第一章 知识结构图

研究随机现象

随机试验所有可能结果组成的集合

样本空间的子集

基本概念与运算

（随机试验，样本空间，事件）

1、可重复
2、事先明确所有可能结果
3、每次试验结果不确定

a. 事件关系（包含、并、交、差、互斥、逆）
b. 事件运算（交换、结合、分配、德摩根律）

频率与概率

统计定义

公理化定义

古典定义

第一章 知识结构图

- 基本概念与运算（随机试验，样本空间，事件）
  - 频率与概率
    - 统计定义
      - 频率的稳定性
    - 公理化定义
      - 1、非负性 2、规范性 3、可列可加性（两两互不相容）
      - 概率性质、多个事件加法定理
    - 古典定义
      - 1、元素有限性 2、等可能性
      - 排列组合：所有/某条件下基本事件数

第一章 知识结构图

古典定义

条件概率

全概率公式与贝叶斯公式

独立性

性质、
计算（定义、缩减样本空间）、
乘法定理（多个事件积事件）

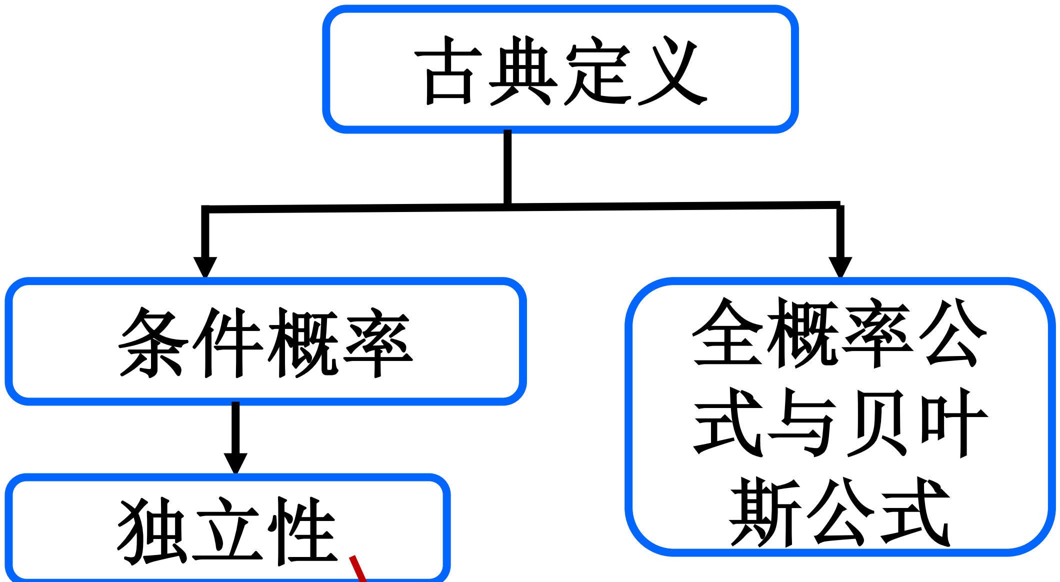
用条件概率求非条件概率：
1、样本空间划分：互斥完备组
2、基于划分，综合加法公式和乘法公式，

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+\cdots$$
$$=P(A|B_n)\cdot P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$

已知结果求原因：用条件概率求条件概率

贝叶斯公式 $P(B_i|A)=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$,

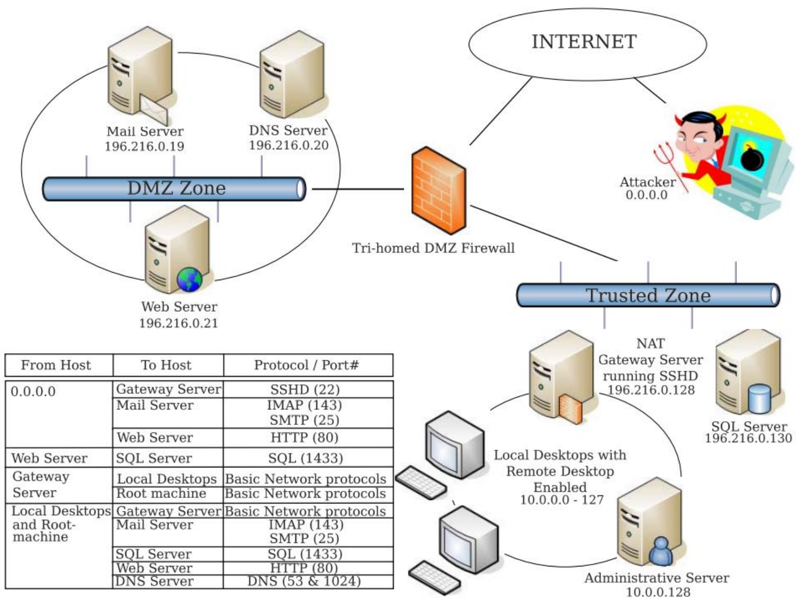
第一章 知识结构图



1、P(AB)=P(A)P(B)
2、P(A)>0,P(B)>0,独立和互不相容：不同时成立
3、区分两两独立和相互独立
4、用独立的乘积特性、德摩根律求独立事件和的概率

网络横向移动攻击事件

相互连接关系



From Host	To Host	Protocol / Port#
0.0.0.0	Gateway Server	SSHD (22)
	Mail Server	IMAP (143) SMTP (25)
	Web Server	HTTP (80)
Web Server	SQL Server	SQL (1433)
Gateway Server	Local Desktops	Basic Network protocols
	Root machine	Basic Network protocols
Local Desktops and Root-machine	Gateway Server	Basic Network protocols
	Mail Server	IMAP (143) SMTP (25)
	SQL Server	SQL (1433)
	Web Server	HTTP (80)
	DNS Server	DNS (53 & 1024)

Fig. 1. Test-bed network model.

不安全诱因

TABLE 1
Initial List of Vulnerabilities in Test Network

Host	Vulnerability	CVE#	Type of Attack
Local desktops (10.0.0.0-127)	Remote login LICQ Buffer Overflow (BOF) MS Video ActiveX Stack BOF	CA 1996-83 CVE 2001-0439 CVE 2009-0015	remote-2-user remote-2-user remote-2-root
Admin machine (10.0.0.128)	MS SMV service Stack BOF	CVE 2008-4050	local-2-root
Gateway server (196.216.0.128)	OpenSSL uses predictable random Heap corruption in OpenSSH Improper cookies handler in OpenSSH	CVE 2008-0166 CVE 2003-0693 CVE 2007-4752	information leakage local-2-root authentication bypass
SQL Server (196.216.0.130)	SQL Injection	CVE 2008-5416	remote-2-root
Mail Server (196.216.0.19)	Remote code execution in SMTP Error message information leakage Squid port scan vulnerability	CVE 2004-0840 CVE 2008-3060 CVE 2001-1030	remote-2-root account information theft information leakage
DNS Server (196.216.0.20)	DNS Cache Poisoning	CVE 2008-1447	integrity
Web Server (196.216.0.21)	IIS vulnerability in WebDAV service	CVE 2009-1535	remote-2-local authentication bypass

N. Poolsappasit, R. Dewri and I. Ray, "Dynamic Security Risk Management Using Bayesian Attack Graphs," in *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, vol. 9, no. 1, pp. 61-74.

网络横向移动攻击事件

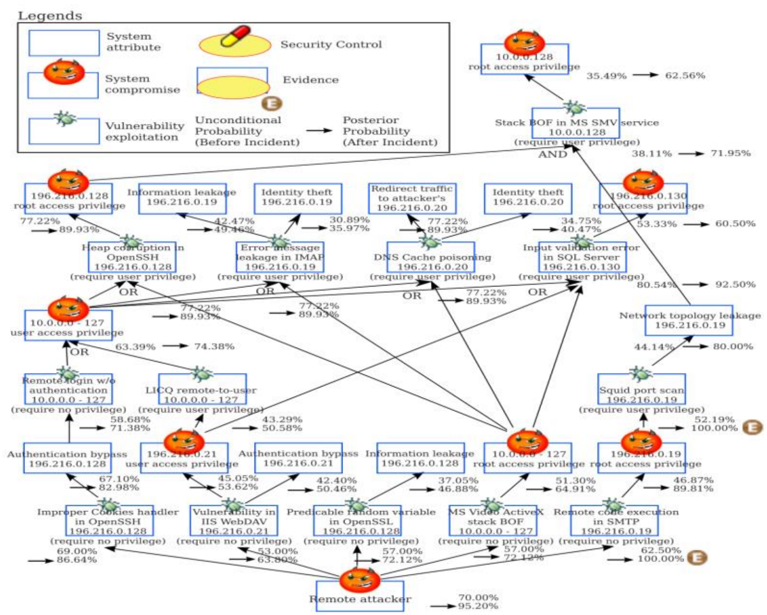


Fig. 2. BAG of test network with unconditional probabilities and posterior probabilities given two attack incidences (marked by Ⓔ).

根据攻击图：

1、分析每个不安全事件发生的概率；（诱因的先验概率）

2、根据已发生事件信息，倒推可能的诱因（如，分析每条攻击路径发生的概率）；（诱因的先验概率和后验概率）

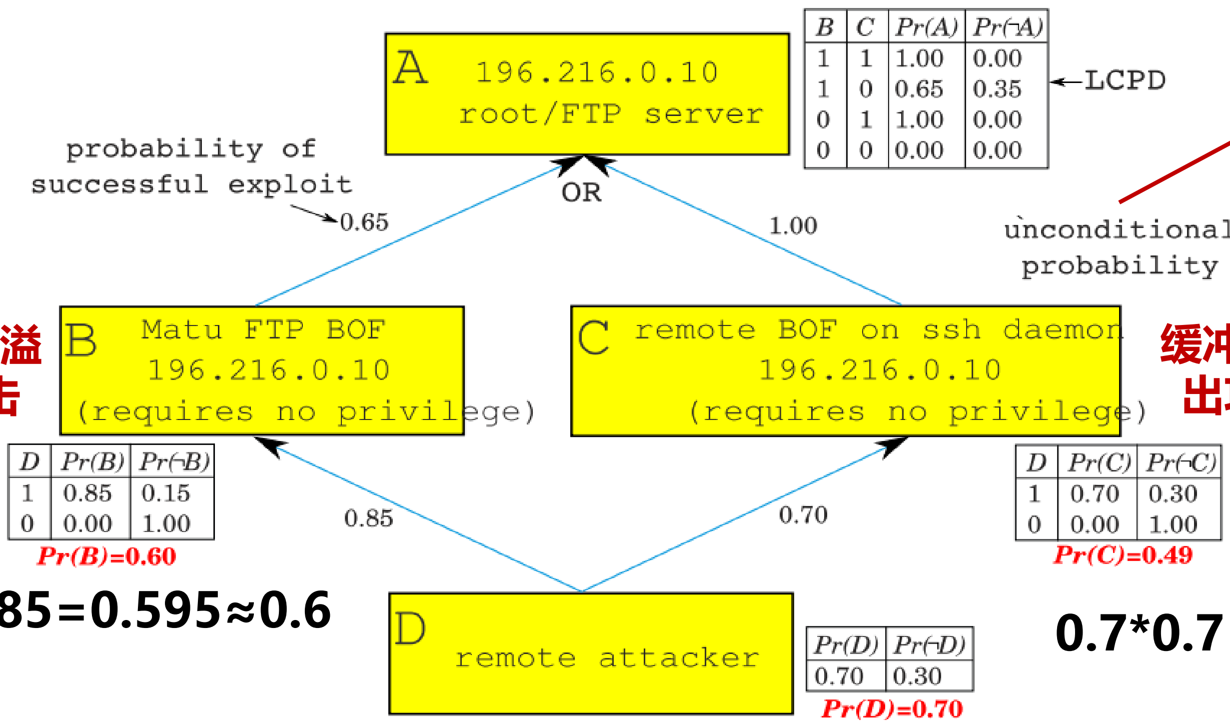
3、基于以上信息，部署单点防御策略，或针对不同的攻击路径部署多点防御策略等（应用）。

N. Poolsappasit, R. Dewri and I. Ray, "Dynamic Security Risk Management Using Bayesian Attack Graphs," in *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, vol. 9, no. 1, pp. 61-74.

