例. 求 $f(x,y)=2y^2-x(x-1)^2$ 的极值

解: ①求驻点、 $\begin{cases} f_x=-(x-1)^2-x\,2(x-1)=-(x-1)(3x-1)=0 \\ f_y=4y=0 \end{cases}$

驻点 $(x_1,y_1)=(1,0)$  $(x_2,y_2)=(\frac{1}{3},0)$.

② $f_{xx}=-(3x-1)-(x-1)\cdot 3=-(6x-4)$

$f_{xy}=0$

$f_{yy}=4.$

$f(1,0)=0$

$A_1=-2.\ B_1=0.\ C_1=4.$

$A_1C_1-B_1^2<0.\ \Rightarrow (1,0)$ 不是极值点

$A_2=2.\ B_2=0.\ C_2=4$

$A_2C_2-B_2^2>0.$ 且 $A_2>0\Rightarrow(\frac{1}{3},0)$是极小值点

综上. $f(x,y)$ 的极小值为 $f(\frac{1}{3},0)$

二. 有界闭区域上连续函数的最值问题.

最值点 $\begin{cases} \text{驻点 } \nabla f=\vec{0}. \text{ (内点)} \\ \text{边界点} \\ \text{偏导不存在. 例: } z=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

一元函数

最值点 $\begin{cases}\text{驻点}\\\text{端点}\\\text{不可导点}\end{cases}$

例: $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$

例: $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$

在 D: $x=0$, $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围成上的最值。

D: $0\le x\le 1$ 且 $0\le y\le 1$

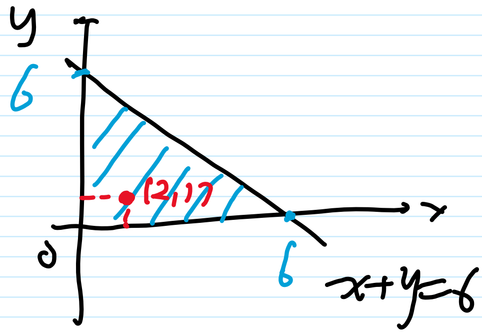
$(2,1)\notin D_1$

解. ① 求驻点 (内点)

$$\begin{cases} f_x = y[2x(4-x-y)+x^2\cdot(-1)]=0 \\ f_y = x^2[1\cdot(4-x-y)+y\cdot(-1)]=0 \end{cases}$$

$x\neq 0$ 且 $y\neq 0$. $\begin{cases} 8-2x-2y-x=0 \\ 4-x-y-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1. \end{cases}$

唯一驻点 $(2,1)\in D$.




② 边界点

$x=0$, $0\le y\le 6$. $f(0,y)=0$

$y=0$, $0\le x\le 6$ $f(x,0)=0$.

$y=6-x$, $0\le x\le 6$. $f(x,6-x)=x^2(6-x)(-2)$

记 $g(x)=-2x^2(6-x)$. $0\le x\le 6$.

$\because g'(x)=-2(2x(6-x)+x^2(-1))$

$=-2x(12-2x-x)=0$.

$x_0=4$, $y_0=2$.

$\because g(0)=g(6)=0$.

比较 $f(2,1)$, $f(4,2)$ 与 0 的大小关系

例. 证明: 周长 $2p$ 的三角形中, 等边三角形面积最大.

例. 证明: 周长 $2p$ 的三角形中, 等边三角形面积最大.

证明: 设边长 $x, y, z$. $x+y+z=2p$. 约束条件 } 条件极值问题

$$S^2=p(p-x)(p-y)(p-z)=g(x,y,z)$$

$$=p(p-x)(p-y)(x+y-p).$$ 无条件极值.

考虑 $f(x,y)=(p-x)(p-y)(x+y-p)$ 的最值问题.

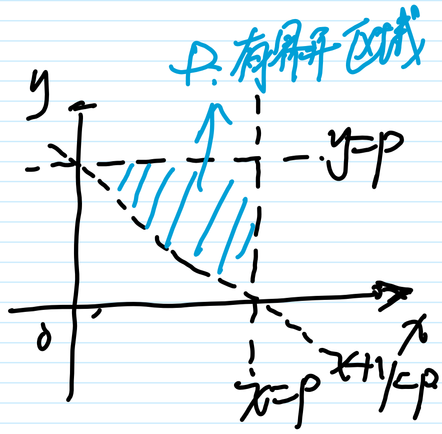
$0<x<2p \quad 0<y<2p$

$x+y>z=2p-x-y$

$x+y>p$

$x-y<z=2p-x-y$

$x<p$ 同理 $y<p$




$D'=D\cup$ 边界.

