$\vec{F}=(P,Q,R)$

斯托克斯公式:

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$$

方向

Γ, Σ 满足右手定则 $= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$

$dydz=\cos\alpha\, dS$

$dzdx=\cos\beta\, dS$

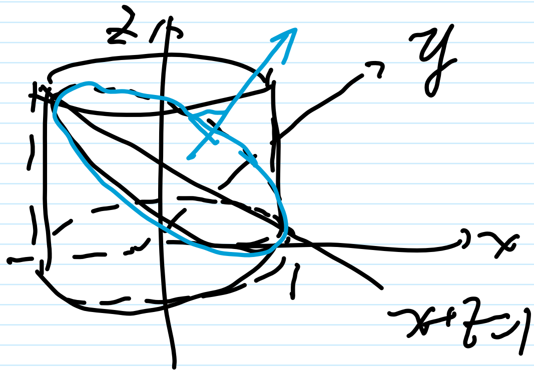
$dxdy=\cos\gamma\, dS$

$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+z=1 \end{cases}$

Σ: $x+z=1$

$\vec{n}=(1,0,1)$

参数形式 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=1-\cos t \end{cases}$ $t: 0\to 2\pi$.



1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. $|q|<1$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. $p>1$ 收敛.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{\alpha}}{n^p}$, $p>1$ 收敛; $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p>1$ 收敛 (积分法).

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^p}$ 当 $r=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ $\begin{cases} p>0 \begin{cases} 0<p\le 1 & 条件 \\ p>1 & 绝对 \end{cases} \\ p\le 0 \text{ 发散} \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ 当 $x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ | $p>1$ 绝对，$p\le 0$ 发散

一般 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \longrightarrow$ ① $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$（正项）$\xrightarrow{\text{收敛}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

$\rho>1$ 比值/根值 $\downarrow$ 发散 $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

② $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ 发散

③ 收 + 发 $\Rightarrow$ 发

④ 新级数发散 $\xrightarrow{\text{去括号}}$ 原级数发散

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^p}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 同敛散。

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ __发散__

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \text{发散}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}. \quad \rho<1 \Rightarrow \text{收敛}.$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(-2)^n+3^n}$ 的 $R=$ ______

解：

$\frac{1}{x}\sum \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

求和函数：先导 $\sum \frac{1}{n} x^n$；先积 $\sum (n+1) x^n$ → 等比级数 → 后积 / 后导

$= \frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$

展开式 $x\in$ ______

展开 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1\pm x}$, $(1+x)^m$,

收敛域 $\longrightarrow R=\frac{1}{\rho}$ 其中 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)$

Abel定理.

傅里叶级数：①求 a_n, b_n. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$

$l=\frac{T}{2}$. $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ $x\in(-\infty,+\infty)$ 或 $[a,b]$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$. 且 x 非间断点

② $S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{连续} \\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & x\text{间断} \end{cases}$

$S(x)=S(x+T)$

画图 → 确定间断点

4. $z=e^{\frac{x}{y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,1)}=$ $\underline{-4e}$.

解：

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y^2}}\cdot\frac{1}{y^2}$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,1)}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{\frac{x}{y^2}}\cdot\frac{1}{y^2})$

$=e^{\frac{x}{y^2}}\cdot x\cdot(-2)y^{-3}\cdot\frac{1}{y^2}+e^{\frac{x}{y^2}}\cdot(-2)\cdot y^{-3}\Big|_{(0,1)}$

$=-4e$

例 $f(x=e^{y}\cdot\cos z, y+z, x-\sin z)$

5. $x^3+y^3+z^3+3xyz+7=0$ 则 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=$ $\underline{-\frac{1}{2}}$.

解：①直接法：$x^3+y^3+z(x,y)^3+3xyz(x,y)+7=0$ 关于 y 偏导

解：①直接法：$\underbrace{x^3+y^3+z(x,y)^3+3xy\,z(x,y)}_{关于x,y的函数}+1=0$ 对y求偏导 x常数

$$0+3y^2+3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+3x\left(1\cdot z+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)+0=0$$

代入 $x=0$，$y=1$ 方程，得 $z=-2$.

代入 $x=0$，$y=1$，$z=-2$ 上式.

$$3+12\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}+0+0=0$$

②公式法：$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y^2+xz}{z^2+xy}$

三元函数

$F=F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+3xyz+1$.

