知识回顾

统计推断

参数估计

假设检验

一、假设检验基本思想

设总体 X 含有未知参数θ (或总体分布函数$F(x)$未知)

检验下述假设:

假设 $H_0: \quad \theta = \theta_0$ 或 $F(x) = F_0(x)$

二、检验依据

小概率事件原理

小概率事件在一次试验中是几乎不可能发生的。

如果在假设H_0成立的条件下某事件是小概率事件，但在一次试验中却发生了，于是就可怀疑假设H_0的正确性从而拒绝H_0。

在假设检验中，常称这个小概率为显著性水平，用 α 表示。 $P\{$拒绝$H_0 \mid H_0$为真$\} = \alpha$

知识回顾

统计推断

参数估计

假设检验

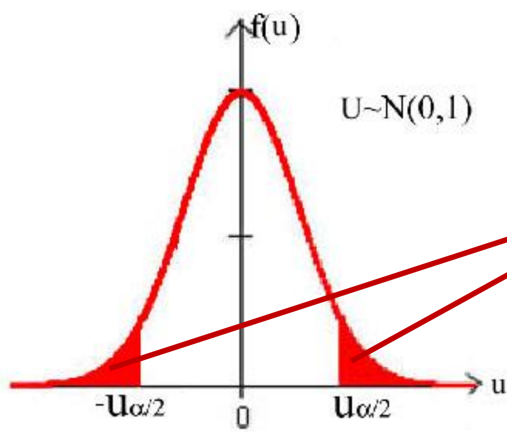
三、本质（理解）

$$H_0:\ \mu=\mu_0\ (\mu_0=355)$$

构造一个分布已知且表征样本结果与假设结果差异的统计量，例如

偏差

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$



如果偏差大（即落在一定显著性水平的拒绝域中），则拒绝原假设（即差异显著）。

知识回顾

假设检验问题的步骤：

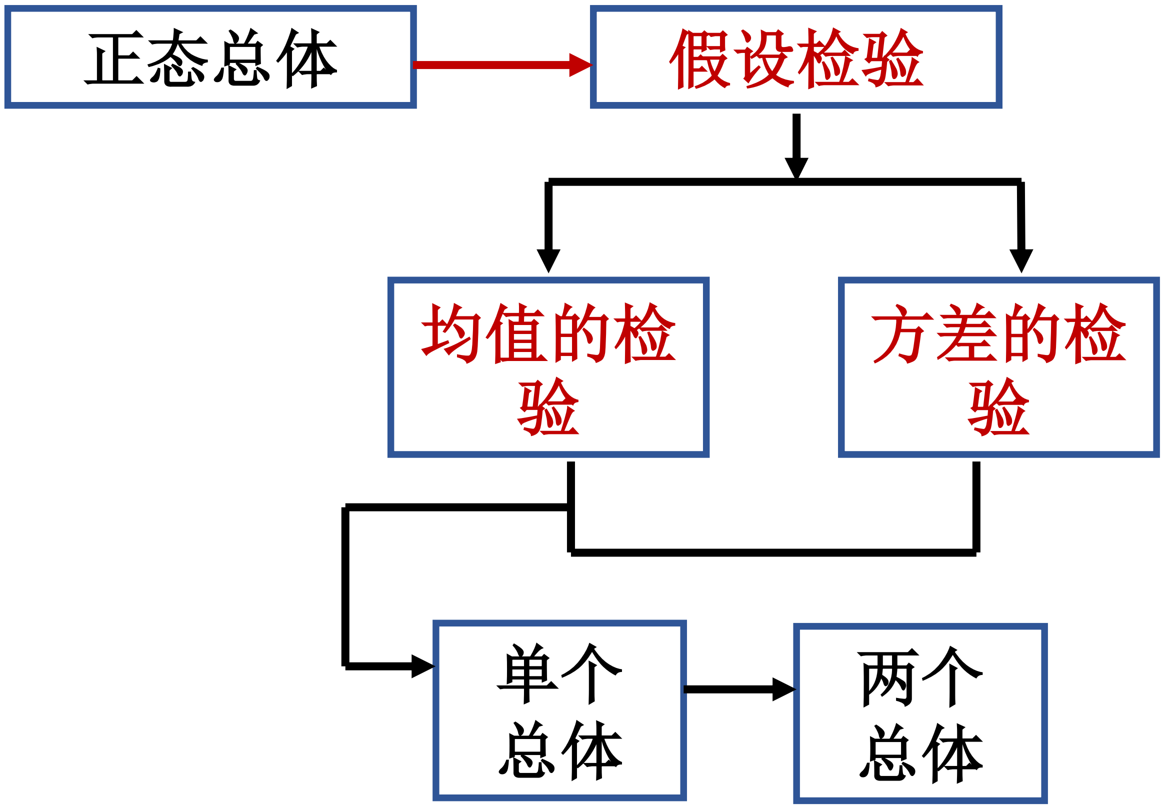
1. 根据实际问题要求，提出原假设H_0及备择假设H_1

2. 确定检验统计量

3. 按 $P(拒绝H_0 | H_0为真) = \alpha$，求出拒绝域

4. 取样本，将样本观察值代入统计量，观察统计量是否在拒绝域以确定接受 H_0 还是拒绝 H_0

知识结构图



第二节 正态总体均值的假设检验

一. 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验

1. σ^2已知，关于μ的检验（Z 检验）

在σ^2已知条件下用服从$N(0,1)$的统计量检验正态总体μ 的方法为 Z 检验法

(1) 双边检验的假设:

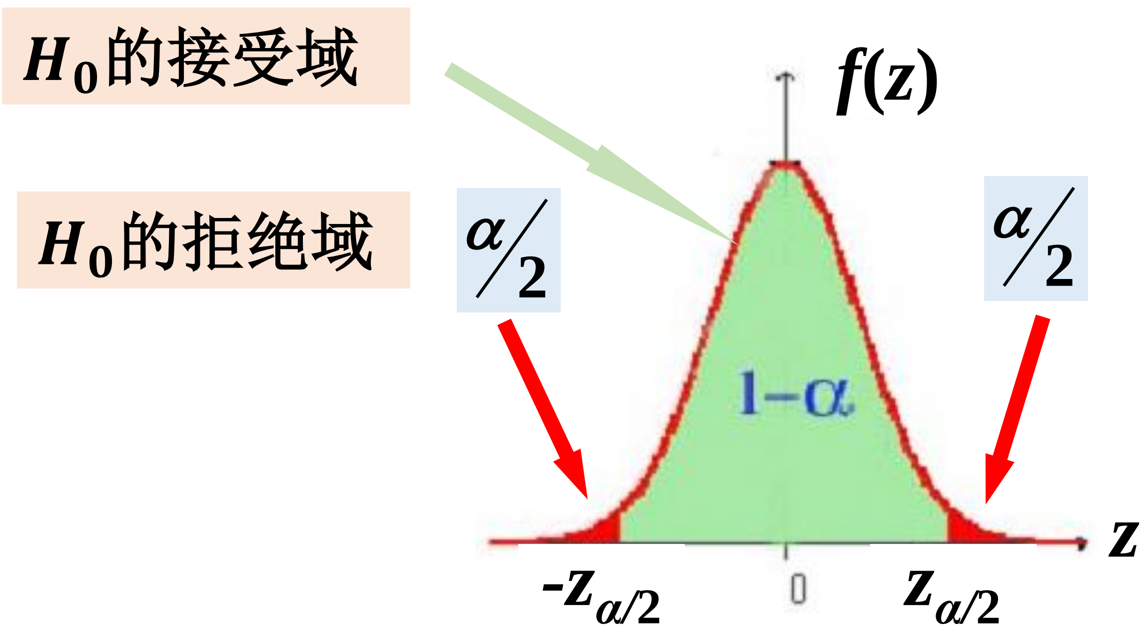
$$H_0: \quad \mu = \mu_0, \qquad H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

取检验统计量: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

当假设定H_0为真时（即$\mu = \mu_0$）: $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

则在显著性水平 α 下，H_0 的拒绝域：

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$$



(2) 单边检验假设：

$$H_0: \mu \le \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

求显著性水平为 α 的拒绝域。

分析：假设H_0的拒绝域应为$\bar{X} \ge k$的形式，下面确定k：

给定显著性水平后，拒绝域的确定需满足：

$$\boxed{P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}) = \alpha}$$

$$P(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真})=P_{\mu\le\mu_0}(\bar{X}\ge k)$$

因为：$-\mu\ge-\mu_0$ 进而有：$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ge\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$=P_{\mu\le\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\le P_{\mu\le\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ge\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

因为，$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 所以，$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ge z_\alpha\right\}=\alpha$

若需 $P(拒绝H_0|H_0为真) \le \alpha$

只需令 $\boxed{\dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha}$

此时：$P(拒绝H_0|H_0为真) = P_{\mu\le\mu_0}(\bar{X} \ge k)$

$$= P_{\mu\le\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\le P_{\mu\le\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \boxed{\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}\right)$$

$$\le P_{\mu\le\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ge z_\alpha\right) = \alpha$$

则在显著性水平 α下, $H_0: \mu \le \mu_0$ 的拒绝域:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_\alpha$$

单边检验假设：$H_0: \mu = \mu_0$，　$H_1: \mu > \mu_0$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

则在显著性水平 α下, $H_0: \mu = \mu_0$ 的拒绝域:

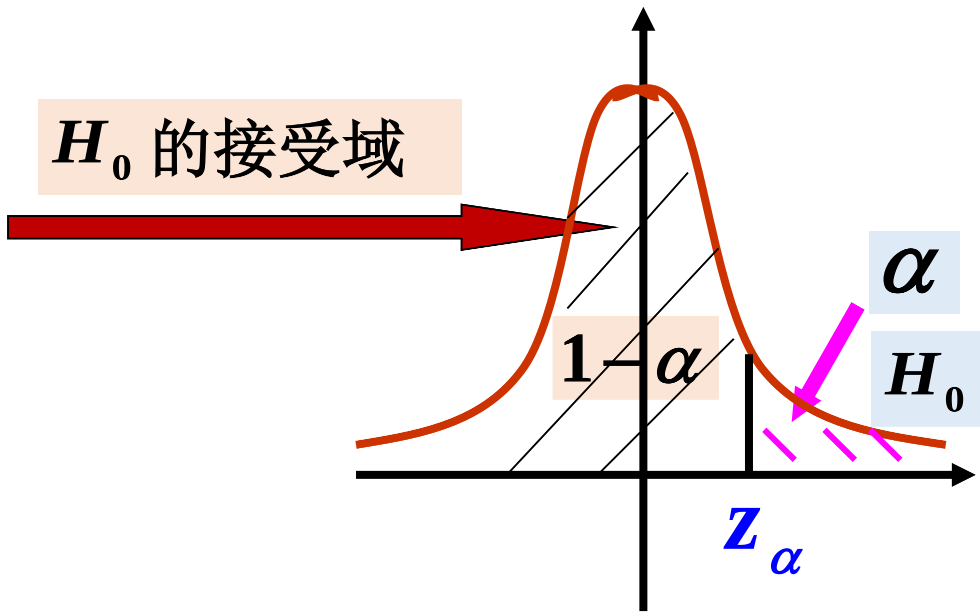
$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_\alpha$$