① 求驻点 (内点)
$$\begin{cases} f_x=(p-y)[-(x+y-p)+(p-x)]=0 \\ f_y=(p-x)[-(x+y-p)+(p-y)]=0 \end{cases}$$

$x\neq p$ 且 $y\neq p$
$$\begin{cases} 2p-2x-y=0 \\ 2p-x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)=(\tfrac{2}{3}p,\tfrac{2}{3}p)$$

此时 $z_0=2p-x_0-y_0=\frac{2}{3}p$

② 边界点 $f(x_1,y_1)=0$, $(x_1,y_1)\in$ 边界

$f(\frac{2}{3}p,\frac{2}{3}p)$ 是最大值 $\quad f(x_1,y_1)$ 是最小值

故 $(\frac{2}{3}l, \frac{2}{3}l)$ 是 D 上最大值点.

## 三 条件极值

$$\begin{cases} 目标函数: u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ 约束条件: \varphi_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \ (1\le j\le m,\ m<n) \end{cases}$$

(1) 二元函数为例

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \xrightarrow{y=y(x)} z=f(x, y(x)) \stackrel{记为}{=} g(x)$$

$y=y(x)$ 是由 $\varphi(x,y)=0$ 所确定隐函数

若 $x_0$ 是 $g(x)=f(x,y(x))$ 的极值点 $\Rightarrow g'(x_0)=0$

$$g'(x_0)=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y'(x)\Big|_{x=x_0}=\boxed{f_1'+f_2'\cdot\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)\Big|_{x=x_0}=0}$$

$$f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot\left(-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\right)=0$$

$$\frac{f_x(x_0,y_0)}{\varphi_x(x_0,y_0)}=\frac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=-\lambda.$$

(1) 构造 $L(x,y,\lambda)$
$=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

(2) 求 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点, 即为条件极值点

$$[f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)]_x=f_x+\lambda\varphi_x=0$$

$$[f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)]_y=f_y+\lambda\varphi_y=0.$$

$$[f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)]_\lambda=\varphi(x,y)=0$$

# 拉格朗日乘数法

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$$
$$=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(x_1,\cdots,x_n).$$

$$\begin{cases} L_{x_1}=0 \\ \vdots \\ L_{x_n}=0 \\ L_{\lambda_1}=\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \vdots \\ L_{\lambda_m}=\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

例:
$$\begin{cases} g(x,y,z)=(p-x)(p-y)(p-z) \\ x+y+z=2p \end{cases}$$

解:
$$\underbrace{L(x,y,z}_{\text{四元函数}},\lambda)=(p-x)(p-y)(p-z)+\lambda(x+y+z-2p)$$

$$\begin{cases} L_x=-(p-y)(p-z)+\lambda=0 \\ L_y=-(p-x)(p-z)+\lambda=0 \\ L_z=-(p-x)(p-y)+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+z-2p=0 \end{cases}$$

$(p-y)(p-z)$
$=(p-x)(p-z)$
$=(p-x)(p-y)$
$\Rightarrow x=y=z$

$\Rightarrow$ 唯一条件极值点
$(x_0,y_0,z_0)=(\frac{2}{3}p,\frac{2}{3}p,\frac{2}{3}p)$

例 $x^2+y^2=z$ 被 $x+y+z=1$ 截出一条曲线.

求曲线上到原点 $O$ 的最大,最短距离.

$f=|x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx|$

$g=f^2=(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2$

解: 设 $(x,y,z)$ 是曲线上的点 则

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设目标函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

约束条件. $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=1. \end{cases}$

构造 $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)$
$+\lambda_2(x+y+z-1)$

若 $\lambda_1=-1$, 则 $\lambda_2=0$ $z=-\frac{1}{2}$ (舍)

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ L_y=2y+2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ L_z=2z-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ L_{\lambda_1}=x^2+y^2-z=0 \Rightarrow z=2x^2 \\ L_{\lambda_2}=x+y+z-1=0 \Rightarrow z=1-2x \end{cases}$$

$2x(1+\lambda_1)=2y(1+\lambda_1)$
$\Rightarrow x=y.$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$y_{1,2}=x_{1,2}$.　　$z_{1,2}=1-2x_{1,2}$.

