第二章一元微分学

第一节　导数、微分、高阶导的计算

有关知识：

（1）导数、微分的概念，性质。基本导数公式表.

（2）求导法则（和、差、积、商的导数；复合函数、反函数、隐函数和参数方程确定的函数的导数）.

（3）$f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处左、右导数都存在且相等。对一元函数，可导 $\Rightarrow$ 连续（反之不然），可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

（4）高阶导数的计算 ，首先记住几个简单函数的高阶导数：$e^x, a^x, \ln(a+x), \sin x, \cos x, (a+x)^\alpha$ 及莱布尼兹公式。

例 1：（1）设 $f(x)=(\tan\frac{\pi x}{4}-1)(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)$，则 $f'(1)=$ ______。

（2）设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)+f(1+x)-2f(1-\tan x)}{x}=$ __ 。

（3）设严格单调函数 $y=f(x)$ 有二阶连续导数，其反函数为 $x=\varphi(y)$，且 $f(1)=1, f'(1)=2, f''(1)=3$，则 $\varphi''(1)=$ ______ 。

分析：（1）易见　$f(1)=0$　可直接由导数定义求出结果：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{99!}{2}\pi$，

或　$f(x)=(\tan\frac{\pi x}{4}-1)g(x)$，其中 $g(x)=(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)$，

$$f'(1)=(\tan\frac{\pi x}{4}-1)'|_{x=1}\, g(1)+(\tan\frac{\pi x}{4}-1)|_{x=1}\, g'(1)=-\frac{99!}{2}\pi\text{。}$$

（2）已知 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$，那么 $\frac{f(1+\sin x)+f(1+x)-2f(1-\tan x)}{x}=$

$$\frac{f(1+\sin x)-f(1)+f(1+x)-f(1)-2(f(1-\tan x)-f(1))}{x}$$

$$=\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}+\frac{f(1+x)-f(1)}{x}+2\frac{f(1-\tan x)-f(1)}{-\tan x}\times\frac{\tan x}{x}$$

$$\to 2\times 1+2+2\times 2\times 1=8$$

另解：由题设知　$f(1+h)=f(1)+2h+o(h)(h\to 0)$，则

$$\frac{f(1+\sin x)+f(1+x)-2f(1-\tan x)}{x}$$

$$=\frac{2\sin x+2x+4\tan x+o(\sin x)+o(x)+o(\tan x)}{x}\to 8$$

（3）$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{y'}$，$\varphi''(y)=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{(y')^3}$，

又 $x=1$ 时 $y=1$,所以

$$\varphi''(1)=-\frac{y''}{(y')^3}\bigg|_{x=1}=-\frac{f''(1)}{[f'(1)]^3}=-\frac{3}{8}$$

例 2：设 $p(x)=x,q(x)=1-x,f(x)$ 为多项式，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ $f(x)\ge p(x),f(x)\ge q(x)$

试证 $f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$。

分析：初一看与导数没有关系。由题设可以看出 $f(\frac{1}{2})\ge p(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，但如何说明 $f(\frac{1}{2})\ne\frac{1}{2}$？这是问题的关键。这里用到：多项式总是可导的。

证明：由题设知 $f(\frac{1}{2})\ge p(\frac{1}{2})=q(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

若 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，则 $f(\frac{1}{2})=p(\frac{1}{2})=q(\frac{1}{2})$，

当 $x>\frac{1}{2}$ 时

$\dfrac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}\ge\dfrac{p(x)-p(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=1$，令 $x\to\frac{1}{2}+0$，可得 $f_+'(\frac{1}{2})\ge1$

当 $x<\frac{1}{2}$ 时

$\dfrac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}\le\dfrac{q(x)-q(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=-1$，令 $x\to\frac{1}{2}-0$，可得 $f_-'(\frac{1}{2})\le-1$

从而 $f_+'(\frac{1}{2})\ne f_-'(\frac{1}{2})$ 这与多项式可导矛盾，故 $f(x)\ne\frac{1}{2}$，

所以 $f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$.