综上，可得右边检验假设：

$$H_0: \mu \le \mu_0 (或\mu = \mu_0), \quad H_1: \mu > \mu_0$$

显著性水平为 α 的 H_0 拒绝域。

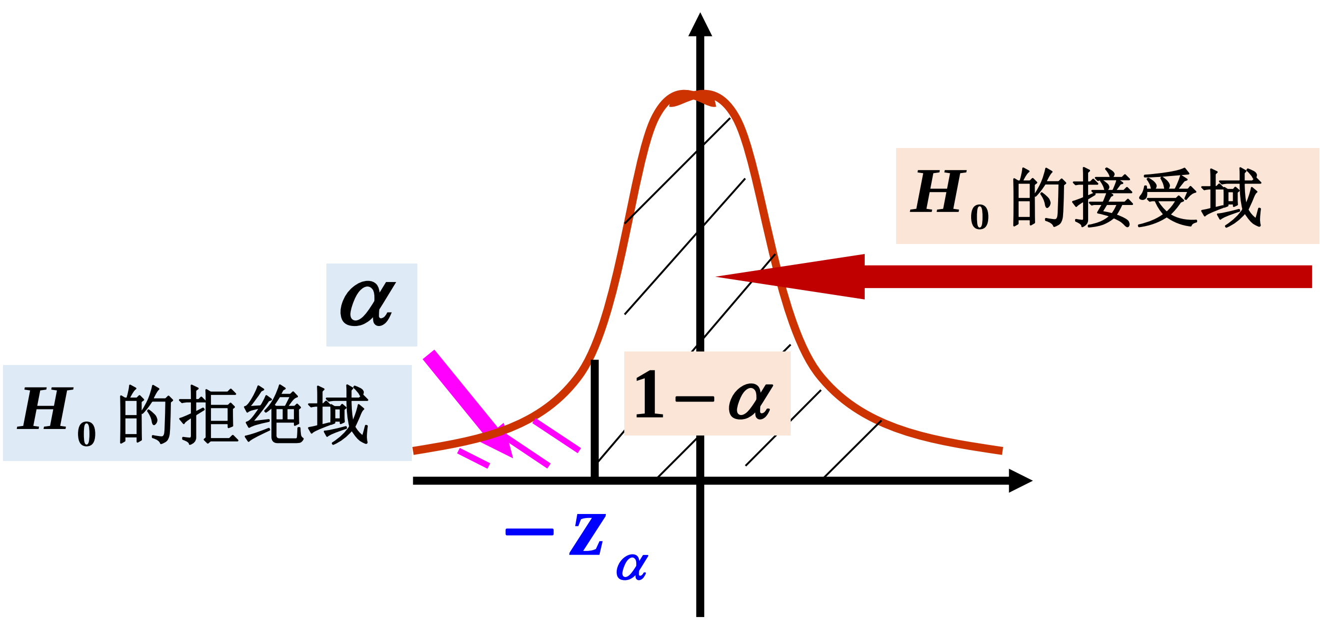
取检验统计量: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ H_0 的拒绝域: $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_\alpha$



同理，可得左边检验假设：

$$H_0: \mu \geq \mu_0 (或 \mu = \mu_0), \quad H_1: \mu < \mu_0$$

显著性水平为 α 的 H_0 拒绝域为：$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$



小结

一. 单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验

1. σ^2 已知，关于 μ 的检验(Z 检验)

都取检验统计量: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

拒绝域:

双边假设检验

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

右边假设检验

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha}$$

左边假设检验

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_{\alpha}$$

例1. 已知某钢铁厂的铁水含碳量在正常情况下服从正态分布$N(4.55, 0.108^2)$，现又测了5 炉铁水，其含碳量分别为:

$$4.28,\ 4.4,\ 4.42,\ 4.35,\ 4.37 \qquad (\alpha = 0.05)$$

问：当总体标准差没有改变时，现在生产是否正常?

统计量:

拒绝域:

解: 假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 4.55$， $H_1: \mu \neq \mu_0 = 4.55$

$\because$ 总体标准差没有改变，即 σ^2 已知的情况

$\therefore$ 统计量: $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

拒绝域: $\left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$

从而： $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

经计算 $\bar{x} = \dfrac{4.28 + 4.40 + 4.42 + 4.35 + 4.37}{5} = 4.364$

则： $\left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{4.364 - 4.55}{0.108/\sqrt{5}}\right| = 3.9 > 1.96$

$\therefore$ 拒绝 H_0，可认为现在的生产是不正常的。

例2 已知某正态总体的方差为 49，抽测 24个样本值的均值为 $\bar{x} = 55.8$

问：总体均值 $\mu \leq 55$ 是否成立（$\alpha = 0.05$）

统计量

拒绝域

例2 已知某正态总体的方差为 49，抽测 24个样本值的均值为 $\bar{x}=55.8$

问：总体均值 $\mu\le 55$ 是否成立（$\alpha=0.05$）

解：假设 $H_0: \mu\le\mu_0=55$， $H_1: \mu>\mu_0=55$

取统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 拒绝域 $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge z_\alpha$