网络横向移动攻击事件

Pr(A)=
0.6*0.49+
0.6*0.51*0.65+
0.4*0.49
=0.6889

缓冲区溢出攻击



缓冲区溢出攻击

0.7*0.85=0.595≈0.6

0.7*0.7=0.49

Fig. 3. Simple BAG illustrating probability computations.

N. Poolsappasit, R. Dewri and I. Ray, "Dynamic Security Risk Management Using Bayesian Attack Graphs," in *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, vol. 9, no. 1, pp. 61-74.

第二章
随机变量及其分布

王笑尘

北京邮电大学网络空间安全学院

wxiaochen@bupt.edu.cn

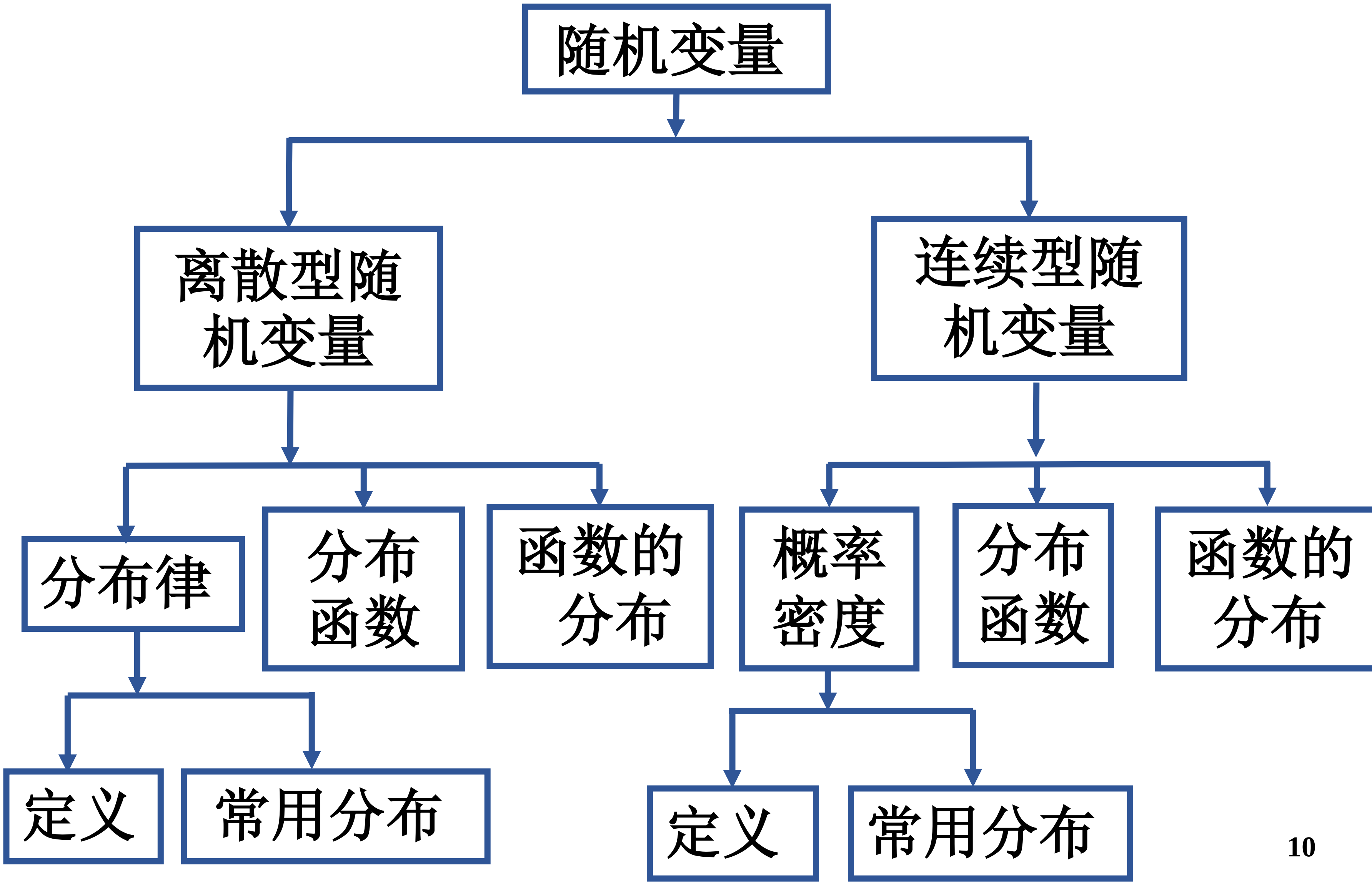
第二章 随机变量及其分布

1. 事件及其关系
2. 概率的定义
3. 简单的概率模型
4. 基本运算法则

第一章基于随机试验讨论的问题

为了更好地描述随机试验的每一个结果，本章将给出随机变量和分布函数(重点和难点)的概念

第二章 知识结构图

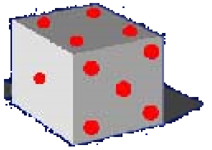

随机变量
离散型随机变量
连续型随机变量
分布律
分布函数
函数的分布
概率密度
分布函数
函数的分布
定义
常用分布
定义
常用分布

随机变量概念的产生

➢ 有些随机试验结果本身与数值有关（其每个元素是一个数)

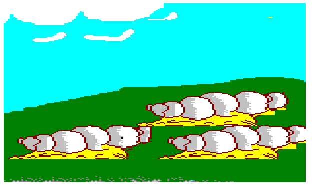
例如

◆ 掷一颗骰子上面出现的点数

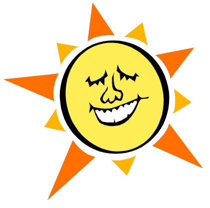


◆ 每天从北京站下火车的人数

◆ 昆虫的产卵数



◆ 七月份上海的最高温度



◆ ……

随机变量概念的产生

- 在有些试验中，试验结果与数值无关，这样的样本空间不便于描述和研究；
- 于是引入一个法则，将每个试验结果与实数对应起来，即**把试验结果数值化。由此产生了随机变量的概念**。

正如裁判员在运动场上不叫运动员的名字，而叫号码一样，两者建立了一种对应关系。

随机变量概念的产生

这种试验结果与某一数值对应的关系在数学上理解为定义了一种实值函数，该实值函数有如下特点：

- 它随试验结果的不同而取不同的值，因而在试验之前只知道它可能取值的范围，而不能预先确定它将取哪个值。
- 由于试验结果的出现具有一定的概率，于是这种实值函数取每个值和每个确定范围内的值也有一定的概率。

称:这种定义在样本空间 S上的实值函数为随机变量。

引入随机变量的意义

有了随机变量，随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来。

例如： 单位时间内某电话交换台收到的呼叫次数用 X 表示，它是一个随机变量。

事件{收到不少于1次呼叫} $\Leftrightarrow$ $\{X \geq 1\}$。

事件{没有收到呼叫} $\Leftrightarrow$ $\{X = 0\}$。

引入随机变量的意义

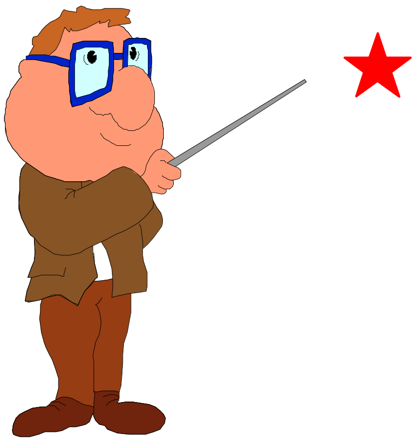
- 随机事件这个概念实际上是包容在随机变量这个更广的概念内。
- 也可以说，随机事件是从静态的观点来研究随机现象，而随机变量则是一种动态的观点，就如高等数学中常量与变量的区别。

例如： 单位时间内某电话交换台收到的呼叫次数用 X 表示，它是一个随机变量。

事件{收到不少于1次呼叫} $\Leftrightarrow$ $\{X \geq 1\}$。

事件{没有收到呼叫} $\Leftrightarrow$ $\{X = 0\}$。

引入随机变量的意义



随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件：

- 引入随机变量后，对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究扩展为对随机变量及其取值规律的研究。

例如： 单位时间内某电话交换台收到的呼叫次数用 X 表示，它是一个随机变量。

事件{收到不少于1次呼叫} $\Leftrightarrow$ $\{X \geq 1\}$。

事件{没有收到呼叫} $\Leftrightarrow$ $\{X = 0\}$。

引入随机变量的意义

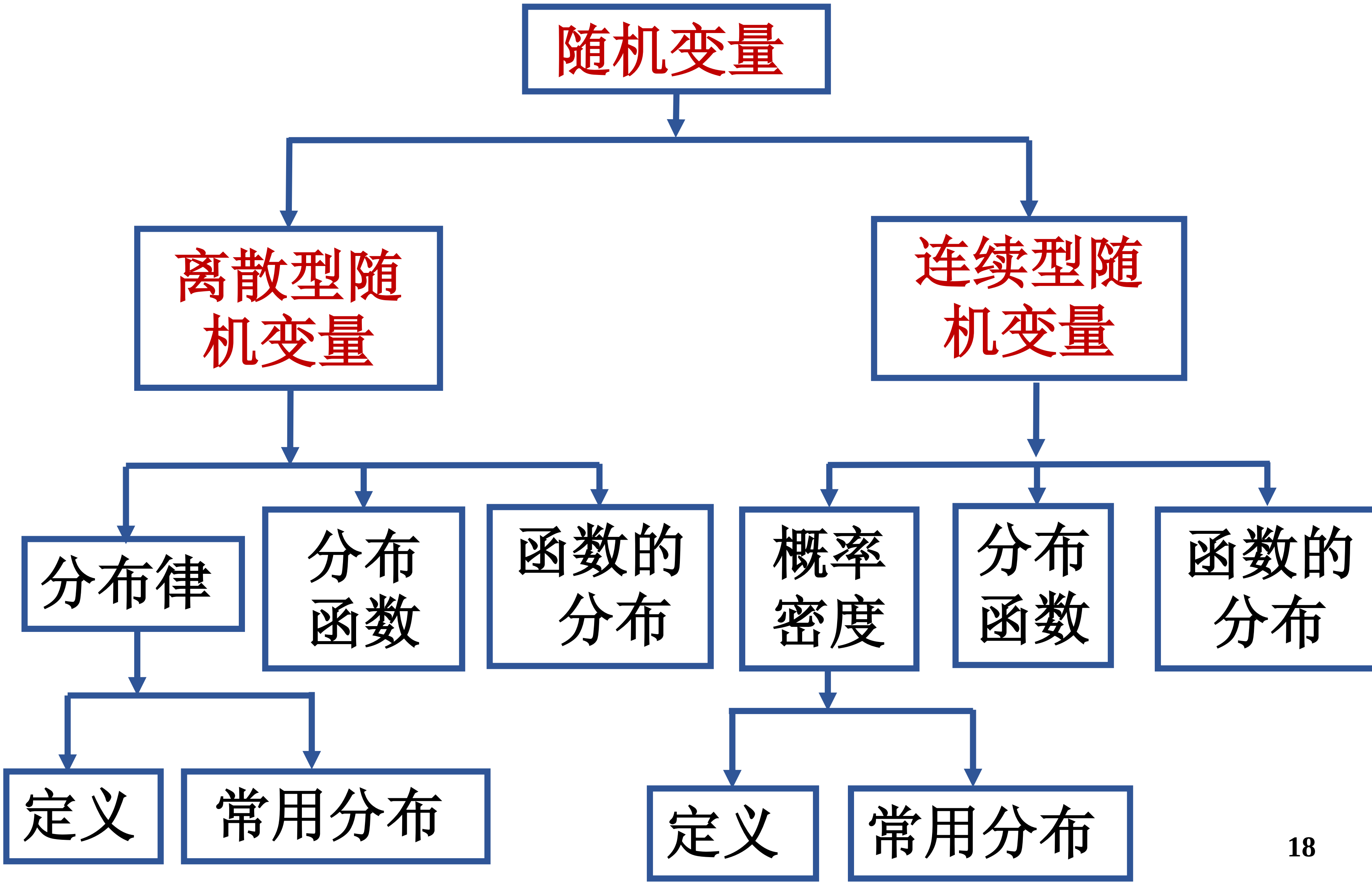
随机变量 —— 随机事件的数量化，且数量化后可从量的角度来研究随机现象统计规律性。

