная).
Матрица A невырожденная $\Leftrightarrow rkA = n \Leftrightarrow ImA = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow KerA = 0$, значит, $\bar{a} = A^{-1}\bar{y}$, всегда существует решение. ■

Сплайны.
1. Квадратичный.
Надо установить функцию $f(x)$.
Аппроксимация: соседние точки надо соединить прямыми (не плавно). Но мы хотим гладко, значит на каждом отрезке надо задать свою функцию.



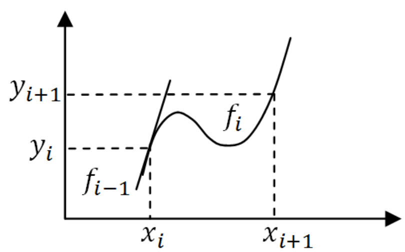


$$\begin{cases} f_1'(x_0) = d_0 \\ f_1(x_0) = y_0 \\ f_1(x_1) = y_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} f_1'(x_1) = f_2'(x_1) \\ f_2(x_1) = y_1 \\ f_2(x_2) = y_2 \end{cases}$$

.... и т.д.

2. Кубический.

$f_i(x)$ - кубическая парабола.



$$\begin{cases} f_i(x_i) = y_i \\ f_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ f_i'(x_i) = f_{i-1}'(x_i) \\ f_i''(x_i) = f_{i-1}''(x_i) \end{cases}$$

$$f_i(x) = a_0^i + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3 = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Пример 2.

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Аппроксимировать квадратичным сплайном с узлами $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$.

$$\begin{cases} f(0) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = -6 \\ f(2) = 0 \\ f(4) = 6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} f_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ f_1'(0) = a_1 = 11 \\ f_1(0) = a_0 = -6 \\ f_1(2) = -6 + 11 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow a_2 = -4 \end{cases}$$

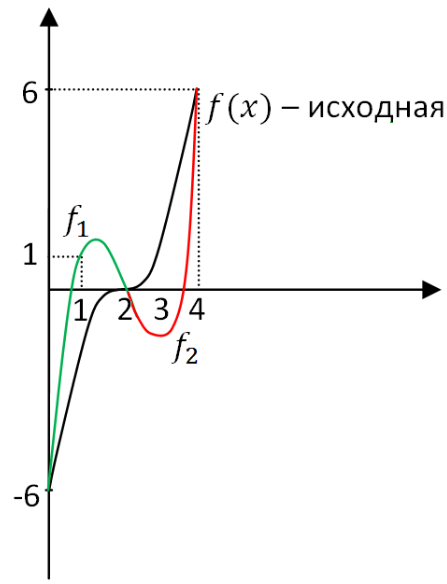
Получим $f_1 = -6 + 11x - 4x^2$.

$$\begin{cases} f_1 = -6 + 11x - 4x^2 \\ f_2'(2) = f_1'(2) = -5 \\ f_2(2) = 0 \\ f_2(4) = 6 \end{cases}$$

Подставим значения из предыдущих выражений.

$$\begin{cases} f_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 = 0 \\ b_1 + 4b_2 = -5 \\ b_0 + 4b_1 + 16b_2 = 6 \end{cases}$$

Получим $f_2 = 4x^2 - 21x + 26$.

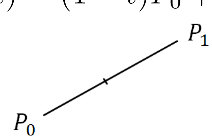


Кривая Безье.

Есть набор из n точек, хотим построить прямую, хорошо вписываемую в оболочку.

Параметризация отрезка для 2 точек, степень полинома $n = 1$:

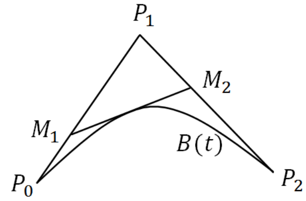
$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$



Параметризация отрезка для 3 точек, степень полинома $n = 2$.

Введем вспомогательные точки M_1, M_2 такие, что

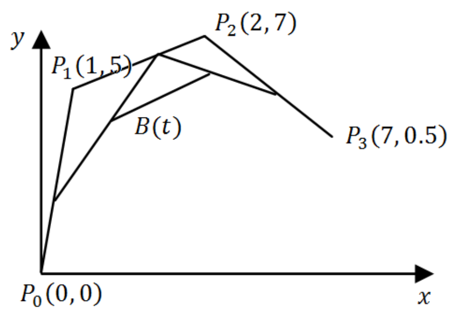
$$M_1 = (1-t)P_0 + tP_1,\ M_2 = (1-t)P_1 + tP_2$$
$$B(t) = (1-t)M_1 + tM_2 = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$



Параметризация отрезка для $n+1$ точек, степень полинома n.

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-t)^{n-k} t^k P_k$$

Пример 3.
Построить кубическую кривую Безье $B_3(t)$ для 4 точек, $t \in [0,1]$.



$x(t) = 1 \cdot (1-t)^3 \cdot t^0 \cdot 0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t^1 \cdot 1 + 3 \cdot (1-t)^1 \cdot t^2 \cdot 2 + (1-t)^0 \cdot t^3 \cdot 7 = 4t^3 + 3t$
$y(t) = 1 \cdot (1-t)^3 \cdot t \cdot 0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot 5 + 3 \cdot (1-t)^1 \cdot t^2 \cdot 7 + 1 \cdot (1-t)^0 \cdot t^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}t^3 - 9t^2 + 15t$

Домашнее задание 3

1. Приблизить следующую функцию $y(x)$ многочленом второй степени по методу наименьших квадратов:

x	-3	-1	0	1	3
y	-4	-0.8	1.6	2.3	1.5

2. Доказать, что кривая Безье касается первого и последнего отрезка ломаной.

3. Известно, что $f(x)$ — многочлен третьей степени такой, что:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = -3 \\ f(2) = 17 \\ f(-2) = -19 \end{cases}$$

Найти $f(x)$.

4. Найти $f(x)$ многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 5 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = -1 \end{cases}$$

5. Приблизить $sin\ x$ сплайном $S(x)$ степени два с узлами πk, $\pi k + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Найти $S\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $S\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

6. На плоскости 100 точек, любые 4 из них лежат на параболе вида $y = ax^2 + bx + c$. Доказать, что тогда все 100 точек будут лежать на одной и той же параболе.

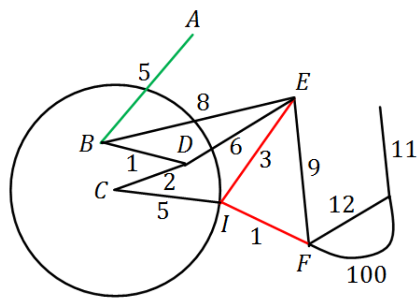
Лекция 4

Метрики, линейные пространства.

Метрика ρ на множестве M — это такая функция $\rho(x, y) \geqslant 0$, что

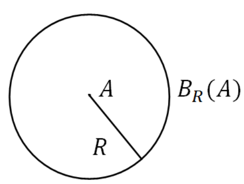
1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
2. $\rho(x, y) > 0, x \neq y, \rho(x, x) = 0$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Дана карта с расстояниями между городами.
$M = \{$ города $\}$



$\rho(A, B) = 5$
$\rho(E, F) = 4$ (минимальное расстояние из возможных)

Шар в метрическом пространстве.



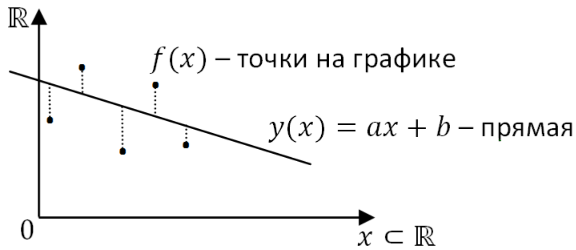
$B_R(A) = \{x|\rho(A, x) \leqslant R\}$ — **шар** радиуса R с центром в точке A.
$S_R(A) = \{x|\rho(A, x) = R\}$ — **сфера** радиуса R с центром в точке A.

$B_5(C) = \{C, B, D, I\}$ — все точки, которые туда входят.
$S_5(C) = \{I\}$ — только те точки, которые лежат на окружности.
$B_{100}(C) = B_{50}(C) = M$ — все множество.

Метод наименьших квадратов — приближение функции в смысле следующей метрики

$$M = \{f : X \to \mathbb{R}\}, X = \{x_1, ..., x_n\}$$

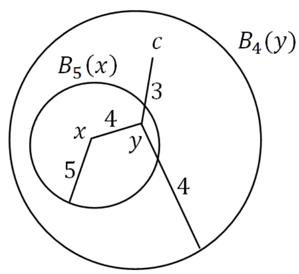
$$\rho(f, y) = |\bar{y} - \bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - f(x_i))^2}$$



Пример 1.
Найти такое метрическое пространство M, что

$\begin{cases} B_5(x) \subset B_4(y) \\ B_5(x) \neq B_4(y) \end{cases}$, где x, y - две точки.

То есть доказать, что существует $c \in B_4(y), c \notin B_5(x)$.



$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 4$$
$$\rho(y, c) = \rho(c, y) = 3$$
$$\rho(x, c) = \rho(c, x) = 7$$

$$B_5(x) = \{x, y\}$$
$$B_4(y) = \{x, y, c\}$$

То есть $B_5(x) \subset B_4(y)$.

Вспомним определение линейного пространства.
Если на непустом множестве заданы две бинарные операции "+" и "умножение на число", числа из поля F, $\forall\ a,\ b,\ c \in V$ то

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $\exists\ 0 : a + 0 = 0 + a = a$
3. $\exists\ (-a) : a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$

5. $1 \cdot x = x$

6. $(\mu\lambda)x = \mu(\lambda x)$

7. $(a+b)\lambda = a\lambda + b\lambda$

8. $(\mu+\lambda)a = \mu a + \lambda a$

V — **линейное пространство** (векторное пространство), если выполнены 8 предыдущих аксиом и

1. $\forall \bar{u}, \bar{v}$: $\bar{u} + \bar{v} \in V$

2. $\forall$ числа $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ $\alpha\bar{u} \in V$
   (или $\alpha \in F$ заданное поле, например, $F_2 = \{0, 1\}$)

Линейное пространство V — **нормированное**, если на нем задана такая норма $\nu : V \to \mathbb{R} \geqslant 0$, что

1. $\nu(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\nu(\bar{0}) = \bar{0}$

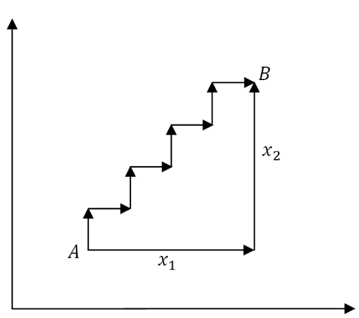
2. $\nu(\alpha\bar{x}) = |\alpha|\nu(\bar{x})$

3. $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$ для $\forall x, y \in V, \forall\alpha$

Из каждой нормы можно сделать метрику $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \nu(\bar{y} - \bar{x})$.

Примеры норм:

1. Манхэттенская норма (норма таксиста)
   (Можно ехать разными путями, но не по прямой)

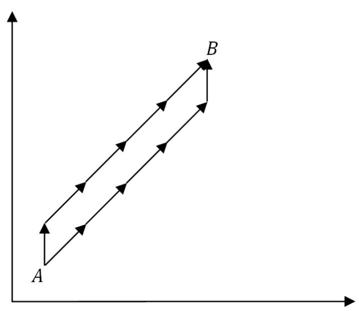


$$\nu_M(\bar{x}) = |x_1| + ... + |x_n| \text{ в } \mathbb{R}^n, \text{ где } \bar{x} = (x_1, ..., x_n)$$

2. Евклидова норма
   (Для приближения)

$$\nu_E(\bar{x}) = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

3. Норма максимума
   (Уменьшает ошибку по всем координатам)



$$\nu_{max}(\bar{x}) = max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

4. Норма Гёльдера

$$\nu_p(\bar{x}) = \sqrt[p]{|x_1|^p + ... + |x_n|^p} \text{ в } \mathbb{R}^n$$
$$\nu_1(\bar{x}) = |x_1| + ... + |x_n| = \nu_M(\bar{x})$$
$$\nu_2(\bar{x}) = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} = \nu_E(\bar{x})$$
$$\nu_\infty(\bar{x}) = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

   Если $|x_i| = max|x_i|$, то $\sqrt[p]{|x_i|^p} \to |x_i|$, получим:

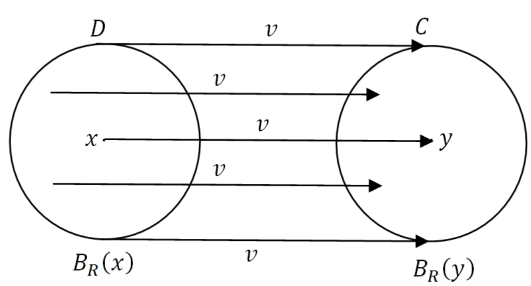
$$\nu_\infty(\bar{x}) = max\{|x_1|, ..., |x_n|\} = \nu_{max}(\bar{x})$$

Утверждение. В нормированном пространстве V верно:

1. $\forall \bar{x}, \bar{y}$ $B_R(\bar{x})$ равен $B_R(\bar{y})$ (как геометрическая фигура).
   ► Пусть $\bar{v} = \bar{y} - \bar{x}$, тогда

$$B_R(\bar{y}) = \bar{v} + B_R(\bar{x})$$

   Ко всем точкам из $B_R(\bar{x})$ прибавим одинаковый вектор $\bar{v}$.

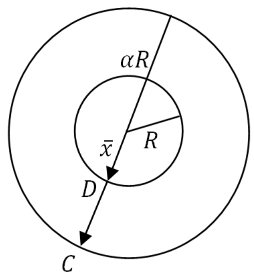


$$C \in B_R(y) \Leftrightarrow \nu(C - y) \leqslant R$$
$$\nu((C - (\bar{y} - \bar{x})) - \bar{x}) \leqslant R$$

То есть, $D = C - (\bar{y} - \bar{x}) \in B_R(\bar{x})$. ■

2. Шары $B_R(\bar{x})$ и $B_{\alpha R}(\bar{x})$, $\alpha > 0$ подобны с коэффициентом подобия α.
▶

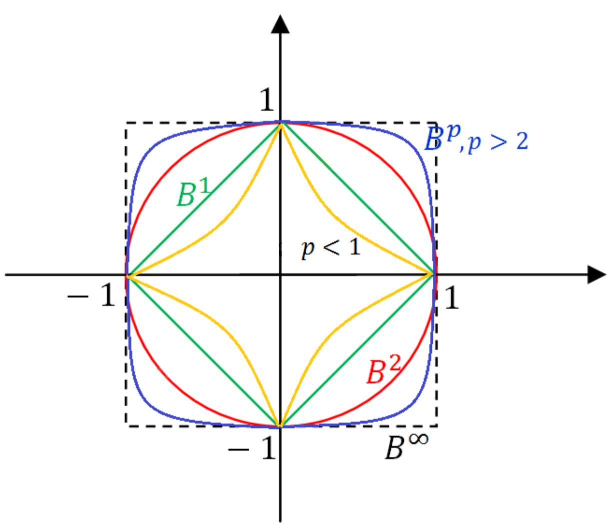
$$\nu(xD) = \frac{1}{\alpha}\nu(xC)$$
$$D = x + xD = x + \frac{1}{\alpha}xC$$
$$\rho(D, x) = \nu(xD) = \frac{1}{\alpha}\nu(C - x) = \nu(\frac{1}{\alpha}(C - x))$$

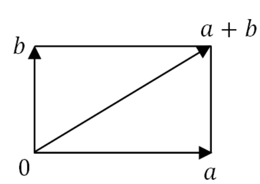


$$C \in B_{\alpha R}(x) \Leftrightarrow \nu(C - x) \leqslant \alpha R$$
$$\rho(D, x) = \nu(\frac{C - x}{\alpha}) \leqslant R$$

То есть $D \in B_R(\bar{x})$. ■

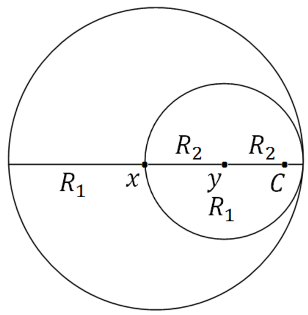
ν_p — норма только при $p \geqslant 1$ (для невыпуклых — неверно, не выполняется неравенство треугольника).
$B^p = B_1(\bar{0})$ относительно ν_p.





Пример 2.
Для каких R_1, R_2 возможно $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$?

Если $R_2 > R_1$ — возможно (даже при $x = y$).
При $R_1 = 5, R_2 = 4$ — возможно (из предыдущего примера).
Докажем, что при $R_1 > R_2$ это не всегда верно, а именно: при $2R_2 > R_1$ - верно, а при $R_2 \leqslant \dfrac{R_1}{2}$ — нет.
Рассмотрим случай $2R_2 = R_1$.



Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_1}(x) = B_{R_2}(y)$ — множества совпадают, то есть уже не подходит.

Рассмотрим случай, когда R_1 чуть меньше $2R_2$.
Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$ верно.

Рассмотрим случай, когда R_1 чуть больше $2R_2$.
Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть, $B_{R_2}(y) \subseteq B_{R_1}(x)$, значит не подходит.

Линейное пространство называется **евклидовым пространством**, если на нем задано скалярное произведение $g(x, y)$:

1. $g(x, y) = g(y, x)$
2. $g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$
3. $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$
4. $g(x, x) \geqslant 0, g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

В евклидовом пространстве есть стандартная норма $\| x \| = \sqrt{g(x, x)}$.
$L_2[0, 1]$ — множество функций, квадрат которых интегрируем по Риману.
$(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$
$\| f \|_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 |f(x)|^2\, dx}$

$x_n \to x$ **сходится по норме** $\nu(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ верно $\nu(x_n - x) < \varepsilon$.

Пример 3.
Является ли нормой на множестве непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a,b]$ следующее выражение:

$$\mu(f) = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{max}(|f(x)| + |f'(x)|) \ ?$$

Да, так как выполняются все свойства нормы.

1. $\mu(f) > 0$
2. $\mu(\lambda f) = \lambda \mu(f)$
3. $\mu(f+g) = max(|f+g| + |(f+g)'(x)|)$
   $\mu(f) + \mu(g) = max(|f| + |g| + |f'| + |g'|)$
   А так как $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, то выполняется неравенство треугольника
   $\mu(f+g) \leqslant \mu(f) + \mu(g)$.

Пример 4.
Следует ли из сходимости по норме $\parallel f \parallel = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{max}|f(x)|$ сходимость по $\mu(f)$, где

$$\mu(f) = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{max}(|f(x)| + |f'(x)|) \ ?$$

Верно ли обратное?

Докажем, что $f_k(x) \overset{\|f\|}{\to} f(x)$ и $f_k(x) \nrightarrow$ по $\mu(f)$.

$$f = x, f' = 1$$
$$f_k = \frac{1}{k} sin(xk^2) + x$$
$$|f - f_k| \leqslant \frac{1}{k}|sin(xk^2)| \leqslant \frac{1}{k} \to 0, \text{ то есть, сходится по норме.}$$
$$f_k' = 1 + k \cdot cos(xk^2)$$

$max\{|f(x) - f_k(x)| + |f'(x) - f_k'(x)|\} = max\{|\frac{1}{k} sin(xk^2)| + |1 - 1 - k \cdot cos(xk^2)|\} \to \infty$, то есть, не сходится по $\mu(f)$.

Обратное утверждение верно. При сходимости по $\mu(f)$ получим, что $|f(x) - f_k(x)| \to 0$, то есть сходится по норме.

Домашнее задание 4

1. $B(x,y) = \{x^2 + axy + 4y^2 \leqslant 1\}$
   При каких a на множестве $\mathbb{R}^2$ существует норма ν такая, что $B(x,y)$ — единичный шар относительно нее?
   Найдите в этом случае
   $$\nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Будет ли метрикой на $\mathbb{R}$ функция $\rho(x,y) =$

   (a) $|x^2 - y^2|$

   (b) $sin(x-y)$

   (c) $|e^x - e^y|$

3. Существует ли убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств с пустым пересечением (в произвольном метрическом пространстве)?

4. Доказать, что шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством. То есть доказать, что если x, y принадлежат шару, то и весь отрезок $[x,y]$ принадлежит шару.

Лекция 5

Множество **замкнутое**, если оно включает свою границу.

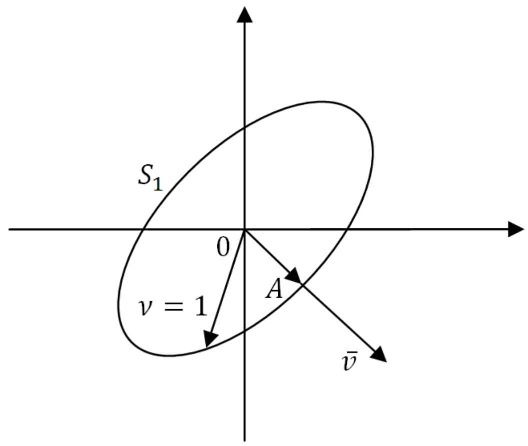
V — линейное пространство, ν — **норма** на V $(\nu : V \to \mathbb{R} \geqslant 0)$ если:

1. $\nu(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\nu(\bar{0}) = \bar{0}$

2. $\nu(\alpha\bar{x}) = |\alpha|\nu(\bar{x})$

3. $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$ для $\forall x, y \in V, \forall\alpha$
   $\nu(x) = |x|$

$\mathbb{R}^2$, $\nu(\bar{x})-?$, $\nu(\bar{v})-?$
$B_1^\nu(\bar{0}) = B_1^\nu$



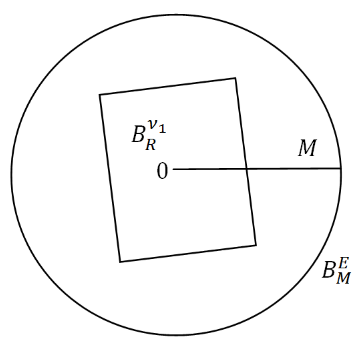
$$A = \text{луч} \cap S_1,\ \ S_1 - \text{граница}$$
$$\nu(OA) = 1$$
$$\nu(v) = \lambda\nu(OA) = \lambda, \text{ если } v = \lambda OA, \lambda = \frac{|v|}{|OA|}$$

Лемма. Пусть ν_1, ν_2 — две нормы на $\mathbb{R}^n$, тогда существует такое $c > 0$, что любой шар одной нормы содержится в другом шаре другой нормы.

$$B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{\nu_2}.$$

Следствие. Любые две нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, то есть для $\forall\ \nu_1, \nu_2\ \exists\ c_1, c_2$, что для $\forall\ \bar{x}$ верно $c_1\nu_1(x) \leqslant \nu_2(x) \leqslant c_2\nu_1(x)$.

