第二章 一元微分学

第三节 Taylor 公式及应用

有关知识：

（1）Taylor 定理:

(I)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有直至 n 阶连续导数,在 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数,则对 $\forall x, x_0 \in [a,b]$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\dfrac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $0<\theta<1,\xi$ 介于 x_0 与 x 之间.

（II）设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有直至 $n-1$ 阶的导数,且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

（2）记住几个简单函数 $\mathrm{e}^x, a^x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha, \sin x, \cos x$ 的 Maclaurin 公式．一般而言，其他函数的 Taylor 展开式可利用这几个简单函数的 Maclaurin 公式再结合某些运算得到.

A.泰勒展开

例 1：求 $f(x)=e^x\ln(1+x)$ 的 4 阶带皮亚诺余项的 Maclaurin 公式。

解： $f(x)=e^x\ln(1+x)=(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x))$

$$=x+(-\frac{1}{2}+1)x^2+(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})x^3+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6})x^4+o(x^4)$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

例 2：求 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}e^{e^x}$ 的 3 阶带皮亚诺余项的 Maclaurin 公式。

解：$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$，

$$e^{e^x}=e^{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=e(e^{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)})$$

$$=e[1+(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))^2+\frac{1}{6}(x+o(x))^3]+o(x^3)$$

$$=e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3)+o(x^3)$$

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+o(x))e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3))=e+2ex+3ex^2+\frac{23e}{6}x^3+o(x^3)$$

本题也可用待定系数法、多项式除法得到结果:

(用待定系数法) 设

$$f(x)=\frac{1}{1-x}e^{e^x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3),$$

则 $e^{e^x}=(1-x)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)+o(x^3)$

$$=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+(a_3-a_2)x^3+o(x^3)$$

又 $e^{e^x}=e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3)+o(x^3)$

从而

$$e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3)+o(x^3)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+(a_3-a_2)x^3+o(x^3),$$

比较两端系数可得

$$a_0=e,a_1-a_0=e,a_2-a_1=e,a_3-a_2=\frac{5}{6}e$$

所以

$$a_0=e,a_1=2e,a_2=3e,a_3=\frac{23}{6}e.$$

(多项式除法,略)

单纯求泰勒展开式在考试中不多见。但在应用泰勒公式解决问题时，准确地写出泰勒展开式（包括带拉氏余项的泰勒公式）是解决问题的基础和关键.比如,利用例 2 的展开式,可得

$f'(0)=2e$, $f''(0)=6e$ $f'''(0)=23e$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-e(1+2x+3x^2)}{\sin^3 x}=\frac{23}{6}e$,等等.

练习题。

1. 求下列函数的带皮亚诺余项的麦克劳林展式：

（1） $f(x)=\ln\frac{3+x}{2-x}$，（2） $f(x)=\frac{x^2}{1+\sin x}$ （到 $o(x^6)$），

（3） $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, x\neq 0,\\ \mathrm{e}, x=0,\end{cases}$ (到 $o(x^3)$),并求 $f'(0),f''(0),f'''(0)$.

2.求函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}-\sqrt{\frac{4-x}{x}}$ 在 $x=2$ 处的泰勒展开式（到 $o(x-2)^{2n+2}$)

3.确定 a,b,c,d,e 的值，使得当 $x\to 0$ 时， $\sec x=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+o(x^4)$ 。

B.Taylor 公式的应用

Taylor 公式的应用很广，技巧性较强．用 Taylor 定理解决问题时,要清楚几个关键点：（I）选择什么类型的余项，（II）在哪点展开，展开哪点的函数值．（III）用一个展开式，还是多个（主要是二个）展开式，多个展开式如何复合使用．

应用之一：用 Taylor 公式求极限、确定无穷小的阶,及求在给定点处的导数(尤其是高阶导).

解决此类问题要知道：（1）选择皮亚诺余项，（2）当考虑 $x\to x_0$ 的极限问题时，应在 x_0 处展开。当考虑 $x\to\infty$ 时，可作变换 $t=\frac{1}{x}$，化为 $t\to 0$.单侧极限也是如此.

用 Taylor 公式求极限问题在前面已讲过，此处不再重复。在确定无穷小阶的问题上，用 Taylor 公式在大多数场合会比其它工具方便许多.

例 3. 设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}-e$, 当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 ax^k 为等价无穷小, 求 a,k 的值.

解：当 $x\to 0$ 时,

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}-e=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e$$

$$=e^{\frac{1}{x}[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}-e=e^{1-\frac{1}{2}x+o(x)}-e$$

$$=e[e^{\frac{-1}{2}x+o(x)}-1]=-\frac{e}{2}x+o(x)$$

所以 $a=-\frac{e}{2},k=1$.

另解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{kx^{k-1}}\times\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}\times(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1}{kx^{k-1}}\times\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{1}{2}$

因此, $k=1$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x^k}=-\frac{e}{2}$

故 $a=-\frac{e}{2},k=1$.

比较两种解法，可以看出泰勒公式的优势.

