第一节 I型曲线积分

定义：$f(x,y)$ 在平面曲线 L 上有界

① 任意分割 . ② 任意取点

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 存在 则称为 $f(x,y)$ 在 L 上曲线积分

记为 $\int_L f(x,y)\,ds$. 弧长元素.

$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$.

当 $f(x,y)=1$. 或 $f(x,y,z)=1$ 时

$\int_L 1\,ds. = S$

$\int_\Gamma 1\,ds = S.$

性质：① 积分中值定理 $\int_L f(x,y)\,ds = f(\xi,\eta)\cdot S$

② 对称性. 平面 L 积分 类似于二重积分

空间 Γ 积分 类似于三重积分

设 L 关于 x 轴对称. L_1：上半部分

则 $\int_L f(x,y)\,ds = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)\,ds, & f(x,y)=f(x,-y) \\ 0 & -f(x,y)=f(x,-y) \end{cases}$

(i). L 关于 $y=x$ 对称 $\Longrightarrow \int_L f(x,y)ds = \int_L f(y,x)ds$.

(ii) Γ 关于 xoy 面对称，Γ_1：上半部分

则 $\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds, & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0, & -f(x,y,z)=f(x,y,-z) \end{cases}$

(iv). Γ 具有轮换对称性

$\Longrightarrow \int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_\Gamma f(y,z,x)ds = \int_\Gamma f(z,x,y)ds$

例. L：$x^2+y^2=a^2$. 关于 $y=x$ 对称.

$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)ds = \frac{1}{2}\int_L a^2 ds$

$= \frac{1}{2}a^2\int_L 1\,ds = \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a = \pi a^3$.

例： $\iint_D x^2 d\sigma = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \rho^2\,\rho d\rho$ $= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \rho^2\cos^2\theta\,\rho d\rho$

其中 σ：$x^2+y^2 \le a^2$ $\qquad \frac{1}{2}\iint_D a^2 d\sigma = \frac{a^2}{2}\cdot\pi a^2 = \frac{\pi}{2}a^4$.

例： Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 & \text{球面} \\ x+y+z=0 & \text{平面过球心} \end{cases}$ 具有轮换对称性

$\int_\Gamma x^2 ds = \int_\Gamma y^2 ds = \int_\Gamma z^2 ds = \frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds$.

$= \frac{1}{3}\int_\Gamma a^2 ds = \frac{a^2}{3}\int_\Gamma 1\,ds = \frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3$.

$$=\frac{1}{3}\int_\Gamma a^2 ds = \frac{a^2}{3}\int_\Gamma 1\, ds = \frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a = \frac{2\pi a^3}{3}$$

$$\int_\Gamma x\, ds = \int_\Gamma y\, ds = \int_\Gamma z\, ds = \frac{1}{3}\int_\Gamma (x+y+z)\, ds = 0$$

$dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy$

I 型曲线积分计算 $\longrightarrow$ 定积分

ds, dx, dy

(i) $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\quad \underset{\text{小}}{\alpha} \le t \le \underset{\text{大}}{\beta}$

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,|dt|.$$

$$I = \int_L f(x,y)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\cdot dt.$$

(ii) $L: y = y(x)$ $\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases}$ $\quad a \le x \le b$. 或 $x = x(y)$, $\begin{cases} x = x(y) \\ y = y \end{cases}$ $\quad c \le y \le d$.

$$I = \int_L f(x,y)\, ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1^2 + y'(x)^2}\, dx.$$

$$= \int_c^d f(x(y), y)\cdot\sqrt{x'(y)^2 + 1^2}\, dy$$

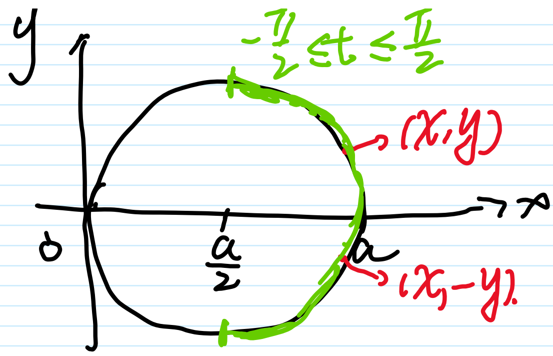
(iii) $L: \rho = \rho(\theta)$ $\quad \alpha \le \theta \le \beta$ $\longrightarrow \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$

$$I = \int_L f(x,y)\, ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cdot\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\cdot\sqrt{\rho^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$$

例 $I = \int_L \sqrt{x^2+y^2}\, ds$ $\quad L: x^2+y^2 = ax$ $\quad (a>0)$

解: 1)法: 直角坐标. $\quad y$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

解：①法：直角坐标.



L 关于 x 轴对称，L_1：上半部分

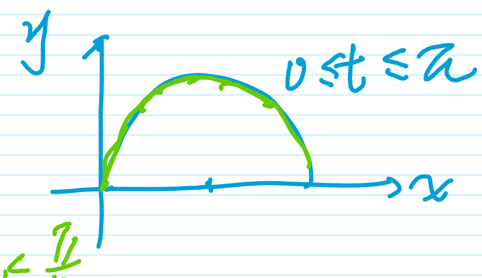
$$I=2\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}\,ds=2\int_0^a\sqrt{ax}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)^2}\,dx$$

L_1：$y=\sqrt{ax-x^2}$，$0\le x\le a$. 计算麻烦

②法：$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\\ y=\frac{a}{2}\sin t.\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

$$\begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t\\ y=\frac{a}{2}\cos t.\end{cases}\quad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$



$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{a\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\right)}\cdot\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\,dt$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\,dt=\frac{a^2}{2\sqrt2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos^2\frac{t}{2}-1}\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}-\cos\frac{t}{2}\,dt\right)=\cdots$$

对称性 $2\int_{L_1}\sqrt{ax}\,ds=2\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt$

极坐标 …

③法：$x^2+y^2=ax \xrightarrow{\text{极坐标}} \rho\cos = a\cos\theta$.

