# 组合数学

**张义**

北京邮电大学数学系

# 第1章　鸽巢原理

1.1  鸽巢原理：简单形式
1.2  鸽巢原理：加强形式
1.3  Ramsay数
1.4 Ramey数的推广

鸽巢原理，又叫抽屉原理，是一个重要而又初等的组合学原理，由Peter Gustav Lejeune Dirichlet 在1834年首次形式化给出，它能够解决各种有趣的问题，常常得出一些令人惊奇的结论，特别的它在计算机科学中经常出现.

## 1 鸽巢原理：简单形式

**定理 1.1.1** 如果把$n$+1只鸽子放入$n$个鸽巢，那么至少有一个鸽巢中有两只或更多的鸽子.

# 1 鸽巢原理：简单形式

【例1】 从1到$2n$的正整数中任取$n+1$个，则这$n+1$个数中一定有两个数互质。

# 1 鸽巢原理：简单形式

**【例2】 从1到2$n$的正整数中任取$n$+1个，则这$n$+1个数中至少有一对数，其中一个是另一个的倍数.**

# 1 鸽巢原理：简单形式

可以看出，应用鸽巢原理可以巧妙的解决看似复杂的问题，其关键是如何去构造问题中的“鸽子”和“鸽巢”.

# 1 鸽巢原理：简单形式

**【例3】**：一位象棋大师以11 周时间准备一次比赛，他决定每天至少下一盘棋，为了不至于太累，他限定每一周不多于12 盘对局，证明，存在连续若干天，在这些天中他恰下了21 盘棋。

# 1 鸽巢原理：简单形式

**【例4】**：证明任意给定的52 个整数中，总存在两个数，它们的和或差能被100 整除。

# 2 鸽巢原理：加强形式

**定理 1. 2.1** 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$都是正整数. 如果

$$a_1+a_2+\ldots+a_n-n+1$$

只鸽子飞入$n$个鸽巢，那么或者第一个鸽巢至少有$a_1$只鸽子，或者第二个鸽巢至少有$a_2$只鸽子,…,或者第$n$个鸽巢至少有$a_n$只鸽子。

如果令 $a_i = 2$ $(i=1,2,\ldots,n)$，就是定理1.1.1.

**定理 1.1.1** 如果把$n+1$只鸽子放入$n$个鸽巢，那么至少有一个鸽巢中有两只或更多的鸽子.

# 2 鸽巢原理：加强形式

**定理 1. 2.1** 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$都是正整数. 如果

$$a_1+a_2+\ldots+a_n-n+1$$

只鸽子飞入$n$个鸽巢，那么或者第一个鸽巢至少有$a_1$只鸽子，或者第二个鸽巢至少有$a_2$只鸽子,…,或者第$n$个鸽巢至少有$a_n$只鸽子。

如果 $a_i = r$ $(i=1,2,\ldots,n)$，则变成了：

**推论 1.2.1** 若$n(r-1)+1$只鸽子飞入$n$个鸽巢，那么至少有一个鸽巢中有$r$只鸽子.

# 2 鸽巢原理：加强形式

**推论 1.2.1** 若$n(r-1)+1$只鸽子飞入$n$个鸽巢，那么至少有一个鸽巢中有$r$只鸽子.

也可以写成如下形式：

**推论 1.2.2** 若将$m$只鸽子放入$n$个鸽巢中，则至少有一个鸽巢中有不少于$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$只鸽子 .

# 2 鸽巢原理：加强形式

**推论 1.2.3** 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 $n$ 个整数，而且

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}>r-1$$

则 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 中至少有一个数不小于$r$.

# 2 鸽巢原理：加强形式

例 若序列 $S = \{ a_1 , a_2 , \ldots , a_{mn+1}\}$ 中的各数是不等的，$m , n$ 是正整数，则

(1) S 有一长度为 $m+1$ 的严格递增子序列或长度为 $n+1$ 的严格递减子序列;

(2) S 有一长度为 $m+1$ 的严格递减子序列或长度为 $n+1$的严格递增子序列.