例 4.设 $a_n=\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n}$， $n=1,2,\cdots$， a_n 是关于 $\frac{1}{n}$ 的几阶无穷小？并求它的一个等价无穷小。

解：

$$a_n=n(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}})=n[1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})-(1+\frac{1}{3}(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})-\frac{1}{9}(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})^2+o(\frac{1}{n^2})]$$

$$=n(-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=-\frac{1}{6n}+o(\frac{1}{n})$$

所以 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 为同阶穷小，且 a_n 与 $-\frac{1}{6n}$ 为等价无穷小。

注：本题考虑的是数列，其极限过程一定是 $n\to\infty$，因此 $\frac{1}{n}\to 0$，从而用 Taylor 公式时，以 $\frac{1}{n}$ 为

自变量在 $x=0$ 处作 Taylor 展开。下面展开式是错误的：

$$\sqrt{1+n}=1+\frac{1}{2}n+\frac{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)}{2!}n^2+o(n^2)\ .$$

用 Taylor 公式求极限或确定无穷小的阶时，该展开到几阶？这需在具体场合去尝试。下面例子更能说明这一点。

例 5. 确定 a,b，使得当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 为尽可能高阶的无穷小，并指出是 x 的几阶无穷小。

分析：首先可以看出对任意的 a,b，当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 都是无穷小。其阶数与 a,b 的具体值有关。这种关系用 Taylor 展开就能看得很清楚:

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$$

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=(1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+\cdots)=1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+(ab^2-b^3)x^6+\cdots$$

$$f(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=(b-a-\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{4!}-b^2+ab)x^4+(b^3-ab^2-\frac{1}{6!})x^6+\cdots$$

可见当 $b-a-\frac{1}{2}\neq 0$ 时, $f(x)=(b-a-\frac{1}{2})x^2+o(x^2)$ 为 x 的 2 阶无穷小;当 $b-a-\frac{1}{2}=0$ 时, $f(x)$ 至少为 x 的 4 阶无穷小;$b-a-\frac{1}{2}=0$ 且 $\frac{1}{4!}-b^2+ab=0$ 时，$f(x)$ 至少为 x 的 6 阶无穷小,此时 $a=-\frac{5}{12},b=\frac{1}{12}$,且 $b^3-ab^2-\frac{1}{6!}\neq 0$,故当 $a=-\frac{5}{12},b=\frac{1}{12}$ 时 $f(x)$ 为 x 的 6 阶无穷小，这是最高阶的无穷小．因此本题的答案是：$a=\frac{-5}{12},b=\frac{1}{12}$，且为 x 的 6 阶无穷小．解答过程学生自己完成。

注：展开式中的“…”，一则表示它是前面一项的高阶无穷小，二则是为方便“尝试”。

应用 Taylor 公式, 求函数在给定点处的导数(尤其是高阶导)的问题在上一章已经介绍过了,此处不举例子, 给了一个练习题(练习题 8).

练习题

4.确定 a,k ,使得当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\cos(\sin x)-\cos x$ 与 ax^k 为等价无穷小.

5.确定 a,b，使得当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 为尽可能高阶的无穷小.

6.设 $a_n=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n$，$n=1,2,\cdots$，$a_n$ 是关于 $\frac{1}{n}$ 的几阶穷小？

7.确定a,n之值，使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax^n}-\cos x^2}{x^8}$存在。

8.设$f(x)=(e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2})^{\frac{1}{3}}$，求$f'(0)$，$f''(0)$.

9.求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})$，（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x)^{\cot x^3}$，

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{1}{e}-(\dfrac{x}{1+x})^x)$，（4）$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}$，

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e+\frac{e}{2}x}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e+\frac{e}{2}x-\frac{11e}{24}x^2}{x^3}$，其中$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}},x\neq 0,\\ \mathrm{e},x=0.\end{cases}$

应用之二：用 Taylor 公式证明介值问题.

这种问题一般涉及二阶或更高阶的导数．有含介值的等式和不等式两类问题．要注意：（ 1 ）选择拉氏余项，（ 2 ）常需二个展开式.

例 6.设$f(x)$在$[a,b]$上三阶可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3.$$

分析：本题涉及三阶导，可用 Taylor 公式试一下，又欲证的结论中出现了$f(a),f(b),f'(\dfrac{a+b}{2})$，故可以想到在同一点$x=\dfrac{a+b}{2}$处展开两点$x=a,x=b$处的函数值$f(a),f(b)$，得到两个展开式，对两个展开式复合使用.

证明：由 Taylor 公式知，$\exists\xi_1\in(\frac{a+b}{2},b),\xi_2\in(a,\frac{a+b}{2})$，使得

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2!}(\frac{b-a}{2})^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(\frac{b-a}{2})^3$$

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2!}(\frac{a-b}{2})^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(\frac{a-b}{2})^3$$

两式相减得

$$f(b)-f(a)=f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^3}{24}$$

由达布定理知$\exists\xi\in(a,b)$，使得　$f'''(\xi)=\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$

所以 $f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$

例 7.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导， $f'(a)=f'(b)=0$, 证明：$\exists\xi\in(a,b)$ ，使得

$$|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明：方法一（将 $f(\frac{a+b}{2})$ 分别在 a,b 两点展开）由 Taylor 公式知 $\exists\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}),\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$，使得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2 \qquad (1)$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2 \qquad (2)$$

