# Point to Core

## - Vol. 04 -

Byungwoo Teacher 'S

## #001

강대모의고사K 4회 15번

모든 항이 양수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_5+a_9=b_2+b_6$

(나) $a_1-b_1=3$

$a_k=b_k$인 자연수 $k$가 존재할 때, $b_{10}-a_9$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하자. $M+m$의 값은?

① 26 ② 28 ③ 30

④ 32 ⑤ 34

BT'S Note

## #002

강대모의고사K 4회 15번 연계 1번

등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_{11}+a_{21}=82,\ a_{11}-a_{21}=6$$

일 때, 집합 $A=\{a_n \mid a_n$은 자연수$\}$의 모든 원소의 합을 구하시오.

BT'S Note

## #003

강대모의고사K 4회 15번 연계 2번

모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $b_n = p|\sin a_n|$이 등차수열이다. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

> $a_n = b_n$을 만족하는 자연수 $n$이 존재한다.

가능한 모든 $p$의 값에 대하여 크기가 작은 순으로 나열한 것을 수열 $\{p_n\}$이라 할 때, $\dfrac{p_1}{a_1}$의 최솟값은? (단, $0 < a_1 \leq \pi$이다.)

① $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\sqrt{2}$

④ $2$　⑤ $2\sqrt{2}$

BT'S Note

## #004

강대모의고사K 4회 15번 연계 3번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 등차수열이고, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합을 $S_n$, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합을 $T_n$이라 하자. $a_1 - 2b_1 = 4$, $a_3 - 2b_3 = 10$이고, $S_{10} = 305$일 때, $T_{10}$의 값을 구하시오.

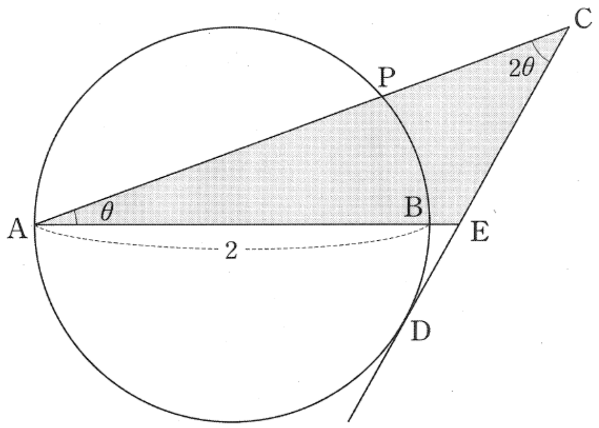
BT'S Note

## #005

강대모의고사K 4회 20번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$인 점 P가 있다. 선분 AP의 연장선 위의 점 C에서 원에 그은 접선이 점 D에서 만나고 $\angle \mathrm{ACD} = 2\theta$이다. 선분 AB의 연장선과 직선 CD의 교점을 E라 할 때, 삼각형 ACE의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은?

(단, $\overline{\mathrm{AC}} > \overline{\mathrm{CP}}$, $\overline{\mathrm{AC}} > \overline{\mathrm{CE}}$이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이다.)




① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

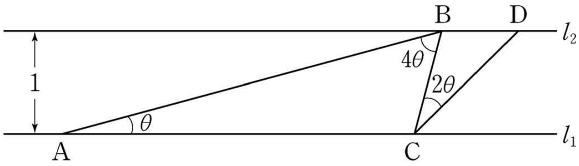
BT'S Note

## #006

강대모의고사K 4회 20번 연계 1번

그림과 같이 서로 평행한 두 직선 $l_1$과 $l_2$ 사이의 거리가 1이다. 직선 $l_1$ 위의 점 $A$에 대하여 직선 $l_2$위에 점 B를 선분 AB와 직선 $l_1$이 이루는 각의 크기가 $\theta$가 되도록 잡고, 직선 $l_1$위에 점 C를 $\angle ABC = 4\theta$가 되도록 잡는다. 직선 $l_2$위에 점 D를 $\angle BCD = 2\theta$이고 선분 CD가 선분 AB와 만나지 않도록 잡는다.

삼각형 ABC의 넓이를 $T_1$, 삼각형 BCD의 넓이를 $T_2$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{T_1}{T_2}$ 의 값을 구하시오. (단. $0 < \theta < \frac{\pi}{10}$ )

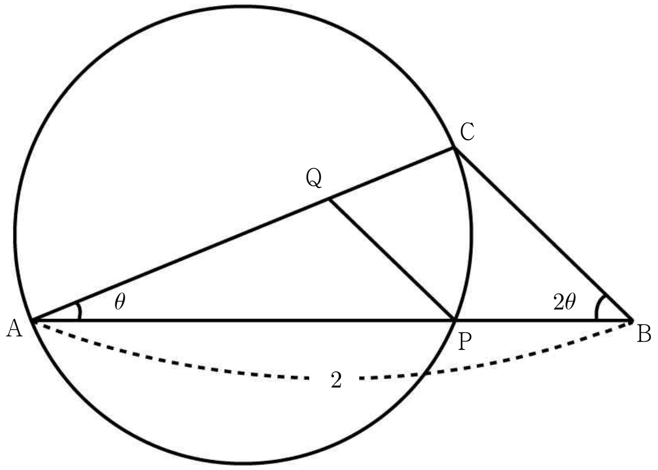



BT'S Note

## #007

강대모의고사K 4회 20번 연계 2번

그림과 같이 $\overline{AB}=2$이고 $\angle ABC=2\angle BAC$를 만족하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 점 P를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle BAC=\theta$라 할 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)




① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{2}{3}$

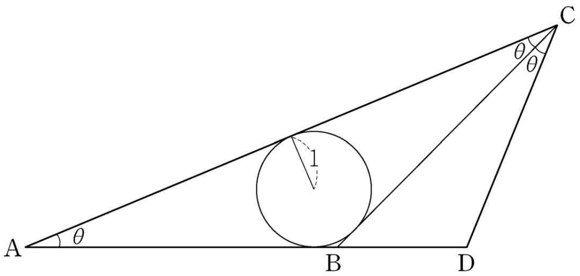
④ $\frac{19}{27}$ ⑤ $\frac{20}{27}$

BT'S Note

## #008

강대모의고사K 4회 20번 연계 3번

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)




① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$

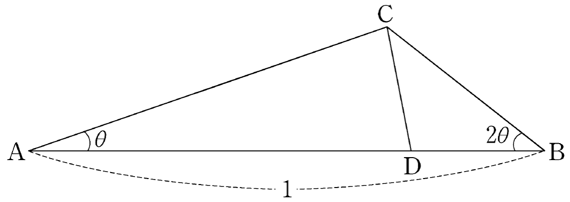
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

BT'S Note

## #009

강대모의고사K 4회 20번 연계 4번

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$이고 $\angle A=\theta$, $\angle B=2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle ACD=2\angle BCD$가 되도록 잡는다. $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{CD}}{\theta}=a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

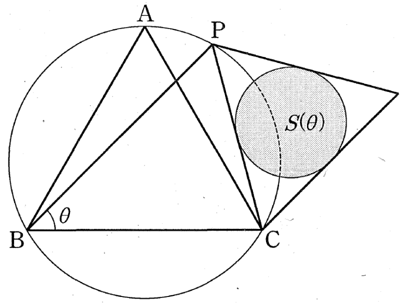



BT'S Note

## #010

강대모의고사K 4회 20번 연계 5번

그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC 가 있다. 점 B 를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{PBC} = \theta$ 라 하고, 선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = a\pi$ 일 때, $60a$ 의 값을 구하시오.



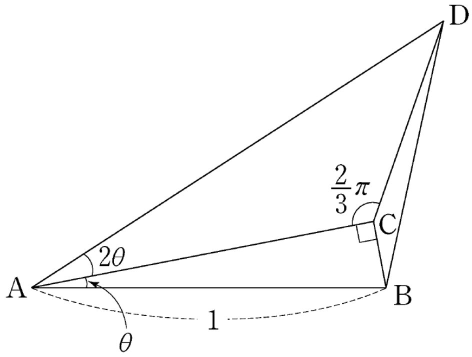

BT'S Note

## #011

강대모의고사K 4회 20번 연계 6번

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 빗변으로 하고 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D를 $\angle \mathrm{ACD}=\frac{2}{3}\pi$, $\angle \mathrm{CAD}=2\theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=p$이다. $300p^2$의 값을 구하시오.