给定显著性水平 $\alpha=0.05$

因为是单边检验，所以： $z_\alpha=z_{0.05}=1.64$

经计算

$$\frac{\bar{x}-55}{7/\sqrt{24}}=\frac{55.8-55}{7/\sqrt{24}}=0.56<1.64$$

$\therefore$ 接受 H_0，即可以认为总体均值 $\mu \le 55$ 是成立的

2. σ^2 未知，关于 μ 的检验（t 检验）

在 σ^2 未知条件下用服从 t 分布的统计量检验正态总体 μ 的方法为 t 检验法

(1) 检验假设:

$H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$

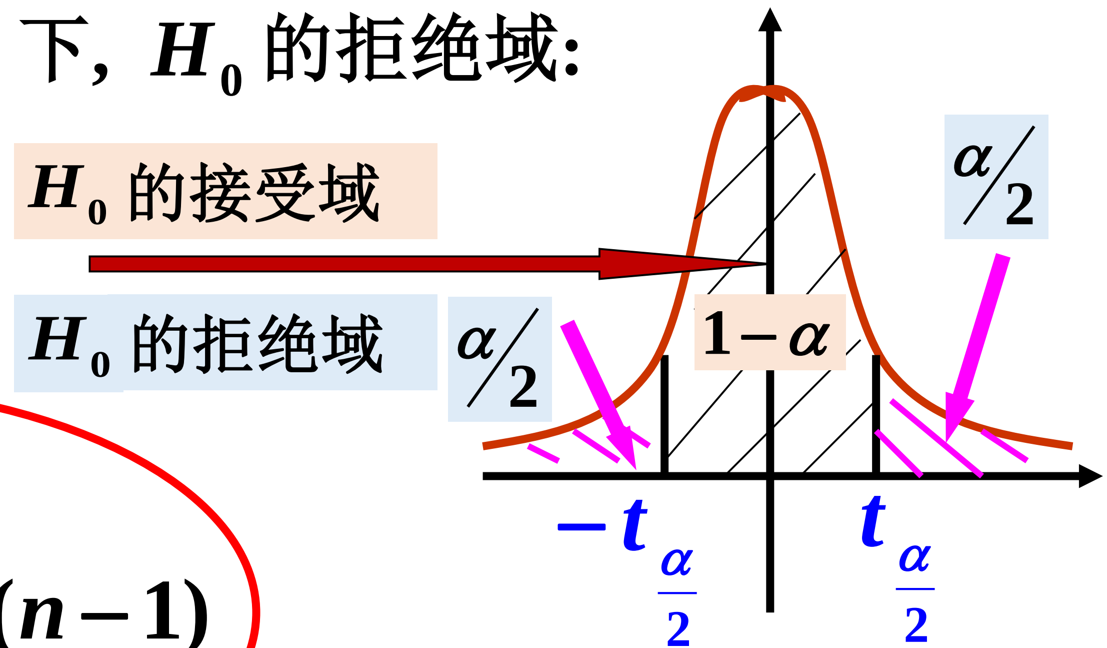
因为 σ^2 未知，所以可以考虑用 σ^2 的无偏估计 S^2 来代替，故有:

取检验统计量 $$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

则有: $$P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\} = P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq k\right\} = \alpha$$

$$k = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

则在显著性水平 α 下，H_0 的拒绝域：



$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

(2) 两个单边检验假设:

右边 $H_0: \mu \le \mu_0$(或 $\mu = \mu_0$), $H_1: \mu > \mu_0$

左边 $H_0: \mu \ge \mu_0$(或 $\mu = \mu_0$), $H_1: \mu < \mu_0$

则在显著性水平 α 下, H_0 的拒绝域: 分别为

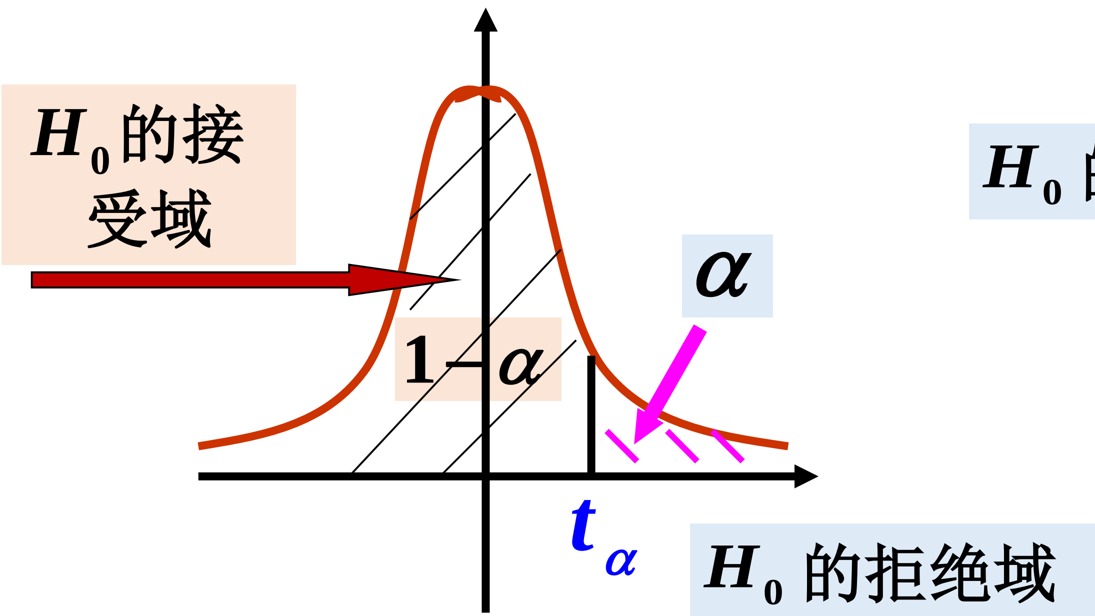
$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)$$