（1）－（2）得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}$$

从而 $|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{4}\frac{|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|}{2}\le\frac{(b-a)^2}{4}\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}$

取 $\xi=\begin{cases}\xi_1, & |f''(\xi_1)|\ge|f''(\xi_2)|\\ \xi_2, & |f''(\xi_1)|<|f''(\xi_2)|\end{cases}$,

则 $|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$

方法二:若 $f(a)=f(b)$，结论成立

若 $f(a)\ne f(b)$，不妨设 $f(a)<f(b)$，

（1）若 $f(\frac{a+b}{2})\ge\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$,则

$f(b)-f(a)\le2f(\frac{a+b}{2})-f(a)-f(a)=2[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]$。

由泰勒公式知 $\exists\xi\in(a,\frac{a+b}{2})$，使得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(\frac{b-a}{2})^2,$$

从而 $|f(b)-f(a)|=f(b)-f(a)\le2[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]=f''(\xi)(\frac{b-a}{2})^2$,得结论。

(或：令 $F(x)=f(x)-\frac{k}{2}(x-a)^2$,其中 $k=\frac{4(f(b)-f(a))}{(b-a)^2}$,则

$F'(a)=0, F(\frac{a+b}{2})\geq F(a)$,由泰勒公式有

$0\leq F(\frac{a+b}{2})-F(a)=\frac{1}{2}F''(\xi)(\frac{b-a}{2})^2$,可得结论)

（2）若 $2f(\frac{a+b}{2})<f(a)+f(b)$，同样可得结论，过程略。

例 8.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0, \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=2$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\leq -16$

分析：由题设知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值在 $(0,1)$ 内的某点 x_0 取得，从而 $f(x_0)=2, f'(x_0)=0$，结合题设我们知道的信息有：$f(0)=f(1)=0, f(x_0)=2, f'(x_0)=0$，因此想到在同一点 x_0 处展开 $x=0, x=1$ 两点处的函数值 $f(0), f(1)$

证明：由题设知 $\exists x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=\max f(x)=2$，从而 $f'(x_0)=0$.

由 Taylor 公式知　$\exists\xi_1\in(0,x_0), \xi_2\in(x_0,1)$，使得

$$f(0)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2 \qquad (1)$$

$$f(1)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \qquad (2)$$

由（1）得　$f''(\xi_1)=-\frac{4}{x_0{}^2}$，由（2）得　$f''(\xi_2)=-\frac{4}{(1-x_0)^2}$，

若 $x_0\in(0,\frac{1}{2}]$，则 $f''(\xi_1)\leq -16$，若 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，则 $f''(\xi_2)\leq -16$

综上知　$\exists\xi\in(0,1)$，使得　$f''(\xi)\leq -16$

注：仔细体会一下以上三个例子在用 Taylor 公式时相似的地方和不同的地方.

应用之三：用 Taylor 公式说明导数的界.

这类问题一般是已知低阶和高阶导数的界，估计中间阶导数的界．要注意：（1）选择拉氏余项，（2）常需二个展开式，且经常是在任意点 x 处展开某两点的函数值.

例 9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f(x)|\leq 1, |f''(x)|\leq 2, x\in[0,1]$，证明：对任意 $x\in[0,1]$，有：$|f'(x)|\leq 3$。

分析：这里给出了 $f(x), f''(x)$ 的界，要估计 $f'(x)$ 的界，由于 Taylor 公式涉及函数值及各阶导，所以考虑用 Taylor 公式.

证明：对于 $\forall x\in[0,1]$，由 Taylor 公式知 $\exists\xi_1,\xi_2$，使得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2 \qquad (1)$$

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(-x)^2 \qquad (2)$$

（1）－（2）得

$$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2$$

所以 $|f'(x)|=|f(1)-f(0)-\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2|$

$$|f'(x)|\le|f(1)|+|f(0)|+|\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2|+|\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2|\le 2+(1-x)^2+x^2$$

由于对 $\forall x\in[0,1]$，总有 $(1-x)^2+x^2\le 1$

故对任意 $x\in([0,1]$，有 $|f'(x)|\le 3$.

例 10.设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导，$M_0=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f(x)|<+\infty, M_2=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f''(x)|<+\infty$，证明：$M_1=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f'(x)|\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

证明：对 $\forall x\in(0,+\infty)$，任取 $h>0$，由 Taylor 公式知 $\exists\xi$，使得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

从而 $|f'(x)|h\le 2M_0+\frac{h^2}{2}M_2,$

故 $|f'(x)|\le 2M_0/h+\frac{h}{2}M_2,$

上式中 h 是任意正数，取 $h=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$，得 $|f'(x)|\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

应用之四：用 Taylor 公式求介值的极限.