# 2 鸽巢原理：加强形式

**例** 将 1 到 16 这16个数划分为3个子集，必有一个子集中有一数是同子集中的某两数之差（三个元素不一定互不相同）.

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**Ramsey问题：**

**1958年美国的《数学月刊》上登载着这样一个有趣的问题“任何6个人的聚会，其中总会有3个人相互不认识，或者3个人互相认识。”**

# 3 图的定义

- **图 G=(V,E);**
- **n个顶点的完全图记为$K_n$;**
- **任意一个图 G=(V,E)满足:**

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

# 3 图的一个命题

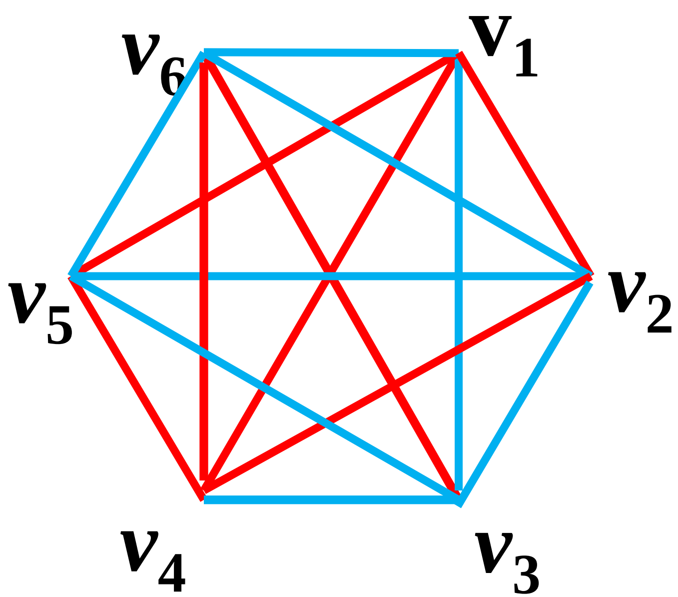
**命题：任意给定一个图，它奇度顶点的个数不可能是奇数。**

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**6个人分别用6个顶点$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$表示，过此6个顶点作完全图：**

**互相认识的两个人，对应顶点的连线着红色。**

**互相不认识的两个人，对应的顶点连线着蓝色。**



# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**命题1：对6个顶点完全图的边，用红、蓝二色任意着色，必然至少存在一个红色边三角形，或者存在一个蓝色边三角形。**

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

更强的命题

**命题2： 对6个顶点的完全图任意进行红、蓝两边着色,都至少存在两个同色的三角形.**

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**命题3： 对10个顶点的完全图 $K_{10}$任意进行红、蓝两边着色,都或者存在一个红色$K_4$，或者存在一个蓝色 $K_3$ 。**

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**命题4：　对9个顶点的完全图$K_9$任意进行红、蓝两边着色,都或者存在一个红色$K_4$,或者存在一个蓝色$K_3$.**

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

命题 5： $K_{18}$的边红,蓝 2 着色,存在红$K_4$或蓝$K_4$．

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**定义 1.3.1** 对于任意给定的两个正整数 $a$ 和 $b$，如果存在最小的正整数 $r(a,b)$ 使得当$N \geq r(a,b)$ 时，对 $K_N$ 任意进行红、蓝两边着色，$K_N$ 中均有红色 $K_a$，或蓝色 $K_b$，则 $r(a,b)$ 称为 Ramsey数.

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**定理 1.3.1** 对任意正整数$a$，$b$，有

（1）$r(a,b) = r(b,a)$,

（2）$r(a,2) = a$.