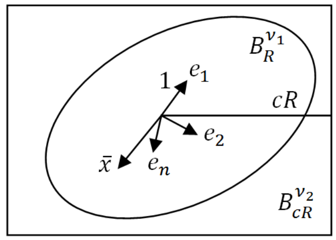
Следствие. Шар $B_1^{\nu_1}$ — ограниченное множество, то есть $B_R^{\nu_1} \subset \{\bar{x} \mid |\bar{x}| \leqslant M\} = B_M^E$ (евклидов шар).



► ν_2 =евклидова длина, $M = cR$ ■

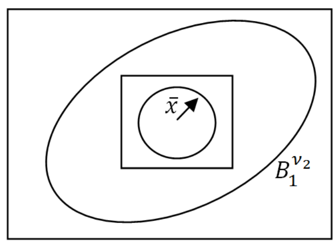
Доказательство леммы.
► Пусть
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\bar{e}_1 + ... + x_n\bar{e}_n \in B_1^{\nu_1}(R = 1)$$

$\nu_2(\bar{x}) = \nu_2(x_1\bar{e}_1 + ... + x_n\bar{e}_n) \leqslant \nu_2(x_1 e_1) + ... + \nu_2(x_n e_n) = |x_1|\nu_2(e_1) + ... + |x_n|\nu_2(e_n) \leqslant$
$\leqslant \underset{i=1,...,n}{max}\{\ |x_i|\}$.



Пусть $|\bar{x}|_\infty = \underset{i=1,...,n}{max}|x_i|$, $M = \underset{i=1,...,n}{max}\,\nu_2(e_i)$, тогда $\nu_2(x) \leqslant |\bar{x}|_\infty nM$, то есть $B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{|\cdot|_\infty}, c = nM$.
Доказали, что любой единичный шар можно поместить в квадрат со стороной cR.

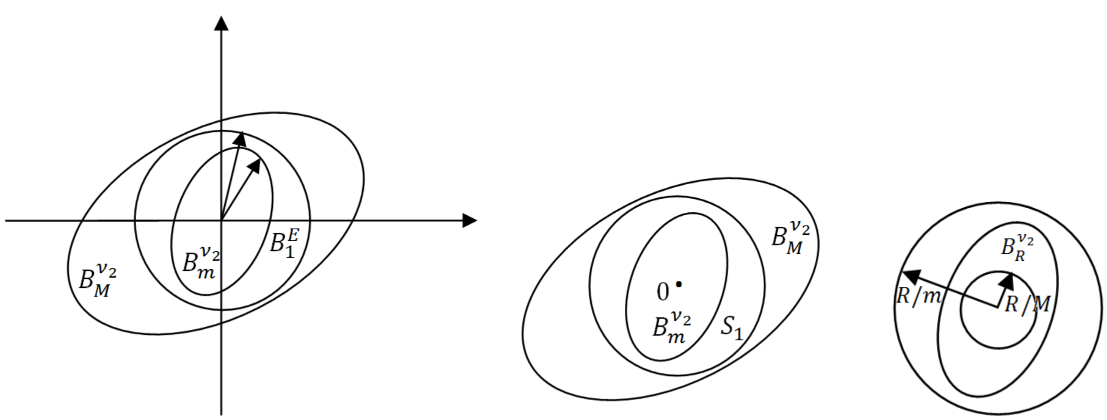
Если $|x|_\infty \leqslant \dfrac{1}{nM}$, то $\nu_2(x) \leqslant 1, x \in B_1^{\nu_2}$.



Внутри любого единичного шара существует квадрат, то есть существует куб, который содержит его целиком. Осталось доказать, что шар — ограниченное множество. Докажем от противного.

$$B_1^{\nu} = \{x|\nu(\bar{x}) \leqslant 1\}$$

Пусть существует $\{x^1, x^2, ...\} : \{|x^1|, |x^2|, ...\} \to +\infty$, тогда она существует, если B_1^{ν} неотрицательное множество.



$m \leqslant \nu_2(B_1^E) \leqslant M$, где $m > 0$, M — ограниченное множество, тогда (так как все шары подобны):

$$\begin{cases} B_m^{\nu_2} \subset B_1^E \subset B_M^{\nu_2} \\ B_R^{\nu_2} \subset B_{R/m}^E \\ B_{R/M}^E \subset B_R^{\nu_2} \end{cases}$$

■

Теорема Минковского. Множество $B \subset \mathbb{R}^n$ является единичным шаром B_1^ν относительно какой-либо нормы ν тогда и только тогда, когда B:

1. замкнуто
2. ограничено ($B \subset B_M^E$)
3. содержит окрестность нуля (то есть $B \supset B_m^E$)
4. выпукло
5. центрально симметрично (если $\bar{x} \in B$, то и $-\bar{x} \in B$)

Пример 1.
$B = \{x^2 + axy + 4y^2 \leqslant 1\}$
Существует ли такая норма ν, что B — единичный шар относительно нее ($B = B_1^\nu$)?

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\triangle_1 = 1 > 0$$
$$\triangle_2 = 4 - \frac{a^2}{4} > 0$$

То есть это эллипс, все 5 свойств из предыдущей теоремы выполняются, значит при $|a| < 4 B$ — единичный шар относительно нормы.

$$\triangle_1 = 1 > 0$$
$$\triangle_2 = 4 - \frac{a^2}{4} < 0$$

В этом случае множество не будет замкнутым, то есть не выполняются все свойства из предыдущей теоремы, значит в этом случае B не будет единичным шаром относительно нормы.
При $\triangle_2 = 0$: $a = \pm 4$ и $x^2 \pm 4xy + 4y^2 \leqslant 1$, $(x \pm 2y)^2 \leqslant 1$. В этом случа получим множество между двумя параллельными прямыми, которое является незамкнутым, то есть в этом случае B тоже не будет единичным шаром относительно нормы.
Получили, что $B = B_1^\nu$ только при $|a| < 4$.

V — **евклидово пространство со скалярным произведением**, если задана $V \times V \to \mathbb{R}$, то есть, на нем задано скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}$ такое, что для пространств над $\mathbb{R}$ выполнено:

1. $(u, v) = (v, u)$

2. $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$

3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{R}$

4. $(u, u) > 0, u \neq \bar{0}$ $((u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$

Обозначение скалярного произведения: $(u, v) =< u, v >=< u \mid v >$.

Длина вектора — это $|v| = \sqrt{(v, v)} \geqslant 0$ (норма).
▶

$$|\alpha v| = \sqrt{(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 (v, v)} = |\alpha||v|$$
$$|v| > 0, \text{ при } v \neq \bar{0}$$
$$|u + v| \leqslant |u| + |v| \quad \blacksquare$$

$$cos\widehat{(u, v)} = \frac{(u, v)}{|u||v|}, u, v \neq \bar{0}$$

V — **эрмитово пространство со скалярным произведением**, если задана $V \times V \to \mathbb{C}$, то есть, на нем задано скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{C}$ такое, что для пространств над $\mathbb{C}$ выполнено:

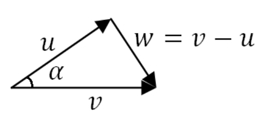
1. $(u, v) = \overline{(v, u)}$

2. $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$

3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{C}$

4. $\forall u$ $(u, u) \geqslant 0, (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Как по норме $|w|$ восстановить скалярное произведение (u, v)?



$$|w|^2 = (w, w) = (v - u, v - u) = (v, v) - (u, v) - (v, u) + (u, u) = |v|^2 - 2(u, v) + |u|^2$$

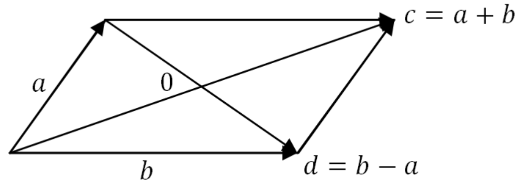
То есть, $(u, v) = \dfrac{1}{2}(|v|^2 + |u|^2 - |v - u|^2)$.

Теорема (тождество параллелограмма). Пусть V — нормированное пространство с нормой $|v|$. На V существует такое скалярное произведение, что $|v| = \sqrt{(v, v)}$ в том и только том случае, когда в V выполняется тождество параллелограмма:

$$\forall a, b \ |a + b|^2 + |b - a|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

При $c = a + b, d = b - a$:

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$



► Если для $\forall v$ $|v| = \sqrt{< v, v >}$, то $|a+b|^2 + |b-a|^2 =< a+b, a+b > + < b-a, b-a >=$
$=< a, a > +2 < a, b > + < b, b > + < b, b > -2 < a, b > + < a, a >= 2(|a|^2 + |b|^2)$ ■

H — **гильбертово пространство**, если на нем задано скалярное произведение и оно является полным (относительно метрики, порожденной скалярным произведением).

Набор $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...\}^{-e}$ называется **ортогональной системой**, если
$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Формально хотим представить $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$.

$$(f, \varphi_j) = c_j(\varphi_j, \varphi_j)$$
$$(\varphi_j, \varphi_j) = 1$$
$$c_j = \frac{(f, \varphi_j)}{\| \varphi_j \|^2} = (f, \varphi_j)$$

c_j — коэффициенты Фурье по ортогональной системе.

Теорема. Если φ_j — ортогональная система, тогда следующие условия эквивалентны:

1. система $\{\varphi_j\}$ является базисом, то есть $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$

2. выполнение равенства Парсеваля $\| f \|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_k^2$

3. система является полной, то есть $\exists y \neq 0 : (\varphi_j, y) = 0$

Хотим приблизить f и минимизировать $\| f - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \| \to min$.

$(f - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k) =$ (так как система ортогональна) $= (f, f) - 2 \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (f, \varphi_k) +$
$+ \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k^2 (\varphi_k, \varphi_k) = (c_k = (f, \varphi_k),\ (\varphi_k, \varphi_k) = 1) = \| f \|^2 + \sum\limits_{k=0}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2$
Выбором α хотим минимизировать, минимальная норма будет там, где совпадают $\alpha_k = c_k$.

$a = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ — пространство $\mathbb{R}_{n+1}$ многочленов степени $\leqslant n$ на $[-1, 1]$, где скалярное произведение $\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Применим к a процесс Грама-Шмидта, получим b.

$$a \to b = \{P_0(x) = 1\}$$

Многочлены Лежандра:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^k)^{(k)}, k = 1, .., n$$

k=0: $P_0(x) = 1$

k=1: $P_1(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)' = x$

k=2: $P_2(x) = \frac{1}{8}((x^2-1)^2)'' = \frac{1}{8}(4x(x^2-1)' = \dfrac{3x^2-1}{2}$

k=3: $P_3(x) = \frac{1}{48}((x^2-1)^3)''' = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$\| P_1(x) \| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} x \cdot x\,dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Домашнее задание 5

1. (a) Проверить ортогональность $P_2(x)$ и $P_3(x)$ относительно $< f, g > =$
   $= \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

   (b) Найти $\| P_n(x) \|$.

2. Найти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ на $[-1, 1]$: $\| f - \sum\limits_{k=0}^{2} \alpha_k P_k(x) \| \to min$, $d_j = \dfrac{(f, \varphi_j)}{\| \varphi_j \|^2} = (f, \varphi_j)$, где
   $P_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^k)^{(k)},\ k = 1, \cdots, n$ — многочлены Лежандра.

   (a) $f_1(x) = xe^{-x}$

   (b) $f_2(x) = x^3$

3. Выразить скалярное произведение через длину вектора в эрмитовом пространстве.

Лекция 6

Многочлены Чебышева 1 рода.

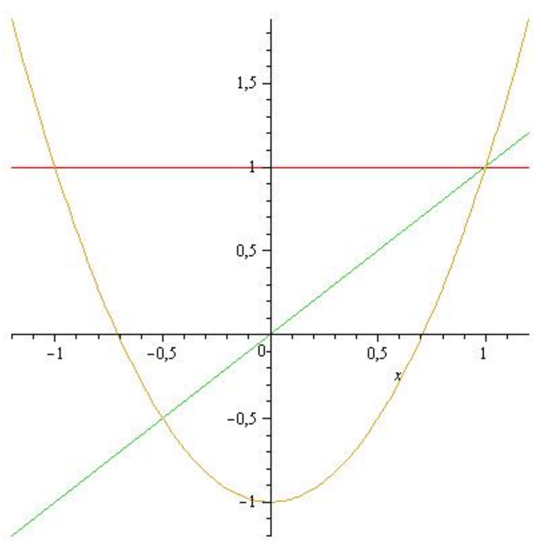
$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$\dots$$
$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n \geqslant 2$$

n	**T(n)**
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
9	$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$
10	$512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

Для главного члена в формуле $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + ..., n \geqslant 1$.
► По индукции:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x2^{n-1}x^n + \dots - 2^{n-2}x^{n-1} = 2^n x^{n+1} + \dots \text{ верно для } n+1. \ \blacksquare$$

Графики многочленов $T_0(x),\ T_1(x),\ T_2(x)$:



Графики многочленов $T_3(x),\ T_4(x),\ T_5(x)$:

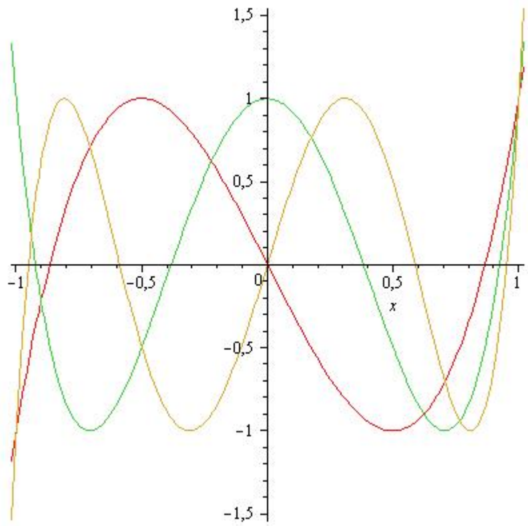
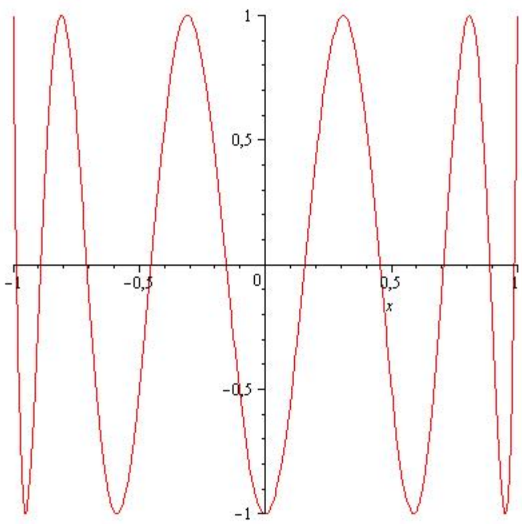


График многочлена $T_{10}(x)$:



Теорема. $T_n(cos\varphi) = cos(n\varphi)$

Следствие. $T_n(x) = cos(n\ arccos\ x)$ при $x \in [-1, 1]$

Следствие. $T_n(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$ при $|x| \geqslant 1$

$$x = cos\ \varphi$$
$$cos(2\varphi) = 2x^2 - 1$$
$$cos(3\varphi) = 4x^3 - 3x$$
$$\ldots$$
$$cos(n\varphi) + cos((n-2)\varphi) = 2cos\left(\frac{n+n-2}{2}\varphi\right)cos\left(\frac{n-n+2}{2}\varphi\right) = 2cos((n-1)\varphi)cos\varphi$$
$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow cos(n\varphi) = 0 \Leftrightarrow n\varphi = \pi k + \frac{\pi}{2} = \pi\frac{(2k+1)}{2}, \varphi \in [0, \pi]$$

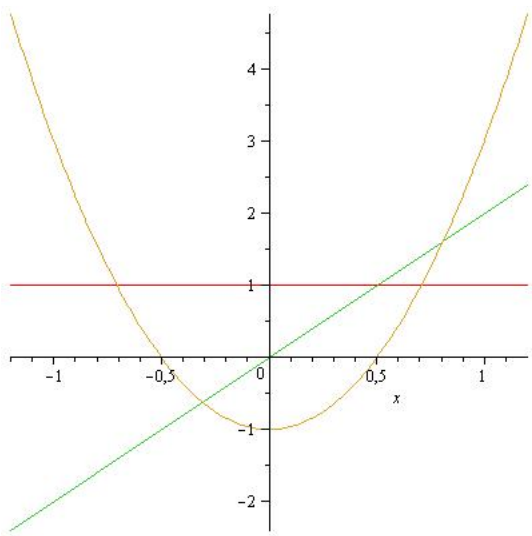
$$\varphi = \pi\frac{(2k+1)}{2n} \Leftrightarrow x = arccos\left(\frac{2k+1}{n}\,\pi\right)$$

Многочлены Чебышева 2 рода.

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) \text{ при } n \geqslant 0$$

n	**U(n)**
0	1
1	$2x$
2	$4x^2 - 1$
3	$8x^3 - 4x$
4	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
7	$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
8	$256^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$
9	$512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$
10	$1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1$

Графики многочленов $U_0(x),\ U_1(x),\ U_2(x)$:



Графики многочленов $U_3(x),\ U_4(x),\ U_5(x)$:

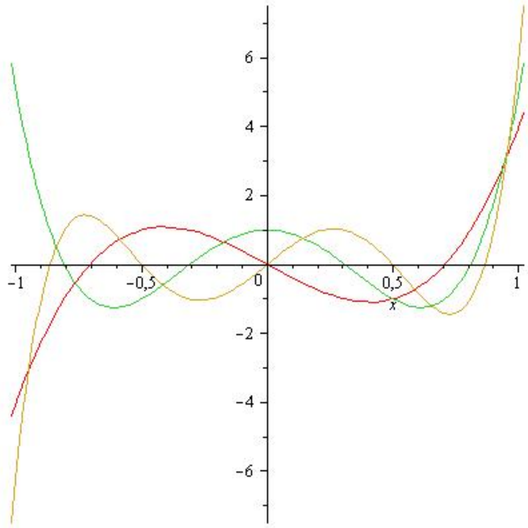
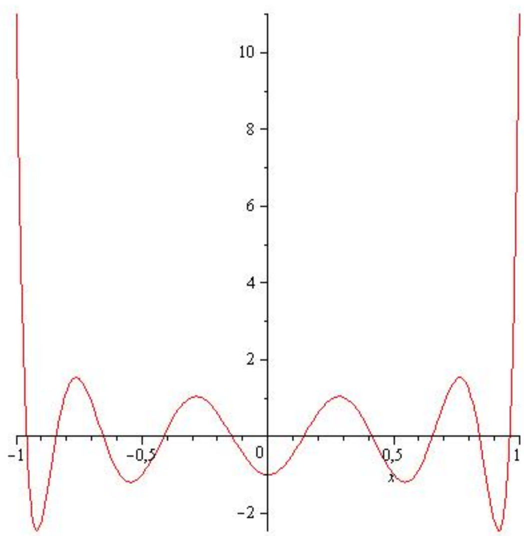


График многочлена $U_{10}(x)$:



Теорема. $U_{n-1}(cos\varphi)sin\varphi = sin(n\varphi)$

Теорема. $U_n(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} + (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}}$ при $|x| \leqslant 1$

$$sin(n\varphi) = sin\varphi\ U_{n-1}(x),\ U_{n-1} = \frac{sin(n\varphi)}{sin\varphi}$$

$$U_{n-1}(x) = 0 \Leftrightarrow n\varphi = \pi k,\ \varphi = \frac{\pi k}{n}$$

Свойство. Старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ равен 2^{n-1}, а старший коэффициент многочлена $U_n(x)$ равен 2^n.

Теорема.

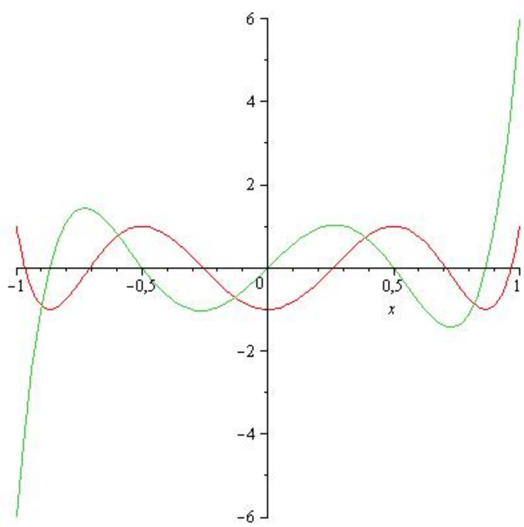
1. При $n \geqslant 1$ многочлен $T_n(x)$ имеет на отрезке [-1, 1] ровно n корней $cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, .., n.$
2. Корни многочлена $U_n(x)$ (они же - экстремумы многочлена $T_{n+1}(x)$) также принадлежат отрезку [-1, 1]: это числа $cos\dfrac{\pi k}{n+1}, k = 1, ..., n.$

Следствие.

$$T_n(x) = 2^{n-1}\left(x - cos\ \frac{\pi}{2n}\right)\left(x - cos\ \frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(x - cos(2n-1)\frac{\pi}{2n}\right)$$
$$U_n(x) = 2^{n}\left(x - cos\ \frac{\pi}{n+1}\right)\left(x - cos\ \frac{2\pi}{n+1}\right)\cdots\left(x - cos\ n\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Следствие. Многочлен $T_n(x)$ степени n на отрезке $[-1, 1]$ достигает своих экстремальных значений, равных 1 и -1 в $n+1$ точке, включая концы отрезка.

