

## 第二章 光的衍射

§ 1 惠更斯—菲涅耳原理

§ 2 单缝的夫琅禾费衍射

§ 3 光学仪器的分辨本领

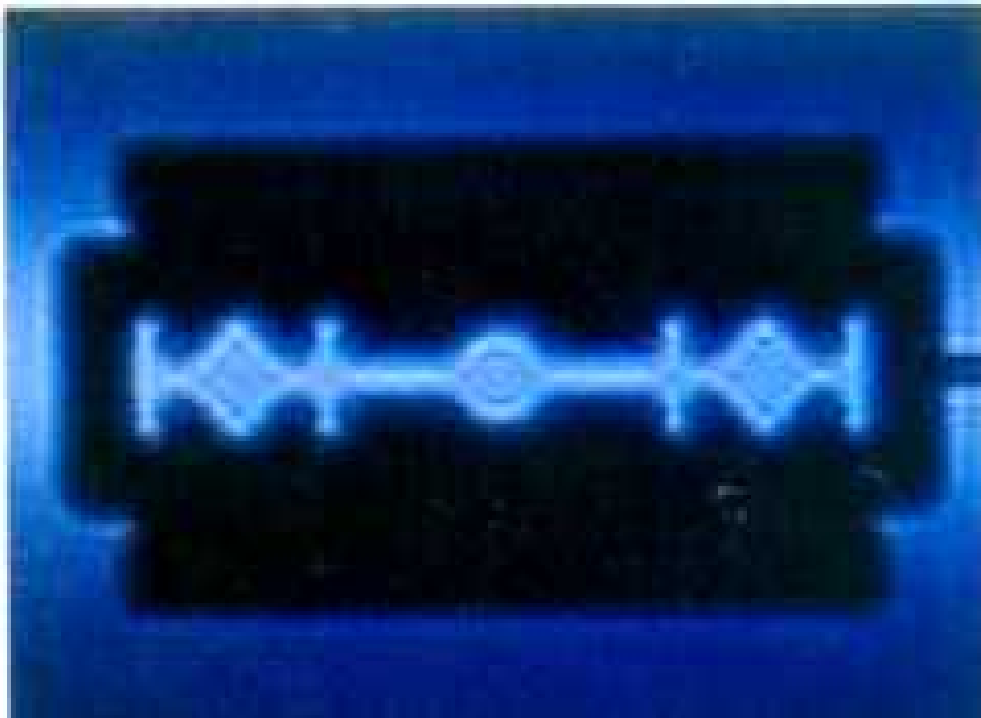
§ 4 光栅衍射

§ 5 X 射线衍射

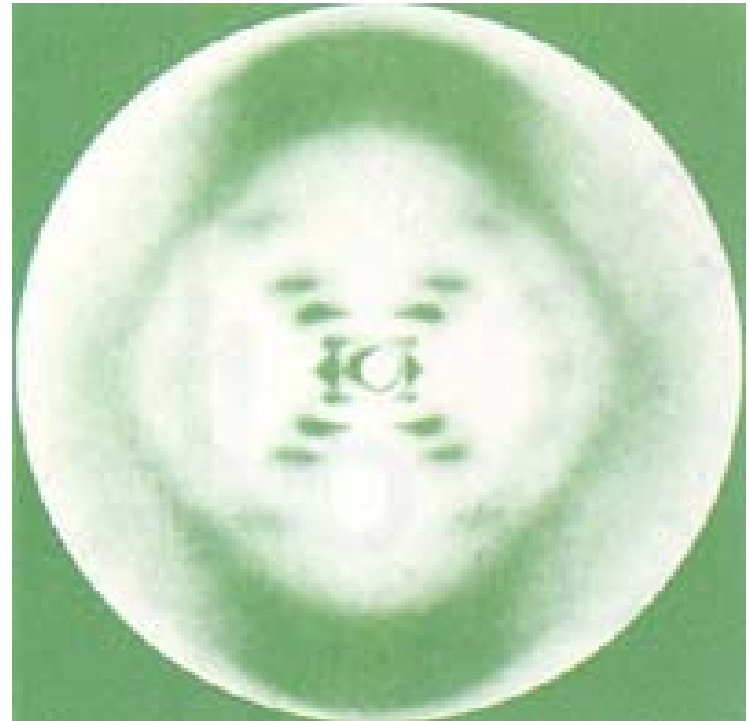
## § 1 惠更斯—菲涅耳原理

### 1.1 光的衍射现象

光在传播过程中绕过障碍物而偏离直线传播的现象

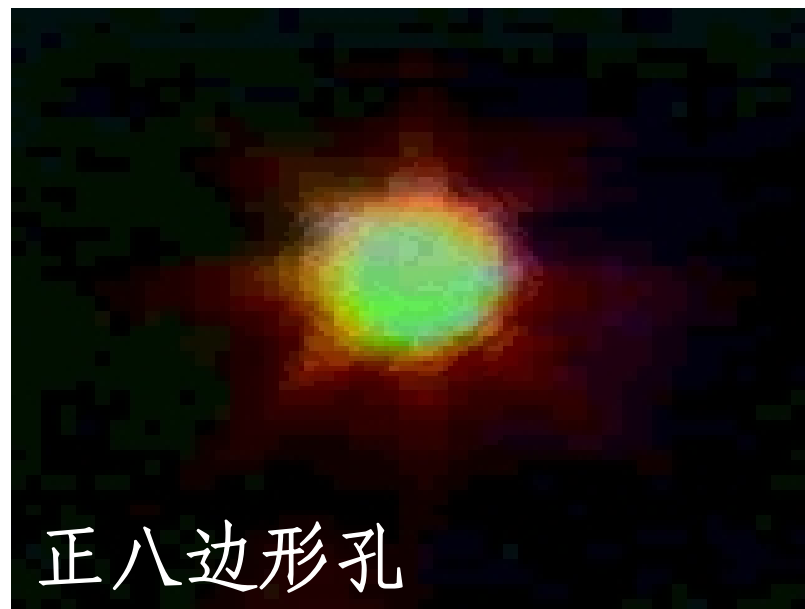
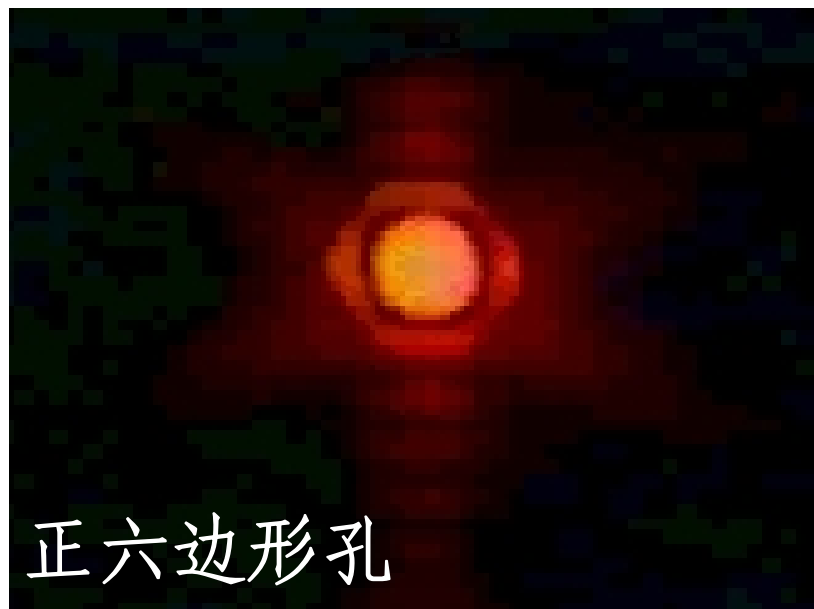
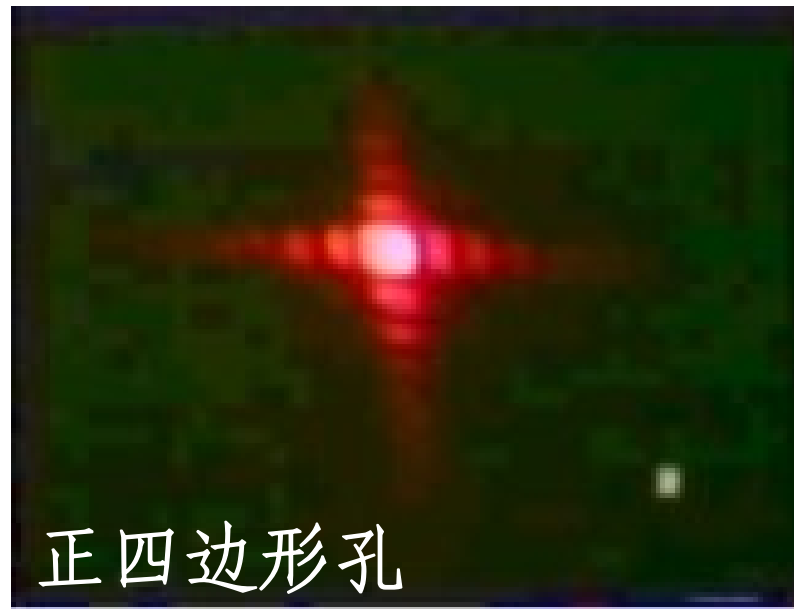


刀片边缘的衍射



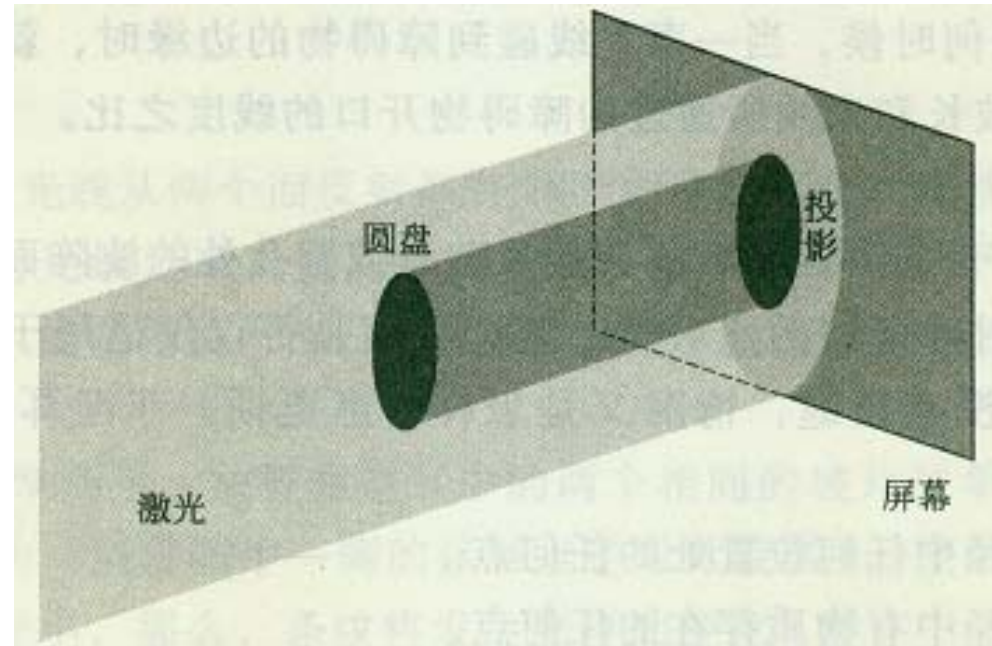
DNA的X射线衍射

## ★各种孔径的衍射图样



## 选择题： #S5201.

如图，一个圆盘放置在单色光的光路中，如果圆盘的边缘发生明显的衍射，则圆盘在屏幕上的投影中心



- (1) 是一个亮点；
- (2) 比影子其他部分更暗；
- (3) 是亮还是暗取决于圆盘和屏幕之间的距离；
- (4) 和阴影的其他地方一样暗，但如果没有衍射，则暗淡的程度较轻。

## 判断题： #T5201.

用肉眼观察远处的灯，有时会看到它周围光芒四射，这是眼瞳的衍射效果。由于光芒分布在各个不同的角方位上，表明瞳孔是一个多边形，而不是圆形。

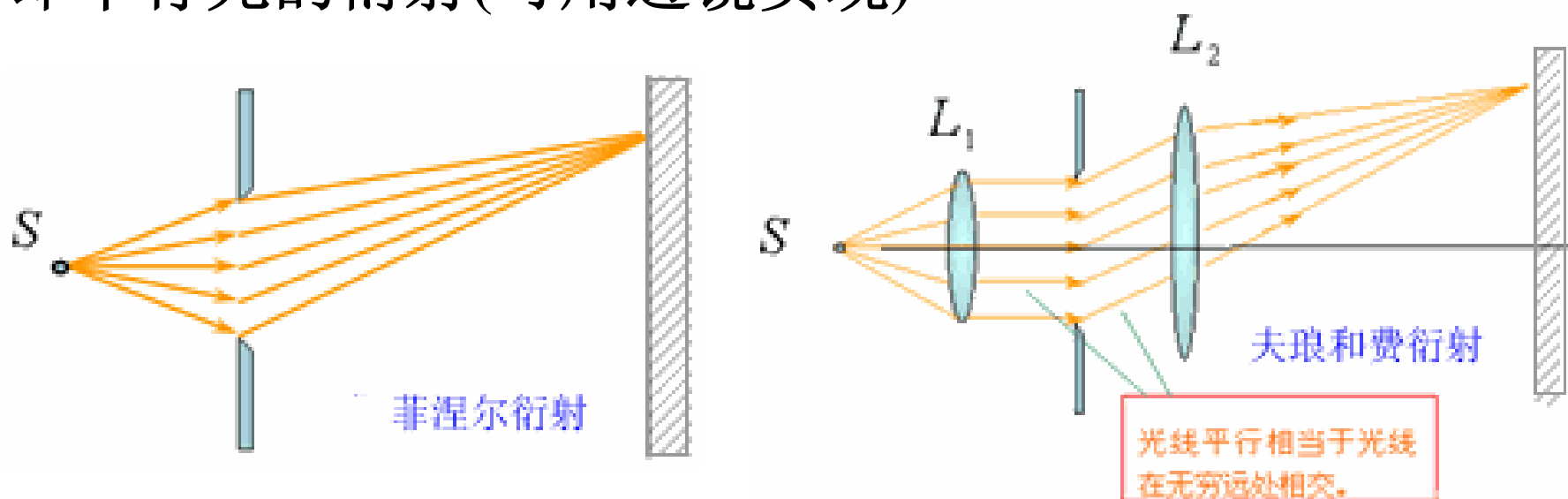
## 1.2 衍射的分类

### (1) 菲涅耳衍射 — 近场衍射

光源和观察屏(或二者之一)与障碍物相距有限远时  
衍射图样随观察屏到障碍物的距离而变, 情况较复杂

### (2) 夫琅禾费衍射 — 远场衍射

光源和观察屏都离障碍物无限远时  
即平行光的衍射(可用透镜实现)



## 菲涅耳 (Fresnel)

法国物理学家，  
“物理光学的缔造者”

- 推出了反射定律和折射定律
- 惠更斯—菲涅耳原理
- 确定了光是横波(1821)
- 发现光的圆偏振和椭圆偏振现象(1823)



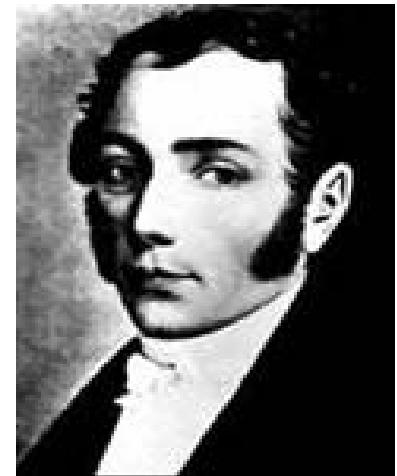
1788~1827

---

## 夫琅禾费 (Fraunhofer)

德国物理学家

- 发现太阳光谱中的暗线(夫琅禾费谱线)
- 平行光单缝及多缝衍射(夫琅禾费衍射)
- 给出了衍射光栅的光栅方程



1787~1826

### 1.3 惠更斯—菲涅耳原理

惠更斯原理 + 子波干涉 → 惠更斯—菲涅耳原理

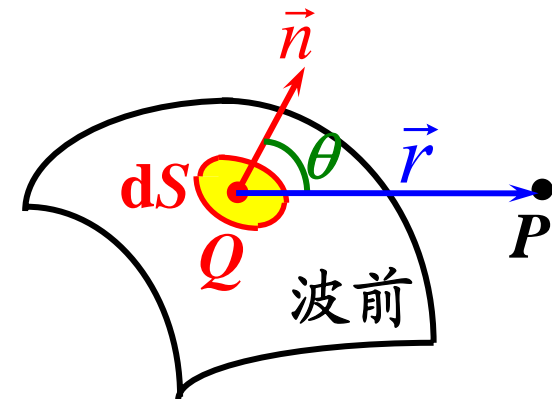
波前上的任何一点都是子波的波源

各子波在空间某点的相干叠加，决定了该点波的强度

设 $Q$ 点处的振动量为 $E(Q)$ ，它在 $P$ 点所引起的振动量为

$$dE(P) = K(\theta) \frac{E(Q)}{r} dS \cos \left[ \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \varphi_0(Q) \right]$$

$$\text{倾斜因子 } K(\theta) \begin{cases} \theta = 0, & K = K_{\max} \\ \theta \uparrow \rightarrow K(\theta) \downarrow \\ \theta \geq 90^\circ, & K = 0 \end{cases}$$



它说明了子波为什么不会向后退

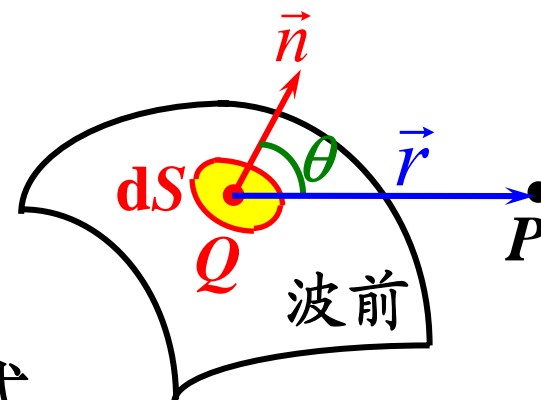
比如：点光源发出的球面波  $K(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$



考虑波前上各点在 $P$ 点引起的振动

$$E(p) = \iint_S \frac{E(Q)K(\theta)}{r} \cos \left[ \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \varphi_0(Q) \right] dS$$

——菲涅耳衍射积分公式



后来，**Kirchhoff**求解电磁波动方程，也得到了同样的 $E(p)$ 表示式，使得惠更斯—菲涅耳原理有了波动理论的根据。

$$E(P) = E_0(P) \cos[\omega t + \varphi(P)] \quad P \text{点处波的强度 } I_p \propto E_0^2(P)$$

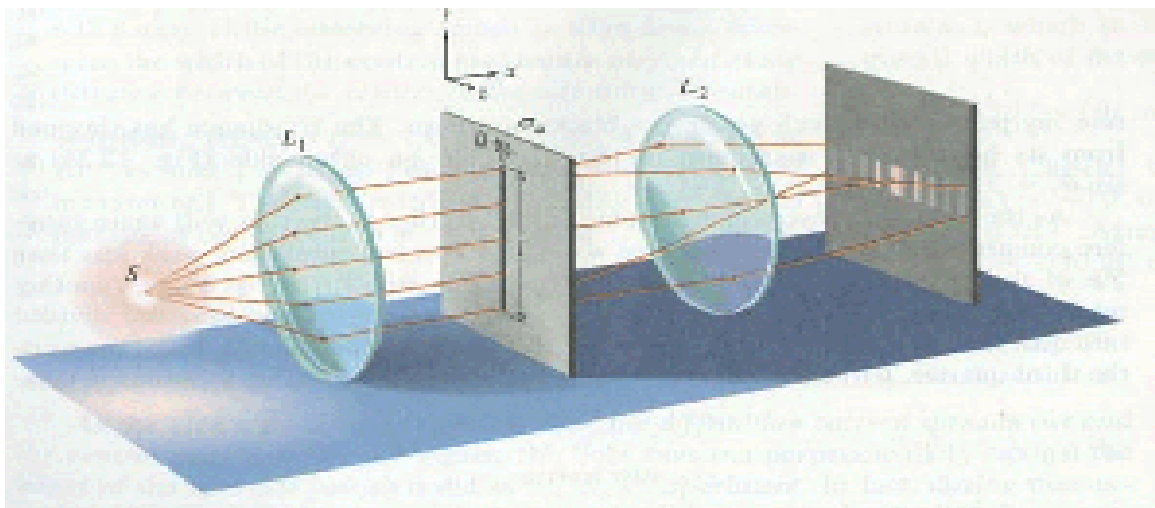
利用菲涅耳衍射积分公式原则上可以计算任意形状的波阵面衍射问题，但很复杂。

菲涅耳提出**半波带法**，在处理一些有对称性的问题时，既方便，物理图象又清晰。

## § 2 单缝的夫琅禾费衍射

### 2.1 半波带法

光源和观察屏分别位于两透镜焦距处  
经过单缝后，可以向各方向发出光线



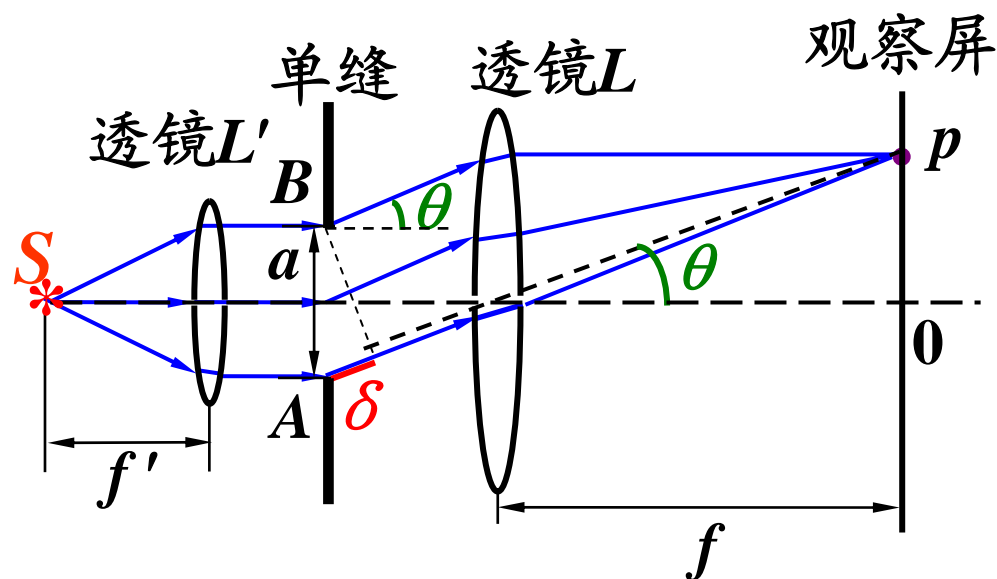
考虑沿 $\theta$ 方向的平行光  
它们会聚到屏上 $P$ 点

$\theta$ : 衍射角

缝宽  $\overline{AB} = a$

$A \rightarrow p$  和  $B \rightarrow p$  的光程差

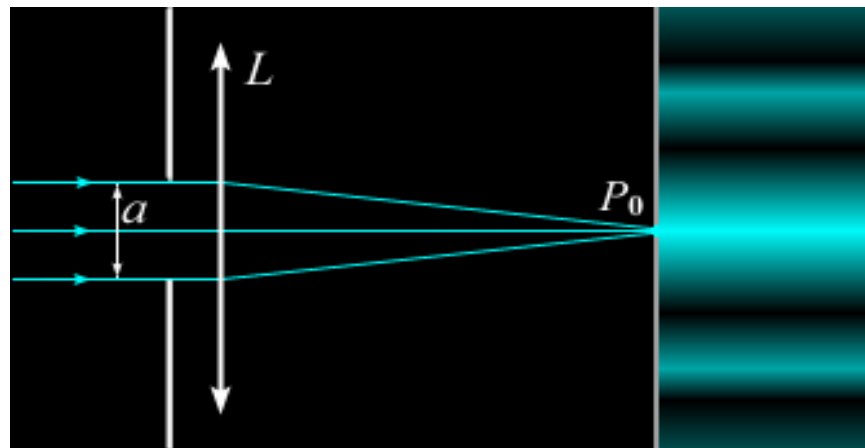
$$\delta = a \sin \theta$$



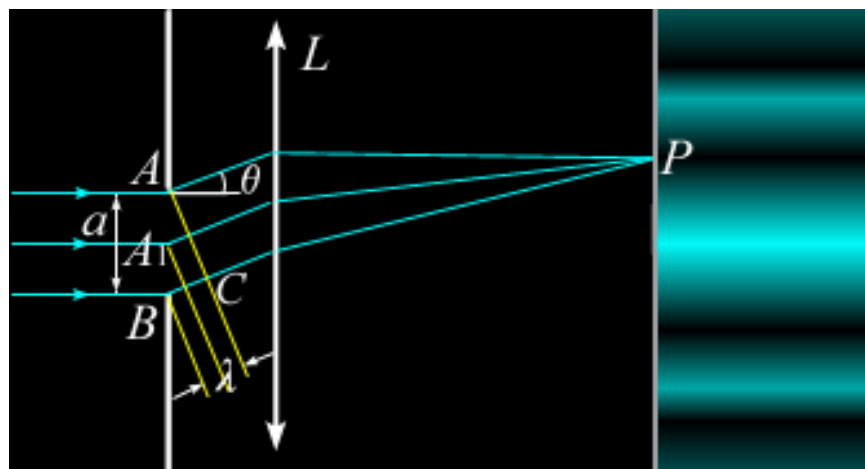
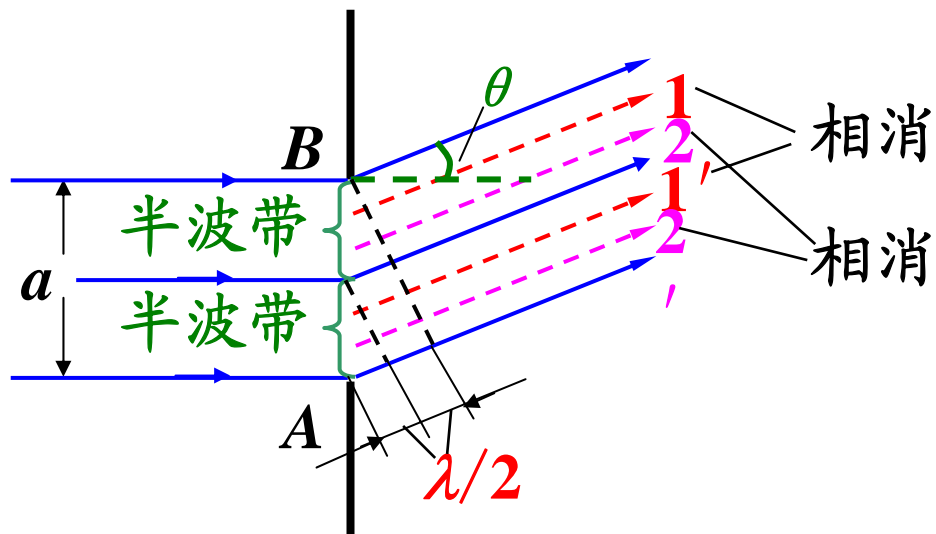
$A \rightarrow p$  和  $B \rightarrow p$  的光程差  $\delta = a \sin \theta$