(단, 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있다.)




BT'S Note

## #012

강대모의고사 K 4회 21번

$t>2$인 실수 $t$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-t & (x<-\pi \text{ 또는 } x>\pi) \\ x^2+t\cos x & (-\pi \le x \le \pi) \end{cases}$$

가 있다. 임의의 실수 $k$에 대하여 $x$에 대한 방정식

$$\int_k^x \{f(s)-m\}ds=0$$

이 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 실수 $m$의 최댓값을 $g(t)$라 하면 함수 $g(t)$는 $t=p$에서 극대이다. $\frac{g(p)}{p^2}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

BT'S Note

#013

강대모의고사 K 4회 21번 연계 1번

$a$가 양수일 때, 다항함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 등식 $f(x)=x^3+\frac{4}{3}f'(a)x$를 만족시킨다. 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, 함수 $g(a)$의 극솟값이 $m$이다. $100m$의 값을 구하시오.

BT'S Note

## #014

강대모의고사 K 4회 21번 연계 2번

실수 $t$에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 $k$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 $a$, $b$ $(a<b)$에 대하여 $\int_a^b g(t)\,dt=m$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $m<0$ 이 되도록 하는 두 실수 $a$, $b$ $(a<b)$가 존재한다.
ㄴ. 실수 $c$ 에 대하여 $g(c)=0$ 이면 $g(-c)=0$이다.
ㄷ. $a=\alpha$ , $b=\beta$ $(\alpha<\beta)$일 때 $m$ 의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)} < -e^2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

BT'S Note

## #015

강대모의고사 K 4회 21번 연계 3번

실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le t \le a$인 모든 실수 $t$에 대해 $e^{t-x}(t-a)^2 \le f(x)$

(나) $\int_0^a f(x)dx$의 최솟값은 $4(e^2 - e^{-2})$이다.

$a$의 값을 구하시오.

BT'S Note

## #016

강대모의고사 K 4회 21번 연계 4번

$f(x)=(x-2)e^{x}$ 와 실수 $t$ 에 대하여

함수 $g(x)=|f(x-t)-ax-b|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$b$ 의 최댓값을 $h(t)$ 라 하자. $\int_{-3}^{4} h(t)dt$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}e^{2}-e$ ② $\frac{1}{2}e^{2}-e+1$ ③ $\frac{1}{2}e^{2}-e+2$

④ $\frac{1}{2}e^{2}-e+3$ ⑤ $\frac{1}{2}e^{2}-e+4$

BT'S Note

## #017

강대모의고사 K 4회 21번 연계 5번

$f(x)=x^2e^x$에 대하여 $t>0$에서 정의된 연속함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 실수 $k$와 양수 $t$에 대하여 $\int_0^k \{f(tx)-g(t)x\}dx \geq 0$

(나) $\int_1^e g(t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e\right)$

$g\left(\frac{e}{2}\right)$의 값은?

① $-1$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{e}$

④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2e}$

BT'S Note

## #018

강대모의고사K 4회 28번

다음 조건을 만족시키는 네 자연수 $a$, $b$, $c$, $d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오.

(가) $a$, $b$, $c$중 적어도 하나는 홀수이다.
(나) $a+b+c+d=13$

BT'S Note

#019 강대모의고사K 4회 28번 연계 1번

다음 조건을 만족시키는 자연수 $a$, $b$, $c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c=15$
(나) $abc$는 짝수이다.

BT'S Note

BT'S Note

## #020

강대모의고사K 4회 28번 연계 2번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는?

(가) $a+b+c+d+e=7$
(나) $2^a \times 2^b = 8$

① 48　② 52　③ 54　④ 56　⑤ 60

## #021

강대모의고사K 4회 28번 연계 3번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 네 정수 $a$, $b$, $c$, $d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=10$
(나) $6^{a+b+2c+d}$은 $2^{13}$으로 나누어떨어지고 $2^{14}$으로는 나누어떨어지지 않는다.

① 48 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 60

BT'S Note

## #022

강대모의고사K 4회 28번 연계 4번

다음 조건을 만족시키는 6개의 자연수 $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$의 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)$의 개수를 구하시오.

(가) $(x_1+x_2+x_3)\times x_4\times x_5\times x_6=320$
(나) $x_1+x_2+x_3$은 홀수이다.

① 48　② 52　③ 54　④ 56　⑤ 60

BT'S Note

#023 강대모의고사K 4회 28번 연계 5번

BT'S Note

다음 조건을 만족시키는 세 자연수 $a$, $b$, $c$의 모든 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c=30$
(나) $a\times b\times c$는 3의 배수이다.

① 306 ② 312 ③ 318
④ 324 ⑤ 330

## #024

강대모의고사K 4회 29번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{8}{5} & (a_n < n+1) \\ a_n-\dfrac{4}{5} & (a_n \geq n+1) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} a_k$의 값을 구하시오.

BT'S Note

By BT'S

#025 강대모의고사K 4회 29번 연계 1번

BT'S Note

자연수 $k$에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 6k$

(나) $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (n\text{은 홀수}) \\ a_n - 1 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$

$a_n > 0$을 만족시키는 자연수 $n$의 최댓값 $M$에 대하여 $\sum_{n=1}^{M} a_n = 1220$일 때, $a_{10}$의 값을 구하시오.

## #026

강대모의고사K 4회 29번 연계 2번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 5$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 \ (a_n \geq 0) \\ a_n + 5 \ (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. 이때, $\sum_{n=1}^{100} a_n$의 값을 구하시오.

BT'S Note

## #027

강대모의고사K 4회 30번

곡선 $y=(x-1)e^{x}$ 위의 두 점 A, B 의 $x$ 좌표의 차가 $t$ 일 때, 선분 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 점 A 의 $y$ 좌표를 $f(t)$ 라 하자. 세 유리수 $a$, $b$, $c$ 에 대하여 $\dfrac{f'(\ln 3)}{\sqrt{3}\,e}=a(\ln 3)^{2}+b(\ln 3)+c$ 일 때, $\dfrac{1}{a+b+c}$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A 의 $x$ 좌표는 점 B 의 $x$ 좌표보다 작고, $\ln 3$ 과 $(\ln 3)^{2}$ 은 무리수, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{x}=0$ 이다.)

BT'S Note

## #028

강대모의고사K 4회 30번 연계 1번

곡선 $y=\ln(x^2+1)\ (x>0)$ 위의 두 점 A, B의 $x$좌표의 차가 $t$일 때, 선분 AB의 길이가 최대가 되도록 하는 점 A의 $y$좌표를 $f(t)$라 하자. $f'(2)=p\sqrt{2}+q$일 때, $40(p^2+q^2)$의 값을 구하시오.

(단, $p$와 $q$는 유리수이다.)

BT'S Note

## #029

강대모의고사K 4회 30번 연계 2번

양수 $t$에 대하여 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

| |
|---|
| 1 이상의 모든 실수 $x$에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다. |

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 $a$가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다.

$h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은?

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

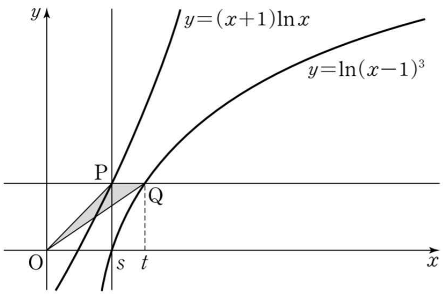
④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

BT'S Note

#030 강대모의고사K 4회 30번 연계 3번

좌표평면에서 곡선 $y=(x+1)\ln x$ 위의 점 P와 곡선 $\ln(x-1)^2$ 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 P, Q는 모두 제 1사분면에 있다.
(나) 직선 PQ는 $x$축과 평행하다.




두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $s$, $t$라 하고, 삼각형 POQ의 넓이를 $A$라 하자. $s=2$일 때, $(2\ln 2+3)\left(\dfrac{dA}{ds}-\dfrac{dA}{dt}\right)$의 값은?