分布函数 —— 在随机变量基础上进一步解决（第一章中无法解决的）求区间上的概率问题，以及把各类随机变量的*特征分布用统一的形式表达出来*（便于归纳、对比不同随机现象的规律）。

（重点，难点）

事件及事件概率 → 随机变量及其取值规律

第一节 随机变量



随机变量
离散型随机变量
连续型随机变量
分布律
分布函数
函数的分布
概率密度
分布函数
函数的分布
定义
常用分布
定义
常用分布

第一节 随机变量

引例 投掷硬币的随机试验有两个可能的结果：正面和反面。

若把样本空间 S 记成：$S=\{e\}$

则可以引入一个变量 X：

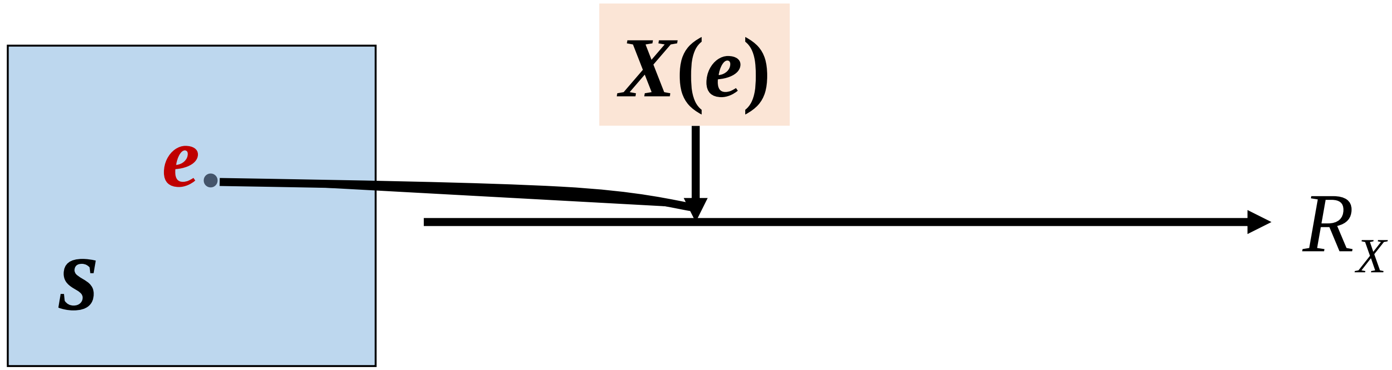
$$X=X(e)=\begin{cases}1 & e=\text{"正面"}\\ 0 & e=\text{"反面"}\end{cases}$$

因为变量 $X(e)$ 的取值是随机的，故称其为：随机变量。

随机变量的定义

定义 设随机试验E的样本空间 $S=\{e\}$，如果对于每一个 $e\in S$，都有一个实数与之对应，这样得到一个定义在S上的实值单值函数 $X(e)$，称 $X=X(e)$ 为随机变量。

注： 随机变量示意图



R_X 是 $X(e)$ 的值域，即所有可能取值的全体。

随机变量的定义

▲ 随机变量 $X = X(e)$ 的各个数值有一定的概率:

$\because$ X的取值随着试验的结果而定,而试验的各个结果的出现有一定的概率。比如引例中:

$$P(X=1)=P\,(\text{出现“正面”})=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 一般 对任意实数集合 L 有:

$$P(X\in L)=P(e\,|\,X(e)\in L)$$

上式表示:使得 $X(e)\epsilon L$ 的所有样本点e所组成的事件出现的概率。

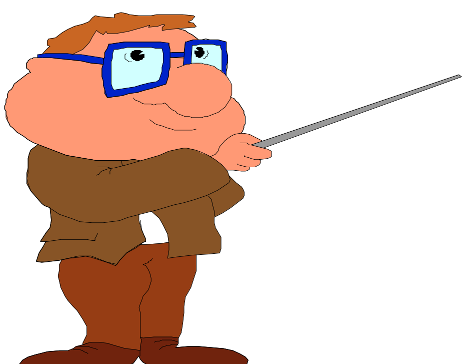
随机变量与普通函数的区别

普通函数:

- 定义在实数轴上;
- 由定义域可预知它取什么值（一一对应）。

随机变量:

- 定义在样本空间上(样本空间的元素不一定是实数);
- 由试验可预知其取值范围（基于样本空间），而它取各个值有一定的概率。



随机变量的定义

▲ 用随机变量表示事件，仍存在相等、并、交、对立、相容、独立的关系, 并可进行概率运算。

随机变量通常用大写字母 X, Y, Z 等表示

而表示随机变量所取的值时，一般采用小写字母 x, y, z 等。

例. (1) 一个射手对目标进行射击，击中目标记为 1 分，未中目标记为 0 分。

分析：设X：射手在一次射击中的得分，则X=X(e)是一个随机变量，它取值是 0 和 1。

$$X=X(e)=\begin{cases}0 & e=\text{未中目标}\\ 1 & e=\text{击中目标}\end{cases}$$

例. (2). 某段时间内候车室的旅客数目为 X ,则它也是一个随机变量, 它可以取 0 及一切自然数。X 是定义在样本空间:

$$S=\{e\}=\{\text{人数}\mid\text{人数}\geq 0\}$$

$$X=X(e)\text{的值域}R_X=[0,+\infty)$$

(3) 单位面积上某农作物的产量记为X, 则它也是一个随机变量。它可以取一个区间内的一切实数值, 即 $R_X\in[0,T],T$是一个常数.

随机变量的两种重要类型

随机变量

离散型随机变量

所有取值可以逐个一一列举（有限个或可列无限个）

例如“取到次品的个数”，“收到的呼叫数”等等。

连续型随机变量

全部可能取值不仅无穷多，而且不能一一列举，而是充满一个区间。

例如，“电视机的寿命”，实际中常遇到的“测量误差”等等。

随机变量的两种重要类型

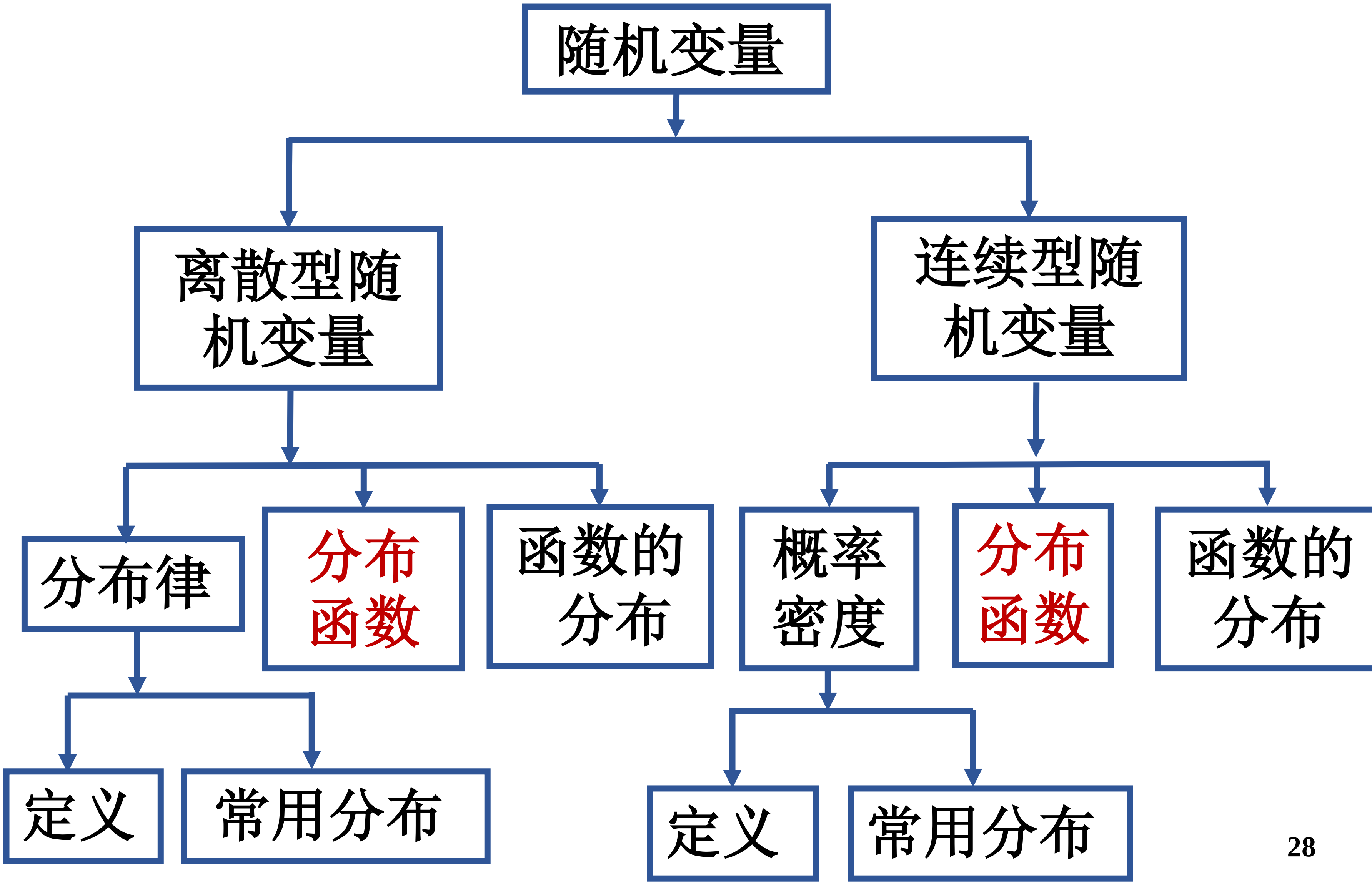
离散型随机变量：

若随机变量X的所有可能取值是有限个或可列无限个，则称X为离散型随机变量。

连续型随机变量：

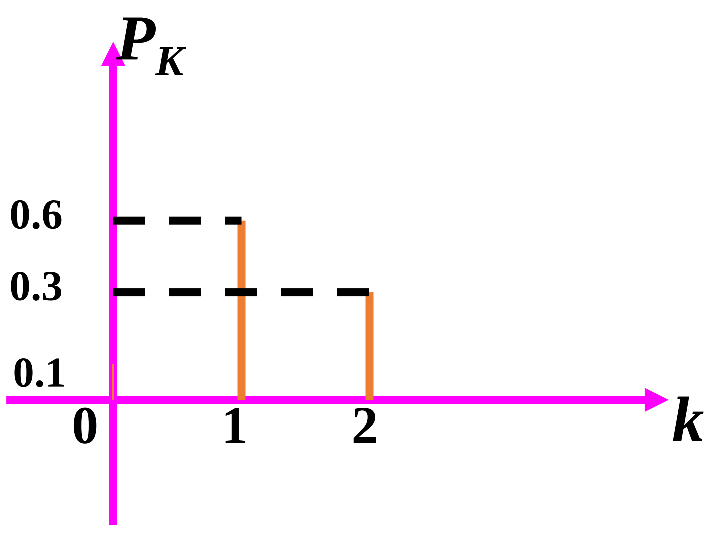
若随机变量X的所有可能取值可以是整个数轴或至少有一部分取值是某些区间，则称X是连续型随机变量。

