# Избранные Главы Линейной Алгебры
# Факультатив

Вадим Гринберг
Юрий Баранов

## Содержание

# Псевдообратная матрица

## Свойства

## Скелетное разложение

## Решение по методу наименьших квадратов

# Сингулярное разложение

## Суть

## Алгоритм построения

# Приближённые решения

## Псевдорешение СЛУ

## Интерполяция

### Определитель Вандермонда

### Интеполяционный многочлен Лагранжа

## Полиномиальная интерполяция с кратными узлами Многочлен Эрмита

# Приближение кривых

## Сплайны

## Кривые Безье

# Метрическое пространство

## Метрики, Шары, Сферы

Пусть $M$ – некое множество.

**Метрика** $\rho$ на множестве $M$ — это такая функция $\rho(x, y) \geqslant 0$, что

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
2. $\rho(x, y) > 0, x \neq y, \rho(x, x) = 0$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

**Примеры**:

1. Метрика евклидова пространства $M = \mathbb{R}^n$:

$$\rho(x,\, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

2. Расстояние Хэмминга: $M = |\mathbb{Z}_2^n| = \{\vec{x} \mid x_i \in \{0,\, 1\}\}$

$$\rho(x,\, y) = |i \mid x_i \neq y_i| = \text{кол-во единиц в числе } y - x$$

Дана карта с расстояниями между городами.
$M = \{$ города $\}$

l4_1.png

$\rho(A, B) = 5$
$\rho(E, F) = 4$ (минимальное расстояние из возможных)

**Шар в метрическом пространстве.**

l4_2.png

$B_R(A) = \{x | \rho(A, x) \leqslant R\}$ — **шар** радиуса $R$ с центром в точке $A$.
$S_R(A) = \{x | \rho(A, x) = R\}$ — **сфера** радиуса $R$ с центром в точке $A$.

$B_5(C) = \{C, B, D, I\}$ — все точки, которые туда входят.
$S_5(C) = \{I\}$ — только те точки, которые лежат на окружности.
$B_{100}(C) = B_{50}(C) = M$ — все множество.

Метод наименьших квадратов — приближение функции в смысле следующей метрики

$$M = \{f : X \to \mathbb{R}\}, X = \{x_1, ..., x_n\}$$

$$\rho(f, y) = |\bar{y} - \bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - f(x_i))^2}$$

l4_4.png

**Пример 1.**
Найти такое метрическое пространство $M$, что

$$\begin{cases} B_5(x) \subset B_4(y) \\ B_5(x) \neq B_4(y) \end{cases}$$ , где $x, y$ - две точки.

То есть доказать, что существует $c \in B_4(y), c \notin B_5(x)$.

l4_5.png

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 4$$
$$\rho(y, c) = \rho(c, y) = 3$$
$$\rho(x, c) = \rho(c, x) = 7$$

$$B_5(x) = \{x, y\}$$
$$B_4(y) = \{x, y, c\}$$

То есть $B_5(x) \subset B_4(y)$.

Вспомним определение линейного пространства.
Если на непустом множестве заданы две бинарные операции "+"и "умножение на число числа из поля $F$, $\forall\ a,\ b,\ c \in V$ то

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $\exists\ 0 : a + 0 = 0 + a = a$
3. $\exists\ (-a) : a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$
5. $1 \cdot x = x$
6. $(\mu\lambda)x = \mu(\lambda x)$
7. $(a + b)\lambda = a\lambda + b\lambda$
8. $(\mu + \lambda)a = \mu a + \lambda a$

$V$ — **линейное пространство** (векторное пространство), если выполнены 8 предыдущих аксиом и

1. $\forall \bar{u}, \bar{v}$: $\bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\forall$ числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ $\alpha\bar{u} \in V$
   (или $\alpha \in F$ заданное поле, например, $F_2 = \{0, 1\}$)

Линейное пространство $V$ — **нормированное**, если на нем задана такая норма
$\nu : V \to \mathbb{R} \geqslant 0$, что

1. $\nu(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\nu(\bar{0}) = \bar{0}$
2. $\nu(\alpha\bar{x}) = |\alpha|\nu(\bar{x})$
3. $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$ для $\forall x, y \in V, \forall\alpha$

Из каждой нормы можно сделать метрику $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \nu(\bar{y} - \bar{x})$.

