

Избранные Главы Линейной Алгебры

Факультатив

Вадим Гринберг

Юрий Баранов

Содержание

1	Псевдообратная матрица	2
1.1	Свойства	2
1.2	Скелетное разложение	2
1.3	Решение по методу наименьших квадратов	2
2	Сингулярное разложение	3
2.1	Суть	3
2.2	Алгоритм построения	3
3	Приближённые решения	4
3.1	Псевдорешение СЛУ	4
3.2	Интерполяция	4
3.2.1	Определитель Вандермонда	4
3.2.2	Интеполяционный многочлен Лагранжа	4
3.3	Полиномиальная интерполяция с кратными узлами Многочлен Эрмита	4
4	Приближение кривых	5
4.1	Сплайны	5
4.2	Кривые Безье	5
5	Метрическое пространство	6
5.1	Метрики, Шары, Сферы	6
5.2	Норма	6
5.3	Теорема Минковского	6
6	Многочлены Чебышева	7
7	Матричные нормы	8

Псевдообратная матрица

Свойства

Скелетное разложение

Решение по методу наименьших квадратов

Сингулярное разложение

Суть

Алгоритм построения

Приближённые решения

Псевдорешение СЛУ

Интерполяция

Определитель Вандермонда

Интеполяционный многочлен Лагранжа

Полиномиальная интерполяция с кратными узлами

Многочлен Эрмита

Приближение кривых

Сплаины

Кривые Безье

Метрическое пространство

Метрики, Шары, Сферы

Пусть M — некоторое множество.

Метрика ρ на множестве M — это такая функция $\rho(x, y) \geq 0$, что

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
2. $\rho(x, y) > 0, x \neq y, \rho(x, x) = 0$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Примеры:

1. Метрика евклидова пространства $M = \mathbb{R}^n$:

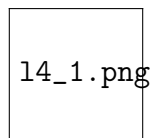
$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

2. Расстояние Хэмминга: $M = |\mathbb{Z}_2^n| = \{\vec{x} \mid x_i \in \{0, 1\}\}$

$$\rho(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}| = \text{кол-во единиц в числе } y - x$$

Дана карта с расстояниями между городами.

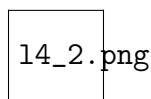
$M = \{ \text{города} \}$



$$\rho(A, B) = 5$$

$$\rho(E, F) = 4 \text{ (минимальное расстояние из возможных)}$$

Шар в метрическом пространстве.



$B_R(A) = \{x \mid \rho(A, x) \leq R\}$ — **шар** радиуса R с центром в точке A .

$S_R(A) = \{x \mid \rho(A, x) = R\}$ — **сфера** радиуса R с центром в точке A .

$B_5(C) = \{C, B, D, I\}$ — все точки, которые туда входят.

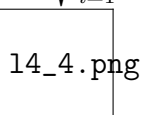
$S_5(C) = \{I\}$ — только те точки, которые лежат на окружности.

$B_{100}(C) = B_{50}(C) = M$ — все множество.

Метод наименьших квадратов — приближение функции в смысле следующей метрики

$$M = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}, X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\rho(f, y) = |\bar{y} - \bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y(x_i) - f(x_i))^2}$$



Пример 1.

Найти такое метрическое пространство M , что

$$\begin{cases} B_5(x) \subset B_4(y) \\ B_5(x) \neq B_4(y) \end{cases}, \text{ где } x, y - \text{ две точки.}$$

То есть доказать, что существует $c \in B_4(y), c \notin B_5(x)$.

14_5.png

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 4$$

$$\rho(y, c) = \rho(c, y) = 3$$

$$\rho(x, c) = \rho(c, x) = 7$$

$$B_5(x) = \{x, y\}$$

$$B_4(y) = \{x, y, c\}$$

То есть $B_5(x) \subset B_4(y)$.

Вспомним определение линейного пространства.

