第九章
方差分析及回归分析

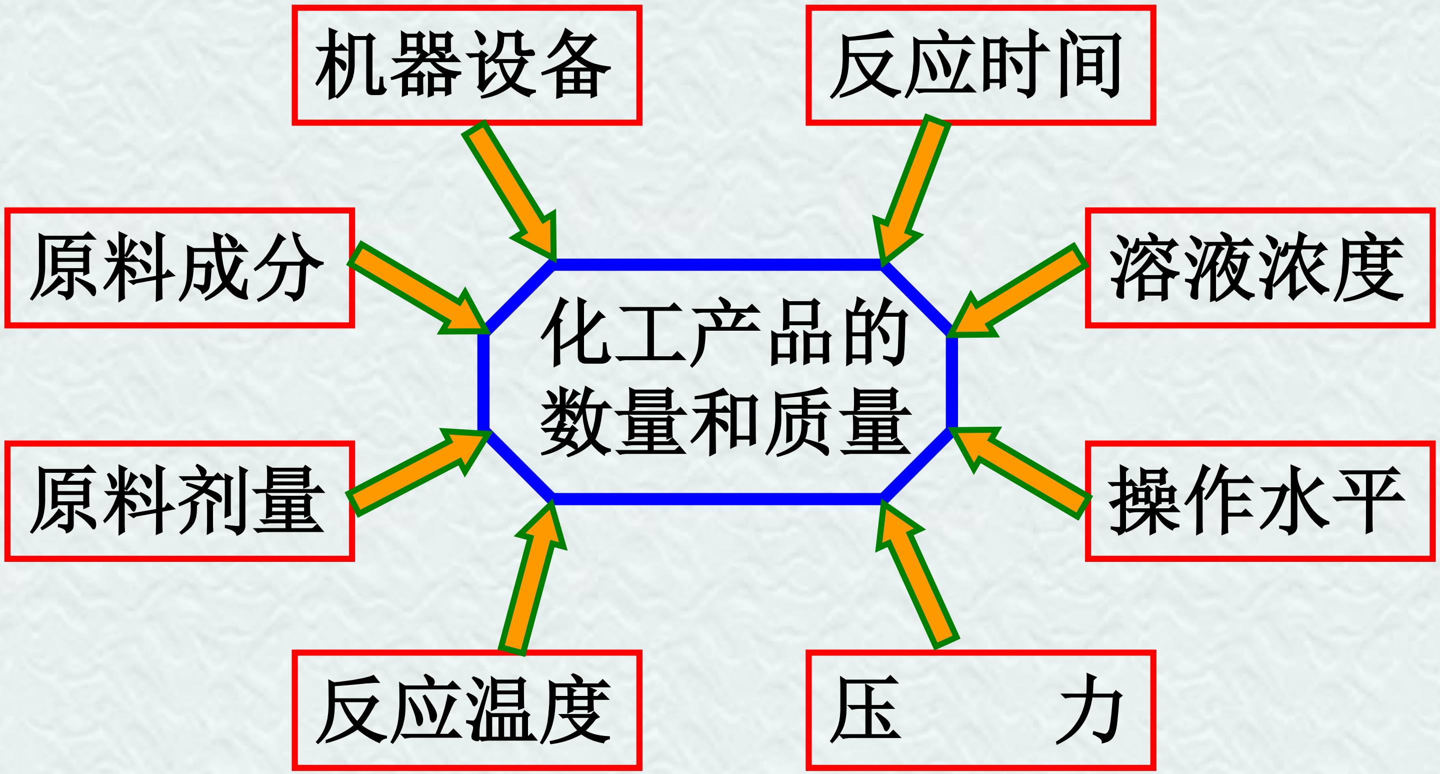
王笑尘

北京邮电大学网络空间安全学院

wxiaochen@bupt.edu.cn

第一节　单因素试验的方差分析

一、单因素试验



方差分析——根据试验的结果进行分析,鉴别各个有关因素对试验结果的影响程度.

试验指标——试验中要考察的指标.

因　　素——影响试验指标的条件.

