第四节 函数展开成幂级数

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，$f^{(n)}(x_0)$ 存在 $(n=0,1,2,3\cdots)$

泰勒公式：$f(x)=\underbrace{\left[f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)}}_{a_n:\text{泰勒系数}}(x-x_0)^n\right]}_{S_{n+1}(x)}+\underbrace{R_n(x)}_{\text{余项}}$

幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$

取 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

$f(x)$ 的泰勒级数：$f(x)\sim\underbrace{\left[f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right]}_{S_{n+1}(x)}+\cdots$

①：收敛域.

②：和函数 $S(x)\overset{?}{=}f(x)$

例：$f(x)=\frac{1}{1-x}=\underbrace{1}_{f(0)}+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，$x\in(-1,1)$.

定义域 $x\neq 0$.　　收敛域 $(-1,1)$.

$f^{(n)}(0)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\Big|_{x=0}=\left[(-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1)\right]^{(n-1)}\Big|_{x=0}$

$=\cdots=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)\cdot(-1)^n=n!$

$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=1$.

定理：$f(x)$ 展开成泰勒级数（在 $x=x_0$ 处）

即 $f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

证明："$\Leftarrow$" 当 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

去证. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$.

$\Leftrightarrow f(x)=S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$.

泰勒公式 $f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)$. $\Leftrightarrow R_n(x)=f(x)-S_{n+1}(x)$

$0=\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-S_{n+1}(x)]=f(x)-S(x)$

即得 $f(x)=S(x)$.

例.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$S(x)=0$、$x\in R$

$f(x)\neq S(x)$. $(x\neq 0)$

解. $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

$f(x)\sim 0+\frac{1}{1!}0\cdot x+\frac{1}{2!}0\cdot x^2+\cdots+\frac{1}{n!}0\cdot x^n+\cdots$

收敛域 R. 和函数 $S(x)=0$

定义域 R.

例：将 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处展开成泰勒级数

例：将 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处展开成幂级数

或展开成麦克劳林级数

或展开成 x 的幂级数

解：$(e^x)^{(n)}=e^x$ $(e^x)^{(n)}|_{x=0}=1$. (ξ 介于 0 与 x 之间)

$a_n=\frac{1}{n!}$ $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot x^{n+1}=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$

e^x 的麦克劳林公式：$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

e^x 的麦克劳林级数：$e^x \underset{\triangle}{\sim} 1+\frac{1}{1!}x+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 即证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\boxed{e^{\xi}}}{(n+1)!}x^{n+1}=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=0$. $\Leftarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛

$\Uparrow$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}=0<1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$\Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=0$. $\Leftarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛

$\Uparrow$

$\rho=0<1$

"直接法"：① 求 $f^{(n)}(x_0)$. 去得 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

② 去证 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

"间接法"：常用的6个麦克劳林级数

"间接法"：常用的6个泰勒级数

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^2 + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}} x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} \right| = 0. \quad R = +\infty.$

定理：$f(x)$ 可展开成幂级数 $\Rightarrow$ 开式唯一，即是泰勒级数

例. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$

$\frac{1}{1-x} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$

例. $e^{x^2} = 1 + \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}.$

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} = e^{x^2} - 1, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + \cdots, & x \in (-1, 1). \\ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \cdots, & x \in (-1, 1] \end{cases}$$

定义域 $(-1, +\infty)$. 　$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$. 　收敛域 $(-1, 1]$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (-1)^{n+1} = \sum_{n=0} \frac{(-1)}{n+1}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$x \in (-1,1)$.

但fr $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ 难以证明，故考虑

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}[f(x) - S_{n+1}(x)] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x) = f(x)$$

即 $S(x) = f(x)$

求和函数 $S(x) = 1 + mx + \cdots + \boxed{\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}} x^n + \cdots$

求得 $S(x) = (1+x)^m$. 得证.

"先导后积"法:

$$S'(x) = 0 + m + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot 2x + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} 3x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} 4x^3 + \cdots$$

$$S'(x) = m\left[1 + (m-1)x + \frac{(m-1)(m-1-1)}{2!}x^2 + \frac{(m-1)(m-1-1)(m-1-2)}{3!}x^3 + \cdots\right]$$

$$\boxed{= m(1+x)^{m-1} = m\frac{S(x)}{1+x}.}$$

$$\begin{cases} (1+x)S'(x) = mS(x) \\ S(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow S(x) = (1+x)^m.$$

例: $\ln(2+x) =$ ______

解: $\ln(2+x) = \ln(1+\boxed{1+x})$　　$-1 < 1+x \le 1$.　$-2 < x \le 0$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (1+x)^n;\quad x \in (-2, 0]$$

在 $x=-1$ 处的泰勒级数

或 $(x+1)$ 的幂级数

麦克劳林级数 $\ln(2+x) = \ln 2(1+\frac{x}{2}) = \ln 2 + \ln(1+\boxed{\frac{x}{2}})$.

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} \cdot x^n.\quad x \in (-2, 2].$$

例. $f(x) = \arctan x$ 将展开成 x 的幂级数. "先导后积"

解: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.

"先导"　$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

"后积"　$\int_0^x (\arctan t)' \, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \, dt$

$$f(x) = \arctan x - \arctan 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},\quad x \in [-1, 1].$$

定义域 $(-\infty, +\infty)$　　收敛域 $[-1, 1]$

例　$\arctan \frac{1+x}{1-x} =$ ______.

解："先导"

$$\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

"后积"

$$\int_0^x\left(\arctan\frac{1+t}{1-t}\right)'dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\parallel$$

$$f(x)-\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan\frac{1+0}{1-0}$$

故 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$， $x\in[-1,1)$.