Если на непустом множестве заданы две бинарные операции "+" и "умножение на число" из поля F , $\forall a, b, c \in V$ то

$$1. a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$2. \exists 0 : a + 0 = 0 + a = a$$

$$3. \exists (-a) : a + (-a) = 0$$

$$4. a + b = b + a$$

$$5. 1 \cdot x = x$$

$$6. (\mu\lambda)x = \mu(\lambda x)$$

$$7. (a + b)\lambda = a\lambda + b\lambda$$

$$8. (\mu + \lambda)a = \mu a + \lambda a$$

V — **линейное пространство** (векторное пространство), если выполнены 8 предыдущих аксиом и

$$1. \forall \bar{u}, \bar{v} : \bar{u} + \bar{v} \in V$$

$$2. \forall \text{ числа } \alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \quad \alpha \bar{u} \in V$$

(или $\alpha \in F$ заданное поле, например, $F_2 = \{0, 1\}$)

Линейное пространство V — **нормированное**, если на нем задана такая норма $\nu : V \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$, что

$$1. \nu(\bar{x}) > 0, \bar{x} \neq \bar{0}, \nu(\bar{0}) = 0$$

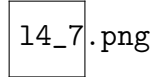
$$2. \nu(\alpha \bar{x}) = |\alpha| \nu(\bar{x})$$

$$3. \nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y}) \text{ для } \forall x, y \in V, \forall \alpha$$

Из каждой нормы можно сделать метрику $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \nu(\bar{y} - \bar{x})$.

Примеры норм:

1. Манхэттенская норма (норма таксиста)
(Можно ехать разными путями, но не по прямой)

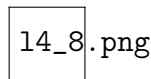


$$\nu_M(\bar{x}) = |x_1| + \dots + |x_n| \text{ в } \mathbb{R}^n, \text{ где } \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

2. Евклидова норма
(Для приближения)

$$\nu_E(\bar{x}) = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

3. Норма максимума
(Уменьшает ошибку по всем координатам)



$$\nu_{\max}(\bar{x}) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

4. Норма Гёльдера

$$\begin{aligned} \nu_p(\bar{x}) &= \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \text{ в } \mathbb{R}^n \\ \nu_1(\bar{x}) &= |x_1| + \dots + |x_n| = \nu_M(\bar{x}) \\ \nu_2(\bar{x}) &= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \nu_E(\bar{x}) \\ \nu_\infty(\bar{x}) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \end{aligned}$$

Если $|x_i| = \max |x_i|$, то $\sqrt[p]{|x_i|^p} \rightarrow |x_i|$, получим:

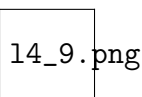
$$\nu_\infty(\bar{x}) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \nu_{\max}(\bar{x})$$

Утверждение. В нормированном пространстве V верно:

1. $\forall \bar{x}, \bar{y}$ $B_R(\bar{x})$ равен $B_R(\bar{y})$ (как геометрическая фигура).
► Пусть $\bar{v} = \bar{y} - \bar{x}$, тогда

$$B_R(\bar{y}) = \bar{v} + B_R(\bar{x})$$

Ко всем точкам из $B_R(\bar{x})$ прибавим одинаковый вектор \bar{v} .



$$\begin{aligned} C \in B_R(y) &\Leftrightarrow \nu(C - y) \leq R \\ \nu((C - (\bar{y} - \bar{x})) - \bar{x}) &\leq R \end{aligned}$$

То есть, $D = C - (\bar{y} - \bar{x}) \in B_R(\bar{x})$. ■

2. Шары $B_R(\bar{x})$ и $B_{\alpha R}(\bar{x})$, $\alpha > 0$ подобны с коэффициентом подобия α .



$$\nu(xD) = \frac{1}{\alpha}\nu(xC)$$

$$D = x + xD = x + \frac{1}{\alpha}xC$$

$$\rho(D, x) = \nu(xD) = \frac{1}{\alpha}\nu(C - x) = \nu\left(\frac{1}{\alpha}(C - x)\right)$$

$$\boxed{14_10.png}$$

$$C \in B_{\alpha R}(x) \Leftrightarrow \nu(C - x) \leq \alpha R$$

$$\rho(D, x) = \nu\left(\frac{C - x}{\alpha}\right) \leq R$$

То есть $D \in B_R(\bar{x})$. ■

ν_p — норма только при $p \geq 1$ (для невыпуклых — неверно, не выполняется неравенство треугольника).