因素
- 可控因素 → 如，反应温度、原料剂量等
- 不可控因素 → 如，测量误差、气象条件等

水　　平——因素所处的状态.

可控因素
- **单因素试验**——在一项试验中只有一个因素改变.
- **多因素试验**——在一项试验中有多个因素在改变.

例1 设有三台机器, 用来生产规格相同的铝合金薄板.取样,测量薄板的厚度精确至千分之一厘米.得结果如下表所示.

表9.1 铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

试验指标: 薄板的厚度 **因素**: 机器

水平: 不同的三台机器是因素的三个不同的水平

假定除机器这一因素外, 其他条件相同, 属于**单因素试验**.

试验目的: 考察各台机器所生产的薄板的厚度有无显著的差异,即考察机器这一因素对厚度有无显著的影响.

例2 下表列出了随机选取的、用于计算器的四种类型的电路的响应时间（以毫秒计）.

表9.2 电路的响应时间

类型I	类型II	类型III	类型Ⅳ
19 15	20 40	16 17	18
22	21	15	22
20	33	18	19
18	27	26	

试验指标: **因素:**

水平:

单因素试验

试验目的:

例2　下表列出了随机选取的、用于计算器的四种类型的电路的响应时间（以毫秒计）.

表9.2　电路的响应时间

类型I	类型II	类型III	类型Ⅳ
19　15	20　40	16　17	18
22	21	15	22
20	33	18	19
18	27	26	

试验指标:电路的响应时间　　　**因素**:电路类型

水平: 四种电路类型为因素的四个不同的水平

单因素试验

试验目的:考察电路类型这一因素对响应时间有无显著的影响.

例3 一火箭用四种燃料,三种推进器作射程试验.每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭两次,得射程如下(以海里计).

表9.3 火箭的射程

推进器(B)		B_1	B_2	B_3
燃料(A)	A_1	58.2 52.6	56.2 41.2	65.3 60.8
	A_2	49.1 42.8	54.1 50.5	51.6 48.4
	A_3	60.1 58.3	70.9 73.2	39.2 40.7
	A_4	75.8 71.5	58.2 51.0	48.7 41.4

试验指标: 射程　　　　　**因素**: 推进器和燃料

水平: 推进器有3个,燃料有4个

双因素试验

试验目的: 考察推进器和燃料两因素对射程有无显著的影响.

例1

表9.1　铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

问题分析 在每一个水平下进行独立试验,结果是一个随机变量.将数据看成是来自三个总体的样本值.

设总体均值分别为μ_1,μ_2,μ_3.

检验假设 $H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3$,

$H_1:\mu_1,\mu_2,\mu_3$不全相等.

检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3,$

$H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3$不全相等.

进一步假设各总体均为正态变量,且各总体的方差相等,但参数均未知.

问　　题——检验同方差的多个正态总体均值是否相等.

解决方法——方差分析法（分析与均值偏差的平方和）,一种统计方法.

数学模型

设因素A有s个水平$A_1, A_2, \cdots, A_s$,在水平$A_j(j=1,2,\cdots,s)$下,进行$n_j(n_j \geq 2)$次独立试验,得到如下表的结果.

表 9.4

观察结果 \ 水平	A_1	A_2	$\cdots$	A_s
	X_{11} X_{21} $\vdots$ $X_{n_1 1}$	X_{12} X_{22} $\vdots$ $X_{n_2 2}$	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	X_{1s} X_{2s} $\vdots$ $X_{n_s s}$
样本总和	$T_{\bullet 1}$	$T_{\bullet 2}$	$\cdots$	$T_{\bullet s}$
样本均值	$\overline{X}_{\bullet 1}$	$\overline{X}_{\bullet 2}$	$\cdots$	$\overline{X}_{\bullet s}$
总体均值	μ_1	μ_2	$\cdots$	μ_s

假设

1.各个水平$A_j\,(j=1,2,\cdots,s)$下的样本$X_{1j},X_{2j},\cdots,X_{n_j j}$来自具有相同方差$\sigma^2$,均值分别为$\mu_j\,(j=1,2,\cdots,s)$的正态总体$N(\mu_j,\sigma^2)$,$\mu_j$与$\sigma^2$均未知;

2.不同水平A_j下的样本之间相互独立.