**Примеры норм:**

1. Манхэттенская норма (норма таксиста)
   (Можно ехать разными путями, но не по прямой)

   14_7.png

   $$\nu_M(\bar{x}) = |x_1| + ... + |x_n| \text{ в } \mathbb{R}^n, \text{ где } \bar{x} = (x_1, ..., x_n)$$

2. Евклидова норма
   (Для приближения)

   $$\nu_E(\bar{x}) = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

3. Норма максимума
   (Уменьшает ошибку по всем координатам)

   14_8.png

   $$\nu_{max}(\bar{x}) = max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

4. Норма Гёльдера

   $$\nu_p(\bar{x}) = \sqrt[p]{|x_1|^p + ... + |x_n|^p} \text{ в } \mathbb{R}^n$$
   $$\nu_1(\bar{x}) = |x_1| + ... + |x_n| = \nu_M(\bar{x})$$
   $$\nu_2(\bar{x}) = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} = \nu_E(\bar{x})$$
   $$\nu_\infty(\bar{x}) = \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

   Если $|x_i| = max|x_i|$, то $\sqrt[p]{|x_i|^p} \to |x_i|$, получим:

   $$\nu_\infty(\bar{x}) = max\{|x_1|, ..., |x_n|\} = \nu_{max}(\bar{x})$$

**Утверждение.** В нормированном пространстве $V$ верно:

1. $\forall \bar{x}, \bar{y}$ $B_R(\bar{x})$ равен $B_R(\bar{y})$ (как геометрическая фигура).
   ► Пусть $\bar{v} = \bar{y} - \bar{x}$, тогда

   $$B_R(\bar{y}) = \bar{v} + B_R(\bar{x})$$

   Ко всем точкам из $B_R(\bar{x})$ прибавим одинаковый вектор $\bar{v}$.

   14_9.png

   $$C \in B_R(y) \Leftrightarrow \nu(C - y) \leqslant R$$
   $$\nu((C - (\bar{y} - \bar{x})) - \bar{x}) \leqslant R$$

То есть, $D = C - (\bar{y} - \bar{x}) \in B_R(\bar{x})$. $\blacksquare$

2. Шары $B_R(\bar{x})$ и $B_{\alpha R}(\bar{x})$, $\alpha > 0$ подобны с коэффициентом подобия $\alpha$.
   $\blacktriangleright$

$$\nu(xD) = \frac{1}{\alpha}\nu(xC)$$
$$D = x + xD = x + \frac{1}{\alpha}xC$$
$$\rho(D, x) = \nu(xD) = \frac{1}{\alpha}\nu(C - x) = \nu(\frac{1}{\alpha}(C - x))$$

l4_10.png

$$C \in B_{\alpha R}(x) \Leftrightarrow \nu(C - x) \leqslant \alpha R$$
$$\rho(D, x) = \nu(\frac{C - x}{\alpha}) \leqslant R$$

То есть $D \in B_R(\bar{x})$. $\blacksquare$

$\nu_p$ — норма только при $p \geqslant 1$ (для невыпуклых — неверно, не выполняется неравенство треугольника).
$B^p = B_1(\bar{0})$ относительно $\nu_p$.

l4_11.png l4_12.png

**Пример 2.**
Для каких $R_1, R_2$ возможно $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$?

Если $R_2 > R_1$ — возможно (даже при $x = y$).
При $R_1 = 5, R_2 = 4$ — возможно (из предыдущего примера).