例 3（1）设 $f(x)=\sin^6x+\cos^6x$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________

（2）设 $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________

解：（1） $f(x)=\sin^6x+\cos^6x=\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x$

$$=1-3\sin^2x\cos^2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4x$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{3}{2}4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$$

（2） $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x-1}}=(x-1)^{\frac{1}{2}}+2(x-1)^{\frac{-1}{2}}$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)(x-1)^{\frac{1}{2}-n}+2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)(x-1)^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}(x-1)^{\frac{1}{2}-n}+\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n-1}}(x-1)^{-\frac{1}{2}-n}$$

例 4 设 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，求

（1） $f^{(n)}(x)$；（2） $f^{(100)}(0)$， $f^{(101)}(0)$.

解（1） $f(x)=x\ln(1-x^2)=x\ln(1+x)+x\ln(1-x)$

$n\geq 2$时，$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x)^{(k)}[\ln(1+x)+\ln(1-x)]^{(n-k)}$

$$=x[\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}]+n[\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}-\frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}]$$

$$=\frac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}-\frac{(n-2)!(n-x)}{(1-x)^n}$$

$$f'(x)=\ln(1-x^2)-\frac{2x^2}{1-x^2}$$

所以 $f^{(n)}(x)=\begin{cases}\ln(1-x^2)-\frac{2x}{1-x^2},n=1\\ \frac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}-\frac{(n-2)!(n-x)}{(1-x)^n},n\geq 2\end{cases}$

解法二： $f'(x)=\ln(1-x^2)-\frac{2x^2}{1-x^2}$，

$f'(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)+2-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}$，

$n\geq 2$时，$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}-\frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}-\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

$$=\frac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}-\frac{(n-2)!(n-x)}{(1-x)^n},$$

所以 $f^{(n)}(x)=\begin{cases}\ln(1-x^2)-\dfrac{2x}{1-x^2}, n=1\\ \dfrac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}-\dfrac{(n-2)!(n-x)}{(1-x)^n}, n\ge 2\end{cases}$

（2）由（1）可得 $f^{(100)}(0)=0$，$f^{(101)}(0)=-202\times 99!$.

注：若本问题改为只求 $f^{(100)}(0)$，$f^{(101)}(0)$，则不必做第(1)问，用 Taylor 公式或幂级数展开式去解决会更简便些:

$$f(x)=-x[x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots+\frac{1}{50}x^{100}+o(x^{100})]=-x^3-\frac{1}{2}x^5-\cdots-\frac{1}{50}x^{101}+o(x^{101})$$

所以 $f^{(100)}(0)=0$， $f^{(101)}(0)=-\dfrac{101!}{50}=-202\times 99!$.

注：求高阶导的方法很多，主要有

（1） 将函数恒等变形，尤其是分拆成几个简单函数的和差，然后利用简单函数的高阶导求出结果；

（2） 用莱布尼兹公式；

（3） 利用泰勒公式或泰勒级数展开；

（4） 归纳，递推等.

当求高阶导函数时，（1）和(2)是最常用的方法。当求在某一点的高阶导数时，（3）是常用的方法。

例 5:（1）设 $f(x)=x^{100}e^x$，则 $f^{(200)}(0)=$ ________

（2） 设 $f(x)=x^{100}e^{x^2}$，则 $f^{(200)}(0)=$ ________

解:（1）用莱布尼兹公式

$$f^{(200)}(0)=(x^{100}e^x)^{(200)}\big|_{x=0}=\sum_{k=0}^{200}C_{200}^k(x^{100})^{(k)}(e^x)^{(200-k)}\big|_{x=0}=\frac{200!}{100!}.$$

或利用幂级数展开

$$f(x)=x^{100}(1+x+\cdots+\frac{x^{100}}{100!}+\cdots)=x^{100}+\cdots+\frac{1}{100!}x^{200}+\cdots$$

由展开式中 x^{200} 的系数 $\dfrac{1}{100!}$，可得 $f^{(200)}(0)=\dfrac{200!}{100!}$

（2）利用幂级数展开

$$f(x)=x^{100}(1+x^2+\cdots+\frac{x^{100}}{50!}+\cdots)=x^{100}+\cdots+\frac{1}{50!}x^{200}+\cdots$$