① $2(\ln 2)^3+(\ln 2)^2+\dfrac{3}{2}\ln 2$ ② $2(\ln 2)^3+(\ln 2)^2+3\ln 2$

③ $2(\ln 2)^3+4(\ln 2)^2+\dfrac{3}{2}\ln 2$ ④ $2(\ln 2)^3+4(\ln 2)^2+3\ln 2$

⑤ $2(\ln 2)^3+7(\ln 2)^2+\dfrac{3}{2}\ln 2$

BT'S Note

## #031

강대모의고사K 4회 30번 연계 4번

구간 $[1,\ \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)=e^x$ 이 있다. 실수 $t$ 에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)+t$ 와 만나는 직선의 기울기의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. $\int_{-e}^{e^2} g(t)dt$ 의 값은?

① $\frac{e^2+e^4}{4}$ ② $\frac{2e^2+e^4}{4}$ ③ $\frac{3e^2+e^4}{4}$

④ $\frac{e^2+2e^4}{4}$ ⑤ $\frac{e^2+3e^4}{4}$

BT'S Note

# 도전!

Byungwoo Teacher 'S

## Challenge #01

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)=x\ln x$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $(f\circ g)(x)$는 2개의 극값을 갖는다.
> (나) 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근이 2개인 $k$는 오직 1개만 존재한다.

$f(2)-f(0)$의 최솟값이 $p+qe^{-1}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x\to 0+} x\ln x=0$이고 $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

BT'S Note

## Challenge #02

최솟값이 $0$ 인 사차함수 $g(x)$ 와 함수 $f(x)=\ln\{(x-a)^2+1\}$ 에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$ 가 다음을 만족한다.

(가) $[0,\ 2]$ 구간에서 방정식 $f(x)g(\sin\pi x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $4$ 이다.
(나) $g(3)=18$, $h'(3)=0$
(다) $h(x)$ 의 극값은 $3$ 개 이하이다.

이때, $g(5)$ 의 값을 구하시오.

BT'S Note

# 정답 및 해설

Byungwoo Teacher 'S

# 빠른 정답

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ④ | 12 | ② | 23 | ① |
| 2 | 442 | 13 | 25 | 24 | 832 |
| 3 | ① | 14 | ⑤ | 25 | 46 |
| 4 | 65 | 15 | 4 | 26 | 106 |
| 5 | ② | 16 | ③ | 27 | 24 |
| 6 | 6 | 17 | ② | 28 | 5 |
| 7 | ① | 18 | 200 | 29 | ④ |
| 8 | ④ | 19 | 63 | 30 | ① |
| 9 | 16 | 20 | ⑤ | 31 | ⑤ |
| 10 | 80 | 21 | 36 | | |
| 11 | 100 | 22 | 168 | | |

# 해설

**#001 정답** ④

[강대모의고사K 4회 15번 참조]

**#002 정답** 442

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_{11}+a_{21}=82$에서 $(a+10d)+(a+20d)=82$

$2a+30d=82$

$\therefore\ a+15d=41$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_{11}-a_{21}=6$에서 $(a+10d)-(a+20d)=6$

$-10d=6\ \therefore\ d=-\dfrac{3}{5}$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$a+15\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=41\ \therefore\ a=50$

$\therefore\ a_n=50+(n-1)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)$ $\cdots\cdots$ ㉡

이 때, $a_n$의 값은 자연수이므로

$50+(n-1)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)>0$, $n-1<50\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{250}{3}$

$\therefore\ n<\dfrac{253}{3}=84.3\times\times\times$

또한, $a_n$의 값이 자연수가 되려면 ㉡에서 $n-1$의 값은 0 또는 5의 배수이어야 한다. 즉, 조건을 만족시키는 $n$의 값은 1, 6, 11, $\cdots$, 81의 17개다.

따라서 수열 $a_1$, $a_6$, $a_{11}$, $\cdots$, $a_{81}$은 첫째항이 50이고, 제17항이 $a_{81}=50+(81-1)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2$인 등차수열이므로 그 합은

$\dfrac{17(50+2)}{2}=442$

**#003 정답** ①

$b_n=p|\sin a_n|$에 대하여

$b_n$이 증가한다면 모든 $n$에 대하여 등차수열일 수 없다.

감소할 때도 마찬가지이므로

$b_n$의 공차가 0임을 알 수 있다.

$a_n$이 등차수열이므로

$p|\sin x|$의 그래프에서 $y=k$와의 교점의 $x$축 사이의 간격이 일정하려면

$a_n=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{2},\ \cdots\ :\ b_n=p$

$a_n=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \cdots\ :\ b_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}p$

$a_n=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots\ :\ b_n=0$

이다.

이때, $a_n=b_n$을 만족하는 자연수 $n$이 존재해야하므로 $b_n\neq 0$이다.

따라서 가능한 $p$를 나열하면

$p=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ \cdots$

$p_1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$

$a_1$의 범위가 $0<a_1\leq\pi$이므로

가능한 $a_1$의 값은 $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{4}$이다.

따라서 $\dfrac{p_1}{a_1}$의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$이다.

{참고}

$p=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$일 때, $a_1=\dfrac{3}{4}\pi$이면 조건이 성립하지 않는다.

다만, $\{p_n\}$은 가능한 $p$의 값의 집합이므로 $p_1$과 $p$는 다른 객체이다.

**#004 정답** 65

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d_1$이라 하고, 등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 $d_2$라 하자.

$a_n-2b_n$도 등차수열이므로 이를 $\{c_n\}$라 두면

공차는 $d_1-2d_2$이고 첫째항은 4이다.

공차를 계산하면 3이므로 $d_1-2d_2=3$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}c_n=175$

$c_n-a_n=(-2)\times b_n$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n=-\dfrac{1}{2}\times\left(\sum_{n=1}^{10}(c_n-a_n)\right)=175-305$

$T_{10}=65$

**#005 정답** ②

[강대모의고사K 4회 20번 참조]

## #006 정답 6

점$B$와 점$D$에서 직선 $l_1$에 내린 수선의 발을 각각 $H_1$, $H_2$라 하자.

$\angle BCH_1 = 5\theta$ 이므로 $\angle CDB = \angle DCH_2 = 3\theta$

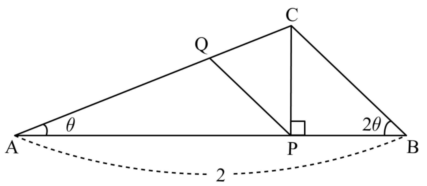
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{AC}{BD} = \frac{AH_1 - CH_1}{CH_2 - CH_1}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\tan\theta} - \dfrac{1}{\tan(5\theta)}}{\dfrac{1}{\tan(3\theta)} - \dfrac{1}{\tan(5\theta)}}$$

$$= \frac{\tan(3\theta)}{\tan\theta} \times \frac{1 - \dfrac{\tan\theta}{\tan(5\theta)}}{1 - \dfrac{\tan(3\theta)}{\tan(5\theta)}}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+} \frac{T_1}{T_2} = 3 \times \frac{1 - \dfrac{1}{5}}{1 - \dfrac{3}{5}} = 6$$

## #007 정답 ①




선분 AC가 원의 지름이므로 $\angle \mathrm{APC} = \dfrac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AP}} = a$, $\overline{\mathrm{AQ}} = b$라 하자.
두 삼각형 APC 와 CPB 는 직각삼각형이므로

$a\tan\theta = \overline{\mathrm{CP}} = (2-a)\tan2\theta$

$$a = \frac{2\tan2\theta}{\tan\theta + \tan2\theta}$$

삼각형 ABC 와 삼각형 APQ 는 닮음이므로
$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AQ}} : \overline{\mathrm{AC}}$, $a : 2 = b : a\sec\theta$

$$b = \frac{1}{2}a^2\sec\theta$$

삼각형 APQ 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때,

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{2}a^2\sec\theta \times \sin\theta = \frac{1}{4} \times a^3 \times \tan\theta$$

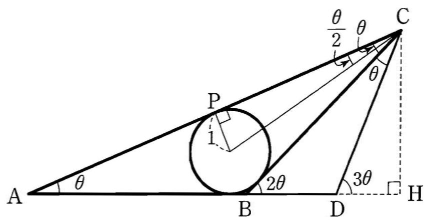
$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{2\tan2\theta}{\tan\theta + \tan2\theta}\right)^3 \times \tan\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to0+} \left\{ \frac{1}{4} \times \left( \frac{\dfrac{2\tan2\theta}{2\theta} \times 2}{\dfrac{\tan\theta}{\theta} + \dfrac{\tan2\theta}{2\theta} \times 2} \right)^3 \times \frac{\tan\theta}{\theta} \right\} = \frac{16}{27}$$