例 1 1.设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有二阶连续导数，且 $f''(0)\ne 0,$ 对于 $\forall x\in(-1,1)$，由拉氏中值定理知

$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x)=f(0)+x\,f'(\theta\,x),$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

解：由 Taylor 公式有

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{f''(\theta_1\,x)}{2}x^2\quad ,\qquad\qquad (1)$$

又由于 $f'(\theta\,x)=f'(0)+f''(\theta_2\theta\,x)\theta\,x$,因此

$$f(x)=f(0)+x\,f'(\theta\,x)=f(0)+xf'(0)+f''(\theta_2\theta x)\theta x^2\qquad\qquad (2)$$

比较（1),（2）可得

$$\frac{1}{2}f''(\theta_1\,x)x^2=f''(\theta_2\theta\,x)\theta\,x^2$$

即 $\frac{1}{2}f''(\theta_1\,x)=f''(\theta_2\theta\,x)\theta$

上式两端令 $x\to 0$,结合 $f''(x)$ 连续性及 $f''(0)\neq 0,$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}.$$

注：本例也可用皮亚诺余项的 Taylor 公式去解决:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

$$f'(\theta\,x)=f'(0)+f''(0)\theta\,x+o(x)$$

从而

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+f''(0)\ \theta\,x^2+o(x^2)$$

比较得 $\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=f''(0)\theta\,x^2+o(x^2)$

即 $\frac{1}{2}f''(0)+o(x^2)/x^2=f''(0)\theta$,令 $x\to 0$ 得结果.

注：本题的第二种解法只要求 $f''(0)$ 存在且不为零。

例 12. 设 $f(x)$ $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内三阶连续可导，且 $f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$，则微分中值定理

$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h$ 中的 θ 满足 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

证明：由泰勒公式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{6}f'''(x_0+\theta_1 h)h^3 \qquad （1）$$

又 $f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{1}{2}f'''(x_0+\theta_2\theta h)(\theta h)^2$，

从而

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f'''(x_0+\theta_2\theta h)\theta^2 h^3 \qquad （2）$$

比较（1），（2）可得

$$\theta^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{f'''(x_0+\theta_1 h)}{f'''(x_0+\theta_2\theta h)}\to\frac{1}{3}\ \ ,h\to 0,$$

注意到 $\theta\in(0,1)$，所以 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$。

注:例题 10 的推广见练习题 16, 例题 11 的推广见练习题 18,19, 例题 12 的推广见练习题 18.另外练习题 20 涉及柯西中值定理中的介值的极限.

应用之五：证明不等式．这部分内容在不等式一节中再讲，要注意的是：用 Taylor 公式证明不等式时一定选择拉氏余项.

应用之六:其它。

例 13.证明 e 是无理数

证明：由 Taylor 公式有

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\theta\in(0,1)$$

$$n!(e-(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}))=\frac{e^{\theta}}{n+1}$$

假设 e 为有理数，则 $e=\frac{p}{q}$， p,q 为整数，当 $n>q$ 时，上式左端为整数，而右端当 $n>2$ 时为非整数。因此 e 是无理数。

例 14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有任意阶导数，且 $f(\frac{1}{n})=0(n=1,2,3,\cdots)$，

$|f^{(n)}(x)|\le M(x\in(-\infty,+\infty),n=1,2,3,\cdots)$, M 为正常数。证明： $f(x)=0,x\in(-\infty,+\infty)$.

证明：由题设知 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的任意阶导数都连续，可得 $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=0$，

由罗尔定理知 $\exists x_{1m}\in(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}),m=1,2,\cdots$，使得 $f'(x_{1m})=0$，从而 $f'(0)=\lim\limits_{m\to\infty}f'(x_{1m})=0$，

如此继续下去可得 $f^{(k)}(0)=0$,$k=1,2,\cdots$.

因此对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，及 $\forall n$，有

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n,$$

从而 $|f(x)|\le\frac{M}{n!}|x|^n$，

由于对于任意给定的 x，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$，对上式令 $n\to\infty$，可得 $f(x)=0$.

第 3 届决赛的一道题：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有任意阶导数，且 $f(\frac{1}{2^n})=0(n=1,2,3,\cdots)$，

$|f^{(n)}(x)|\le M(x\in(-\infty,+\infty),n=1,2,3,\cdots)$，$M$ 为正常数。证明：$f(x)=0,x\in(-\infty,+\infty)$。

练习题

10．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{4}f''(\xi)(b-a)^2$$

11．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$

12.设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$。证明：$\exists\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$。

13. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，且 $f(-1)=0$，$f(0)=0$，$f(1)=1$ 证明：$\exists\xi\in(-1,1)$，使得 $f''(\xi)=1$。

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1),|f''(x)|\le M(x\in[0,1])$，证明：对任意 $x\in[0,1]$，有：$|f'(x)|\le\frac{M}{2}$。

15．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0,\ \min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge 8$.

16．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二阶可导，$|f(x)|<M_0,|f''(x)|<M_2,x\in(-\infty,+\infty+$，证明：$|f'(x)|\le\sqrt{2M_0M_2},x\in(-\infty,+\infty)$.