可得 $f^{(200)}(0)=\dfrac{200!}{50!}$。

利用莱布尼兹公式不是很方便。

例 6. 设 $f(x)=(\arcsin x)^2$，求 $f^{(n)}(0)$。

分析：本题用前面提到的方法（1），（2），（3）都不方便。试一试方法（4）。

解： $f'(x)=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，得 $\sqrt{1-x^2}\,f'(x)=2\arcsin x$，再求导得

$\sqrt{1-x^2}\,f''(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$，整理得 $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2$

两端求 n 次导得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)=0$$

令 $x=0$ 得

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$$

又由 $f'(0)=0,\ f''(0)=2$，可得

当 $n=2k+1(k=0,1,\cdots)$ 时， $f^{(n)}(0)=0$

当 $n=2k(k=1,2,\cdots)$ 时， $f^{(n)}(0)=f^{(2k)}(0)=2^{2k-1}[(k-1)!]^2$

例 7.（1）已知 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2=1$ 确定，则 $y''(0)=$ _____.

（2）设 $\begin{cases}x=\cos t^2\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du\end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=$ ____，$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=$ ____.

解：(1)方程两边求导得

$$e^y\frac{dy}{dx}+6y+6x\frac{dy}{dx}+2x=0, \qquad (1)$$

得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{6y+2x}{e^y+6x}$，

又 $x=0$ 时 $y=0$，得 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0$ 。

（隐函数求导可以有三种方法：（1）方程两边求导；（2）方程两边求微分（实际上是利用一阶微分形式的不变性）；（3）利用隐函数的求导公式。下面用另两种方法再求一遍.

【用方法（2）】方程两边求微分得

$$e^ydy+6xdy+6ydx+2xdx=0$$

从而得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{6y+2x}{e^y+6x}$。

【用方法（3）】，令 $F(x,y)=e^y+6xy+x^2-1$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=6y+2x$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=e^y+6x$，

所以 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{6y+2x}{e^y+6x}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(6\frac{dy}{dx}+2)(e^y+6x)-(6y+2x)(e^y\frac{dy}{dx}+6)}{(e^y+6x)^2},$$

用 $x=0$，$y=0$，$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=0$ 代入上式得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=-2$，即 $y''(0)=-2$

或对(1) 两边再求导得

$$e^y(\frac{dy}{dx})^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}+12\frac{dy}{dx}+6x\frac{d^2y}{dx^2}+2=0$$

用 $x=0$，$y=0$，$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=0$ 代入上式得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=-2$，即 $y''(0)=-2$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t^2-2t^2\sin t^2-\cos t^2}{-2t\sin t^2}=t$,

$$\frac{dy}{dx}|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\times\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{-2t\sin t^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

注：在求复合函数、隐函数、参数方程确定的函数、反函数的导数时，建议把导数(包括高阶导)写成微商的形式,这样就清楚是哪个变量对哪个变量求导.

练习题

1.（1）设 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，则 $\lim\sqrt{nf(\frac{2}{n})}=$ ________.

（2）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $x=0$ 的某个邻域内满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$$

且在 $x=1$ 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$) 处的切线方程为 ____________。

（3） 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，则 $f(0)=$ ______, $f'(0)=$ _______ 。

2．（1）设 $y=y(x)$ 由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（2）设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ 。

3．设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{4x}-e^{x}}{x}, x<0 \\ ax+b\cos x, x\geq 0 \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b 。

4．设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f''(0)$ 存在，函数

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0 \\ f'(0), x=0 \end{cases}$$

求 $g'(0)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

5．（1）设 $y=(\dfrac{x}{1+x})^{x}$ ，则 $y'=$ ________ 。

（2）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$, ，则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{x^n}{1-x^2}$, ，则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

6．设 $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)$,则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

7.设 $y=(1+\sqrt{x})^{2n+2}$,求 $y^{(n)}(1)$.