条件极值点 $(x_1,y_1,z_1)$ 和 $(x_2,y_2,z_2)$

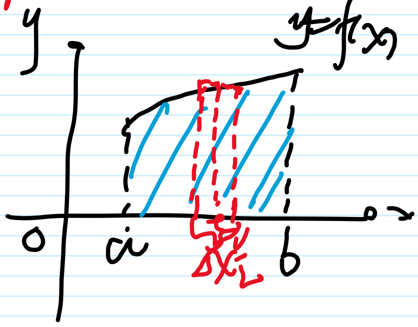
比较 $f(x_1,y_1,z_1)$ 和 $f(x_2,y_2,z_2)$

# 第八章 重积分

方法 → 定积分

一元函数定积分：分割→代替→求和→极限.

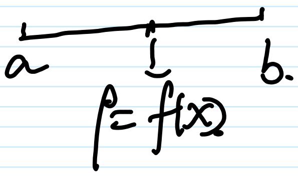
$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$




几何意义：曲面梯形面积

例. $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi 1^2=\frac{\pi}{4}$

物理意义：细棒质量



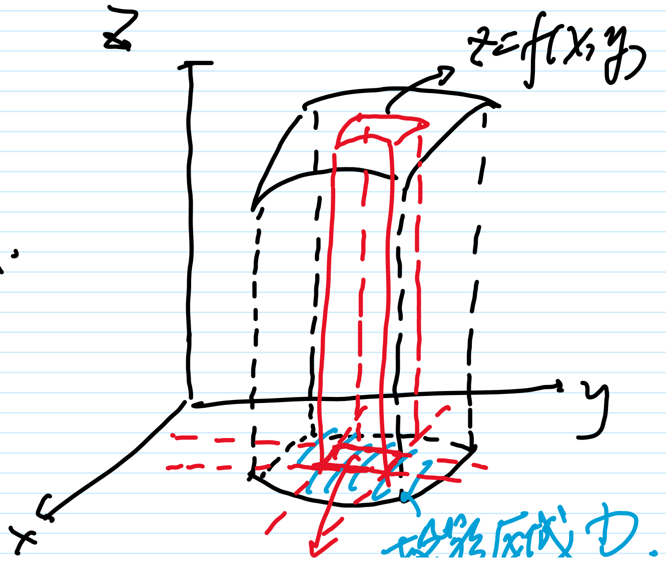

## 第一节 二重积分概念与性质

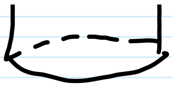
一、概念.

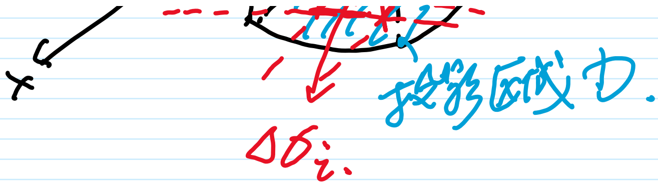
引例. 曲顶柱体体积.

$z=f(x,y)$ D 有界闭区域.

$V=S\times h$








分割：$D$ . $\Delta\sigma_i$

↓

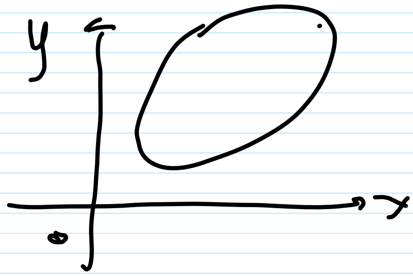
代替：$V_{小曲顶} = V_i \approx \Delta\sigma_i \times f(\xi_i,\eta_i)$

↓

求和：$V_{曲顶} \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$.

↓

极限：$V_{曲顶} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$.




引例：平面薄片的质量. $\rho_{面} = f(x,y)$.

$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$$

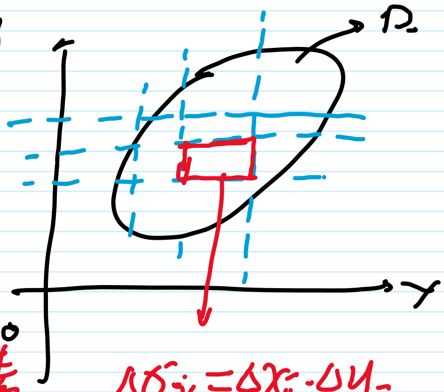
定义：$z=f(x,y)$ 有界闭区域 $D$ 上的有界函数

① 任意分割 $\Delta\sigma_i$.