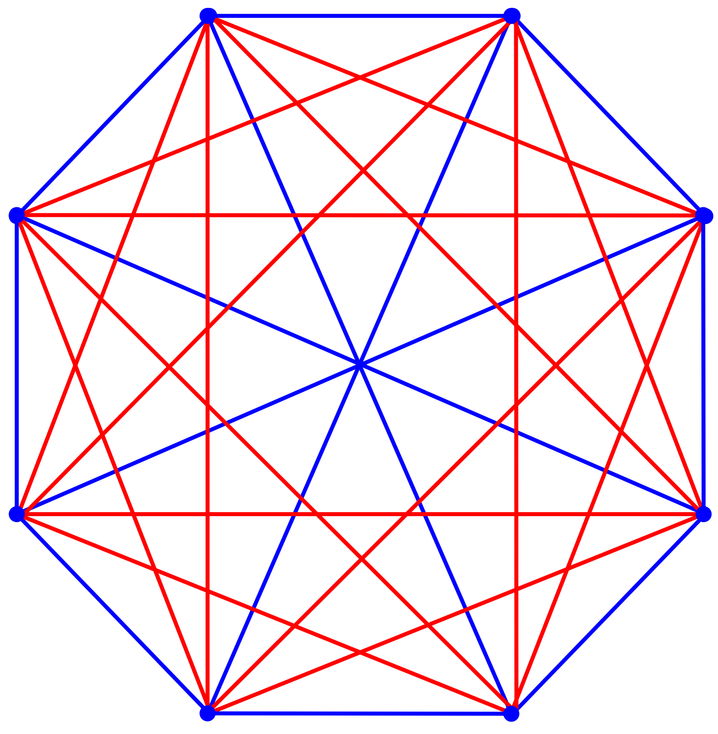
# 3 r(3,3)和r(4,3)

证明:

（1） $r(3,3) = 6$;

（2） $r(4,3) = 9$;

# 3 r(3,3)和r(4,3)



# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**下面的表格给出目前已知的Ramsey数部分结果.**

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 14 | 18 | 23 | 28 | 36 | [40, 42] |
| 4 | | 18 | 25 | [35,41] | [49,61] | [59,84] | [73, 115] | [92, 149] |
| 5 | | | [43,48] | [58,87] | [80,143] | [101,216] | [133, 316] | [149, 442] |
| 6 | | | | [102,165] | [115,298] | [134,495] | [183, 780] | [204, 1171] |
| 7 | | | | | [205,540] | [219, 1031] | [252, 1713] | [292, 2826] |
| 8 | | | | | | [282,1870] | [329, 3583] | [343, 6090] |
| 9 | | | | | | | [565,6588] | [591,12677] |
| 10 | | | | | | | | [798,23581] |

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**定理 1.3.2 对任意正整数$a \geq 3$，$b \geq 3$，有**

$$r(a,b) \leq r(a-1,b) + r(a,b-1).$$

## 3 Ramsey问题与Ramsey数

**定理 1.3.3 对任意正整数$a \geq 3$，$b \geq 3$，若$r(a-1,b)$ 和 $r(a,b-1)$ 都是偶数，则：**

$$r(a,b) \leq r(a-1,b) + r(a,b-1)-1.$$

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**定理 1.3.4** 对任意正整数$a\geq 2$，$b\geq 2$，有

$$r(a,b)\leq \binom{a+b-2}{a-1}=\frac{(a+b-2)!}{(a-1)!(b-1)!}$$

证明 对$a+b$作归纳.

当$a+b\leq 5$时,$a=2$或$b=2$,由定理 1.3.1知定理1.3.3成立.

假设对一切满足$5\leq a+b<m+n$的$a,b$，定理成立，由定理 1.3.2及归纳假设，有

$$r(m,n)\leq r(m,n-1)+r(m-1,n)\leq \binom{m+n-3}{m-1}+\binom{m+n-3}{m-2}=\binom{m+n-2}{m-1}$$

所以，对任意的正整数$a\geq 2$，$b\geq 2$，定理的结论成立

# 3 Ramsey问题与Ramsey数

**定理1.3.5** 若$m \geq 3$，则$r(m,m) > 2^{m/2}$。

# 4 Ramsey 数的推广

广义*Ramsey*数 $r(a_1,a_2,\ldots,a_k)$:

对于给定的正整数 $a_i$ ( $a_i \geq 2$), $i = 1, 2, \ldots, k$．存在**最小**正整数 $r$, 当对 $K_r$ 用 $k$ 种颜色 $C_i$ ( $i = 1, 2, \ldots, k$) **任意**边着色．则存在 $i$， 出现全 $C_i$ 色的 $K_{a_i}$；这个最小正整数 $r$ 用 $r(a_1, \ldots, a_k)$ 表示.