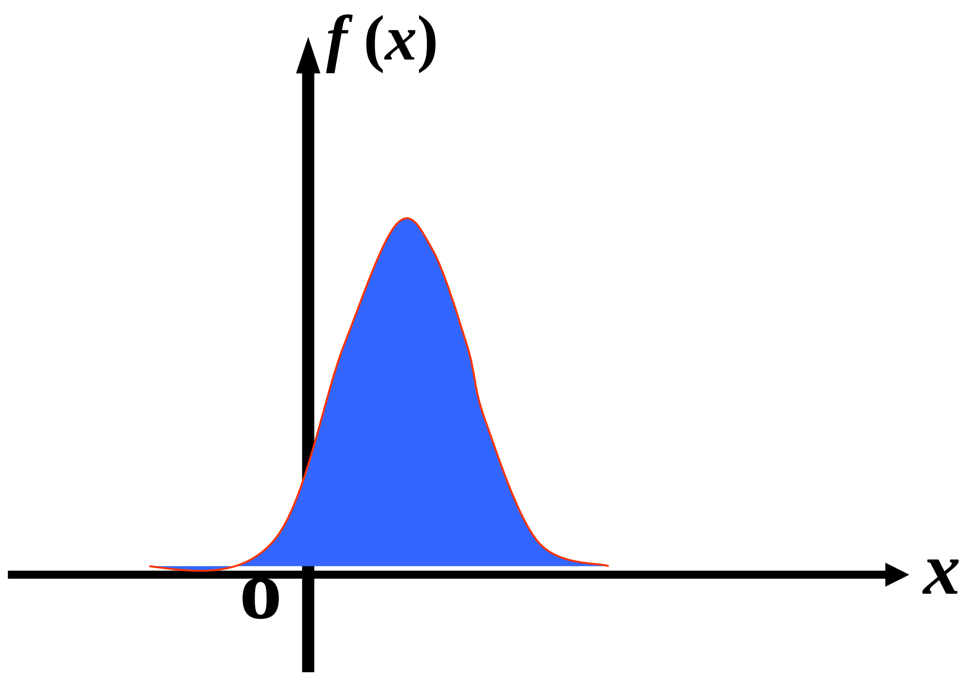
第三节 随机变量的分布函数



第三节 随机变量的分布函数

- 为了对离散型的和连续型的随机变量，以及更广泛类型的随机变量给出一种统一的描述方法，引入了分布函数的概念。





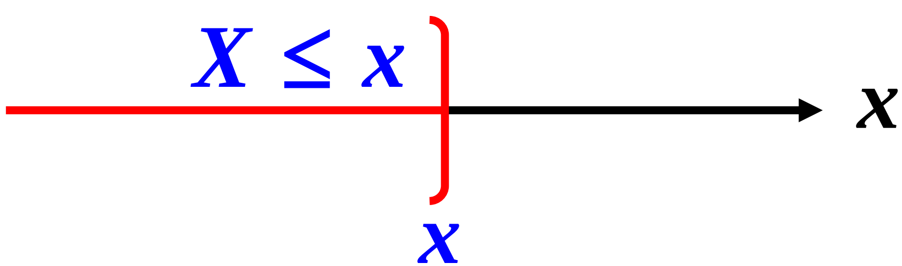
第三节 随机变量的分布函数

1. 定义: 设 X 是一个随机变量，x是任意实数，称函数:

$$F(x) = P(X \le x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

为 X 的分布函数。记作: $X \sim F(x)$ 或 $F_X(x)$.

注 如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，则分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X落在区间$(-\infty, x]$上的概率



第三节 随机变量的分布函数

注 ▲ 对任意的实数 $x_1, x_2 \ (x_1 < x_2)$

$$P(x_1 < X \le x_2) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1)$$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$

因此，只要知道了随机变量X的分布函数，它的统计特性就可以得到全面的描述。

第三节 随机变量的分布函数

2. 性质

性质1 $F(x)$是一个不减函数，即若 $x_1 \le x_2$，

则： $F(x_1) - F(x_2) \le 0$

证: $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \le x_2) \ge 0,$

即 $F(x_1) \le F(x_2)$

第三节 随机变量的分布函数

性质2 $0 \le F(x) \le 1$ 且: $\begin{cases} F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \\ F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 \end{cases}$

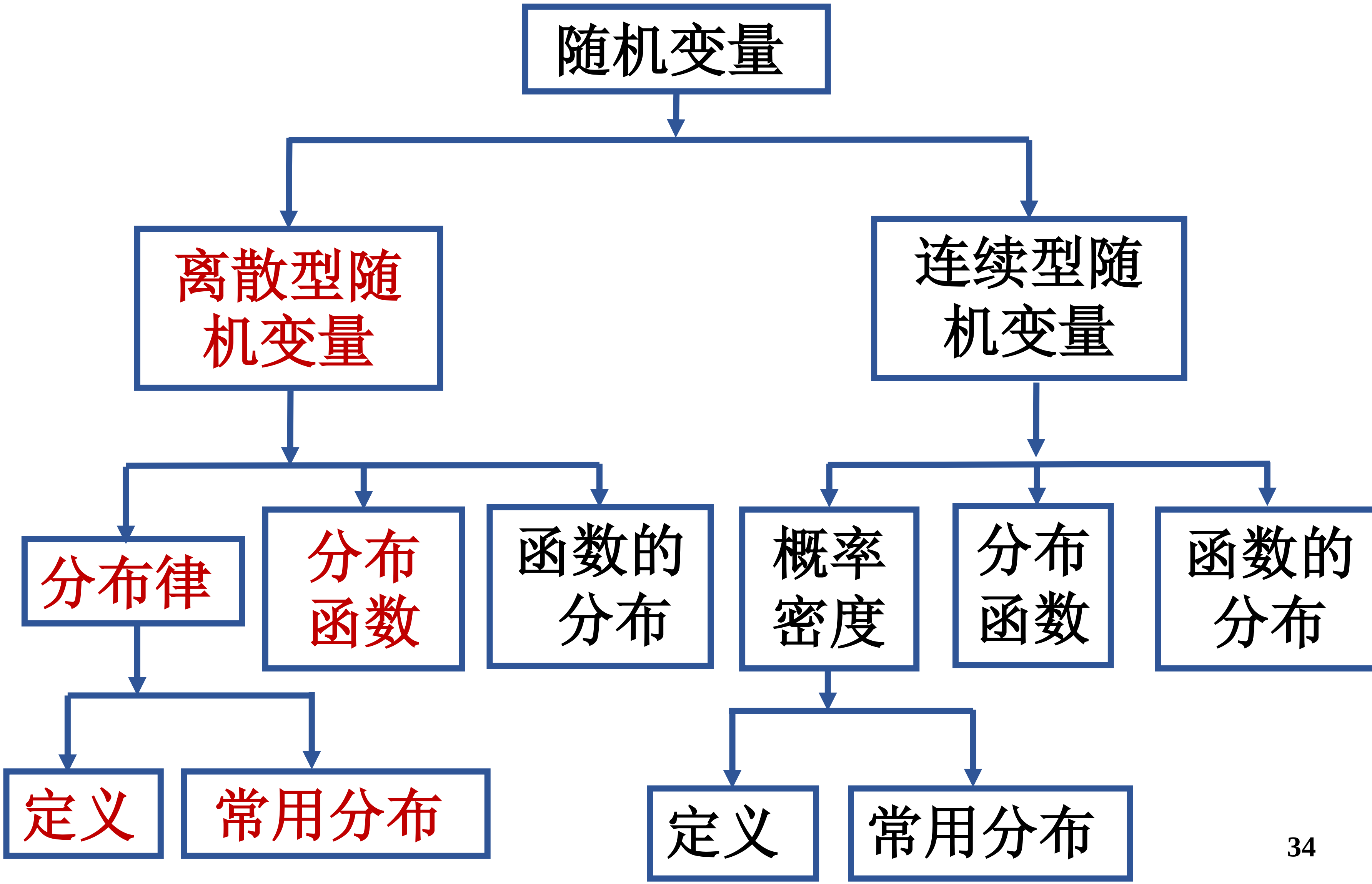
特别: 若 X 仅在 $(a,b]$内取值，则有:

$$F(a) = P(X \le a) = 0, \quad F(b) = P(X \le b) = 1$$

性质3 $F(x)$是右连续的函数,即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

反之，具备性质1、2、3的函数F(X) 必是某个随机变量的分布函数

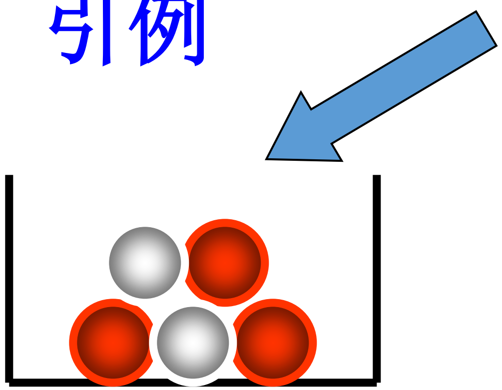
第二节 离散型随机变量及其分布律



第二节 离散型随机变量及其分布律

一. 离散型随机变量的分布律

引例



如图中所示，从中任取 3 个球

取到的白球数 X 是一个随机变量

X可能取的值是0,1,2

取每个值的概率为：

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

且： $\sum_{i=0}^{2}P(X=i)=1$

1. 定义: 设离散型随机变量 X 所有可能取值为 x_k ,$k = 0,1,2\cdots$其各个可能取值$\{X = x_k\}$的概率为:

$$P(X = x_k) = p_k \quad k = 0,1,2\cdots\cdots$$

则称 $P(X = x_k) = p_k$ 为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律。

注: 分布律可以列表给出

X	x_0	x_1	$x_2\cdots\cdots$	$x_n\cdots\cdots$
p_k	p_0	p_1	$p_2\cdots\cdots$	$p_n\cdots\cdots$

2. 性 质

(1). $p_k \geq 0, \quad k = 0,1,2\cdots$

(2). $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

用这两条性质判断一个函数是否是概率分布

注 ▲ 一般：求分布律时需验证这两条性质。若成立则称得上是分布律，否则说明分布律求错。

▲ 具有离散型随机变量才具有分布律。

例1. 设在15只同类型的零件中有**2只次品**，现从中抽取3只，以 X 表示取出3只中所含次品的个数。求:X的分布律.