Пример: $n = 6$ (график многочленов $T_6(x)$ и $U_5(x)$).



Уклонение от нуля.
Пусть f — функция на отрезке $[-1, 1]$. Как измерить, насколько она далека от нуля? Норма Чебышева

$$|f|_0 = \max_{[-1,1]}|f(x)| \text{ (максимум модуля на данном отрезке)}$$

и

$$|f|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \text{ (площадь под графиком на данном отрезке).}$$

Пусть $||\cdot||$ — норма на пространстве многочленов (например, одна из двух упомянутых). Многочлен $f(x) = x^n + \cdots$ степени n со старшим коэффициентом 1 называется наименее уклняющимся от нуля относительно данной нормы, если для любого другого такого многочлена $g(x) = x^n + \cdots$ всегда $\| f \| \leqslant \| g \|$.

Пример 1.

Относительно нормы Чебышева $|f|_0$ уклонение от нуля многочлена $\widetilde{T}_3(x) = \dfrac{1}{4}\, T_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{4}x$ равно

$$|\frac{1}{4}\, T_3(x)|_0 = \frac{1}{4}\, |T_3(x)|_0 = \frac{1}{4}\,,$$

а, например, для многочлена x^3 имеем $|x^3|_0 = 1$.

Теорема.

1. (Чебышев) Наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ относительно нормы Чебышева

$$|f|_0 = \underset{[-1,1]}{max} |f(x)|$$

является многочлен $\widetilde{T}_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

2. (Коркин, Золотарев) Наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ относительно нормы

$$|f|_1 = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$$

является многочлен $\widetilde{U}_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} U_n(x)$.

Дано: многочлен $f(x) = x^n + \cdots$ на $[-1, 1]$
Надо найти: $g(x) = c \cdot x^n + \cdots$, приближающий $f(x)$ в смысле $|\cdots|_1$ или $|\cdots|_0$.
$g \approx f \Leftrightarrow f - g$ — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, то есть $f(x) - g(x) = \widetilde{U}_n(x)$ или $\widetilde{T}_n(x)$.

Следствие. Наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$ многочлен степени n относительно нормы Чебышева на этом отрезке $|f|_0 = \underset{[a,b]}{max} |f(x)|$ — это

$$\overline{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right).$$

Идея доказательства: сделать замену переменных $y = \dfrac{2x-(b+a)}{b-a}$, где $x \in [a,b]$, а $y \in [-1,1]$, и свести задачу к поиску многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[-1,1]$.

Пример 2.
Наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0,1]$ многочлен степени n — это многочлен

$$\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{2n-1}} T_n(2x-1).$$

В частности, $\overline{T}_2(x) = \dfrac{1}{2^{4-1}} T_2(2x-1) = \dfrac{1}{8}(2(2x-1)^2-1) = x^2 - x + \dfrac{1}{8}$.
Скалярное произведение непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$:

$$< f, g >= \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ему соответствует норма:

$$\| f \| = \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}.$$

Соотношения ортогональности:

$$< T_m, T_n >= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

Наилучшее приближение функции f многочленом степени $\leqslant n$:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{< T_i, f >}{< T_i, T_i >} T_i(x)$$

Пример 3.
$f(x) = x^3$ на $[-1,1]$ разложить в ряд по многочленам Чебышева.

T	K
1	1
x	x
$2x^2-1$	$x^2 - \frac{1}{2}$
$4x^3-3x$	$x^3 - \frac{3}{4}x$

$K = \widetilde{T}$ — отнормированные значения.

$$f(x) = x^3 = \widetilde{T}_3 + \frac{3}{4}T_1$$
$$x^3 = \sum_{i=0}^{3} \frac{< \widetilde{T}_i, f >}{< \widetilde{T}_i, \widetilde{T}_i >}\widetilde{T}_i$$

Пример 4.
$\parallel x^3 - P_2(x) \parallel_\infty \to min$ на отрезке $[-1, 1]$ приблизить многочленом, где $P_2(x)$ — любой многочлен второй степени.

Для отрезка $[-1, 1]$:

$$x^3 - P_2(x) = \widetilde{T}_3(x)$$
$$x^3 - x^3 + \frac{3}{4}x = P_2(x)$$
$$P_2(x) = \frac{3}{4}x$$

Пример 5.
$\parallel x^3 - P_2(x) \parallel_\infty \to min$ на отрезке $[2, 3]$ приблизить многочленом, где $P_2(x)$ — любой многочлен второй степени.

$$x^3 - P_2(x) = \overline{T}_3(x)$$
$$P_2(x) = x^3 - \overline{T}_3(x)$$

Вычислим $\overline{T}_3(x)$ по формуле $\overline{T}_n(x) = \dfrac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}T_n\left(\dfrac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$.

$$\overline{T}_3(x) = \frac{(b-a)^3}{2^5}T_3\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = \frac{1}{2^5}T_3(2x-5) = \frac{1}{32}(4(2x-5)^3 - 3(2x-5)) =$$
$$= \frac{1}{32}(4(8x^3 - 60x^2 + 150x - 125) - 6x + 15) = \frac{1}{32}(32x^3 - 240x^2 + 600x - 500 - 6x + 15) =$$
$$= x^3 - 7.5x^2 + 18.5625x - 15.15625$$

Подставив $\overline{T}_3(x)$ в $P_2(x)$, получим:

$$P_2(x) = x^3 - \overline{T}_3(x) = 7.5x^2 - 18.5625x + 15.15625$$

Пример 6.
Если $U_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\Big(T_{n+1}(x)\Big)'$ будет ли верно $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$?

n:

$$\frac{1}{n+1}\Big(2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\Big)' = \frac{1}{n+1}\Big(2T_n(x) + 2xT_n(x)' - T_{n-1}(x)'\Big)$$

n+1:

$$\frac{1}{n+2}\Big(2T_{n+1}(x) + 2xT_{n+1}(x)' - T_n(x)'\Big)$$

n-1:

$$\frac{1}{n}\Big(2T_{n-1}(x)+2xT_{n-1}(x)'-T_{n-2}(x)'\Big)$$

Подставим:

$$\frac{2T_{n+1}+2xT'_{n+1}-T'_n}{n+2}\overset{?}{=}\frac{2x\Big(2T_n+2xT'_n-T'_{n-1}\Big)}{n+1}-\frac{2T_{n-1}+2xT'_{n-1}-T'_{n-2}}{n}$$

Домашнее задание 6

1. Доказать, что $U_1(x)+U_3(x)+\cdots+U_{2n-1}(x)=U_{n-1}(x)U_n(x)$.

2. Доказать, что $U_0(x)+U_2(x)+\cdots+U_{2n-2}(x)=U^2_{n-1}(x)$.

3. а)[1] Введем на множестве многочленов $\mathbb{R}[x]_{<n}$ степени меньше n от одной переменной скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle_n=\sum_{j=0}^{n-1}f(x_i)g(x_i),$$

где $x_0,\dots,x_{n-1}$ — нули многочлена Чебышева степени n. Докажите, что многочлены Чебышева $T_0,\dots,T_{n-1}$ ортогональны друг другу относительно этого скалярного произведения, причем $\langle T_j,T_j\rangle_n=n/2$ при $j>0$ и $\langle T_0,T_0\rangle_n=n$.

б) Пусть f — произвольная действительная функция. Предположим, что $P(x)$ — такой многочлен степени n, что

$$P(x_m)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\langle\hat{T}_j,f\rangle_n}{\langle\hat{T}_j,\hat{T}_j\rangle_n}\,\hat{T}_j(x_m)$$

для всех $m=0,\dots,n-1$. Докажите, что $P(x)$ является интерполяционным многочленом Лагранжа функции f с узлами в точках $x_0,\dots,x_{n-1}$.

4. Для $f(x)=x^x$ найти наилучшее линейное приближение на отрезке $[1,4]$ в норме $\underset{[1,4]}{max}|f(x)|$.

Лекция 7

Матричные нормы.
Рассмотрим линейное пространство матриц размера n над комплексными числами. Норма $||\cdot||$ на пространстве $V=M_{n\times n}(\mathbb{C})$ называется **матричной нормой**, если

0. Это норма.

[1] Условие этой задачи несколько изменено по сравнению с тем, которое было на лекции.

4. Норма $||\cdot||$ является **согласованной с операцией умножения**, то есть

$$||AB|| \leq ||A||\ ||B|| \text{ для любых } A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),$$

(удовлетворяет свойству субмультипликативности).

Свойства:

1. $||E|| \geqslant 1$
   ► $||E|| \leqslant ||E||\ ||E|| \Rightarrow ||E|| \geqslant 1$ ■

2. Матричная норма называется **сохраняющей единицу**, если $||E|| = 1$.

3. Матричная норма называется **согласованной с векторной нормой** $|\cdot|$ на $\mathbb{C}^n$, если
$$|M\bar{x}| \leqslant ||M|| \cdot |\bar{x}|.$$

Если $||M||$ — матричная норма, тогда $||M||_* = ||M||x,\ x \geqslant 1$ — тоже матричная норма.

Примеры матричных норм.

- $||M|| = \sum\limits_{i,j=1,\dots,n} |m_{ij}|$
  $M = (m_{ij})_{n\times n}$
  Проверим свойства:

  0. Это норма Гельдера $|\cdot|_1$ на $\mathbb{C}^{n^2}$.
  1. $||M|| = |M^1|_1 + \cdots |M^n|_1$
     $||AB|| = \sum\limits_{i,j} |\sum\limits_{t} a_{it}b_{tj}| \leqslant \sum\limits_{i,j,t} |a_{it}||b_{tj}| \leqslant \sum\limits_{i,j,t,s} |a_{i,s}||b_{tj}| = \sum\limits_{i,s} |a_{is}| \sum\limits_{t,j} |b_{tj}| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$
  2. $||E|| = n$ — не выполняется, не сохраняет единицу.

  3. – Согласована ли с $|\cdot|_1$?

$$|Mx|_1 \overset{?}{\leqslant} ||M|| \cdot |x|_1$$

$$|Mx|_1 = \left|\left| M \cdot \left(\bar{x} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right) \right|\right|,\ |x|_1 = ||B||$$

     То есть, согласована.
     – Согласована с $|\cdot|_\infty$?

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix},\ Mx = \begin{pmatrix} M_1 x \\ \vdots \\ M_n x \end{pmatrix}$$

$$|Mx| = max| < M_i, \bar{x} > | \leqslant |x_{max}| \sum_{i,j}^{n} |m_{ij}| \leqslant |x|_\infty ||M||$$

То есть, согласована.

- **Норма Фробениуса** $||M||_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |m_{ij}|^2}$

  0. Это Евклидова норма на пространстве.

  1. $||M||_F^2 = tr(M^*M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(M^*M) = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$ — сумма квадратов сингулярных значений (согласованность с умножением).

  Если U — унитарная матрица, например, поворот, то есть, $U^* = U^{-1}$, то

  $$||U^{-1}MU||_F^2 = tr((U^*MU)^*U^*MU) = tr(U^*M^*MU) = tr(M^*M) = ||M||_F^2$$

  Более того: $||UM||_F = tr(M^*U^*UM) = tr(M^*M) = ||M||_F^2$.
  $M = U\Sigma V^*,\ U$ и V — ортогональные

  $$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \sigma_n & \end{pmatrix}$$

  $$||M|| = ||\Sigma||$$

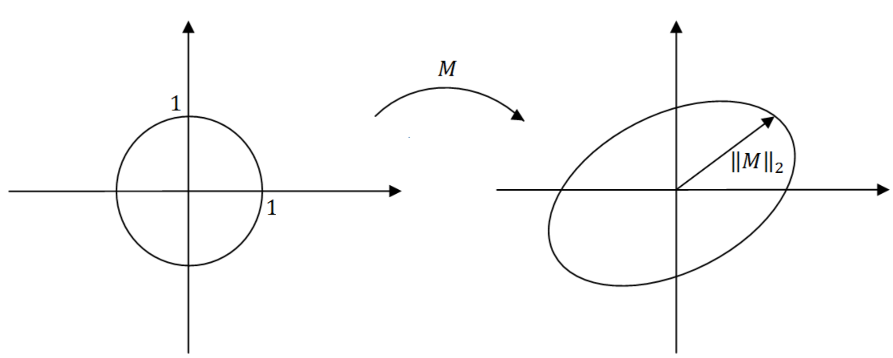
  Норма Фробениуса $||M||_F$ согласована с евклидовой $|\bar{x}|_2$.

Пусть на $\mathbb{C}^n$ задана норма $|\cdot|_1$. Функция из M_n в $\mathbb{C}$: $||M|| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{|Mx|}{|x|}$ называется **матричной нормой, индуцированной векторной нормой** $|\cdot|$.

Если $c = |x|,\ y = \frac{x}{|x|},\ |y| = 1$, то $Mx = M(cy) = cMy$. А так как $c > 0$, то $|Mx| = c|My|$.
То есть, здесь максимум достигается, так как:

$$\max_{x \neq y} \frac{|Mx|}{|x|} = \max_{|y|=1} \frac{c|My|}{c} = \max_{|y|=1} |My| = \max_{y \in B_1} |My|$$

.



Теорема.
Пусть $||\cdot||_\star$ индуцирована $|\cdot|_\star$, тогда

1. $||\cdot||$ — матричная норма, выполнены свойства 0, 1

2. $||\cdot||_\star$ согласована с $|\cdot|_\star$
   ► $|Mx|_\star \underset{x\neq\bar{0}}{=} \dfrac{|Mx|_\star}{|x|_\star}|x|_\star \leqslant \underset{z}{max}\dfrac{|Mz|_\star}{|z|_\star}|x|_\star = ||M||_\star |x|_\star$ ■

3. $||\cdot||_\star$ сохраняет единицу
   ► $||E||_\star = \underset{|y|_\star=1}{max}|Ey|_\star = \underset{|y|_\star=1}{max}|y|_\star = 1$ ■

4. Если существует другая норма $||\cdot||$, согласованная с $||\cdot||_\star$, то $||M|| \geqslant ||M||_\star$ ($||M_\star||$ минимальна).
   ► Пусть $|y|_\star = 1$ и $||M||_\star = |My|_\star$, тогда длина матрицы $||M||_\star = |My|_\star \leqslant ||M|| \cdot |y|_\star = ||M||$ ■

Теорема.

Векторная норма $\lvert\cdot\rvert_\star$	Индуцированная норма $\lVert\cdot\rVert_\star$
$\lVert\bar{x}\rVert_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lvert x_i\rvert$	$\lVert M\rVert_1 = \underset{j}{max}\lvert M^j\rvert_1 = \underset{j}{max}\sum\limits_{i}\lvert m_{ij}\rvert = \lVert M^*\rVert_1$
$\lVert\bar{x}\rVert_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \lvert x_i\rvert^2}$	$\sigma(M) = \sqrt{max\lambda_{M^*M}}$ (сингулярный радиус матрицы)
$\lVert\bar{x}\rVert_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}\lvert x_i\rvert$	$\lVert M\rVert_\infty = \underset{i}{max}\lvert M_i\rvert_1 = \underset{i}{max}\sum\limits_{j}\lvert m_{ij}\rvert$

Докажем, что векторной норме $|\bar{x}|_1$ соответствует индуцированная матричная норма $||M||_1$.
►

$$M = (M^1, \cdots, M^n)$$
$$Mx + M^1x_1 + \cdots M^n x_n$$
$$|Mx|_1 \leqslant |M^1x_1 + \cdots + M^n x_n|_1 \leqslant |x_1|\ |M^1|_1 + \cdots + |M^n|_1\ |x_n| \leqslant$$
$$(|x_1| + \cdots + |x_n|)\underset{j}{max}|M^j|_1 \leqslant |\bar{x}|_1 \underset{j}{max}|M^j|_1$$

Пусть максимум достигается на первом столбце, тогда $|Mx|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n}|m_{1j}| = ||M||_1$.

Оценка достигается, значит это и есть максимум. ■

Домашнее задание 7

1. Доказать, что векторной норме $|\bar{x}|_2$ соответствует индуцированная матричная норма $\sigma(M)$.

2. Доказать, что векторной норме $|\bar{x}|_\infty$ соответствует индуцированная матричная норма $||M||_\infty$.

3. Является ли матричной нормой $f(A) = \max\limits_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n} |a_{ij}|$?

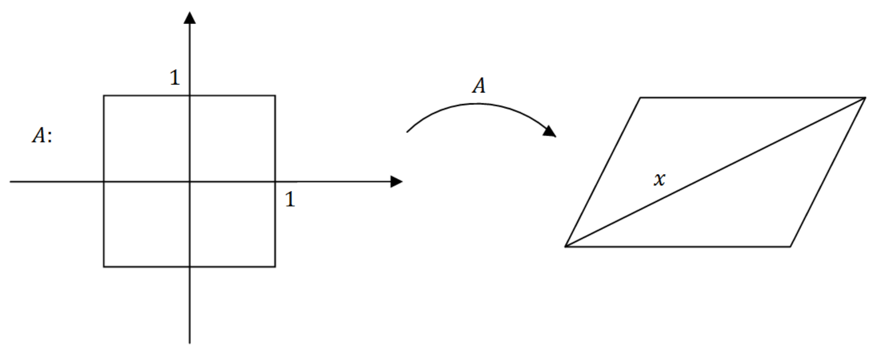
4. Доказать $||A^{-1}|| \geqslant \dfrac{||E||}{||A||}$.

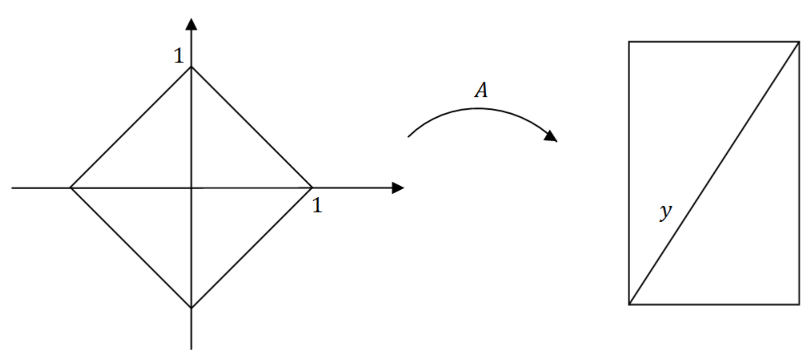
5. Найти все нормы: $||A||_\infty,\ ||A||_1,\ \sigma(A)$ для матрицы

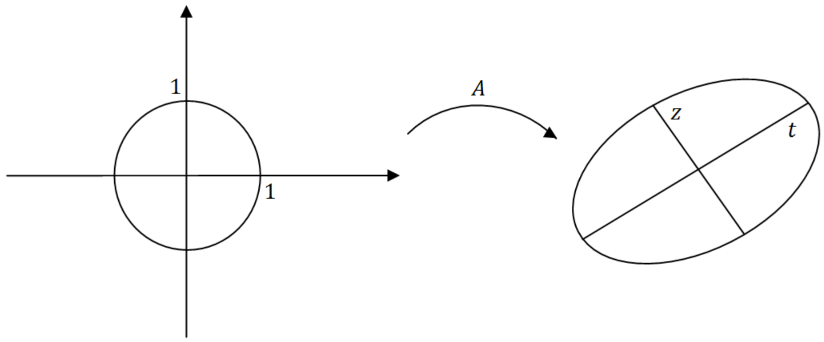
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

6. Найти $x,\ y,\ z,\ t$ для матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$







Лекция 8

Повторим несколько утверждений из предыдущих лекций.
В каждом векторном пространстве $V(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ есть норма $\nu(\bar{x}) \geqslant 0$ такая, что:

1. $\nu(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\nu(\bar{0}) = \bar{0}$

2. $\nu(\alpha\bar{x}) = |\alpha|\nu(\bar{x})$

3. $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$ для $\forall x, y \in V, \forall \alpha$

Норма Гёльдера:

$$|\bar{x}|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$
$$|\bar{x}|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$
$$|\bar{x}|_\infty = \underset{i=1,\cdots,n}{max}|x_i|$$

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Свойства матричной нормы $M \in M_n$:

1. $||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$

2. Матричная норма $||\cdot||$ на M_n согласована с векторной нормой $|\cdot|$ на $\mathbb{C}^n$, если

$$|Ax| \leqslant ||A|| \cdot |x|$$

3. Матричная норма сохраняет единицу, если $||E|| = 1$.

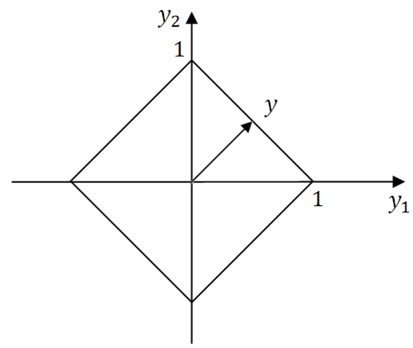
Норма Фробениуса: $||A||_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |a_{ij}|^2}$.
Она удовлетворяет свойствам 1, 2 для $|\cdot|_{1,\ 2,\ \infty}$, но не удовлетворяет свойству 3.

$||\cdot||_\star$ — индуцированная матричная норма, если верно

$$||A||_\star = \underset{\bar{x}\neq\bar{0}}{max}\frac{|Ax|_\star}{|x|_\star} = \left(y = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|_\star}\right) = \underset{|y|_\star=1}{max}|Ay|_\star$$

Пример 1.
Найти y для матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$||A||_1 = max|A\bar{y}| = \max_{|y_1|+|y_2|=1} |y_1 + 2y_2| + |3y_1 + 4y_2|$$

Максимум получим при $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$: $||A||_1 = 2 + 4 = 6$.

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Сингулярное разложение матрицы (SVD):

$$A = V\Sigma U^*$$

$V,\ U$ — унитарные матрицы ($U^* = U^{-1}$)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(A^*A)^* = A^*A = U\Sigma V^* V\Sigma U^* = U\Sigma^2 U^*$$

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$ — сингулярные значения матрицы.
Аналогично

$$AA^* = V\Sigma^2 V^*$$

Здесь $U^1, \cdots, U^n$ — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A^*A, а $V^1, \cdots, V^n$ — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы AA^*. U^i и V^i — правые и левые сингулярные векторы соответственно.