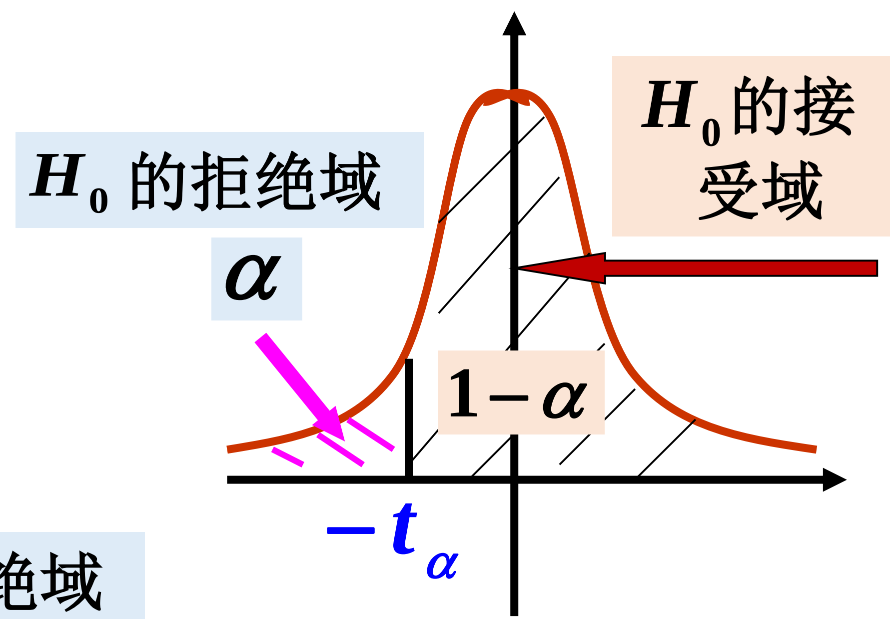
$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \le -t_\alpha(n-1)$$

则在显著性水平 α 下，H_0 的拒绝域：分别为

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1)$$

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)$$





例3 某库房要验收大批同类物质，根据以往的经验，这批物质每件的重量服从正态分布。按规定这批物质平均每件重量应为 100 公斤，今抽取10 件，测得其均值 $\bar{x} = 99.6,\quad s^2 = 4.044$

问：能否接受这批物质？$(\alpha = 0.05)$

统计量

拒绝域

解: 设 $H_0: \mu = \mu_0 = 100$, $H_1: \mu \neq \mu_0 = 100$

$\because$ σ^2 未知，所以用 t 检验。

统计量 $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 拒绝域 $\left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

经计算 $\left|\dfrac{\bar{x} - 100}{s/\sqrt{10}}\right| = \left|\dfrac{99.6 - 100}{\sqrt{4.044/10}}\right| = 0.629$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(10-1) = t_{\frac{0.05}{2}}(10-1) = 2.2622$ 而 $0.629 < 2.2622$

$\therefore$ 接受 H_0，即可认为该库房应接受这批物质。

知识回顾

一. 单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验

1. σ^2 已知，关于 μ 的检验(Z 检验)

都取检验统计量: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

拒绝域:

双边假设检验

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

右边假设检验

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$$

左边假设检验

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$$

知识回顾

一. 单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验

1. σ^2 未知，关于 μ 的检验(t 检验)

都取检验统计量: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

拒绝域:

双边假设检验

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

右边假设检验

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1)$$

左边假设检验

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha}(n-1)$$

二. 两个正态总体均值差的检验

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$是来自$N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本,$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本,它们相互独立， $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$分别是两个总体的样本均值与方差

1. 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时 (t 检验)

检验假设：$H_0 = \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1 = \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$

δ 为已知常数，显著水平为 α

$\because$ 检验统计量 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

其中：$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$

同单个总体的讨论类似，有：

$$P(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真})=P_{\mu_1-\mu_2=\delta}\left(\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right|\ge k\right)=\alpha$$

$k=t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

$\therefore$ 在显著性水平α下, H_0的拒绝域:

$$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{s_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

单边检验假设　注：当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知时

H_0：μ_1-$\mu_2 \le \delta$ (或$\mu_1-\mu_2=\delta$), H_1：$\mu_1-\mu_2>\delta$

的讨论完全类同, 在显著性水平 α 下, H_0 的拒绝域:

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta}{s_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$$

单边检验假设　　注: 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时

H_0 : $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$（或$\mu_1 - \mu_2 = \delta$），　H_1 : $\mu_1 - \mu_2 < \delta$

的讨论完全类同,在显著性水平α下, H_0 的拒绝域:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{s_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$$

2. 当 σ_1^2, σ_2^2 均已知时 (Z 检验)

检验假设: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta$, $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$

δ 为已知常数，显著水平为 α

$\because$ 检验统计量

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

同单个正态总体的讨论类似:

$$k = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$P(\text{拒绝}H_0 | H_0\text{为真}) = P_{\mu_1 - \mu_2 = \delta}\left(\left| \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| \geq k \right) = \alpha$$

$\therefore$ 在显著性水平 α 下, H_0 的拒绝域:

$$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

注: 当 σ_1^2, σ_2^2 均已知时

■ 单边检验假设：

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \le \delta \,(\text{或}\mu_1 - \mu_2 = \delta), \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$$