(1) 当  $\theta = 0$  时

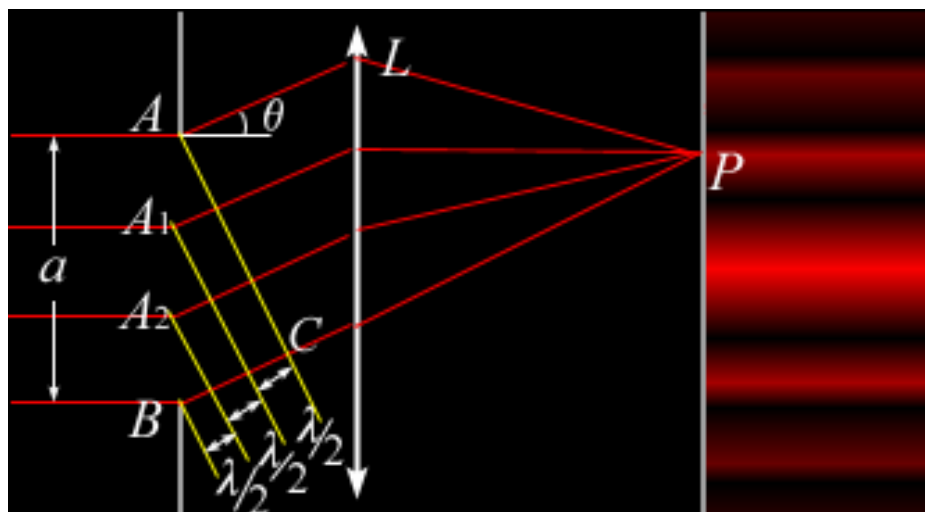
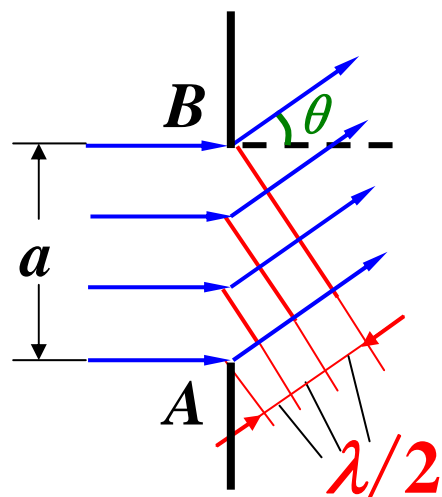
$\delta = 0$ , 从  $A \rightarrow p_0$  和  $B \rightarrow p_0$  等光程  
到达  $p_0$  的各条光线均等光程  
各子波在  $p_0$  处干涉相长,  
——中央明纹中心



(2) 当  $\delta = a \sin \theta = \lambda$  时, 将缝分为2个“半波带”  $\rightarrow$  第1级暗纹



(3) 当 $\delta = a \sin \theta = 3\lambda/2$ 时, 将缝分为3个“半波带”

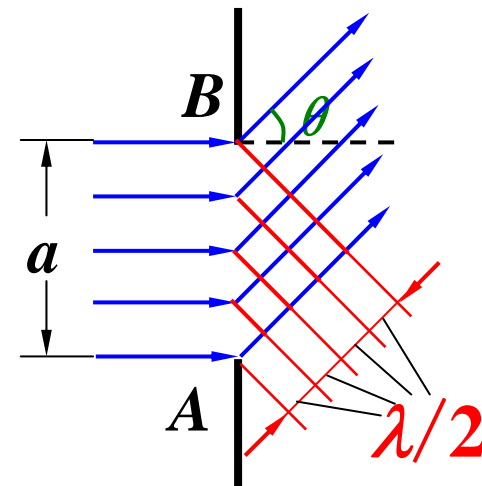


三个半波带中, 相邻的两个半波带的光线干涉相消,  
余下第三个半波带的衍射光未被抵消,  
在屏幕上形成次级明纹

实际上次级明纹中心的位置略微偏向主极大一侧。  
当正好为奇数个半波带时, 屏上的强度并非次极大。

∴到达屏幕的各条光线的光强随衍射角  $\theta$  增大而减小

(4) 当 $\delta = a \sin \theta = 2\lambda$ 时,  
将缝分为4个“半波带”  
两相邻半波带的衍射光干涉相消  
屏上形成第2级暗纹



$$\delta = a \sin \theta = 0$$

—— 中央明纹(中心)

$$\delta = a \sin \theta = \pm k \lambda, \quad k = 1, 2, 3 \cdots$$

—— 暗纹

$$\delta = a \sin \theta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3 \cdots$$

—— 次级明纹

上述暗纹和中央明纹中心的位置是准确的

次级明纹中心的位置略微偏向中央明纹一侧

**选择题： #S5202.**

波长为 $\lambda$ 的单色平行光垂直入射到单缝上，对应于衍射角为 $30^\circ$ 的方向上，若单缝处波阵面可分为3个半波带，则狭缝宽度 $a$ 等于

- (1)  $\lambda$       (2)  $1.5\lambda$       (3)  $2\lambda$       (4)  $3\lambda$

## 2.2 用旋转矢量法推导光强公式

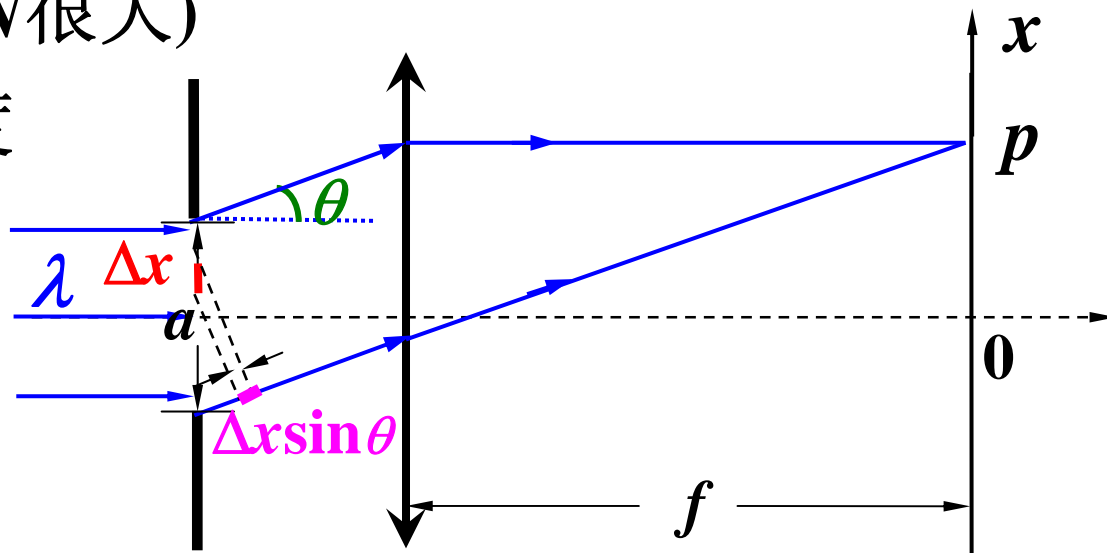
将缝等分成 $N$ 个窄带( $N$ 很大)

每个窄带(子波)的宽度

$$\Delta x = \frac{a}{N}$$

相邻窄带间的光程差

$$\delta = \Delta x \sin \theta$$



相邻窄带到 $p$ 点的相位差  $\Delta\varphi = \Delta x \sin \theta \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{a \cdot \sin \theta}{N} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$

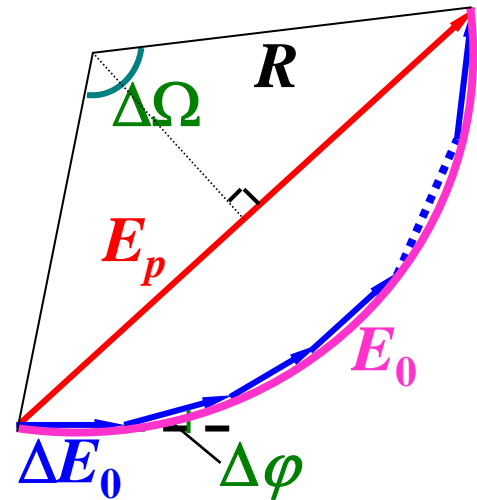
各窄带宽度相同，在 $p$ 点引起的振幅相等，设为 $\Delta E_0$

$p$ 点处是 $N$ 个同方向、同频率、同振幅、相位依次相差 $\Delta\varphi$ 的简谐振动的合成。

各窄带的旋转矢量构成正多边形的一部分

$E_p$  就是  $p$  点处的合振幅  $\rightarrow p$  点处的光强

$$E_p = 2R \sin \frac{\Delta\Omega}{2} = \frac{E_0}{\Delta\Omega/2} \sin \frac{\Delta\Omega}{2} = E_0 \frac{\sin \beta}{\beta}$$



在外接圆中,  $E_p$  对应的圆心角

$$\Delta\Omega = N\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta \Leftarrow \Delta\phi = \frac{a \sin \theta}{N} \frac{2\pi}{\lambda}$$

当  $N \rightarrow \infty$  时,  $N$  个相接的折线  $\rightarrow$  圆弧, 其弧长  $E_0 = N\Delta E_0$

$$\text{外接圆半径 } R = \frac{E_0}{\Delta\Omega} \quad \text{令 } \beta = \frac{\Delta\Omega}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

$$\because I \propto E_p^2, \quad I_0 \propto E_0^2 \quad \text{光强公式: } I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

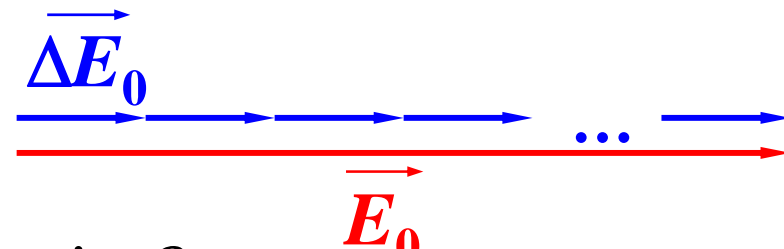


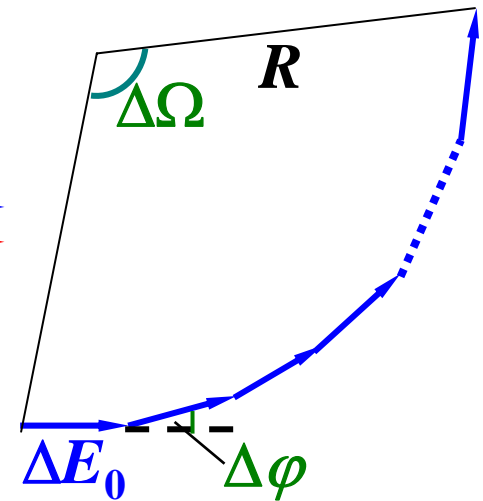
$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \quad \Delta \varphi = \frac{a \sin \theta}{N} \frac{2\pi}{\lambda}$$

## 1. 主极大(中央明纹中心)

$\theta = 0$ 处,  $\Delta \varphi = 0$

$\beta = 0 \rightarrow \frac{\sin \beta}{\beta} = 1 \rightarrow I = I_0 = I_{\max}$





## 2. 极小(暗纹)

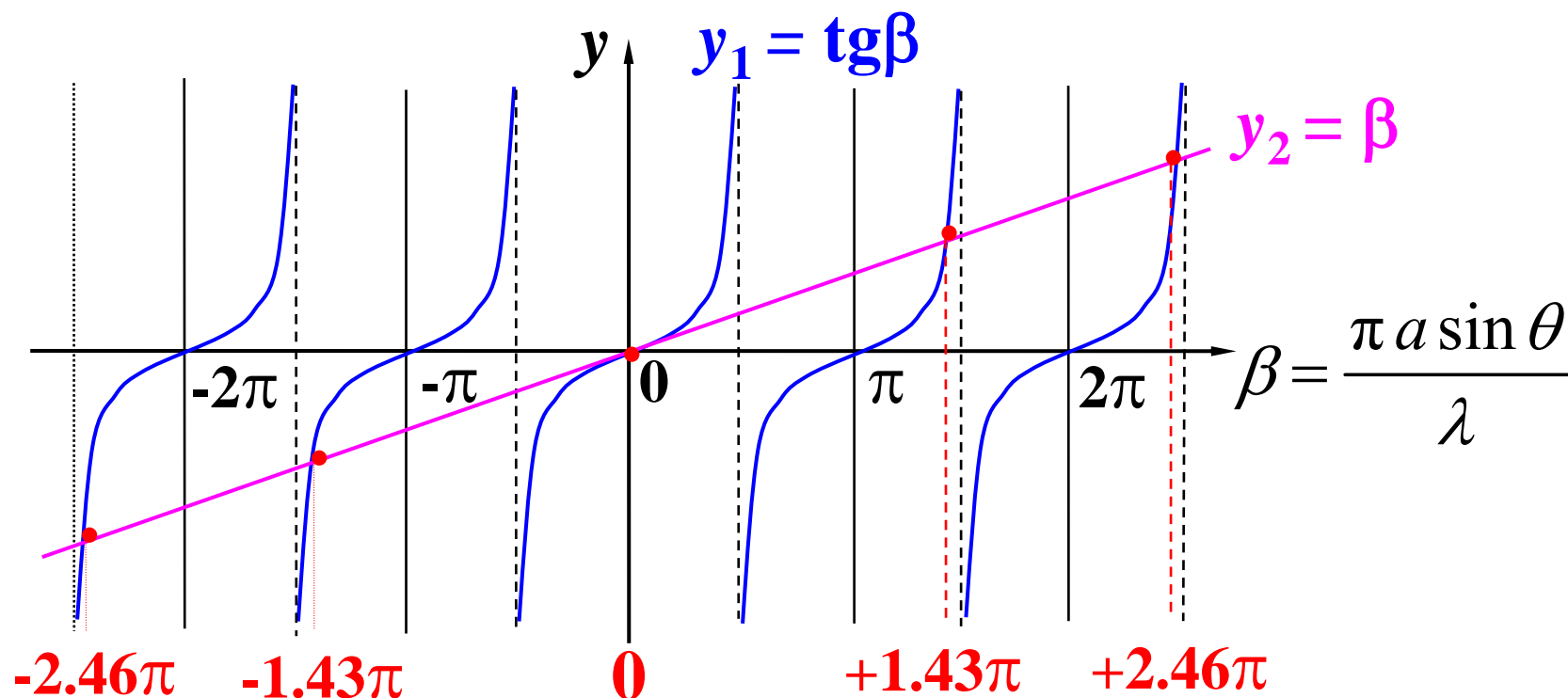
正多边形闭合  $\Delta \Omega = \pm 2k\pi \quad k = 1, 2, \dots \quad \beta = \frac{\Delta \Omega}{2} = \pm k\pi$

$\sin \beta = 0 \rightarrow I = 0 \quad \beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \pm k\pi \Rightarrow a \sin \theta = \pm k\lambda$

这正是缝宽可以分成偶数个半波带的情形

### 3. 次极大(中心)位置

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \frac{dI}{d\beta} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\beta} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \beta = \beta$$

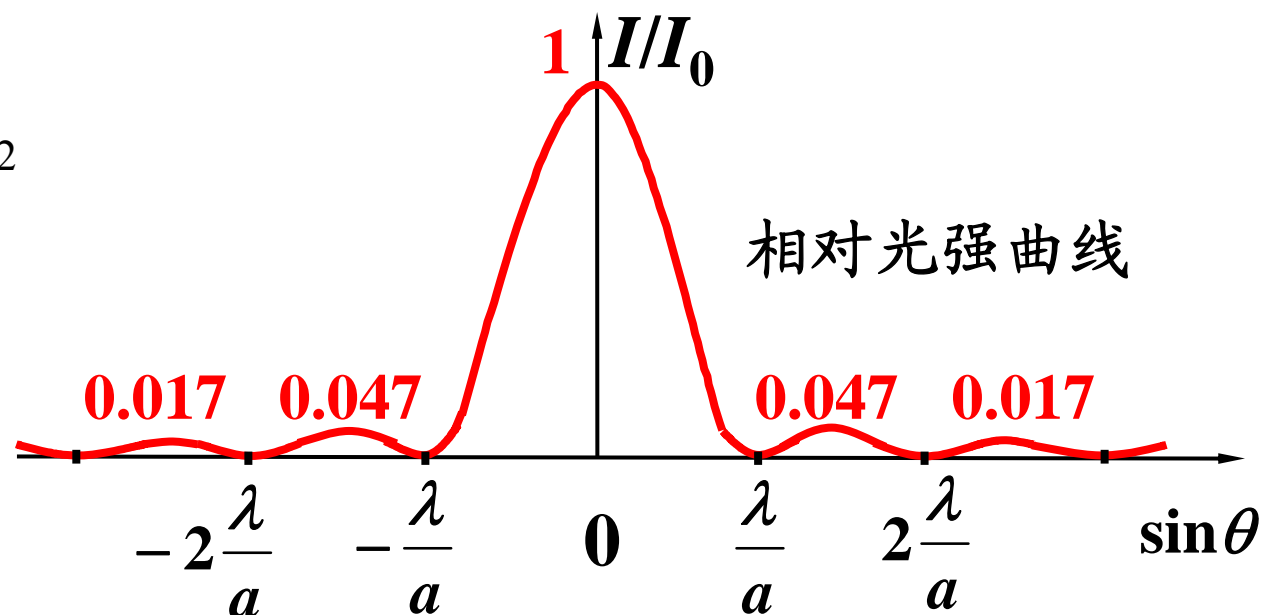


并不严格等于半波长的奇数倍  $\sin \beta$  最大  $\nrightarrow \frac{\sin \beta}{\beta}$  最大

#### 4. 光强曲线

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

$$\beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$



由次极大  $\beta = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \dots$

代入光强公式可得各级次极大光强依次为:

$$0.0472I_0, 0.0165I_0, 0.0083I_0 \dots \quad I_{\text{次极大}} \ll I_{\text{主极大}}$$

衍射的中央明纹集中了80%以上的能量

随着级次的升高, 次极大的光强越来越小

$\therefore \theta$  越大, 缝被分的半波带数越多, 半波带面积越小

## 2.3 衍射条纹宽度及变化

### 1. 中央明纹宽度

第1级暗纹  $a \sin \theta_1 = 1 \cdot \lambda$

半角宽  $\theta_1 \approx \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$

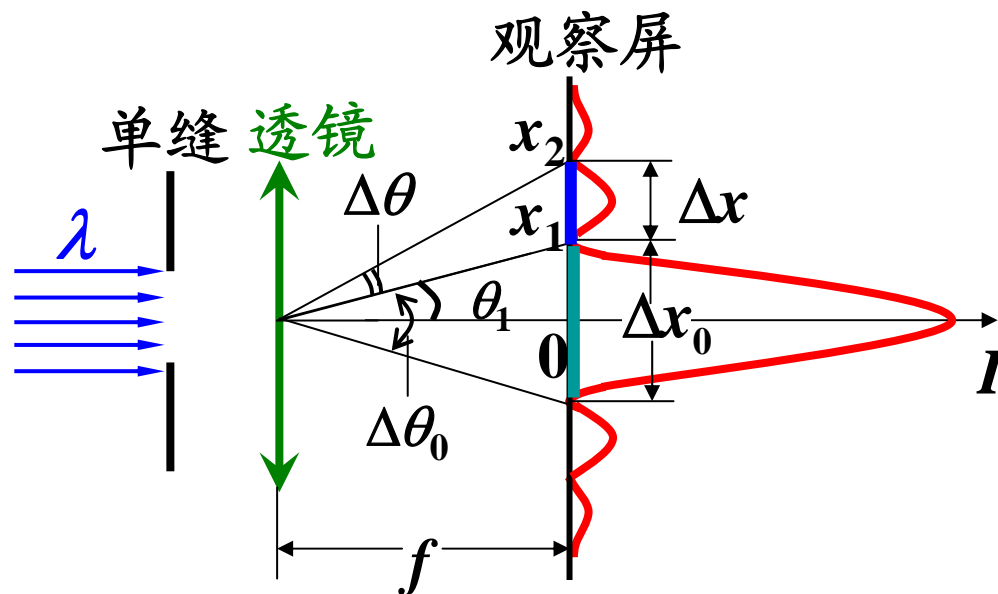
角宽度  $\Delta\theta_0 = 2\theta_1 \approx 2\frac{\lambda}{a}$

线宽度  $\Delta x_0 = 2f \cdot \tan \theta_1 \approx 2f \theta_1 = 2f \frac{\lambda}{a}$

### 2. 次极大宽度

对 $k$ 级暗纹  $x_k = f \cdot \tan \theta_k \approx f \cdot \sin \theta_k = f \frac{k\lambda}{a}$        $a \sin \theta_k = k\lambda$

