2024年03月05日 星期二6-8

2024年3月4日 14:22

1. 比值法/根值法 正项级数

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad 或 \quad \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$$

① $\rho<1$，收敛

② $\rho>1$，发散

2. 等价无穷小 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 同敛散

泰勒公式、

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$ __收敛于_______.

解：①法、根值法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$$

发散 ~~收敛~~ 不存在.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$$

②法：比较法 $\frac{2+(-1)^n}{3^n}\le 3\cdot\frac{1}{3^n}$

"小"收敛 $\Leftarrow$ "大"收敛

③法：性质2.

$$\frac{2+(-1)^n}{3^n}=2\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}.$$

收 $\Leftarrow$ 收 + 收

例. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$ 的敛散性. $(a>0)$

解: $$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{a}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+1)}\cdot\frac{a^{n+1}}{(n+1)^{\cancel{n+1}}}}{\frac{a^n}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} a\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n. \quad 1^\infty\text{型}.$$

$$=a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e}.$$

当 $\rho<1$ 时 即 $a<e$, 收敛

当 $\rho>1$ 时 即 $a>e$, 发散

当 $a=e$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$ ___发散___.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1.$$

数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调递增.

$$u_{n+1}>u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=e\neq 0.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n\geq u_1\neq 0.$$

综上: $a>e$ 收敛; $a\leq e$ 发散

★ 定理: (积分法). $f(x)\geq 0$. 且单减.

$u_n = f(n)$. $(n=1,2,\cdots)$.

$\{u_n\}$ 单减

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^{a} f(x)\,dx$

☆ 例 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln^p n}$ $\begin{cases} p>1, \text{收敛} \\ p\le 1, \text{发散} \end{cases}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ $\begin{cases} p>1. \text{收敛} \\ p\le 1 \text{ 发散} \end{cases}$

解: $\left\{\frac{1}{n\cdot\ln^p n}\right\}$ 单减.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^p n}$ 与 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^p x}\,dx$ 同敛散.

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_2^{a}\frac{1}{x\ln^p x}\,dx.$$

$$\int_2^{a}\frac{1}{x\ln^p x}\,dx = \int_2^{a}\frac{1}{\ln^p x}\,d(\ln x).$$

$$=\begin{cases} \ln|\ln x|\Big|_2^{a}, & p=1. \\ \frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_2^{a}, & p\ne 1 \end{cases}$$

当 $p=1$. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\left[\ln|\ln a| - \ln|\ln 2|\right] = +\infty$

当 $p=1$. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{a\to+\infty}[\ln|\ln a| - \ln|\ln 2|]$

发散.

当 $p\neq1$ 时 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x}dx = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{-p+1}[(\ln a)^{-p+1} - (\ln 2)^{-p+1}]$

$+\infty$

$\frac{1}{(\ln a)^{p-1}} \to 0 \ (a\to+\infty)$ 当 $p-1>0$ 时.

$(\ln a)^{1-p} \to +\infty \ (a\to+\infty)$ $p-1<0$ 时

综上. 当 $p>1$ 时. 收敛; $p\leq1$ 时. 发散.

例. $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln n}$ 发散.

解: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln n}$ 发散.

$\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln n} \sim \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln n}$. $(n\to\infty)$

$\{\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln n}\}$ 单减.

原级数与 $\int_2^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx$ 同敛散

例. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$ ______.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

解: $\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛

$\sum^{\infty} \frac{\ln n}{\cdot}$ 发散

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 发散

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}$ 收敛.

$$\underbrace{\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

"小"收敛 ⟸ "大"收敛

二. 交错级数的判别.

定义: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$. $(u_n \geq 0)$

称为交错级数.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. 发散

★定理. (莱布尼兹法) 只能判断收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ $(u_n \geq 0)$

满足 ①. $\{u_n\}$ 单减.

②. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

则 级数收敛 且 和 $S \le u_1$.

证明:

$$u_1 - (u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \cdots) \le u_1$$

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \cdots \le u_1$$

$$u_1-\underbrace{(u_2-u_3)}_{\geq 0}-\underbrace{(u_4-u_5)}_{\geq 0}-\underbrace{(u_6-u_7)}_{\geq 0}-\cdots\cdots \leq u_1$$

$$S_n=u_1-\underbrace{(u_2-u_3)}_{\geq 0}-\underbrace{(u_4-u_5)}_{\geq 0}-\cdots-\begin{cases}\underbrace{(u_{n-1}-u_n)}_{\geq 0}.\\ \underbrace{(u_{n-2}-u_{n-1})}_{\geq 0}-\underbrace{u_n}_{\geq 0}.\end{cases}$$

$$S_n \leq u_1$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n \leq u_1$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 收敛

$\Leftrightarrow$ $\{S_{2n}\}$ 和 $\{S_{2n+1}\}$ 收敛于 S.