Докажем, что при $R_1 > R_2$ это не всегда верно, а именно: при $2R_2 > R_1$ - верно, а при $R_2 \leqslant \dfrac{R_1}{2}$ — нет.
Рассмотрим случай $2R_2 = R_1$.

l4_13.png

Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_1}(x) = B_{R_2}(y)$ — множества совпадают, то есть уже не подходит.

Рассмотрим случай, когда $R_1$ чуть меньше $2R_2$.
Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$ верно.

Рассмотрим случай, когда $R_1$ чуть больше $2R_2$.
Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть, $B_{R_2}(y) \subseteq B_{R_1}(x)$, значит не подходит.

Линейное пространство называется **евклидовым пространством**, если на нем задано скалярное произведение $g(x, y)$:

1. $g(x,y) = g(y,x)$
2. $g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$
3. $g(\lambda x, y) = \lambda g(x,y)$
4. $g(x,x) \geqslant 0, g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

В евклидовом пространстве есть стандартная норма $\parallel x \parallel = \sqrt{g(x,x)}$.
$L_2[0,1]$ — множество функций, квадрат которых интегрируем по Риману.
$(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$
$\parallel f \parallel_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 |f(x)|^2\,dx}$
$x_n \to x$ **сходится по норме** $\nu(x)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ , что $\forall n > N(\varepsilon)$ верно $\nu(x_n - x) < \varepsilon$.

**Пример 3.**
Является ли нормой на множестве непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a,b]$ следующее выражение:

$$\mu(f) = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{max}(|f(x)| + |f'(x)|)\ ?$$

Да, так как выполняются все свойства нормы.

1. $\mu(f) > 0$
2. $\mu(\lambda f) = \lambda \mu(f)$
3. $\mu(f+g) = max(|f+g| + |(f+g)'(x)|)$
   $\mu(f) + \mu(g) = max(|f| + |g| + |f'| + |g'|)$
   А так как $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, то выполняется неравенство треугольника
   $\mu(f+g) \leqslant \mu(f) + \mu(g)$.

**Пример 4.**
Следует ли из сходимости по норме $\parallel f \parallel = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{max}|f(x)|$ сходимость по $\mu(f)$, где

$$\mu(f) = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{max}(|f(x)| + |f'(x)|)\ ?$$

Верно ли обратное?

Докажем, что $f_k(x) \overset{\|f\|}{\to} f(x)$ и $f_k(x) \nrightarrow$ по $\mu(f)$.

$$f = x, f' = 1$$
$$f_k = \frac{1}{k}sin(xk^2) + x$$
$$|f - f_k| \leqslant \frac{1}{k}|sin(xk^2)| \leqslant \frac{1}{k} \to 0, \text{ то есть, сходится по норме.}$$
$$f_k' = 1 + k \cdot cos(xk^2)$$

$max\{|f(x) - f_k(x)| + |f'(x) - f_k'(x)|\} = max\{|\frac{1}{k}sin(xk^2)| + |1 - 1 - k \cdot cos(xk^2)|\} \to \infty$, то есть, не сходится по $\mu(f)$.

Обратное утверждение верно. При сходимости по $\mu(f)$ получим, что $|f(x) - f_k(x)| \to 0$, то есть сходится по норме.

**Домашнее задание 4**

1. $B(x, y) = \{x^2 + axy + 4y^2 \leqslant 1\}$
   При каких $a$ на множестве $\mathbb{R}^2$ существует норма $\nu$ такая, что $B(x, y)$ — единичный шар относительно нее?
   Найдите в этом случае
   $$\nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Будет ли метрикой на $\mathbb{R}$ функция $\rho(x, y) =$
   (a) $|x^2 - y^2|$
   (b) $sin(x - y)$
   (c) $|e^x - e^y|$

3. Существует ли убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств с пустым пересечением (в произвольном метрическом пространстве)?

4. Доказать, что шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством. То есть доказать, что если $x, y$ принадлежат шару, то и весь отрезок $[x, y]$ принадлежит шару.

