知识回顾

- 参数估计
  - 点估计
    - 矩估计法
    - 极大似然估计法
  - 区间估计
    - 均值的区间估计
    - 方差的区间估计

定义：设总体 X 的分布函数 $F(x,\theta)$ 含有一个未知参数 θ，对于给定的值 α $(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1,X_2\cdots X_n$ 确定的两个统计量：

$$\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\text{和 }\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2\cdots,X_n)$$

满足：$P(\underline{\theta}<\theta<\bar{\theta})=1-\alpha$，则称随机区间 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

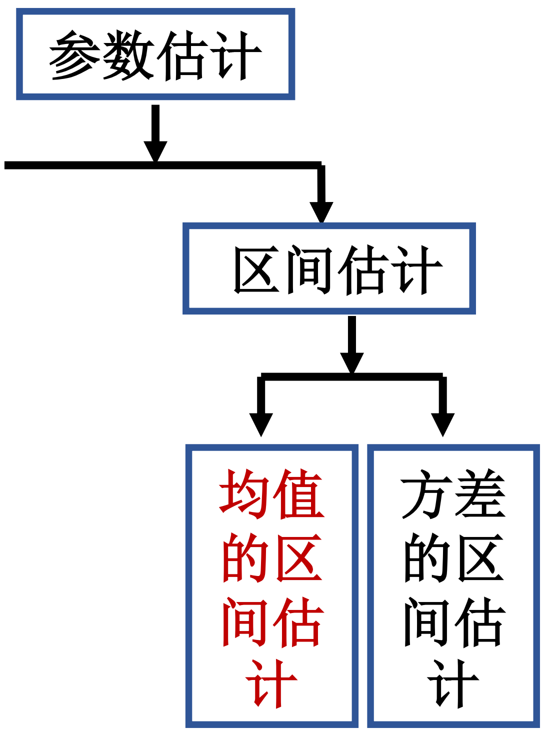
知识回顾—区间估计的方法步骤

1. **构建枢轴量$W(\theta,\hat{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n))$：** 可从待估参数$\theta$的一个点估计量$\hat{\theta}$出发，构建关于$\theta$和$\hat{\theta}$的函数$W(\theta,\hat{\theta})$，且$W(\theta,\hat{\theta})\sim \mathrm{F(x)}$为已知不含未知参数的分布（此处综合考虑点估计量和第六章各抽样分布）。

2. **构造区间：** 在F(x)分布中，构造区间$P\left(a<W(\theta,\hat{\theta})<b\right)=1-\alpha$（置信水平）。

3. **求解区间：** 根据a$<W(\theta,\hat{\theta})<b$，即得出取值范围$\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$，即为其置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

知识回顾



1、单个正态总体，方差已知

➢ 枢轴量为：

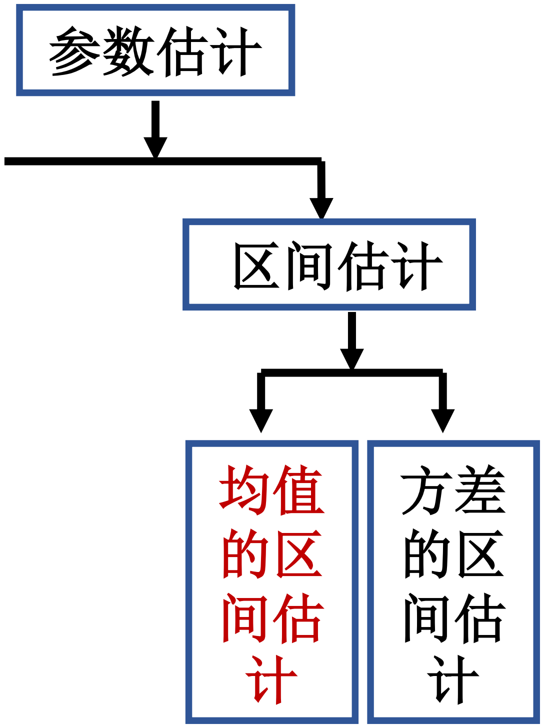
$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