因为$X_{ij}\sim N(\mu_j,\sigma^2)$, 所以$X_{ij}-\mu_j\sim N(0,\sigma^2)$.

记$X_{ij}-\mu_j=\varepsilon_{ij}$,表示随机误差,那么$X_{ij}$可写成

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \text{各} \varepsilon_{ij} \text{独立}, \\ i = 1, 2, \cdots, n_j,\ j = 1, 2, \cdots, s, \\ \mu_j \text{ 与 } \sigma^2 \text{ 均未知}. \end{array}\right\}$$

单因素试验方差分析的数学模型

需要解决的问题

1.检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s$,

$H_1: \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$不全相等.

2.估计未知参数$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s, \sigma^2$.

数学模型的等价形式

记$n=\sum_{j=1}^{s} n_j$, $\boxed{\mu=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} n_j\mu_j}$.

总平均

水平A_j的效应,表示水平A_j下的总体平均值与总平均的差异.

$$\boxed{\delta_j=\mu_j-\mu}, j=1,2,\cdots,s.$$

$$n_1\delta_1+n_2\delta_2+\cdots+n_s\delta_s=0.$$

原数学模型 $\left.\begin{array}{l} X_{ij} = \underline{\mu_j} + \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2), \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 独立}, \\ i = 1,2,\cdots,n_j,\ j = 1,2,\cdots,s, \\ \mu_j \text{ 与 } \sigma^2 \text{ 均未知}. \end{array}\right\}$ 改写为

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij} = \underline{\mu + \delta_j} + \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2), \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 独立}, \\ i = 1,2,\cdots,n_j,\ j = 1,2,\cdots,s, \\ \sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j = 0. \end{array}\right\}$$

检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s,$$

$$H_1: \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s \text{不全相等}.$$

等价于

检验假设 $$H_0: \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0,$$

$$H_1: \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s \text{不全为零}.$$

二、平方和的分解

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$$ —数据的总平均

$$S_T = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X})^2$$ —总偏差平方和（总变差）

$$\overline{X}_{\bullet j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$$ — 水平A_j下的样本平均值

$$S_T=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}[(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})+(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})]^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})^2+\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})^2$$

$$\boxed{+2\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})}$$

$$=0$$

$$S_T = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet j})^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X})^2$$

$$= S_E + S_A$$

$$S_E = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet j})^2$$ —误差平方和（随机误差引起）

$$S_A = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X})^2 = \sum_{j=1}^{s} n_j(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X})^2$$

$$= \sum_{j=1}^{s} n_j \overline{X}_{\bullet j}^{\,2} - n\overline{X}^{\,2}$$ —效应平方和（由各水平效应的差异和随机误差引起）

三、S_E，S_A 的统计特性

$$S_E = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet j})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1}(X_{i1} - \overline{X}_{\bullet 1})^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n_s}(X_{is} - \overline{X}_{\bullet s})^2,$$

$\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet j})^2$是$N(\mu_j, \sigma^2)$的样本方差的$n_j - 1$倍,

$$\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet j})^2 \Big/ \sigma^2 \sim \chi^2(n_j - 1).$$

又由于各 X_{ij} 独立，所以由 χ^2 分布的可加性知

$$S_E/\sigma^2 \sim \chi^2\left(\sum_{j=1}^{s}(n_j-1)\right),$$

即 $$S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(n-s), \text{其中} n=\sum_{j=1}^{s}n_j.$$

根据 χ^2 分布的性质可以得到

S_E 的自由度为 $n-s$；

$$E(S_E)=(n-s)\sigma^2.$$

$$S_A = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X})^2 = \sum_{j=1}^{s}[\sqrt{n_j}(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X})]^2$$

因为$\sum_{j=1}^{s}\sqrt{n_j}[\sqrt{n_j}(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X})] = \sum_{j=1}^{s} n_j(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X})$

$$= \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} - n\overline{X} = 0$$