$||A||_2 = \sigma(A)$

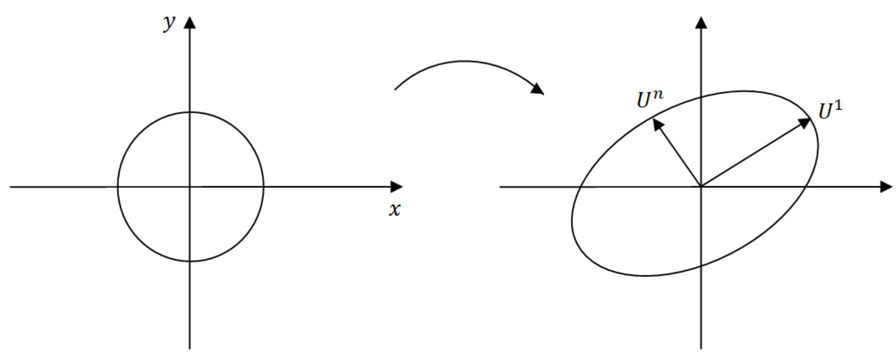
▶

$$||A||_2 = \underset{|x|_2=1}{max}|Ax|_2 = \underset{|x|_2=1}{max}\sqrt{(Ax, Ax)} = \underset{|x|_2=1}{max}\sqrt{(Ax)^*Ax} = \underset{|x|_2=1}{max}\sqrt{x^*A^*Ax}$$

$$A^*A \overset{\alpha \to U}{\to} \Sigma^2$$

$$x = \sum_i \alpha_i U_i, \ \sum_i |\alpha_i|^2 = 1$$

$$xx^* = \sum_i \alpha_i U_i U_i^* \alpha_i = \sum_i \alpha_i U_i U_i^{-1} \alpha_i = \sum_i |\alpha_i|^2$$



Подставим в $||A||_2$:

$$||A||_2 = \underset{|x|_2=1}{max}\sqrt{x^*A^*Ax} = \text{(в базисе } U\text{)} = \underset{|x|_2=1}{max}\sqrt{x\Sigma^2x^*} = \underset{\alpha:\ \sum\limits_i |\alpha_i|^2=1}{max}\sqrt{\sum_i \sigma_i^2|\alpha_i|^2} =$$

$$\underset{\alpha:\ \sum\limits_i |\alpha_i|^2=1}{max}\sqrt{\sigma_1^2|\alpha_1|^2 + \cdots + \sigma_n^2|\alpha_n|^2} \leqslant \underset{\alpha:\ \sum\limits_i |\alpha_i|^2=1}{max}\sqrt{\sigma_1^2(|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2)} = \sigma_1 \quad \blacksquare$$

Норма Фробениуса:

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^*A)}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ \vdots & * & * \\ a_{n1} & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}a_{11} + \cdots + \bar{a}_{n1}a_{n1} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |a_{11}|^2 + \cdots + |a_{n1}|^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Получим $\sqrt{tr(A^*A)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$||A|| = 1$?

$$||A||_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$
$$||A||_F \geqslant ||A||_2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F = \sqrt{7}$$
$$||A||_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = max\{1,\ 5\} = 5$$
$$||A||_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = max\{3,\ 3\} = 3$$

Спектральный радиус $\rho(A) = |\lambda_{max}(A)| = \max_i |\lambda_i|$

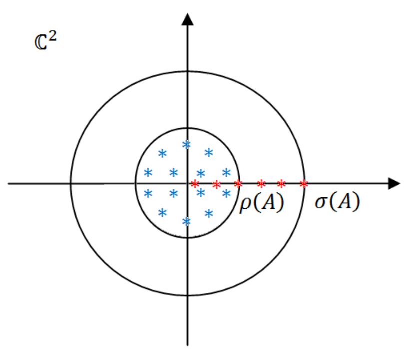
Теорема. Если матричная норма $||\cdot||$ согласована с некоторой векторной нормой, то

$$||A|| \geqslant \rho(A)$$

▶ $Av = \lambda v,\ v \neq 0$ — для собственного значения существует собственный вектор.
Из определения согласованности векторной нормы: $|Av| \leqslant ||A|| \cdot |v|$. С другой стороны, $|Av| = |\lambda v| = |\lambda||v|$. Получим, что $|\lambda| \leqslant ||A||$, то есть, норма не меньше, чем λ. ■

Следствие. В частности

$$\sigma(A) \geqslant \rho(A)$$



Здесь $\sigma_i(A)$ — сингулярные собственные значения, а $\rho(A)$ $(\lambda_i(A))$ — собственные значения.

Утверждение. Для любой матрицы A и $\forall\ \varepsilon > 0$ существует матричная норма $||\cdot||$, согласованная с некоторой векторной нормой $|\cdot|$, и такая, что

$$||A|| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$$

С помощью ε можно добиться равенства.

Разложение матрицы $A_{n\times n} = A_{n\times r}\cdot A_{r\times n}$, A ранга r.
Как получить приближенное разложение матрицы?
$A \approx X$, X ранга r, X — ?
Задача: найти X ранга $\leqslant r$ такое, что

$$||X - A|| \to min$$

Ответ: для матричных норм $||\cdot||_2$, $||\cdot||_F$ (и любой ортогонально инвариантной)

$$A = V\Sigma U^*$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A_r = V\Sigma_r U^*$$

Для $||A|| = ||A||_2 = \sigma(A)$.
► $U^1, \cdots, U^n$ — правый сингулярный базис. Пусть $\bar{w} \in < U^1, \cdots, U^{r+1} > \cap\ KerX$, где $KerX \geqslant n - r$, а X ранга $\leqslant r$, $|w| = 1$.
Так как $|Mx| \leqslant ||M||$, $|x| = 1$, тогда

$$(||X - A||_2)^2 \geqslant (|(X - A)w|_2)^2 = |Xw - Aw|^2 = |Aw|^2 = (\text{в базисе } U) =$$

$$= \left| V \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{r+1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| V \begin{pmatrix} \sigma_1 w_1 \\ \vdots \\ \sigma_{r+1} w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} \sigma_1 w_1 \\ \vdots \\ \sigma_{r+1} w_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 =$$

$$= \sigma_1^2 |w_1|^2 + \cdots + \sigma_{r+1}^2 |w_{r+1}|^2 \geqslant \sigma_{r+1}^2 (|w_1|^2 + \cdots + |w_{r+1}|^2) = \sigma_{r+1}^2 |w| = \sigma_{r+1}^2$$

для любой матрицы X, где

$$||A_r - A||_2 = ||V(\Sigma - \Sigma_r)U^*||_2 = ||\Sigma - \Sigma_r||_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{r+1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \right\|_2 = \sigma_{r+1}$$

Достигается для r, значит она оптимальна (меньше нет). Для евклидовой нормы это лучшее приближение. ■

Пример 2.
Найти наилучшее приближение A_1 ранга 1 для матрицы A в норме $||\cdot||_2$ и найти $||A - A_1||_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Так как матрица A симметричная, можно не находить A^*A. Найдем сразу собственное значение и собственный вектор.

$$det(A - \lambda E) = 0$$
$$\lambda_1 = 18,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 0$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Хотим построить сингулярное разложение $A = V\Sigma U^*$. Если $A^* = A$, то $V = U$.
После решения СЛАУ $(A - \lambda_i E)x = 0$ из λ_i получим v_i.

$$V = U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A_1 = V\Sigma_r U^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A_1 равен 1, $||A - A_1||_2 = 9$ (наибольший из остальных σ).

Домашнее задание 8

1. Найти наилучшее приближение ранга 2 по фробениусовой норме для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Найти наилучшее приближение B_1 ранга 1 для матрицы B в норме $||\cdot||_2$ и найти $||B - B_1||_2$, где
$$B = \begin{pmatrix} 6 & 30 & -21 \\ 17 & 10 & -22 \end{pmatrix}$$
3. Доказать утверждение из лекции: для любой матрицы A и $\forall\ \varepsilon > 0$ существует матричная норма $||\cdot||$, согласованная с некоторой векторной нормой $|\cdot|$ и такая, что
$$||A|| \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

Лекция 9

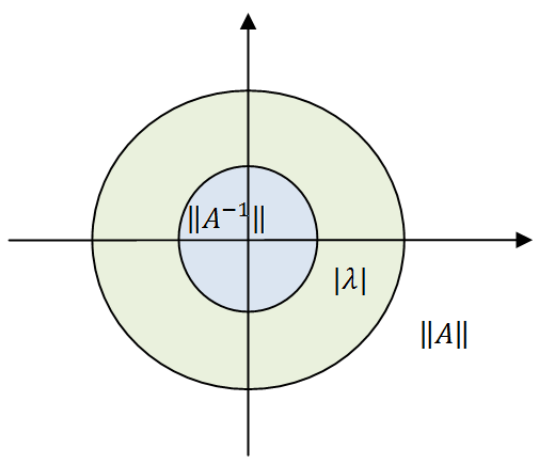
Оценка собственных значений

Оценка: Если $||A||$ — матричная норма, согласованная с некоторой векторной нормой, то
$$|\lambda| \leqslant ||A||,$$
где λ — любое собственное значение матрицы A.

То же можно применить и к обратной матрице.

Утверждение. Если матрица A — невырожденная, то для любого собственного значения λ верно
$$\frac{1}{||A^{-1}||} \leqslant |\lambda| \leqslant ||A||$$

Все собственные значения матрицы A находятся между двумя кольцами.



▶ Пусть λ — собстенное значение матрицы A, то есть, $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ для некоторого $\bar{x} \neq \bar{0}$, тогда

$$\bar{x} = \lambda A^{-1}\bar{x}$$
$$\lambda^{-1}\bar{x} = A^{-1}\bar{x}$$

То есть, λ^{-1} — собственное значение для матрицы A^{-1}.

$$|\lambda^{-1}| \leqslant ||A^{-1}|| \text{ (из оценки)}$$

$$|\lambda|^{-1} \leqslant ||A^{-1}||$$
$$|\lambda| \geqslant \frac{1}{||A^{-1}||}$$

С учетом оценки, получим

$$\frac{1}{||A^{-1}||} \leqslant |\lambda| \leqslant ||A|| \quad \blacksquare$$

Матрица называется матрицей **с диагональным преобладанием**, если каждое из чисел на диагонали больше суммы модулей по строке, то есть,

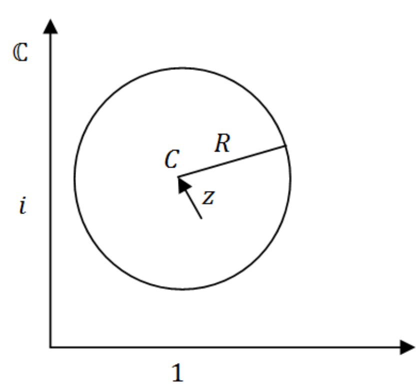
$$\forall i = 1, \cdots, n \ |a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|.$$

1-я Теорема Гершгорина. Все собственные значения матрицы $A_{n\times n} = (a_{ij})$ содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |a_{ik}|, \ i = 1, \cdots n.$$

Обозначим: $R_i = \sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n} |a_{ik}|$.

Каждое из собственных значений λ матрицы A всегда расположено в одном из кругов.



$$|z - C| \leqslant R$$

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Круг с центром в точке $C = a_{ii}$ и радиусом $R = R_i = \sum\limits_{k \neq i} |a_{ik}|$.

Если λ — собственное значение матрицы A, то

$$|A - \lambda E| = |(A - \lambda E)^T| = |A^T - \lambda E| = 0$$

Получили, что λ — собственное значение матрицы A^T.
У матрицы A^T собственные значения те же, что и у матрицы A, а строки A^T — столбцы A, такие что:
Следствие. Все собственные значения матрицы A содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |a_{ki}|, \ i = 1, \cdots n.$$

Обозначим: $C_i = \sum\limits_{k=1, k \neq i}^{n} |a_{ki}|$.
Доказательство теремы.
► Пусть λ — собственное значение A, докажем, что λ находится в объединении кругов Гершгорина.
У каждого собственного значения существует собственный вектор:

$$Ax = \lambda x, \bar{x} \neq \bar{0}.$$

Пусть, например, $|x_1|$ — наибольший из модулей $|x_i|$, то есть, $|x_1| \geqslant |x_2|, |x_3|, \cdots, |x_n|$. Тогда из $Ax = \lambda x$ следует

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$
$$(\lambda - a_{11})x_1 = a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$|\lambda - a_{11}||x_1| = |a_{12}|x_2 + \cdots + a_{1n}x_n| \leqslant \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}||x_k| \leqslant \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}||x_1| = |x_1|R_1$$
$$|\lambda - a_{11}| \leqslant R_1 = \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}|$$

Получили, что если x_1 — наибольший, то собственное значение попадает в первый круг Гершгорина. И так далее, если x_n — наибольший, то собственное значение попадет в n-ый круг Гершгорина. ■

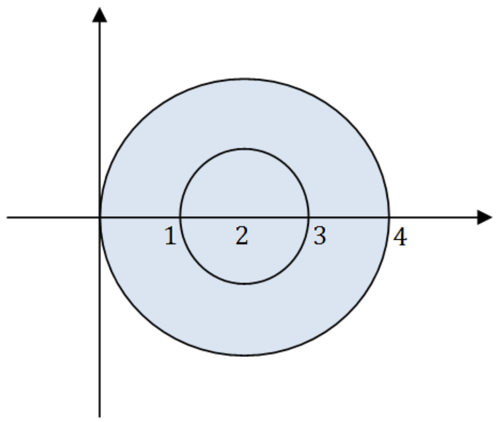
Следствие. Матрица с диагональным преобладанием является невырожденной.
► Доказательство следует из того, что в такой матрице все собственные значения $\lambda \neq 0$ ■

Пример 1.
Дана матрица $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим круги Гершгорина.

№	Центр	Радиус
1	2	|-1|=1
2 – (n-1)	2	|-1|+|-1|=2
n	2	|-1|=1



Все собственные значения содержатся в объединении кругов на комплексной плоскости.

$$|\lambda - 2| \leqslant 1$$
$$|\lambda - 2| \leqslant 2$$

$$\begin{cases} A^* = A \\ A \in M_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Получили, что $\lambda_i \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 4$.

Если $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{k_s}$, где λ_i различны, то числа k_i называют кратностями соответствующих собственных значений.

2-я Теорема Гершгорина. Если объединение U r кругов Гершгорина не пересекается с остальными $(n - r)$ кругами, то U содержит ровно r собственных значений с учетом кратностей.

► Пусть D — диагональная часть матрицы A

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

а матрица $B = A - D$ — матрица A без диагональных элементов

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

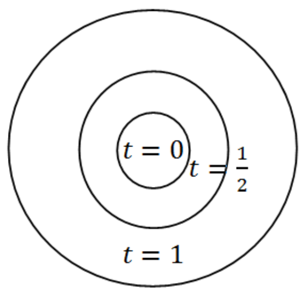
Рассмотрим непрерывное непрерывное семейство матриц

$$A_t = D + tB$$

Это непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в $M_n(\mathbb{C})$. Здесь $A_0 = D,\ A_1 = A$.
Корни характеристического многочлена матрицы A_t непрерывно зависят от t_0. При $t = 0$ — это $\lambda_1(0) = a_{11}, \cdots, \lambda_n(0) = a_{nn}$, а при $t = 1$ — это собственные числа матрицы A.
По первой теореме Гершгорина $\forall t\ \lambda \in U$ в объединении кругов Гершгорина с центрами $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ и радиусами

$$R_i(t) = tR_i.$$

С ростом t круги "раздуваются" из точек (движение по непрервной кривой).



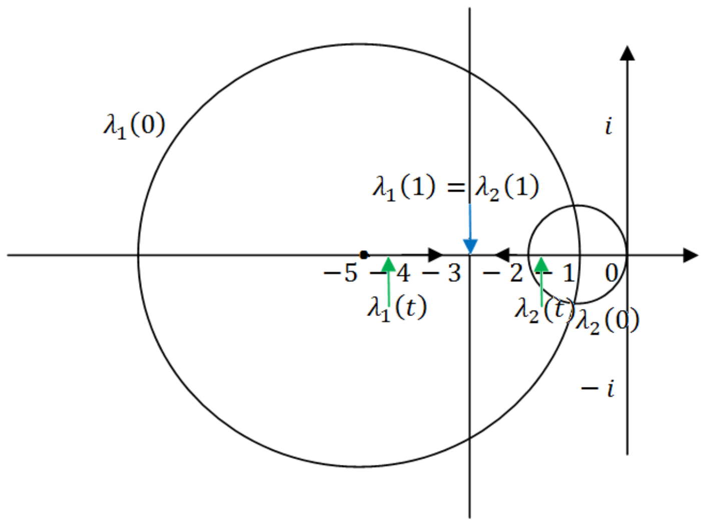
Если объединение некоторых r кругов Гершгорина не пересекаются с остальными при $t = 1$, то и при $t < 1$ тоже, значит каждое из соответствующих r собственных значений λ_i двигается из a_{ii} по непрерывной кривой внутри U. ■

Пример 2.
Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2$$

Получили, что $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.



$$A = \begin{pmatrix} -1 & t \\ -4t & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен

$$\chi_{A_t}(\lambda) = |A_t - \lambda E| = \lambda^2 + 6\lambda + 5 + 4t^2$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{1-t^2},\ t < 1$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm i \cdot 2\sqrt{1-t^2},\ t > 1$$

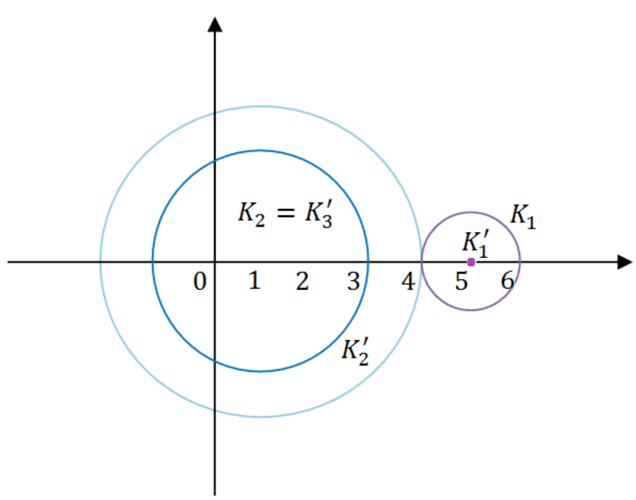
Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для матрицы A:

$$|\lambda - 5| \leqslant 1$$

$$|\lambda - 1| \leqslant 2 \text{ — 2 раза}$$



В K_1 находится одно собственное значение λ_1, в K_2 — два $\lambda_2,\ \lambda_3$.
Для матрицы A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1':\ |\lambda - 5| = 0 \Rightarrow \lambda_1' = 5 \\ K_2':\ |\lambda - 1| \leqslant 3 \\ K_3':\ |\lambda - 1| \leqslant 2 \end{aligned}$$

То есть, $\lambda_2',\ \lambda_3' \in K_2' = K_2' \cup K_3'$.
Так как $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\} = \{\lambda_1',\ \lambda_2',\ \lambda_3'\}$ — те же собственные значения, то $\lambda_1 = \lambda_1 = 5$.
Значит λ_2' и λ_3' — те же, что λ_2 и λ_3, то есть, $\lambda_2',\ \lambda_3' \in K_2$.
Итог для матрицы A: $\lambda_1 = 5$, а $\lambda_2,\ \lambda_3$ удовлетворяют условию $|\lambda - 1| \leqslant 2$.

Домашнее задание 9

1. Нарисовать круги Гершгорина для матрицы A и с их помощью оценить собственные значения. Вычислить собственные значения и сравнить результаты.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.3 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. С помощью теоремы Гершгорина нарисовать область, где находятся собственные значения матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Доказать, что определитель матрицы A не равен 0 ($detA \neq 0$). Нарисовать наименьшую область, содержащую собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & cos\ x & cos^2\ x \\ 0 & 5 & sin^2\ x \\ 3sin^2\ x & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Доказать, что в номерах 1, 2 и 3 все собственные значения — положительные действительные числа и оценить их.
Подсказка: если λ — собственное значение матрицы A, то и $\overline{\lambda}$ — тоже ее собственное значение, так как $|\overline{A - \lambda E}| = |A - \overline{\lambda} E| = 0$.

Лекция 10

Функции от матрицы.
Пусть A — квадратная матрица ($A \in M_n(\mathbb{C})$)

$$A^m = A \cdot ... \cdot A,\ A^0 = E$$

Если A невырожденная, то

$$A^{-m} = (A^{-1})^m$$

Многочлен от матрицы: если $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, то $f(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m$ — тоже матрица.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(x) = x^2 - 1$
Тогда

$$f(A) = A^2 - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Утверждение. Если C — невырожденная матрица (например, $C = Te \to e'$ — матрица перехода от базиса e к базису e' в $\mathbb{C}^n$) и $A' = C^{-1}AC$ (то есть, A' — матрица того же линейного оператора, что и A, в новом базисе e' вместо старого e), то для любого многочлена $f(x)$ верно $f(A') = C^{-1}f(A)C$.

► Если $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i A^i$, то $f(A') = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i A'^i = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i C^{-1}AC \cdot C^{-1}AC \cdot C^{-1} \cdots AC =$
$= \sum\limits_{i=0}^{n} a_i C^{-1} A^i C = C^{-1}(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i A^i)C = C^{-1}f(A)C$ ■

Следствие.