$B^p = B_1(\vec{0})$ относительно ν_p .

$$\boxed{14_11.png} \quad \boxed{14_12.png}$$

Пример 2.

Для каких R_1, R_2 возможно $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$?

Если $R_2 > R_1$ — возможно (даже при $x = y$).

При $R_1 = 5, R_2 = 4$ — возможно (из предыдущего примера).

Докажем, что при $R_1 > R_2$ это не всегда верно, а именно: при $2R_2 > R_1$ — верно, а при $R_2 \leq \frac{R_1}{2}$ — нет.

Рассмотрим случай $2R_2 = R_1$.

$$\boxed{14_13.png}$$

Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_1}(x) = B_{R_2}(y)$ — множества совпадают, то есть уже не подходит.

Рассмотрим случай, когда R_1 чуть меньше $2R_2$.

Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_1}(x) \subsetneq B_{R_2}(y)$ верно.

Рассмотрим случай, когда R_1 чуть больше $2R_2$.

Тогда $B_{R_1}(x) = \{x, y, C\}$, $B_{R_2}(y) = \{x, y, C\}$, то есть $B_{R_2}(y) \subseteq B_{R_1}(x)$, значит не подходит.

Линейное пространство называется **евклидовым пространством**, если на нем задано скалярное произведение $g(x, y)$:

1. $g(x, y) = g(y, x)$
2. $g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$
3. $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$
4. $g(x, x) \geq 0, g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

В евклидовом пространстве есть стандартная норма $\|x\| = \sqrt{g(x, x)}$.

$L_2[0, 1]$ — множество функций, квадрат которых интегрируем по Риману.

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

$x_n \rightarrow x$ **сходится по норме** $\nu(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ верно $\nu(x_n - x) < \varepsilon$.

Пример 3.

Является ли нормой на множестве непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a, b]$ следующее выражение:

$$\mu(f) = \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |f'(x)|) ?$$

Да, так как выполняются все свойства нормы.

1. $\mu(f) > 0$
2. $\mu(\lambda f) = \lambda \mu(f)$
3. $\mu(f + g) = \max(|f + g| + |(f + g)'(x)|)$
 $\mu(f) + \mu(g) = \max(|f| + |g| + |f'| + |g'|)$
 А так как $|f + g| \leq |f| + |g|$, то выполняется неравенство треугольника
 $\mu(f + g) \leq \mu(f) + \mu(g)$.

Пример 4.

Следует ли из сходимости по норме $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ сходимость по $\mu(f)$, где

$$\mu(f) = \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |f'(x)|) ?$$

Верно ли обратное?

Докажем, что $f_k(x) \xrightarrow{\|f\|} f(x)$ и $f_k(x) \not\xrightarrow{\mu(f)}$ по $\mu(f)$.

$$\begin{aligned} f &= x, f' = 1 \\ f_k &= \frac{1}{k} \sin(xk^2) + x \\ |f - f_k| &\leq \frac{1}{k} |\sin(xk^2)| \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0, \text{ то есть, сходится по норме.} \\ f'_k &= 1 + k \cdot \cos(xk^2) \end{aligned}$$

$\max\{|f(x) - f_k(x)| + |f'(x) - f'_k(x)|\} = \max\{|\frac{1}{k} \sin(xk^2)| + |1 - 1 - k \cdot \cos(xk^2)|\} \rightarrow \infty$, то есть, не сходится по $\mu(f)$.