## #008 정답 ④




원과 선분AC의 접점을 P라 하면

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{CP}$ 에서 $CP = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{CP}{BC} = \frac{\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}}{BC}$$

$$\therefore BC = \frac{1}{\cos\theta\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

점 C에서 선분 AD의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$CH = AC\sin\theta = 2CP\sin\theta = \dfrac{2\sin\theta}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$ 이므로

$\sin3\theta = \dfrac{CH}{CD}$ 에서

$$CD = \frac{CH}{\sin3\theta} = \frac{2\sin\theta}{\sin3\theta\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times BC \times CD \times \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta\tan\dfrac{\theta}{2}} \times \frac{2\sin\theta}{\sin3\theta\tan\dfrac{\theta}{2}} \times \sin\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin3\theta\cos\theta\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

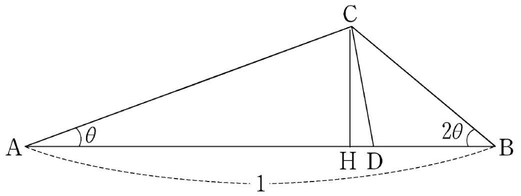
$$\therefore \lim_{\theta\to0+} \{\theta \times S(\theta)\} = \lim_{\theta\to0+} \frac{\theta\sin^2\theta}{\sin3\theta\cos\theta\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta\to0+} \left\{ \frac{3\theta}{\sin3\theta} \times \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \left( \frac{\dfrac{\theta}{2}}{\tan\dfrac{\theta}{2}} \right)^2 \times \frac{4}{3} \right\}$$

$$= \frac{4}{3}$$

By BT'S

**#009 정답** 16




$AH = a$ , $BH = b$ 라 두면

$a\tan\theta = CH$, $b\tan 2\theta = CH$

$a = \dfrac{CH}{\tan\theta}$ , $b = \dfrac{CH}{\tan 2\theta}$

$a + b = \dfrac{CH}{\tan\theta} + \dfrac{CH}{\tan 2\theta} = 1$

$\therefore CH = \dfrac{\tan\theta\tan 2\theta}{\tan\theta + \tan 2\theta}$

또, $\angle ACB = \pi - 3\theta$ 이므로

$\angle BCD = \dfrac{\pi}{3} - \theta$ , $\angle CDA = \dfrac{\pi}{3} + \theta$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \theta\right) = \dfrac{CH}{CD}$

$\therefore CD = \dfrac{\tan\theta\tan 2\theta}{\sin(\frac{\pi}{3} + \theta) \times (\tan\theta + \tan 2\theta)}$

$\therefore \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\overline{CD}}{\theta}$

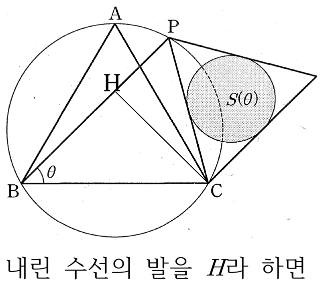
$= \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\dfrac{\tan\theta}{\theta} \times \dfrac{\tan 2\theta}{\theta}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \theta\right) \times \left(\dfrac{\tan\theta}{\theta} + \dfrac{\tan 2\theta}{\theta}\right)}$

$= \dfrac{1 \times 2}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times (1 + 2)}$

$= \dfrac{4}{3\sqrt{3}} = a$

$\therefore\ 27a^2 = 27 \times \dfrac{16}{27} = 16$

**#010 정답** 80




$C$에서 $BP$에 내린 수선의 발을 $H$라 하면

$\overline{CH} = 2\sqrt{3}\sin\theta$

$\angle BAC = \angle BPC = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{PC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\overline{CH} = 4\sin\theta$

$\overline{\mathrm{PC}}$ 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$이라 하면

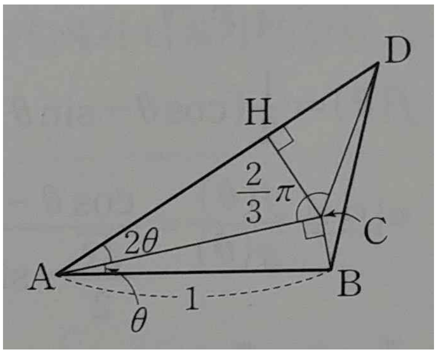
$r(\theta) = \overline{\mathrm{PC}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\sin\theta$

$S(\theta) = \pi\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} sin\theta\right)^2 = \dfrac{4}{3}\pi\sin^2\theta$

$\therefore \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{4}{3}\pi \times \dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2} = \dfrac{4}{3}\pi$

따라서 $a = \dfrac{4}{3}$이고, $60a = 80$ 이다.

**#011 정답** 100




점 $C$에서 선분$AD$에 내린 수선의 발을 점$H$라 하면

$\angle ACH = \dfrac{\pi}{2} - 2\theta$ , $\angle DCH = 2\theta + \dfrac{\pi}{6}$ , $\angle DCB = \dfrac{5}{6}\pi$

$\overline{BC} = \sin\theta$, $\overline{AC} = \cos\theta$, $\overline{CH} = \cos\theta\sin 2\theta$

$\therefore \overline{CD} = \dfrac{\cos\theta\sin 2\theta}{\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)}$

$\therefore S(\theta) = \dfrac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{CD}\sin\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta}{4\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)}$

$\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2}$

$= \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} \times \dfrac{\sin 2\theta}{\theta} \times \dfrac{\cos\theta}{4\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} = p$

$\therefore\ 300p^2 = 100$

**#012 정답** ②

[강대모의고사K 4회 21번 참조]

| **#013 정답** | 25 |
|---|---|

$f'(x) = 3x^2 + \frac{4}{3}f'(a)$
양변에 $a$를 대입하면, $f'(a) = -9a^2$
따라서 $f(x) = x^3 - 12a^2x$이다.
$f'(x) = 3x^2 - 12a^2$
$x = -2a$ 또는 $x = 2a$에서 $f'(x) = 0$
삼차함수의 비율관계에 의해서 $f(-2a) = f(4a)$이다.

(ⅰ) $1 < 2a$일 때,
$-2a < -1$이므로
$g(a) = f(-1) = 12a^2 - 1$

(ⅱ) $2a \le 1 \le 4a$일 때,
$-4a \le -1 \le -2a$ 이므로
$g(a) = f(-2a) = 16a^3$

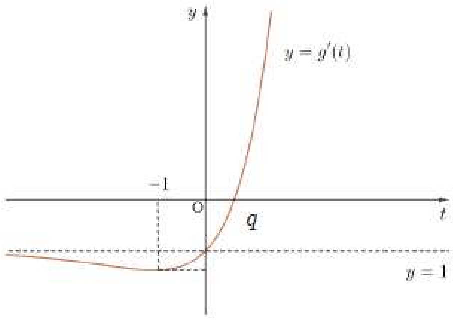
(ⅲ) $1 > 4a$일 때,
$-1 < -4a$이므로
$g(a) = f(1) = 1 - 12a^2$

따라서 $a > 0$인 범위에서 $g(a)$의 그래프를 그려보면
$a = \frac{1}{4}$에서 극솟값 $\frac{1}{4}$를 갖는다.