17．若火车从起点到终点共用了 t 秒时间，两地相距 s 米，则途中必有一个时刻，其加速度的绝对值不低于 $\frac{4s}{t^2}$ 米／秒 ^{2}。(设两地铁路线是直的)。

18. 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有 n 阶连续导数，且 $f^{(k)}(x_0)=0,k=2,3,\cdots,n-1,f^{(n)}(x_0)\neq 0,$

对于 $\forall h(0<|h|<\delta)$，由拉氏中值定理知 $\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{n}}$ 。

19. 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有 n 阶连续导数，且 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在并且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0,$ 对于 $\forall h(0<|h|<\delta)$，由 Taylor 公式知 $\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$ 。

20.设 $f(x),g(x)$ 都在 $[0,1]$ 二阶连续可导，$g'(x)\neq 0$，$f'(0)g''(0)\neq f''(0)g'(0)$，对于任给的 $x\in(0,1)$，由柯西中值定理知 $\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\theta x)}{g'(\theta x)},$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

21.设 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 二阶可导,且 $f(0)=f'(0)=0,|f''(x)|\leq|f(x)|+|f'(x)|$，证明：

$f(x)=0,x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$。

22.. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 三阶连续可导,且对任意 x,h 有

$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h$, $\theta\in(0,1)$ 与 $x,\ h$ 无关

证明: $f(x)$ 为一次或二次函数.

23. 证明：$\sin 1$ 是无理数.

24(第 5 届决赛题)设 $f(x)\in C^4(-\infty,+\infty)$,且 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$,其中 $\theta\in(0,1)$ 是与 $x,\ h$ 无关的常数.证明: $f(x)$ 是不超过三次的多项式.

答案或提示。

1. （1） $f(x)=\ln\frac{3}{2}+\ln(1+\frac{x}{3})-\ln(1-\frac{x}{2})=\cdots=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^{k-1}}{3^k})x^k+o(x^n)$

（2） $f(x)=\frac{x^2}{1+\sin x}=x^2-x^3+x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x^6+o(x^6)$ ）.

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}$

$=\mathrm{e}[1+(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3))+\frac{1}{2}(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3))^2+\frac{1}{6}(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3))^3+o(x^3)]$

$=\mathrm{e}[1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3)+o(x^3)$.

$f'(0)=-\frac{\mathrm{e}}{2}, f''(0)=\frac{11\mathrm{e}}{12}, f'''(0)=\frac{-21\mathrm{e}}{8}$.

2.令 $t=x-2$，则 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}-\sqrt{\frac{4-x}{x}}=\sqrt{\frac{t+2}{2-t}}-\sqrt{\frac{2-t}{t+2}}=\frac{t+2-(2-t)}{\sqrt{4-t^2}}$

$=2t(4-t^2)^{-\frac{1}{2}}=\cdots$,

答案： $f(x)=x-2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^{2^k}k!}(x-2)^{2k+1}+o((x-2)^{2n+2})$

3.本题实际上就是求 $\sec x$ 的 4 阶麦克劳林展开式。$a=1,b=0,c=\frac{1}{2},d=0,e=\frac{5}{24}$ 。

4. $\frac{1}{6},4$.　　5. $\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$.

6. $a_n=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n=e^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})}-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$，利用泰勒展开可得答案：2 .

7.利用泰勒展开可得答案：$a=-\frac{1}{2},n=4$

8. $f(x)=(e^x-1-x-\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{3}}=[\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)]^{\frac{1}{3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{6}}[1+\frac{x}{4}+o(x)]^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{x}{\sqrt[3]{6}}[1+\frac{x}{12}+o(x)]=\frac{x}{\sqrt[3]{6}}+\frac{x^2}{12\sqrt[3]{6}}+o(x^2)$,

所以 $f'(0)=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}, f''(0)=\frac{1}{6\cdot\sqrt[3]{6}}$.

9.（1）$-\frac{3}{16}$.

（2）利用 $\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x=1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$，得

$$\lim_{x\to 0}(\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x)^{\cot x^3}=(1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3))^{\cot x^3}$$,再给合 $x^3\cot x^3\to 1$，可得答案: $e^{-\frac{2}{3}}$.

（3） $\lim_{x\to+\infty}x(\frac{1}{e}-(\frac{x}{1+x})^x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\frac{1}{e}-(\frac{1}{1+t})^{\frac{1}{t}})=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\frac{1}{e}-e^{-\frac{1}{t}\ln(1+t)})$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\frac{1}{e}-e^{-(1-\frac{t}{2}+o(t))})=\frac{1}{e}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1-e^{\frac{t}{2}+o(t)})=-\frac{1}{2e}.$$

（4） $x^x-(\sin x)^x=x^x(1-(\frac{\sin x}{x})^x)$，及 $x^x\to 1$，且

$$1-(\frac{\sin x}{x})^x=1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}=1-e^{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$，得答案; $\frac{1}{6}$.

(5)利用习题 1 之（3）的结果 $f(x)=\mathrm{e}[1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3)+o(x^3)$，易得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e+\frac{e}{2}x}{x^2}=\frac{11}{24}\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e+\frac{e}{2}x-\frac{11\mathrm{e}}{24}x^2}{x^3}=-\frac{7}{16}\mathrm{e}.$$

10. 本题有多种方法

方法一(用 Taylor 公式证明) 由 Taylor 公式知，$\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2,$$
$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{a-b}{2})^2,$$

两式相加得

$$f(b)+f(a)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4},$$

由达布定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$,

所以 $f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{4}f''(\xi)(b-a)^2$

(参照例 6，不同的是本题要将两个展式相加)

方法二(用拉氏中值定理), $F(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)$，则由拉氏中值定理知

$$F(\frac{a+b}{2})-F(a)=\frac{b-a}{2}F'(\eta)=\frac{b-a}{2}[f'(\eta+\frac{b-a}{2})-f'(\eta)]$$
$$=(\frac{b-a}{2})^2f''(\xi)$$

注意到 $F(\frac{a+b}{2})-F(a)=f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})$,便得结论.