$\Delta x = x_{k+1} - x_k \approx f \frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2} \Delta x_0$  中央明纹宽度的一半



### 3. 缝宽变化对条纹宽度的影响

$\Delta x_0 = 2f \frac{\lambda}{a} \propto \frac{1}{a}$  缝宽越小，明纹越宽——衍射反比定律

当  $a \downarrow$  至  $\frac{\lambda}{a} \rightarrow 1$  第1级暗纹  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  只有主极大

当  $a \uparrow$  至  $\frac{\lambda}{a} \rightarrow 0$  第  $k$  级暗纹  $\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{a} \Rightarrow \theta_k \rightarrow 0$

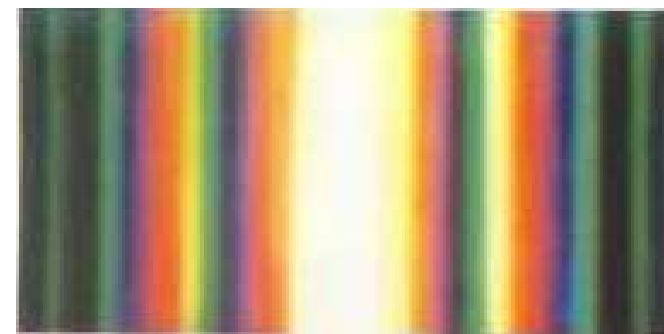
各级明纹向中央靠拢，密集得无法分辨，  
只显出单一的亮纹——单缝的几何光学像。

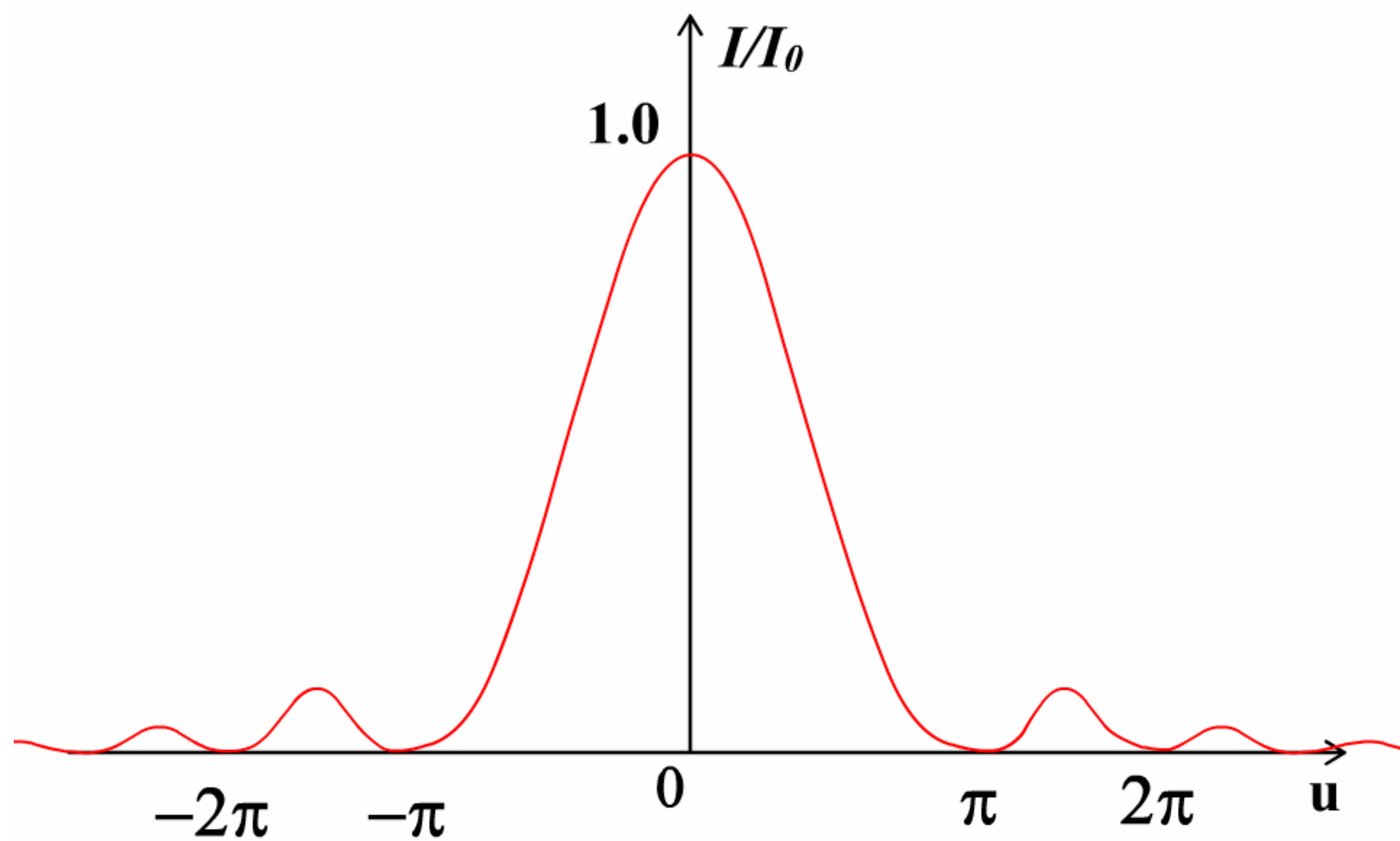


几何光学是波动光学在  $a \gg \lambda$  时的极限情形。

### 4. 波长对条纹宽度的影响

$\Delta x \propto \lambda$  波长越长，明纹宽度越宽  
白光入射时，各级明纹内紫外红





缝宽



**判断题： #T5202.**

在双缝干涉实验中，若以红滤色片遮住一条缝，而以蓝滤色片遮住另一条缝，以白光作为入射光，在屏幕上将不会出现条纹。

**选择题： #S5203.**

波长为 $\lambda$ 的单色光通过一个宽度为 $a$ 的单缝，在屏幕上形成衍射图样，如果波长改为 $2\lambda$ ，要想使衍射图样与原先的位置重合，单缝的宽度要改为：

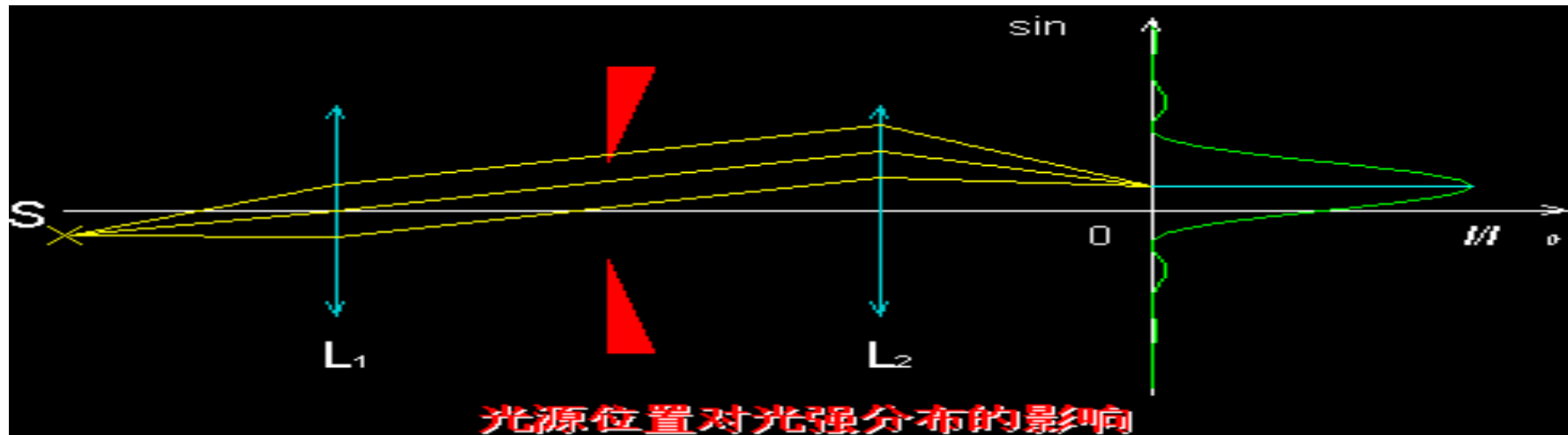
- (1)  $a/4$ ;
- (2)  $a/2$ ;
- (3) 没必要改变，还是 $a$ ;
- (4)  $2a$ ;
- (5)  $4a$ ;
- (6) 无法通过改变缝宽来实现。



**判断题： #T5203.**

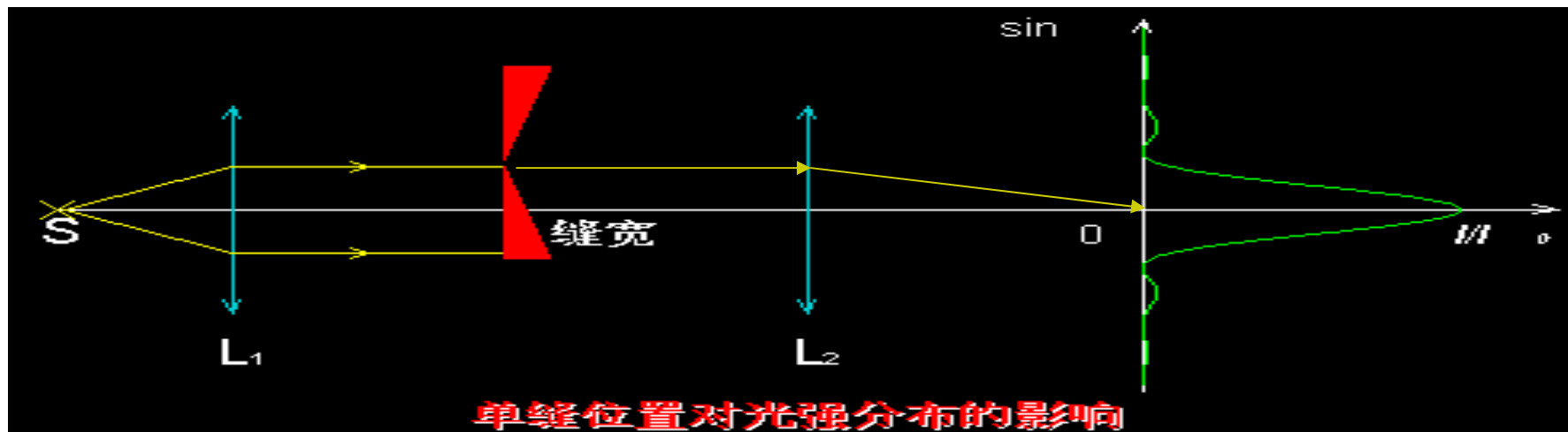
单缝衍射中，若将整个装置浸入水中，缝宽不变，将屏幕右移至新的焦平面上，跟原来相比，屏上的衍射条纹宽度会变窄，各级条纹都往中间挤。

## 5. 改变光源或透镜位置的影响



光源向下移动(或透镜上移)，条纹位置则向上移动

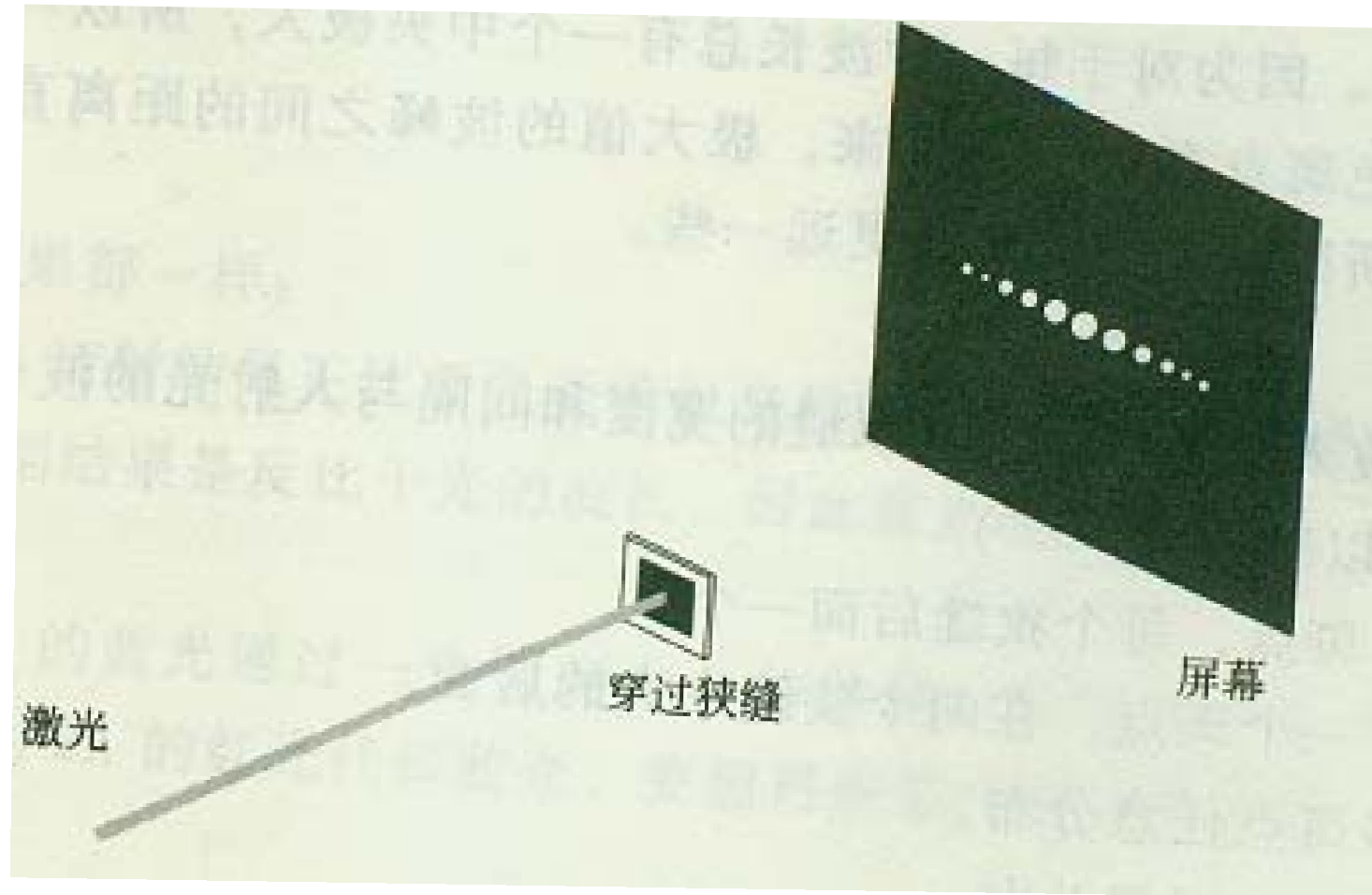
## 6. 改变单缝位置的影响



单缝上下移动，条纹不动，但两侧呈现的条纹数不同

## 判断题： #T5204.

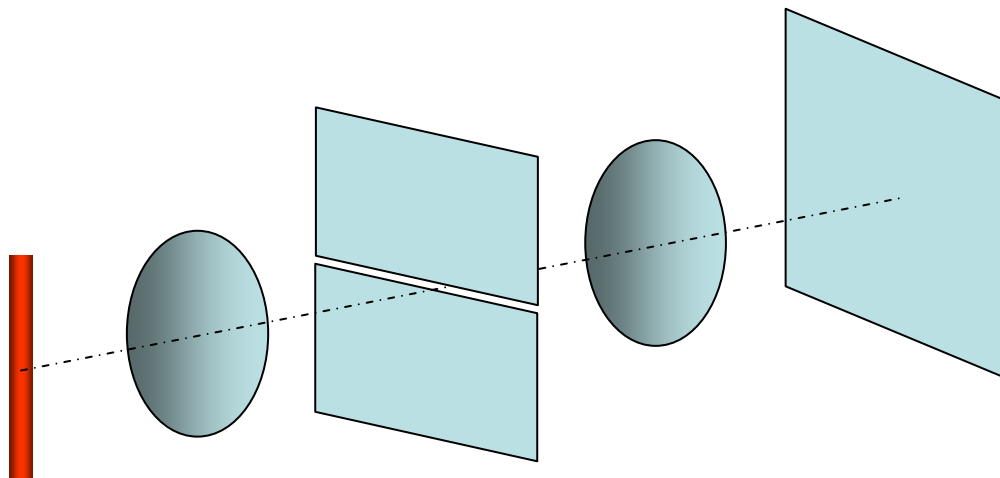
如图，根据屏幕上的图样可以判断狭缝是水平的。



**选择题： #S5204.**

单缝夫琅禾费衍射实验中，若使用线光源，并使线光源与单缝垂直，如图所示，则屏上呈现出的是

- (1) 一个亮斑；
- (2) 与点光源情况类似的衍射条纹；
- (3) 沿缝方向的一条亮纹；
- (4) 垂直于缝方向的一片亮带。



**例：**用单色平行**可见光**垂直照射到缝宽为 $a=0.5\text{mm}$ 的单缝上，缝后放一焦距 $f=1\text{m}$ 的透镜，在焦平面处的观察屏上形成衍射条纹，已知屏上离中央明纹中心为 $1.5\text{mm}$ 处的P点也为**明纹**。**求：**(1)入射光的波长；(2)P点的明纹级次、半波带数、衍射角。

**解：**(1)衍射明纹  $a \sin \theta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$

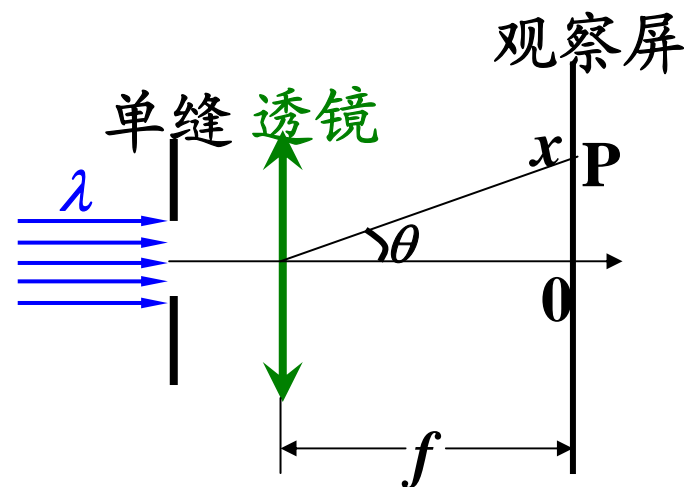
$$\lambda = \frac{2a \sin \theta}{2k+1} \approx \frac{2a \tan \theta}{2k+1}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{f} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{1} = 1.5 \times 10^{-3}$$

当 $k=1$ 时， $\lambda_1=5000\text{\AA}$

当 $k=2$ 时， $\lambda_2=3000\text{\AA}$

可见， $\lambda_1$ 在可见光范围内



(2) P点为第1级明纹， $k=1$

半波带数为： $2k+1=3$

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{3\lambda}{2a} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

**例:** 已知波长为 $\lambda = 30\text{mm}$ 的雷达在距离路边 $d = 15\text{m}$ 处，  
雷达射束与公路成 $15^\circ$ 角，天线宽度 $a = 0.20\text{m}$

**求:** 雷达所能监视的公路长度 $L$

**解:** 将雷达波束看成单缝衍射的中央明纹

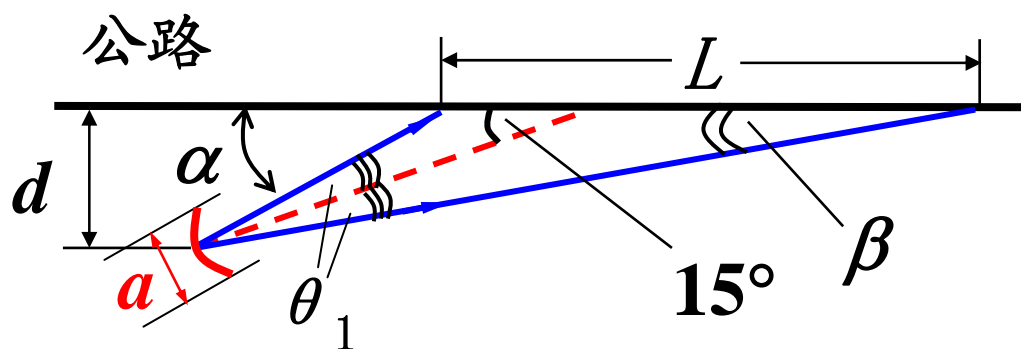
中央明纹的范围可由  
第1级暗纹公式

$$a \cdot \sin \theta_1 = \lambda$$

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{30\text{mm}}{0.2\text{m}} = 0.15 \rightarrow \theta_1 \approx 8.63^\circ$$

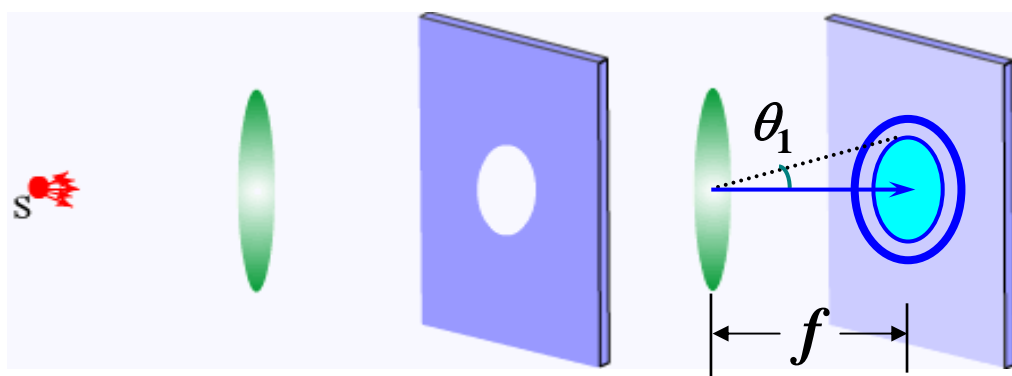
如图  $\alpha = 15^\circ + \theta_1 = 23.63^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ - \theta_1 = 6.37^\circ$

$$L = d(\text{ctg } \beta - \text{ctg } \alpha) = 15(\text{ctg } 6.37^\circ - \text{ctg } 23.63^\circ) \approx 100\text{m}$$



## § 3 光学仪器的分辨本领

### 3.1 圆孔的夫琅禾费衍射



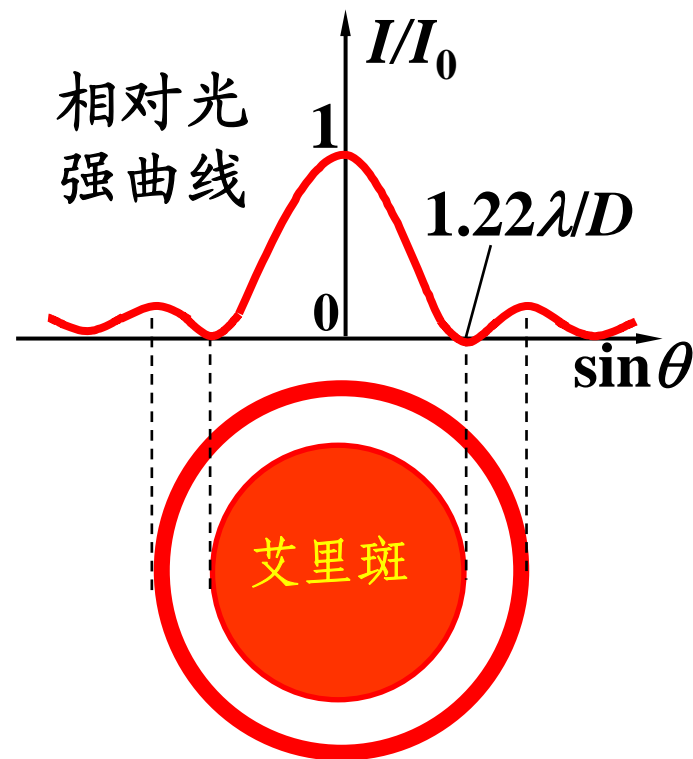
若圆孔直径为 $D$ ，艾里斑半径为 $r$

$$r = \tan \theta_1 f \approx \theta_1 f$$

圆孔衍射的第1级暗环满足

$$D \cdot \sin \theta_1 \approx 1.22 \lambda$$

$$\frac{r}{f} = \theta_1 \approx \sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad \left. \begin{array}{l} \lambda \downarrow \\ D \uparrow \end{array} \right\} \rightarrow \text{艾里斑变小}$$