解: X 的可能取值: 0, 1, 2。

X 的各种可能取值的概率如下:

$$P(X=0)=\frac{C_{13}^{3}C_{2}^{0}}{C_{15}^{3}}=\frac{22}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{C_{13}^{2}C_{2}^{1}}{C_{15}^{3}}=\frac{12}{35}$$

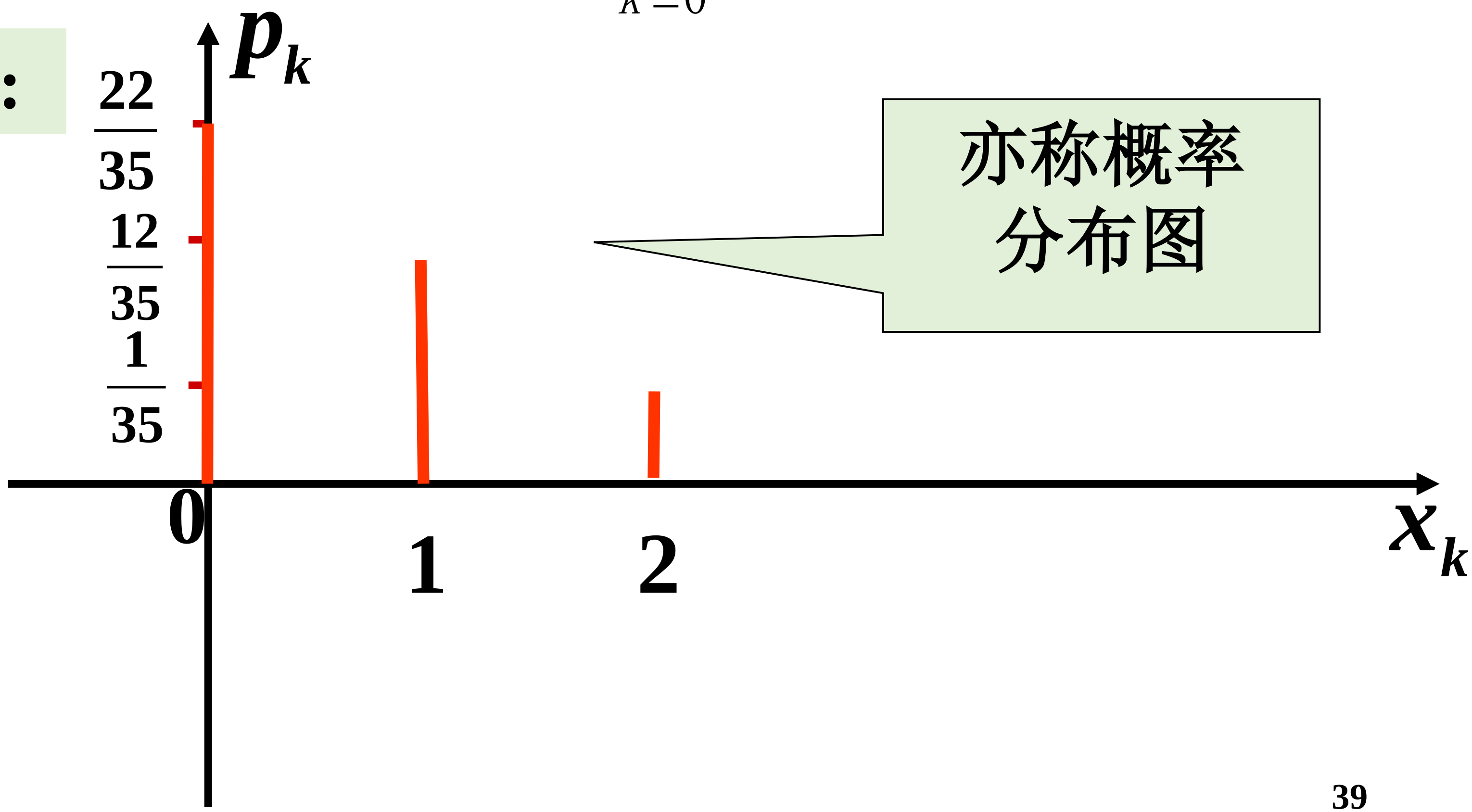
$$P(X=2)=\frac{C_{13}^{1}C_{2}^{2}}{C_{15}^{3}}=\frac{1}{35}$$

所以其分布律为:

X	0	1	2
p_k	$\dfrac{22}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

(显然每个 $p_k > 0, \sum_{k=0}^{2} p_k = 1$)

图形:



例2.某篮球运动员投中篮圈概率是0.9，

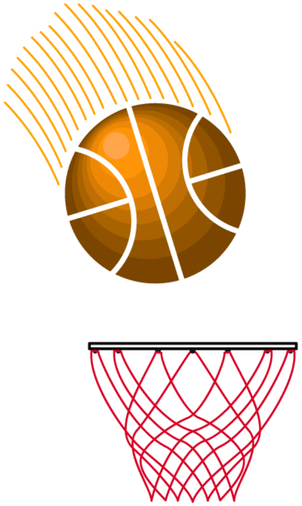
求：他两次独立投篮投中次数 X 的概率分布。

解： X 可能取值为 0、1、2，则：

$P(X=0)=0.1\times0.1=0.01$

$P(X=1)=2\times0.9\times0.1=0.18$

$P(X=2)=0.9\times0.9=0.81$



且 $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$

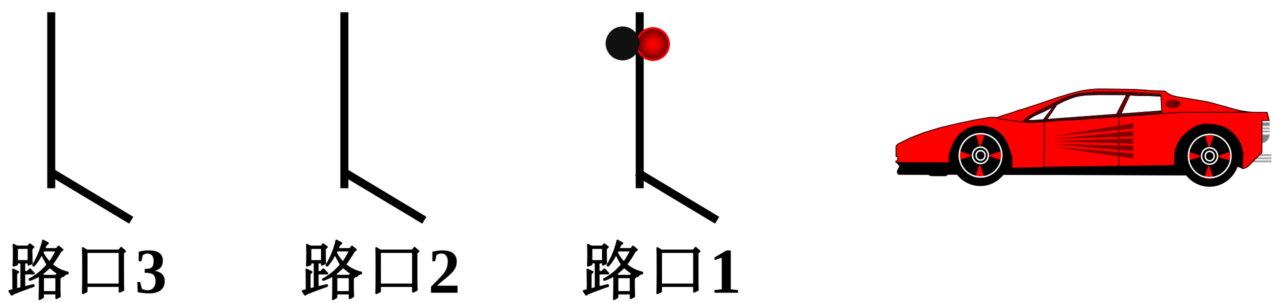
故得其分布律为：

X	0	1	2
p_k	0.01	0.18	0.81

例3. 一汽车沿一街道行驶，需要通过3个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等. 以X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求：X 的概率分布.

解: 依题意，X 可取值 0，1，2，3

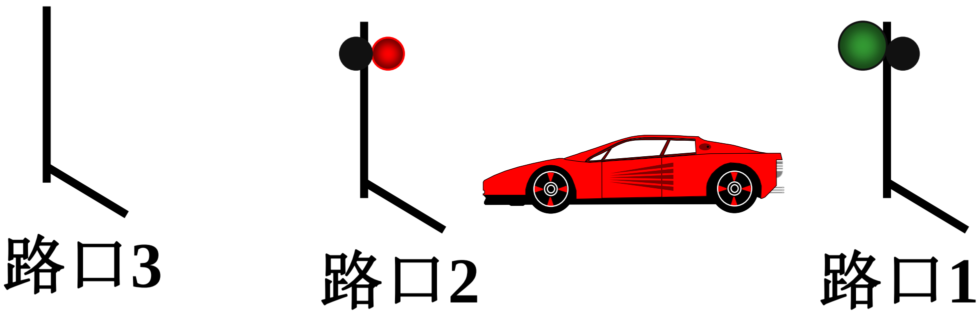
设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3



则：$P(X=0)=P(A_1)=1/2$

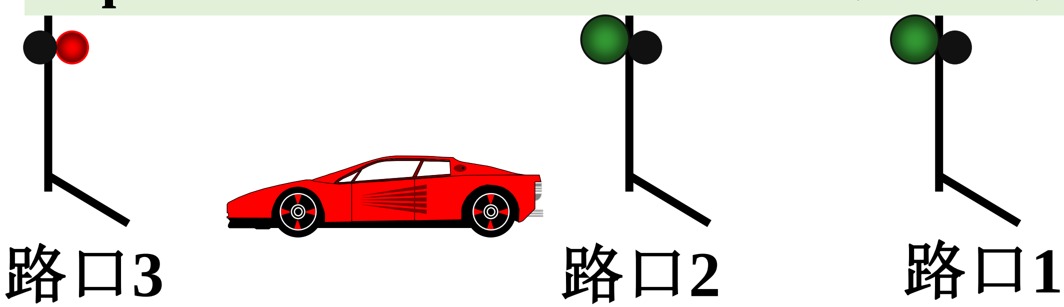
X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3



$$P(X=1)=P(\bar{A}_1A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/4$$

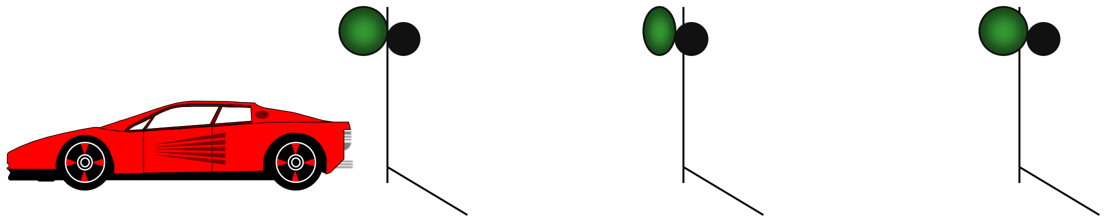
设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3



$$P(X=2)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3



路口3　　路口2　　路口1

$$P(X=3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

于是得其分布律为：

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

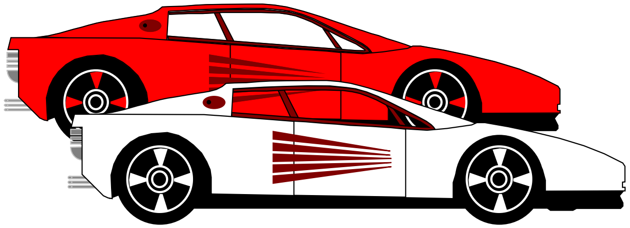
显 然，

$$\sum_{i=0}^{3} P(X=i)=1$$

例4. 某加油站替公共汽车站代营出租汽车业务，每出租一辆汽车，可从出租公司得到3元。因代营业务，每天加油站要多付给职工服务费60元。设每天出租汽车数 X 是一个随机变量，它的概率分布如下：

X	10	20	30	40
p_k	0.15	0.25	0.45	0.15

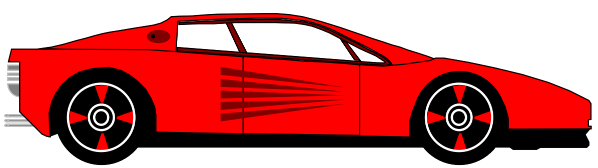
求: 因代营业务得到的收入大于当天的额外支出费用的概率。



分析：

- 加油站代营每出租一辆车，可得3元。
- 若设每天出租汽车数为X，则因代营业务得到的收入为 $3X$ 元。
- 每天加油站要多付给职工服务费60元，即当天的额外支出费用。
- 因代营业务得到的收入大于当天的额外支出费用的概率为：

$$P\{3X>60\} \quad \text{即：} P\{X>20\}$$



注意到:

X	10	20	30	40
p_k	0.15	0.25	0.45	0.15

所以得：$P\{X>20\}=P\{X=30\}+P\{X=40\}=0.6$

- 也就是说，加油站因代营业务得到的收入大于当天的额外支出费用的概率为 **0.6;**
- 故其经营决策者应该考虑是否继续代营此项业务或应该考虑是否调整当天的额外支出费用。

第二节 离散型随机变量及其分布律

二. 几种常见的离散型随机变量的分布

1.(0-1)分布

若随机变量X只能取 0 与 1 两个值，它的分布律为:

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{(1-k)} \qquad k=0,1. \quad 0<p<1$$

则称 X 服从 (0-1)分布，记为：$X \sim (0,1)$

列表:

X	0	1
P_k	$1-p$	p

例4. 某次射击，已知某射手的命中率为0.8。

求:射击一次命中目标次数X的分布律.