所以 S_A 的自由度为 $s-1.$

又因为 $\mu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} n_j\mu_j$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$, X_{ij} 相互独立,

所以 $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n).$

$$S_A=\sum_{j=1}^{s} n_j \overline{X}_{\bullet j}^{\,2}-n\overline{X}^2$$

$$E(S_A)=E[\sum_{j=1}^{s} n_j \overline{X}_{\bullet j}^{2}-n\overline{X}^2]$$

$$=\sum_{j=1}^{s} n_j E(\overline{X}_{\bullet j}^{2})-nE(\overline{X}^2)$$

$$=\sum_{j=1}^{s} n_j[\frac{\sigma^2}{n_j}+(\mu+\delta_j)^2]-n[\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2]$$

$$=(s-1)\sigma^2+2\mu\boxed{\sum_{j=1}^{s} n_j\delta_j}+n\mu^2+\sum_{j=1}^{s} n_j\delta_j^2-n\mu^2$$

$=0$

$$=(s-1)\sigma^2+\sum_{j=1}^{s} n_j\delta_j^2$$

S_A与S_E独立，H_0为真时，$S_A/\sigma^2 \sim \chi^2(s-1)$.

四、假设检验问题的拒绝域

检验假设 $H_0: \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0,$

$H_1: \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$ 不全为零.

$$E(S_A) = E[\sum_{j=1}^{s} n_j \overline{X}_{\bullet j}^2 - n\overline{X}^2] = (s-1)\sigma^2 + \sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2$$

H_0为真时, $S_A/\sigma^2 \sim \chi^2(s-1).$

$E(\frac{S_A}{s-1}) = \sigma^2$,即$\frac{S_A}{s-1}$是$\sigma^2$的无偏估计.

四、假设检验问题的拒绝域

检验假设 $H_0: \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0,$

$H_1: \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$不全为零.

$$E(S_A) = E[\sum_{j=1}^{s} n_j \overline{X}_{\bullet j}^2 - n\overline{X}^2] = (s-1)\sigma^2 + \sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2$$

H_1为真时, $\sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2 > 0,$

$$E\left(\frac{S_A}{s-1}\right) = \sigma^2 + \frac{1}{s-1}\sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2 > \sigma^2.$$

因为$S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(n-s)$，所以$E\left(\dfrac{S_E}{n-s}\right)=\sigma^2$,

即不管 H_0 是否为真, $S_E/(n-s)$ 都是 σ^2 的无偏估计.

因为H_0为真时, $S_A/\sigma^2 \sim \chi^2(s-1)$, $S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(n-s)$,

所以 H_0 为真时,

$$\frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)}=\frac{S_A/\sigma^2}{(s-1)}\bigg/\frac{S_E/\sigma^2}{(n-s)} \sim F(s-1,n-s).$$

$$E(S_A) = E[\sum_{j=1}^{s} n_j \overline{X}_{\bullet j}^{2} - n\overline{X}^{2}] = (s-1)\sigma^2 + \sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2$$

$$\delta_j = \mu_j - \mu, j = 1,2,\cdots,s.$$

$$F = \frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)}.$$

1. 分子和分母相互独立;

2. 分母$S_E/(n-s)$的数学期望始终是σ^2,

3. H_0为真时,分子的期望为σ^2,H_0不真时,分子取值有偏大的趋势.

拒绝域形如 $F = \dfrac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} \geq k.$

检验假设 $H_0: \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0,$
$H_1: \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$不全为零.

统计量为 $$\frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} = \frac{S_A/\sigma^2}{(s-1)} \bigg/ \frac{S_E/\sigma^2}{(n-s)} \sim F(s-1, n-s).$$

拒绝域为

$$F = \frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} \geq F_\alpha(s-1, n-s).$$

单因素试验方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均　方	F　比
因　素A	S_A	$s-1$	$\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{s-1}$	$F=\bar{S}_A/\bar{S}_E$
误　差	S_E	$n-s$	$\bar{S}_E=\dfrac{S_E}{n-s}$	
总　和	S_T	$n-1$		

记 $T_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij},\ j=1,\cdots,s,\ T_{\bullet\bullet}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij},$

$$S_T=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n},\qquad S_A=\sum_{j=1}^{s}\frac{T_{\bullet j}^2}{n_j}-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n},$$

$$S_E=S_T-S_A.$$

例4 设有三台机器,用来生产规格相同的铝合金薄板.取样,测量薄板的厚度精确至千分之一厘米.得结果如下表所示.