艾里斑(中央亮斑)集中了约83.5%的衍射光能

## 3.2 透镜的分辨本领

透镜相当于一个透光的小圆孔→圆孔衍射

### 1. 物与像的关系

- 几何光学：

未考虑衍射，象是几何点

- 波动光学：

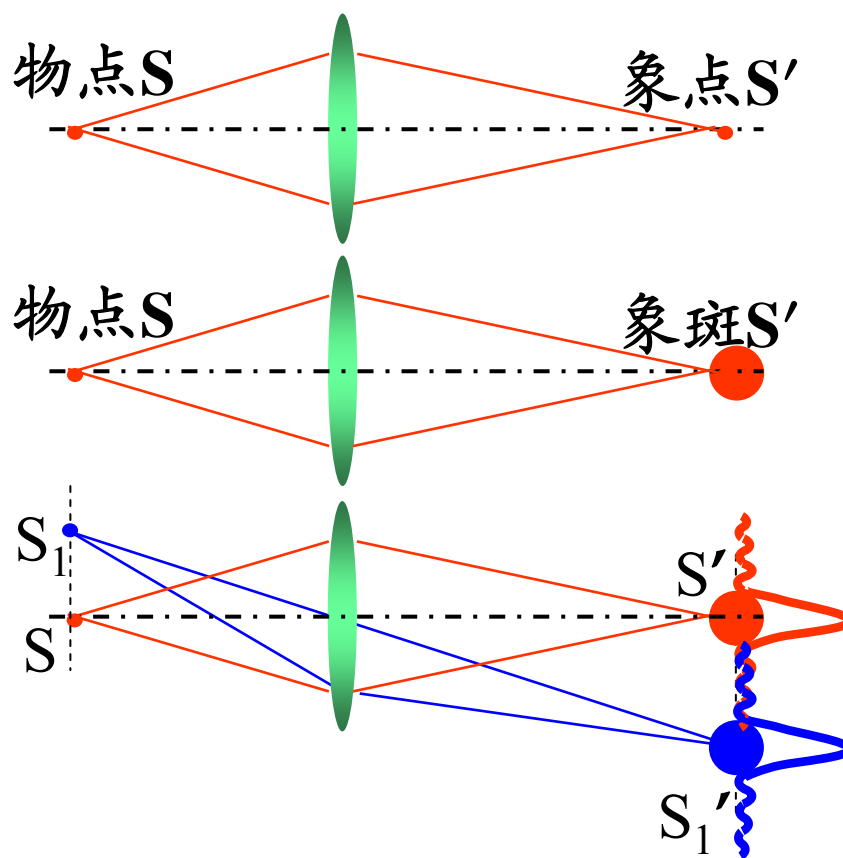
由于衍射，象不再是几何点，而是有一定大小的艾里斑

- 两个物点 $S$ 和 $S_1$ 的成像

考虑衍射，呈现两个艾里斑

两艾里斑在屏上非相干叠加

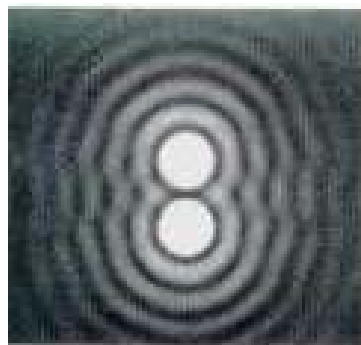
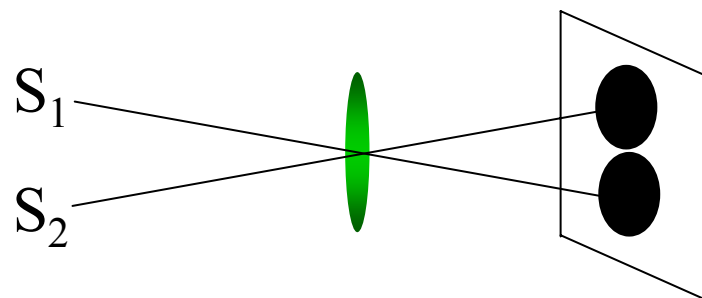
若两个物点 $S$ 和 $S_1$ 的距离足够小，通过透镜观察它们时，就有可否分辨的问题，衍射限制了透镜的分辨能力。



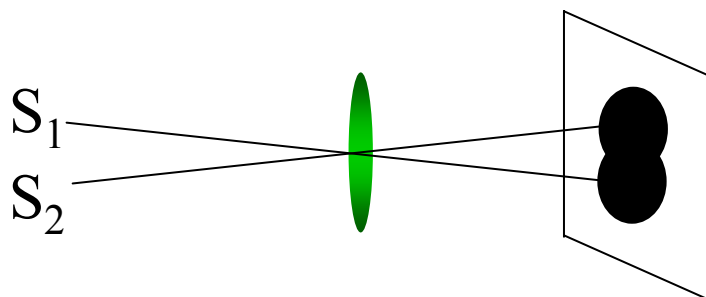
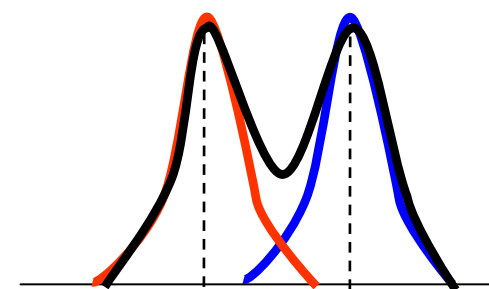


## 2. 瑞利判据

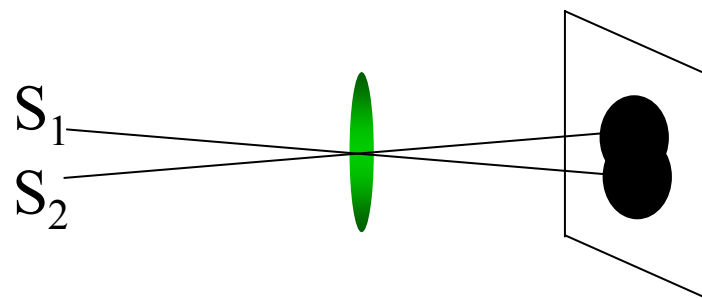
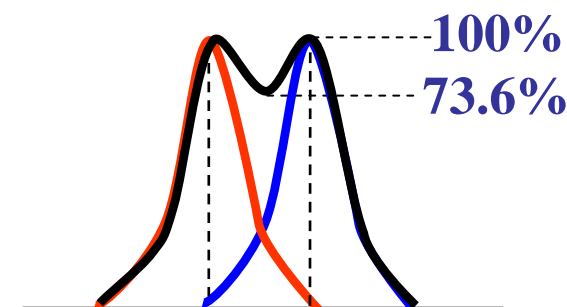
两个等光强的非相干物点，如果一个象斑的中心恰好落在另一象斑的边缘(第1级暗纹处)，则它们刚好可以分辨



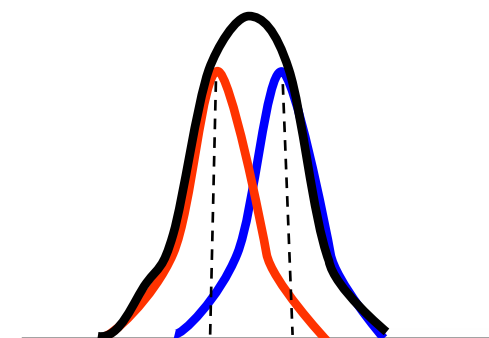
可分辨



恰可分辨



不可分辨

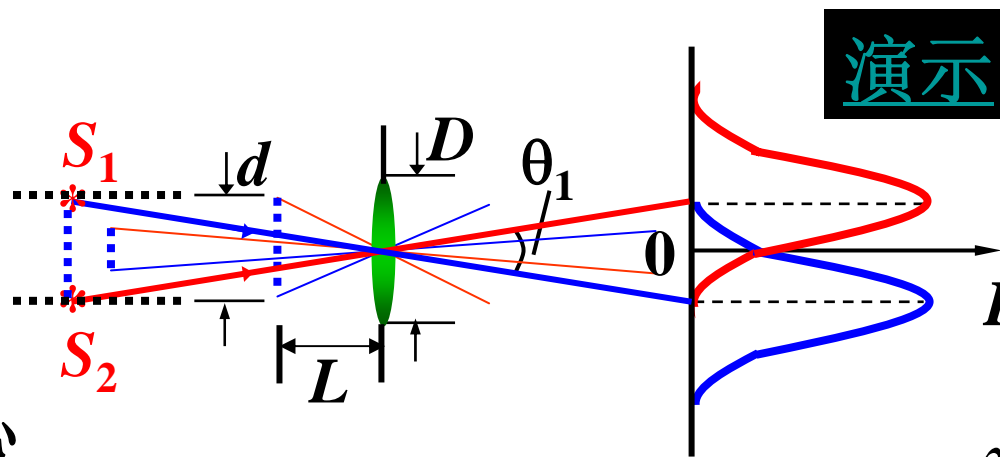


### 3. 分辨本领

满足瑞利判据时两物点间的距离，就是光学仪器的最小分辨距离

最小分辨距离对透镜中心

的张角称为最小分辨角，即第1级暗纹的衍射角  $\theta_1 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$



★注意：

- 最小分辨角不是  $2\theta_1$
- $D$  是透镜的孔径， $\theta_1$  与  $D$  成反比
- $\theta_1$  是最小分辨角，两物点的张角  $\theta$ 
  - $\theta < \theta_1$ ，不可分辨
  - $\theta > \theta_1$ ，可分辨
- 两物点相距  $d$ ，物点与透镜相距  $L$ ， $\theta \approx \frac{d}{L}$ 
  - $\theta$  与  $d$  正比
  - $\theta$  与  $L$  反比

夜间观看汽车灯，远看是一个亮点，近看才是两个灯

最小分辨角的倒数称为仪器的**分辨本领**

$$R \equiv \frac{1}{\theta_1} = \frac{D}{1.22\lambda} \quad \left. \begin{array}{l} D \uparrow \\ \lambda \downarrow \end{array} \right\} \rightarrow R \uparrow \quad \left. \begin{array}{l} \text{艾里斑变小,} \\ \text{衍射效应不明显} \end{array} \right\} r \sim \frac{\lambda}{D}$$

**圆孔**衍射公式对**抛物面式**的天线、雷达均成立。

- 望远镜： $\lambda$  不可选择，可 $\uparrow D \rightarrow \uparrow R$

世界上最大的光学望远镜 $D=8\text{m}$ ，  
建在了夏威夷山顶。

世界上最大的射电望远镜 $D=305\text{ m}$ ，  
建在了波多黎各岛的Arecibo，能探测射到整个地球表面仅 $10^{-12}\text{W}$ 的功率，也可探测引力波。

- 显微镜： $D$ 不会很大，可 $\downarrow \lambda \rightarrow \uparrow R$

电子 $\lambda$ ： $0.1\text{\AA} \sim 1\text{\AA}$  电镜可以观察物质的结构



**判断题： #T5205.**

只要放大镜的放大倍数足够高，  
就能看清任何细小的物体。

## ➤人眼的分辨本领

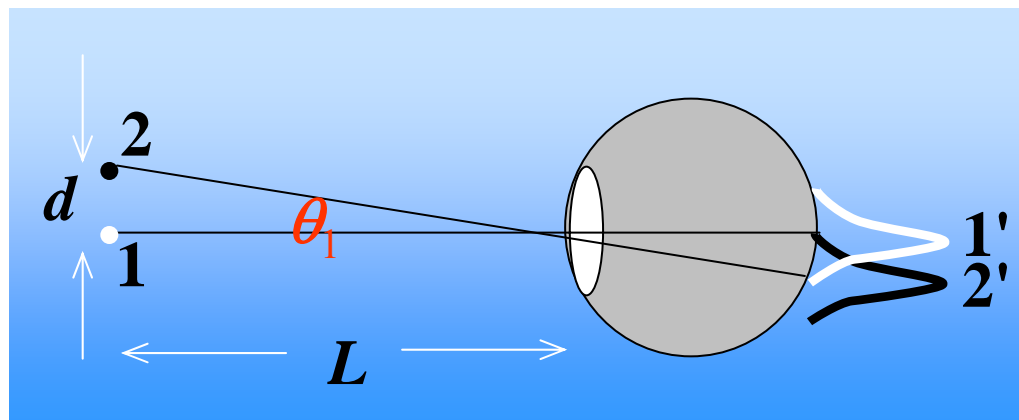
光通过瞳孔在视网膜上成像，也会出现衍射效应

例：汽车两灯相距 $d=1.5\text{m}$ ，人眼的瞳孔直径 $D=4\text{mm}$ ，

问：最远在多远，人眼恰好能分辨出这两盏灯？

解：恰好能分辨→  
两灯对人眼的张角  
正好是最小分辨角

$$\theta = \theta_1 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



取视觉最敏感的黄绿光波长 $\lambda=5500\text{\AA}$

$\theta = d/L$   $L$ ：恰好能分辨出这两盏灯时车与人的距离

$$L = \frac{dD}{1.22\lambda} = \frac{1.5 \times 4 \times 10^{-3}}{1.22 \times 5500 \times 10^{-10}} = 8.9 \times 10^3 \text{ m}$$

**判断题： #T5206.**

“未见其人，先闻其声”，说的是日常生活中，  
声波的衍射比光波的衍射更明显。  
因此雷雨天，先听到雷声，再看到闪电？

## § 4 光栅衍射

对单缝衍射：次极大宽度  $\Delta x = f \frac{\lambda}{a}$

若缝宽小，条纹间距大，但条纹暗，看不清楚

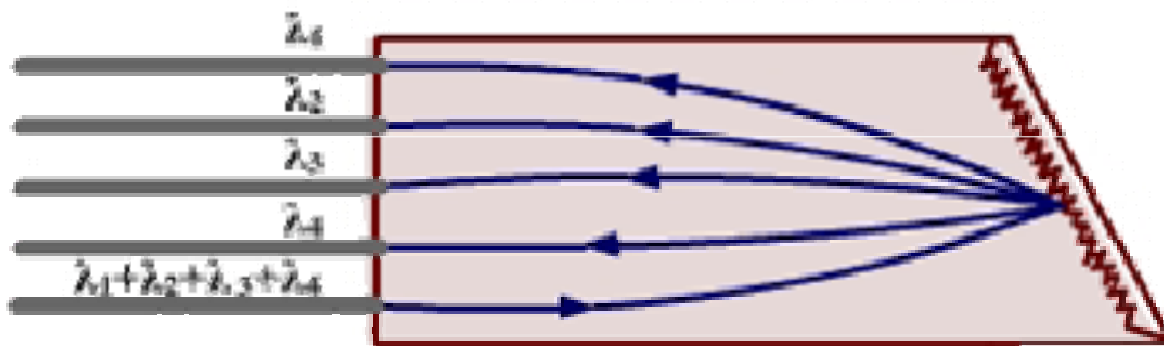
若缝宽大，条纹亮，但条纹间距小，不能精确测量

**问题：**能否得到亮度大，分得开，宽度窄的明条纹？

**答：**光栅所形成的衍射图样——光栅光谱

**应用：**光栅是重要的光学元件，精确地测量光的波长

- 光栅光谱仪
- 激光器的选频器件
- 波分复用器件
- 光纤光栅



## 4.1 光栅

大量的等宽、等间距的平行狭缝构成的光学元件  
 $a$ 是狭缝宽度， $b$ 是缝间不透光部分的宽度

光栅常数 $d = a + b$  相邻两缝对应点之间的距离

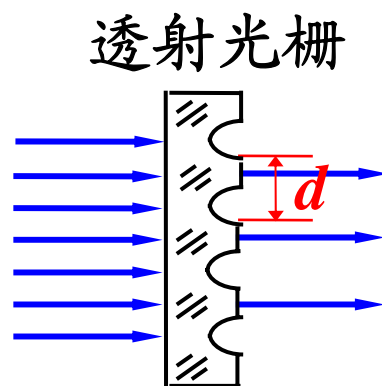
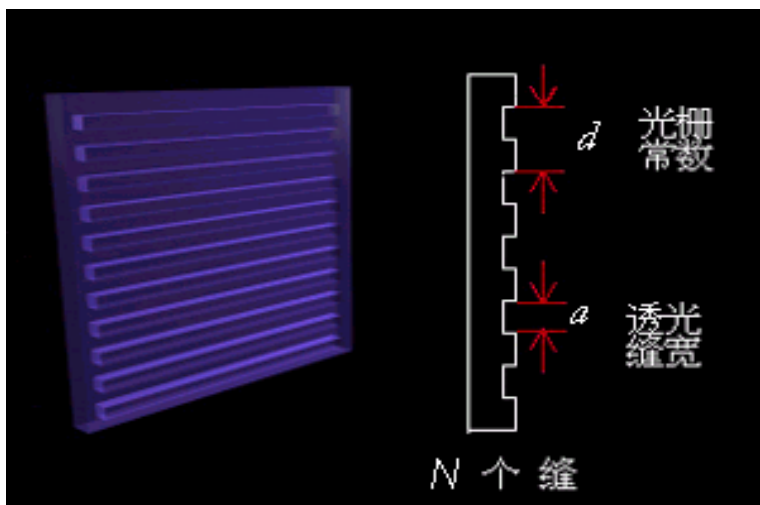
光栅常数表示光栅的空间周期性

用金刚石尖端在玻璃片上刻划大量的等宽且等间距的平行刻线，在每条刻痕处，入射光向各个方向散射而不易透过；相邻两个刻痕之间的玻璃面是可以透光的部分。

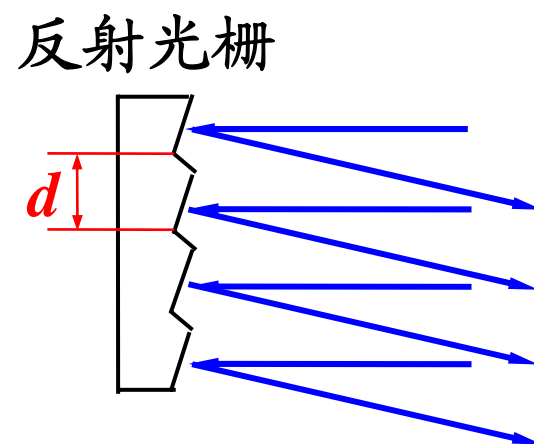
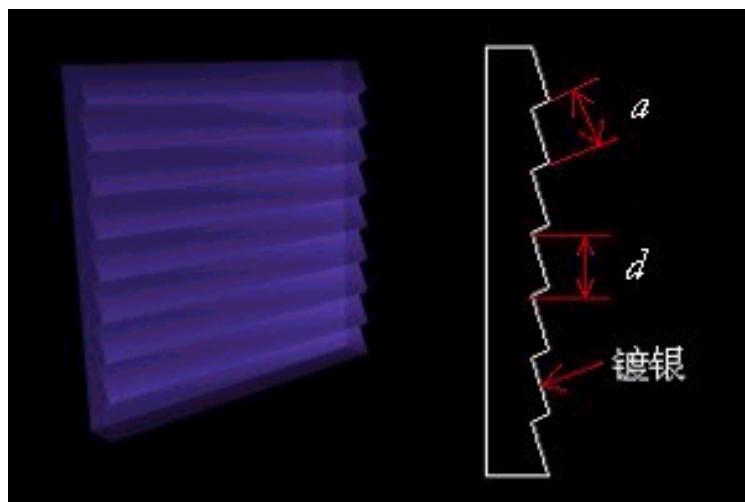
通常普通光栅刻线为数十条/mm~数千条/mm，用电子束刻制可达数万条/mm ( $d \sim 10^{-1} \mu\text{m}$ )

利用单色激光双束干涉条纹具有等宽等间距的特点进行光刻则形成全息光栅。它具有衍射效率高，光谱范围广，杂散光低，高光谱分辨率等特点。





利用两刻痕间的反射光衍射的光栅——**反射光栅**



任何具有空间周期性的衍射屏都可叫作光栅

## 4.2 光栅的夫琅禾费衍射

光栅衍射=单缝衍射+多缝干涉  
先不考虑衍射角对光强的影响

### 1. 多光束干涉

设有 $N$ 个缝，每个缝发的光在 $p$ 点的光振动的振幅为 $E_p$

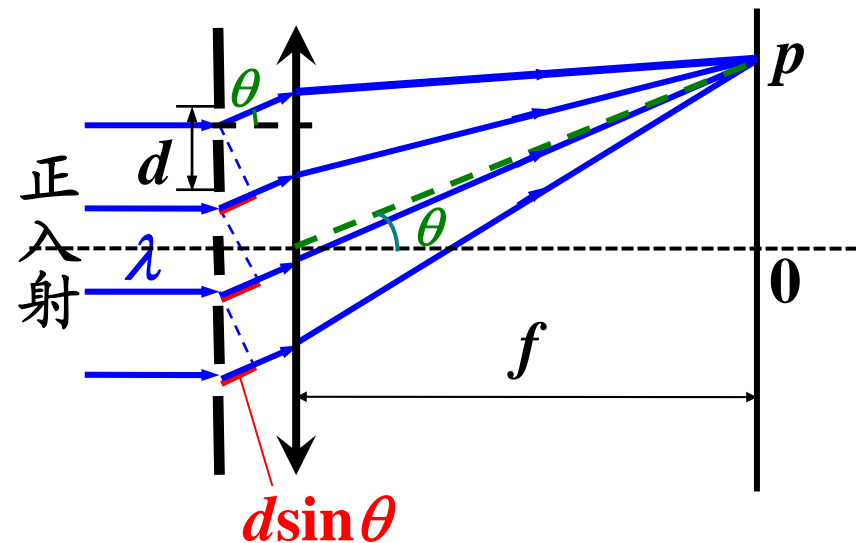
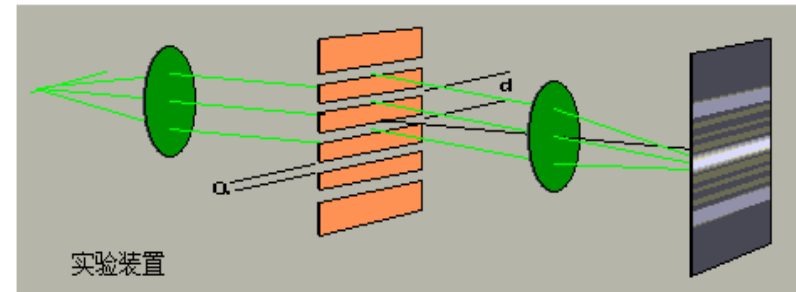
相邻缝发出的光在衍射角为 $\theta$ 的 $p$ 点的光程差均为

$$\delta = d \sin \theta$$

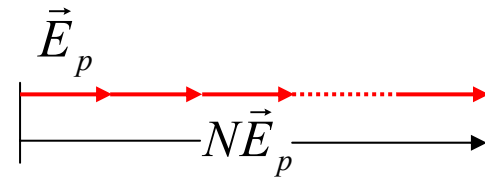
相邻缝在 $p$ 点的相位差均为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

$p$ 点处是 $N$ 个同方向、同频率、同振幅、相位依次相差 $\Delta\varphi$ 的简谐振动的合成。



(1)干涉主极大  $\Delta\varphi = \pm 2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$