2、单个正态总体，方差未知

➢ 枢轴量为：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

知识回顾



3、两个正态总体，方差已知

➢ 枢轴量为：

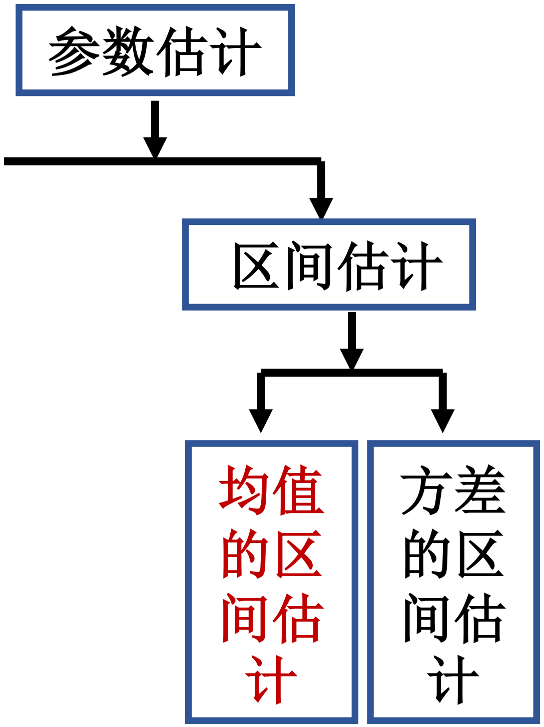
$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$$

4、两个正态总体，方差未知

➢ 枢轴量为：

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$$

知识回顾



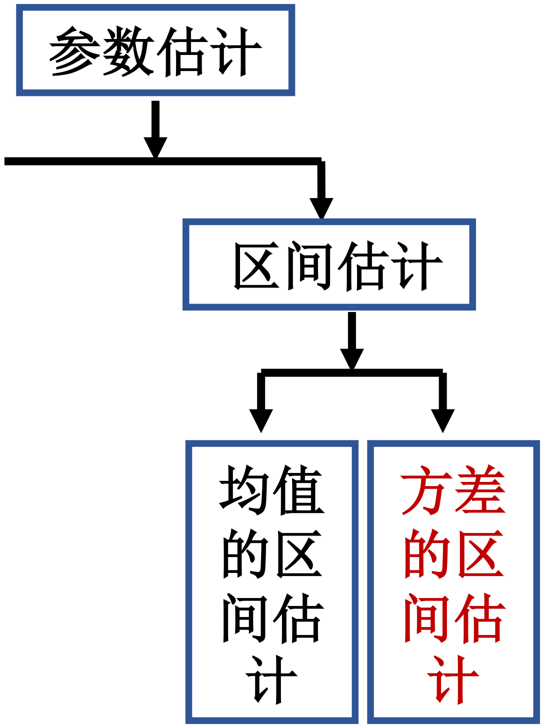
5、两个正态总体，方差未知但相等

➢ 枢轴量为：

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},$$

知识回顾



1、单个正态总体，均值未知

➢ 枢轴量为：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

2、两个正态总体，均值未知

➢ 枢轴量

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

知识回顾

➢ (0-1)分布，参数p的区间估计（依据中心极限定理）

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \boxed{\frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)}$$