或

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \ge \delta \,(\text{或}\mu_1 - \mu_2 = \delta), \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

的讨论完全类同,在显著性水平α下, H_0的拒绝域:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \ge z_\alpha \quad \text{或} \quad \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le -z_\alpha$$

3. 基于成对数据的假设检验 (*t* 检验)

逐对比较法

为了比较两种性能之间的差异，在相同的条件下作对比试验，得到一批成对的观察值。对观察值进行分析，作出推断的方法。

例4 现要比较甲、乙两种橡胶制成的轮胎的耐磨性。今从甲、乙两种轮胎中各随机的取 8 个，又从两组中各取一个组成一对，共 8 对；再随机的取 8 架飞机，将 8 对轮胎随机地搭配给这 8 架飞机作耐磨性试验，当飞机飞行了一定时间后测得轮胎的磨损量的数据(单位：毫克)。如下：

甲	4900	5220	5500	6020	6340	7660	8650	4870
乙	4930	4900	5140	5700	6110	6880	7930	5010

试问：这两种轮胎的耐磨性有无显著的差别？$(\alpha = 0.05)$

解： 设 X，Y：甲、乙两种轮胎的磨损量

并设 X，Y 均服从正态分布，即：

$$X \sim N(\mu_1, \sigma^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$$

方法一：数据不配对分析

将所观察的两行数据分别作为X，Y的样本

依题意，检验假设：$H_0: \mu_1 = \mu_2$， $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

因为已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，所以在给定的显著性水平 $\alpha=0.05$ 下 H_0 的拒绝域为：

$$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$C=\{t\,\big|\,|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}$$

经计算 $\bar{x}=6145,\quad \bar{y}=5825,$

$$s_1^2=1633900,\ s_2^2=1053875$$

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)}=1343887.5$$

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{s_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=0.516$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{\frac{0.05}{2}}(14)=2.1448$$

因为：$|t|=0.516<2.1448$

所以接受H_0,可认为这两种轮胎的耐磨性无显著差异。

方法二：数据配对分析

注意到：在方法一中是将所观察的两行数据分别作为X，Y的样本，而没有去区别它们是否来自于同一架飞机。

实际上：不同的飞机其试验的条件是不完全一致的，有的甚至于有很大的差异，所以飞机之间的试验条件的不同会对试验数据产生干扰。

方法二的做法： 观察分析同一架飞机上两种轮胎的磨损量的差异，作出推断。

令： $D_i = X_i - Y_i$， $i = 1, 2, \cdots, 8$

并令 $D_1, D_2, \cdots, D_8$ 是总体 $D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本

从而将原问题转化为单个正态总体中当 σ^2 未知时关于 μ 的假设检验问题。

检验假设： $H_0: \mu_D = 0$， $H_1: \mu_D \neq 0$

按单个正态总体中当 σ^2 未知时，关于μ 的假设检验的计算公式，可得 H_0 的拒绝域为：

$$\frac{\bar{d}-\mu_D}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$C=\{t \mid |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

经计算 $\bar{d}=320$，$s^2=89425$，

$$t=\frac{\bar{d}}{s/\sqrt{n}}=\frac{320}{\sqrt{89425/8}}=2.83$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{\frac{0.05}{2}}(7)=2.365$$

因为：$|t|=2.83 > t_{\frac{0.05}{2}}(7)=2.365$

所以拒绝H_0,可认为这两种轮胎的耐磨性有显著差异。

注：

▲ 用两种不同的方法得到了两种不同的结论，那么究竟应该采取哪一个结论比较合理呢？

显然，应该采取第二种方法得出的结论是合理的

- 因为数据配对的方法是针对同一架飞机的，它是排除了因飞机之间的试验条件的不同而对数据产生的干扰；
- 所以它是直接反映了这两种轮胎的耐磨性的显著差异的情况。
- 因此，应采取第二种方法得出的结论，即可认为这两种轮胎的耐磨性有显著差异。

▲ 基于成对数据的假设检验的一般提法：

设有 n 对相互独立的观察结果：

$$(X_1,Y_1),\ (X_2,Y_2),\cdots,\ (X_n,Y_n)$$

令：$D_1=X_1-Y_1$，$D_2=X_2-Y_2$，$\cdots$，$D_n=X_n-Y_n$

则 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 相互独立。又由于 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 是由同一因素所引起的，所以可认为它们服从同一分布。

现假设 $D_i\sim N(\mu_D,\sigma_D{}^2)\quad i=1,2,\cdots,n$；$\mu_D,\sigma_D{}^2$ 未知

即 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 是来自正态总体的一个样本。其样本均值与样本方差的观察值为 $\bar{d},\ s_D{}^2$

检验假设 (1) $H_0: \mu_D = 0,\quad H_1: \mu_D \neq 0$

(2) $H_0: \mu_D \leq 0,\quad H_1: \mu_D > 0$

(3) $H_0: \mu_D \geq 0,\quad H_1: \mu_D < 0$

由单个正态总体均值的 t 检验，可得检验问题(1)、(2)、(3) 的拒绝域分别为：

(1)
$$t = \left| \frac{\bar{d}}{s_D / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

(2)
$$t = \frac{\bar{d}}{s_D / \sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1)$$

(3)
$$t = \frac{\bar{d}}{s_D / \sqrt{n}} \leq -\ t_{\alpha}(n-1)$$

第三节 正态总体方差的假设检验

一. 单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的方差 σ^2 的检验 (χ^2 检验)