方法三(用上一节介绍的常值法),令$\lambda=4[f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})]/(b-a)^2$,作辅助函数

$$F(x)=f(x)+f(a)-2f(\frac{a+x}{2})-\frac{\lambda}{4}(x-a)^2$$，则 $F(a)=F(b)=0$,从而$\exists\eta\in(a,b)$,使得

$F'(\eta)=0$,即 $f'(\eta)-f'(\frac{a+\eta}{2})=\frac{\lambda}{2}(\eta-a)$,再变形为$\dfrac{f'(\eta)-f'(\frac{a+\eta}{2})}{\eta-\frac{a+\eta}{2}}=\lambda$,对左端用拉氏中值定理便可得结论.

方法四(用罗尔定理) 作辅助函数$F(x)=$

$$\frac{1}{2}f(x)-[\frac{f(b)}{(b-a)^2}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})-\frac{2f(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2}(x-a)(x-b)+\frac{f(a)}{(b-a)^2}(x-b)(x-\frac{a+b}{2})]$$

方法五(用柯西中值定理) 令$F(x)=f(x)-2f(\frac{a+x}{2})+f(a),G(x)=(x-a)^2$.

注：本题实际是上节习题 12 的特例（取$c=\frac{a+b}{2}$）。

11. 令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，本题实际上是例 6.

12.本题是例 6 的特例.

13. $f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}$， $f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}$，两式相加便可得结论.本题是练习题 10 的特例.

14. 仿例 9.

15. 仿例 8.

16. 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，任取$h>0$，作两个展式：

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2,$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2,$$

两式相减得

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}h^2,$$

从而 $$|f'(x)|=\frac{1}{2h}|f(x+h)-f(x-h)+\frac{f''(\xi_2)-f''(\xi_1)}{2}h^2|$$

$$\le\frac{1}{2h}[|f(x+h)|+|f(x-h)|]+\frac{|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|}{4}h$$

$$\le\frac{M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h,$$

取 $h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$,便可得结论.

17. 本题实际上就是例 7,只是要注意到火车在起点和终点时刻的速度为零.

18. (仿例 12) 由泰勒公式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)h^n \qquad (1)$$

又 $f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0+\theta_2\theta h)(\theta h)^{n-1}$，从而

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0+\theta_2\theta h)\theta^{n-1}h^n \qquad (2)$$

比较（1），（2）可得

$$\theta^{n-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)}{f^{(n)}(x_0+\theta_2\theta h)}\to\frac{1}{n}\ ,h\to 0，\text{故}\lim_{h\to 0}\theta=\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$$

19. (仿例 11)

由 Taylor 公式有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1}+o(h^{n+1}),$$

又 $f^{n}(x_0+\theta h)=f^{(n)}(x_0)h+f^{(n+1)}(x_0)\theta h+o(h)$,从而

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}\theta h^{n+1}+o(h^{n+1})$$

比较得 $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)h^{n+1}+o(h^{n+1})=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0)\theta h^{n+1}+o(h^{n+1})$

令 $h\to 0$ 得结果.

20.由泰勒公式知 $\exists\theta_1\in(0,1)$, $\theta_2\in(0,1)$,使得

$$f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\theta_1 x)x^2,$$

$$g(x)-g(0)=g'(0)x+\frac{1}{2}g''(\theta_2 x)x^2,$$

从而

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(0)x+\frac{f''(\theta_1 x)}{2}x^2}{g'(0)x+\frac{g''(\theta_2 x)}{2}x^2}=\frac{f'(0)+\frac{f''(\theta_1 x)}{2}x}{g'(0)+\frac{g''(\theta_2 x)}{2}x},$$

又 $f'(\theta x)=f'(0)+f''(\theta_3\theta x)\theta x$, $g'(\theta x)=g'(0)+g''(\theta_4\theta x)\theta x$,

从而

$$\frac{f'(\theta x)}{g'(\theta x)}=\frac{f'(0)+f''(\theta_3\theta x)\theta x}{g'(0)+g''(\theta_4\theta x)\theta x},$$

于是有

$$\frac{f'(0)+f''(\theta_3\theta x)\theta x}{g'(0)+g''(\theta_4\theta x)\theta x}=\frac{f'(0)+\dfrac{f''(\theta_1 x)}{2}x}{g'(0)+\dfrac{g''(\theta_2 x)}{2}x}$$

整理上式得

$$\frac{f'(0)}{2}g''(\theta_2 x)+g'(0)f''(\theta_3\theta x)\theta+\frac{g''(\theta_2 x)}{2}f''(\theta_3\theta x)\theta x$$

$$=\frac{g'(0)}{2}f''(\theta_1 x)+f'(0)g''(\theta_4\theta x)\theta+\frac{f''(\theta_1 x)}{2}g''(\theta_4\theta x)\theta x$$