# Лекция 5

Множество **замкнутое**, если оно включает свою границу.

$V$ — линейное пространство, $\nu$ — **норма** на $V$ ($\nu : V \to \mathbb{R} \geqslant 0$) если:

1. $\nu(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\nu(\bar{0}) = \bar{0}$
2. $\nu(\alpha\bar{x}) = |\alpha|\nu(\bar{x})$
3. $\nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y})$ для $\forall x, y \in V, \forall\alpha$
   $\nu(x) = |x|$

$\mathbb{R}^2$, $\nu(\bar{x})$–?, $\nu(\bar{v})$–?
$B_1^\nu(\bar{0}) = B_1^\nu$

l5_2.png

$$A = \text{луч } \cap S_1, \;\; S_1 \text{ — граница}$$
$$\nu(OA) = 1$$
$$\nu(v) = \lambda\nu(OA) = \lambda, \text{ если } v = \lambda OA, \lambda = \frac{|v|}{|OA|}$$

**Лемма.** Пусть $\nu_1, \nu_2$ — две нормы на $\mathbb{R}^n$, тогда существует такое $c > 0$, что любой шар одной нормы содержится в другом шаре другой нормы.
$$B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{\nu_2}.$$

**Следствие.** Любые две нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, то есть для $\forall\ \nu_1, \nu_2\ \exists\ c_1, c_2$, что для $\forall\ \bar{x}$ верно $c_1\nu_1(x) \leqslant \nu_2(x) \leqslant c_2\nu_1(x)$.

**Следствие.** Шар $B_1^{\nu_1}$ — ограниченное множество, то есть $B_R^{\nu_1} \subset \{\bar{x} \mid |\bar{x}| \leqslant M\} = B_M^E$ (евклидов шар).

l5_4.png

▶ $\nu_2$ =евклидова длина, $M = cR$ ■

**Доказательство леммы.**
▶ Пусть

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\bar{e}_1 + ... + x_n\bar{e}_n \in B_1^{\nu_1}(R = 1)$$

$\nu_2(\bar{x}) = \nu_2(x_1\bar{e}_1 + ... + x_n\bar{e}_n) \leqslant \nu_2(x_1 e_1) + ... + \nu_2(x_n e_n) = |x_1|\nu_2(e_1) + ... + |x_n|\nu_2(e_n) \leqslant$
$\leqslant \underset{i=1,...,n}{max}\{\ |x_i|\}$.

l5_5.png

Пусть $|\bar{x}|_\infty = \underset{i=1,...,n}{max}|x_i|,\ M = \underset{i=1,...,n}{max}\,\nu_2(e_i)$, тогда $\nu_2(x) \leqslant |\bar{x}|_\infty nM$, то есть $B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{|\cdot|_\infty}, c = nM$.
Доказали, что любой единичный шар можно поместить в квадрат со стороной $cR$.

Если $|x|_\infty \leqslant \dfrac{1}{nM}$, то $\nu_2(x) \leqslant 1, x \in B_1^{\nu_2}$.

l5_6.png

Внутри любого единичного шара существует квадрат, то есть существует куб, который содержит его целиком. Осталось доказать, что шар — ограниченное множество. Докажем от противного.

$$B_1^\nu = \{x|\nu(\bar{x}) \leqslant 1\}$$

Пусть существует $\{x^1, x^2, ...\} : \{|x^1|, |x^2|, ...\} \to +\infty$, тогда она существует, если $B_1^\nu$ неотрицательное множество.

l5_7.png l5_9.png l5_8.png

$m \leqslant \nu_2(B_1^E) \leqslant M$, где $m > 0,\ M$ — ограниченное множество, тогда (так как все шары подобны):

$$\begin{cases} B_m^{\nu_2} \subset B_1^E \subset B_M^{\nu_2} \\ B_R^{\nu_2} \subset B_{R/m}^E \\ B_{R/M}^E \subset B_R^{\nu_2} \end{cases}$$