总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2 均未知，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体的样本。

检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2,\quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(σ_0^2 为已知常数)

取检验统计量 $$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

使得:

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\}$$

$$= P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2} \le k_1) \cup (\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2)\} = \alpha$$

为计算方便，习惯上取:

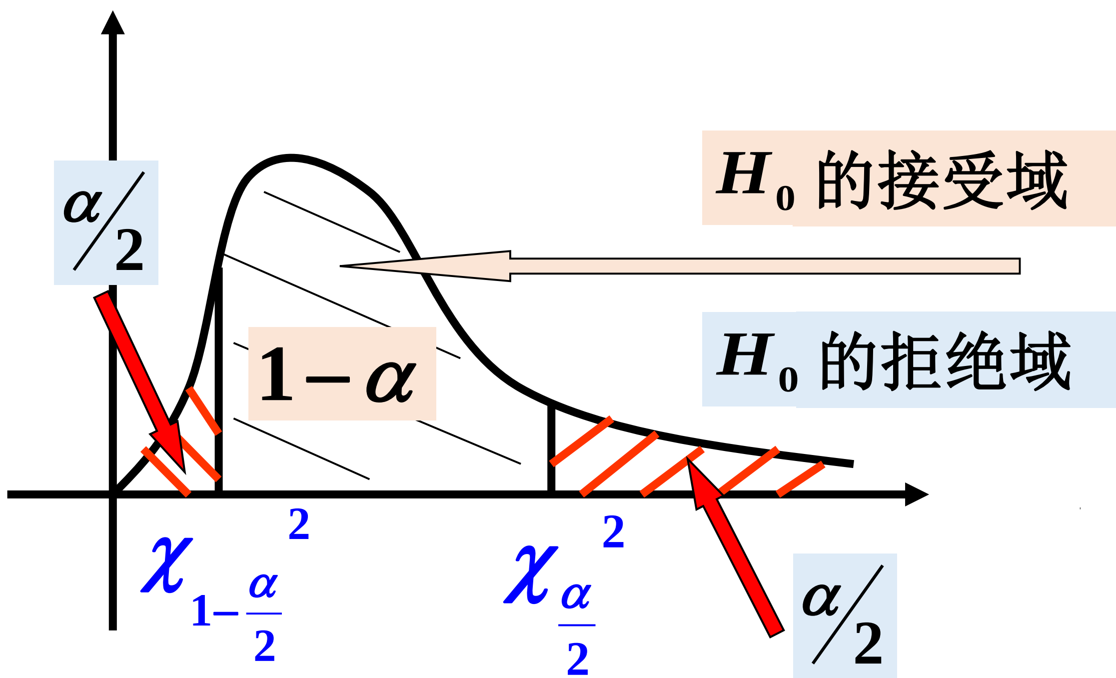
$$P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2} \le k_1) = \frac{\alpha}{2},$$

$$P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2) = \frac{\alpha}{2}$$

其中: $k_1 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$， $k_2 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

则在显著性水平 α 下, H_0 的拒绝域:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \quad \cup \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$$



例1. 某厂生产的钢丝质量一贯比较稳定，今从产品中随机抽取10 根，检查其折断力，得数据如下:

578, 572, 570, 568, 572, 570, 570, 572, 590, 584

钢丝折断力服从 $N(\mu,\sigma^2)$

问：是否可接受钢丝折断力的方差为 64 $(\alpha = 0.05)$

例1. 某厂生产的钢丝质量一贯比较稳定，今从产品中随机抽取10 根，检查其折断力，得数据如下:

578, 572, 570, 568, 572, 570, 570, 572, 590, 584

钢丝折断力服从 $N(\mu,\sigma^2)$

问：是否可接受钢丝折断力的方差为 64 $(\alpha = 0.05)$

解: 检验假设:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 64, \quad H_1: \sigma^2 = \sigma_0^2 \neq 64$$

因为 μ, σ^2 均未知，所以取检验统计量:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

经计算： $\bar{x} = 574.6$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(9) = \chi^2_{\frac{0.05}{2}} = \chi^2_{0.025} = 19.023$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(9) = \chi^2_{1-\frac{0.05}{2}} = \chi^2_{0.975} = 2.7$$

$$(n-1)\cdot s^2 = \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 464.4$$

$$\chi^2(n-1) = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{464.4}{64} = 7.26$$

$\because \quad 2.7 < 7.26 < 19.023$

$\therefore$ 接受H_0，即可认为钢丝的折断力的方差为 64。

当总体服从正态分布，μ 未知，单边假设检验问题

检验假设: $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2,\quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

或 $H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2,\quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

则在显著性水平 α 下, H_0 的拒绝域:

先考虑: $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2,\quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

分析:
- 因 H_0 中的全部 σ^2 都比 H_1 中的 σ^2 要小，当 H_1 为真时, S^2 的观察值 s^2 往往偏大，因此拒绝域的形式为 $s^2 \ge k$
- 下面来确定常数 k。

$$P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}) = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}(S^2 \ge k)$$

$$= P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right)$$

$$\le P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right)$$

要控制 $P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}) \le \alpha$ **，只需令**

$$\boxed{P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right) = \alpha}$$

因为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ **，故** $\dfrac{(n-1)k}{\sigma_0^2} = \chi_\alpha^2(n-1)$

于是 $$k=\frac{\sigma_0^2}{(n-1)}\chi_\alpha^2(n-1)$$

综上可得 $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

显著性水平为 α 的拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_\alpha^2(n-1)$$

类似可得 $H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

显著性水平为 α 的拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$$

注: 当总体服从正态分布，μ 未知

双边假设检验: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

右边假设检验: $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

左边假设检验: $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

在显著性水平 α 下, H_0 的拒绝域分别为:

双边假设检验: $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

右边假设检验: $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{\alpha}(n-1)$$

左边假设检验: $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

二. 两个正态总体方差的假设检验（F 检验）

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 是来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，
$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，
且两个样本相互独立。其样本方差分别为S_1^2, S_2^2
且 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知。

检验假设　$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，　$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

取检验统计量

二. 两个正态总体方差的假设检验（F 检验）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，

且两个样本相互独立。其样本方差分别为S_1^2, S_2^2

且 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知。

检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$， $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

取检验统计量 $F = \dfrac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

使得: P{ 当 H_0 为真时拒绝 H_0 }

$$= P_{\boxed{\sigma_1^2=\sigma_2^2}}\{ \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right)$$

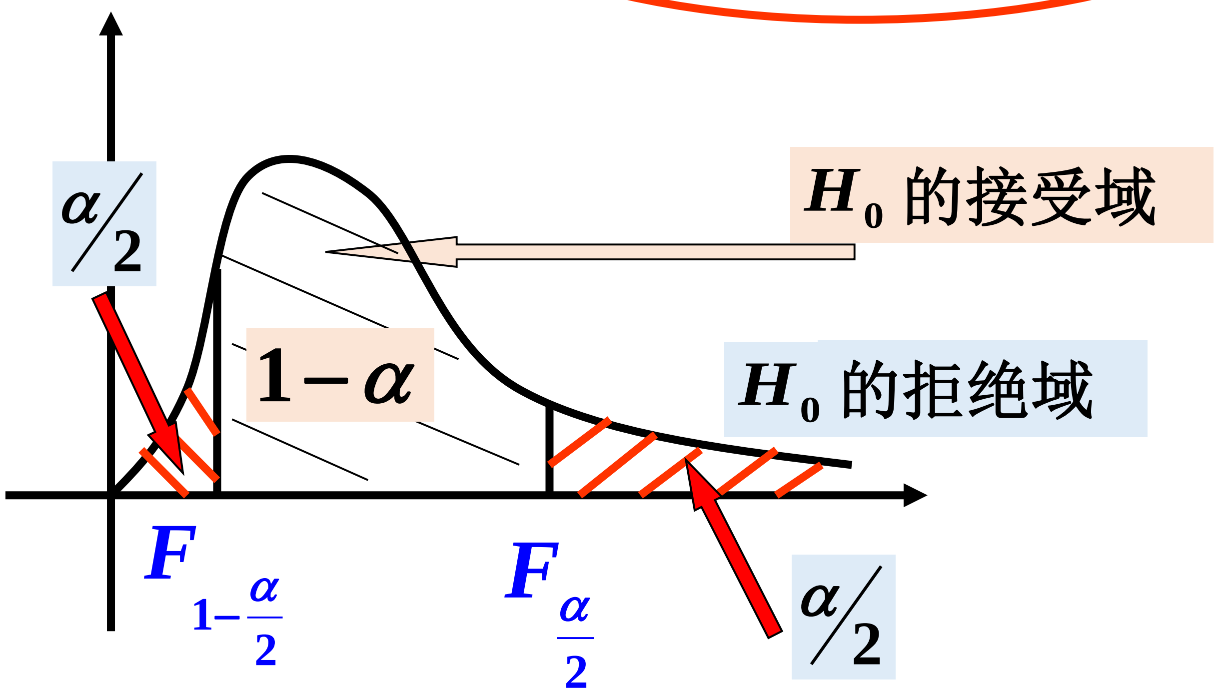
$$\cup \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right) \} = \alpha$$

则在显著性水平 α 下, H_0 的拒绝域:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$

或

$$\frac{s_1^{\ 2}}{s_2^{\ 2}} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$



习惯上亦称两个总体方差相等的检验为：两总体方差齐性的检验。

注: 检验假设:

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$$H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

单边检验

同上面假设检验的讨论类似，可得 H_0的拒绝域为:

右边假设检验:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$$

左边假设检验:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$$

例2. 现要检测两批葡萄酒的醇含量，分别对它们进行 6 次和 4 次的测定，检测得各自的标准差为 0.07 和 0.06；假定这两批葡萄酒醇的含量均服从正态分布，且 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知。

试问：这两批葡萄酒的醇含量的均方差有无显著差异？ $(\alpha = 0.1)$

统计量

拒绝域

解: 检验假设

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

因为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知， 所以由 F 检验取

检验统计量为: $F = \dfrac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

拒绝域

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{ 或 } \frac{s_1^2}{s_2^2} \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

经计算: $\because \quad s_1 = 0.07, \quad s_2 = 0.06$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(5,3) = \frac{1}{F_{\frac{0.1}{2}}(3,5)} = \frac{1}{5.41} = 0.1848$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(5,3) = F_{\frac{0.1}{2}}(5,3) = 9.01$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(0.07)^2}{(0.06)^2} = 1.36$$

又 $\because \quad 0.1848 < 1.36 < 9.01$

$\therefore$ 接受 H_0 即认为这两批葡萄酒的醇含量的均方差无显著差别。

第八章作业（教材第五版）：

P215：1、2、3、4

P216: 6、7、8

P217: 11、14、15

P218: 18、22

注：作业不得抄袭；写上姓名、班级、学号和页码（如1/5），待第九章讲授结束后，与第九章作业一起提交至教学云平台。