即

$$[f'(0)g''(\theta_4\theta x)-g'(0)f''(\theta_3\theta x)]\theta$$

$$=\frac{1}{2}[f'(0)g''(\theta_2 x)-g'(0)f''(\theta_1 x)]+\frac{\theta x}{2}[g''(\theta_2 x)f''(\theta_3\theta x)-f''(\theta_1 x)g''(\theta_4\theta x)]$$

令 $x\to 0$,得 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

21. 设 $|f(x)|+|f'(x)|$ 在 x_0 处取得 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上的最大值 M ，那么 $M\geq 0$,且有

$$M=|f(x_0)|+|f'(x_0)|=|\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2|+|f''(\eta)x_0|$$

$$\leq\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2|f''(\xi)|+\frac{1}{2}|f''(\eta)|\leq\frac{1}{8}[|f(\xi)|+|f'(\eta)|]+\frac{1}{2}[|f(\eta)|+|f'(\eta)|]$$

$$\leq\frac{5}{8}M$$ 。故 $M=0$.

22.本题是某年的一道考题,基本思路就是要证明 $f(x)$ 的二阶导或三阶导恒等于零．下面用 Taylor 公式证明此题.

解法一等式 $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h$ 两边对 h 求导得

$$f'(x+h)=f'(x+\theta h)+\theta hf''(x+\theta h)$$

$$\frac{f'(x+h)-f'(x+\theta h)}{h}=\theta f''(x+\theta h)$$

令 $h\to 0$,得 $(1-\theta)f''(x)=\theta f''(x)$.

若 $\theta\neq\frac{1}{2}$,则 $f''(x)=0\quad\Rightarrow f(x)$ 为一次函数或常数.

若 $\theta=\frac{1}{2}$,等式 $f'(x+h)=f'(x+\frac{1}{2}h)+\frac{1}{2}hf''(x+\frac{1}{2}h)$ 两边对 h 求导得

$$f''(x+h)=f''(x+\frac{1}{2}h)+\frac{1}{4}f'''(x+\frac{1}{2}h)h,$$

从而 $\dfrac{f''(x+h)-f''(x+\frac{1}{2}h)}{h})=\frac{1}{4}f'''(x+\frac{1}{2}h)$，

令 $h\to 0$,得 $\frac{1}{2}f'''(x)=\frac{1}{4}f'''(x)$，所以 $f'''(x)=0$，故 $f(x)$ 为二次函数.

解法二

由 Taylor 公式有

$f'(x+\theta h)=f'(x)+\theta f''(x)h+\dfrac{f'''(x)}{2}(\theta h)^2+o(h^2)$，代入 $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h$，得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\theta f''(x)h^2+\frac{f'''(x)}{2}\theta^2h^3+o(h^3)$$

再由 Taylor 公式有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+o(h^3)$$

因此

$$f(x)+f'(x)h+\theta f''(x)h^2+\frac{f'''(x)}{2}\theta^2h^3+o(h^3)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+o(h^3)$$

从而

$$\theta f''(x)h^2+\frac{f'''(x)}{2}\theta^2h^3+o(h^3)=\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+o(h^3),$$

即

$$\theta f''(x)+\frac{f'''(x)}{2}\theta^2h+o(h)=\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(x)}{6}h+o(h),$$

若 $\theta\neq\frac{1}{2}$，令 $h\to 0$,得 $f''(x)=0$,又由 x 的任意性,知 $f(x)$ 为常数或一次函数.

若 $\theta=\frac{1}{2}$，则有

$$\frac{f'''(x)}{8}+o(h)/h=\frac{f'''(x)}{6}+o(h)/h,$$

令 $h\to 0$,得 $f'''(x)=0$,又由 x 的任意性,知 $f(x)$ 为二次函数.

解法三　（利用例 11 的结果）

若 $f''(x)=0, x\in(-\infty,+\infty)$,则 $f(x)$ 为一次函数或常数,

否则 $\exists x_0$,使得 $f''(x_0)\neq 0$,由例 1 1 知 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$,

又由于 θ 为常数,从而 $\theta=\frac{1}{2}$,因此有

$$f(x+h)-f(x)=f'(x+\frac{h}{2})h.$$

由 Taylor 公式有

$$f'(x+\frac{h}{2})=f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{f'''(x)}{2}(\frac{h}{2})^2+o(h^2),$$

从而

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{8}h^3+o(h^3)$$

又 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(x)}{2}h^2+\dfrac{f'''(x)}{3!}h^3+o(h^3)$

比较上面两式得

$$\frac{f'''(x)}{6}-\frac{f'''(x)}{8}=o(h^3)/h^3$$

令 $h\to 0$,得 $f'''(x)=0$,又由 x 的任意性,知 $f(x)$ 为二次函数.