② 任意取点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$

若 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$ 存在 则称为 $f(x,y)$ 在 $D$ 上的二重积分

记为 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$. 面积元素




$\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

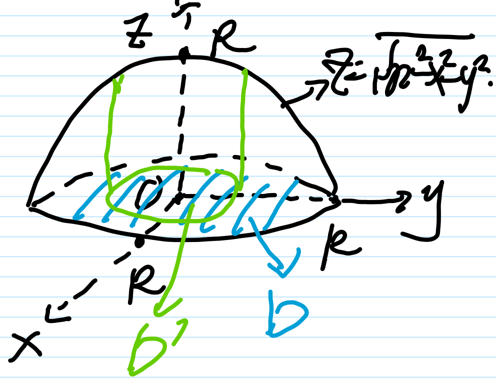
在直角坐标系下的面积元素

$\Delta\sigma_i = \Delta x_i\cdot\Delta y_i$

当 $f(x,y)=1$ 时. $\iint_D 1\cdot d\sigma=\sigma$ (D 的面积)

例 $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy = V_{半球} = \frac{2}{3}\pi R^3$. 其中 $D: x^2+y^2\le R^2$.

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 上半球面



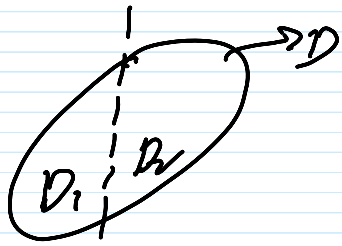

二、性质:

1. 线性 $\iint_D [kf(x,y)+l\,g(x,y)]\,d\sigma$

计算

$= k\iint_D f\,d\sigma + l\iint_D g\,d\sigma.$

2. 可加性 $D=D_1\cup D_2$




$\iint_D f\,d\sigma = \iint_{D_1} f\,d\sigma + \iint_{D_2} f\,d\sigma.$

$\iint_{D_1} f\,d\sigma = \iint_D f\,d\sigma - \iint_{D_2} f\,d\sigma.$

3. 保序性. $f(x,y)\ge 0 \Rightarrow \iint_D f\cdot d\sigma \ge 0$

$f\ge g \Rightarrow \iint_D f\,d\sigma \ge \iint_D g\,d\sigma$

$-|f|\le f\le |f| \Rightarrow \iint_D -|f|\,d\sigma \le \iint_D f\,d\sigma \le \iint_D |f|\,d\sigma$

$$-|f| \le f \le |f| \Rightarrow \iint_D -|f| d\sigma \le \iint_D f d\sigma \le \iint_D |f| d\sigma$$

即 $\left|\iint_D f d\sigma\right| \le \iint_D |f| d\sigma$.

4. 估值定理. $m \le f \le M$.

$$m\cdot\sigma = \iint_D m\, d\sigma \le \iint_D f d\sigma \le \iint_D M\, d\sigma = M\cdot\sigma$$

例: 证明: $a \le \iint_D f d\sigma \le b$

①. 求 $f(x,y)$ 在 D上最值 $m, M$.

②. 求 $\sigma = \iint_D 1\, d\sigma$. $m\sigma = a$. $M\sigma = b$.

5. 积分中值定理. $f(x,y)$ 连续

$$m \le \frac{\iint_D f d\sigma}{\sigma} \le M.$$

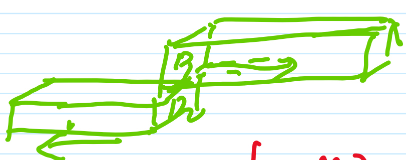
$$\parallel$$

$$\mu.$$

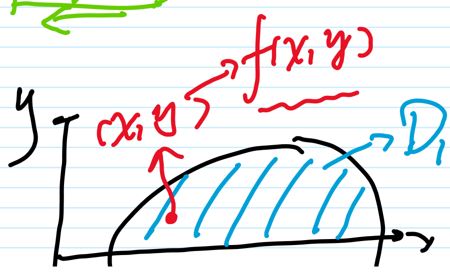
$\exists(\xi,\eta)$ 使 $f(\xi,\eta) = \dfrac{\iint_D f d\sigma}{\sigma}$

$$\iint_D f d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma. \qquad \int_a^b f dx = f(\xi)(b-a)$$