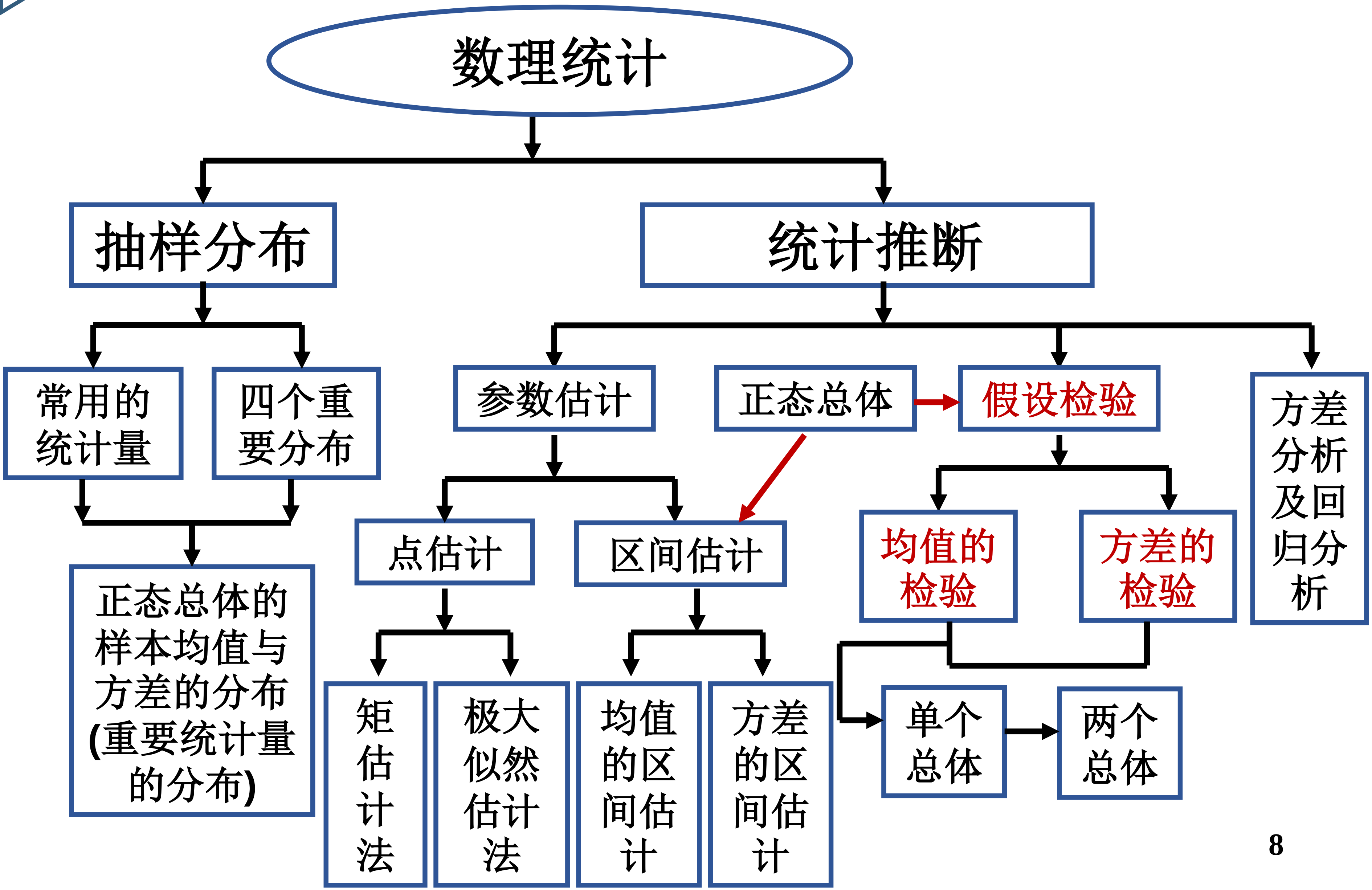
➢ 单侧置信区间（查单侧α分位点）

满足: $P(\theta > \underline{\theta}) = 1-\alpha$ 或 $P(\theta < \bar{\theta}) = 1-\alpha$

则称随机区间: $(\underline{\theta}, +\infty)$ (或 $(-\infty, \bar{\theta})$) 是 θ

的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间。

数理统计部分知识结构图



第八章
假设检验

王笑尘

北京邮电大学网络空间安全学院

wxiaochen@bupt.edu.cn

第八章 假设检验

假设检验问题： 根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确。

假设检验问题分类：

假设检验
- 参数假设检验 —— 总体分布已知，检验关于未知参数的某个假设
- 非参数假设检验 —— 总体分布未知时的假设检验问题

第一节 假设检验

一．假设检验的基本思想

设总体 X 含有未知参数θ (或总体分布函数$F(x)$未知)检验下述假设:

$$\text{假设}\quad H_0:\quad \theta=\theta_0 \quad \text{或} \quad F(x)=F_0(x)$$

其中:

θ_0 是某个已知常数 (或 $F_0(x)$ 是某个已知的分布函数)。则抽取容量为 n 的样本，利用样本提供的信息对假设作出判断，从而确定是否接受H_0。

例如: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ未知

检验假设: H_0: $\mu = \overline{x}$

根据上一章的讨论，显然H_0是可以被接受的，因为$\overline{X}$是总体 X 的待估计参数μ的无偏估计。

二. 判断“假设”是否正确的根据

不是一定不发生

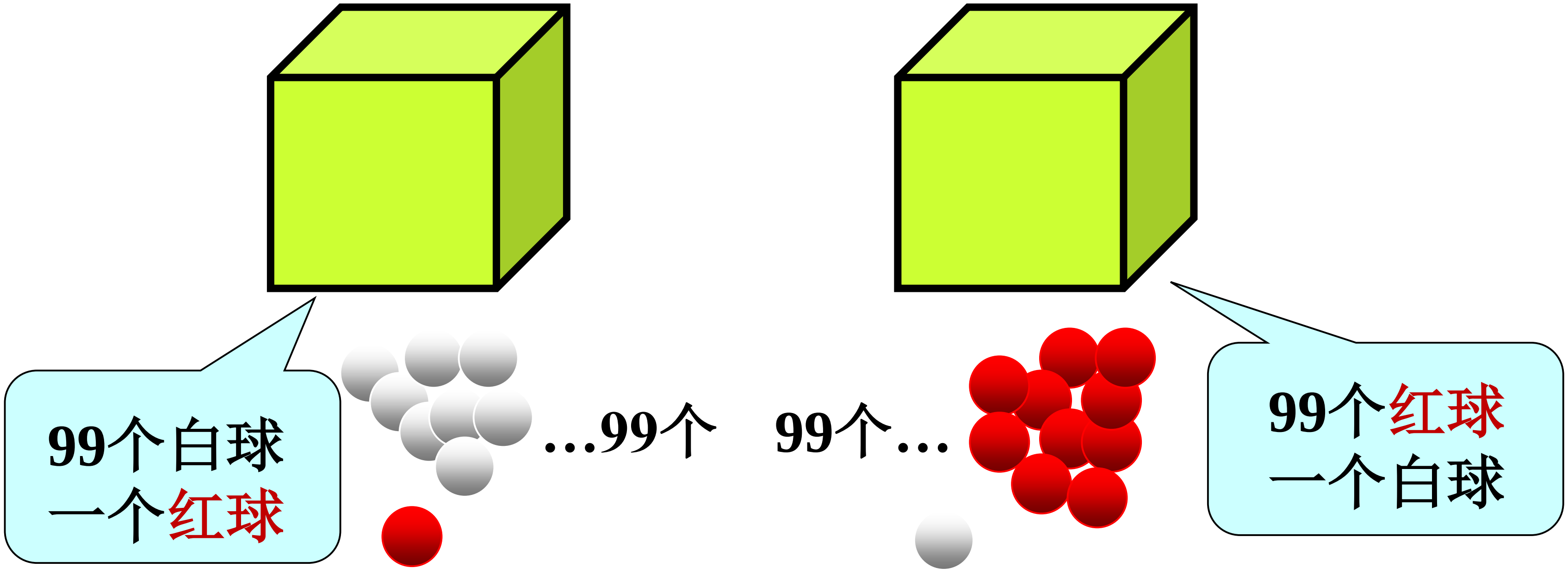
小概率事件原理

小概率事件在一次试验中是几乎不可能发生的。

如果在假设 H_0 成立的条件下某事件是小概率事件，但在一次试验中却发生了，于是就可怀疑假设 H_0 的正确性从而拒绝 H_0。

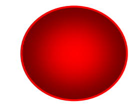
■ 现用一个例子来说明这个原则：

例如：现有两个盒子，各装有100个球。

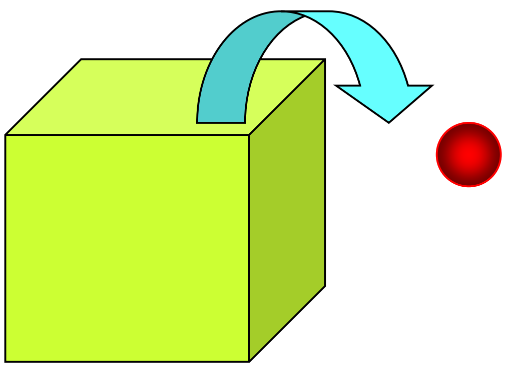


现从两盒中随机取出一个盒子，问：这个盒子里是白球 99 个还是红球 99 个？

若假设：这个盒子里有 99 个白球。

当从中随机摸出一个球时，发现是红球：

此时应如何判断这个假设是否成立呢？



- 假设其中真有 99 个白球，摸出红球的概率只有 1/100 ，这是小概率事件。
- 但此小概率事件在一次试验中竟然发生了，这就需怀疑所作的假设的正确性而拒绝原假设。

注：这个例子中所使用的推理方法，可以称为是带概率性质的反证法。但它不同于一般的反证法。

- 一般的反证法要求在原假设成立的条件下导出的结论是绝对成立的；如果事实与之矛盾，则完全绝对地否定原假设。
- 概率反证法的逻辑是：如果小概率事件在一次试验中居然发生了，则就可以以很大的把握否定原假设，否则就不能否定原假设。

在假设检验中，常称这个小概率为显著性水平，用 α 表示。

三. 假设检验的两类错误

1. 第一类错误 (弃真): 如果 H_0 是正确的，但却被错误地否定了。

2. 第二类错误 (取伪): 如果 H_0 是不正确的，但却被错误地接受了。

若设犯两类错误的概率分别为:

$$P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\} = \alpha$$

（小概率事件发生，怀疑H_0的准确性）

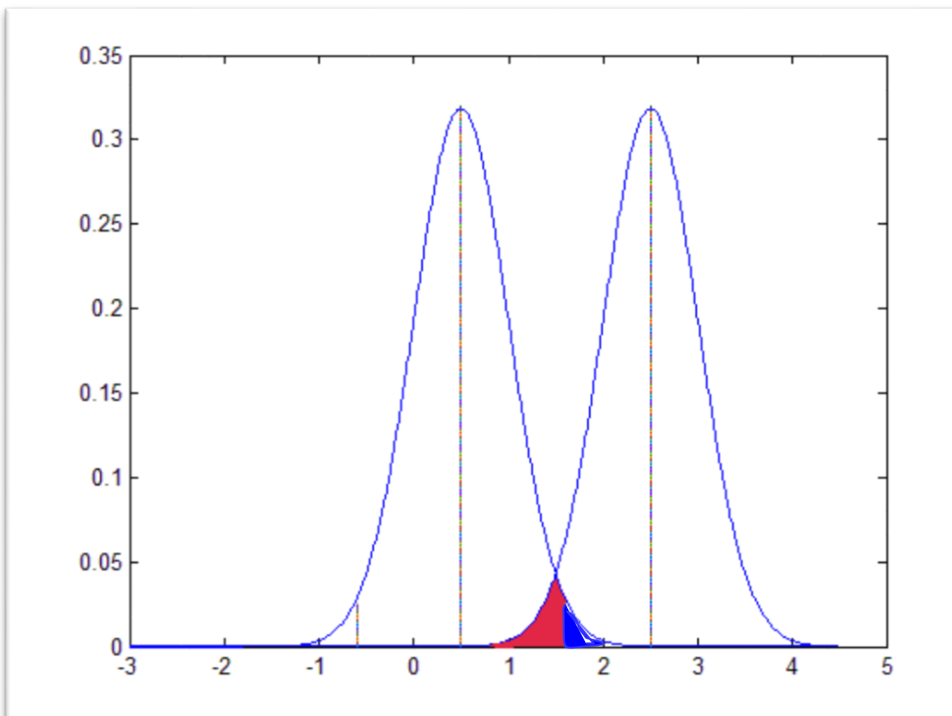
$$P\{\text{接受}\,H_0 \mid H_0\text{不真}\} = \beta$$

则显著性水平 α 为犯第一类错误的概率。

注：两类错误是**互相关联**的， 当样本容量 n 固定时，一类错误概率的减少必导致另一类错误概率的增加。

例如：设总体X服从$N(\mu, 0.5^2)$，其中参数μ有两个可能取值0.5和2.5。

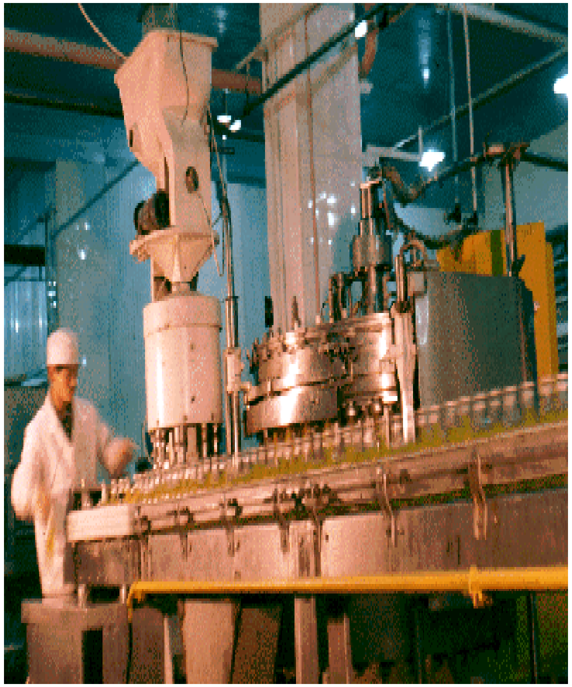
假设： H_0: μ=0.5 ； H_1: μ=2.5



四. 假设检验的具体做法

例1. 罐装可乐容量的检验问题

在一条生产可乐的流水线上罐装可乐不断地封装，然后装箱外运。罐装可乐的容量按标准应在 350 毫升和 360 毫升之间。



试问：如何检验这批罐装可乐的容量是否合格呢？

分析：若把每一罐可乐都打开倒入量杯，看看容量是否合于标准。这显然是不可行的。

通常的办法是：进行抽样检查。

即，每隔一定时间，抽查若干罐。如：

每隔1小时，抽查5罐，得5个容量的值：

X_1，…，X_5，根据这些值来判断生产是否正常。

- 如发现不正常则应停产，找出原因，排除故障，然后再生产；
- 如生产正常，就继续按规定时间再抽样，以此监督生产，保证质量。

显然：

- 不能由 5 罐容量的数据，在把握不大的情况下就判断生产不正常，因为停产的损失是很大的；
- 当然也不能总认为正常，有了问题不能及时发现，这也要造成损失。

如何处理这两者的关系？

现用假设检验的方法来处理这对矛盾

注意到： 在正常生产条件下，由于种种随机因素的影响，每罐可乐的容量应在 355 毫升上下波动。这些因素中没有哪一个占有特殊重要的地位。因此，根据中心极限定理，假定每罐容量服从正态分布是合理的。