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(A') = 0$$

Если A' — диагональная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

то

$$f(A') = \sum_{i=0}^{n} a_i (A')^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \begin{pmatrix} d_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(d_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(d_n) \end{pmatrix}$$

В частности, если все собственные значения $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ матрицы A различны, то

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} v_1 \mid & v_2 \mid & \cdots \mid & v_n \end{pmatrix}$$

Причем, v_1 — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1 (то есть, $Av_1 = \lambda_1 v_1$), $\cdots$, v_n — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_n ($Av_n = \lambda_n v_n$), тогда $A = CA'C^{-1}$

$$f(A) = Cf(A')C^{-1} = C \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} C^{-1}$$

Жорданова форма.
Жорданова клетка — это матрица вида

$$J = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} C^{-1}$$

Например,

$$J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Например, если $V = P_n = \mathbb{C}[\mathrm{x}]_{\leqslant n} = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\},\ D : V \to V :\ f(x) \mapsto f'(x)$ — дифференцирование. f — собственный вектор для D тогда и только тогда, когда $Df = \lambda f$, то есть $f'(x) = \lambda f(x)$, где λ — число, тогда $f(x) = a_0 = const,\ f'(x) = 0 \cdot f(x) = 0$.

Базис Маклорена.

$$e_0 = 1,\ e_1 = \frac{x}{1!}, \cdots,\ e_u = \frac{x^u}{u!}$$

В этом базисе

$$D(e_k) = \left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e_{k-1}$$

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J_n(0)$$

$$J_n(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \underset{k}{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \underset{k+1}{1} & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \underset{n}{1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(так как $D^k(e_u) = e_{n-k}$ и т.д.)

Предложение. Если $f(x)$ — многочлен, то

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \dfrac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & \ddots & \cdots & \dfrac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

► Так как $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, то достаточно проверить формулу для $f(x) = x^i$. Тогда в каждой клетке получаем $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \dfrac{(x^i)^{(t)}}{t!} = \dfrac{f^{(t)}(x)}{t!}$ для подходящего t.
Имеем: при $f(x) = x^i$

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}^i = \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right)^i =$$

$$= (\lambda E + J_k(0))^i = \sum_{t=0}^{i} \lambda^t J_k(0)^{i-t} C_i^t$$

Ненулевые элементы только в клетках с координатами $(a, a + (i-t))_i$, в этих клетках стоит

$$\lambda^t C_i^t = \frac{\lambda^t i!}{t!(i-t)!},$$

при этом

$$f^{(i-t)}(\lambda) = \frac{i!}{t!} \lambda^t$$

Теорема о Жордановой форме. Длялюбого линейного оператора ϕ в $\mathbb{C}^n$ существует базис (жорданов базис), в котором матрица оператора ϕ преобретает вид

$$\phi_i = J(\phi) = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_T \end{pmatrix},$$

где J_i — жордановы клетки.

Если A — матрица $n \times n$, что

$$\phi_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_i - \lambda)^{k_i},$$

то k_i — кратности собственных значений λ_i.

$$J(A) = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} \lambda_1 & 0 & & & & 0 & & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 & & & 0 & & 0 \\ & 0 & \lambda_2 & & & & & \\ \hline & & & & \lambda_3 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & & & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & 0 & \cdots & \lambda_3 & \\ \hline 0 & 0 & & & & 0 & & \ddots \end{array}\right)$$

Следствие. Если $J = J(A)$ — жорданова форма A, C — матрица, в которой по столбцам записан жорданов базис, то

$$f(J) = C^{-1}f(A)C \Leftrightarrow f(A) = Cf(J)C^{-1},$$

где

$$f(J) = \left(\begin{array}{c|c|c} f(J_1) & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & f(J_2) & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \ddots \end{array}\right)$$

Аннулирующий многочлен матрицы A — такой многочлен $f(x)$, что $f(A) = 0$.

Минимальный многочлен матрицы A (обозначается $m_A(x)$) — это аннулирующий многочлен наименьшей возможной степени со старшим коэффициентом 1.

Пример 2.
$\chi_A(\lambda)$ — аннулирующий многочлен для A (по теореме Гамильтона-Кели).

$$\chi_A(A) = C^{-1}\chi_A(J)C = C^{-1}((\lambda_1 E - J)^{k_1} \cdots (\lambda_i E - J)^{k_i})C =$$

$$= C^{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \ddots \end{array}\right)^{k_i} \cdots C = C^{-1}OC$$

Получим $\chi_A(\lambda) = 0$.

Пусть m_i — порядок наибольшей жордановой клетки с $\lambda = \lambda_i$ (геометрическая кратность собственного значения). Тогда $m_i \leqslant k_i$ и $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_i)^{m_i}$ — минимальный многочлен матрицы A (он же — минимальный многочлен J).

Как вычислить $f(A)$, зная минимальный многочлен $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_s)^{m_s}$? Если $f(x) = m_A(x)q(x) + R(x)$ — деление с остатком, где $degR(x) < d$ ($d = degm_A(x)$ — степень минимального многочлена), то $f(A) = 0 \cdot q(A) + R(A) = R(A)$ — **многочлен Лагранжа-Сильвестра**.

$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ — спектр, $R_1, \cdots, R_s$ — соответствующие алгебраические кратности.

$$\begin{matrix} f(\lambda_1) & \cdots & f(\lambda_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(k_1-1)}(\lambda_1) & \cdots & f^{(k_s-1)}(\lambda_s) \end{matrix}$$

$$k_1 + \cdots + k_s = u$$

P — многочлен Лагранжа-Сильвестра.

$$P(\lambda_j) = f(\lambda_k)$$

$$\vdots$$

$$P^{(k_j-1)}(\lambda_j) = f^{(k_j-1)}(\lambda_j),\ j = 1, \cdots, s$$

Определяющий многочлен

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

многочлены

$$\phi_j = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_j)^{k_j}}$$

Тогда искомый многочлен

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{j1} + \alpha_{j2}(\lambda - \lambda_j) + \cdots + \alpha_{jk_j}(\lambda - \lambda_j)^{k_j - 1})\psi_j(\lambda)$$

$$\alpha_{jl} = \frac{1}{(l-1)!} \left(\frac{f(\lambda)}{\psi_j(\lambda)} \right)^{(l-1)}_{\lambda = \lambda_j}, \quad l = 1, \cdots, k_j,\ j = 1, \cdots, s$$

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{s} (f(\lambda_j)\phi_{j1}(\lambda) + f'(\lambda_j)\phi_{j2}(\lambda) + \cdots + f^{(k_j-1)}(\lambda_j)\phi_{jk_j}(\lambda))$$

Спектральное разложение:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{s}(f(\lambda_j)z_{j1} + f'(\lambda_j)z_{j2} + \cdots + f^{(k_j-1)}(\lambda_j)z_{jk_j}),$$

где z_{ij} — спектральные компоненты матрицы A.

Замечание. Спектральные компоненты зависят только от матрицы.

Утверждение. z_{ij} являются многочленами от матрицы A степени меньшей, чем степень минимального многочлена.

Утверждение. Для любой матрицы A компонентные матрицы (спектральные компоненты) являются линейно независимыми.

Утверждение. Спектральные компоненты z_{ij} коммутируют между собой и с A.

Задача: Написать формулу для A^{-1} в виде многочлена от A.

►

$$\begin{gathered} det(A) \neq 0 \text{ (так как существует } A^{-1}) \\ (-1)^n(A^n + C_1A^{n-1} + C_2A^{n-2} + \cdots) + detA \cdot E = 0 \Rightarrow \\ A((-1)^n(A^{n-1} + C_1A^{n-2} + \cdots) = -detA \cdot E \\ A\left(\frac{(-1)^{n-1}}{detA}(A^{n-1} + C_1A^{n-2} + \cdots)\right) = A \cdot A^{-1} = E \ \blacksquare \end{gathered}$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_kA^k$ **сходится к матрице** F, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon):\ \forall N > N(\varepsilon)$

$$||\sum_{k=0}^{N}\alpha_kA^k - F|| < \varepsilon$$

Функция f называется **регулярной** на множестве S, если для любого $A \in S$ существует степенной ряд

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kA^k$$

Утверждение.

$$T^{-1}f(A)T = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(T^{-1}A^kT)$$

Теорема. f определена на матрице A.

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача Коши:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

Найти e^A.

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Собственные значения матрицы: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$
Тогда жорданова матрица

$$J = \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$e^J = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^A = Te^TT^{-1}$$

Подставим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e-e^2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

$$f(A) = f(1)z_{11} + f(2)z_{21}$$

1. $f(\lambda) = \lambda - 2,\ A - 2E = (-1)z_{11} \Rightarrow$

$$z_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $f(\lambda) = \lambda - 1,\ A - E = z_{21} \Rightarrow$

$$z_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = f(1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + f(2)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$sin\left(\frac{\pi A}{2}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Утверждение. Если $||A|| < 1$, то $E - A$ обратима и $(E-A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$.

$$(E-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=1}^{\infty} A^k = E$$

Критерий Коши:

$$||\sum_{k=0}^{N} A^k - (E-A)^{-1}|| \leqslant ||\sum_{k=M}^{N} A^k|| \leqslant \sum_{k=M}^{N} ||A||^k,$$

причем последовательность чисел $||A||^k = q^k,\ |q| < 1$ является сходящейся.

Домашнее задание 10

1. Дана жорданова форма

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   Найти спектральное разложение для A и вычислить:

   - $f(\lambda) = sin(\frac{\pi}{2}\lambda)$
   - $f(\lambda) = e^{\lambda t}$
   - $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$
   - $f(\lambda) = \lambda^{100}$

2. Решить задачу Коши.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1, & x_1|_{t=0} = 1\\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3, & x_2|_{t=0} = 1\\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3, & x_3|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

3. Проскуряков "Сборник задач" №1164, 1165, 1167 – 1170.

Лекция 11

Решение систем линейных уравнений.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} x + 0.99y = 1.01 \\ x + 1.01y = 0.99 \end{cases}$$

Надо найти приблизительное решение. Все коэффициенты известны с точностью до 1%. Либо $x+y=1$ — бесконечное множество решений, либо $\begin{cases} x + y = 1.01 \\ x + y = 0.99 \end{cases}$ — нет решений.

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Если считать, что коэффициенты точно известны, то можно найти решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \frac{1}{0.02} \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

При малом изменении коэффициентов (даже на 1%) решение может испортиться.

$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ — устойчивая система.

Коэффициенты известны с точностью до 1%.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm 2\%$$

Даже если b известен точно, при изменении матрицы все может измениться. Есть два типа ошибок — неточная матрица и неточная правая часть.

Общая постановка задачи.
Найти $\bar{x}$, удовлетворяющий системе $A\bar{x} = \bar{b}$.
Пусть $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ — решение приближенной системы ($hatA, hatx, hatb$ считаем известны).
Обозначим:

$$\Delta A = \hat{A} - A$$

$$\Delta x = \hat{x} - x$$

$$\Delta b = \hat{b} - b$$

Мы хотим оценить Δx, причем Δb считаем "малыми".
Так как A и b неизвестны, считаем $x \approx \hat{x}$.
Абсолютная погрешность: $|\Delta x|$
Относительная погрешность: $\dfrac{|\Delta x|}{|x|}$, где $|\cdot|$ — неоторая векторная норма.

Оценивая $|b|_1(|b|_\infty)$ можем оценить $|\Delta x|_1(|\Delta x|_\infty)$.

Упрощенный вариант $\hat{A} = A$

Дано:

$$\begin{cases} Ax = b \\ A(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax = b & (*) \\ A\Delta x = \Delta b & (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = A^{-1}b & \text{(v)} \\ \Delta x = A^{-1}\Delta b & \text{(vv)} \end{cases}$$

Считаем, что $|x| \approx |\hat{x}|,\ |b| \approx |\hat{b}|$.

Из (*) получим

$$|b| \leqslant ||A||\ |x| \Leftrightarrow |x| \geqslant \frac{|b|}{||A||}\ \ (1),$$

а из (**)

$$|\Delta b| \leqslant ||A||\ |\Delta x|\ \ (2)$$

Из (v) получим

$$|x| \leqslant ||A^{-1}||\ |b|\ \ (3),$$

а из (vv)

$$|\Delta x| \leqslant ||A^{-1}||\ |\Delta b|\ \ (4)$$

Тогда относительная погрешность:

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{|x|} \overset{(1),(4)}{\leqslant} \frac{||A^{-1}||\ |\Delta b|}{|b|/||A||} = ||A||\ ||A^{-1}|| \frac{|\Delta b|}{|b|}$$

$$\delta x \overset{(2),(3)}{\geqslant} \frac{|\Delta b|/||A||}{||A^{-1}||\ |b|} = \frac{1}{||A||\ ||A^{-1}||}\ \frac{|\Delta b|}{|b|}$$

Обозначение: $||A||\ ||A^{-1}|| = cond(A) = \chi(A)$ — **число обусловленности**.

Например, для евклидовой нормы

$$\chi_2(A) = ||A||_2\ ||A^{-1}||_2$$

В итоге, получим:

$$\frac{1}{\chi(A)}\delta b \leqslant \delta x \leqslant \chi(A)\delta b, \quad \delta b = \frac{|\Delta b|}{|b|}$$

А для общей задачи, если $(A + \Delta A)\hat{x} = b + \Delta b,\ \Delta x = \hat{x} - x$ ($\Delta b, \Delta A, \Delta x$ — малые), то

$$\frac{1}{\chi(A)}(\delta b + \delta A) \leqslant \delta x \leqslant \chi(A)(\delta b + \delta A), \quad \delta A = \frac{||\Delta A||}{||A||}$$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix},\ \bar{b} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

Пусть у нас норма $|\cdot|_1$, тогда число обусловленности

$$\chi_1(A) = ||A||_1||A^{-1}||_1 = \left\|\begin{matrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{matrix}\right\|_1 \cdot 50 \cdot \left\|\begin{matrix} 1.01 & -0.99 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right\|_1 = 2 \cdot 50 \cdot 2.01 = 201$$

$$\delta x \leqslant 201\delta b$$

Чтобы было $\delta x < 1\%$ надо $\delta b < \dfrac{1}{201} \cdot 1\%$.

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

У b ошибка в 1%. На сколько изменится x при изменении b?

Найдем число обусловленности.

$$\chi_\infty(A) = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\|_\infty \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\|_\infty = 3 \cdot 3 = 9$$

$\delta x < 1\%$, если $\delta b < 0.1\%$.

Свойства числа обусловленности:

1. $\chi(A) \geqslant 1$ (так как для любой нормы $||A^{-1}|| \geqslant \dfrac{1}{||A||}$)
   Существет такая матрица A, что $\chi(A) = 1$ только, если $||E|| = 1$ — норма сохраняет единицу, так как иначе $\chi(A) = ||A||\ ||A^{-1}|| \geqslant ||AA^{-1}|| = ||E||$

2. $\chi(AB) \leqslant \chi(A)\chi(B)$

   ► $\chi(A)\chi(B) = ||A||\ ||A^{-1}||\ ||B||\ ||B^{-1}|| \geqslant ||AB||\ ||B^{-1}A^{-1}|| = ||AB||\ ||(AB)^{-1}|| = \chi(AB)$ ■

3. $\chi(A^{-1}) = \chi(A)$

4. Для евклидовой нормы $||\cdot||_2$: если $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$ — сингулярные собственные значения, что
   $$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)},$$
   $$\sigma_n = \sqrt{\lambda_{min}(A^*A)},$$

   тогда $\chi_2(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2 = \sigma_1(A)\sigma_1(A^{-1}) = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}$
   Например, если $A = A^*$ — самосопряженная матрица, то
   $$\chi_2(A) = \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|$$

5. Для любой матричной нормы $||\cdot||$, согласованной с некоторой векторной нормой $|\cdot|$
   $$\chi(A) \geqslant \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|$$

$\blacktriangleright$ $||A|| \geqslant \rho(A) = |\lambda_{max}(A)|$

$||A^{-1}|| \geqslant \rho(A^{-1}) = \left|\dfrac{1}{\lambda_{min}(A)}\right| \Rightarrow \chi(A) = ||A||\ ||A^{-1}|| \geqslant \dfrac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$

Так как λ — собственное значение A, то $\dfrac{1}{\lambda}$ — собстенное значение A^{-1}. $\blacksquare$

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} 0.97 & 1.98 \\ 0.99 & 3.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.01 \\ 3.97 \end{pmatrix}$$

Решить приближенно и оценить погрешность решения.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ \hat{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Относительно какой нормы ошибка меньше? $(|\cdot|_1, |\cdot|_\infty, |\cdot|_2)$

$$\chi(A) \approx \chi(\hat{A}) \approx ||\hat{A}||\ ||\hat{A}^{-1}|| = \left\|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}\right\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_\infty(A) = max\{3, 4\} \cdot max\{5, 2\} = 20$$
$$\chi_1(A) = max\{2, 5\} \cdot max\{4, 3\} = 20$$
$$\chi_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^*A)}{\lambda_{min}(A^*A)}}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Собственные значения A^*A: $\lambda_{max} = 14.93,\ \lambda_{min} = 0.069$, тогда $\chi_2(A) = \sqrt{\dfrac{14.93}{0.069}} \approx 15$

$$\Delta b = \hat{b} - b = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.03 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 b = \frac{|\Delta b|_1}{|b|_1} \approx \frac{|\Delta b|_1}{|\hat{b}|_1} = \frac{0.01 + 0.03}{3 + 4} = 0.0057$$
$$\delta_2 b = \frac{\sqrt{0.01^2 + 0.03^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0.0063$$
$$\delta_\infty b = \frac{0.03}{4} = 0.0075$$
$$\delta_1 A = \frac{||\Delta A||_1}{||A||_1} = \frac{0.04}{5} = 0.008$$
$$\delta_\infty A = \frac{||\Delta A||_\infty}{||A||_\infty} = \frac{0.05}{4} = 0.0125$$

Собственные значения для $\Delta A^* \Delta A$: $\lambda_{min} = 0.000487,\ \lambda_{max} = 0.00131, \chi_2(\Delta A) =$
$= \sqrt{\dfrac{0.00131}{0.000487}} = 1.64$, тогда

$$\delta_2 A = \frac{||\Delta A||_2}{||A||_2} = \frac{\sigma_1(\Delta A)}{\sigma_1(A)} = \frac{\sqrt{0.00131}}{\sqrt{14.93}} = 0.009$$
$$\delta_1 x \leqslant \chi_1(A)(\delta_1 b + \delta_1 A) = 20 \cdot (0.0057 + 0.008) = 0.27$$
$$\delta_2 x \leqslant \chi_2(A)(\delta_2 b + \delta_2 A) = 15 \cdot (0.0063 + 0.009) = 0.23$$
$$\delta_\infty x \leqslant \chi_\infty(A)(\delta_\infty b + \delta_\infty A) = 20 \cdot (0.0075 + 0.0125) = 0.4$$

Норма $|\cdot|_2$ дала наименьшее значение ошибки 0.23, а $|\cdot|_\infty$ — наибольшее 0.4.

Оценить ошибку для обратной матрицы.
$A = \hat{A} + \varepsilon$, если знаем $\hat{A}^{-1}$. Ошибка приближения $A^{-1} \approx \hat{A}^{-1}$?

$$\chi(A) \approx \chi(\hat{A})$$

Надо оценить

$$\delta A^{-1} = \frac{||(\hat{A}+\varepsilon)^{-1} - A^{-1}||}{||A^{-1}||} = \frac{||-\hat{A}^{-1}(E - \hat{A}(\hat{A}+\varepsilon)^{-1})||}{||A^{-1}||} = \frac{||-\hat{A}^{-1}(E - (E - \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1})||}{||A^{-1}||} \approx$$

$$\approx \frac{||\hat{A}^{-1}(E - (E + \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1})||}{||\hat{A}^{-1}||} \leqslant \frac{||\hat{A}^{-1}||}{||\hat{A}^{-1}||}\,||E - (E + \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1}||$$

$$E - (E - \hat{A}^{-1}\varepsilon)^{-1} = E - (E - Y)^{-1} = E - (E + Y + Y^2 + Y^3 + \cdots) = -(Y + Y^2 + \cdots)$$

$$||\sum_{t=1}^{\infty}(\hat{A}^{-1}\varepsilon)^t|| \leqslant \sum_{t=1}^{\infty}||\hat{A}^{-1}||^t||\varepsilon||^t = \frac{||\hat{A}^{-1}||\;||\varepsilon||}{1 - ||\hat{A}^{-1}||\;||\varepsilon||} \approx ||\hat{A}^{-1}||\;||\varepsilon|| = \frac{\chi(\hat{A})}{||\hat{A}||}||\varepsilon|| = \chi(\hat{A})\frac{||\varepsilon||}{||\hat{A}||}$$

Более точно

$$\delta A^{-1} \leqslant \frac{\chi(\hat{A})\delta\varepsilon}{1 - \chi(\hat{A})\delta\varepsilon}, \quad \delta\varepsilon = \frac{||\varepsilon||}{||\hat{A}||}$$

Пример 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти $f(A) = A^{100},\ sin\left(\frac{\pi}{2}\,A\right)$.

Минимальный многочлен для матрицы $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$. Тогда для любой функции $f(\lambda)$, определенной на спектре матрицы A спектральное разложение будет иметь вид

$$f(A) = f(1)z_{11} + f'(1)z_{12} + f(2)z_{21}$$

$$f_1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$
$$f_1(A) = f_1(2)z_{21}$$
$$A^2 - 2A + E = (2^2 - 2\cdot 2 + 1)z_{21}$$

Получим, что

$$z_{21}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \lambda - 2$$
$$A - 2E = (-1)z_{11} + 1 \cdot z_{12}$$
$$f_3 = 1$$
$$E = 1 \cdot z_{21} + 1 \cdot z_{11}$$

Получим, что

$$z_{11} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z_{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для A^{100}: $f(1) = 1^{100},\ f'(1) = 100 \cdot 1^{99},\ f(2) = 2^{100}$
Получим

$$A_{100} = 1^{100} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 100 \cdot 1^{99} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично получим

$$sin\left(\frac{\pi}{2} A\right) = \begin{pmatrix} sin\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & sin\ \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2}\, cos\ \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & sin\ \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание 11

1. Доказать утверждение из лекции. Если $(A + \Delta A)\hat{x} = b + \Delta b,\ \Delta x = \hat{x} - x$, то

$$\frac{1}{\chi(A)}(\delta b + \delta A) \leqslant \delta x \leqslant \chi(A)(\delta b + \delta A),$$

где $\delta A = \dfrac{||\Delta A||}{||A||}$ для малых $\Delta b, \Delta A, \Delta x$.