干涉主极大条件:  $d \sin\theta = \pm k\lambda$  正入射时的光栅方程

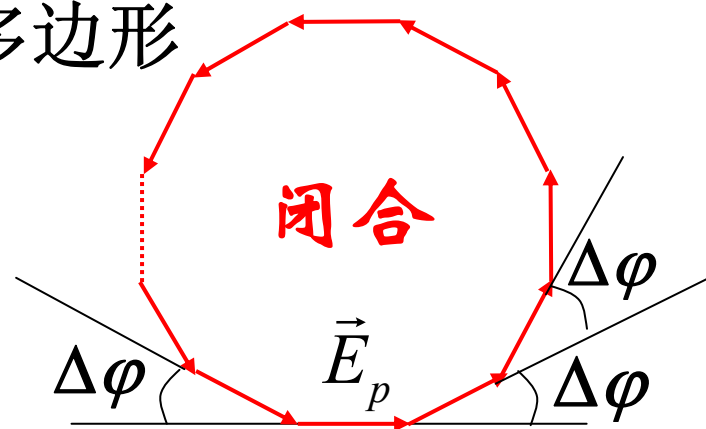
- 主极大的位置与  $N$  无关
- 相邻主极大间距  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{d}$
- 主极大的光强  $I_p \propto N^2 E_p^2$  缝越多, 合光强越大

(2)干涉暗纹 各振幅矢量构成闭合多边形

在外接圆中的圆心角

$$N\Delta\varphi = \pm 2k'\pi, \quad (k' = 1, 2, \dots \neq Nk \dots)$$

干涉暗纹条件:  $d \cdot \sin\theta' = \frac{\pm k'}{N} \lambda$



• 相邻暗纹间距  $\Delta\theta' = \frac{\lambda}{Nd}$   $\Delta\theta' = \frac{\Delta\theta}{N}$

相邻主极大间有  $N-1$  个暗纹 以及  $N-2$  个次极大

例如  $N = 4$

由干涉主极大条件:

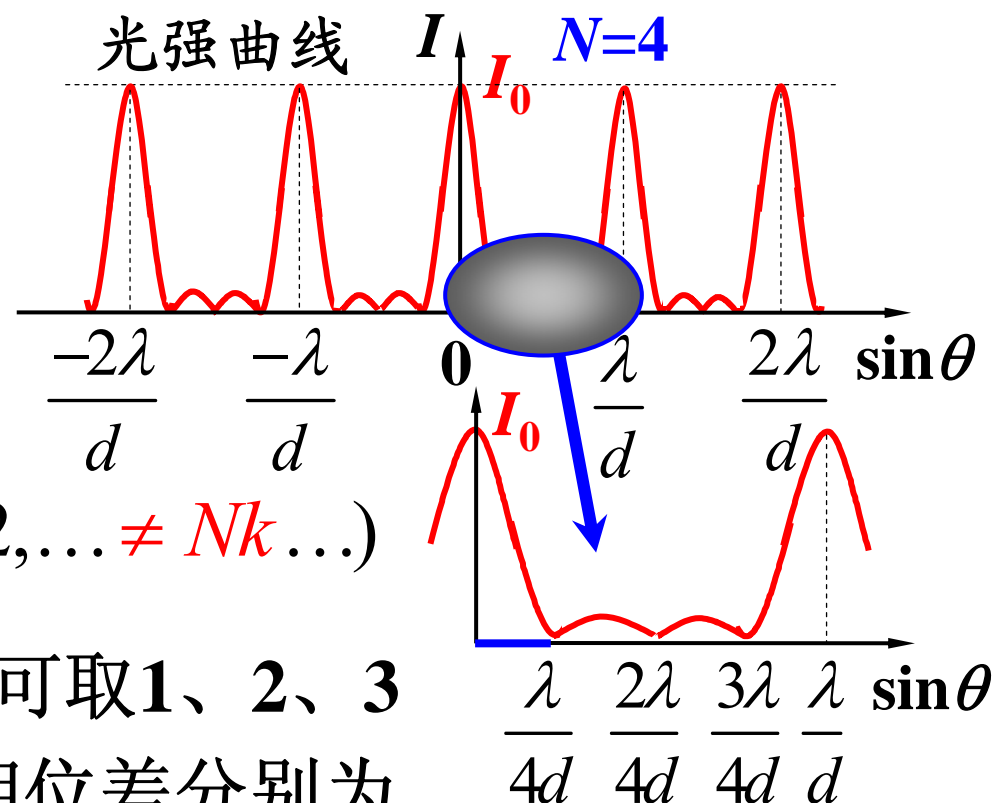
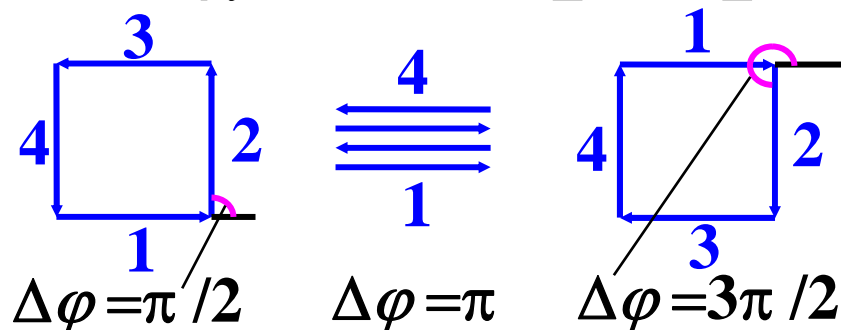
$$d \sin \theta = \pm k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

由干涉暗纹条件:

$$d \sin \theta' = \frac{\pm k'}{N} \lambda, \quad (k' = 1, 2, \dots \neq Nk \dots)$$

在0级和1级主极大之间  $k'$  可取1、2、3  
即  $4-1=3$  个暗纹, 它们的相位差分别为

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta' = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$



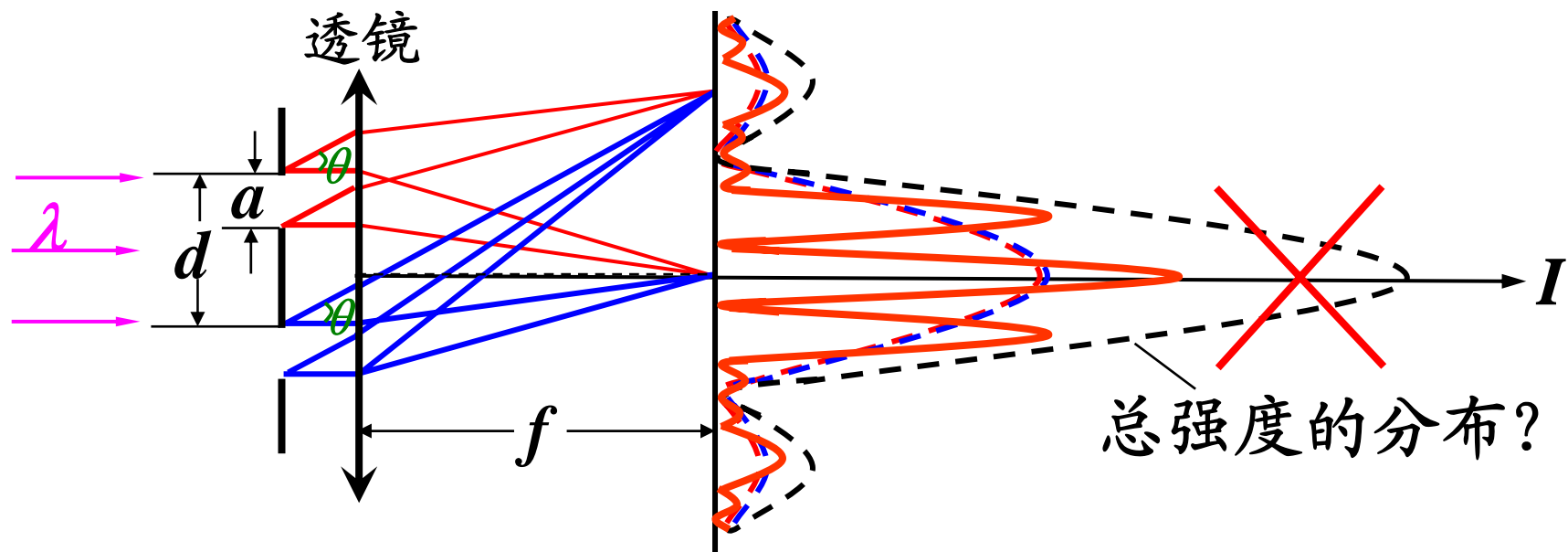
主极大的半角宽  $\theta \approx \frac{\lambda}{Nd} \propto \frac{1}{N}$

缝越多, 每根谱线(主极大)越细, 谱线间的暗纹越多, 谱线尖锐明亮, 便于观测。

**判断题： #T5207.**

多缝干涉中，当主极大条件满足时，任意两缝沿 $\theta$ 角射出的光一定干涉加强；当极小条件满足时，任意两缝沿 $\theta$ 角射出的光也一定干涉减弱。

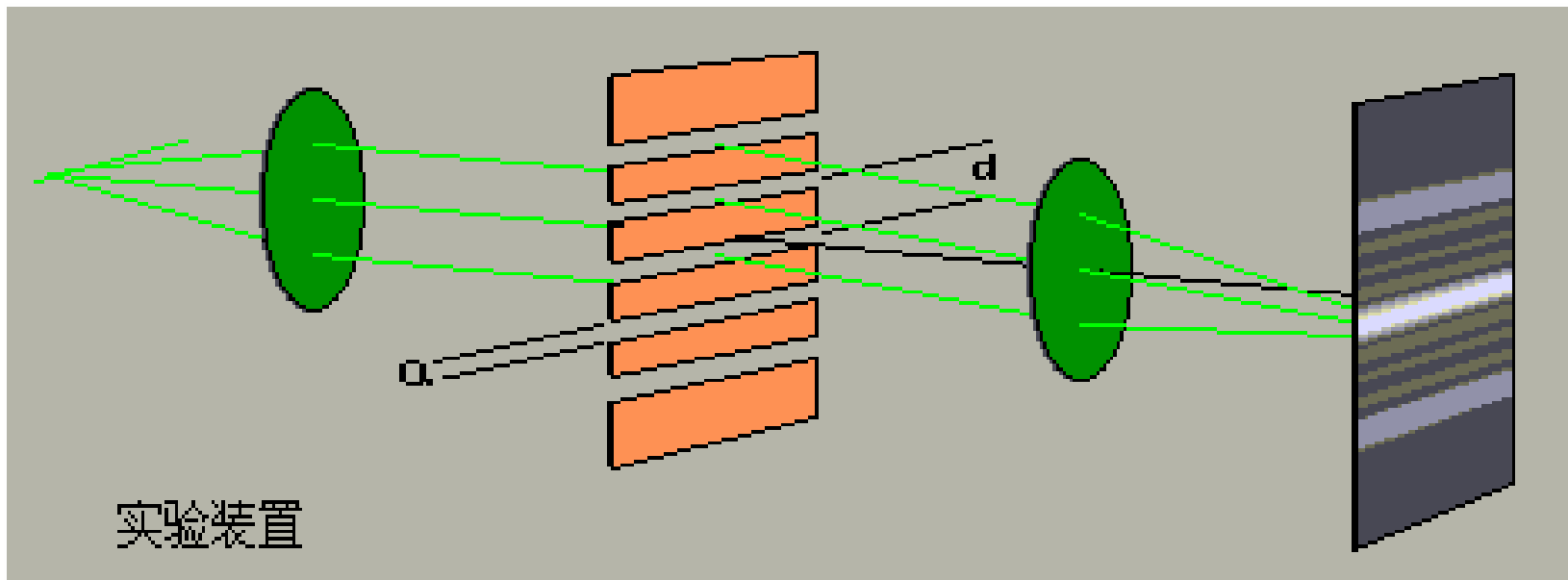
## 2. 每个缝的衍射效应对干涉主极大强度的调制



单缝上下移动，条纹位置不变，每个缝的衍射光重叠总强度的分布，是穿过各缝的衍射光的相干叠加。屏上不同点处所获得的进行干涉的衍射光强各不相同它们干涉后形成的各级干涉主极大的强度将不再相等在衍射暗纹的位置，由于到达此处的衍射光强为0，则无论此点是相长还是相消，干涉后强度必然仍为0

## 判断题： #T5208.

一束平行光垂直入射在衍射光栅上，若把光栅垂直于光的入射方向稍微平移一下，谱线的位置并不会随之改变。



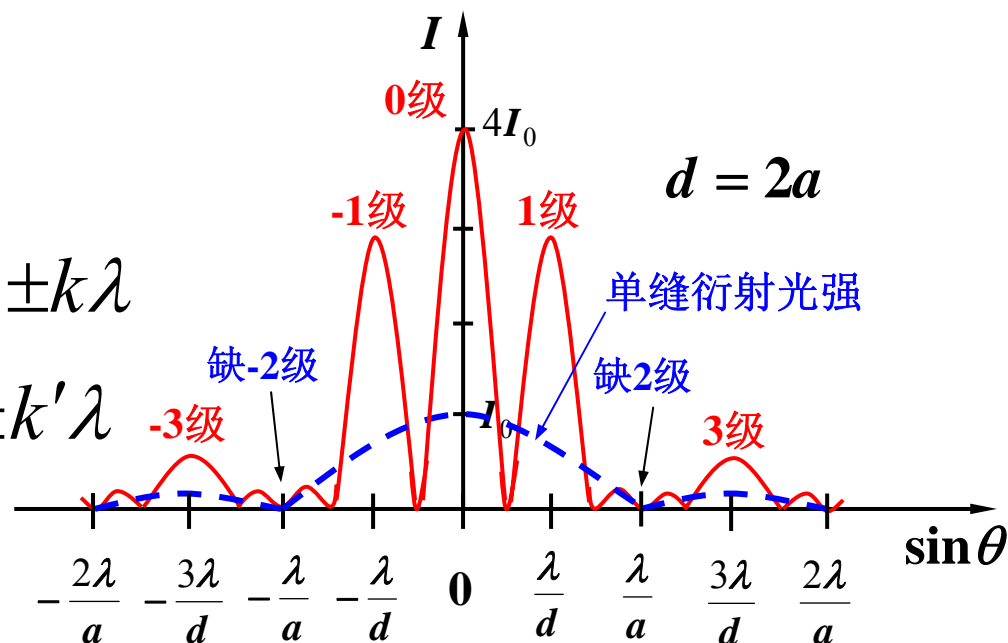
### 3. 条纹特点与变化

#### (1) 缺级现象

干涉主极大位置  $d \sin \theta = \pm k \lambda$

衍射暗纹位置  $a \sin \theta' = \pm k' \lambda$

$$\text{当 } \frac{d}{a} = \frac{k}{k'} \Rightarrow \theta = \theta'$$



$k$ 级干涉主极大与 $k'$ 级衍射暗纹位置重合

在干涉加强的位置相干的衍射光强为0 → 干涉条纹缺级

缺级级次  $k = \frac{d}{a} k'$  例如:  $d=2a$ 时, 缺 $\pm 2, \pm 4, \pm 6 \dots$ 级

相邻主极大间距  $\Delta \theta = \frac{\lambda}{d}$       衍射中央包络的半角宽  $\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$

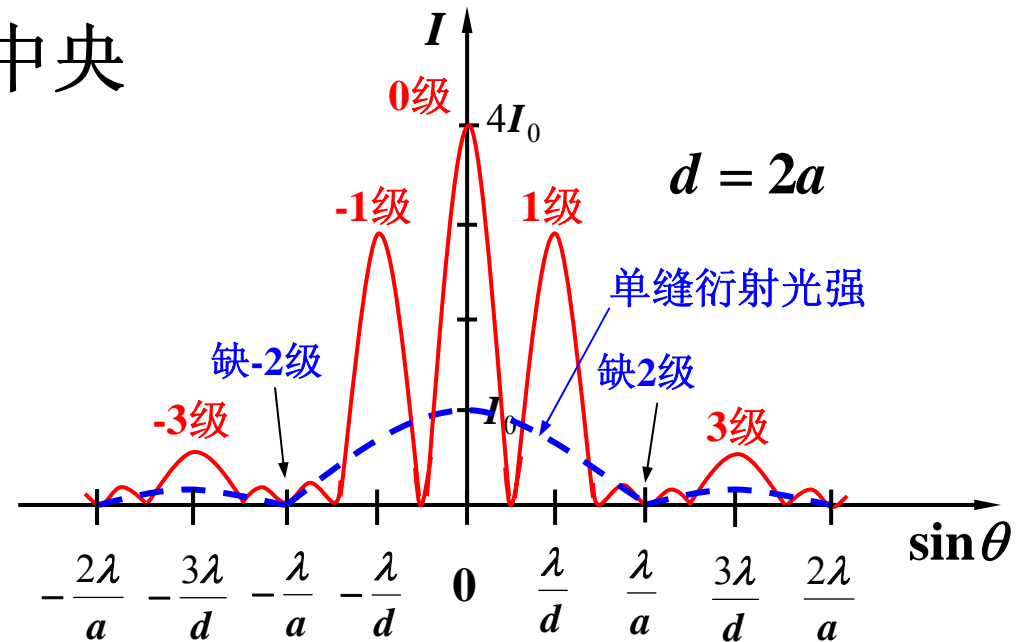


$\lambda/a : \lambda/d = d/a$  决定衍射中央包络内的干涉主极大数

- 单缝中央包络所含干涉主极大条数

$$2\left(\frac{d}{a} - 1\right) + 1 = 2\frac{d}{a} - 1$$

比如:  $d = 10a$



## (2) $d$ 、 $a$ 对条纹的影响

- 若  $a$  不变  $\Rightarrow$  单缝衍射的轮廓线不变

$d$  减小  $\Rightarrow$  干涉主极大间距变大

单缝衍射中央亮纹范围内的干涉主极大个数减少  
如果出现缺级的话, 则缺级的级次  $d/a$  变低

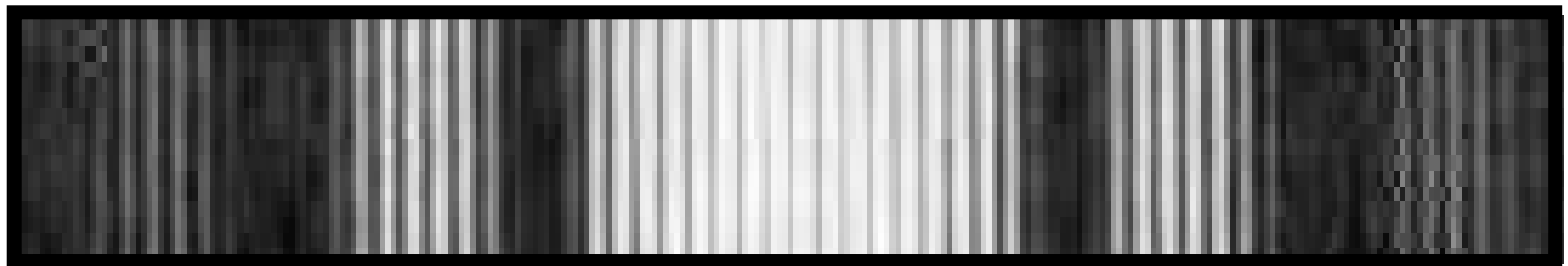


## 单缝衍射和多缝衍射的对比 ( $d = 10a$ )

单缝



多缝

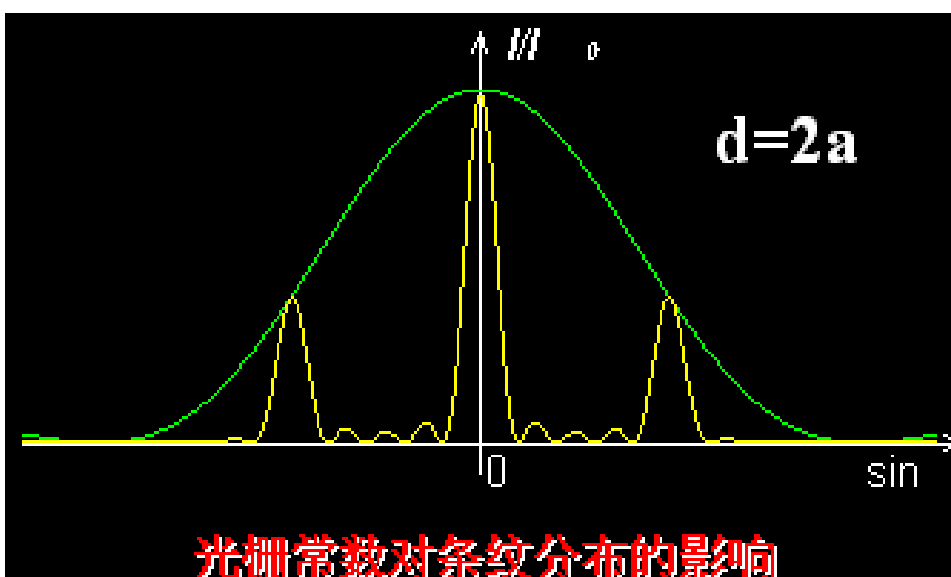
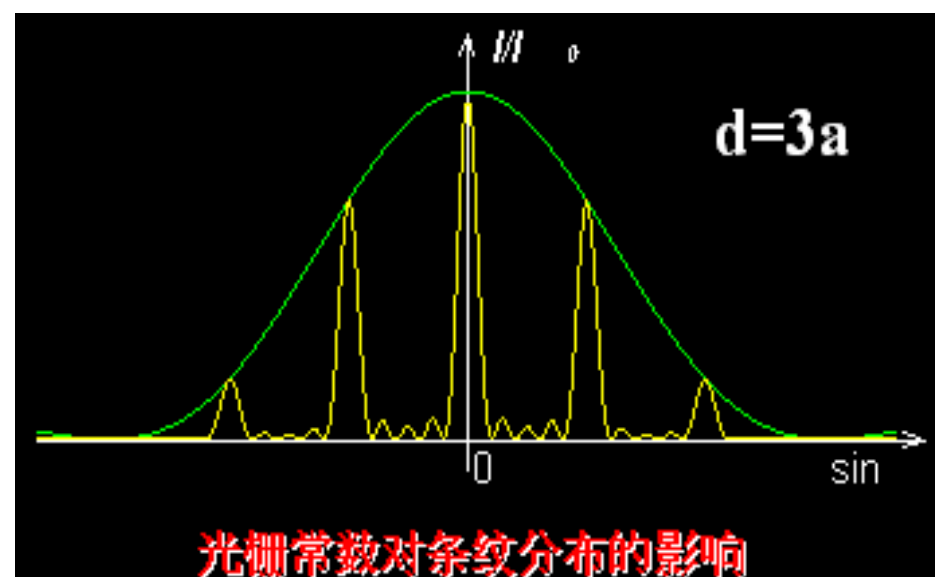
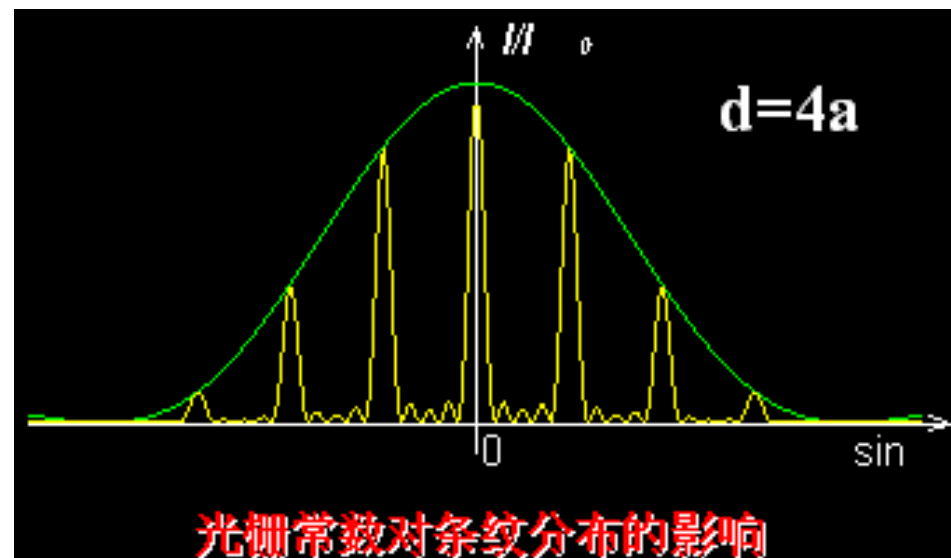
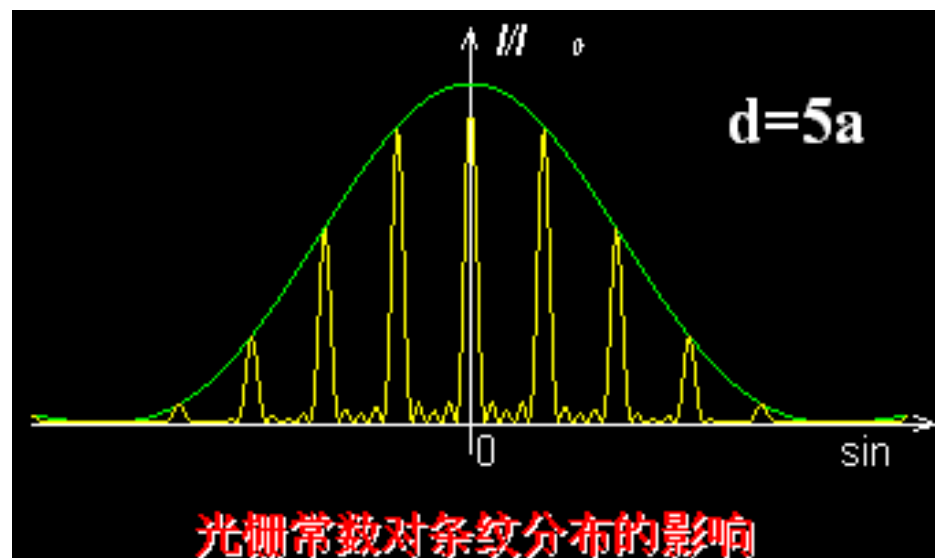