解: $\because$ 它只发一弹，要么打中，要么打不中，分别记为 1与 0

$\therefore$ 分布律为:

X	0	1
p_k	0.2	0.8

注: (0-1)分布的应用很广，比如:

- 检查产品的质量(正品与次品)
- 对婴儿性别进行登记(男与女)
- 高射炮射击敌机是否击中等等。

2. 二项分布

(1).伯努利概型

1^0. n 次相互独立试验: 重复进行n次试验，若各次试验的结果互不影响，即每次试验结果出现的概率都不受其它各次试验结果的影响。 则称这 n 次试验是相互独立的。

说明: 把在相同条件下重复进行n次独立试验的概率模型，称为 n 次独立试验模型。

2^0. 伯努利概型：设随机试验E只有两种可能的结果，且在每次试验中A与$\bar{A}$出现的概率为：

$$P(A)=p,\quad P(\bar{A})=1-p=q\ (0<p<1)$$

则称这样的 n 次重复独立试验概型为：**n 重伯努利概型。**

例5. 设生男孩的概率为 p，
生女孩的概率为 $q=1-p$，
令 X 表示随机抽查出生的4个婴儿中“男孩”的个数。

求：X 的概率分布。

X表示随机抽查的4个婴儿中男孩的个数，
生男孩的概率为 p。

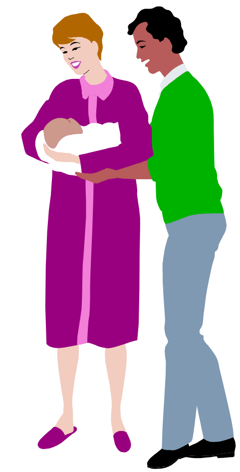
$X=0$

$X=1$

$X=2$

$X=3$

$X=4$



X可取值 0、1、 2、3、4，X的概率函数是：

$$P\{X=k\}=C_4^k\, p^k(1-p)^{4-k},\quad k=0,1,2,3,4$$

例6. 将一枚均匀骰子抛掷 3 次，令: X 表示 3 次中出现“4”点的次数。

求: X的概率函数。

解: X的概率函数是:

$$P\{X=k\}=C_3^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}, \qquad k=0,1,2,3$$

3^0. 定 理

设一次试验中事件A发生的概率为 $p\,(0<p<1)$,

则在 n 重伯努利试验中事件A 恰发生 k 次概率为:

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,2\cdots\cdots n)$$

证明: 按独立事件的概率计算公式可知，n 次试验中事件A 在某 k 次 (例如前 k 次) 发生而其余 n-k 次不发生的概率应为:

$$\underbrace{p\cdot p\cdots\cdots p}_{k}\cdot\underbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{n-k}=p^k(1-p)^{n-k}$$

由于现在只考虑事件A 在n 次试验中发生 k 次，这 k 次就有 C_n^k 种不同的组合方式。

而且它们是互不相容的，故在 n 次试验中A发生 k 次的概率 (依概率的加法定理) 为:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2 \cdots\cdots n)$$

概率 $P_n(k)$ 就等于二项式 $[(1-p)+px]^n$ 的展开式中 x^k 的系数，这也是二项分布的名称的由来。

注 显然它满足:

$$P(X=k) \geq 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

(2). 二项分布

若用X表示 n 重伯努利概型中事件A 发生的次数，它的分布律为：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0,1,2\cdots n$$

则称 X 服从参数为 n, p (0<p<1) 的二项分布，

记为: $X \sim b(n, p)$

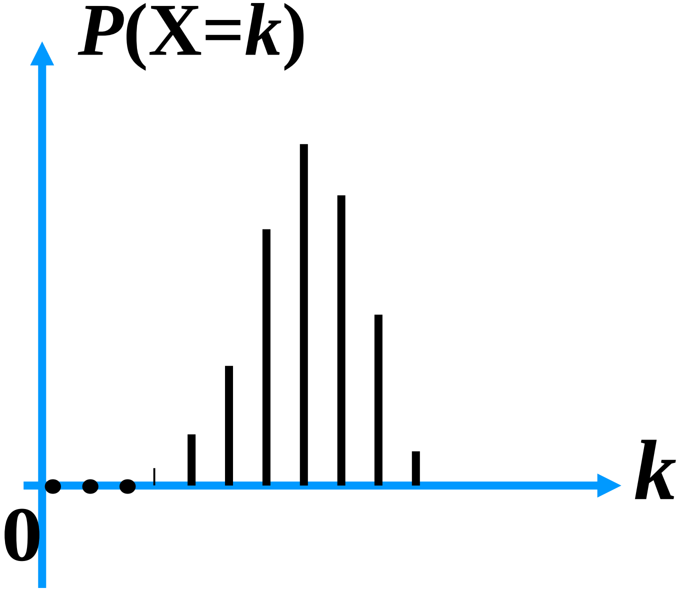
分布律列表

X	0	1	$2 \cdots\cdots n$
$P_n(k)$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2) \cdots\cdots P_n(n)$

注 ▲ 特别当n=1时，二项分布即为 (0-1) 分布

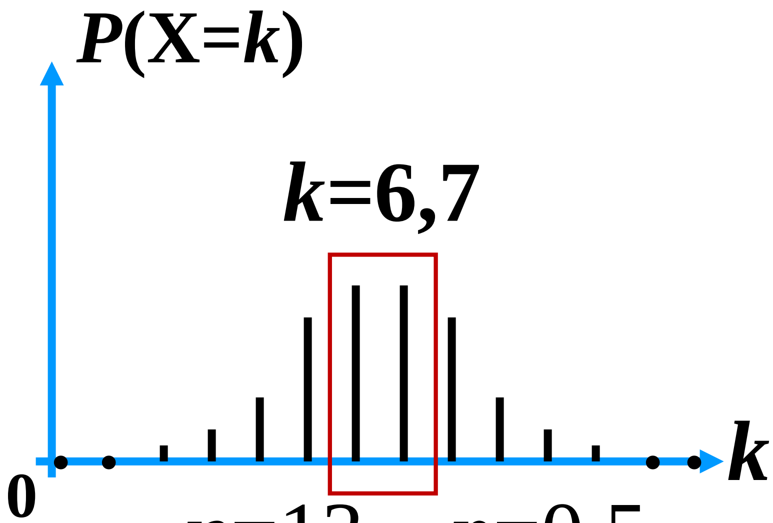
▲ 二项分布 $X\sim b(n,p)$ 的图形特点：

对于固定n 及 p，当 k 增加时，概率$P(X=k)$先是随之增加直至达到最大值，随后单调减少。

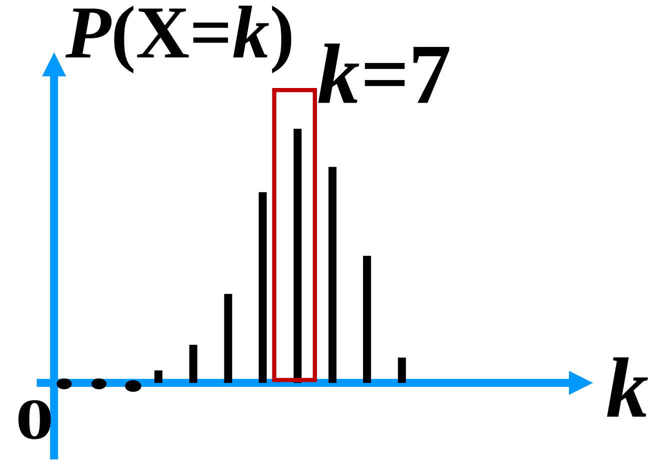


n=10，p=0.7

- 当$(n+1)p$为整数时，概率$P(X=k)$在$k=(n+1)p$ 和 $k=(n+1)p-1$处达到最大值；
- 当 $(n+1)p$ 不为整数时，概率 $P(X=k)$在$k=[(n+1)p]$ 达到最大值。



n=13， p=0.5



n=10， p=0.7

其中：$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数

例7. 设某炮手射击的命中率为 0.8，为炸毁某个目标， 经预测只要命中两发就够炸毁。

问:连续发射5发炮弹就能炸毁目标的可能性有多大?

解: A：发射 5 发炮弹就炸毁了目标

$$P(A) = P（至少中两发）$$

$$= P（恰好中两发）+ P（恰好中三发）$$

$$+ P（恰好中四发）+ P（恰好中五发）$$

$$= C_5^2(0.8)^2(1-0.8)^3 + C_5^3(0.8)^3(1-0.8)^2$$

$$+ C_5^4(0.8)^4(1-0.8) + C_5^5(0.8)^5(1-0.8)^0$$

$$= 0.98$$

例8. 已知100个产品中有5个次品，现从中有放回地取3次，每次任取1个。

求：在所取的3个中恰有2个次品的概率。

解:因为这是有放回地取3次，因此这3 次试验的条件完全相同且独立，它是伯努利试验。

依题意，每次试验取到次品的概率为0.05，设 X 为所取的3个中的次品数，

则 $X \sim b\,(3,\ 0.05)$ 于是，所求概率为:

$$P(X=2)=C_3^2(0.05)^2(0.95)=0.007125$$

注 若将本例中的“有放回”改为”无放回”，那么各次试验条件就不同了，就不是伯努利概型，此时，只能用古典概型求解。

$$P(X=2)=\frac{C_{95}^{1}C_{5}^{2}}{C_{100}^{3}}$$

伯努利概型对试验结果没有等可能的要求，但要求：

（1）每次试验条件相同，各次试验相互独立

（2）每次试验只考虑两个互逆结果A或$\bar{A}$

且 $P(A)=p$， $P(\bar{A})=1-p$

例9. 若一年中参加人寿保险者中每个人死亡的概率为0. 005, 现有10000个这类人参加人寿保险。

试求：在未来一年中在这些保险者里面:

(1). 有10人死亡的概率

(2). 死亡人数不超过10人的概率.