2. Вычислить lnA, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

Элементы главной диагонали могут меняться на ε_1, а элементы правой части на ε_2. Оценить возможное изменение решения для нормы $||A|| = max\sqrt{\lambda^* \lambda}$.

4. Решить пример Крылова.($\sqrt{7}$ берется с разной точностью).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ \sqrt{7}x_1 + 2\sqrt{7}x_2 = 3\sqrt{7} \end{cases}$$

Лекция 12

Итеративные методы решения систем алгебраических уравнений.

Дана система уравнений

$$A\bar{x} = \bar{B} \quad (1)$$

Перепишем ее в виде

$$\bar{x} + (A - E)\bar{x} = \bar{B}$$

или

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{b}$$

Тут $P = E - A,\ \bar{b} = \bar{B}$.
Для $c \neq 0 :\ cA\bar{x} = c\bar{B} \Rightarrow \bar{x} = (E - cA) + c\bar{B}$, где $P = E - cA,\ \bar{b} = c\bar{B}$.
Если C — матрица, тогда $P = E - CA,\ \bar{b} = C\bar{B}$.

Метод итераций.
Пусть $\bar{x}^0$ — любой вектор (начальное приближение к $\bar{x}$), тогда итеративная формула для вычисления $\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^k$ имеет вид

$$x^{k+1} = Px^k + \bar{b}$$

Если последовательность векторов $lim\{\bar{x}^i\} = \bar{x}^\infty$ сходится, то

$$x^\infty = Px^\infty + \bar{b},\ x = x^\infty,$$

где $x = x^\infty$ — решение системы.

Теорема. Описанный метод простых итераций сходится, то есть существует $\bar{x}^\infty = \lim\limits_{i\to\infty}\{\bar{x}^i\}$, которое будет решением системы при любом значении x^0 тогда и только тогда, когда спектральный радиус $\rho(P) < 1$.

► Пусть спектральный радиус $\rho(P) < 1$, тогда существуют согласованные матричные $||\cdot||$ и векторные $|\cdot|$ нормы, что $||P|| < 1$.
Предположим, что решение системы существует. Если $\bar{x}$ — решение системы, то

$$x^{k+1} - x = (Px^k + \bar{b}) - (Px + \bar{b}) = P(x^k - x)$$
$$|x^{k+1} - x| \leqslant ||P||\ |x^k - x| \quad (2)$$

Значит $|x^{k+1}-x| \leqslant \dots \leqslant ||P||^{k+1}|x^0-x| \to 0$. То есть, если решение $\bar{x}$ существует, то $\overset{lim}{i} \to \infty x^i = x$ — решение системы.
Если же решения нет $|\lambda_1| = \rho(P) \geqslant 1$, то существует $\bar{v} \neq 0: \ Pv = \lambda_1 v$ — собственный вектор, и для $x^0 = v + \bar{x}$ получим

$$x^{k+1} - x = P(x^k - x) = \dots = P^{k+1}(x^0 - x) = P^{k+1}v = \lambda^{k+1}v \nrightarrow 0 \ \blacksquare$$

Если $||P|| < N$, то $|x^k - x| \leqslant N^k|x^0 - x|$.
Число верных значащих цифр $-c \cdot log_{10}|x^k - x| = \xi(x^k)$, где c зависит от нормы.

Предложение.

$$-const \cdot log_{10}(\rho(P)) \leqslant \xi(x^{k+1}) - \xi(x^k)$$

Для нормы $|\cdot|_\infty$ $const = 1$.
▶

$$\rho(P) \approx ||P|| \geqslant \frac{|x^{k+1} - x}{x^k - x}$$
$$log_{10}(\rho(P)) \geqslant log_{10}|x^{k+1} - x| - log_{10}|x^k - x|$$
$$-log_{10}(\rho(P)) \leqslant \frac{1}{c}(\xi(x^{k+1} - \xi(x^k)) \ \blacksquare$$

Надо, чтобы спектральный радиус был маленький.

Утверждение.

$$|x - x^k| \leqslant \frac{|x^{k+1} - x^k|}{1 - ||P||}, \text{ если } ||P|| < 1$$

▶

$$|x^{k+p}-x^k| \leqslant |x^{k+p}-x^{k+p-1}|+\dots+|x^{k+1}-x^k| \overset{(2)}{\leqslant} (||P||^p+\dots+||P||+1)|x^{k+1}-x^k| \leqslant \frac{|x^{k+1} - x^k}{1 - ||P||}$$

$$|x - x^k| = |x^\infty - x^k| = \lim_{p \to \infty}|x^{k+p} - x^k| \leqslant \frac{|x^{k+1} - x^k|}{1 - ||P||} \ \blacksquare$$

Следствие 1.

$$|x - x^k| \leqslant \frac{||P||^k}{1 - ||P||}|x^1 - x^0|$$

Следствие 2.

$$\text{Если } \bar{x}^0 = \bar{b}, \text{ то } |x - x^k| \leqslant \frac{||P||^{k+1}}{1 - ||P||}|\bar{b}|$$

▶ $x^1 = Px^0 + b$. Если $x^0 = b$, то $x^1 = Pb + b$.

$$|x^1 - x^0| = |Pb| \leqslant ||P|| \ |b| \ \blacksquare$$

Пример 1.
Методом итераций решить систему.

$$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 68 \\ 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 = 41 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 = 60 \end{cases}$$

Тогда матрица C будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$CAx = CB,\ x = Px + b = (E - CA)x + CB$$

То есть,

$$P = E - CA = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = CB = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Посчитаем норму матрицы: $||P||_c = 0.9 < 1$, $||P||_1 = 0.4 < 1$. Так как ее значения меньше 1, значит процесс итераций будет сходящимся.
Возьмем в качестве первого приближения

$$x^0 = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Подставим это значение в $x^1 = Px^0 + b$, получим

$$x^1 \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Теперь вместо x^0 подставляем x^1 и получаем x^2, и так далее, пока значение x не будет больше изменяться.

Метод Зейделя.
Этот метод является модификацией метода итераций.

$$x = Px + b$$

Представим матрицу P в виде суммы верхней и нижней треугольных матриц.

$$P = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда итеративная формула вычисления будет иметь вид

$$x^{k+1} = P_1 x^{k+1} + P_2 x^k + b$$

Пример 2.
Сделаем пример 1 с помощью метода Зейделя. В нем мы вычислили

$$P = E - CA = \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ -0.1 & 0 & -0.15 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Представим ее в виде суммы верхней и нижней треугольных матриц.

$$P = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.15 & -0.05 \\ 0 & 0 & -0.15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут также за нулевое приближение возьмем

$$x^0 = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.05 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1' = 0 \cdot x_1' - (0.15 \cdot 2.05 + 0.05 \cdot 6) + 3.4 = 2.7925$$
$$x_2' = -0.1 x_1' - 0.15 \cdot 6 + 2.05 = 0.87075$$
$$x_3' = -0.3 x_1' - 0.1 x_2' - 0 + 6 = 5.075175$$

Приведение к виду, удобному для итераций.

$$Ax = b$$
$$\tau A x = \tau b$$
$$x = (E - \tau A)x + \tau b$$

Надо найти такое оптимальное τ, что $\underset{\tau}{min} \underset{\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]}{max} |1 - \tau\lambda|$.

Утверждение. Если все собственные числа матрицы $\lambda_i > 0$, то оптимальное значение $\tau = \dfrac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$.

Пример 3.
Привести к виду, удобному для итераций.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Собственные значения матрицы $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10.$ Так как все они положительные, получим:

$$\tau = \frac{2}{10+1} = \frac{2}{11}$$

$$E - \tau A = \begin{pmatrix} 1-2\tau & -2\tau & 2\tau \\ -2\tau & 1-5\tau & 4\tau \\ 2\tau & 4\tau & 1-5\tau \end{pmatrix}$$

Тогда $max\{|1-2\tau|,\ |1-3\tau|,\ |1+\tau|\}$.

Домашнее задание 12

1. Доказать утверждение из лекции. Если все собственные числа матрицы $\lambda_i > 0$, то оптимальное значение $\tau = \dfrac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$.

2. Привести к виду, удобному для итераций.

   (a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$

Лекция 13

Итеративное решение систем линейных уравнений.

$$Ax = b \ \ (1)$$

Если матрица A не является симметричной (и положительно определенной), то надо перейти от (1) к нормальной системе

$$A^*Ax = A^*b$$

Метод Крылова.
Для любого оператора существует минимальный многочлен $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

Задача: найти коэффициенты $\varphi(x)$

$$(A^m + p_{m-1}A^{m-1} + \cdots + p_1 A + p_0 E)v = 0$$

$L =< v_0, Av_0, \cdots, A^{m-1}v_0 >$ — зависит от v_0, причем $v_{m-1} = Av_{m-2}$.
Выразим:

$$A^m v = -p_{m-1}A^{m-1}v - \cdots - p_0 E v \quad (2)$$

Замечание: $L(v_0)$ инвариантно относительно линейного оператора A.
Метод: возьмем v_0 и решим (2) относительно m неизвестных $p_0, \cdots, p_{m-1}$.

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$$

Если матрица приводится к виду

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & 1 & & 0 & \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & 0 & & \vdots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \cdots & \lambda_2 \end{array}\right)$$

где кратность λ_1 равна k, а кратность λ_2 равна m, то

$$\chi_J(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^k(\lambda_2 - \lambda)^m$$

Циклическая клетка — это матрица вида

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Однако не все матрицы можно привести к такому виду.

Фробениусова форма — это матрица вида

$$F_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Данная матрица получена отражением относительно побочной диагонали.

Найдем характеристический многочлен у циклической клетки.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{C_2} = det(C_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & a_0 \\ 1 & a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{C_3} = det(C_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 a_2 + \lambda a_1 + a_0$$

Тогда для C_n получим

$$\chi_{C_n} = det(C_n - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_0)$$

Как приводить матрицу к фробениусовой форме?
Надо составить базис. Выбрем v_0 случайным образом.

$$v_0, Av_0 = v_1, Av_1 = v_2, Av_2 = v_3, \cdots$$

Эти векторы $v_0, v_1, \cdots$ — базис линейного пространства.

$$v_{n-1} = A^{n-1}v_0,\ v_n = A^{n-1}v_1 = a_0v_0 + a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1}$$

$$(v_0)_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ (v_1)_v = (Av_0)_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots$$

$$A_v = ((Av_0)_v \mid (Av_1)_v \mid \cdots) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A \cdot M_{n-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1} = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -\dfrac{a_{n1}}{a_{n,n-1}} & \cdots & \cdots & \dfrac{1}{a_{n,n-1}} & -\dfrac{a_{nn}}{a_{n,n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A_1 = AM_{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$B_1 = M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$M_{n-1}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \hdashline a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Интерполяционный метод.
$\chi_A(\lambda)$ — многочлен степени m — вычисляется как интерполяционный многочлен Лагранжа по значениям в $(m+1)$ точке.

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E), \quad \lambda = 0, 1, \cdots, m$$

То есть, надо m раз вычислить определитель.

Метод итераций.

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{b}$$

Итеративный шаг: $x^{k+1} = Px^k + \bar{b}$.

Матрица называется симметрической, если $A^T = A,\ A$ — действительная.
A^*A — симметрическая матрица.

Пусть $A^* = A$ — эрмитова матрица (например, симметическая). Нам неизвестны $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ — собственные значения и соответствующие им собственные векторы $X_1, \cdots, X_n$.
Пусть

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix}$$

Если X_1 — собственный вектор, то и $c \cdot X$ — собственный вектор, то есть X_1 определен с точностью до пропорциональности. Считаем $x_n^1 = 1$.
Получим $A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1$ или

$$\begin{cases} a_{11}x_1^1 + \cdots + a_{1n} \cdot 1 = \lambda_1 x_1^1 \\ \cdots \\ a_{n-1,1}x_1^1 + \cdots + a_{n-1,n} \cdot 1 = \lambda_1 x_{n-1}^1 \\ a_{n1}x_1^1 + \cdots + a_{nn} \cdot 1 = \lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_{n1}x_1^1 + \cdots + a_{nn} \\ x_1^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{11}x_1^1 + \cdots + a_{1n}) \\ \cdots \\ x_{n-1}^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{n-1,1}x_1^1 + \cdots + a_{n-1,n}) \end{cases}$$

$$\bar{Y} = f(\bar{Y})$$

Итеративный процесс

$$\begin{cases} \lambda_1^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{1(k)} + \cdots + a_{nn} \\ x_1^{1(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda_1^{(k)}}(a_{11}x_1^{1(k)} + \cdots + a_{1n}) \\ \cdots \\ x_{n-1}^{1(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda_1^{(k)}}(a_{n-1,1}x_1^{1(k)} + \cdots + a_{n-1,n}) \end{cases}$$

Начальное условие $\lambda_1^0 = a_{nn}$, $x_1^0 = \dfrac{a_{1n}}{a_{nn}}, \cdots$.

Для X_2 те же уравнения (аналогичные) и условие $< X_1, X_2 >= 0$.

$$x_1^1 x_1^2 + \cdots + x_n^1 x_n^2 = 0$$

Приведение к виду, удобному для итераций.
Приведем систему уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ к виду $A^*Ax = A^*b$.
Для итеративного метода

$$\bar{x} = P\bar{x} + \bar{B}$$

$$x = (E - A)x + b$$

Возьмем число $\tau : \tau Ax = \tau b$

$$x = (E - \tau A)x + \tau b, \quad P = E - \tau A$$

Собственные значения матрицы $P : \lambda_i(P) = 1 - \tau\lambda_i(A)$.

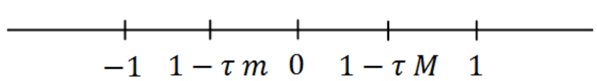
$$\begin{pmatrix} \lambda_1(P) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n(A) \end{pmatrix}$$

Пусть $m \leqslant |\lambda_i(A)| \leqslant M$, то есть $M = \varsigma(A) = \rho(A),\ m = \dfrac{1}{\varsigma(A^{-1})} = \dfrac{1}{\rho(A^{-1})}$.
Это верно только для $\lambda_i \geqslant 0$.

$$\max_i |\lambda_i(P)| \to min$$

$$\max_i |\lambda_i(P)| \leqslant max\{|1 - \tau m|, |1 - \tau M|\}$$

Какое выбрать τ?



Лучше взять $\tau < \dfrac{2}{m + M}$, чем $\tau > \dfrac{2}{m + M}$. Лучше всего выбрать $\tau = \dfrac{2}{m + M}$.

Если $\tau = \tau_0 = \dfrac{2}{m + M}$, то $\rho(P) = max\{|1 - \tau_0 m|, |1 - \tau_0 M|\} = max\left\{\left|\dfrac{M - m}{m + M}\right|, \left|\dfrac{m - M}{m + M}\right|\right\} = \dfrac{M - m}{M + m} = \dfrac{\chi_2 - 1}{\chi_2 + 1}$, где $\chi_2(A) = \dfrac{M}{m}$ — число обусловленности.

Если нет собственных значений, то можно взять $\tau = \dfrac{2}{a}$, где $a \geqslant ||A|| \geqslant \rho(A)$

(какая-то норма $||A|| = ||A||_\infty$ или $||A|| = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|$).

Пример 1.
Методом итераций найти собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножим на

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(предполагаем, что найдется такой вектор).

$$A\bar{x}_1 = \lambda\bar{x}_1$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 7 = \lambda x_3 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda^{(k+1)} = 2x_1^{(k)} + 7 \\ x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda^{(k)}}(6x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + 2) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda^{(k)}} = \dfrac{1}{\lambda^{(k)}}(-2x_1^{(k)} + 5x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Через итерации получим

$$\lambda_1 = 9,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем λ_2, v_2.
Для $\bar{x}_2$ те же уравнения и $< \bar{x}_1, \bar{x}_2 >= 0$, то есть

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 7x_3 = \lambda x_3 \\ x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Так как сумма собственный значений равна следу = 18, то из этого выражения, зная λ_1, λ_2 можно найти λ_3.

Домашнее задание 13

1. Дорешать Пример 1 с лекции.

2. Методом Крылова найти минимальный характеристический многочлен.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Методом Данилевского найти характеристический многочлен.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Найти собственные значения и собственные векторы методом итераций.

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 6 & -6 \\ 6 & 21 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Лекция 14

Положительные и неотрицательные матрицы.

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, тогда

$$A \geqslant B \Leftrightarrow a_{ij} \geqslant b_{ij} \quad \forall i, j$$

$$A > B \Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij} \quad \forall i, j$$

Однако не все матрицы сравнимы.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \not> \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Матрица называется **неотрицательной**, если $A \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда все $a_{ij} \geqslant 0$.

Матрица называется **положительной**, если $A > 0$ тогда и только тогда, когда все $a_{ij} > 0$.

Матрица смежности $G > 0,\ G \not> 0$ — матрица с элементами g_{ij}, причем $g_{ij} = 1$, если есть ребро из вершины i в вершину j и $g_{ij} = 0$ иначе (вместо единицы может также стоять какое-либо число k, равное количеству ребер из вершины i в j или весу ребра).

Теорема Перрона. Если $A > 0$ матрица положительная, то существует такое $\hat{\lambda}_A > 0$ — собственное значение матрицы A, что $\hat{\lambda}_A > |\lambda|$ для всех остальных собственных значений A и соответствующий собственный вектор $\hat{x}$ положителен

$$A\hat{x} = \hat{\lambda}_A \hat{x},\ \hat{x} > 0.$$

В частности,

$$\rho_(A) = \hat{\lambda}_A.$$

Следствие. Вектор $\hat{x}$, соответствующий $\hat{\lambda}_A$ единственный с точностью до пропорциональности. В частности, $\hat{\lambda}$ — простое, кратности один.

PageRank.
Есть конечное число состояний и вероятности перехода из одного состояния в другое. Какова вероятность на каком-то шаге n попасть в состояние i? (Какова вероятность, что пользователь окажется на нашем сайте?)

$$\bar{x}_n = (p_1 \cdots p_i \cdots p_n)^T$$

$$P = (p_{ij}) :\ x_n = P^n \cdot x_0$$

Стабильным состоянием системы называется

$$x_{n+1} = Px_n = x_n.$$

При $n \to \infty\ \ \hat{x} = x_\infty\ \ Px_n = 1 \cdot x_n$, где собственное значение равно единице. Не все p_{ij} могут быть даны (на каких-то сайтах нет ссылок).
Собственный вектор $(x_1 \cdots x_n)^T$, где x_i — соответствующие вероятности попаст на какую-то страницу. Тогда первой страницей будет выдаваться страница с наибольшим собственным значением и так далее по убыванию.

$$\bar{x} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + \cdots + x_N P^N$$

Вместо P в PageRank можно также смотреть подправленное значение

$$\tilde{P} = P(1-\beta) + \beta Q$$

Обычно берут $\beta = 0.15$, а

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

где n — количество всех страниц в интернете.

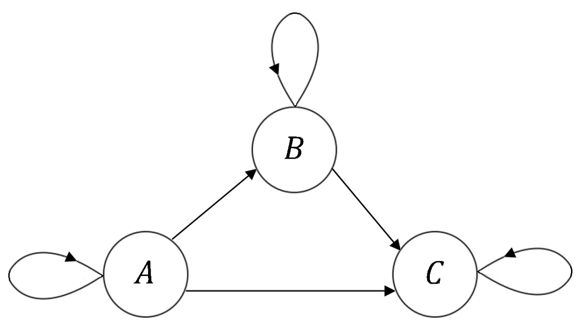
Следствие. Пусть $A \geqslant 0$ неотрицательная матрица, тогда

1. Существует собственное значение, равное спектральному радиусу

$$\exists \hat{\lambda}_A = \rho(A) \geqslant 0$$

2. Собственный вектор $\hat{x}_A \geqslant 0$ (не обязательно единственный)

Пример 2.
Найти самую влиятельную вершину в графе, сформировать предпочтения.



Составим матрицу по графу:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В начальном состоянии рангии равны:

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.333 \\ 0.333 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим дальше:

$$\bar{x}_1 = P^T \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.111 \\ 0.277 \\ 0.611 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = P^T \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} \\ \frac{19}{108} \\ \frac{85}{108} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.037 \\ 0.175 \\ 0.787 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получили ранги:

$$C = 1, \quad A = B = 0,$$

значит самая влиятельная вершина в графе это C.

Матрица A называется **неразложимой матрицей**, если одновременно перестановкой строк и столбцов матрицу A нельзя привести к виду

$$A = \left(\begin{array}{c:c} P & Q \\ \hdashline O & R \end{array}\right),$$

где P и R — квадратные матрицы, а O — нулевая матрица.

Теорема Фробениуса (Перрона-Фробениуса). Пусть $A \geqslant 0$ и A — неразложимая матрица, тогда $\hat{\lambda}_A > 0$ и $\hat{x} > 0$ — единственный с точностью до множителя.

Модель Леонтьева.
Есть несколько отраслей и несколько категорий продукций. Матрица Леонтьева имеет вид:

$o \mid p$	1	2	$\cdots$	n
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	a_{m_1}	$\cdots$	$\cdots$	a_{mn}

$$A\bar{x} + \bar{d} = \bar{x}$$

$A = (a_{ij})$, где a_{ij} — количество продукции j в отрасли i для производства (матрица прямых затрат), d — конечный спрос, а x — выпуск. Продукция отрасли i:

$$x_i = d_i + \sum_j a_{ij} x_j,$$

первое слагаемое означает употребление, а второе — использование для производства.

Матрица A называется **продуктивной**, если $A \geqslant 0$ и для некоторого $\bar{x} > \bar{0}$ верно

$$A\bar{x} < \bar{x}.$$

Лемма 1. Если матрица неотрицательная $A \geqslant 0$ и $x_1 \geqslant x_2$, то $Ax_1 \geqslant Ax_2$.