缺级

19个明条纹

缺级

$$2\frac{d}{a}-1$$



•若 $d$ 不变 $\Rightarrow$ 干涉各主极大位置不变

$a$ 减小 $\Rightarrow$ 单缝衍射的轮廓线变宽



衍射中央包络内干涉主极大增多，缺级的级次变高。

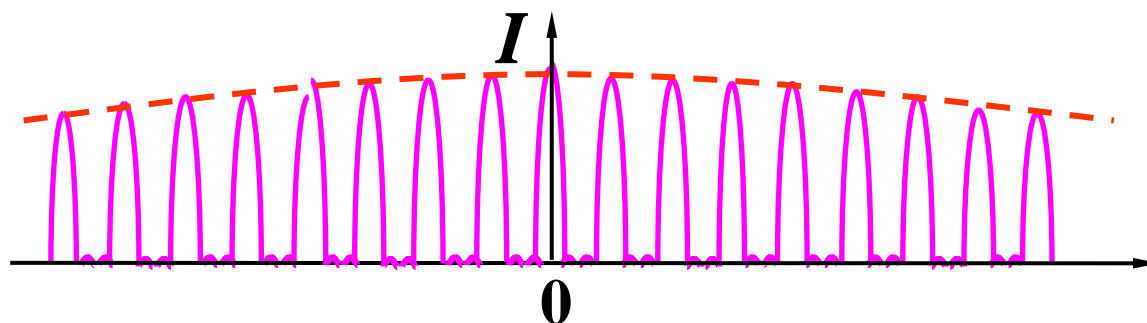
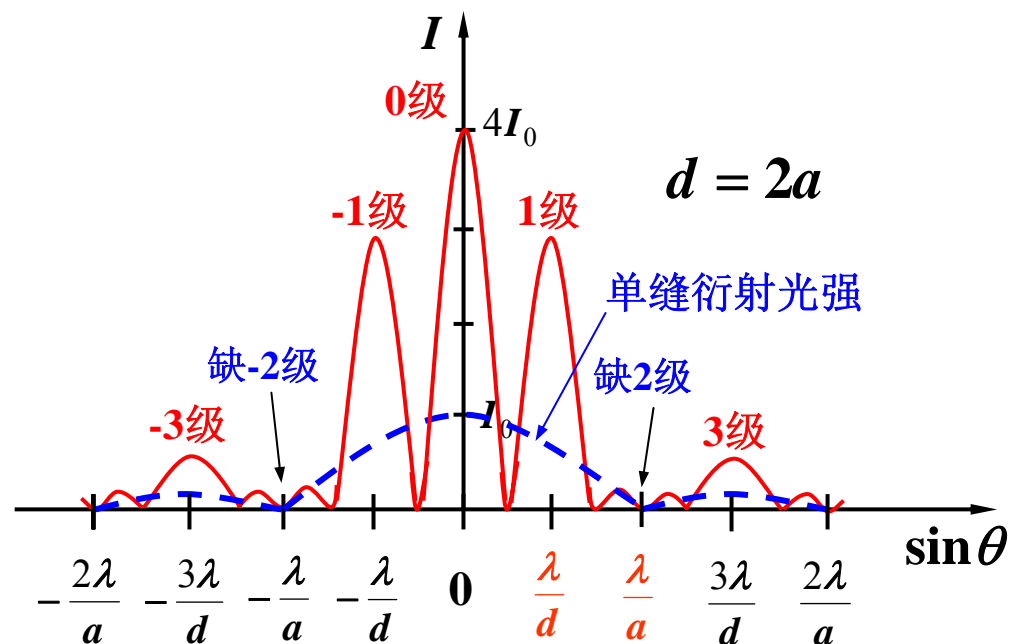
极端情形：当 $a \rightarrow \lambda$ 时

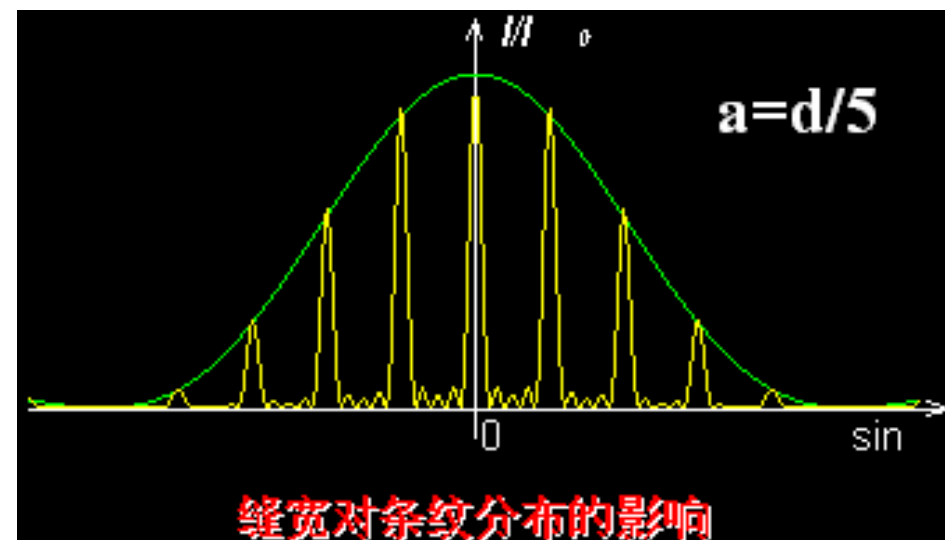
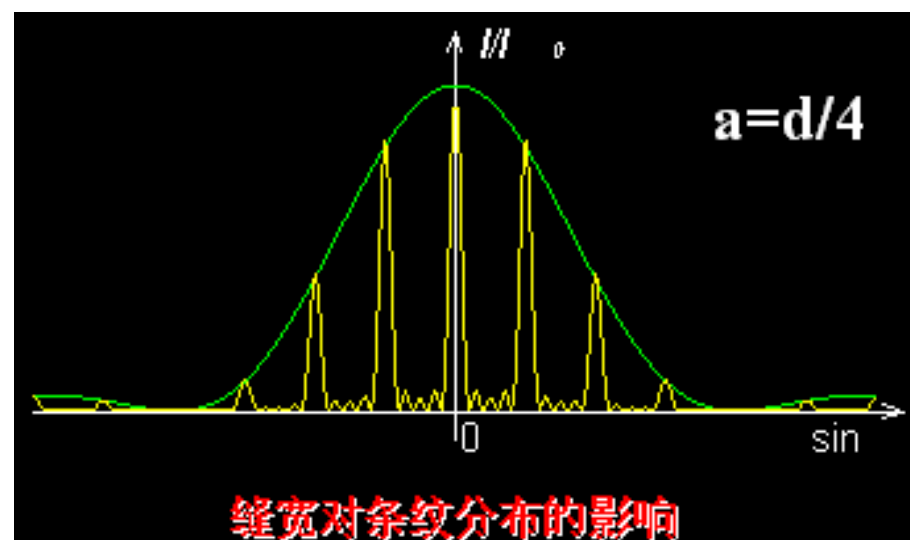
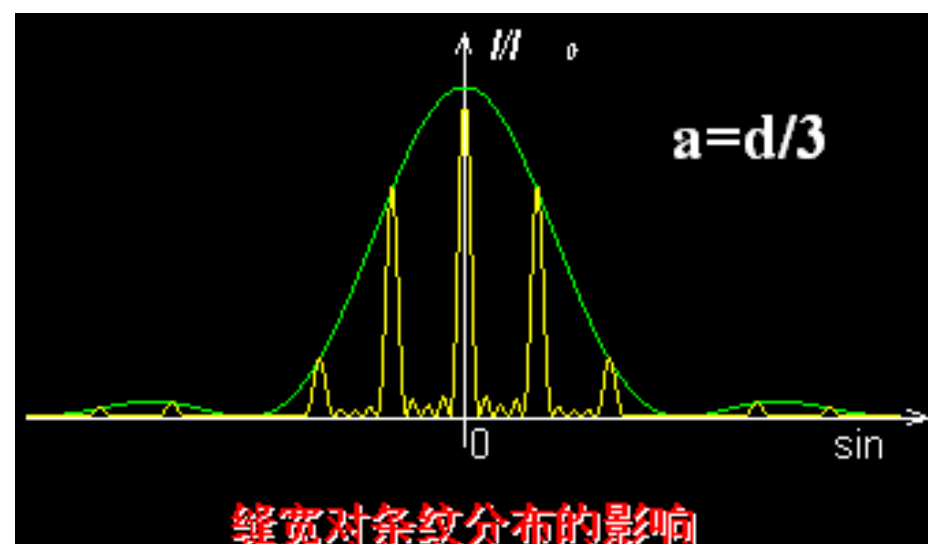
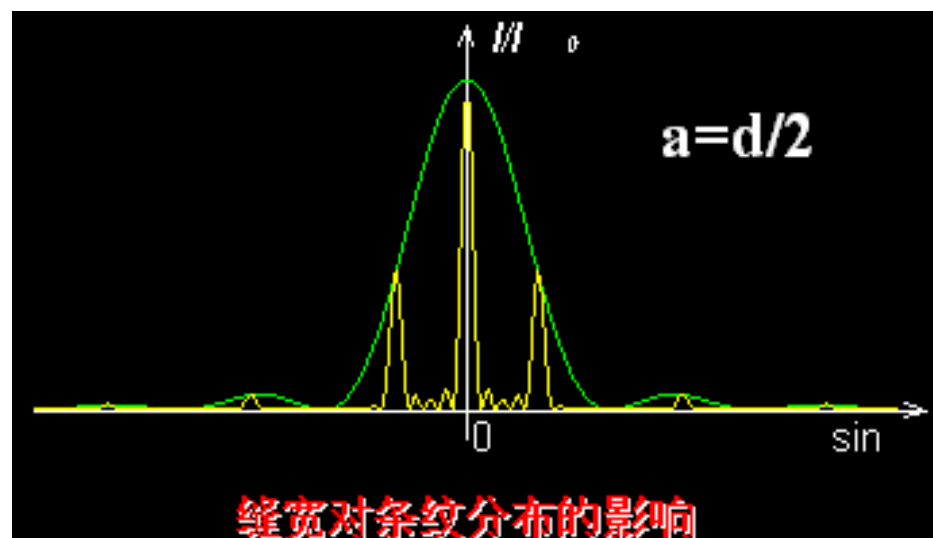
$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \rightarrow 1 \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

第1级暗纹在距中心 $\infty$ 处

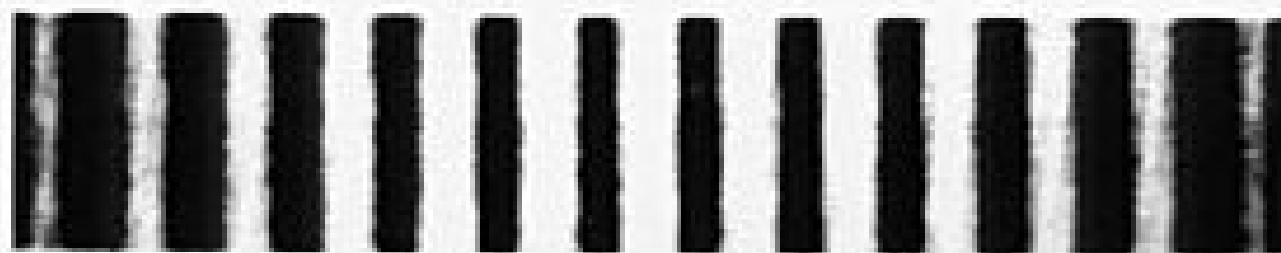
衍射的轮廓线变得很平坦，此时各主极大光强几乎相同。

多缝衍射图样 $\rightarrow$   
多光束干涉图样





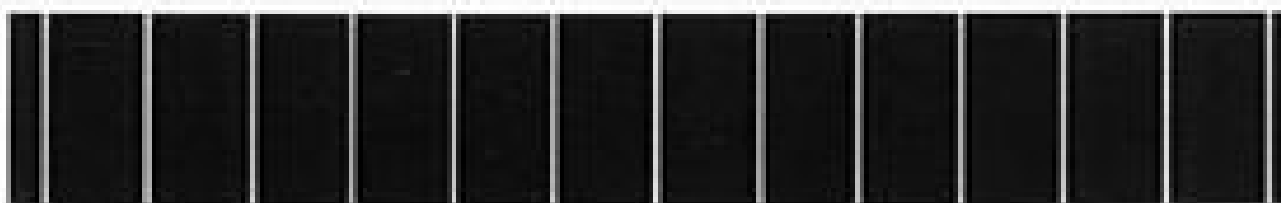
### (3)缝数 $N$ 对条纹的影响:



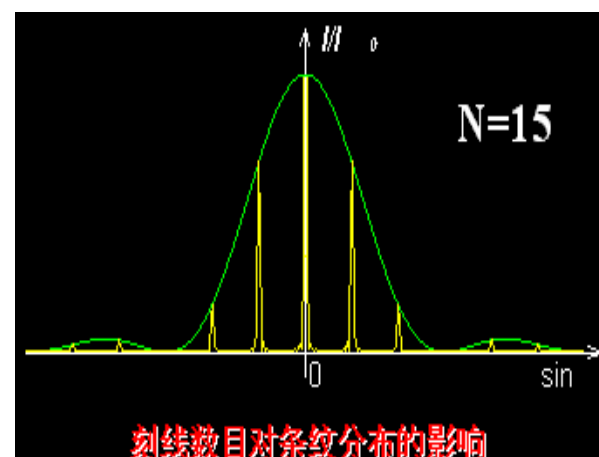
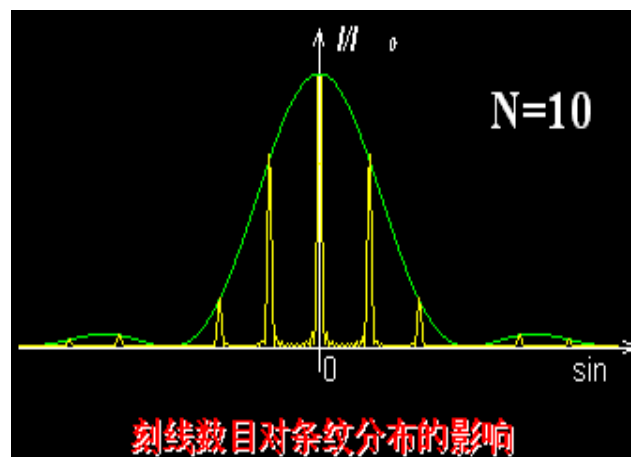
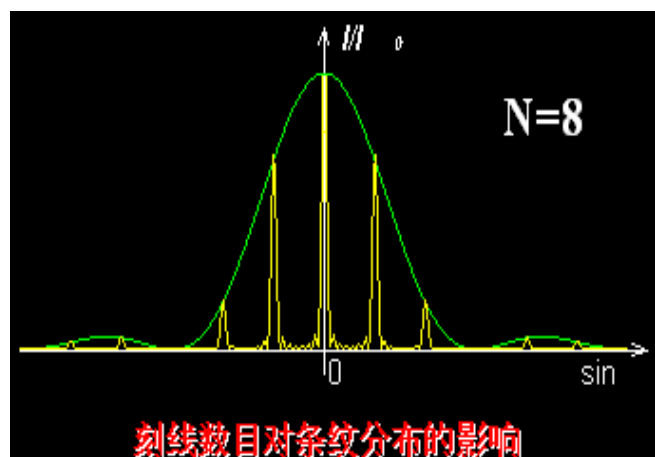
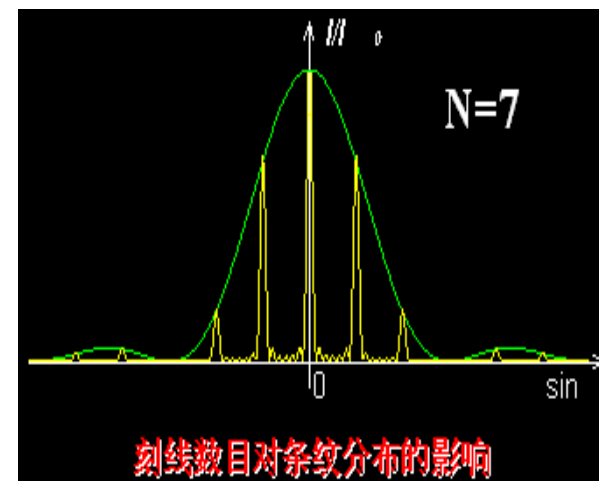
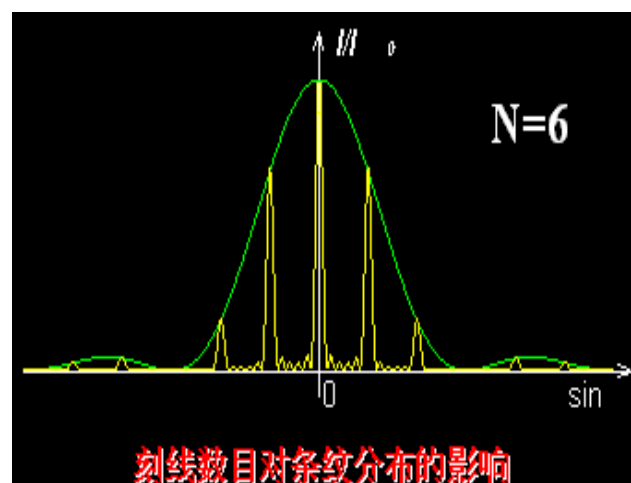
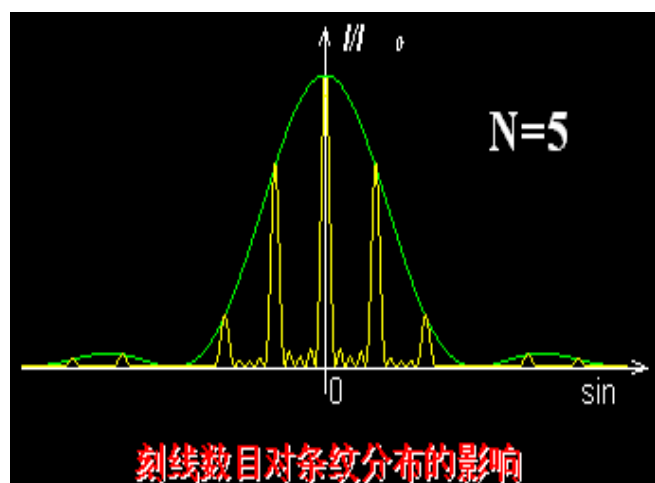
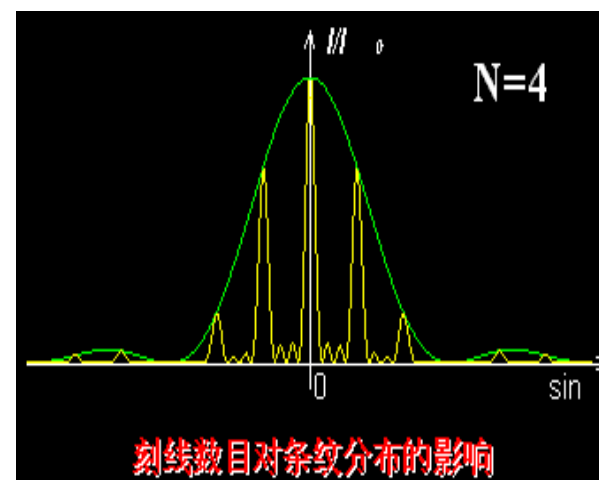
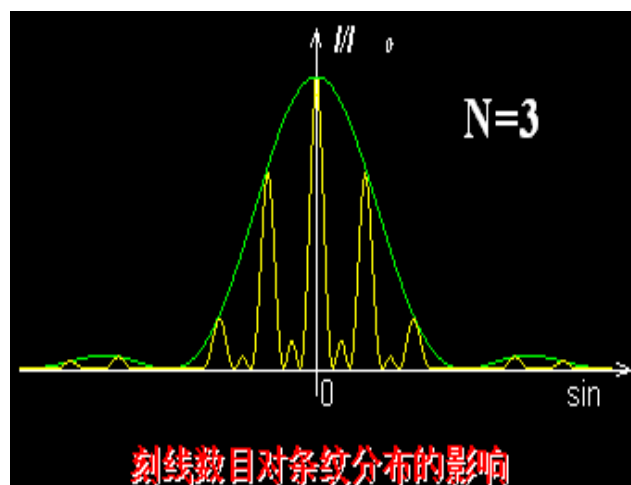
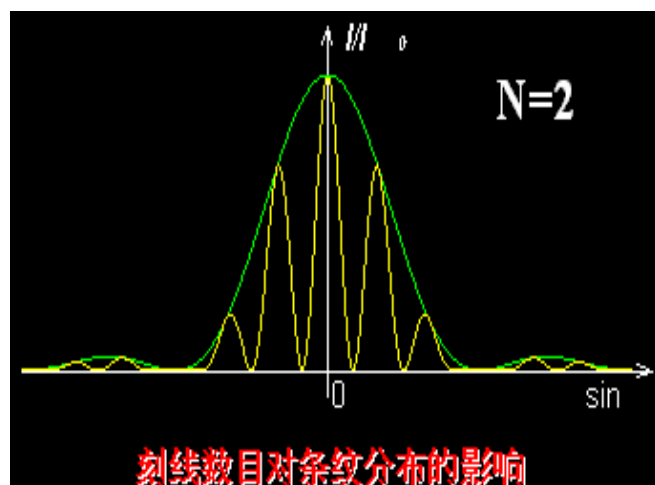
双缝的衍射条纹