Обратное утверждение верно. При сходимости по $\mu(f)$ получим, что $|f(x) - f_k(x)| \rightarrow 0$, то есть сходится по норме.

Домашнее задание 4

$$1. B(x, y) = \{x^2 + axy + 4y^2 \leq 1\}$$

При каких a на множестве \mathbb{R}^2 существует норма ν такая, что $B(x, y)$ — единичный шар относительно нее?

Найдите в этом случае

$$\nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Будет ли метрикой на \mathbb{R} функция $\rho(x, y) =$

$$(a) |x^2 - y^2|$$

$$(b) \sin(x - y)$$

$$(c) |e^x - e^y|$$

3. Существует ли убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств с пустым пересечением (в произвольном метрическом пространстве)?

4. Доказать, что шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством. То есть доказать, что если x, y принадлежат шару, то и весь отрезок $[x, y]$ принадлежит шару.

Лекция 5

Множество **замкнутое**, если оно включает свою границу.

V — линейное пространство, ν — **норма** на V ($\nu : V \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$) если:

$$1. \nu(\bar{x}) > 0, \bar{x} \neq \bar{0}, \nu(\bar{0}) = 0$$

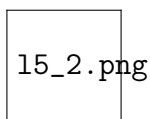
$$2. \nu(\alpha \bar{x}) = |\alpha| \nu(\bar{x})$$

$$3. \nu(\bar{x} + \bar{y}) \leq \nu(\bar{x}) + \nu(\bar{y}) \text{ для } \forall x, y \in V, \forall \alpha$$

$$\nu(x) = |x|$$

$$\mathbb{R}^2, \nu(\bar{x}) - ?, \nu(\bar{v}) - ?$$

$$B_1^\nu(\bar{0}) = B_1^\nu$$



$A = \text{луч} \cap S_1, S_1$ — граница

$$\nu(OA) = 1$$

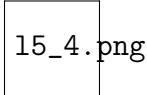
$$\nu(v) = \lambda \nu(OA) = \lambda, \text{ если } v = \lambda OA, \lambda = \frac{|v|}{|OA|}$$

Лемма. Пусть ν_1, ν_2 — две нормы на \mathbb{R}^n , тогда существует такое $c > 0$, что любой шар одной нормы содержится в другом шаре другой нормы.

$$B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{\nu_2}.$$

Следствие. Любые две нормы в \mathbb{R}^n эквивалентны, то есть для $\forall \nu_1, \nu_2 \exists c_1, c_2$, что для $\forall \bar{x}$ верно $c_1 \nu_1(x) \leq \nu_2(x) \leq c_2 \nu_1(x)$.

Следствие. Шар $B_1^{\nu_1}$ — ограниченное множество, то есть $B_R^{\nu_1} \subset \{\bar{x} \mid |\bar{x}| \leq M\} = B_M^E$ (евклидов шар).



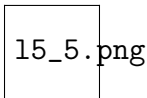
► ν_2 = евклидова длина, $M = cR$ ■

Доказательство леммы.

► Пусть

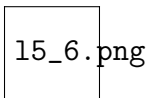
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n \in B_1^{\nu_1} (R = 1)$$

$$\nu_2(\bar{x}) = \nu_2(x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n) \leq \nu_2(x_1 e_1) + \dots + \nu_2(x_n e_n) = |x_1| \nu_2(e_1) + \dots + |x_n| \nu_2(e_n) \leq \max_{i=1, \dots, n} \{ |x_i| \}.$$



Пусть $|\bar{x}|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$, $M = \max_{i=1, \dots, n} \nu_2(e_i)$, тогда $\nu_2(x) \leq |\bar{x}|_\infty nM$, то есть $B_R^{\nu_1} \subset B_{cR}^{|\cdot|_\infty}$, $c = nM$. Доказали, что любой единичный шар можно поместить в квадрат со стороной cR .