▶ Надо проверить $Ax_1 - Ax_2 \overset{?}{\geqslant} 0$.

$$A(x_1 - x_2) \geqslant 0,$$

так как $A \geqslant 0$ и $x_1 - x_2 \geqslant 0$. ■

Если $A \geqslant 0,\ B \geqslant 0$, то $A - B = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum\limits_k a_{ik} b_{kj} \geqslant 0,\ c \geqslant 0$.

Лемма 2. Если матрица A продуктивная, то $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$.

▶ По определению продуктивной матрицы $A\bar{x} < \bar{x}$, тогда существует число $0 < \alpha < 1$, где α — константа сжатия, что:

$$Ax < \alpha x$$

$$0 \leqslant A^n x < \alpha^n x$$

При $n \to \infty$ $\alpha \to 0$, тогда получим $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x = 0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$, так как x — положительный вектор.

Подробнее: если $A^n = (b_{ij})$, то

$$A^n \bar{x} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_{nj} x_j \end{pmatrix} = \bar{0},$$

где $x_j > 0,\ b_{ij} \geqslant 0$. Значит все $b_{ij} = 0,\ A^\infty = 0$ по лемме 1. ■

Лемма 3. Если матрица A — продуктивная и для какого-то $\bar{y}$

$$\bar{y} \geqslant A\bar{y},$$

то $\bar{y}$ — неотрицательный вектор.

▶ Будем подставлять y в наше условие много раз:

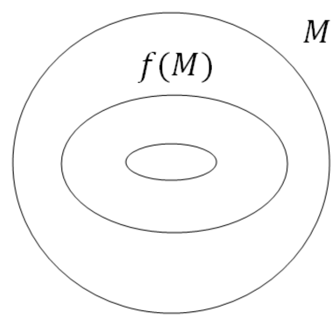
$$y \geqslant Ay \geqslant A^2 y \geqslant \dots \geqslant A^n y \geqslant \dots \geqslant A^\infty y = \bar{0}$$

по лемме 2, значит $\bar{y} \geqslant 0$. ■

Теорема. Пусть M — полное метрическое пространство (например, $M = \mathbf{R}^n$ или $M \subset \mathbf{R}^n$ — замкнутое ограниченное множество), $f: M \to M$ — сжимающее, то есть существует $0 < \alpha < 1$ такое, что для $\forall x, y \in M$

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y),$$

тогда существует единственная неподвижная точка — такое $z \in M$, что $f(z) = z$.



M отображается в $f(M)$ и так далее. В пределе диаметр стремится к нулю.

Лемма 4. Если матрица A — продуктивная, то существует $(E - A)^{-1} \geqslant 0$. (А если $A > 0$, то $(E - A)^{-1}$ положительная матрица.)
► $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$ — ряд сходится, так как $A^n \to 0$, тогда $\rho(A) < 1$ и так далее.

$$(E - A)^{-1} \geqslant E + A \geqslant A$$

Если $A > 0$, то $(E - A)^{-1} > 0$, а если $A \geqslant 0$, то $(E - A)^{-1} \geqslant 0$ ■

Задача. Если $A \geqslant 0$ — неразложимая и продуктивная матрица, то $(E - A)^{-1} > 0$.

Теорема. Если A — продуктивная, то для любого $\bar{d} \geqslant \bar{0}$ система $A\bar{x} + \bar{d} = \bar{x}$ имеет единственное решение $\bar{x}$, причем $\bar{x} \geqslant 0$.

Следствие. Для $d > 0$ система имеет решение $x \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда матрица A продуктивная.

Доказательство теоремы.
► Выразим $x - Ax = d$ или $(E - A)\bar{x} = \bar{d}$. Так как матрица A продуктивная из леммы 4 и следствия выше получим $\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{d} \geqslant 0$ ■

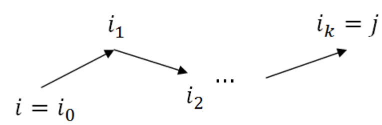
Доказательство следствия.
► Если $(E - A)\bar{x} = \bar{d}$, $\bar{d} > 0$, то $x = Ax + d > 0$, причем $x > Ax$, а это по определению

означает, что матрица A продуктивная. ■

Утверждение.

1. Матрица A является неразложимой тогда и только тогда, когда для $\forall i, j, i \neq j$ существует такая последовательность вершин

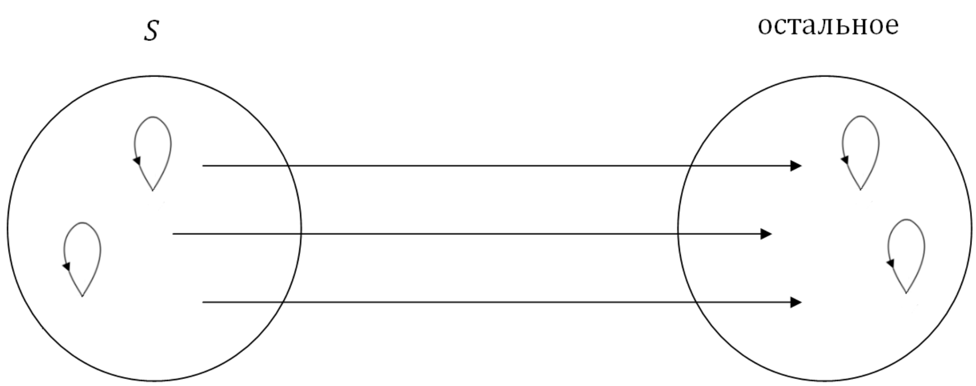
$$i = i_0, i_1, i_2, \cdots, i_k = j : \quad a_{i_t i_{t+1}} \neq 0, \ t = 0, \cdots, k-1$$



2. Матрица A неразложима тогда и только тогда, когда для любых вершин $\forall i, j$ существует $\exists m < n$, что
$$(A^m)_{ij} \neq 0.$$

3. Неотрицательная матрица $A \geqslant 0$ неразложима тогда и только, когда $(E + A)^{n-1} > 0$, где n — порядок матрицы.

1. Матрица A является разложимой тогда и только тогда, когда существует $\exists S = \{i_1, \cdots, i_s\} \subsetneq [1, \cdots, n]$. Тогда $a_{ij} = 0$ при $j \in S, \ i \notin S$, где $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$.



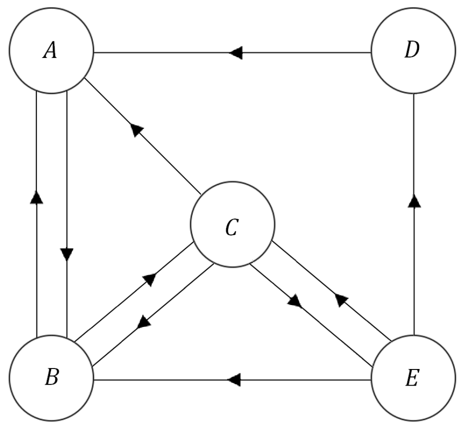
(Можем перенумеровать индексы.)
Стрелка $i \to j$ существует тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$.
В разложимой матрице какого-то пути нет, в неразложимой матрице все пути есть.

2. a_{ij} равно количеству путей $i \to j$ длины один, а $(A^m)_{ij}$ равно количеству путей $i \to i_1 \to \cdots i_{m-1}$ длины m.

3. Путь длины $n-1$ $(E+A)^{n-1} = \sum\limits_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m A^m > 0$, так как в каком-то слагаемом будет ненулевой элемент, то есть получим положительное число.

Домашнее задание 14

1. Найти самую влиятельную вершину в графе.



2. Разложима ли матрица A?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Разложима ли матрица B? Найти λ и v из теоремы Перрона.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Лекция 15

Теорема о сжимающем отображении. Существует единственное $\bar{x} \geqslant 0: \ \varphi(\bar{x}) = \bar{x}$ — неподвижная точка, то есть

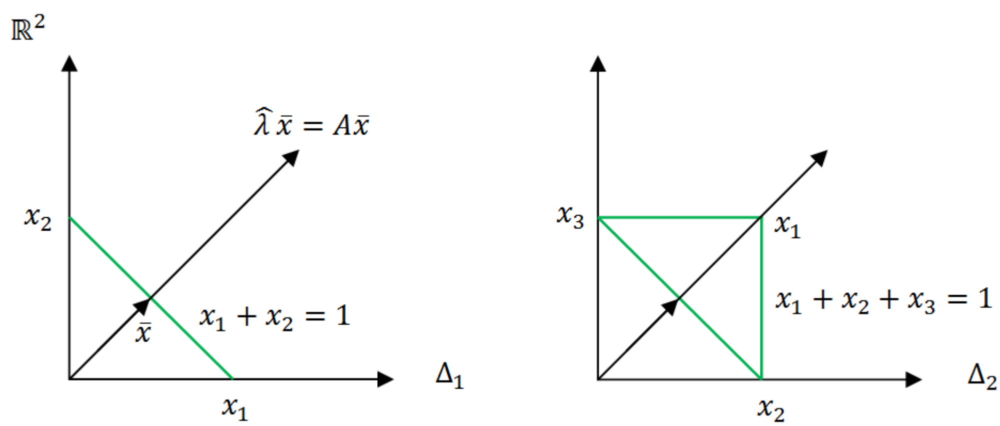
$$\frac{1}{|Ax|_1} A\bar{x} = \bar{x}$$

$$Ax = \hat{\lambda}x, \quad \hat{\lambda} = |Ax|_1$$

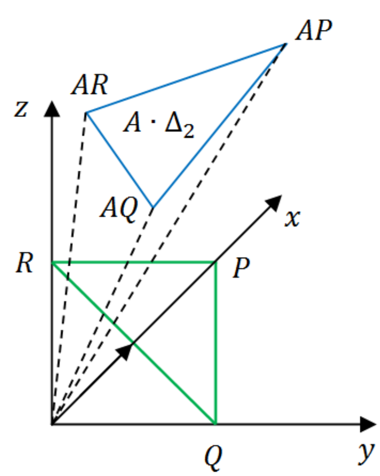
Докажем теорему Перрона с прошлой лекции.

Теорема Перрона. Если $A > 0$ (то есть все $a_{ij} > 0$), то у матрицы A существует положительное собственное значение $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_A$: $\hat{\lambda} = \rho(A)$ и $\hat{\lambda} > |\lambda|$ для всех остальных собственных значений λ матрицы A. Этому собственному значению отвечает положительный собственный вектор $\hat{x} > 0$ — единственный с точностью до пропорциональности: в частности $\hat{\lambda}$ — простое, то есть кратности один.

► Рассмотрим отображение $\bar{x} \mapsto A\bar{x} \to \dfrac{A\bar{x}}{|Ax|_1}$.



Рассмотрим на множестве $\Delta = \Delta_{n-1} = \{x_1 \geqslant \bar{0}, \cdots, x_n \geqslant \bar{0} \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.
При отображении $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ множество $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$, где $x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0$, переходит в $\mathbb{R}^n_{>0}$ (с учетом $\bar{0} \mapsto \bar{0}$), так как $\forall 0 \neq \bar{x} \geqslant 0 \;\; A\bar{x} > \bar{0}$, то есть $A\Delta \subset \mathbb{R}^n > 0 = \{(x_1 \cdots x_n)^T \mid x_1 > 0, \cdots, x_n > 0\}$.



Функция $c(x,y) = \dfrac{\rho(\varphi(x), \varphi(y))}{\rho(x,y)}$ непрерывна на компактном Δ, причем $c(x,y) < 1$. Тогда существует $\varepsilon : \;\forall x, y \;\; c(x,y) < \varepsilon < 1$, значит φ — сжимающее отображение (оно

сжимает расстояние в $\geqslant \varepsilon$ раз).
Воспользуемся теоремой о сжимающем отображении. Здесь $\hat{\lambda} > 0$ (так как $\bar{x} \in \Delta$, то $\bar{x} \neq \bar{0}$, так что $Ax > 0$, $|Ax|_1$ равен сумме всех координат вектора $A\bar{x}$, а значит >0).

$$x = \frac{1}{\lambda} Ax > \bar{0}$$

Это единственный положительный собственный вектор (как неподвижная точка). ■

$$||A||_1 = \underset{|x|_1=1}{max} \frac{|Ax|_1}{|x|_1} \geqslant \rho(A)$$

$$\bar{x} \rightsquigarrow |\bar{x}| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$$

Тогда $|\bar{x}|_1 = ||\bar{x}||_1$, $|Ax|_1 \leqslant |A|\bar{x}||_1$. Значит $\underset{|x|=1}{max} |Ax|_1 = \underset{\bar{x} \in \Delta}{max} |Ax|_1 = ||A||_1 > \rho(A)$. Оценка $||A||_1 \geqslant \hat{\lambda}$.

Теорема Перрона-Фробениуса. Если $A \geqslant 0$ — неразложимая матрица, то

1. $\exists \hat{\lambda}_A \geqslant 0$, причем $\hat{\lambda}_A = \rho(A)$ — самое большое по модулю собственное значение A
2. при этом соответствующий собственный вектор $\hat{x}_A \geqslant 0$
3. если при этом $A\bar{y} \geqslant \mu\bar{y}$ для некоторого $\bar{y} \geqslant \bar{0}$, $\mu \in \mathbb{R}$, то $\mu \leqslant \hat{\lambda}_A$
4. в частности, для любого собственного значения λ матрицы A всегда $|\lambda| \leqslant \hat{\lambda}_A$

► Пусть $\forall \bar{x} \geqslant \bar{0}$ $\;r_x = \underset{x_i \neq 0}{min} \frac{(Ax)_i}{x_i} = max\{\rho > 0 \;\mid\; \rho x \leqslant Ax\}$, $\;\rho \leqslant \frac{(Ax)_i}{x_i}$.
Тогда пусть $M = S_1 \cap \mathbb{R}^n_{\geqslant 0} = \{x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \;\mid\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$, где S_1 радиуса один.
Найдем $\underset{x}{max}\ r_x$. Почему он существует?

1. r_x непрерывна по $\bar{x}$ при $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_{>0}$ (то есть $\bar{x} > 0$).

   Но если $y = \frac{x}{|x|}$, то $y \in M$ и $r_x = r_y$, поэтому

$$\underset{x \geqslant \bar{0}}{max}\ r_x = \underset{\bar{x} \in M}{max}\ r_y$$

   До этого было утверждение о том, что если матрица A — неразложима, то $B = (E + A)^{n-1} > 0$. Пусть $N = B(M) = \{\bar{z} = (E + A)^{n-1} y \;\mid\; y \in M\}$, тогда

$N \subset \mathbb{R}^n > 0$.
Если $y \in M$, то $r_y y \leqslant Ay$ и для $z = By$

$$r_y B_y \leqslant AB_y$$

(То есть $AB = BA$). Значит $r_y z \leqslant Az$

$$r_y \leqslant \frac{|Az|_i}{|z|_i}, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$r_y \leqslant r_z$$

Так как

$$\underset{x \geqslant 0}{max}\; r_x = \underset{y \in M}{max}\; r_y \leqslant \underset{z \in B}{max}\; r_z \leqslant \underset{x \geqslant 0}{max}\; r_x,$$

значит существует

$$\underset{z \in N}{max}\; r_z = \underset{x \geqslant 0}{max}\; r_x = \underset{y \in M}{max}\; r_y$$

(так как N — компактно, r непрерывно на $N \subset \mathbb{R}^n > 0$)
Обозначим $r = \hat{\lambda} = \underset{z \in N}{max}\; r_z$. Так как $u = (1 \cdots 1)^T > 0$, то $r_u - \underset{i}{min} \frac{|A_i|_1}{1} > 0$ (так как A разложима), то $r > 0$.

2. Докажем, что r — собственное значение, то есть найдем собственный вектор. Пусть

$$r = r_z,\; z = (E + A)^{n-1} y,\; (E + A)^{n-1} \in N,\; y \in M$$

Докажем, что $Az = rz$, то есть $\bar{z} > 0$ — собственный вектор с собственным значением $\hat{\lambda} = r > 0$. Сначала докажем $A\bar{y} = r\bar{y}$. Иначе $Ay - ry \geqslant 0,\; B(Ay - ry) > 0$

$$ABy - rBy = Az - rz > 0$$

$$Az > rz \Rightarrow Az > \varepsilon rz,\; \varepsilon > 1$$

Тогда $\varepsilon r \leqslant \dfrac{Az_i}{z_i}$ для всех i. $\varepsilon r \leqslant r$ — противоречие с $\varepsilon > 1$. Тогда y — собственный вектор

$$Ay = ry.$$

Но тогда и z — собственный вектор, так как

$$BAy = rBy$$

$$ABy = rBy$$

$$Az = rz$$

$z > 0$ — собственный вектор с собственным значением $\hat{\lambda} = r > 0$.

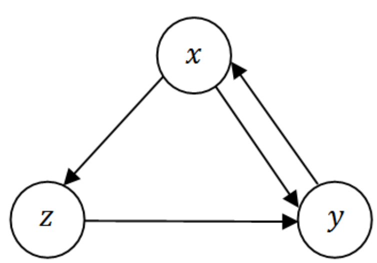
$$(z = (A + E)^{n-1} y = (1 + \hat{\lambda})^{n-1} \bar{y} > 0 \Rightarrow \bar{y} > 0)$$

3. Надо доказать, что если $A\bar{t} \geqslant \mu\bar{t}$ для некоторого $\bar{t} \geqslant \bar{0}$, то $\mu \leqslant \hat{\lambda}$. Можем считать $t \in M$, тогда
$$At \geqslant \mu t \Rightarrow \mu \leqslant \frac{(At)_i}{t_i}$$
то есть $At \geqslant \mu t \Leftrightarrow \mu \leqslant r_t \leqslant \max\limits_{t \in M} r_t = r = \hat{\lambda}$.

4. Надо доказать, что если λ — другое собственное значение, то $|\lambda| \leqslant \hat{\lambda}$. Пусть $A\bar{x} = \lambda\bar{s}$, где $s \neq 0$ — собственный вектор. Можем считать, что $|s|_2 = 1$. При этом если
$$|\bar{s}| = \begin{pmatrix} |s_1| \\ \vdots \\ |s_n| \end{pmatrix}$$
(модуль $\bar{s}$), то
$$A|\bar{s}| \underset{A \geqslant 0}{\geqslant} |\bar{A}s| = |\lambda||\bar{s}|$$
Так как $|\bar{s}| \geqslant 0$ (из 3.), то $|\lambda| \leqslant \hat{\lambda}$. В частности, $\hat{\lambda} = \rho(A)$
$$\hat{\lambda} = \max_{\substack{\bar{x}>0,\\ x \in M,\\ x \in \Delta}} \min_{i: x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

■

Пример 1.
Найти ранги.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(x, y, z)P = (x, y, z)$$
Получим (0.4, 0.4, 0.2).

Метод вращений (метод Якоби).

Пусть матрица A — симметрическая (матрица A^*A — всегда симметрическая). Хотим построить процесс

$$A_0 = A_1, \cdots, A_k \to \Lambda$$
$$T_0 = E, T_1, \cdots, T_k \to T$$
$$A = T\Lambda T^{-1} = T\Lambda T^T,$$

Λ — диагональная матрица.
Последовательные матрицы перехода

$$A_{k+1} = T_{ij}^T A_k T_{ij},$$

T_{ij} — матрица простых вращений.

$$T_{k+1} = T_k T_{ij}$$

В матрице A_k находим элемент, лежащий не на диагонали, с максимальным модулем $a_{ij}^{(k)}$.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & O & & \vdots & & O & \\
 & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & cos\ \varphi & \cdots & \cdots & \cdots & -sin\ \varphi & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & O & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & O & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & sin\ \varphi & \cdots & \cdots & \cdots & cos\ \varphi & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\
 & O & & \vdots & & O & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1
\end{pmatrix},$$

где $cos\ \varphi$ и $-sin\ \varphi$ стоят в i строке, а $sin\ \varphi$ и $cos\ \varphi$ в j строке.
Угол выбираем так, чтобы

$$a_{ij}^{(k+1)} = (cos^2\varphi - sin^2\varphi)a_{ij}^{(k)} + cos\varphi \cdot sin\varphi(a_{ij}^{(k)} - a_{ii}^{(k)})$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = 0$$

$$tg\ 2\varphi = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, \quad |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}$$

$$cos\ 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\ 2\varphi}}$$

$$cos\ \varphi = \sqrt{\frac{1 + cos\ 2\varphi}{2}}$$

$$sin\ \varphi = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ 2\varphi}{2}}$$

Знак $sin\varphi$ равен знаку $a_{ij}^{(k)}(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)})$.

Пример 2.
Найти собственные значения матрицы A методом вращений.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \varphi & -sin\ \varphi \\ 0 & sin\ \varphi & cos\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$tg\ 2\varphi = \frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}} = \frac{2 \cdot (-4)}{14 - 14} = -\infty$$

$$2\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Подставим значения в матрицу T_{23}.

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A_{k+1} = T_{23}^T A T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 18 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$T_{13} = \begin{pmatrix} cos\ \varphi & 0 & -sin\ \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\ \varphi & 0 & cos\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$tg\ 2\varphi = \frac{2 \cdot (-\frac{4}{\sqrt{2}})}{17 - 10} = -\frac{8}{7\sqrt{2}}$$

$$cos\ 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64}{49 \cdot 2}}} = \frac{7}{9}$$

$$cos\ \varphi = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$sin\ \varphi = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Подставим значения в матрицу T_{13}.

$$T_{13} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = T_{13}^T A_1 T_{13} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 18 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Получили собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 18,\ \lambda_3 = 9$.
Найдем соответствующие собственные векторы.

$$T_1 = T_0 T_{23} = E T_{23},\ T_2 = T_1 T_{13}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Каждый из столбцов матрицы T_2 является собственным вектором λ_1, λ_2 и λ_3 соответственно.

Домашнее задание 15

1. Найти собственные векторы и собственные значения методом вращений (методом Якоби).

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2-i & 0 \\ 2+i & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

матрица удовлетворяет условию $A^* = A$, что гарантирует, что у нее есть диагональная форма.

Лекция 16

Алгебраические зависимости в системах экономических показателей. Постановка задачи.

