目录

第一章 常微分方程

内容提要

- 一阶常微分方程
- 高阶常微分方程
- 综合题型

1.1 一阶常微分方程

一阶微分方程的通式 $F(x, y, y') = 0$.

1. 分离变量法.

若由 $F(x, y, y') = 0$ 可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$, 则可用分离变量方法求解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

注 以上方法可以简记为“分离变量, 各自积分”. 可分离变量方程有时也表现为微分形式

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)\mathrm{d}x + \varphi_2(x)\psi_2(y)\mathrm{d}y = 0.$$

其解法如下

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{d}x = -\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\mathrm{d}y \Rightarrow \int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\mathrm{d}y.$$

2. 齐次方程

若由 $F(x, y, y') = 0$ 可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, 则称其为齐次方程. 此类方程可以通过变量替换转化为分离变量方法求解.

令 $u = y/x$, 则 $y' = (xu)' = u + xu'$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f(u) - u}{x}$$

3. 一阶线性方程

若由 $F(x, y, y') = 0$ 可得 $y' + P(x)y = Q(x)$, 则称其为一阶线性方程, 可用如下公式求解.

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

4. 伯努利方程

若由 $F(x, y, y') = 0$ 可得 $y' + P(x)y = Q(x)y^n (n \neq 0, 1)$, 则称其为伯努利方程. 此类方程可以通过换元化为一阶线性方程.

令 $u = y^{1-n}$, 则 $u' = (1-n)y^{-n}y'$.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \Rightarrow u'(x) + (1-n)P(x)u(x) = (1-n)Q(x)$$

5. 全微分方程

若由 $F(x, y, y') = 0$ 可得 $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 则称其为全微分方程. 此类方程有以下两种基本解法.

解法一 (部分积分) 令 $\mathrm{d}u = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$, 由

$$u = \int P\,\mathrm{d}x + \phi(y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

解出 $\phi(y)$ 得 $u(x, y) = C$.

解法二 (线积分)

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\mathrm{d}y,$$

由此得 $u(x,y)=C$.

例题 1.1 求微分方程

$$y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$$

的通解.

解 由

$$\begin{aligned} y'&=\sin\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}=-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\\ \Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{2\sin\frac{y}{2}}&=-\int\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\ln\left(\cot\frac{y}{2}-\csc\frac{y}{2}\right)+\ln C=-2\sin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

通解为 $C\left(\cot\frac{y}{2}-\csc\frac{y}{2}\right)=\mathrm{e}^{-2\sin\frac{x}{2}}$.

例题 1.2 求微分方程 $y'+\frac{y}{x}=y^2-\frac{4}{x^2}$ 的解.

解 方程两端同乘以 $1/y^2$, 则

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{xy}=1-\frac{4}{(xy)^2}$$

令 $u=\frac{1}{xy}$, 则 $1/y=ux$. 所以

$$\frac{y'}{y^2}=(-\frac{1}{y})'=-u-u'x$$

带入原方程得 $u'x=1-4u^2$.

当 $1-4u^2\neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{1-4u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

两边同时积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{4u^2-1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2u-1}-\frac{1}{2u+1}\right)\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

所以

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2u-1}{2u+1}\right|=\ln|x|+C_1\Rightarrow\frac{2u-1}{2u+1}=C_2x^4.$$

其中 C_1 为任意常数, C_2 为任意非零常数. 将 $u=\frac{1}{xy}$ 代入上式得原方程的通解为

$$\frac{x^4(xy+2)}{xy-2}=C_3$$

其中 C_3 是任意非零常数. 另一方面, 注意到当 $1-4u^2=0$ 时, 即 $y=\pm\frac{2}{x}$ 显然也是原方程的解. 所以原方程的解为

$$\frac{x^4(xy+2)}{xy-2}=C$$

其中 C 是任意常数及 $y=\frac{2}{x}$.

注 在本题中是通过做适当的变换化为已知类型的常微分方程求解. 这种思路是常用的.