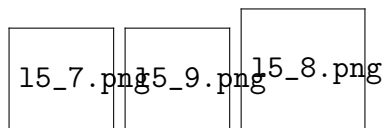
Если $|x|_\infty \leq \frac{1}{nM}$, то $\nu_2(x) \leq 1$, $x \in B_1^{\nu_2}$.



Внутри любого единичного шара существует квадрат, то есть существует куб, который содержит его целиком. Осталось доказать, что шар — ограниченное множество. Докажем от противного.

$$B_1^{\nu} = \{x | \nu(\bar{x}) \leq 1\}$$

Пусть существует $\{x^1, x^2, \dots\} : \{|x^1|, |x^2|, \dots\} \rightarrow +\infty$, тогда она существует, если B_1^{ν} неотрицательное множество.



$m \leq \nu_2(B_1^E) \leq M$, где $m > 0$, M — ограниченное множество, тогда (так как все шары подобны):

$$\begin{cases} B_m^{\nu_2} \subset B_1^E \subset B_M^{\nu_2} \\ B_R^{\nu_2} \subset B_{R/m}^E \\ B_{R/M}^E \subset B_R^{\nu_2} \end{cases}$$

■

Теорема Минковского. Множество $B \subset \mathbb{R}^n$ является единичным шаром B_1^{ν} относительно какой-либо нормы ν тогда и только тогда, когда B :

1. замкнуто
2. ограничено ($B \subset B_M^E$)
3. содержит окрестность нуля (то есть $B \supset B_m^E$)

4. выпукло

5. центрально симметрично (если $\bar{x} \in B$, то и $-\bar{x} \in B$)

Пример 1.

$$B = \{x^2 + axy + 4y^2 \leq 1\}$$

Существует ли такая норма ν , что B — единичный шар относительно нее ($B = B_1^\nu$)?

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 4 \end{pmatrix}$$
$$\Delta_1 = 1 > 0$$
$$\Delta_2 = 4 - \frac{a^2}{4} > 0$$

То есть это эллипс, все 5 свойств из предыдущей теоремы выполняются, значит при $|a| < 4$ — единичный шар относительно нормы.

$$\Delta_1 = 1 > 0$$
$$\Delta_2 = 4 - \frac{a^2}{4} < 0$$

В этом случае множество не будет замкнутым, то есть не выполняются все свойства из предыдущей теоремы, значит в этом случае B не будет единичным шаром относительно нормы.

При $\Delta_2 = 0$: $a = \pm 4$ и $x^2 \pm 4xy + 4y^2 \leq 1$, $(x \pm 2y)^2 \leq 1$. В этом случае получим множество между двумя параллельными прямыми, которое является незамкнутым, то есть в этом случае B тоже не будет единичным шаром относительно нормы.

Получили, что $B = B_1^\nu$ только при $|a| < 4$.

V — **евклидово пространство со скалярным произведением**, если задана $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, то есть, на нем задано скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}$ такое, что для пространств над \mathbb{R} выполнено:

1. $(u, v) = (v, u)$
2. $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{R}$
4. $(u, u) > 0, u \neq \bar{0} \quad ((u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$

Обозначение скалярного произведения: $(u, v) = \langle u, v \rangle = \langle u | v \rangle$.

Длина вектора — это $|v| = \sqrt{(v, v)} \geq 0$ (норма).



$$|\alpha v| = \sqrt{(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 (v, v)} = |\alpha| |v|$$
$$|v| > 0, \text{ при } v \neq \bar{0}$$
$$|u + v| \leq |u| + |v| \quad \blacksquare$$

$$\cos \widehat{(u, v)} = \frac{(u, v)}{|u| |v|}, u, v \neq \bar{0}$$

V — **эрмитово пространство со скалярным произведением**, если задана $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, то есть, на нем задано скалярное произведение $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{C}$ такое, что для пространств над \mathbb{C} выполнено:

1. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
2. $(u' + u'', v) = (u', v) + (u'', v)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v), \alpha \in \mathbb{C}$
4. $\forall u (u, u) \geq 0, (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Как по норме $|w|$ восстановить скалярное произведение (u, v) ?