23．参照例 13

24. 解法一

由 Taylor 公式有

$f''(x+\theta h)=f''(x)+\theta f'''(x)h+\dfrac{f^{(4)}(x)}{2}(\theta h)^2+o(h^2)$，代入 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(x+\theta h)}{2}h^2$，

得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{\theta}{2}f'''(x)h^3+\frac{f^{(4)}(x)}{4}\theta^2h^4+o(h^4)$$

再由 Taylor 公式有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+\frac{f^{(4)}(x)}{24}h^4+o(h^4)$$

因此

$$\frac{\theta}{2}f'''(x)h^3+\frac{f^{(4)}(x)}{4}\theta^2h^4+o(h^4)=\frac{1}{6}f'''(x)h^3+\frac{f^{(4)}(x)}{24}h^4+o(h^4)$$

即

$$\frac{\theta}{2}f'''(x)+\frac{f^{(4)}(x)}{4}\theta^2h+o(h)=\frac{1}{6}f'''(x)+\frac{f^{(4)}(x)}{24}h+o(h)$$

若 $\theta\neq\dfrac{1}{3}$，令 $h\to 0$,得 $f'''(x)=0$,又由 x 的任意性,知 $f(x)$ 为至多二次的多项式.

若 $\theta=\dfrac{1}{3}$，则有

$$\frac{f^{(4)}(x)}{36}h+o(h)/h=\frac{f^{(4)}(x)}{24}+o(h)/h,$$

令 $h\to 0$,得 $f^{(4)}(x)=0$,又由 x 的任意性,知 $f(x)$ 为至多三次的多项式.

方法二

等式 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$ 两边对 h 求导得

$$f'(x+h)=f'(x)+f''(x+\theta h)h+\frac{\theta}{2}f'''(x+\theta h)h^2,$$

即

$$[f'(x+h)-f'(x)-f''(x+\theta h)h]/h^2=\frac{\theta}{2}f'''(x+\theta h),$$

令 $h \to 0$,并注意到

$$\lim_{h\to 0}[f'(x+h)-f'(x)-f''(x+\theta h)h]/h^2$$

$$=\lim_{h\to 0}[f''(x)h+\frac{1}{2}f'''(x)h^2+o(h^2)-(f''(x)h+\theta f'''(x)h^2+o(h^2))]/h^2$$

$$=(\frac{1}{2}-\theta)f'''(x)$$

可得

$$(\frac{1}{2}-\theta)f'''(x)=\frac{\theta}{2}f'''(x)$$

若 $\theta\neq\frac{1}{3}$，得 $f'''(x)=0$,又由 x 的任意性,知 $f(x)$ 至多为二次多项式.

若 $\theta=\frac{1}{3}$,等式 $f'(x+h)=f'(x)+f''(x+\frac{1}{3}h)h+\frac{1}{6}f'''(x+\frac{1}{3}h)h^2$ 两边对 h 求导得

$$f''(x+h)=f''(x+\frac{1}{3}h)+\frac{2}{3}f'''(x+\frac{1}{3}h)h+\frac{1}{18}f^{(4)}(x+\frac{1}{3}h)h^2,$$

即

$$\frac{f''(x+h)-f''(x+\frac{1}{3}h)-\frac{2}{3}f'''(x+\frac{1}{3}h)h}{h^2}=\frac{1}{18}f^{(4)}(x+\frac{1}{3}h)$$

令 $h\to 0$,注意到

$$\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x+\frac{1}{3}h)-\frac{2}{3}f'''(x+\frac{1}{3}h)h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'''(x+h)-f'''(x+\frac{1}{3}h)-\frac{2}{9}f^{(4)}(x+\frac{1}{3}h)h}{2h}$$

$$=\frac{2}{9}f^{(4)}(x)$$

得 $\frac{2}{9}f^{(4)}(x)=\frac{1}{18}f^{(4)}(x)$，所以 $f^{(4)}(x)=0$，故 $f(x)$ 为三次多项式.

解法三

（利用练习题 19 的结论）

若 $f'''(x)=0, x\in(-\infty,+\infty)$,则 $f(x)$ 为不超过二次的多项式,

否则 $\exists x_0$,使得 $f'''(x_0)\neq 0$,由练习题 19 知 $\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$,

又由于 θ 为常数,故 $\theta=\frac{1}{3}$,因此有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\frac{h}{3})h^2.$$

由 Taylor 公式有

$$f''(x+\frac{h}{3})=f''(x)+f'''(x)\cdot\frac{h}{3}+\frac{f^{(4)}(x)}{2}(\frac{h}{3})^2+o(h^2),$$

从而

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{h^2}{2}(f''(x)+f'''(x)\cdot\frac{h}{3}+\frac{f^{(4)}(x)}{2}(\frac{h}{3})^2+o(h^2))$$

$$=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\cdot\frac{f'''(x)^3}{6}+\frac{f^{(4)}(x)}{36}h^4+o(h^4))$$

又 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+\frac{f^{(4)}(x)}{24}h^4+o(h^4)$

比较上面两式得

$$\frac{f^{(4)}(x)}{24}-\frac{f^{(4)}(x)}{36}=o(h^4)/h^4,$$

令 $h\to 0$,得 $f^{(4)}(x)=0$,又由 x 的任意性,知 $f(x)$ 为至多三次的多项式.