第一章　函数、极限、连续

第四节　函数的连续性

有关知识：

（1）连续与间断的概念及间断点分类.

（2）闭区间上连续函数的性质及应用（主要用于中间值存在性证明及方程根存在性证明）.

（3） $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

例 1：设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义，且函数 $e^x f(x), e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都是单增函数，证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

分析：欲证 $f(x)$ 在 $\forall x_0 \in (0,1)$ 处连续，需证左，右都连续

证明：对 $\forall x_0 \in (0,1)$，由题设知当 $x \in (x_0,1)$ 时，有

$$e^{x_0} f(x_0) \le e^x f(x),\ ,\quad e^{-f(x_0)} \le e^{-f(x)}$$

所以　$e^{x_0 - x} f(x_0) \le f(x) \le f(x_0)$，

令 $x \to x_0^+$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 x_0 处右连续，

类似地，可证 $f(x)$ 在 x_0 处左连续，于是得结论.

例 2 ：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall x \in [a,b]$，存在 $y \in [a,b]$，使得 $|f(y)| \le \dfrac{1}{2}|f(x)|$，证明：至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$.

分析：初一看无处下手，此时可试一试反证法。

证明：若对 $x \in [a,b]$，$f(x) \ne 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负，不妨设 $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$，

则 $\exists x_0 \in [a,b]$，使得　$f(x_0) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = m > 0$

对此 x_0，　存在 y，使得　$f(y) = |f(y)| \le \dfrac{1}{2}|f(x_0)| = \dfrac{m}{2}$

从而得出矛盾．故结论成立.

例 3 设 f 是定义在一个圆周上的连续函数，证明存在一条直径，使得 f 在直经的两端取相同值.

分析：首先要将问题用数学语言表达，设圆周的圆心为 O，取圆周上一点 A． B 为圆周上任一点，记 $\angle AOB = \theta, \theta \in [0,2\pi]$，则该问题用数学语言表达为：

已知 $f(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，且 $f(0) = f(2\pi)$，求证存在 $\theta_0 \in [0,\pi]$，使得 $f(\theta_0) = f(\theta_0 + \pi)$.

此问题的证明不困难：

令 $F(\theta)=f(\theta)-f(\theta+\pi)$，则 $F(0)F(\pi)\le 0$，从而由连续函数的性质知 $\exists\theta_0\in[0,\pi]$，使得

$$F(\theta_0)=0$$，即可得结论.

或 令 $F(\theta)=f(\theta)-f(\theta+\pi)$，则 $F(0)+F(\pi)=0$，从而由连续函数的性质知 $\exists\theta_0\in[0,\pi]$，使得

$$F(\theta_0)=\frac{F(0)+F(\pi)}{2}=0$$，即可得结论.

或 可用反证法证明，请同学们完成。

由闭区间上的连续函数的性质推得的两个结论是可以直接使用的：

（1）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域为 $[m,M]$。从而对 $\forall c\in[m,M]$，$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=c$$

（2）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则对任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$。

第 1 届决赛的一道题：设 $n>1$ 为整数，$F(x)=\int_0^x e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!})dt$.证明：方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $(\frac{n}{2},n)$ 内至少有一个根。

解答分析：本题的解题思路是简单的：易见 $F(x)$ 在 $(0,\infty)$ 单增，因此方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $(\frac{n}{2},n)$ 内至少有一个根（实际上至多有一个根）当且仅当 $F(\frac{n}{2})<\frac{n}{2}$，$F(n)>\frac{n}{2}$.于是问题就转化为要证明 $F(\frac{n}{2})<\frac{n}{2}$ 及 $F(n)>\frac{n}{2}$. $F(\frac{n}{2})<\frac{n}{2}$ 的证明是简单的，难点在于 $F(n)>\frac{n}{2}$ 的证明。

由 $e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!})<e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^n}{k!}=1$ 得

$$F(\frac{n}{2})=\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!})dt<\int_0^{\frac{n}{2}}dt=\frac{n}{2}$$。