表9.1 铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

取$\alpha = 0.05$,检验假设

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad H_1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{不全相等}.$$

解 $s=3, n_1=n_2=n_3=5, n=15,$

$S_T=0.00124533,\ S_A=0.00105333,\ S_E=0.000192.$

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均　方	F 比
因　素A	0.00105333	2	0.00052667	32.92
误　差	0.000192	12	0.000016	
总　和	0.00124533	14		

$F=32.92>F_{0.05}(2,12)=3.89.$ 在水平0.05下拒绝 H_0.

各机器生产的薄板厚度有显著差异.

在*MATLAB*中的求解

函数:***anova1***

格式:***p*=*anova1*(*x*)**

说明:对样本*X*中的多列数据进行单因素方差分析,比较各列的均值,返回“零假设”成立的概率值,如果概率值接近于零,则零假设值得怀疑,表明各列的均值事实上是不同的.

源程序：

```
x=[0.236,0.238,0.248,0.245,0.243;
   0.257,0.253,0.255,0.254,0.261;
   0.258,0.264,0.259,0.267,0.262];
p=anova1(x')
```

程序运行结果

Figure 1: One-way ANOVA

文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.00105	2	0.00053	32.92	1.34305e-05
Error	0.00019	12	0.00002		
Total	0.00125	14			

五、未知参数的估计

$$E(S_E/(n-s))=\sigma^2 \qquad \hat{\sigma}^2=S_E/(n-s)$$

$$E(\overline{X})=\mu \qquad \hat{\mu}=\overline{X}$$

$$E(\overline{X}_{\bullet j})=\mu_j, j=1,2,\cdots,s \qquad \hat{\mu}_j=\overline{X}_{\bullet j}$$

$$\delta_j=\mu_j-\mu, j=1,2,\cdots,s \qquad \hat{\delta}_j=\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X}$$

无偏估计

若拒绝 H_0，需对两总体 $N(\mu_j,\sigma^2), N(\mu_k,\sigma^2)$ 的均值差 $\mu_j-\mu_k=\delta_j-\delta_k$ 作出区间估计.

因为 $E(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X}_{\bullet k})=\mu_j-\mu_k$，

$$D(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X}_{\bullet k})=\sigma^2\left(\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_k}\right),$$

$\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X}_{\bullet k}$与$\hat{\sigma}^2 = S_E/(n-s)$独立,

所以 $$\frac{(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X}_{\bullet k}) - (\mu_j - \mu_k)}{\sqrt{\overline{S}_E(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k})}}$$

$$= \frac{(\overline{X}_{\cdot j} - \overline{X}_{\cdot k}) - (\mu_j - \mu_k)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k}}} \Big/ \sqrt{\frac{S_E}{\sigma^2}/(n-s)} \sim t(n-s).$$

均值差 $\mu_j - \mu_k = \delta_j - \delta_k$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X}_{\bullet k} \pm t_{\alpha/2}(n-s)\sqrt{\overline{S}_E(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k})}\right).$$

例5 求例4中的未知参数 $\sigma^2, \mu_j, \delta_j \ (j = 1,2,3)$ 的点估计及均值差的置信水平为0.95的置信区间.

解

例5 求例4中的未知参数 $\sigma^2, \mu_j, \delta_j\,(j=1,2,3)$ 的点估计及均值差的置信水平为0.95的置信区间.