$\therefore 100 \times \frac{1}{4} = 25$

| **#014 정답** | ⑤ |
|---|---|

곡선 $y = e^x$에서 $y' = e^x$
곡선 $y = e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식이 $y = f(x)$이므로
$f(x) = e^t(x - t) + e^t$
함수 $y = |f(x) + k - \ln x|$에서
$h(x) = f(x) + k = e^t x + (1-t)e^t + k$ 라 하자
함수 $y = |f(x) + k - \ln x|$가 미분가능하고, 실수 $k$가 최소일 때는 곡선 $y = h(x)$와 곡선 $y = \ln x$가 한 점에서 만날 때이다.
곡선 $y = h(x)$와 곡선 $y = \ln x$가 만나는 점의 $x$좌표를 $p$라 하면
$e^t p + (1-t)e^t + k = \ln p$ …… ㉠
또 $h'(x) = e^t$이고, $y = \ln x$에서 $y' = \frac{1}{x}$이므로
$e^t = \frac{1}{p}$ …… ㉡
$\ln p = \ln \frac{1}{e^t} = -t$ …… ㉢
㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면
$\frac{1}{p} \times p + (1-t)e^t + k = -t$
$k = (t-1)e^t - t - 1$
따라서
$g(t) = (t-1)e^t - t - 1$
ㄱ. $g'(t) = e^t + (t-1)e^t - 1 = te^t - 1$
한편, $g''(t) = e^t + te^t = (t+1)e^t$이므로 함수 $y = g'(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




이때 함수 $y = g'(t)$의 그래프와 $t$축이 만나는 점의 $t$의 좌표를 $q$라 하면 $p > 0$ 이므로 함수 $y = g(t)$는 $t = q$에서 극솟값을 갖는다.
$g(q) = qe^q - e^q - q - 1 = -e^q - q < 0$
이므로 $m < 0$이 되도록 하는 두 실수 $a$, $b$가 존재한다. (참)
ㄴ. $g(c) = (c-1)e^c - c - 1 = 0$에서
$e^c = \frac{c+1}{c-1}$
따라서
$g(-c) = (-c-1)e^{-c} + c - 1$
$= -(c+1) \times \frac{c-1}{c+1} + c - 1$
$= 0$ (참)
ㄷ. $g'(t) = te^t - 1$이고 ㄴ에서 $\beta = c$, $\alpha = -c$이므로
$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)} = \frac{1+g'(c)}{1+g'(-c)} = \frac{ce^c}{-ce^{-c}} = -e^{2c}$
한편, $g(1) = -2$이므로 $c > 1$이다.
이때, $-e^{2c} < -e^2$ 이므로
$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)} < -e^2$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

| **#015 정답** | 4 |
|---|---|

$x$를 상수로 보고 $[0,\ a]$에서 다음 $g(t)$를 다음과 같이 정의하자.
$g(t) = e^{t-x}(t-a)^2$
$g'(t) = e^{t-x}\{t^2 - 2(a-1)t + a^2 - 2a\}$
$\quad = e^{t-x}(t-a)\{t-(a-2)\}$
$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = a-2$ or $t = a$
따라서 $a-2$가 정의역 $[0,\ a]$에 포함되는지 여부에 따라 $g(t)$의 그래프개형이 바뀐다.

( i ) $0<a\le 2$일 경우

함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $g(0)=\dfrac{a^2}{e^x}\le f(x)$

$$\int_0^a \frac{a^2}{e^x}dx=1-\frac{1}{e^a}=4\left(e^2-e^{-2}\right)$$

그런데 $0<a\le 2$일 때, $\dfrac{1}{e^2}\le\dfrac{1}{e^a}\le 1$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

( ii ) $2<a$일 경우

함수 $g(t)$는 $t=a-2$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $g(a-2)=\dfrac{4e^{a-2}}{e^x}\le f(x)$

$$\int_0^a \frac{4e^{a-2}}{e^x}dx=4e^{a-2}\left(1-e^{-a}\right)=4\left(e^2-e^{-2}\right)$$

따라서 $a=4$

{다른 풀이}

직접 적분을 하는 방법도 있다. $\int_0^a f(x)dx$ 가 최솟값이 되려면 $e^{t-x}(t-a)^2=f(x)$ 이어야 한다.

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a e^{t-x}(t-a)^2dx=(t-a)^2(e^t-e^{t-a})$$

$g(t)=(t-a)^2(e^t-e^{t-a})$라고 정의를 한다면, $g'(t)$를 통해 $\int_0^a f(x)dx$의 최솟값을 구할 수 있다.

$g'(t)=0$의 해가 $t=a,\, t=a-2$ 이다.

이때 $(t-a)^2(e^t-e^{t-a})$에 $a$를 대입하면 0이 나오기 때문에 모순이므로 $t=a-2$이다.

이를 계산해보면 $a=4$ 임을 알 수 있다.

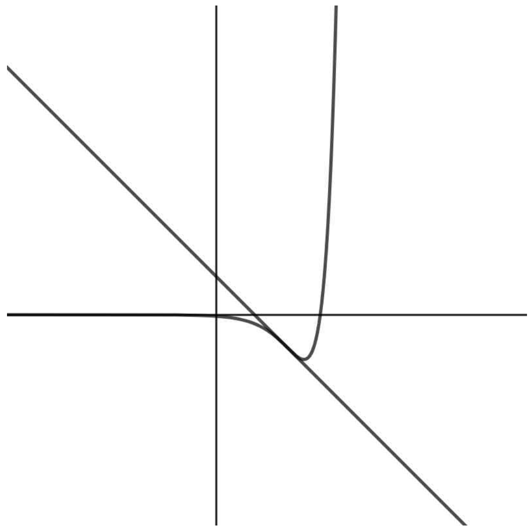
**#016 정답** ③

편의상 $l(x)=ax+b$라 하자. $g(x)$가 미분가능하기 위해서는 $l(x)$가 $f(x-t)$와 만나지 않거나 $f(x-t)$와 만나는 모든 점에서 접해야 한다. $f(x)$의 개형을 생각해 보면, $f(x)$와 만나는 직선이 조건을 만족시키려면 변곡점에서의 접선이거나 기울기가 양수인 접선이어야 한다.

또한, $f(x)$와 직선이 만나지 않으려면 직선이 $f(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있어야 하고 기울기가 0이상이어야 한다. 그런데 기울기가 0이상이고 만나지 않는 직선은 평행이동하여 $f(x-t)$의 그래프와 접하게 할 수 있고, 평행이동하여 접하게 하면 $y$절편이 더 커진다.

즉 접선만 고려하면 된다.

$t\ge 0$인 경우, $f(x-t)$의 그래프는 그림과 같다.

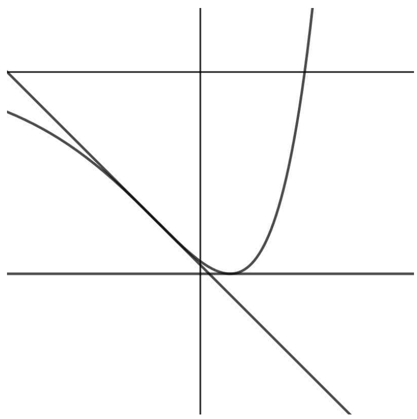


그림과 같이, $f(x-t)$의 변곡점에서의 접선은 조건을 만족시키고, 만약 변곡점에서의 접선의 $y$절편보다 위쪽에서는 접선을 그을 수가 없고, 변곡점에서의 접선보다 $y$절편이 큰 직선은 반드시 $f(x-t)$와 적어도 한 점에서 만나게 된다. 따라서 최대일 때는 변곡점에서의 접선일 때이다.

$f''(x-t)=(x-t)e^{x-t}$이므로, $x=t$일 때 접선의 기울기는 $-1$이고 이 때 $y$절편은 $t-2$이다.

따라서 $t\ge 0$일 때 $h(t)=t-2$이다.

$2-e<t<0$이면 $f(x-t)$의 그래프는 그림과 같다.



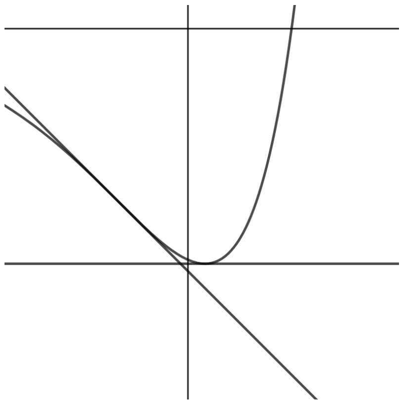
변곡점에서의 접선의 $y$절편보다 큰 $y$절편을 가지는 접선을 그으면 그 접선은 $f(x-t)$와 접하지 않으며 만나는 점이 존재한다.