下面证明 $F(n)>\frac{n}{2}$，这里给出两个证明。

方法一，令 $f(t)=e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!})$，则

$$f'(t)=-e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!})+e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!})=-\frac{t^n}{n!}e^{-t}$$，

$$f''(t)=-\frac{1}{n!}(nt^{n-1}e^{-t}-t^ne^{-t})=\frac{t^{n-1}}{n!}(t-n)e^{-t},$$

当 $t\in(0,n)$ 时， $f''(t)<0$，所以 $f(t)$ 在 $[0,n]$ 上凸函数，因此

$$F(n)=\int_0^n f(t)dt>\frac{f(0)+f(n)}{2}\cdot n>\frac{f(0)}{2}\cdot n=\frac{n}{2}.$$

方法二，

$$I_k=\int_0^n e^{-t}\frac{t^k}{k!}dt=-e^{-n}\frac{n^k}{k!}+I_{k-1}=\cdots=1-e^{-n}\sum_{m=0}^{k}\frac{n^m}{m!},k=0,1,2,\cdots,$$

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n}\int_0^n e^{-t}\frac{t^k}{k!}dt=n+1-e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\frac{n^m}{m!}=n+1-e^{-n}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^m}{m!}=n+1-e^{-n}\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\frac{n^m}{m!}$$

令 $a_m=\frac{n^m}{m!}$，则 $a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}=a_n$，从而

$$\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\frac{n^m}{m!}<\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=m}^{n}\frac{n^l}{l!}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{l}\frac{n^l}{l!}=\sum_{l=0}^{n}(l+1)\frac{n^l}{l!},$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\frac{n^m}{m!}<\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\frac{n^m}{m!}+\sum_{m=0}^{n}(l+1)\frac{n^l}{l!}\right)=\frac{n+2}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{n^m}{m!},$$

所以

$$F(n)>n+1-\frac{n+2}{2}e^{-n}\sum_{m=0}^{n}\frac{n^m}{m!}>n+1-\frac{n+2}{2}=\frac{n}{2}。$$

注：本题的主干思路来自于连续函数的零点存在定理，但难点在于对 $F(n)$ 的估计。连续函数的介值性质（包括零点存在定理）在后续的问题中经常用到，但难点往往在于别处。

练习题

1．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，则 $a=$ ________, $b=$ ________.

2．求 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$ 的间断点，并确定其类型.

3．设 $f(x)=\frac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$，且已知 $x=e$ 为无穷间断点，$x=1$ 为可去间断点，则 $b=$ ________.

4．设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点，且对 $\forall x,y\in(a,b)$，有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

证明： $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

5．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$， $f(x)$ 的最小值 $f(a)<a$，求证 $f(f(x))$ 至少在两个不同的点处取得它的最小值.

6．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(f(x))=x$，求证存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

答案或提示

1．0，1

2．$x=-1$为第二类间断点，且为无穷间断点；$x=1$为第一类间断点，且为可去间断点；$x=0$为第一类间断点，且为可去间断点.

3．e

4．任取 $x_0 \in (a,b)$，由题设有 $f(\frac{x+x_0}{2}) \le \frac{f(x)+f(x_0)}{2}$，令 $x \to {x_0}^+$，可得

$f(x_0+0) \le f(x_0)$，同样令 $x \to {x_0}^-$，可得 $f(x_0-0) \le f(x_0)$；

又 $f(x_0)=f(\frac{x_0+h+x_0-h}{2}) \le \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}$，令 $h \to 0^+$，可得

$f(x_0+0)+f(x_0-0) \ge 2f(x_0)$，所以有

$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$，

因此 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

5．易见 $f(f(x))$ 的最小值为 $f(a)$，故只需证存在 $x_1 \ne x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=a$。

6．(用反证法证明) 假设对 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$，$f(x) \ne x$，则由 $f(x)$ 的连续性知 $f(x)-x$ 恒正或恒负。

若 $f(x)-x$ 恒正，即对 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$，$f(x) > x$，那么

$f[f(x)] > f(x) > x$，

这与 $f(f(x))=x$ 矛盾。

若 $f(x)-x$ 恒负，同样地可得出矛盾。

所以存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$。