8．设 $f(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$,则 $f(1)=$ ________ 。

9．设 $y=x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$,证明：$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

10．设 $y=\dfrac{\ln x}{x}$,证明：$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}[\ln x-(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})]$

11．设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0 \quad , x=0 \end{cases}$ ，证明：$f^{(n)}(0)=0$.

12．设 $y=e^x\sin x$，求 $y^{(n)}$.

13.设 $f(x)=x^n\ln x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}$。

14．求 $\sum\limits_{k=1}^{n}k\sin kx$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos kx$.

15(第 1 届决赛试题).是否存在一个在 R 上可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$？若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明.

答案或提示

1.（1）$\sqrt{2}$　（2）$y=2(x-1)$　（3）0，0

2.（1）$\dfrac{x^2-2xy+y^2}{(2x-y)^3}$　（2）$\dfrac{(1+t^2)(3+t^2)}{8t^5}$

3． 3，$\dfrac{15}{2}$

4． $g'(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$。

5.（1）$y'=(\dfrac{x}{1+x})^x[\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}]$，

（2）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$,，则 $f^{(n)}(x)=$________.

由 $f(x)=-1+\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}]$，得 $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{2}[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}]$

(3)当 n 为偶数时，$f(x)=\dfrac{1-[1-(x^2)^{\frac{n}{2}}]}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}]-(1+x^2+\cdots+x^{n-2})$ ，

$f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{2}[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}]$；

当 n 为奇数时，$f(x)=\dfrac{x-x(1-(x^2)^{\frac{n-1}{2}})}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}]-x(1+x^2+\cdots+x^{n-3})$ ，

$f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{2}[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}]$。

6． $f(x)=\ln(3-2x)+\ln(1+3x)$，$f^{(n)}(x)=-\dfrac{2^n(n-1)!}{(3-2x)^n}+\dfrac{3^3(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+3x)^n}$

7.设 $f(x)=(1+\sqrt{x})^{2n+2}+(1-\sqrt{x})^{2n+2}$,则 $f(x)=2[1+C_{2n+2}^{2}x+\cdots+C_{2n+2}^{2n}x^{n}+C_{2n+2}^{2n+2}x^{n+1}]$,

$f^{(n)}(x)=2[C_{2n+2}^{2n}n!+C_{2n+2}^{2n+2}(n+1)!x]$, $f^{(n)}(1)=2[C_{2n+2}^{2n}n!+C_{2n+2}^{2n+2}(n+1)!]=4(n+1)^{2}n!$,

又 $g(x)=(1-\sqrt{x})^{2n+2}=(1-x)^{2n+2}\cdot(\frac{1}{1+\sqrt{x}})^{2n+2}$,

并注意到 $[(1-x)^{2n+2}]^{(k)}|_{x=1}=0,k=0,1,\cdots,n$ ，由莱布尼兹公式可得 $g^{(n)}(1)=0$ ，所以 $y^{(n)}(1)=4(n+1)^{2}n!$。

（也可利用泰勒展开：$g(x)=(1-x)^{2n+2}\cdot(\frac{1}{1+\sqrt{x}})^{2n+2}=((1-x)^{2n+2}(a_0+a_1(x-1)+\cdots)$ 得 $g^{(n)}(1)=0$ ）

8．方法一（用莱布尼兹公式）：$f(x)=\frac{d^{n}}{dx^{n}}(1-x^{m})^{n}=[(1-x)^{n}(1+x+\cdots+x^{m-1})^{n}]^{(n)}$，

注意到 $[(1-x)^{n}]^{(k)}|_{x=1}=0,k=0,1,\cdots,n-1$，及 $[(1-x)^{n}]^{(n)}|_{x=1}=(-1)^{n}n!$，由莱布尼兹公式可得 $f(1)=(-1)^{n}n!m^{n}$ 。