故：可以认为样本是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$

现抽查了 n 罐，测得容量为：$X_1, X_2, \cdots, X_n$

当生产比较稳定时，σ^2 是一个常数。

现在要检验的假设是：

$$H_0:\quad \mu = \mu_0 \quad (\mu_0 = 355)$$

在实际问题中，往往把不轻易否定的命题作为原假设。

它的对立假设是：

$$H_1:\ \mu \neq \mu_0$$

称 H_0 为原假设（或零假设）

称 H_1 为备择假设（或对立假设）.

那么，如何判断原假设H_0 是否成立呢？

由于μ是正态分布的期望值，它的无偏估计量是样本均值$\bar{X}$，因此可以根据$\bar{X}$与μ_0的差距$\left|\bar{X}-\mu_0\right|$来判断$H_0$是否成立。

当$\left|\bar{X}-\mu_0\right|$较小时，可以认为$H_0$是成立的；

当$\left|\bar{X}-\mu_0\right|$较大时，应认为$H_0$不成立，即 生产已不正常。

而较大、较小是一个相对的概念，那么它应由什么原则来确定？

当 $\left|\bar{X}-\mu_0\right|$ 较小时，可以认为 H_0 是成立的；

当 $\left|\bar{X}-\mu_0\right|$ 较大时，应认为 H_0 不成立，即 生产已不正常。

问题归结为：对差异作定量的分析，以确定其性质。

注意到：

- 当差异是由抽样的随机性引起时，则称其为“抽样误差”或 “随机误差”；它反映了由偶然、非本质因素引起的随机波动；
- 然而，这种随机性的波动是有一定限度的。

如果差异超过了这个限度，则就不能用抽样的随机性来解释。此时可认为这个差异反映了事物的本质差别，则称其为“系统误差”。

从而问题就转化为：

如何判断差异是由“抽样误差”还是“系统误差”所引起的？

解决的方法：给出一个量的界限，即$\boxed{\text{显著性水平}\alpha}$

从而提出假设：

$$H_0:\ \mu = \mu_0 = 355 \Longleftrightarrow H_1:\ \mu \neq \mu_0 = 355$$

因为 σ 已知，$\boxed{\text{当生产比较稳定时，}\sigma^2\text{是一个常数}}$

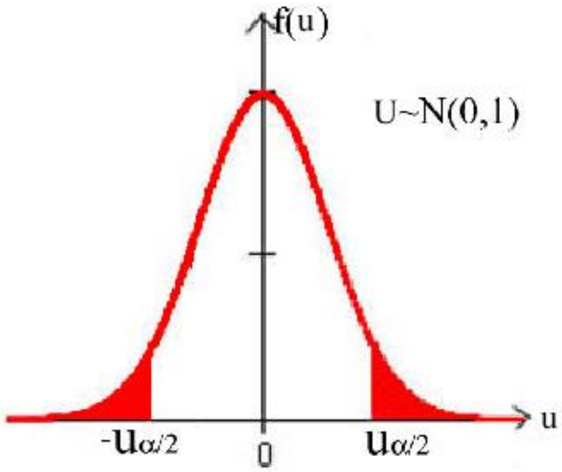
所以构造统计量为：

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

误差

对给定的显著性水平 α，查正态分布的上 α 分位点的值 $u_{\alpha/2}$，使：

$$P\{|U| \geq u_{\alpha/2}\} = \alpha$$



即 $|U| \geq u_{\alpha/2}$ 是一个小概率事件

故可以取拒绝域 C为：

$$C: \quad |U| \geq u_{\alpha/2}$$

如果由样本值算得该统计量的实测值落入区域C，则拒绝 H_0；否则就接受 H_0。

注：

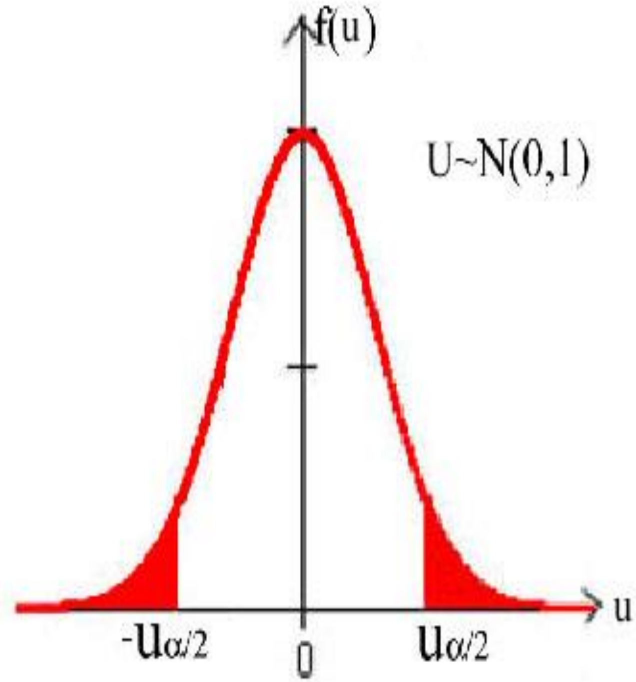
- 这里所依据的逻辑是：
  - 如果H_0是对的，那么衡量差异大小的某个统计量落入区域 C (拒绝域) 是个小概率事件。
  - 如果该统计量的实测值落入C，即 H_0 成立下的小概率事件发生了，那么就认为H_0不可信而否定它；否则就不能否定H_0而只好接受H_0。