解: 这是伯努利概型。

设 X：在未来一年中这些保险者中的死亡人数

则：$X \sim b(10000, 0.005)$

(1).有10人死亡的概率为:

$$P(X=10)=C_{10000}^{10}(0.005)^{10}(0.995)^{9990}$$

(2). 死亡人数不超过10人的概率是:

$$P(X \le 10) = \sum_{k=0}^{10} C_{10000}^{k} (0.005)^k (0.995)^{10000-k}$$

这些计算是非常麻烦的，现给出一个当 n 很大，p 很小时的近似计算公式，即二项分布的Poisson逼近。

泊松(Poisson)定理

设$\lambda > 0$是一个常数，n是任意正整数，设$np = \lambda$，则对于任一固定的非负整数k，有

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

证明: $\because \quad P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$\rightarrow 1$ $\quad\quad$ $\rightarrow e^{-\lambda}$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$\rightarrow 1$

注: 一般的用 $\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 去近似二项分布的 $P_n(k)$ 当:

$n \geq 20, \quad p \leq 0.05$ 时近似效果颇佳

$n \geq 100, \ np \leq 10$ 时近似效果更好

泊松定理中 $\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 的值有表可查

见教材第五版P398的附表3

例10. 用泊松定理中的近似公式计算例 9

1万人参加保险，每人的死亡率为0.005。求:10人死亡小于10人死亡的概率

解: (1) $\because \quad \lambda = 10000 \times 0.005 = 50$

$$\therefore \quad P(X = 10) \approx \frac{(50)^{10} \cdot e^{-50}}{10!}$$

$$(2) \quad P(X \leq 10) \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{(50)^k e^{-50}}{k!}$$

例10. 用泊松定理中的近似公式计算例 9

> 1万人参加保险，每人的死亡率为0.005。求:10人死亡小于10人死亡的概率

解: (1) $\because \quad \lambda = 10000 \times 0.005 = 50$

$$\therefore \quad P(X = 10) \approx \frac{(50)^{10} \cdot e^{-50}}{10!}$$

$$(2) \quad P(X \le 10) \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{(50)^{k} e^{-50}}{k!}$$

注: 这里$\lambda = 50$ 附表3 没有列入，n 确实很大时更进一步的计算将在第五章介绍中心极限定理之后再来解决比较方便。

3. 泊松分布

定理： 若随机变量X 的所有可能取值为：$0, 1, 2, \cdots\cdots$

而它的分布律(它所取值的各个概率)为：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\cdots$$

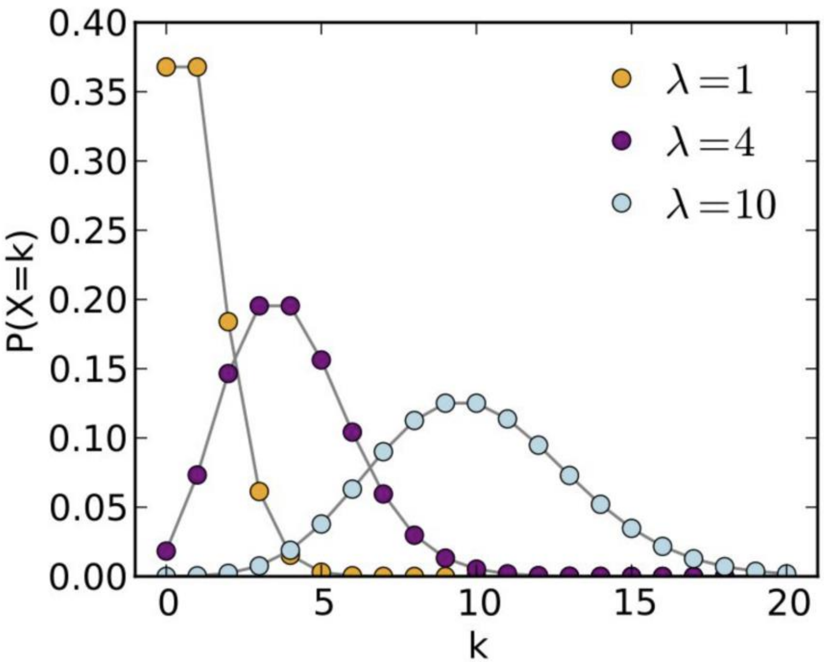
其中 $\lambda>0$ 是常数.

则称 X 服从参数为 λ 的 泊松分布，记为$X \sim P(\lambda)$

注 ▲ 泊松分布满足分布律的两个条件：

$$P(X=k)\geq 0,\quad \sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$$

▲ 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$ 的图形特点：



泊松分布的图形由λ决定：

（1）当λ较小时，泊松分布是偏峰的；

（2）随着λ增大，泊松分布逐渐趋于对称。

▲ 二项分布与泊松分布的关系

由泊松分布的定义及泊松定理可知：

当 $n \to \infty$ 泊松分布是二项分布的近似。

泊松，S.-D.

（于1838 年由法国数学家泊松发表 ）

▲ 泊松分布的应用一

若把在每次试验中出现概率很小的事件称作稀有事件。

比如地震、火山爆发、特大洪水、意外事故等等。




由泊松定理，n 重伯努利试验中稀有事件出现的次数近似地服从泊松分布。

▲ 泊松分布的应用二
—泊松分布产生的一般条件

- 在自然界和人们的现实生活中，经常遇到在随机时刻出现的某种事件。我们把在随机时刻相继出现的事件所形成的序列，叫做随机事件流。
- 若事件流具有平稳性、无后效性、普通性，则称该事件流为泊松事件流（泊松流）。

平稳性:

在任意时间区间内，事件发生k次($k \geq 0$)的概率只依赖于区间长度而与区间端点无关。

无后效性

在不相重叠的时间段内，事件的发生是相互独立的。

普通性

如果时间区间充分小，事件出现两次或两次以上的概率可忽略不计。

例如

来到某公共汽车站的乘客

到某机场降落的飞机

………… 都可以看作泊松流。

对于各种泊松事件流，泊松分布可用于描述某段时间内，随机事件发生k次的概率(参数λ则可认为是基于经验得到的平均发生次数)。如，某段时间内，到达公共汽车站的乘客数等。

例12 一家商店采用科学管理，由该商店过去的销售记录知道，某种商品每月的销售数可以用参数 $\lambda=5$ 的泊松分布来描述，为了以95%以上的把握保证不脱销。

问：商店在月底至少应进某种商品多少件？

解： 设该商品每月的销售数为 X

已知 X 服从参数 $\lambda=5$ 的泊松分布。

设商店在月底应进某种商品 m 件

求满足 $P(X\le m)>0.95$ 的最小的 m

销售数

进货数

求满足 $P(X \le m) > 0.95$ 的最小的m。

查泊松分布表得（教材第五版P398）：

$$P(X \le 8) = \sum_{k=0}^{k=8} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} = 0.9319,$$

$$P(X \le 9) = \sum_{k=0}^{k=9} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} = 0.9682,$$

于是得 **m=9件**

离散型随机变量的分布函数

一般：若离散型随机变量X的分布律为：

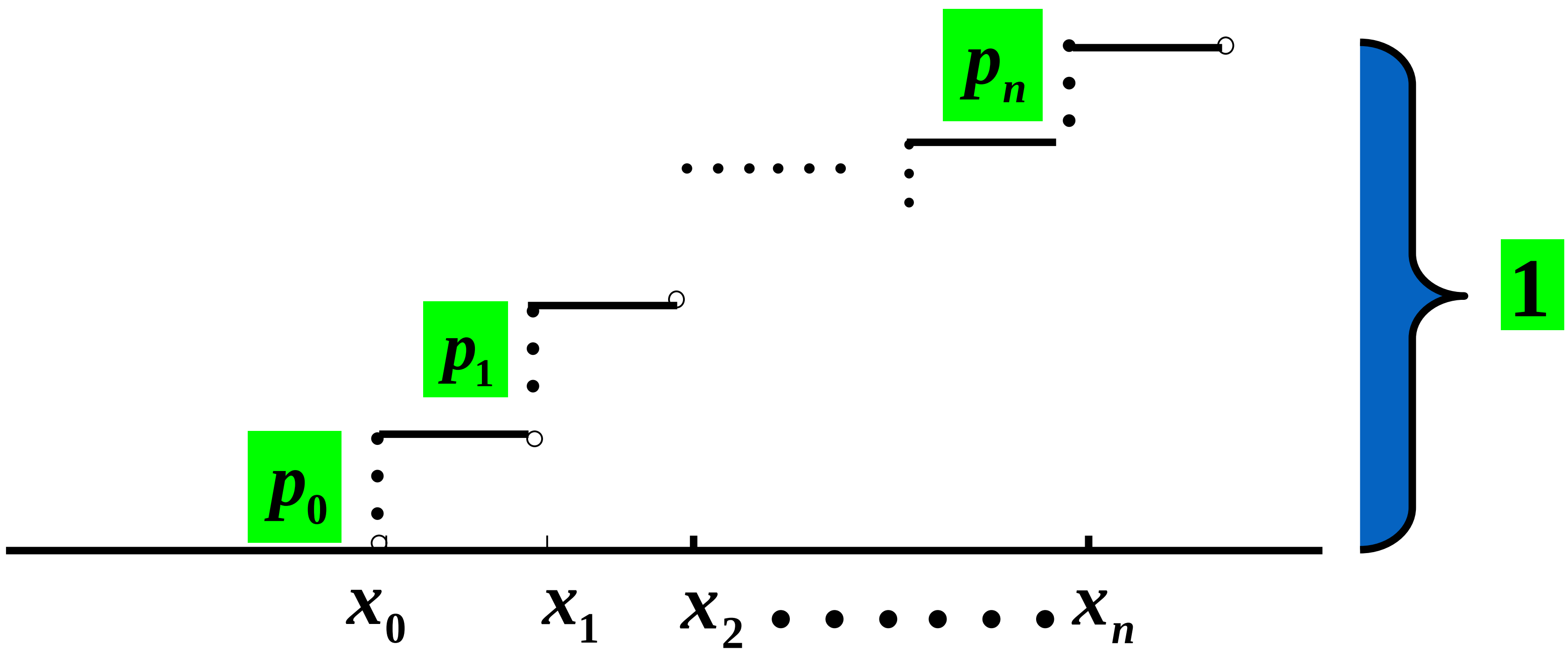
$$P(X = x_k) = p_k \qquad k = 1,2,\cdots$$

则其分布函数为：

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_k \le x} P(X = x_k)$$

注："$x_k \le x$" 是指所有满足 $x_k \le x$ 的 k。

$F(x)$ 的图形为阶梯形



$F(x)$在$x = x_k$ 处有跳跃，其跳跃值为：$p_k = P(X = x_k)$

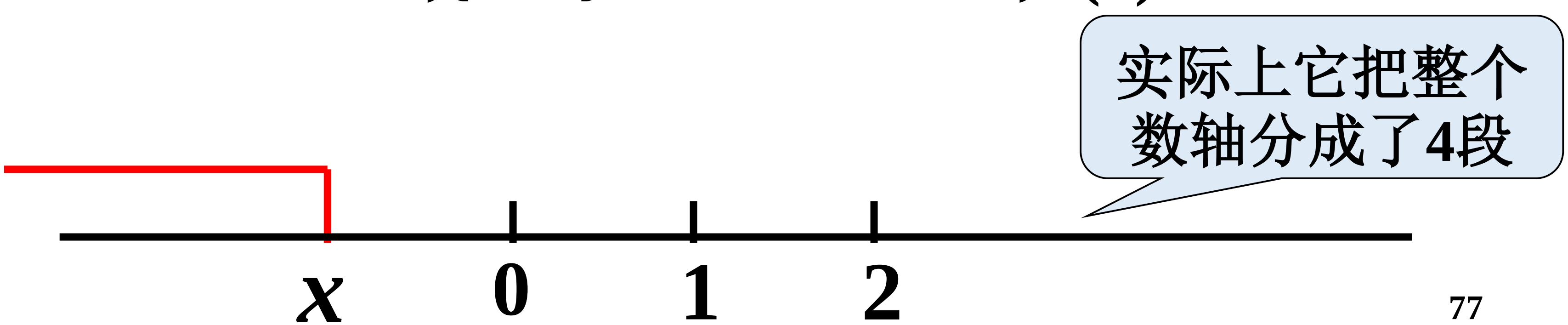
例1. 设离散型随机变量X的分布律为:

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

求: (1) X的分布函数

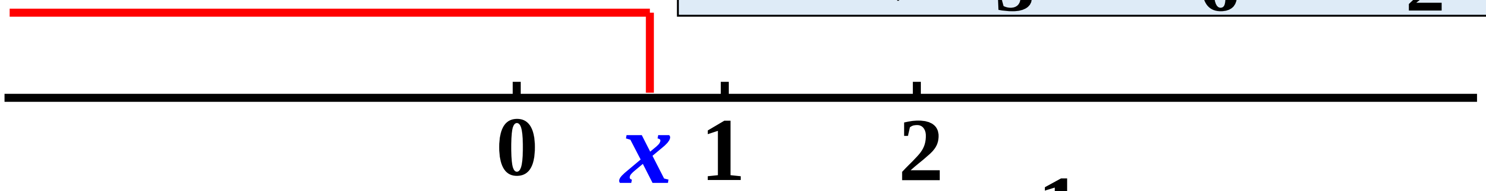
$$(2)\quad P(X \le \frac{1}{2}), P(1 < X \le \frac{3}{2}), P(1 \le X \le \frac{3}{2})$$

解: 当 x<0 时,{x<0}为不可能事件,F(x)=0



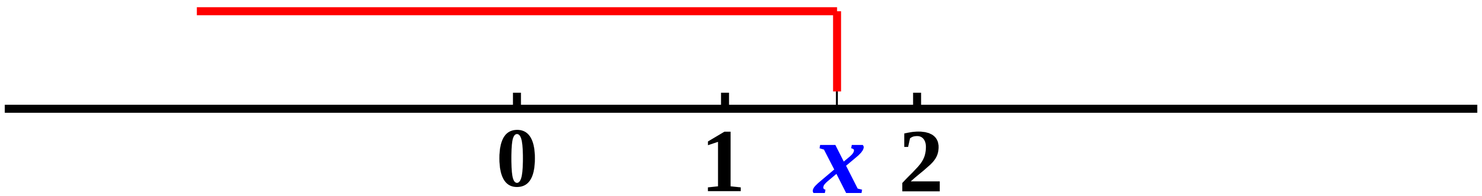
X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

当 $0 \le x < 1$ 时



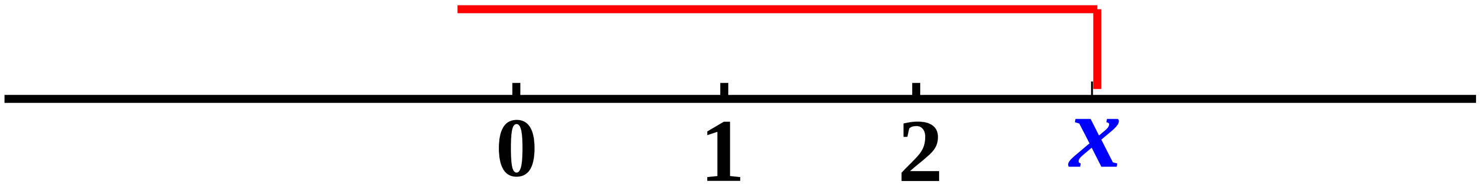
$$F(x) = P(X \le x) = P(X=0) = \frac{1}{3}$$

当 $1 \le x < 2$ 时



$$F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

当 $x \geq 2$ 时



$$F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$$

故得:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{1}{3} & 0\leq x<1 \\ \dfrac{1}{2} & 1\leq x<2 \\ 1 & x\geq 2 \end{cases}$$

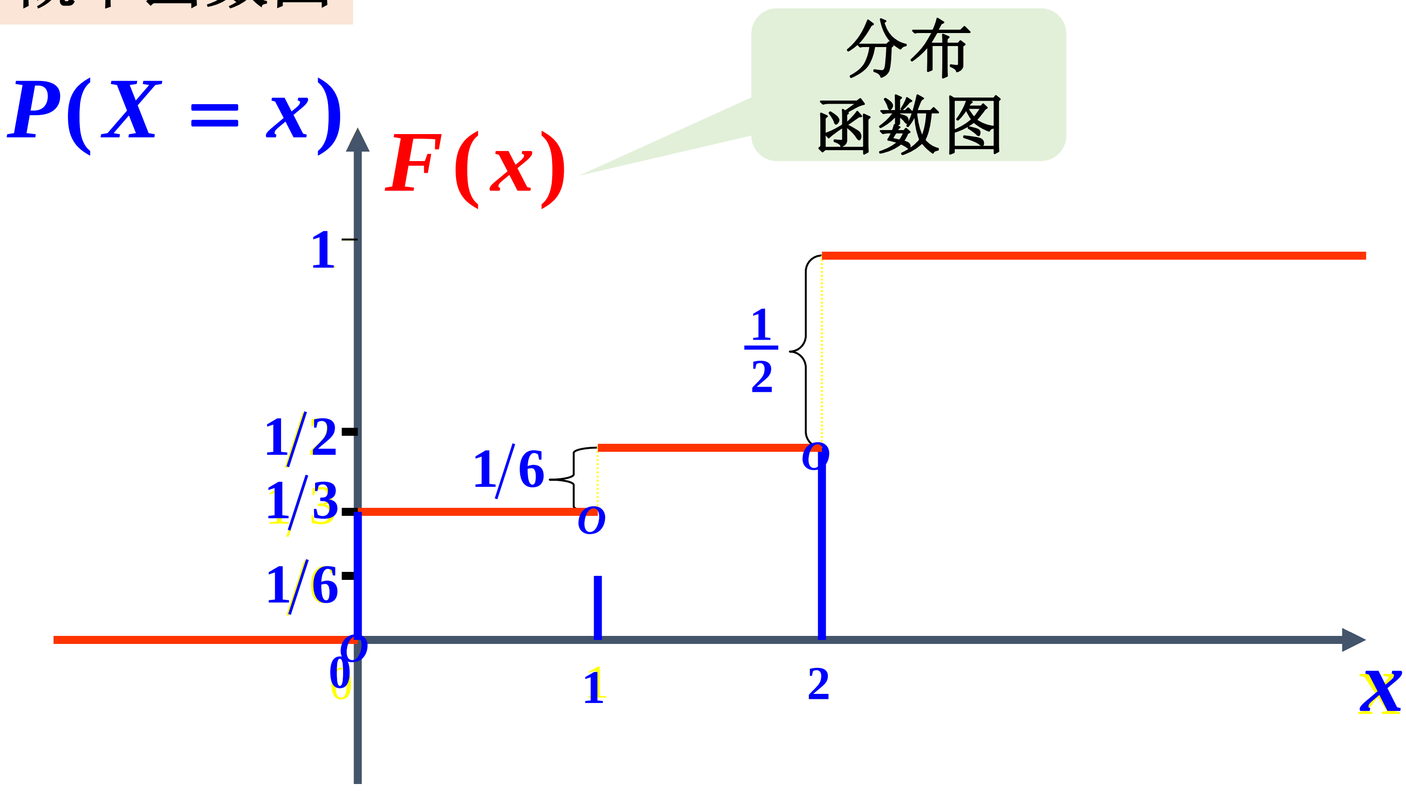
注意
右连续

即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x)=F(x_0)$

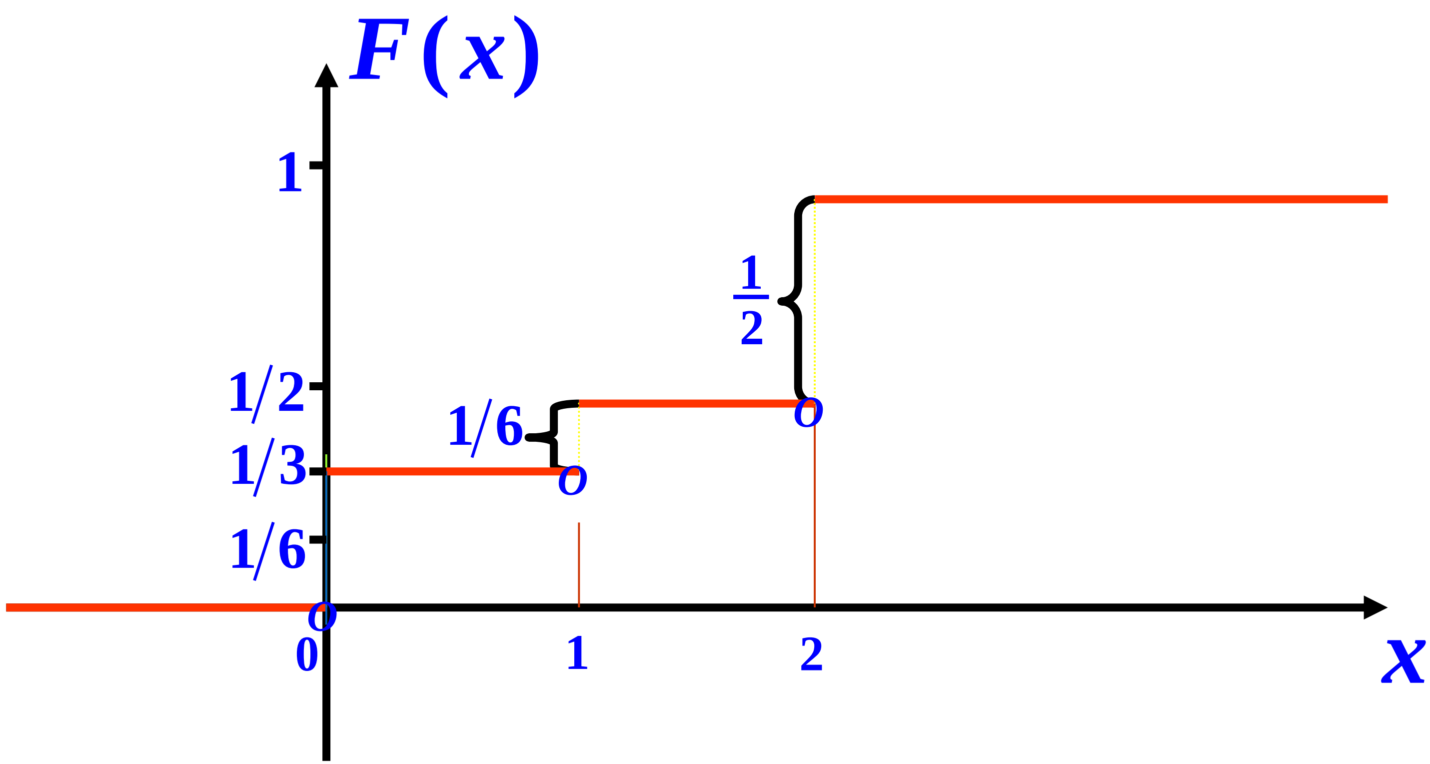
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/3, & 0\le x<1\\ 1/2, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

$$X\sim\begin{Bmatrix}0 & 1 & 2\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2}\end{Bmatrix}$$

概率函数图



不难看出：$F(x)$ 的图形是阶梯状的图形， 在 $x=0$，1，2 处有跳跃，其跃度分别等于 $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$。



$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/3, & 0\le x<1 \\ 1/2, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

$$X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

(2). $P(X \le \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

$$P(1 < X \le \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1) + P(X = 1)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

(2). $P(X \le \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

$$P(1 < X \le \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1) + \boxed{P(X = 1)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

注：在离散型随机变量中要**特别注意端点**，即

$$P(X = x_k) \ge 0$$

这与后面介绍的连续型随机变量中的情形是有区别的。在连续型随机变量中：$P(X = x_k) = 0$

第二章作业（教材第五版）：

P56：2、4、6、7

P57：12、14、16、17