# 4 Ramsey 数的推广

**定理 1.4.1** 对于任意的正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$, 有

$$\boxed{r(a_1, a_2, \ldots, a_k) \le r(a_1, r(a_2, \ldots, a_k))}$$。

# 4 Ramsey 数的推广

**证明：$r(3,3,3) \leq 17$。**

# 4 Ramsey 数的推广

定理1.4.2 对于任意的正整数$a_1 \geq 2, a_2 \geq 2 \ldots, a_k \geq 2$，有

$$r(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq r(a_1-1, a_2, \ldots, a_k) + r(a_1, a_2-1, \ldots, a_k) + \ldots + r(a_1, a_2, \ldots, a_k-1) - k + 2$$

$$r(a_1, a_2, a_3) \leq r(a_1-1, a_2, a_3) + r(a_1, a_2-1, a_3) + r(a_1, a_2, a_3-1) - 1$$

# 4 Ramsey 数的推广

定理1.4.3 对于任意的正整数$a_1$ , $a_2$… , $a_k$, 有

$$r(a_1+1,a_2+1,...,a_k+1)\le\frac{(a_1+a_2+...+a_k)!}{a_1!a_2!...a_k!}$$

# 4 推广

集合划分 (有限划分)：

给定集合A，A的一组子集族$\{A_1,A_2,\ldots A_m\}$称为A的一个划分，若它们满足下面三个条件：

(1) $A_i \neq \emptyset$，对任意的 i；

(2) $A_i \cap A_j = \emptyset$，对任意的$i \neq j$；

(3) $\cup_{i=1}^{m} A_i = A$ 。

# 4 推广

**广义Ramsey 数的一个应用----许尔(Schur)定理的证明。**

**Schur定理：对任意的正整数 n,都存在一个整数 $f_n$ 使得无论将集合{1,2,…,$f_n$}划分成哪 n个子集合，总有一个子集中有三个数x,y,z（不一定不同），满足**

**x+y=z。**

# 4 Ramsey 数的推广

**Schur定理的广义Ramsey 数证明。**

**Schur定理：设{$A_1,A_2,\ldots A_n$}是集合{1, 2, … , $f_n$}的任意一个划分，则总有一个子集$A_i$中有三个数x,y,z（不一定不同），使满足 x+y=z。**

**我们可以取** $$f_n = r(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{n\text{个}3})$$

**记满足上述条件的正式$f_n$的最小值为$s_n$，则有$s_1=2,s_2=5,s_3=14$。**

# 4 Ramsey 数的推广

**Ramsey定理：**

**对于给定的正整数 *a* 和 *b*．存在最小正整数 r , 对任意有 m r 个元素的集合 S (|S|=m), 将S的全体 2 元子集任意分放到红蓝 2 个盒子里，那么，要么有S中的 *a* 个元素，它的所有2元子集全在红盒子里，要么有S中的*b*个元素，它的所有2元子集全在蓝盒子里，**

# 4 Ramsey 数的推广

**定理1.4.5(Ramsey定理) 设$q_1, q_2, \ldots, q_n$是正整数，且$q_1$  t, $q_2$  t …, $q_n$  t，则必有最小的正整数N($q_1, q_2, \ldots, q_n$; t)，使得当m  N($q_1, q_2, \ldots, q_n$; t)时，对任意有m个元素的集合S (|S|=m),将S的全体t元子集任意分放到n个盒子里，那么，要么有S中的$q_1$元素，它的所有t元子集全在第一个盒子里，要么有S中的$q_2$元素，它的所有t元子集全在第二个盒子里，要么有S中的$q_3$元素，它的所有t元子集全在第3个盒子里,….,要么有S中的$q_n$元素，它的所有t元子集全在第n个盒子里，**

# 4 Ramsey 数的推广

特殊情形：

$N(q_1, q_2, \ldots, q_n; 1) = q_1 + q_2 + \ldots + q_n - n + 1$

$N(q_1, q_2, \ldots, q_n; 2) = r(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

$N(q_1, t; t) = q_1$

$N(t, q_2; t) = q_2$