☆ $S_{2n}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}$.

$=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}\leq u_1$

$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1}$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(\underline{\underline{S_{2n}}}+u_{2n+1})$

$=S+0=S$.

$S_2=(u_1-u_2)$

$S_4=(u_1-u_2)+\underbrace{(u_3-u_4)}_{\geq 0}$

$S_6=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\underbrace{(u_5-u_6.)}_{\geq 0.}$

$\{S_{2n}\}$ 单增且有上界 u_1 $\Rightarrow$ $\{S_{2n}\}$ 收敛

例. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ __收敛__.

$\{\frac{1}{n^p}\}$ 递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$.

★ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 当 $p>0$ 时，收敛.

例. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ 收敛.

$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $u_2=1$

$u_3=\frac{1}{2}$ $u_4=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

解: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

$\frac{1}{\sqrt{2}}<1>\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}>\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}}{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}}=1.$$

不是正项级数.

未? 原与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 同收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 同发散.

$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}\right\}$ 不是单减 不满足莱布尼茨条件 未? 发散

$$\underbrace{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}}_{a_n}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}}}$$

$(1+x)^{\alpha}$.

$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$

$$=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\underbrace{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{收 } b_n}+\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(-1)}{n^{\frac{3}{2}}}}_{\text{收.}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

$\triangle$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=0$$

$$a_n=b_n+\frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

$a_n = b_n + \frac{1}{2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdots \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdots$

$\exists N$，当$n>N$时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - b_n)}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{2}.$$

(a_n-b_n)正项.

$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$正项.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 同收敛 （比较法极限形式）.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.（莱布尼兹法.）

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.（性质2）.

三、绝对收敛与条件收敛.

定义：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

例. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} \longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$绝对收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} \longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$条件收敛

★ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$，$p>0$，收敛. $p>1$，绝对收敛

$0<p\le 1$ 条件收敛

定理：（柯西收敛原理）. 一般项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_{2n}\}$ 和 $\{S_{2n+1}\}$ 收敛于S

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n, \overset{n+p}{\overset{\shortparallel}{m}} > N$ 时，有

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \text{ 恒成立。}$$

$$|u_1 + u_2 + \cdots + u_n - u_1 - u_2 - \cdots - u_n - u_{n+1} - \cdots - u_{n+p}|$$

$$= \underbrace{|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon}. \quad (\forall p \in \mathbb{N})$$

$$\boxed{\star \text{ 定理. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛.}}$$

$$\Updownarrow$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow$

证明. 去证 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$$\Leftrightarrow \quad |u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon \ ?$$

$$\Uparrow$$

已知. $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛} \\ \Leftrightarrow \quad \big|\, |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| \,\big| < \varepsilon. \checkmark \end{cases}$

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

★ 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

$$a = \lim_{n\to\infty} u_n \xrightarrow{a \ne 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散.}$$

$a=\lim\limits_{n\to\infty}u_n \longrightarrow \sum\limits_{n=1}$ ...

$\big\downarrow a=0.$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$. 正项 $\xrightarrow{\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| 收敛}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

↓ 发散

由比值/根值 ↙ 　　　↘ 其它发散

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

定义. 本质. 交错. 性质

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 ↙ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛 　　↘ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1.\Rightarrow\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0.$$

例 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^p}$ 的敛散性

解: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r^n}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|r|^n}{n^p}$. 正项级数

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1.$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|r|^n}{n^p}}=\frac{|r|}{1}=|r|.$$

当 $l<1$ 时 即 $|r|<1$ 时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|r|^n}{n^p}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^p}$ 绝对收敛

当 $l>1$ 时 即 $|r|>1$ 时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|r|^n}{n^p}$ 发散, $\xRightarrow{由根值法}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^p}$ 发散

当 $r=1$ 时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. 　$p>1$. 绝对收敛

$p\leq 1$. 发散

当 $r=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^p}$. $p>1$ 时 绝对收敛

$0<p\le 1$ 时. 条件收敛.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|+|v_n|$) <u>发散</u>.

解: $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散于 $+\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ 发散于 $+\infty$,

$|u_n|+|v_n| \geq |u_n|$

"大"发散 $\Leftarrow$ "小"发散

构造.

$$u_n^+ = \frac{|u_n|+u_n}{2} \geq 0$$

$$u_n^- = \frac{|u_n|-u_n}{2} \geq 0.$$

定理,

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 绝对收敛.

条件收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 发散

定理, 绝对收敛的级数满足加法交换律.

收敛的级数满足加法结合律.

定理: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ 柯西乘积也绝对收敛.

$(a+b)(c+d)=ac+bd+ad+bc.$

$$(u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots)(v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots)$$

$$=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\cdots$$