15_10.png

$$|w|^2 = (w, w) = (v - u, v - u) = (v, v) - (u, v) - (v, u) + (u, u) = |v|^2 - 2(u, v) + |u|^2$$

То есть, $(u, v) = \frac{1}{2}(|v|^2 + |u|^2 - |v - u|^2)$.

Теорема (тождество параллелограмма). Пусть V — нормированное пространство с нормой $|v|$. На V существует такое скалярное произведение, что $|v| = \sqrt{(v, v)}$ в том и только том случае, когда в V выполняется тождество параллелограмма:

$$\forall a, b \quad |a + b|^2 + |b - a|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

При $c = a + b, d = b - a$:

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

15_11.png

► Если для $\forall v \quad |v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, то $|a + b|^2 + |b - a|^2 = \langle a + b, a + b \rangle + \langle b - a, b - a \rangle = \langle a, a \rangle + 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle + \langle b, b \rangle - 2\langle a, b \rangle + \langle a, a \rangle = 2(|a|^2 + |b|^2)$ ■

H — **гильбертово пространство**, если на нем задано скалярное произведение и оно является полным (относительно метрики, порожденной скалярным произведением).

Набор $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}^{-e}$ называется **ортogonalной системой**, если

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Формально хотим представить $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$.

$$\begin{aligned} (f, \varphi_j) &= c_j (\varphi_j, \varphi_j) \\ (\varphi_j, \varphi_j) &= 1 \\ c_j &= \frac{(f, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2} = (f, \varphi_j) \end{aligned}$$

c_j — коэффициенты Фурье по ортogonalной системе.

Теорема. Если φ_j — ортogonalная система, тогда следующие условия эквивалентны:

1. система $\{\varphi_j\}$ является базисом, то есть $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$
2. выполнение равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$

3. система является полной, то есть $\exists y \neq 0 : (\varphi_j, y) = 0$

Хотим приблизить f и минимизировать $\|f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k\| \rightarrow \min$.

$$(f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k) = (\text{так как система ортогональна}) = (f, f) - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 (\varphi_k, \varphi_k) = (c_k = (f, \varphi_k), (\varphi_k, \varphi_k) = 1) = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2$$

Выбором α хотим минимизировать, минимальная норма будет там, где совпадают $\alpha_k = c_k$.

$a = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ — пространство \mathbb{R}_{n+1} многочленов степени $\leq n$ на $[-1, 1]$, где скалярное произведение $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. Применим к a процесс Грама-Шмидта, получим b .

$$a \rightarrow b = \{P_0(x) = 1\}$$

Многочлены Лежандра:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k), k = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{k=0:} \quad P_0(x) = 1$$

$$\mathbf{k=1:} \quad P_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)' = x$$

$$\mathbf{k=2:} \quad P_2(x) = \frac{1}{8}((x^2 - 1)^2)'' = \frac{1}{8}(4x(x^2 - 1))' = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$\mathbf{k=3:} \quad P_3(x) = \frac{1}{48}((x^2 - 1)^3)''' = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\|P_1(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Домашнее задание 5

- (а) Проверить ортогональность $P_2(x)$ и $P_3(x)$ относительно $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.

(b) Найти $\|P_n(x)\|$.

- Найти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ на $[-1, 1]$: $\|f - \sum_{k=0}^2 \alpha_k P_k(x)\| \rightarrow \min$, $d_j = \frac{(f, \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2} = (f, \varphi_j)$, где $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k)$, $k = 1, \dots, n$ — многочлены Лежандра.

$$(a) \quad f_1(x) = xe^{-x}$$

$$(b) \quad f_2(x) = x^3$$

- Выразить скалярное произведение через длину вектора в эрмитовом пространстве.

Норма

Теорема Минковского

Многочлены Чебышева

Матричные нормы