$F_y \overset{x、z常数.}{=\!=\!=} 0+3y^2+0+3xz+0$

$F_z \overset{x、y常数}{=\!=\!=}. 0+0+3z^2+3xy+0$

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$$

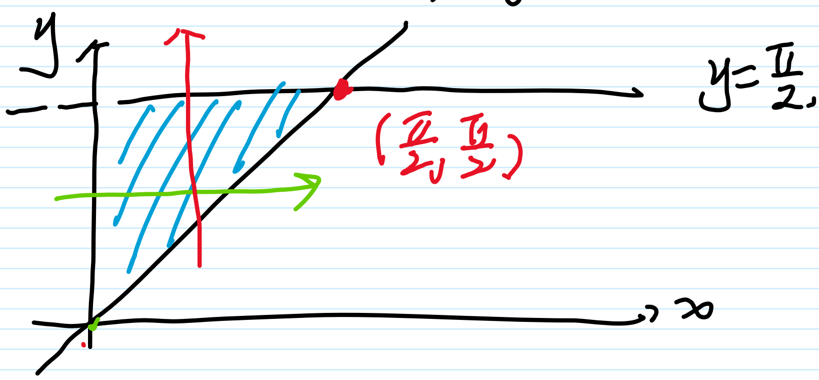
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\G_y & G_v\end{vmatrix}.\qquad J=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}$$

6. $\int^{\frac{\pi}{2}}dy\int^{y}\frac{\cos x}{}dx=\int^{\frac{\pi}{2}}dx\int^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}dy=\cdots$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^y \frac{\cos x}{\pi-2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi-2x} dy = \cdots$

解：交换次序

Y-型 → X-型



二次积分

$\int dx \int dy \int f dz$ $z \to y \to x$

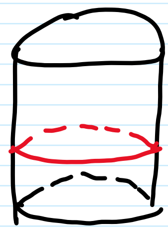
$y \to z \to x$

$= \int dx \int dz \int f dy$ $y \to x \to z$.

7. $\iiint_\Omega z^2 dv =$ ________ Ω: $x^2+y^2=1$. $z=0$ $z=1$ 所围成

解：$I = \int_0^1 z^2 \cdot \sigma(z) \, dz$

$= \int_0^1 z^2 \pi 1^2 dz$



Ω_1: $z = x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围成

$I_{\Omega_1} = \int_0^1 z^2 \cdot \pi z \cdot dz$

8. $\oint_\Gamma y\,dx - x\,dy + z\,dz =$ $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ 逆时针

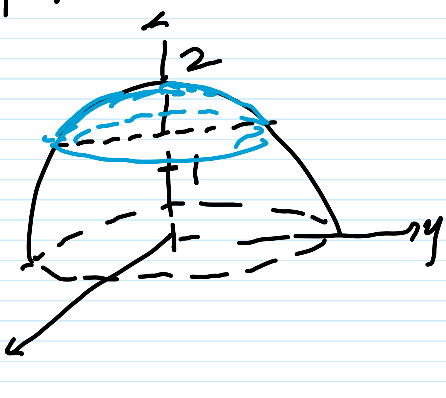
$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t + 1 \cdot 0) dt$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t + 1\cdot 0)\, dt$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{cases} \quad t: 0 \to 2\pi.$$

9. $\iint_\Sigma z\, dS =$ ________ $\quad \iint_\Sigma (z + x e^{x^2+y^2})\, dS$ 对称性 $\quad \iint_\Sigma z\, dS$

Σ: $x^2+y^2+z^2=4$. $z=\sqrt{3}$ 所截上半部分



解: Σ: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Σ 在 xoy 面上 D_{xy}: $x^2+y^2 \le 1$

$z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$$I = \iint_{D_{xy}} \left(\sqrt{4-x^2-y^2} + \_\_\_\right) \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\, dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} 2\, dxdy = 2\cdot\pi\cdot 1^2.$$

$$(x,y,z) \xleftrightarrow{yoz面} (-x,y,z)$$

10. $\vec{A} = (xyz - x^2,\ xyz - y^2,\ xyz - z^2)$.

$\operatorname{div}\vec{A} = yz - 2x + xz - 2y + xy - 2z$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$= (xz - xy, -(yz - xy), yz - xz)$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = z - y - (z - x) + y - x = 0$