(변곡점에서의 접선의 $y$절편보다 큰 $y$절편을 가지는 접선을 그으면 그 접선의 기울기는 그림에서 알 수 있듯이 음수이므로 $x\to-\infty$일 때 $\infty$로 발산하는데 $x\to-\infty$일 때 $f(x-t)\to 0$이므로 교점이 생기고, 변곡점을 지나면 $f(x-t)$는 위로 볼록하므로 접선의 기울기가 감소하므로 접하지 않는다)

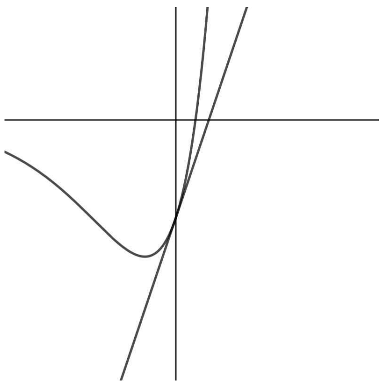
또한 변곡점에서의 접선의 $y$절편보다 큰 $y$절편을 가지는 직선은 $f(x-t)$와 반드시 만날 수밖에 없다.

또한 이 때 $x=t+1$에서의 접선의 $y$절편은 $f(1)$이고,

$t > 2-e$ 이므로 $f(1) = -e < t-2$ 이다.
따라서 이 때 $h(t) = t-2$ 이다.
$-1 < t < 2-e$ 인 경우



이 경우 $f(1) = -e > t-2$ 이다.
따라서 이때 $h(t) = f(1) = -e$ 이다.
$t < -1$ 인 경우



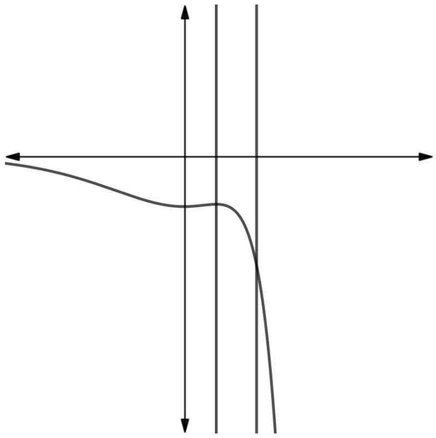
이 경우 $h(t) = f(-t)$ 이다.
따라서

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{4} h(t)dt &= \int_{2-e}^{4}(t-2)dt + \int_{-1}^{2-e} -e\,dt + \int_{-3}^{-1} f(-t)dt \\ &= 2 - \frac{1}{2}e^2 + e^2 - 3e + \int_{1}^{3} f(t)dt \\ &= 2 + \frac{1}{2}e^2 - 3e + \left[(x-3)e^x\right]_1^3 \\ &= 2 + \frac{1}{2}e^2 - 3e + 2e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - e + 2\end{aligned}$$

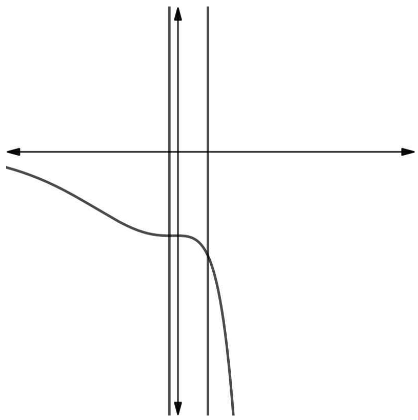
{다른 풀이}
$x = \alpha$ 에서의 접선의 $y$ 절편을 $p(\alpha)$ 라 하면
$p(\alpha) = g(\alpha) - \alpha g'(\alpha)$ 이다.
이 함수의 그래프를 추론하여 문제를 해결할 수 있다.
우선, 함수의 그래프의 개형으로부터 기울기가 0 이상이거나 변곡점의 접선만 가능하다는 점을
염두에 두자.
$p'(\alpha) = -\alpha g''(\alpha) = -\alpha(\alpha - t)e^{\alpha - t}$ 이다. 기울기가 0 이상이거나 변곡점의 접선이려면 $\alpha = t$ 또는
$\alpha \geq t+1$ 이어야 한다.

이때, $t \geq 0$ 이면 $\alpha = t$ 일 때 $p(\alpha)$ 가 $\alpha = t$ 에서 최대이다.
$t < 0$ 이면, $\alpha = t$ 에서 극소를 가지므로,
$p(t) = -2 + t = t-2$ 이고,
$\alpha = t+1$ 에서 $p(t+1) = g(t+1) = f(1) = -e$ 이므로,
$2-e < t < 0$ 에서 $h(t) = t-2$ 이고,
$t > -1$ 이면 $g'(0) < 0$ 이므로 $-1 < t < 2-e$ 에서
$h(t) = f(1) = -e$
한편, $t < -1$ 이면 $g'(0) \geq 0$ 이므로
$h(t) = p(0) = f(-t)$ 이다.
다음은 각각
$t > 0$, $2-e < t < 0$, $-1 < t < 2-e$, $t < -1$ 일 때 $p(\alpha)$ 와 $\alpha = t$, $\alpha = t+1$ 의 그래프이다.

$(t > 0)$

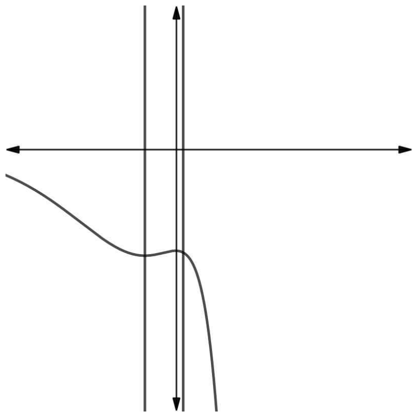


$(2-e < t < 0)$

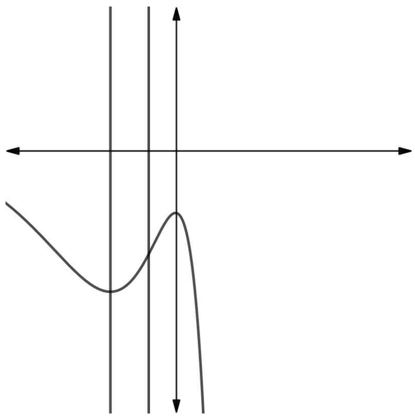


$(-1 < t < 2-e)$

By BT'S



$(t < -1)$



| #017 정답 | ② |
|---|---|

$f(tx)-g(t)x = x(t^2xe^{tx}-g(t))$ 이다.
조건을 만족시키려면 $x \ge 0$ 에서
$f(tx)-g(t)x \ge 0$, $x<0$ 에서
$f(tx)-g(t)x \le 0$ 이어야 한다.
즉 모든 실수 $x$ 에 대하여 $t^2xe^{tx}-g(t) \ge 0$ 이어야 한다.
$t^2xe^{tx}$ 를 $x$ 에 대하여 미분하면 $(t^3x+t^2)e^{tx}$ 이다.
이 식의 최솟값은 $x=-\frac{1}{t}$ 일 때이다.
즉 $t^2\left(-\frac{1}{t}\right)e^{-1} \ge g(t)$ 이다. 따라서 $g(t) \le -\frac{t}{e}$ 이다.
$\int_1^e g(t)dt \le \int_1^e -\frac{t}{e}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e\right)$ 이므로 $[1,\ e]$ 에서
$g(t)=-\frac{t}{e}$ 이다.
따라서 $g\left(\frac{e}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

| #018 정답 | 200 |
|---|---|

[강대모의고사K 4회 28번 참조]

| #019 정답 | 63 |
|---|---|

(나)를 해석하면, $a$, $b$, $c$ 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $a+b+c=15$인 세 자연수 $a$, $b$, $c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수에서 $a$, $b$, $c$가 모두 홀수인 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 빼면 된다.
(ⅰ) $a'+b'+c'=12$
${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = 91$
(ⅱ) $2a''+1+2b''+1+2c''+1=15$
따라서 $a''+b''+c''=6$
${}_3H_6 = {}_8C_6 = 28$
$\therefore\ 91-28=63$

| #020 정답 | ⑤ |
|---|---|

(나)에서 $a+b=3$
조건 (가)에 이를 대입하면 $c+d+e=4$
따라서 $(a,\ b)$를 정하는 방법의 수는 ${}_2H_3=4$
$(c,\ d,\ e)$를 정하는 방법의 수는 ${}_3H_4=15$
순서쌍의 개수는 $4\times15=60$

| #021 정답 | 36 |
|---|---|

$a+b+c+d=10$에서 $a+b+d=10-c$
(나)에서 $6^{a+b+2c+d}=2^{a+b+2c+d}\times3^{a+b+2c+d}$가 $2^{14}$으로 나누어떨어지지 않으므로
$a+b+2c+d=13$
$10-c=13-2c$, $c=7$
$a+b+d=7$
${}_3H_7=36$

| #022 정답 | 168 |
|---|---|

$320=5\times2^6$이므로
$x_1+x_2+x_3=5$, $x_4\times x_5\times x_6=2^6$
$a+b+c=2$, $2^{e+f+g}=2^6$, $e+f+g=6$
${}_3H_2=6$, ${}_3H_6=28$
따라서 $6\times28=168$

| #023 정답 | ① |
|---|---|

$a+b+c$가 3의 배수이므로
$(3k_1,\ 3k_2,\ 3k_3)$
또는
$(3k_1-2,\ 3k_2-2,\ 3k_3-2)$
또는
$(3k_1,\ 3k_2-1,\ 3k_3-2)$의 꼴이어야 한다.