五缝的衍射条纹



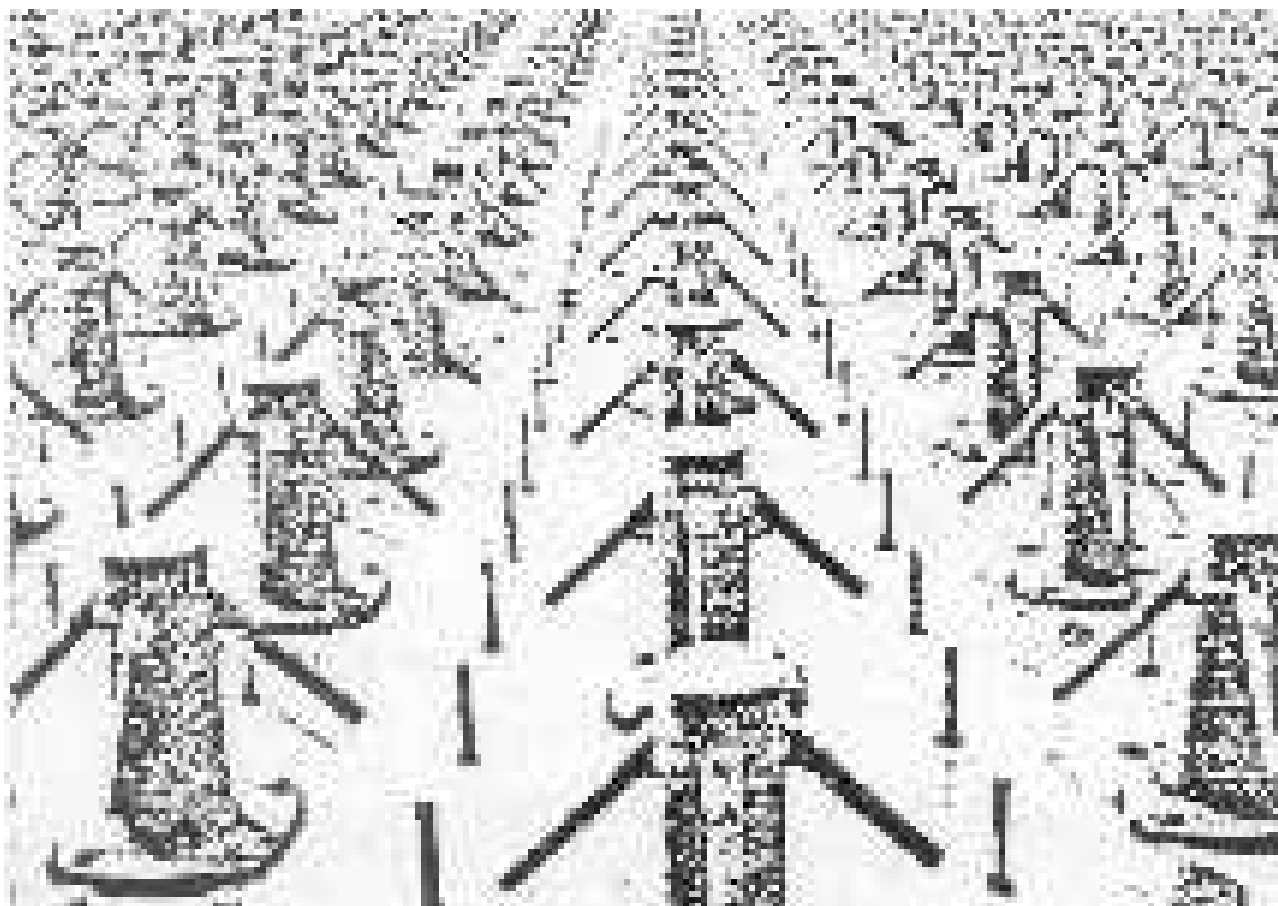
光栅的衍射条纹





设在澳大利亚Sydney大学的一维射电望远镜阵列  
( $N=32$ ,  $\lambda=21\text{cm}$ ,  $a=2\text{m}$ ,  $d=21\text{m}$ , 阵列长213m)





设在美国鳕角(Cape cod)的相控阵雷达  
阵列宽31m，有1792个辐射单元，覆盖240°视野  
能探测到5500公里范围内的10m<sup>2</sup>大小的物体  
用于搜索洲际导弹、跟踪人造卫星

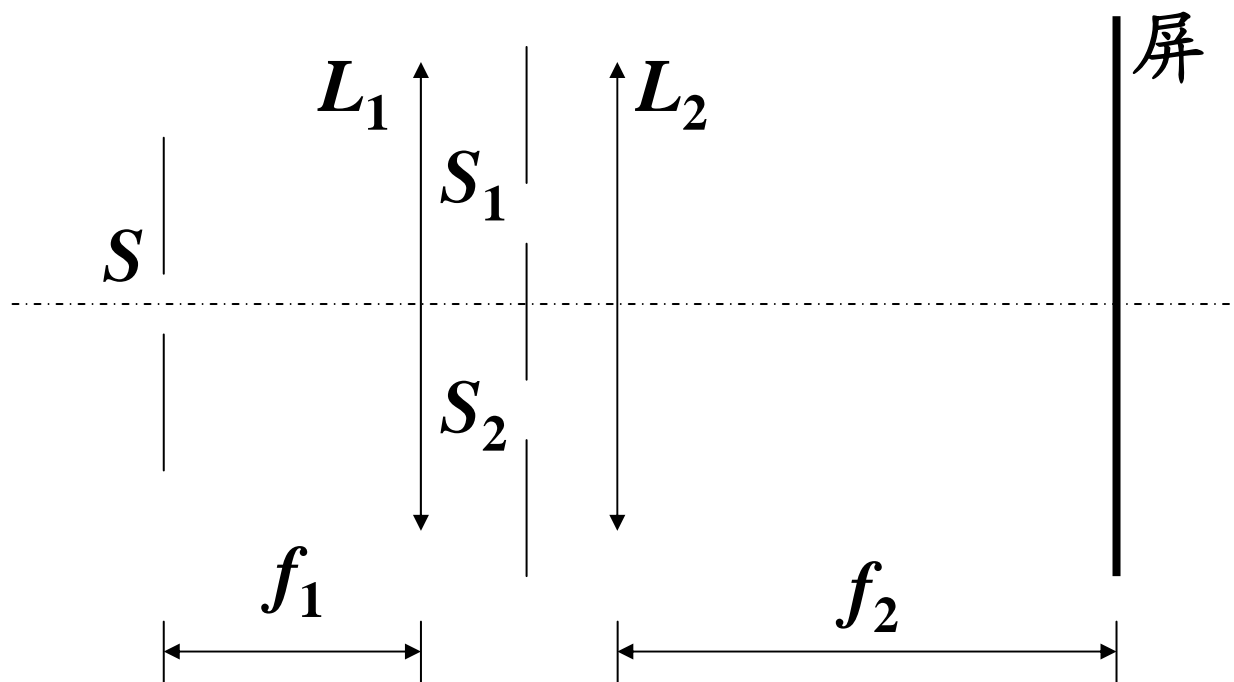
**选择题： #S5205.**

关于光栅衍射，下列说法正确的是：

- (1) 若 $d/a=m/n$ (非整数)，则不会缺级；
- (2) 若 $d/a=1$ ，则除0级外其他干涉主极大均缺级；
- (3) 若缝数为2，不会出现缺级现象；
- (4) 若缝数为2，没有干涉次极大。

**判断题： #T5209.**

在杨氏双缝实验中，双缝两侧各加一个透镜，形成了如图所示的夫琅禾费双缝衍射实验装置。现若上下平移双缝，屏上条纹仍会随之整体平移。



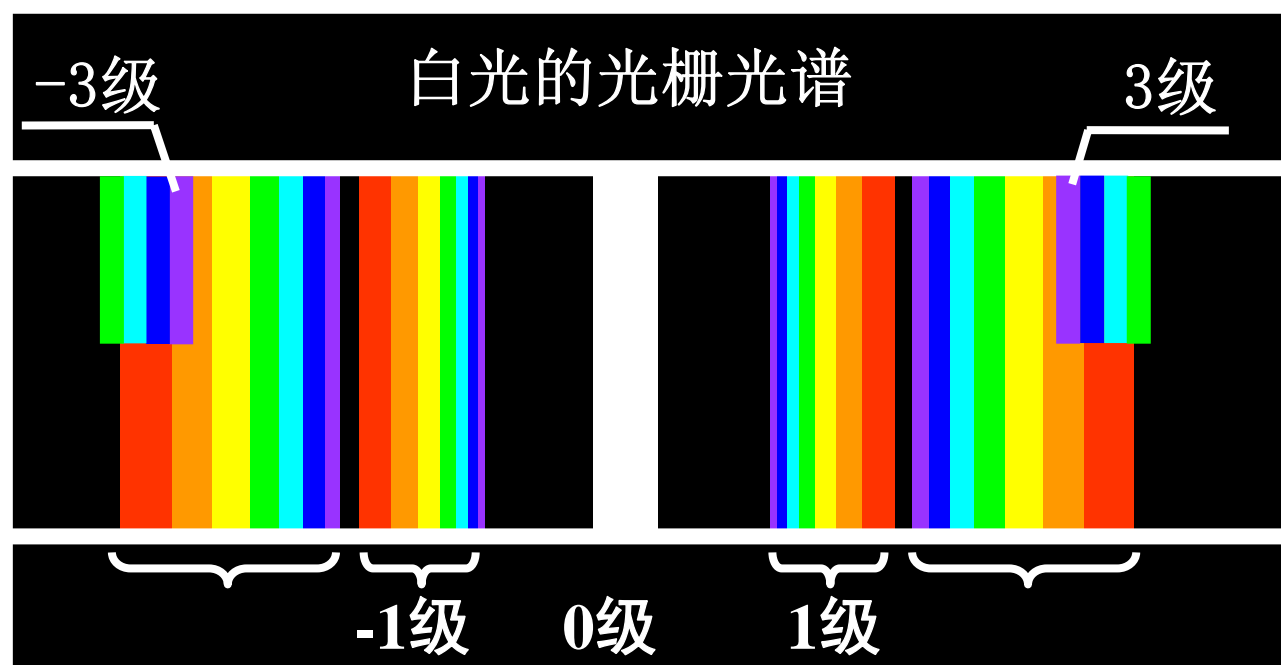
## 选择题： #S5206.

一衍射光栅对某一波长在宽度有限的屏幕上只出现中央主极大和第一级主极大。欲使屏幕上出现高一级的主极大，可以采取的办法有：

- (1) 换一个光栅常数 $d$ 较大的光栅；
- (2) 换一个光栅常数 $d$ 较小的光栅；
- (3) 换一个缝宽 $a$ 较大的光栅；
- (4) 换一个缝宽 $a$ 较小的光栅；
- (5) 换一个缝数 $N$ 较多的光栅；
- (6) 换一个缝数 $N$ 较少的光栅。

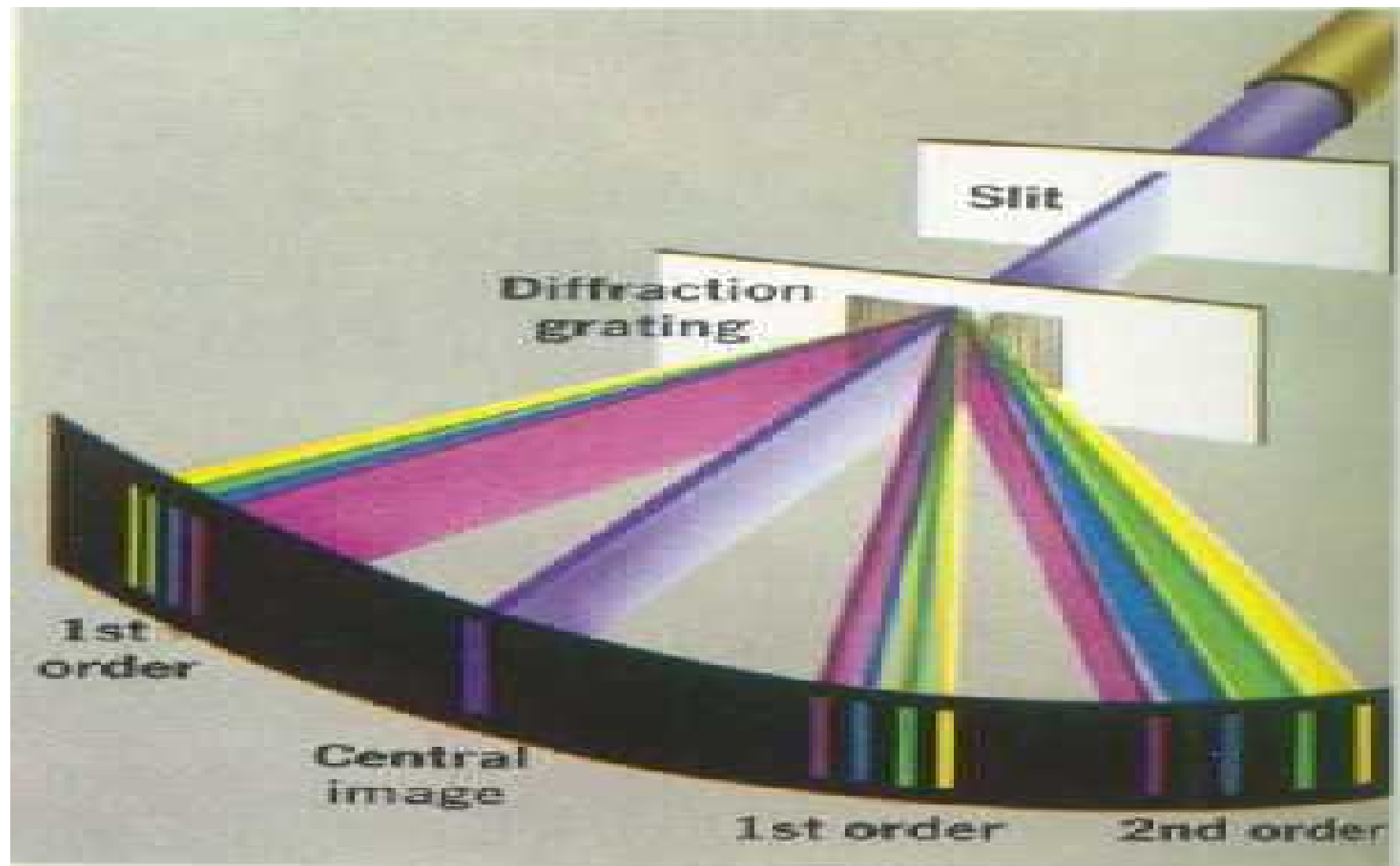
#### (4) 复色光入射

当入射光为白光时，中央零级明条纹仍为白光，其它主极大则由各种颜色的条纹组成。



正入射光栅方程： $d \sin \theta = \pm k \lambda$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$k$ 一定时， $\lambda \uparrow \rightarrow \theta \uparrow$ ，波长按**内紫外红**的次序自中央向外侧依次分开排列。



汞的光栅光谱

## 选择题： #S5207.

黄光垂直照射到一个衍射光栅上，光栅后面的屏幕上可以看到衍射图样由三个黄色斑点组成，一个在 $0^\circ$ 方向(直线通过)，另外两个分别在 $\pm 45^\circ$ 的方向。现若在黄光同样的方向上再加上同样强度的红光，则新的图样为：

- (1) 红色的斑点在 $0^\circ$  和 $\pm 45^\circ$  ；
- (2) 黄色的斑点在 $0^\circ$  和 $\pm 45^\circ$  ；
- (3) 橙色的斑点在 $0^\circ$  和 $\pm 45^\circ$  ；
- (4) 橙色的斑点在 $0^\circ$  ，黄色的斑点在 $\pm 45^\circ$  ，红色的斑点稍微偏离得更远一点；
- (5) 橙色的斑点在 $0^\circ$  ，黄色的斑点在 $\pm 45^\circ$  ，红色的斑点稍微更靠近一点。

## 选择题： #S5208.

复色光正入射到衍射光栅上，在屏幕上形成色散，若对一给定的级次 $k$ ，如何增大色散(使同一级次中不同颜色的光谱线分得更开)?

(1) 增大光栅常数 $d$ ;

(2) 减小光栅常数 $d$ ;

(3) 增大缝宽 $a$ ;

(4) 减小缝宽 $a$ ;

(5) 增多缝数 $N$ ;

(6) 减少缝宽 $N$ 。

$$\Delta(d \sin \theta) = \Delta(k \lambda)$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = \frac{k \Delta \lambda}{d \cos \theta}$$



**例：**用波长500nm的单色光垂直照射到每mm有500条刻痕的光栅上，**求：** 1)第1级和第3级明纹的衍射角；  
2)若缝宽与缝间距相等，最多能看到几条明纹？

**解：** 1)光栅常数  $d=1\times 10^{-3}/500=2\times 10^{-6}\text{m}$   $\because d \sin \theta = \pm k \lambda$

第1级明纹  $\sin \theta_1 = \pm \frac{\lambda}{d} = \pm \frac{500 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-6}} = \pm 0.25$   $\theta_1 = \pm 14^\circ 28'$

第3级明纹  $\sin \theta_3 = \pm \frac{3\lambda}{d} = \pm \frac{3 \times 500 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-6}} = \pm 0.75$   $\theta_3 = \pm 48^\circ 35'$

2)能看到的最高级谱线的极限，对应衍射角 $\theta=\pi/2$

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2 \times 10^{-6}}{500 \times 10^{-9}} = 4 \quad \text{即最多能看到第4级明条纹}$$

**考虑缺级**  $(a+b)/a=(a+a)/a=2$ ，第 $\pm 2$ 、 $\pm 4$ 级明纹不出现，只能看到  $9-4=5$  条明纹(主极大)。

#### 4. 光栅衍射的光强公式

$p$ 点处是 $N$ 个同方向、同频率、同振幅、相位依次相差 $\Delta\varphi$ 的简谐振动的合成。

相邻缝在 $p$ 点的相位差均为

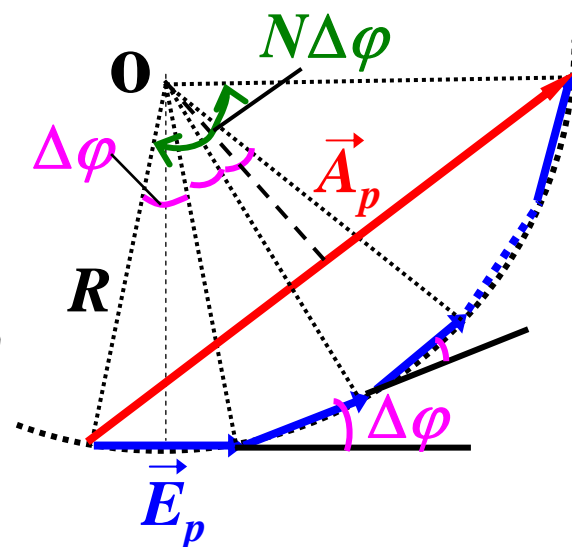
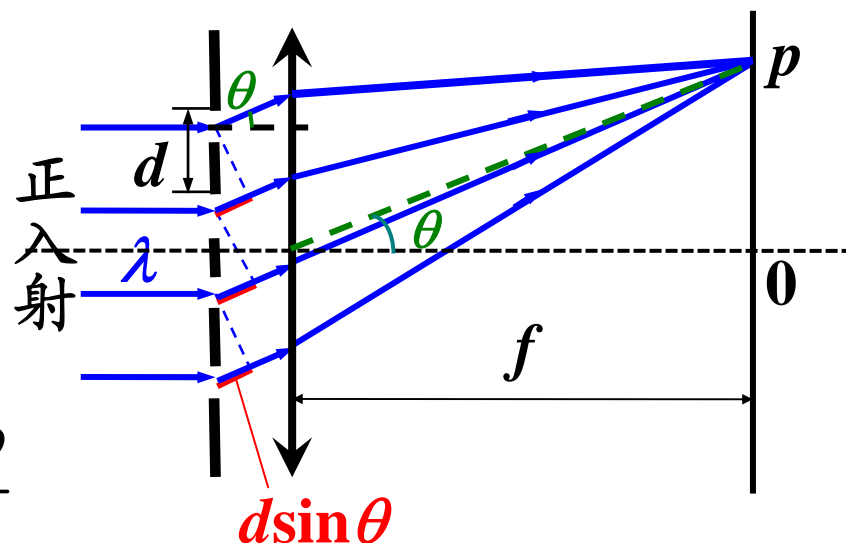
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

$p$ 点合振幅为  $A_p = 2R \sin \frac{N\Delta\varphi}{2}$

各分振幅为  $E_p = 2R \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$

$$A_p = E_p \cdot \frac{\sin N \frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

$$\gamma = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \cdot \sin\theta$$



$$A_p = E_p \cdot \frac{\sin N \frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} = E_p \cdot \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \cdot \sin \theta$$

由单缝衍射的光强公式，每个单缝在 $p$ 点(衍射角 $\theta$ )均有

$$E_p = E_{0\text{单}} \frac{\sin \beta}{\beta} \quad \beta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \quad A_p = E_{0\text{单}} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \cdot \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma}$$

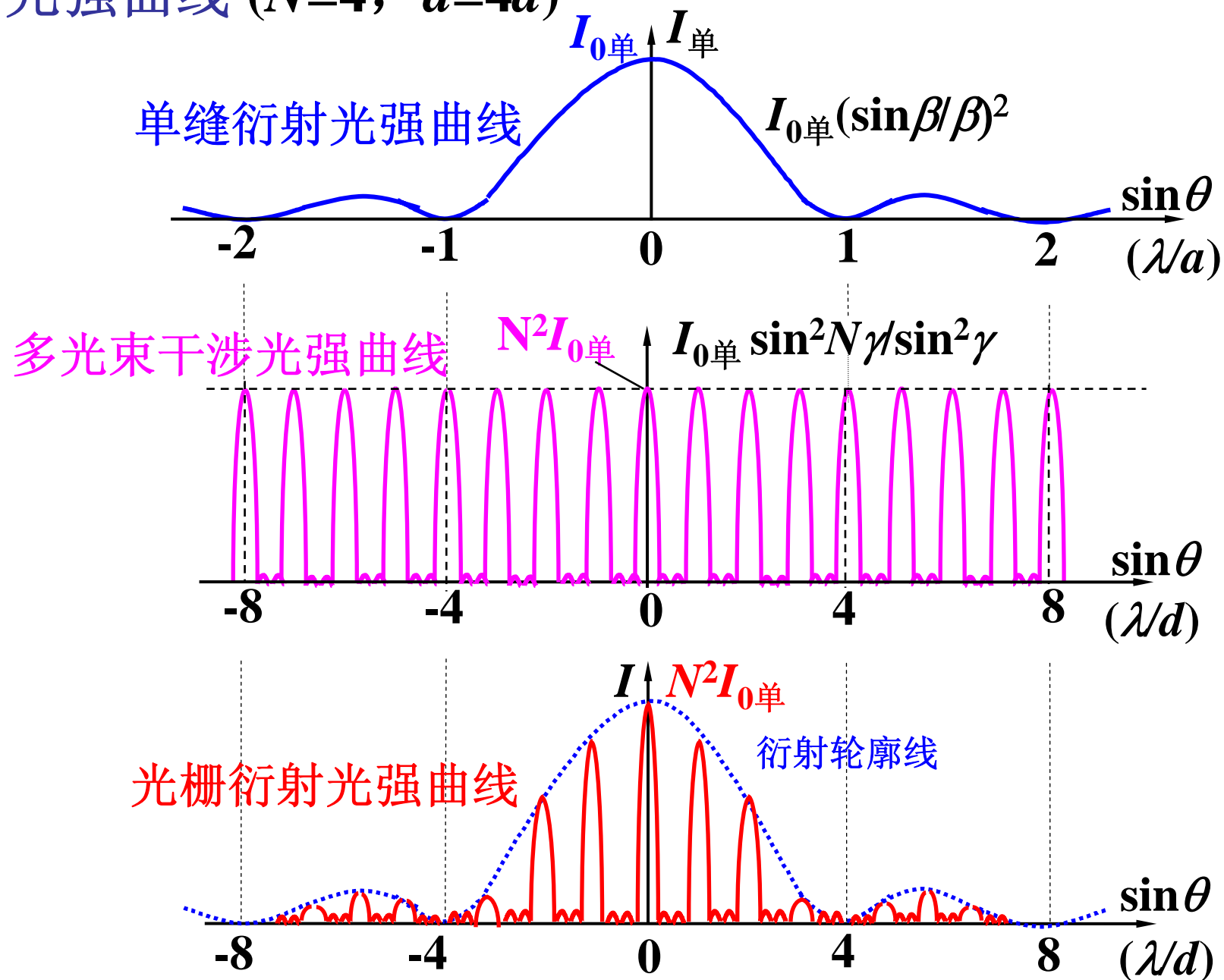
单缝中央主极大光强

$$I_p = I_{0\text{单}} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)^2$$

单缝衍射因子

多光束干涉因子

• 光强曲线 ( $N=4$ ,  $d=4a$ )



**判断题： #T5210.**

缝数为 $N$ 的光栅衍射，其主极大强度是单个缝的中央明纹强度的 $N^2$ 倍，因而通过 $N$ 缝光栅的能流是通过其中单个缝的 $N^2$ 倍。

判断题： #T5211.