$\boxed{\text{6. 对称性}}$ — 偶倍奇零

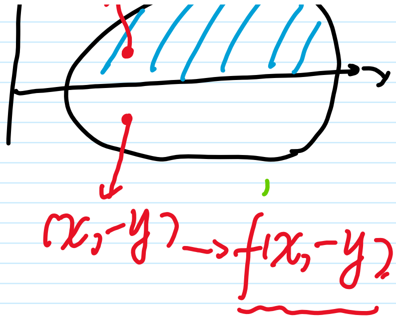


(1). D关于x轴对称, 其中 $D_1$: 上半部分



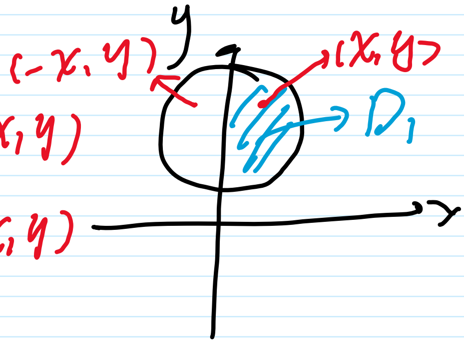

则 $\iint_D f d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f d\sigma, & f(x,y)=f(x,-y) \end{cases}$

则 $\iint\limits_D f\,d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f\,d\sigma, & f(x,y)=f(x,-y)\\ 0, & -f(x,y)=f(x,-y)\end{cases}$




(ii) D关于y轴对称，其中 $D_1$：右半部分

则 $\iint\limits_D f\,d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f\,d\sigma, & f(x,y)=f(-x,y)\\ 0, & -f(x,y)=f(-x,y)\end{cases}$



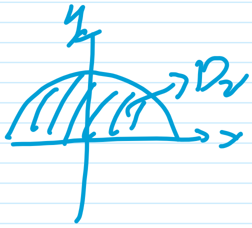

(iii) D关于 $y=x$ 对称 $\Longrightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\,d\sigma$

例. $D_1$: $x^2+y^2\le 1$ D关于 $y=x$ 对称.

$\downarrow x\leftrightarrow y$

$y^2+x^2\le 1$.

$D_2$: $x^2+y^2\le 1$ 且 $y\ge 0$.




不关于 $y=x$ 对称

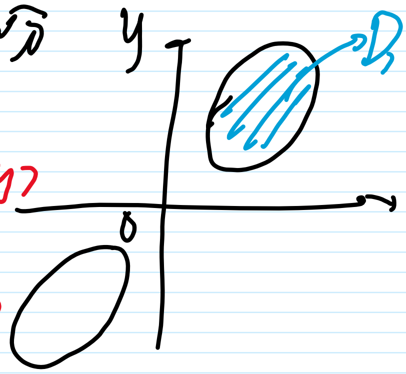
$\downarrow x\leftrightarrow y$.

$x^2+y^2\le 1$ 且 $x\ge 0$.

D关于 $y=x$ 对称 $\iint\limits_D x^2\,d\sigma=\iint\limits_D y^2\,d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,d\sigma$

(iv) D关于原点(0,0)对称 其中 $D_1$：一部分

则 $\iint\limits_D f\,d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f\,d\sigma, & f(x,y)=f(-x,-y)\\ 0, & -f(x,y)=f(-x,-y)\end{cases}$



例.

$$I=\iint_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma.\quad D: x^2+y^2\le 4.$$

证明 $36\pi \le I \le 100\pi$

证明: 法1.

① $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在 $D$ 上的最值

$$9\le x^2+4y^2+9 \le 4x^2+4y^2+9 \le 25.$$

② $D$ 的面积 $\sigma=4\pi$. $4\pi\times 9=36\pi$

$4\pi\times 25=100\pi$

由估值定理 $36\pi\le I\le 100\pi$.

法2: $D$ 关于 $y=x$ 对称

$$I=\iint_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma.$$

$$=\iint_D (y^2+4x^2+9)\,d\sigma.$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D [5(x^2+y^2)+18]\,d\sigma.$$

$$9\le f(x,y)=\frac{5}{2}(x^2+y^2)+9 \le 19.$$

$9\cdot 4\pi=36\pi$ $19\cdot 4\pi=76\pi$

$36\pi\le I\le 76\pi\le 100\pi$.