Пусть $x_1, \cdots, x_n$ — первичные показатели, а $y_1, \cdots, y_m$ — расчетные (производные) показатели, $y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$.

Надо описать функциональные зависимости между показателями $y_1, \cdots, y_m$, то есть все такие функцие $\phi(z_1, \cdots, z_m)$, что

$$\phi(y_1, \cdots, y_m) = 0$$

Предположение:

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n) = \frac{p_i(x_1, \cdots, x_n)}{q_i(x_1, \cdots, x_n)} \ -$$

дробно-рациональная функция, где p_i, q_i — многочлены от n переменных.
Тогда можно считать функции ϕ многочленами от m переменных.
Решение: для линейных многочленов p_i, q_i — Клейнер.

Пример 1.
Для некоторого предприятия:
x_1 — размер выручки предприятия от реализации продукции
x_2 — издержки производства
x_3 — размер капитала
x_4 — численность занятых на предприятии

Расчетные показатели:
$y_1 = \dfrac{x_1 - x_2}{x_2}$ — рентабельность производства
$y_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{x_3}$ — рентабельность капитала
$y_3 = \dfrac{x_1}{x_3}$ — средняя производительность капитала
$y_4 = \dfrac{x_1}{x_4}$ — средняя производительность труда
Решение по методу Клейнер: существует функциональная зависимость

$$y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2 = 0$$

Любая другая полиномиальная зависимость имеет вид

$$\phi(y_1, y_2, y_3)(y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2) = 0$$

Пример 2.
Сравнительный анализ производительности труда на двух предприятиях.
Первичные показатели:
x_1 — доход первого предприятия
x_2 — численность занятых на первом предприятии
x_3 — доход второго предприятия
x_4 — численность занятых на втором предприятии
Расчетные показатели:
$y_1 = x_3 \dfrac{x_2}{x_1} - x_4$ — экономия затрат труда на втором предприятии по сравнению с первым
$y_2 = \dfrac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2}$ — прирост (уменьшение) дохода, приходящийся на одногодополнительного занятого (высвобожденного) работника на втором предприятии по сравнению с первым
$y_3 = x_3 \dfrac{x_2}{x_4} - x_1$ — часть прироста (уменьшения) дохода второго предприятия по сравнению с первым, обусловленная различием в их производительности труда
$y_4 = \dfrac{x_3}{x_4} - \dfrac{x_1}{x_2}$ — прирост производительности труда на втором предприятии по сравнению с первым
$y_5 = \left(\dfrac{x_3}{x_4} / \left(\dfrac{x_2}{x_1} - 1\right)\right) \cdot 100$ — относительное (процентное) изменение производительности труда на втором предприятии по сравнению с первым

Пример 3.
Анализ эффективности использования основных факторов производства.
Первичные показатели:
x_1 — размер капитала предприятия
x_2 — численность занятых на предприятии
Расчетные показатели:

y_1 — рентабельность затрат на производство
y_2 — рентабелность капитала
y_3 — рентабельность труда
Выпуск и издержки предприятия описываются двумя производственными функциями от размеров труда и капитала:

$$z = f(x_1, x_2),\ u = g(x_1, x_2),$$

где

$$f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + +a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2\ -$$

квадратичная функция с коэффициентами $a_0, a_1, \cdots, a_{22}$

$$g = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2\ -$$

линейная функция с коэффициентами b_0, b_1, b_2.
Расчетные формулы:

$$y_1 = \frac{f-g}{g} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + +a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_0}$$

$$y_2 = \frac{f-g}{x_1} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + +a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_1}$$

$$y_3 = \frac{f-g}{x_2} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + +a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_2}$$

Описание алгоритма.
Пусть $y_1 = \dfrac{f_1}{g_1},\ y_2 = \dfrac{f_2}{g_2}, \cdots,\ y_m = \dfrac{f_m}{g_m}$, где f_i, g_i — многочлены от переменных $x_1, \cdots, x_n$, причем

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_m \neq 0$$

Введем новые многочлены от $n+m+1$ переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n, z_1, z_2, \cdots, z_m, u$:

$$h_1 = g_1z_1 - f_1$$

$$h_2 = g_2z_2 - f_2$$

$$\cdots$$

$$h_m = g_mz_m - f_m$$

$$h_{m+1} = g \cdot u - 1$$

Отметим, что $h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m, g^{-1}) = 0$ для $j = 1, \cdots, m+1$.
Пусть $I = \{\sum\limits_j c_jh_j\}$ (где c_j — многочлены от $x_1, x_2, \cdots, x_n, z_1, z_2, \cdots, z_m, u$) — полиномиальный идеал, порожденный многочленами h_j.

Будем сравнивать мономы от переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n, z_1, z_2, \cdots, z_m, u$ лексикографически так, что

$$u > x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 > z_m > z_{m-1} > \cdots > z_1$$

Например, старший член многочлена $f = 4x_2x_1 + 3z_1x_2 + 2u$ есть $\hat{f} = 2u$.

Базисом Гребнера идеала I называется такое множество $G = \{q_1, q_2, \cdots\}$ элементов I, что старший член $\hat{f}$ любого элемента $f \in I$ делится на один из старших членов $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \cdots$ элементов G.

Базис Гребнера G **редуцированный**, если ни один из $\hat{q}_i$ не делится на остальные.

Утверждение. Пусть $G = \{q_1, q_2, \cdots\}$ — редуцированный базис Гребнера I, и пусть среди его элементов только $q_1, \cdots, q_k$ зависят от переменных $z_1, z_2, \cdots, z_m$. Тогда минимальный набор тождеств для $y_1, y_2, \cdots, y_m$:

$$q_1(y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0$$

$$\cdots$$

$$q_k(y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0$$

Если же таких множеств в G нет, то показатели $y_1, y_2, \cdots, y_m$ — независимы.
В этом случае любое другое полиномиальное соотношение имеет вид

$$c_1q_1(y_1, y_2, \cdots, y_m) + \cdots + c_kq_k(y_1, y_2, \cdots, y_m),$$

где c_i — многочлены от переменных $y_1, y_2, \cdots, y_m$.

Пример 3 с частными значениями коэффициентов.
Пусть

$$f = 2 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2,$$

$$g = 1 + x_2 + x_1$$

Тогда

$$y_1 = \frac{f-g}{g} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_1 + x_1 + 1}$$

$$y_2 = \frac{f-g}{x_1} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_1}$$

$$y_3 = \frac{f-g}{x_2} = \frac{2 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2 - 1}{x_2}$$

Последовательность расчетов: выписываем $h_1, \cdots, h_4$, потом строим редуцированный базис Гребнера идеала I и получаем $G = \{q_1, \cdots, q_{17}\}$, где

$$q_{17} = z_2^2z_3^2z_1 - z_2z_3^2z_1^2 - z_2^2z_3z_1^2 + 2z_2^2z_3z_1 - 5z_2z_3z_1^2 - 6z_2^2z_1^2 + 2z_2z_3^2z_1 - z_2^2z_3^2 - 5z_3^2z_1^2$$

Можно выразить любой из z_1, z_2, z_3 через остальные...

Пример 3 в почти общем виде.
Пусть $a_{11} = a_{22} = 0$. Тогда

$$f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2$$

Тогда

$$y_1 = \frac{f_1}{g_1} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_0}$$

$$y_2 = \frac{f_2}{g_2} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_1}$$

$$y_3 = \frac{f_3}{g_3} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0}{x_2}$$

и

$$h_1 = z_1g_1 - f_1 = z_1(b_1x_1 + b_2x_2 + b_0) - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0)$$

$$h_2 = z_2g_2 - f_2 = z_2x_1 - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0)$$

$$h_3 = z_3g_3 - f_3 = z_3x_2 - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_0)$$

$$h_4 = g \cdot u - 1 = u \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 - 1 = u(b_1x_1 + b_2x_2 + b_0)x_1x_2 - 1$$

Строим базис Гребнера с коэффициентами в поле $F = \mathbb{R}(a_0, a_1, a_2, a_{12}, b_0, b_1, b_2)$:
$G = \{q_1, \cdots, q_{16}\}$, причем

$$q_{16} = (-b_2^2a_0 + b_2b_0a_2)z_2^2z_1^2 - b_2b_0z_3z_2^2z_1^2 + (-a_0 + b_0)z_3^2z_2^2 + (-2b_2b_1a_0 + b_1b_0a_2 + b_2b_0a_1 - \\ -a_{12}b_0^2)z_3z_2z_1^2 - b_0b_1z_3^2z_2z_1^2 + (-b_2b_0 + 2b_2a_0 - b_0a_2)z_3z_2^2z_1 + (-b_0b_1 + 2b_1a_0 - b_0a_1)z_3^2z_2z_1 + \\ +(-a_0b_1^2 + b_0a_1b_1)z_3^2z_1^2 + b_0z_3^2z_2^2z_1$$

Пример 2, решение (продолжение).

$$y_1 = \frac{x_3x_2 - x_4x_1}{x_1}$$

$$y_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2}$$

$$y_3 = \frac{x_3x_2 - x_4x_1}{x_4}$$

$$y_4 = \frac{x_3x_2 - x_1x_4}{x_2x_4}$$

$$y_5 = 100\ \frac{x_3x_2}{x_4x_1 - 1}$$

Упрощение:

$$y_1' = \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_4}{x_1}$$

$$y'_2 = y_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_2}$$

$$y'_3 = y_3 = \frac{x_3 x_2 - x_4 x_1}{x_4}$$

$$y'_4 = \frac{y_3}{y_4} = x_2$$

$$y'_5 = 100\ \frac{y_3}{y_4 y_5} = \frac{x_1 x_4 - 1}{x_3}$$

Тогда

$$\begin{gathered} q_{25} = -z_1 + z_4^2 + z_1^2 z_4 z_2^2 z_5 - z_1^2 z_2 z_3 z_5 + z_4 z_5 - z_1 z_3 z_5 - z_1 z_4^2 z_2^2 z_5^2 + 4 z_1 z_4^2 z_2 - 2 z_4 z_1 z_3 + \\ +4 z_4 z_5 z_2 z_1 - 2 z_4^3 z_2^2 z_5 z_1 - 2 z_1^2 z_2 z_3 z_4 + z_1^2 z_3 z_4^2 z_2^2 z_5 + z_1^2 z_2^2 z_5^2 z_3 z_4 - z_3^2 z_2 z_4 z_5 z_1^2 + z_3^2 z_1^2 + \\ +z_3 z_5^2 z_2 z_4 z_1 + z_4^2 z_3 z_5 z_2 z_1 - z_1 z_2^2 z_4^2 + z_1^2 z_4^2 z_2^2 \end{gathered}$$

Для исходных переменных $y_1, \cdots, y_5$:

$$\begin{gathered} 0 = -y_1 y_4^4 y_5^2 + y_3^3 y_4^2 y_5^2 + 100 y_1^2 y_2^2 y_3 y_4^2 y_5 - 100 y_1^2 y_2 y_3 y_4^3 y_5 + 100 y_4^3 y_3^2 y_5 - 100 y_1 y_3^2 y_4^3 y_5 - \\ -10000 y_1 y_4^4 y_2^2 + 4 y_1 y_3^2 y_2 y_4^2 y_5^2 - 2 y_1 y_3^2 y_4^3 y_5^2 + 400 y_1 y_3^2 y_2 y_4^2 y_5 - 200 y_1 y_4^4 y_2^2 y_5 - 2 y_1^2 y_2 y_3 y_4^3 y_5^2 + \\ +100 y_1^2 y_4^3 y_2^2 y_3 y_5 + 10000 y_1^2 y_4^3 y_2^2 y_3 - 100 y_4^3 y_2 y_1^2 y_4^2 y_5 + y_1^2 y_3 y_4^4 y_5^2 + 10000 y_4^4 y_2 y_1 y_3 + \\ +100 y_4^3 y_2 y_1 y_4 y_5 - y_1 y_4^4 y_2^2 y_5^2 + y_1^2 y_2^2 y_3 y_4^2 y_5^2 \end{gathered}$$

Пример 4.

$$p_1 = xy^2 - y^3 + 1, \quad p_2 = x^2 y + 2xy - 1$$

Надо построить базис Гребнера $G = \{p_1, p_2\}$.
Выберем лексикографический порядок, пусть $lex(y > x)$, то

$$y^3 > xy^2 > x^2 y > xy > 1$$

Пусть $p'_1 = y^3 - xy^2 - 1$.

$$p_1 = LT(p_1) + \cdots, \quad p_2 = LT(p_2) + \cdots$$

$$L = lcm(LT(p_1), LT(p_2))$$

$$m_1 = \frac{L}{LT(p_1)}, \quad m_2 = \frac{L}{LT(p_2)}$$

(lcm — НОК)
Тогда **S-полином** равен $S(p_1, p_2) = m_1 p_1 - m_2 p_2$.

У нас

$$L = lcm(y^3, x^2 y) = x^2 y^3$$

$$S_1 = S(p_1, p_2) = x^2(y^3 - xy^2 - 1) - y^2(x^2 y + 2xy - 1) = -x^3 y^2 - x^2 - 2xy^3 + y^2$$

Разделим S_1 на p_1', получим

$$R(S_1) = S_1' = S_1 - 2xp_1' = x^3y^2 - 2x^2y^2 + y^2 - x^2 - 2x$$

Разделим S_1' на p_2, получим

$$R(S_1') = S_1'' = S_1' - xyp_2 = y^2 + xy - x^2 - 2x$$

И так далее.

Домашнее задание 16

1. Решить с помощью базисов Грёбнера систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + x^2z - 2xz = 0 \\ x^2 + 2yz - 3 = 0 \\ x^4 - y^2z^2 = 0 \end{cases}$$

2. Найти базис Грёбнера

$$\begin{cases} f_1 = x^3y + 2xy^3 - 3x^2y^2 \\ f_2 = xy^2 - 2y^2 + x - 1 \\ f_3 = x^4 \end{cases}$$

и решить систему уравнений $f_1 = f_2 = f_3 = 0$.

Лекция 17

Линейная алгебра в теории кодирования.
Презентация.

Лекция 18

Задача линейного программирования.
Пусть

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Нужно максимизировать линейную функцию

$$f(\bar{x}) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to max$$

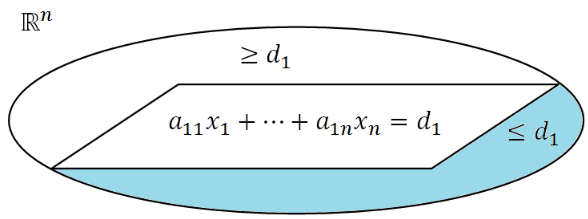
при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant d_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant d_m \end{cases}$$

$$A\bar{x} \leqslant \bar{d}$$

$$x_i \geqslant 0 \Leftrightarrow -x_i \leqslant 0$$

$$x_1 + x_2 \leqslant d \text{ и } x_1 + x_2 \geqslant d \ \Leftrightarrow \ -x_1 - x_2 \leqslant -d \ \Leftrightarrow \ x_1 + x_2 = d$$



Вариант:

$$f(\bar{x}) = <\bar{c}, \bar{x}> \to min$$
$$\begin{cases} A\bar{x} \leqslant \bar{d} \in \mathbb{R}^m \\ \bar{x} \geqslant \bar{0} \ \ (x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0) \end{cases}$$

Задача о диете.
Дано несколько продуктов $E_1, \cdots, E_n$ (еда) и информация о них, например, У – углеводы, Б – белки, К – калории. Также дана цена каждого продукта ($).

	У	Б	К	Цена $
E_1		$\bar{a}_1$		
$\vdots$		$\cdots$		
E_n		$\bar{a}_n$		

Пусть $\bar{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ – количество употребленных единиц пищи каждого типа.
Ограничения:

$$<\bar{a}_i, \bar{y}> \geqslant c_i, \quad i = 1, \cdots, m$$

или

$$\begin{cases} A\bar{y} \geqslant \bar{c} \\ \bar{y} \geqslant \bar{0} \end{cases}$$

Вектор цен: $\bar{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ – цены на $y_1, \cdots, y_n$.
Матрица A имеет размер $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix}$$

Функция $f(\bar{y}) = <\bar{p}, \bar{y}>$.
Общая постановка:

$$\begin{cases} A\bar{y} \geqslant \bar{c} \\ \bar{y} \geqslant \bar{0} \\ f(\bar{y}) =< \bar{p}, \bar{y} >\to min \end{cases}$$

Всего $\approx C_m^n$ вершин, то есть меньше $\dfrac{m^{m-n}}{n!}$.

Пример 1.

	Б	Ж	У	Цена
Мясо	60	30	10	100
Торт	10	40	50	150
Норма c_i	30	30	40	

$$\bar{a}_1 = (60, 10) \text{ – белки}$$
$$\bar{a}_2 = (30, 40) \text{ – жиры}$$
$$\bar{a}_3 = (10, 50) \text{ – углеводы}$$

$$A\bar{y} \geqslant \bar{c}$$

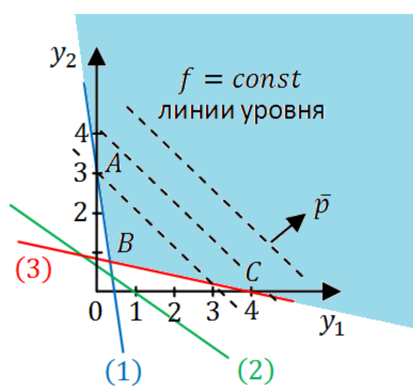
$$\begin{pmatrix} 60 & 10 \\ 30 & 40 \\ 10 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{y}) =< \bar{p}, \bar{y} >= \bar{p}^T\bar{y} = 100y_1 + 150y_2 \to min$$

$$60y_1 + 10y_2 \geqslant 30 \quad (1)$$

$$30y_1 + 40y_2 \geqslant 30 \quad (2)$$

$$10y_1 + 50y_2 \geqslant 40 \quad (3)$$



Надо найти в какой вершине будет достигаться минимум функции $f(\bar{y})$. Посмотрим значения в точках A, B и C.

$$f(A) = 100 \cdot 0 + 3 \cdot 150 = 450$$

$$f(C) = 100 \cdot 4 + 150 \cdot 0 = 400$$

$$f(B) = 100y_1 + 150y_2$$

Наидем пересечение (1) и (3):

$$\begin{cases} 60y_1 + 10y_2 = 30 \\ 10y_1 + 50y_2 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y_1 + y_2 = 3 \\ 6y_1 + 30y_2 = 24 \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{21}{29}, \quad y_1 = 4 - \frac{5 \cdot 21}{29} = \frac{11}{29}$$

Получим

$$f(B) = 100 \cdot \frac{11}{29} + 150 \cdot \frac{21}{29} = \frac{4250}{29} \approx 147$$

Таким образом, наименьшее значение $f(\bar{y})$ достигается в точке B и принимает значение 147.

Линейная производственная модель.

Пусть $\bar{x}$ – выпуск m видов продукции

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

цены на эти виды продукции

$$\bar{c} = (c_1, \cdots, c_m),$$

а доход

$$\bar{y} = c_1x_1 + \cdots + c_mx_m =< \bar{c}, \bar{x} >\to max$$

Имеются ресурсы $1, \cdots, n$ и указаны ограничения на них (запасы)

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

a_{ij} – число единиц j ресурса для производства единицы i типа продукции. Для производства x_i надо x_ia_{i1} ресурса $1, \cdots, x_ia_{ij}$ ресурса $j, \cdots, x_ia_{in}$ ресурса n.

Всего потратим ресурса j:

$$x_1a_{1j} + \cdots + x_na_{nj} = \bar{x}^TA^j \leqslant d_j$$

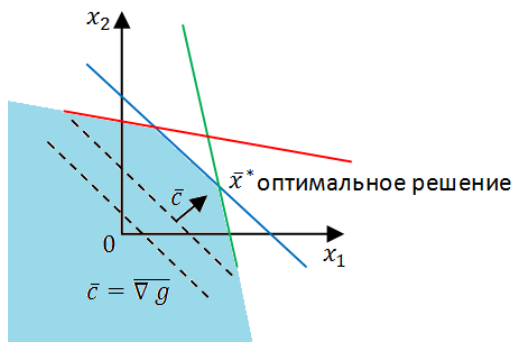
ограничения:

$$\bar{x}^TA \leqslant \bar{d}^T$$

Прямая задача:

$$\begin{cases} \bar{x}^TA \leqslant \bar{d} \quad \Leftrightarrow \quad A^T\bar{x} \leqslant \bar{d} \\ \bar{x} \geqslant 0 \\ g(\bar{x}) =< \bar{c}, \bar{x} >= c_1x_1 + \cdots + c_mx_m \to max \end{cases}$$

Пусть $\bar{x}^* \in \mathbb{R}^m$ – оптимальное решение, такое что $g_{max} =< \bar{c}, x^* >$.



Двойственная задача линейного программирования.
Дано:

$$\begin{cases} A\bar{y} \geqslant 0, \bar{c} \in \mathbb{R}^m, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, A_{m\times n} \\ \bar{y} \geqslant 0 \\ f(\bar{y}) =< \bar{d}, \bar{y} >\to min \end{cases}$$

Тогда y^* – решение, то есть $f(y^*) =< d, \bar{y}^* >= f_{min}$.

Теорема.

1. Если $\bar{x}$ – допустимый для прямой задачи, а $\bar{y}$ – допустимый для двойственной задачи, то

$$g(x) \leqslant f(y), \ < c, x > \leqslant < d, y >$$

►

$$\begin{cases} x^T A \leqslant d^T \\ Ay \geqslant c \end{cases}$$

$$< c, x >= x^T c \leqslant x^T Ay \leqslant d^T y = f(y) =< d, y > \quad \blacksquare$$

2. Если x^*, y^* – решения прямой и двойственной задач, то $f(y) = g(x)$, то есть

$$< c, x^* >=< d, y^* >= f_{min} = g_{max}$$

► Так как значения оптимальны, то вместо неравенств в доказательстве пункта 1 теоремы везде будут стоять равенства, потому что $< x^T A, y^* >=< d^T, y^* >$, либо они несущественны и равны 0. Значит $< c, x^* >=< d, y^* >$ $\blacksquare$