이때, $a\times b\times c$ 또한 3의 배수이므로
$(3k_1,\ 3k_2,\ 3k_3)$ 또는 $(3k_1,\ 3k_2-1,\ 3k_3-2)$의 꼴이다.

(ⅰ) $(3k_1,\ 3k_2,\ 3k_3)$일 때,
$k_1+k_2+k_3=10$
$k_1'+k_2'+k_3'=7$
${}_3H_7=36$

(ⅱ) $(3k_1,\ 3k_2-1,\ 3k_3-2)$일 때,
$k_1+k_2+k_3=11$
$k_1'+k_2'+k_3'=8$
${}_3\mathrm{H}_8=45$

이때, $(3k_1-1,\ 3k_2-2,\ 3k_3)$등도 가능하므로
$3!\times 45=270$

$\therefore 270+36=306$

**#024 정답** 832

[강대모의고사K 4회 29번 참조]

**#025 정답** 46

$a_2=a_1-2=6k-2$
$a_3=a_2-1=6k-3$
$\vdots$
이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $6k$, 공차가 $-3$인 등차수열이고,
수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $6k-2$, 공차가 $-3$인 등차수열이다.

(ⅰ) $n=2m-1$일 때,
$a_{2m-1}=6k-3(m-1)=6k-3m+3$
$a_n=6k-3\times\dfrac{n+1}{2}+3=6k-\dfrac{3}{2}n+\dfrac{3}{2}>0$
$\therefore n<4k+1$

(ⅱ) $n=2m$일 때.
$a_{2m}=6k-2-3(m-1)=6k-3m+1$
$a_n=6k-3\times\dfrac{n}{2}+1=6k-\dfrac{3}{2}n+1>0$
$\therefore n<4k+\dfrac{2}{3}$

따라서 $M=4k$이다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M}a_n &= \sum_{n=1}^{4k}a_n\\ &=\sum_{m=1}^{2k}(6k-3m+3)+\sum_{m=1}^{2k}(6k-3m+1)\\ &=\sum_{m=1}^{2k}(12k-6m+4)\end{aligned}$$

$=(12k+4)\times 2k-6\times\dfrac{2k(2k+1)}{2}=24k^2+8k-12k^2-6k$
$=12k^2+2k=1220$
따라서 $k=10$
$a_{10}=6\times 10-\dfrac{3}{2}\times 10+1=46$

**#026 정답** 106

대입하면서 규칙을 찾아 보자.
$a_2=3,\ a_3=1,\ a_4=-1$이다.
$a_5=4,\ a_6=2,\ a_7=0,\ a_8=-2$이고
$a_9=3,\ a_{10}=1,\ a_{11}=-1$이다.
$a_{12}=4$이므로 그 이후로는 계속
$4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1,\ -1$의 패턴이 반복된다.
$4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1,\ -1$의 합은 $7$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100}a_n&=(5+3+1\pm 1)+13\times 7+(4+2+0\pm 2+3)\text{이다.}\\ &=8+91+7=106\end{aligned}$$

**#027 정답** 24

[강대모의고사K 4회 30번 참조]

**#028 정답** 5

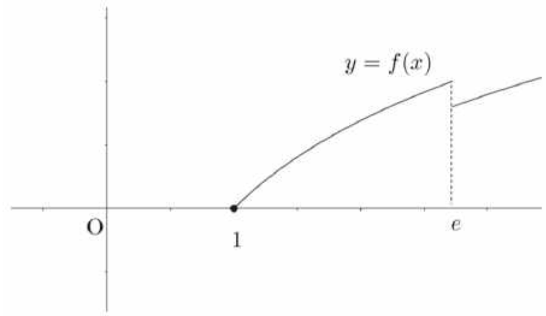
편의상 $g(x)=\ln(x^2+1)$라 하자. A의 $x$좌표를 $k$라 하면,
$g(k+t)-g(k)$의 값이 최대여야 한다.
이 식을 $k$에 대하여 미분하면,

$$\begin{aligned}g'(k+t)-g'(k)&=\frac{2(k+t)}{(k+t)^2+1}-\frac{2k}{k^2+1}\\ &=-2t\left(\frac{k^2+kt-1}{((k+t)^2+1)(k^2+1)}\right)\end{aligned}$$

이다.
$f(t)=g(k)=\ln(k^2+1)$이다.
$f'(t)=\dfrac{2k\dfrac{dk}{dt}}{k^2+1}$이다.
$k^2+kt-1=0$이므로, $\dfrac{dk}{dt}2k+\dfrac{dk}{dt}t+k=0$이다.
따라서 $t=2$이면
$k^2+2k-1=0$이므로
$k=-1+\sqrt{2}$이고, $\dfrac{dk}{dt}=-\dfrac{k}{2k+t}=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$
이므로
$f'(2)=-\dfrac{(2\sqrt{2}-2)\times\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}{4-2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$ 이다.
따라서
$p=-\dfrac{1}{4},\ q=\dfrac{1}{4}$이므로
$40(p^2+q^2)=40\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}\right)=5$

**#029 정답** ④

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



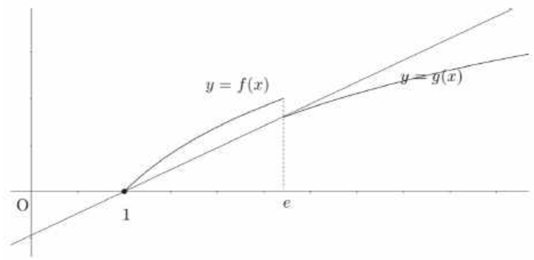

이때 일차함수 $g(x)$가 주어진 조건을 만족시키려면

$1 \le x < e$일 때 $g(x) \le f(x)$이고,

$x \ge e$일 때 $g(x) \ge f(x)$이어야 한다.

따라서 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값 $h(t)$는 다음과 같다.

(ⅰ) 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \ge e)$에 그은 접선이 존재하지 않을 때



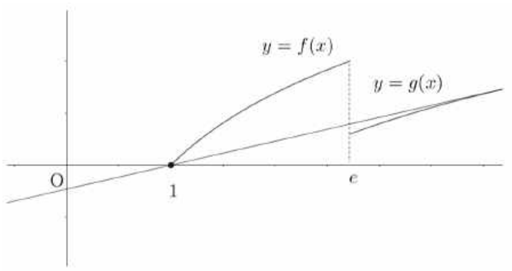

두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$를 지나는 직선의 기울기가 $h(t)$이다.

즉, $h(t)=\dfrac{-t+\ln e}{e-1}=\dfrac{-t+1}{e-1}$이다.

이때, $h'(t)=\dfrac{-1}{e-1}$이므로

$h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)=\dfrac{-1}{e-1}$

(ⅱ) 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \ge e)$에 그은 접선이 존재할 때




그 접선의 기울기가 $h(t)$이다.

이때 $f'(x)=\dfrac{1}{x}\ (x \ne e)$이므로 접점의 $x$좌표를 $\alpha$라 하면

$h(t)=\dfrac{1}{\alpha}$ 이다.