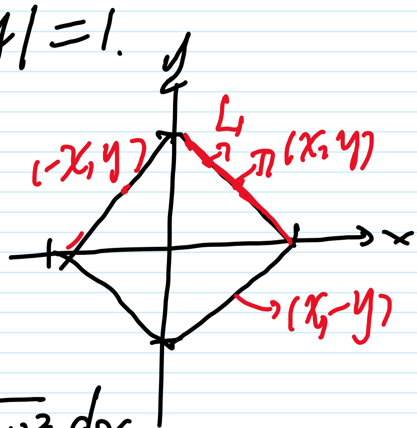
$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$\sqrt{ax}=\sqrt{a\cdot\rho(\theta)\cos\theta}=\sqrt{a\cdot a\cos^2\theta}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot\sqrt{(a\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=2a^2.$$

例 $I=\int_L |x|\,ds$. L: $|x|+|y|=1$.



解：①法：

$$I\xlongequal{\text{对称性}}4\int_{L_1}|x|\,ds$$

L_1: $y=1-x$, $0\le x\le 1$ $\quad=4\int_0^1 x\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dx$

$$=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{2}.$$

②法：L关于$y=x$对称.

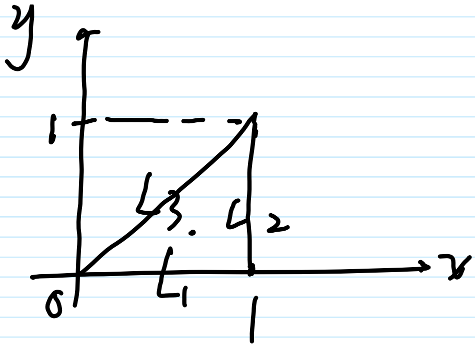
$$I=\int_L|y|\,ds=\frac{1}{2}\int_L(|x|+|y|)\,ds=\frac{1}{2}\int_L 1\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

例 $I=\int_L y\,ds$. L: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ 为顶点三角形

解

解: $L = L_1 + L_2 + L_3$



L_1: $y=0$, $0 \le x \le 1$.

L_2: $x=1$. $0 \le y \le 1$

L_3: $y=x$, $0 \le x \le 1$.

$$I = \int_0^1 0 \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}\, dx + \int_0^1 y \cdot \sqrt{0^2 + 1^2}\, dy.$$

$$+ \int_0^1 x \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}\, dx = \cdots$$

例 Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2. \\ x - y = 0 \end{cases}$ $(a>0)$. 求 $I = \oint_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\, ds = a \cdot 2\pi a$

②法: $= \int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, ds = \int_\Gamma a\, ds = a \int_\Gamma ds.$

解: Γ: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$.

$$I = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

①法: $2x^2 + z^2 = a^2. \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos t. \\ z = a \sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \cos t\right)^2 + (a \sin t)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} a^2 \sin^2 t + \frac{1}{2} a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt$$

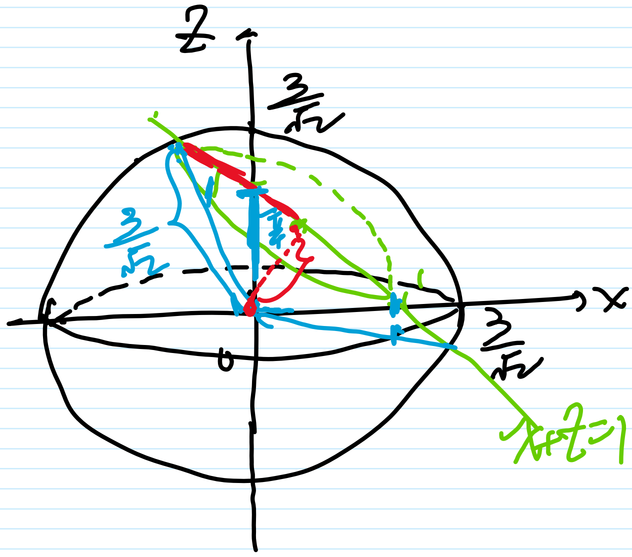
$$= a^2\int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^2.$$

例. $I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds.$ $\quad \Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2} \\ x+z=1. \end{cases}$

$$= \frac{9}{2}\int_\Gamma 1\, ds = \frac{9}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2$$

解:

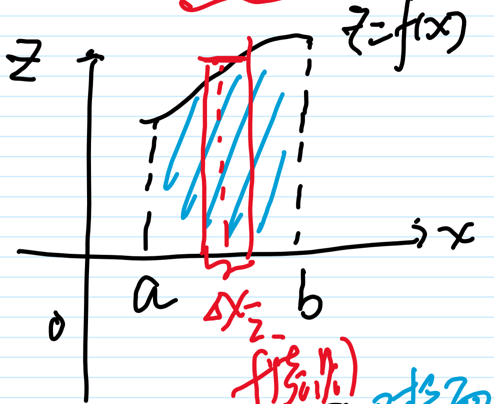
$$r=\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$$



$$x^2+y^2+(1-x)^2=\frac{9}{2}$$

$$(\quad)^2+(\quad)^2=C.$$

Ⅰ型曲线积分的几何意义：以L为底以f(x,y)为高柱面面积（平面曲线）



$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$