■

**Теорема Минковского.** Множество $B \subset \mathbb{R}^n$ является единичным шаром $B_1^\nu$ относительно какой-либо нормы $\nu$ тогда и только тогда, когда $B$:

1. замкнуто
2. ограничено ($B \subset B_M^E$)
3. содержит окрестность нуля (то есть $B \supset B_m^E$)

4. выпукло

5. центрально симметрично (если $\bar{x} \in B$, то и $-\bar{x} \in B$)

**Пример 1.**
$B = \{x^2 + axy + 4y^2 \leqslant 1\}$
Существует ли такая норма $\nu$, что $B$ — единичный шар относительно нее ($B = B_1^\nu$)?

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{2} & 4 \end{pmatrix}$$
$$\triangle_1 = 1 > 0$$
$$\triangle_2 = 4 - \frac{a^2}{4} > 0$$

То есть это эллипс, все 5 свойств из предыдущей теоремы выполняются, значит при $|a| < 4 B$ — единичный шар относительно нормы.

$$\triangle_1 = 1 > 0$$
$$\triangle_2 = 4 - \frac{a^2}{4} < 0$$

В этом случае множество не будет замкнутым, то есть не выполняются все свойства из предыдущей теоремы, значит в этом случае $B$ не будет единичным шаром относительно нормы.
При $\triangle_2 = 0$: $a = \pm 4$ и $x^2 \pm 4xy + 4y^2 \leqslant 1$, $(x \pm 2y)^2 \leqslant 1$. В этом случа получим множество между двумя параллельными прямыми, которое является незамкнутым, то есть в этом случае $B$ тоже не будет единичным шаром относительно нормы.
Получили, что $B = B_1^\nu$ только при $|a| < 4$.

$V$ — **евклидово пространство со скалярным произведением**, если задана $V \times V \to \mathbb{R}$, то есть, на нем задано скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}$ такое, что для пространств над $\mathbb{R}$ выполнено:

1. $(u, v) = (v, u)$

2. $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$

3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{R}$

4. $(u, u) > 0, u \neq \bar{0}$ $((u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$

Обозначение скалярного произведения: $(u, v) =< u, v >=< u \mid v >$.

Длина вектора — это $|v| = \sqrt{(v, v)} \geqslant 0$ (норма).
►

$$|\alpha v| = \sqrt{(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 (v, v)} = |\alpha||v|$$
$$|v| > 0, \text{ при } v \neq \bar{0}$$
$$|u + v| \leqslant |u| + |v| \quad \blacksquare$$

$$cos\widehat{(u, v)} = \frac{(u, v)}{|u||v|}, u, v \neq \bar{0}$$

$V$ — **эрмитово пространство со скалярным произведением**, если задана $V \times V \to \mathbb{C}$, то есть, на нем задано скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{C}$ такое, что для пространств над $\mathbb{C}$ выполнено:

1. $(u,v)=\overline{(v,u)}$
2. $(u'+u'',v)=(u',v)+(u'',v)$
3. $\alpha(u,v)=(\alpha u,v)=(u,\alpha v), \alpha\in\mathbb{C}$
4. $\forall u\ (u,u)\geqslant 0, (u,u)=0\Leftrightarrow u=0$

Как по норме $|w|$ восстановить скалярное произведение $(u,v)$?

l5_10.png

$$|w|^2=(w,w)=(v-u,v-u)=(v,v)-(u,v)-(v,u)+(u,u)=|v|^2-2(u,v)+|u|^2$$

То есть, $(u,v)=\dfrac{1}{2}(|v|^2+|u|^2-|v-u|^2)$.