注：

- 这里所依据的逻辑是：
  - 所以，这个概率也表示H_0为真是，拒绝H_0的概率。（即犯第一类错误—弃真的概率）
  - 不否定H_0并不是肯定H_0一定对，而只是说差异还不够显著，还没有达到足以否定H_0的程度 。所以假设检验又叫“显著性检验”。

▲ 如果显著性水平α 取得很小，则拒绝域也会比较小。其产生的后果是：H_0难于被拒绝。

▲ 如果在α很小的情况下H_0仍被拒绝了，则说明实际情况很可能与之有显著差异。



▲ 基于这个理由，人们常把 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0称为是显著的。

▲ 把在$\alpha=0.01$ 时拒绝 H_0 称为是高度显著的。

五. 假设检验问题的步骤

1. 根据实际问题要求，提出原假设 H_0 及备择假设 H_1

2. 确定检验统计量

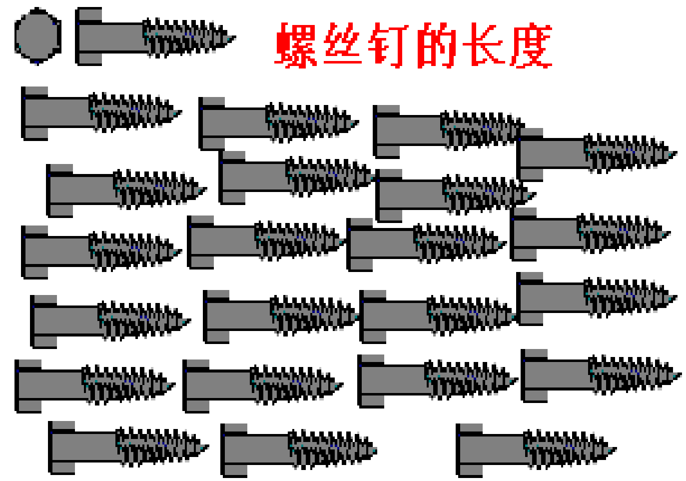
3. 按 $P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}) = \alpha$ ，求出拒绝域

4. 取样本，将样本观察值代入统计量，观察统计量是否在拒绝域以确定接受 H_0 还是拒绝 H_0

例2 某工厂生产的一种螺钉，标准要求长度是 32.5 毫米。 实际生产的产品，其长度 X 假定服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\boxed{\text{其中 }\sigma^2\text{ 未知}}$，现从该厂生产的一批产品中抽取 6 件，得尺寸数据如下：

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03

问：这批产品是否合格? $\alpha=0.01$



解：由已知，设这批产品(螺钉长度)的全体组成总体 X

则问题是要检验 $E(X)$ 是否为32.5。

…

第一步： 提出原假设和备择假设

$$H_0: \mu = 32.5 \quad \Leftrightarrow \quad H_1: \mu \neq 32.5$$

第二步： 因为已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知.

故取检验统计量为：

第一步： 提出原假设和备择假设

$$H_0: \mu = 32.5 \quad \Leftrightarrow \quad H_1: \mu \neq 32.5$$

第二步： 因为已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知.

故取检验统计量为：
$$t = \frac{\bar{X} - 32.5}{S/\sqrt{6}}$$

能衡量差异大小且分布已知

在 H_0 成立下求出它的分布为：

$$t = \frac{\bar{X} - 32.5}{S/\sqrt{6}} \sim t(5)$$

第三步:

对给定的显著性水平 $\alpha = 0.01$ 查 t 分布表得临界值:

$$t_{\alpha/2}(5) = t_{0.005}(5) = 4.0322$$

使得: $P\{|t| \geq t_{\alpha/2}(5)\} = \alpha$

即“ $|t| \geq t_{\alpha/2}(5)$ ”是一个小概率事件.