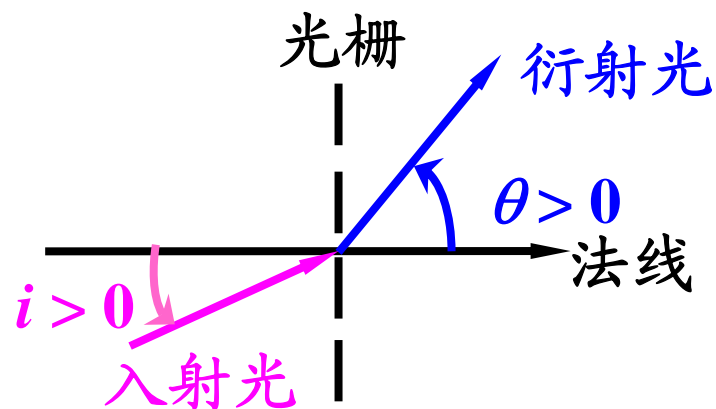
衍射屏上有大量的缝，这些缝的缝宽 $a$ 均相同，但缝间距 $b$ 作无规则分布，对这个衍射屏在夫琅禾费衍射中，由于各缝之间的相位差毫无规则，非相干叠加的结果使屏幕上不会出现任何条纹。

•强度是单缝的 $N^2$ 倍？

## 5. 光线斜入射的光栅方程

$$\delta = d(\sin \theta - \sin i)$$

角度的正负：由法线转向光线，逆时针为正。

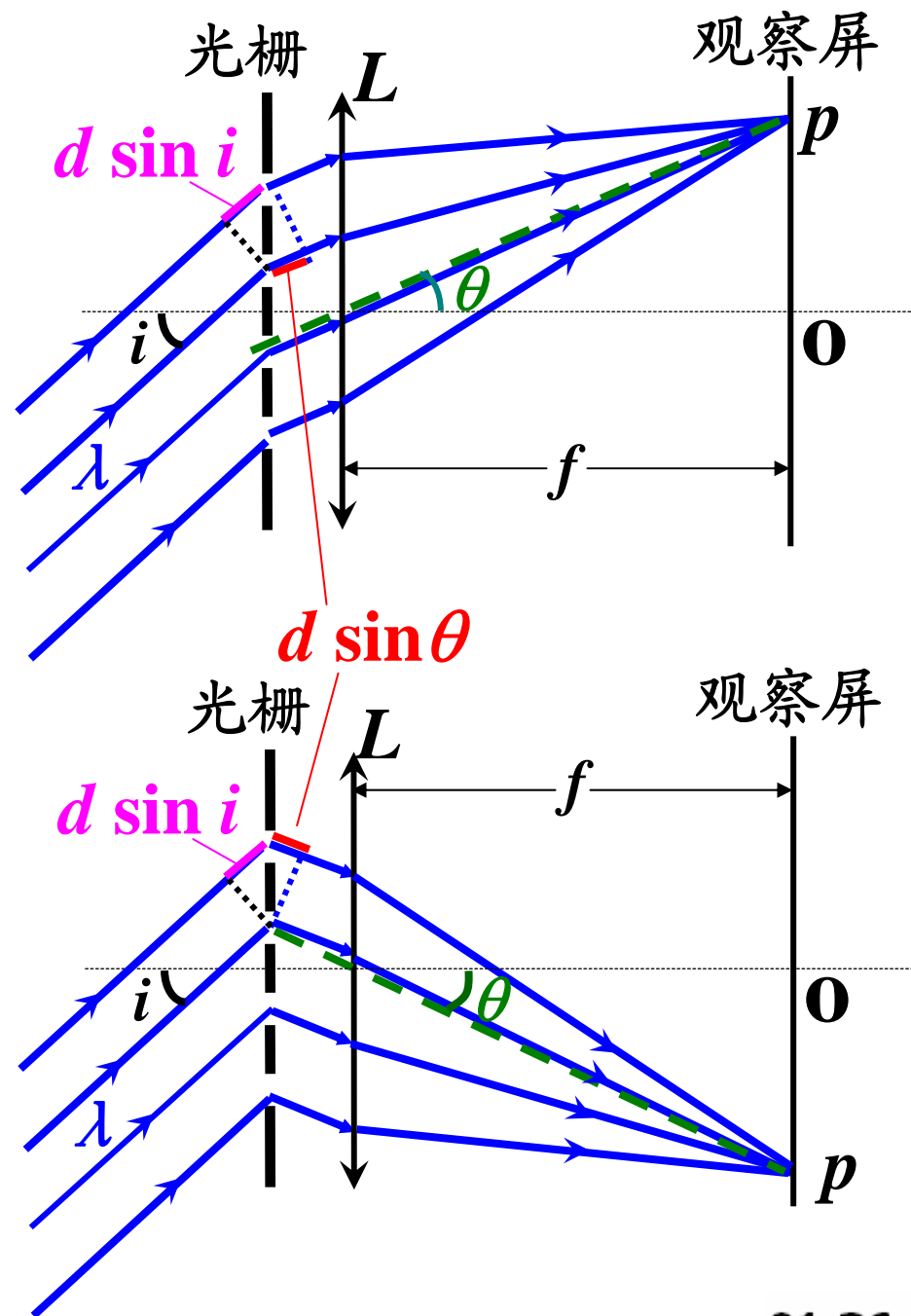


干涉主极大条件：

$$d(\sin \theta - \sin i) = \pm k \lambda$$

—斜入射的光栅方程

斜入射可获得更高级次的条纹（高级次分辨率高）



## § 5 X 射线衍射

### 5.1 X 射线

1895年，德国物理学家威廉·伦琴发现高速电子撞击固体可产生一种穿透力很强的中性射线，称为X射线。



伦琴夫人之手

由于X射线的发现具有重大的理论意义和实用价值，伦琴于1901年获首届诺贝尔物理学奖。



Wilhelm C.Röntgen

1845 — 1923

1953年英国的威尔金斯、沃森和克里克利用X射线的结构分析得到了遗传基因脱氧核糖核酸（DNA）的双螺旋结构，荣获了1962年度诺贝尔生物和医学奖。

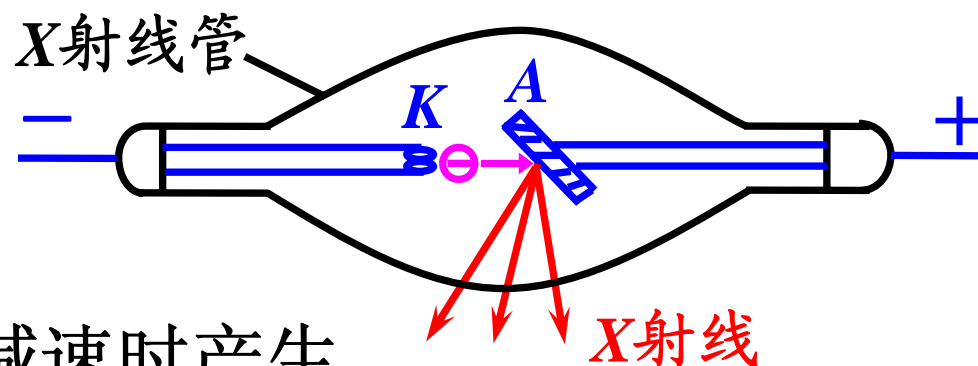


## 1. X射线的产生

$K$  — 阴极,  $A$  — 阳极

$A-K$ 间加几万伏高压,  
加速阴极发射的热电子

高速电子在靶面上骤然减速时产生。



## 2. X射线的特点

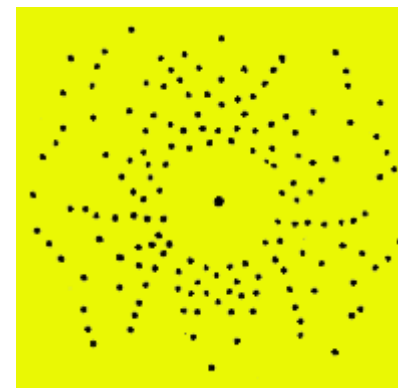
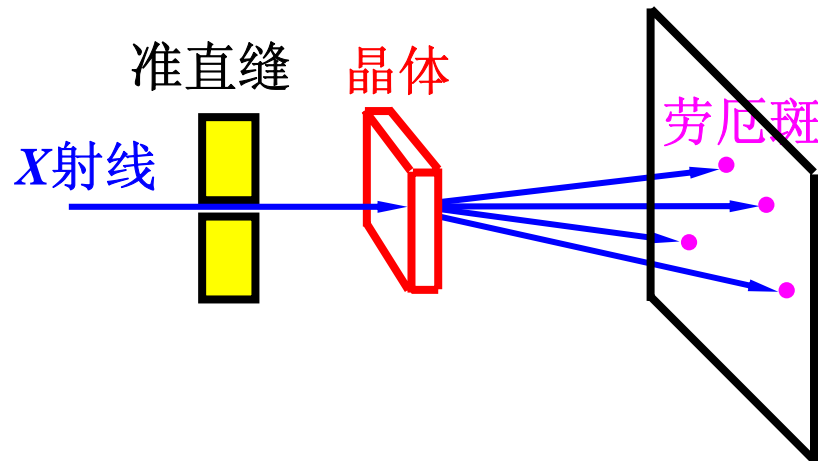
- 在电磁场中不发生偏转
- 使某些物质发荧光, 使气体电离, 底片感光
- 穿透力强: 很容易穿过由H、O、C、N等轻元素组成的肌肉组织, 但不容易穿透骨骼
- 光子能量高: 原子内壳层电子的跃迁产生
- 频率高、波长短的电磁波,  $\lambda$ 范围:  $10^{-1} \sim 10^2 \text{Å}$ ,
- 普通光栅  $a \gg \lambda$ , 观察不到X射线衍射

## 5.2 劳厄实验

德国物理学家劳厄(M. V. Laue, 1879-1960)发现X射线的衍射现象，从而判定X射线的本质是**高频电磁波**。

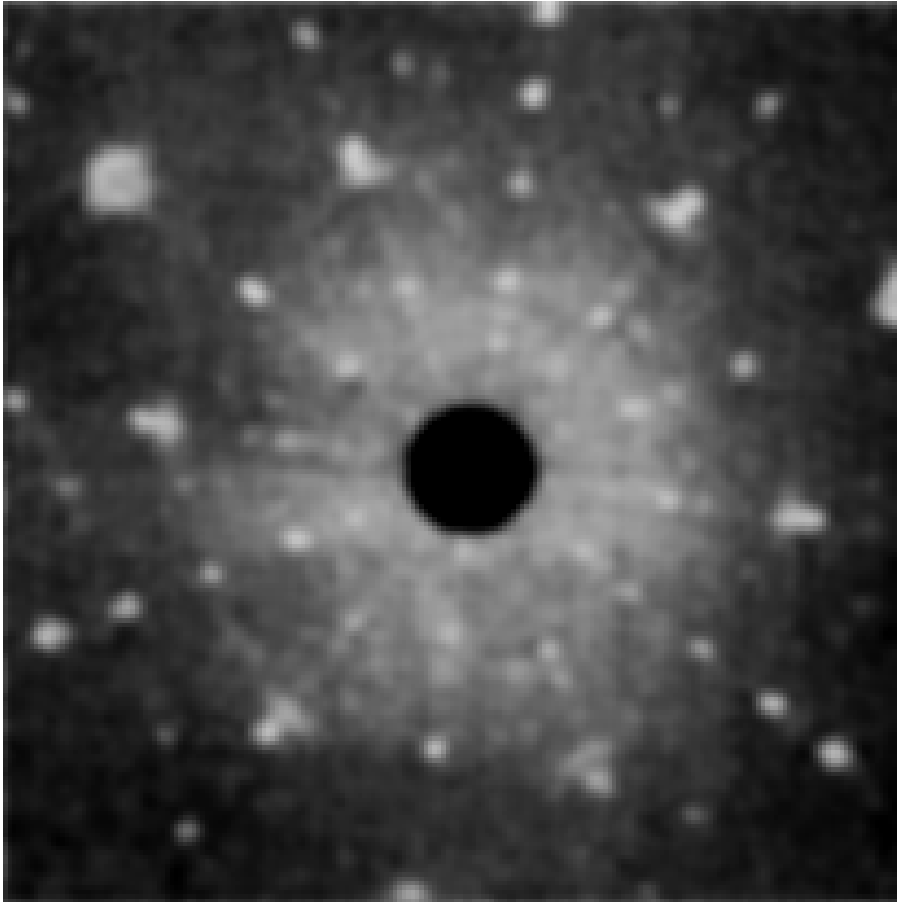
1904年，他因此获得诺贝尔物理学奖。

晶体中原子排列成有规则的空间点阵，原子间距为 $10^{-10}\text{m}$ 的数量级，与X射线的波长同数量级，可以看作是光栅常数很小的空间**三维衍射光栅**

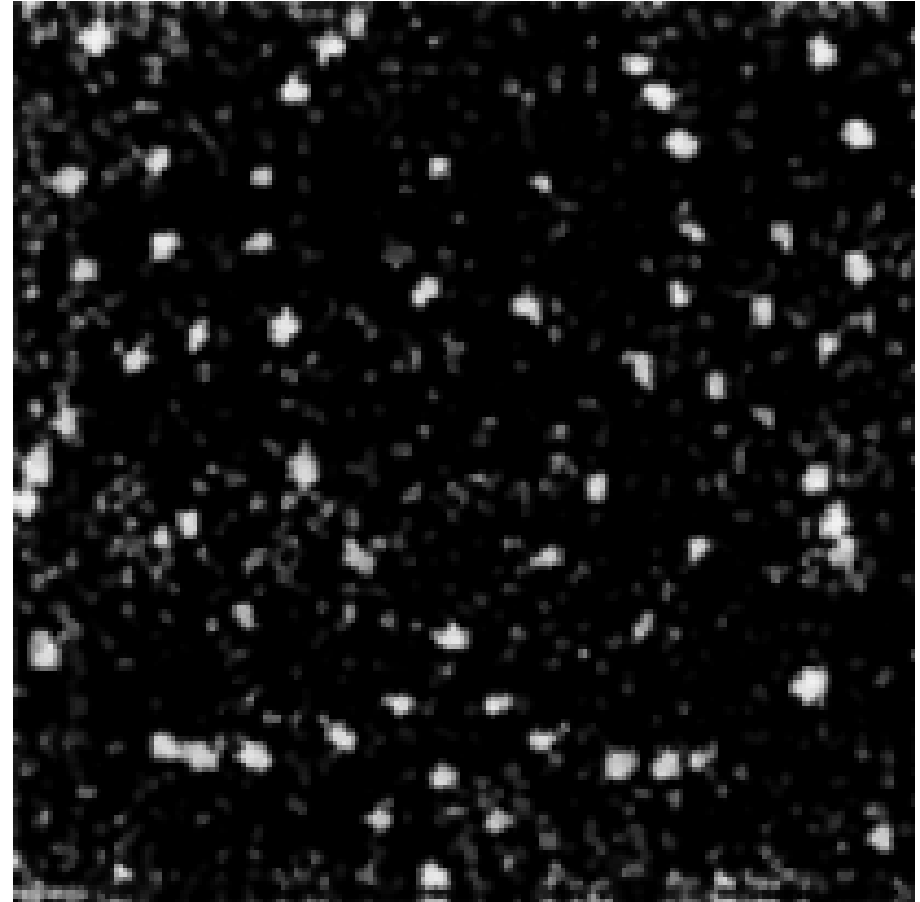


在乳胶板上形成对称分布的若干衍射斑点，称为**劳厄斑**。

X射线通过**红宝石晶体(a)**和**硅单晶体(b)**的劳厄斑照片

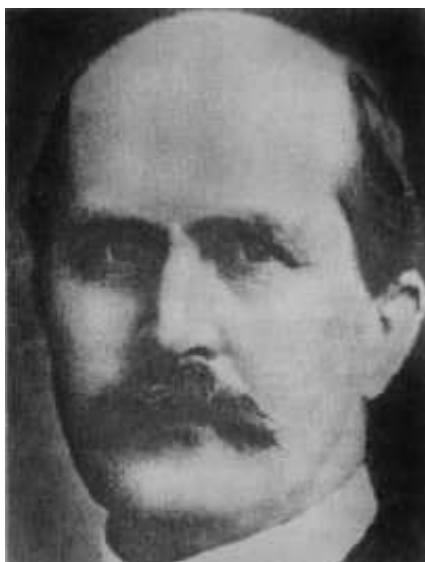


(a)



(b)

## 5.3 布拉格方程



威廉·亨利·布拉格(父)

**W. H. Bragg**

**1862 — 1942**



威廉·劳伦斯·布拉格(子)

**W. L. Bragg**

**1890 — 1971**

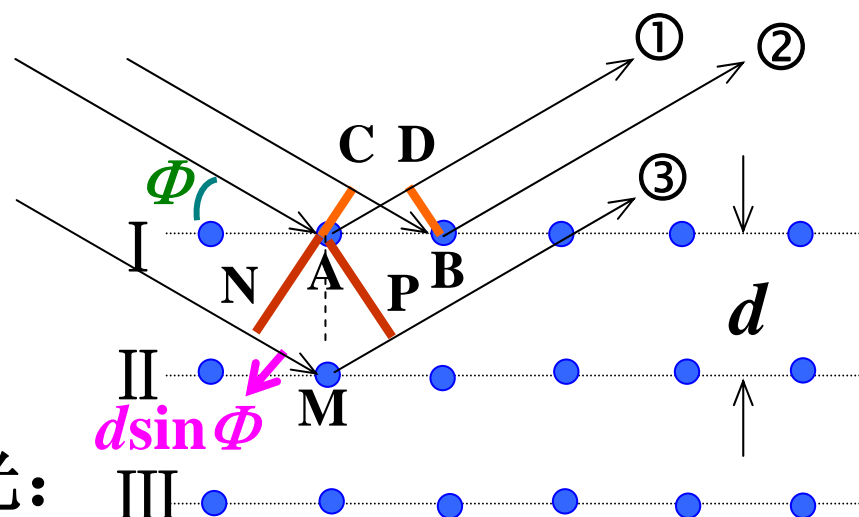
英国物理学家，在利用X射线研究晶体结构方面作出了巨大贡献，奠定了X射线谱学及X射线结构分析的基础。他们因此而于**1915年共同获得诺贝尔物理学奖。**

以角  $\Phi$  掠射的单色平行X光  
晶体点阵  $\rightarrow$  反射光栅

$d$  : 晶面间距(晶格常数)

NaCl  $d = 0.28\text{nm}$

• 同一层晶面上各点间反射光:



相邻两束光  $\delta = \text{BC} - \text{AD} = 0$ , 在反射方向上衍射光强极大

• 各层间反射光:  $\delta = \text{NM} + \text{MP} = 2d \cdot \sin \Phi$

各层反射光互相加强, 形成亮点条件:

$$2d \cdot \sin \Phi = k\lambda \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{—— 布拉格公式}$$

▲应用:

- 已知  $\Phi$ 、 $\lambda$  可测  $d$  — X 射线晶体结构分析
- 已知  $\Phi$ 、 $d$  可测  $\lambda$  — X 射线光谱分析

## ▲与普通光栅衍射的区别：

- 一维光栅只有一个加强条件  $d(\sin \theta - \sin i) = \pm k\lambda$   
在 $\lambda$ 和入射角 $i$ 确定后，总能有衍射角 $\theta$ 满足光栅方程
- 晶体有很多组平行晶面，  
不同方向上的晶面族具有不同的 $d$

对第 $i$ 族晶面，布拉格公式

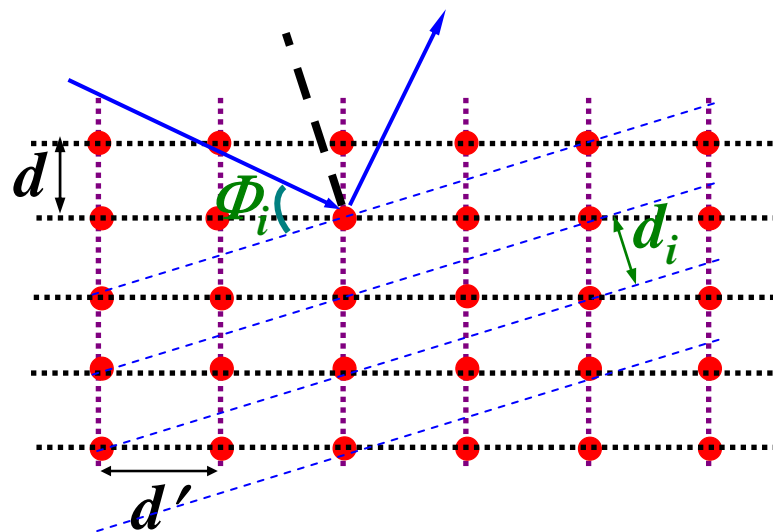
$$2d_i \cdot \sin \Phi_i = k_i \lambda \quad k_i = 1, 2, \dots$$

X射线衍射可以有一系列的布拉格条件

晶体在 $d_i$ ,  $\Phi_i$ ,  $\lambda$ 都确定时，不一定满足布拉格公式。

同时限定 $\Phi_i$ 和 $\lambda$ 要满足布拉格公式较困难，

实际观察X射线衍射的作法如下：劳厄法、粉末法



## (1)劳厄法:

用 $\lambda$ 连续的X射线照射晶体，  
得到所有晶面族反射的亮斑。

——劳厄相

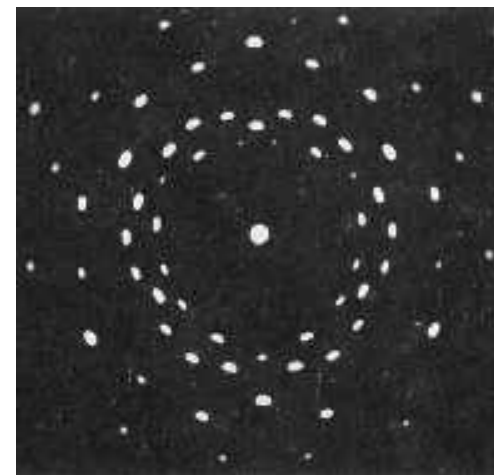
研究劳厄斑的位置和强度，  
可以确定晶轴方向。

## (2)粉末法:

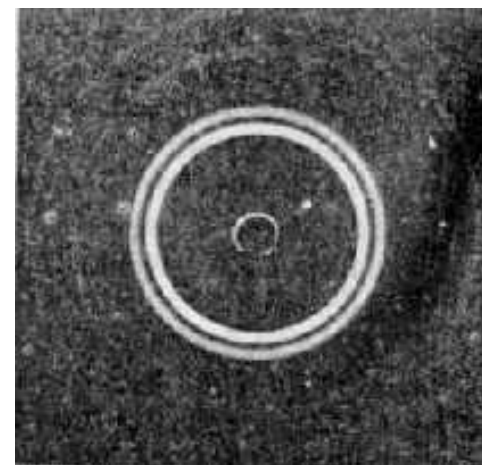
用确定 $\lambda$ 的X射线入射到多晶粉末上。  
大量无规则的晶面取向，  
总可使布拉格条件得到满足。

——德拜相

由于波长确定，根据德拜相，  
可以确定晶格常数。



SiO<sub>2</sub> 的Laue相



铝粉的Debye相

# 本章内容

## ★ ★ ★熟悉★ ★ ★

- ◆单缝衍射：半波带法，条纹特点，缝宽 $a \gg \lambda \rightarrow$ 几何光学
- ◆光栅衍射：单缝衍射+多缝干涉，光栅方程、缺级

## ★ ★理解★ ★

- ◆单缝衍射和光栅衍射的光强公式
- ◆夫琅禾费圆孔衍射  $D \cdot \sin \theta_1 \approx 1.22\lambda$
- ◆光学仪器的分辨本领：瑞利判据
- ◆X射线在晶体上的衍射：三维空间光栅，布拉格公式

## ★了解★

- ◆惠更斯—菲涅耳原理：无限多子波干涉
- ◆斜入射的光栅方程



# 物理学教程

P237

20, 23,

22, 25