**Теорема (тождество параллелограмма).** Пусть $V$ — нормированное пространство с нормой $|v|$. На $V$ существует такое скалярное произведение, что $|v|=\sqrt{(v,v)}$ в том и только том случае, когда в $V$ выполняется тождество параллелограмма:

$$\forall a,b\ |a+b|^2+|b-a|^2=2(|a|^2+|b|^2)$$

При $c=a+b, d=b-a:$

$$c^2+d^2=2(a^2+b^2)$$

l5_11.png

► Если для $\forall v\ |v|=\sqrt{<v,v>}$, то $|a+b|^2+|b-a|^2=<a+b,a+b>+<b-a,b-a>=$
$=<a,a>+2<a,b>+<b,b>+<b,b>-2<a,b>+<a,a>=2(|a|^2+|b|^2)$ ■

$H$ — **гильбертово пространство**, если на нем задано скалярное произведение и оно является полным (относительно метрики, порожденной скалярным произведением).

Набор $\{\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}^{-e}$ называется **ортогональной системой**, если
$(\varphi_i,\varphi_j)=\delta^i_j=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$

Формально хотим представить $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n$.

$$(f,\varphi_j)=c_j(\varphi_j,\varphi_j)$$
$$(\varphi_j,\varphi_j)=1$$
$$c_j=\frac{(f,\varphi_j)}{\parallel\varphi_j\parallel^2}=(f,\varphi_j)$$

$c_j$ — коэффициенты Фурье по ортогональной системе.

**Теорема.** Если $\varphi_j$ — ортогональная система, тогда следующие условия эквивалентны:

1. система $\{\varphi_j\}$ является базисом, то есть $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n$
2. выполнение равенства Парсеваля $\parallel f\parallel^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_k^2$

3. система является полной, то есть $\exists y \neq 0 : (\varphi_j, y) = 0$

Хотим приблизить $f$ и минимизировать $\parallel f - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \parallel \to min$.

$(f - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\varphi_k, f - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\varphi_k) =$ (так как система ортогональна) $= (f, f) - 2\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k(f, \varphi_k) +$
$+ \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k^2(\varphi_k, \varphi_k) = (c_k = (f, \varphi_k),\ (\varphi_k, \varphi_k) = 1) = \parallel f \parallel^2 + \sum\limits_{k=0}^{n}(\alpha_k - c_k)^2 - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2$
Выбором $\alpha$ хотим минимизировать, минимальная норма будет там, где совпадают $\alpha_k = c_k$.

$a = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ — пространство $\mathbb{R}_{n+1}$ многочленов степени $\leqslant n$ на $[-1, 1]$, где скалярное произведение $\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Применим к $a$ процесс Грама-Шмидта, получим $b$.

$$a \to b = \{P_0(x) = 1\}$$

**Многочлены Лежандра:**

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^k)^{(k)}, k = 1,..,n$$

**k=0:** $P_0(x) = 1$

**k=1:** $P_1(x) = \dfrac{1}{2}(x^2-1)' = x$

**k=2:** $P_2(x) = \dfrac{1}{8}((x^2-1)^2)'' = \dfrac{1}{8}(4x(x^2-1)' = \dfrac{3x^2-1}{2}$

**k=3:** $P_3(x) = \dfrac{1}{48}((x^2-1)^3)''' = \dfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$\parallel P_1(x) \parallel = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} x \cdot x\,dx} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

**Домашнее задание 5**

1. (a) Проверить ортогональность $P_2(x)$ и $P_3(x)$ относительно $< f, g > =$
   $= \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

   (b) Найти $\parallel P_n(x) \parallel$.

2. Найти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ на $[-1, 1]$: $\parallel f - \sum\limits_{k=0}^{2} \alpha_k P_k(x) \parallel \to min$, $d_j = \dfrac{(f, \varphi_j)}{\parallel \varphi_j \parallel^2} = (f, \varphi_j)$, где $P_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^k)^{(k)}$, $k = 1, \cdots, n$ — многочлены Лежандра.

   (a) $f_1(x) = xe^{-x}$

   (b) $f_2(x) = x^3$

3. Выразить скалярное произведение через длину вектора в эрмитовом пространстве.

## Норма

## Теорема Минковского

# Многочлены Чебышева

## Матричные нормы