解 $\hat{\sigma}^2 = S_E \big/ (n-s) = 0.000016,$

$\hat{\mu}_1 = \overline{x}_{\bullet 1} = 0.242, \hat{\mu}_2 = \overline{x}_{\bullet 2} = 0.256, \hat{\mu}_3 = \overline{x}_{\bullet 3} = 0.262.$

$\hat{\mu} = \overline{x} = 0.253,$ $\hat{\delta}_1 = \overline{x}_{\bullet 1} - \overline{x} = -0.011,$

$\hat{\delta}_2 = \overline{x}_{\bullet 2} - \overline{x} = 0.003,$ $\hat{\delta}_3 = \overline{x}_{\bullet 3} - \overline{x} = 0.009.$

因为 $t_{0.025}(n-s) = t_{0.025}(12) = 2.1788,$

$$t_{0.025}(12)\sqrt{\overline{S}_E\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k}\right)} = 0.006,$$

所以$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.95的置信区间为

$$(0.242-0.256\pm 0.006)=(-0.020,-0.008),$$

$\mu_1-\mu_3$的置信水平为0.95的置信区间为

$$(0.242-0.262\pm 0.006)=(-0.026,-0.014),$$

$\mu_2-\mu_3$的置信水平为0.95的置信区间为

$$(0.256-0.262\pm 0.006)=(-0.012,0).$$

例6 下表列出了随机选取的、用于计算器的四种类型的电路的响应时间（以毫秒计）.

表9.2 电路的响应时间

类型I	类型II	类型III	类型Ⅳ
19 15	20 40	16 17	18
22	21	15	22
20	33	18	19
18	27	26	

设四种类型电路的响应时间的总体均为正态,且各总体的方差相同,但参数均未知,各样本相互独立. 取水平 $\alpha = 0.05$ 检验各类型电路的响应时间是否有显著差异.

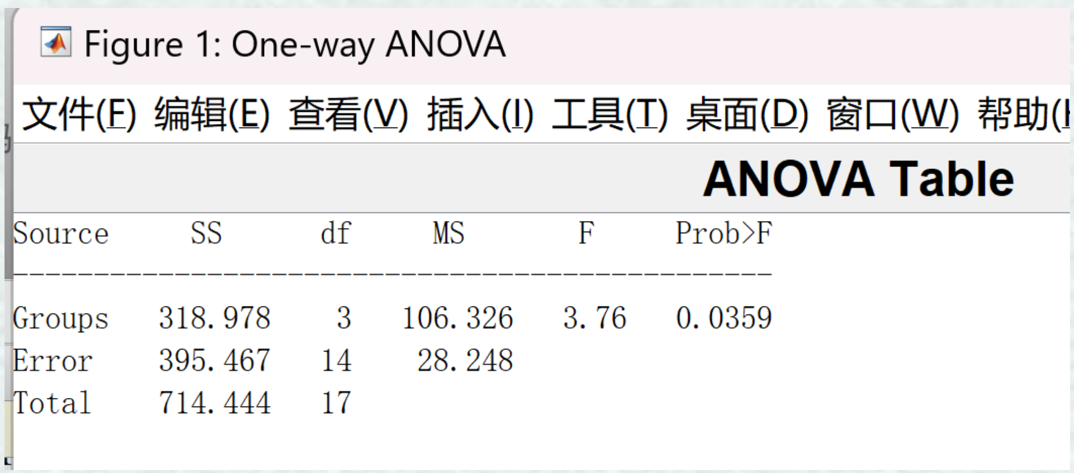
在*MATLAB*中求解

**x=[19,22,20,18,15,20,40,21,33,27,16,17,15,18,26,18,
22,19];**

y=[1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4];

p=anova1(x,y)

程序运行结果 方差分析表 Box 图检验 帮 助



Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	318.978	3	106.326	3.76	0.0359
Error	395.467	14	28.248		
Total	714.444	17			

六、小结

1. 随机试验: 单因素试验、多因素试验

2. 单因素试验方差分析步骤

(1) 建立数学模型;

(2) 分解平方和;

(3) 研究统计特性;

(4) 进行假设检验;

(5) 估计未知参数.

第九章作业（教材第五版）：

P261：1、2

注：作业不得抄袭；写上姓名、班级、学号和页码（如1/5），待第九章讲授结束后，与第八章作业一起提交至教学云平台。