方法二（用泰勒公式）：

$$g(x)=(1-x^{m})^{n}=(1-x)^{n}(1+x+\cdots+x^{m-1})^{n}$$

$$=(-1)^{n}(x-1)^{n}[m^{n}+a_1(x-1)+\cdots]$$

$$=(-1)^{n}m^{n}(x-1)^{n}+a_1(-1)^{n}(x-1)^{n+1}+\cdots$$

所以 $g^{(n)}(1)=(-1)^{n}n!m^{n}$ 。

9．（ 用归纳法证明）$n=1$ 时， $y=e^{\frac{1}{x}}$，那么 $y'=-\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}$，结论成立，

设 $y=x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ 时， $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n}}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$，那么

$y=x^{n}e^{\frac{1}{x}}$ 时，

$$y^{(n+1)}=(x\cdot x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)}=x(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)}+(n+1)(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}$$

$$=x[\frac{(-1)^{n}}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}]'+n\frac{(-1)^{n}}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=x[\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}-\frac{(-1)^{n}}{x^{n+3}}e^{\frac{1}{x}}]+\frac{(-1)^{n}(n+1)}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}。$$

10．（用归纳法证明）$n=1$时，$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{-1}{x^2}(\ln x-1)$，结论成立，

设 $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}[\ln x-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})]$，那么

$$y^{(n+1)}=\frac{-(-1)^n n!(n+1)}{x^{n+2}}[\ln x-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})]+\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}[\ln x-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})]。$$

11．（用归纳法）（首先用归纳法证明：当$x\neq 0$时，$f^{(n)}(x)=p_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$，其中$p_{3n}(x)$为某个$3n$阶多项式。）

$n=1$时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=p_3(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$

设 $f^{(n)}(x)=p_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$，则

$$f^{(n+1)}(x)=p_{3n+3}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}},$$

由归纳法知当$x\neq 0$时，$f^{(n)}(x)=p_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$，其中$p_{3n}(x)$为某个$3n$阶多项式。

（再用归纳法证结论）

$n=1$时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$，结论成立，

设 $f^{(n)}(0)=0$，则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}p_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

由归纳法知 $f^{(n)}(0)=0$。

12． 先求y',y''等，通过观察得结果$y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4})$，再用归纳法证明结论．如利用复

数 $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$，则更方便。

13.方法一：由莱布尼兹公式，

$$f^{(n)}(x)=n!\ln x+C_n^1\cdot(n-1)!-C_n^2 n(n-1)\cdots 3+C_n^3 n(n-1)\cdots 4\cdot 2\cdot 1+\cdots(-1)^{n-1}C_n^n(n-1)!$$

从而

$$\frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}=-\ln n+C_n^1-\frac{C_n^2}{2}+\frac{C_n^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}C_n^n}{n},$$

利用等式 $C_n^1-\dfrac{C_n^2}{2}+\dfrac{C_n^3}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}C_n^n}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$（该等式的证明见第三章第二节的练习题 21），得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}=\gamma$$，其中 γ 为欧拉常数。

方法二：先用归纳法证明：$f^{(n)}(x)=n!(\ln x+1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})$（证明方法仿练习题 10），再得结果。

14．先求 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$，$\sum_{k=1}^{n}\cos kx$，可用欧拉公式 $e^{ikx}=\cos kx+i\sin kx$，先求 $\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}$，再取实部和虚部便可得 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$，$\sum_{k=1}^{n}\cos kx$．然后求导可得结果.

15.不存在这样的函数.下面用反证法给出证明.

设在 R 上可微的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$，那么

$$f(f(x))-x=(1-x)(x^4+x^2+1),$$

可见 $x=1$ 是方程 $f(f(x))=x$ 的唯一根。又 $x=1$ 是方程 $f(f(f(x)))=f(x)$ 的根，由方程 $f(f(x))=x$ 根的唯一性知，$f(1)=1$.从而

$$\frac{df(f(x))}{dx}\Big|_{x=1}=f'(f(1))f'(1)=(f'(1))^2\geqslant 0,$$

又

$$\frac{df(f(x))}{dx}\Big|_{x=1}=(2x+4x^3-3x^2-5x^4)\Big|_{x=1}=-2,$$

这就导出矛盾.所以不存在这样的函数.