小概率事件在一次试验中基本上不会发生。

故得否定域为:

$C:\quad |t| \geq 4.0322$

第四步：

将样本值代入，计算出统计量 t 的实测值：

$$|t| = 2.997 < 4.0322$$

没有落入拒绝域

故不能拒绝H_0，即应接受H_0

结论： 可认为这批产品是合格的。

注：

接受H_0这并不意味着H_0一定对，只是差异还不够显著，不足以否定H_0。

例3. 设某异常区磁场强度服从正态分布 $N(\mu_0,\sigma_0^2)$，由以前观察知道 $\mu_0=56$, $\sigma_0=20$，现有一台新型号的仪器，用它对该区进行磁测，抽取了41个点，其样本均值与标准差为：

$$\bar{X}=61.1,\quad S=20$$

问：此仪器测出的结果是否符合要求?（$\alpha=0.05$）

解：以 μ,σ 分别表示用这台机器测出的异常区的磁场强度 X 的均值和均方差(标准差)。

根据长期实践的经验表明异常区磁场强度的标准差比较稳定，所以可设 $\sigma=20$,

于是：$X\sim N(\mu,20^2)$ 这里 μ 是未知的。

第一步： 提出假设：H_0： $\mu = \mu_0 = 56$

H_1： $\mu \neq \mu_0 = 56$

第二步： 由已知条件取检验统计量为：

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

第三步：

对给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$ 查正态分布表得临界值：

$$k = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

使得: $$P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq k\right\}=\alpha$$

即: $$\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq k = 1.96$$ 是一个小概率事件。

故得否定域为: $$C: \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq 1.96$$

第四步：

将样本值代入，计算出统计量 U 的实测值：

$$u=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{61.1-56}{20/\sqrt{41}}\right|=\left|\frac{5.1}{3.125}\right|=1.632<1.96$$

没有落入拒绝域

故不能拒绝H_0，即应接受H_0。

结论：

可认为这台仪器测出的结果是符合要求的。即这台机器是基本正常的。

例题注解:

在正态分布中针对显著性水平α，一般有:

当 $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < k$ 则称 $\bar{x}$ 与 μ_0 的差异不显著。

当 $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq k$ 则称 $\bar{x}$ 与 μ_0 的差异显著。

注:▲ 备择假设 H_1 表示 μ 可能大于 μ_0 也可能小于 μ_0，故称其为双边备择假设。从而对应的假设检验称为双边假设检验。

▲ 拒绝域与临界点

(1)当统计量取某个区域 C 中的值时，拒绝原假设 H_0，则称区域 C 为拒绝域。

(2) 拒绝域的边界点称为临界点

▲ 单边检验

(1) 右边检验: $H_0: \ \mu \le \mu_0$ $H_1: \ \mu > \mu_0$

(2) 左边检验: $H_0: \ \mu \ge \mu_0$ $H_1: \ \mu < \mu_0$

例4 某编织物强力指标 X 的均值 $\mu_0 = 21$ 公斤。改进工艺后生产了一批编织物，今从中取 30 件，测得 $\bar{X} = 21.55$ 公斤，假设改进后指标X服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，且已知 $\sigma = 1.2$ 公斤。

问：在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下，新生产编织物比过去的编织物强力是否有提高？

解：提出假设：$H_0 : \mu \le 21 \quad \Leftrightarrow \quad H_1 : \mu > 21$

取统计量：$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

否定域 C 为：$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_{0.01} = 2.33$

是一小概率事件

由已知，$\sigma = 1.2$，$n = 30$

并由样本值计算，得实测值为：$2.51 > 2.33$

落入拒绝域

故拒绝原假设 H_0，可认为新生产编织物比过去的编织物强力是有提高的。

注：

此时可能会犯第一类错误，但犯错误的概率不会超过 0.01。

小结

提出假设

根据统计调查的目的，提出原假设H_0和备选假设H_1

抽取样本

检验假设

对差异进行定量的分析，确定其性质（随机误差还是系统误差，为给出两者界限，给出显著性水平，并找一检验统计量 T，在H_0成立下其分布已知）

作出决策

拒绝H_0还是接受H_0

$$P(T\in C)=\alpha$$

-----犯第一类错误的概率，

C 为拒绝域。

第八章作业（教材第五版）：

P215：1、2、3、4

注：作业不得抄袭；写上姓名、班级、学号和页码（如1/5），待第九章讲授结束后，与第九章作业一起提交至教学云平台。