한편, 접점 $(\alpha,\ -t+\ln\alpha)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-t+\ln\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}(x-\alpha)$ 이다.

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$t-\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}-1$

$\ln\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=t+1$

이때 $h(t)=\dfrac{1}{\alpha}$이므로

$\ln\dfrac{1}{h(t)}+h(t)=t+1$

즉, $h(t)-\ln h(t)=t+1$이다.

위 등식의 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$h'(t)-\dfrac{h'(t)}{h(t)}=1$ 이므로

$h'(t)=\dfrac{h(t)}{h(t)-1}$이다.

한편, 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$, 즉 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ -t+1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{-t+1}{e-1}$ 이고, 점

$\lim\limits_{x\to e+} f'(x)=\dfrac{1}{e}$이므로

$\dfrac{-t+1}{e-1}>\dfrac{1}{e}$ 즉, $t<\dfrac{1}{e}$이면

$h(t)=\dfrac{-t+1}{e-1}$ 이므로 $h'(t)=\dfrac{-1}{e-1}$ 이고,

$\dfrac{-t+1}{e-1}\le\dfrac{1}{e}$ 즉, $t \ge \dfrac{1}{e}$이면

$h(t)-\ln h(t)=t+1$ 이므로 $h'(t)=\dfrac{h(t)}{h(t)-1}$ 이다.

$\dfrac{1}{2e}<\dfrac{1}{e}$이므로 $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)=\dfrac{-1}{e-1}$

한편, $t \le \dfrac{1}{e}$에서 $h(t)=\dfrac{-t+1}{e-1}$의 최솟값은

$h\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{e}+1}{e-1}=\dfrac{1}{e}$ 이다.

한편, 양수 $a$에 대하여 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$일 때

$h(a)=\dfrac{1}{e+2}<\dfrac{1}{e}=h\left(\dfrac{1}{e}\right)$

이므로 $a>\dfrac{1}{e}$이다.

따라서

$$h'(a)=\frac{h(a)}{h(a)-1}=\frac{\dfrac{1}{e+2}}{\dfrac{1}{e+2}-1}=\frac{-1}{e+1}$$

따라서

$h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a) = \frac{-1}{e-1}\times\frac{-1}{e+1} = \frac{1}{(e-1)(e+1)}$
이다.

**#030 정답** ①

점 P의 좌표는 $(s,\ (s+1)\ln s)$
점 Q의 좌표는 $(t,\ 3\ln(t-1))$이다. $(t-1>0)$
$(s+1)\ln s = 3\ln(t-1)\cdots$① 이므로
$s=2$일 때, $3\ln 2 = 3\ln(t-1)$
$t=3$이다.

양변을 $t$에 대해 미분하면
$\left(\ln s+1+\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{dt} = \frac{3}{t-1}$
$(s,\ t) = (2,\ 3)$일 때,
$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{\ln 2+\frac{3}{2}} = \frac{3}{2\ln 2+3}$

삼각형 POQ의 넓이는
$\frac{1}{2}(t-s)\times(s+1)\ln s$ 또는
$\frac{1}{2}(t-s)\times 3\ln(t-1)$ 이다.

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{ds}-1\right)\times(s+1)\ln s + \frac{1}{2}(t-s)\times\left(\ln s+1+\frac{1}{s}\right)$$
$\frac{dt}{ds} = \frac{2\ln 2+3}{3}$ 이므로
$\frac{1}{2}\times\frac{2\ln 2}{3}\times 3\ln 2+\frac{1}{2}\times 1\times\left(\ln 2+\frac{3}{2}\right) =$
$(\ln 2)^2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}$

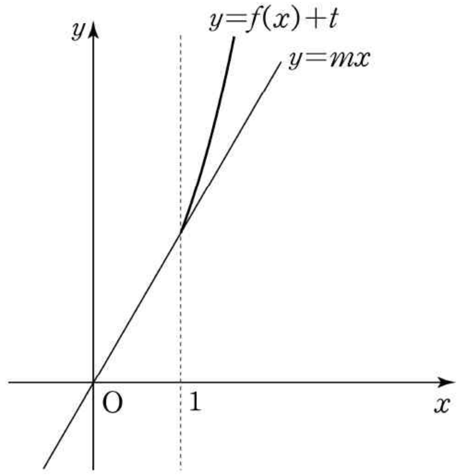
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{ds}{dt}\right)\times 3\ln(t-1) + \frac{1}{2}(t-s)\times\frac{3}{t-1}$$
$\frac{3(\ln 2)^2}{2\ln 2+3}+\frac{3}{4}$

따라서
$$(2\ln 2+3)\left(\frac{dA}{ds}-\frac{dA}{dt}\right)$$
$$= (2\ln 2+3)\left((\ln 2)^2+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3(\ln 2)^2}{2\ln 2+3}\right)$$
$$= 2(\ln 2)^3+(\ln 2)^2+\frac{3}{2}\ln 2$$
따라서 답은 ①

**#031 정답** ⑤

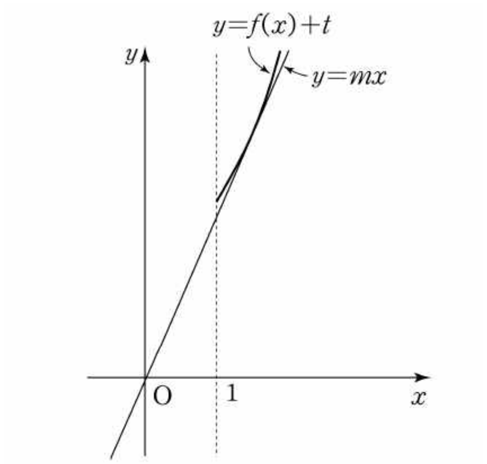
곡선 $y=f(x)+t$ 위의 점 $(1,\ f(1)+t)$ 에서의
접선의 기울기는
$f'(1)=e^1=e$ 이므로 접선의 방정식은
$y-e-t=e(x-1)$
이 직선이 원점을 지나려면 $-e-t=-e$ 에서 $t=0$ 이다.
따라서 $t\le 0$과 $t>0$일 때 함수 $g(t)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

(ⅰ) $t\le 0$일 때,
함수 $y=f(x)+t$의 그래프는 그림과 같다.




원점을 지나는 직선 $y=mx$가
곡선 $y=f(x)+t$와 만날 때의
기울기 $m$이 최소일 때는 직선이 점 $(1,\ f(1)+t)$을 지날 때이다.
따라서 $m$의 최솟값은
$g(t) = \frac{f(1)+t}{1} = t+e$

(ⅱ) $t>0$일 때,
함수 $y=f(x)+t$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 직선 $y=mx$가 곡선 $y=f(x)+t$와
만나도록 하는 기울기 $m$이 최소인 경우는
직선 $y=mx$가 곡선 $y=f(x)+t$에 접할 때이다.
이때 이 접점의 $x$좌표를 $\alpha$라 하면
$g(t)=f'(\alpha)=e^{\alpha}$
한편, 곡선 $y=e^{x}+t$위의 점 $(\alpha,\ e^{\alpha}+t)$에서의
접선의 방정식은
$y-e^{\alpha}-t=e^{\alpha}(x-\alpha)$
이 직선이 원점을 지나면 $-e^{\alpha}-t=-\alpha e^{\alpha}$
$\therefore t=(\alpha-1)e^{\alpha}$

(ⅰ), (ⅱ)에서
$t \le 0$이면 $g(t)=t+e$
$t>0$이면 $g(t)=e^{\alpha}$이다.
$\int_{-e}^{0}(t+e)dt=-\dfrac{e^2}{2}+e^2=\dfrac{e^2}{2}$ 이고,
$t=0$일 때 $\alpha=1$이고, $t=e^2$일 때 $\alpha=2$이며
$\dfrac{dt}{d\alpha}=\alpha e^{\alpha}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{e^2}e^{\alpha}dt&=\int_{1}^{2}\alpha e^{2\alpha}d\alpha\\&=\left[\frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha}\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_{1}^{2}e^{2\alpha}d\alpha\\&=e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2\alpha}\right]_1^2\\&=\frac{3e^4}{4}-\frac{e^2}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-e}^{e^2}g(t)dt=\frac{3e^4}{4}+\frac{e^2}{4}=\frac{e^2+3e^4}{4}$$