例题 1.3 求微分方程 $y^3\,\mathrm{d}x+2\left(x^2-xy^2\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 整理原方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y^3}{2\left(x^2-xy^2\right)}=-\frac{y^2}{x^2}\frac{y}{2(1-\frac{y^2}{x})}$$

所以

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y^4}{x^2}\frac{1}{1-\frac{y^2}{x}}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2)=-\left(\frac{y^2}{x}\right)^2\frac{1}{1-\frac{y^2}{x}}$$

令 $u=y^2$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\left(\frac{u}{x}\right)^2\frac{1}{1-\frac{u}{x}}$$

此为齐次线性方程. 令 $v = u/x$, 则

$$v + xv' = -v^2 \frac{1}{1-v} = 1 + v - \frac{1}{1-v}$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{v-1}$$

所以

$$\int \frac{v-1}{v}\,\mathrm{d}v = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow v - \ln|v| = \ln|x| + C_1$$

其中 C_1 是任意常数. 整理得,

$$\frac{\mathrm{e}^v}{v} = Cx$$

其中 C 是任意非零常数. 所以原方程的通解为

$$\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x}} = Cy^2$$

其中 C 是任意非零常数.

注 本例中并没有求出方程的所有解. 显然 $v \equiv 0$ 即 $y \equiv 0$ 也是方程的解. 这是在分离变量时丢失的解.

形如

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

的方程也可以化为齐次方程来解. 只考虑 c_1, c_2 至少有一个不为零的情况 (当 $c_1 = c_2 = 0$ 时, 原方程就是齐次的). 这时可分为两种情况:

1. 当 $a_1b_2 \neq a_2b_1$ 时, 可设 $x = u + \alpha, y = v + \beta$, 将原方程化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right),$$

其中 α, β 是方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

的解;

2. 当 $a_1b_2 = a_2b_1$ 时, 则有 $a_1 = ka_2, b_1 = kb_2$, 可设 $u = a_2x + b_2y$, 将原方程化为可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a_2 + b_2 f\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right).$$

例题 1.4 求 $\left(2x^3 + 3xy^2 - 7x\right)\mathrm{d}x - \left(3x^2y + 2y^3 - 8y\right)\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解 原方程可变形为

$$\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8}$$

令 $x^2 = u + 2, y^2 = v + 1$, 则可化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u + 3v}{3u + 2v}$$

解得 $u + v = C(u - v)^5$. 代回原变量, 得所求通解为 $x^2 + y^2 - 3 = C\left(x^2 - y^2 - 1\right)^5$.

例题 1.5 求微分方程

$$y' = -\frac{1 + y^2}{x - \arctan y}$$

的通解.

解 注意到,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1+y^2}{x-\arctan y}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{x-\arctan y}{1+y^2}=-\frac{1}{1+y^2}x+\frac{\arctan y}{1+y^2}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{1+y^2}x=\frac{\arctan y}{1+y^2}.$$

将 y 视为 x 的函数, 由一阶线性微分方程求解公式, 得

$$\begin{aligned}
x&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y}\left[\int\frac{\arctan y}{1+y^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\arctan y}\left[\int\frac{\arctan y}{1+y^2}\mathrm{e}^{\arctan y}\,\mathrm{d}y+C\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\arctan y}\left[\int\arctan y\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\arctan y}\right)+C\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\arctan y}\left[\arctan y\mathrm{e}^{\arctan y}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan y}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y+C\right]\\
&=\arctan y-1+C\mathrm{e}^{-\arctan y}.
\end{aligned}$$

例题 1.6 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 的通解.

解 整理原方程, 得伯努利方程

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}y^2\Leftrightarrow y^{-2}\cdot y'+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2}.$$

令 $z=1/y$, 则得

$$z'-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}.$$

由一阶线性微分方程求解公式

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left[\int-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{2x}+Cx$$

所以

$$y=\frac{1}{z}=\frac{2x}{1+2Cx^2}.$$

其中 C 是任意常数.

例题 1.7 求 $\left(x^2-y^2-2y\right)\mathrm{d}x+\left(x^2+2x-y^2\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 将原方程改为

$$\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}(x+y)+2(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=0.$$

令 $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$, 则方程变为

$$\mathrm{d}(x+y)+2\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2-y^2}=0,$$

即为

$$\mathrm{d}(x+y)-2\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y}\right)=0.$$

故 $x+y=\ln\frac{x-y}{x+y}+C$ 是原方程的解.

注 在本例中, 令 $P=x^2-y^2-2y$, $Q=x^2+2x-y^2$. 注意到 $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以原方程不是全微分方程. 但是通过在方程的两段同时乘以适当的因子 (称为积分因子) 后, 原方程变为全微分方程. 以下一些简单函数的全微分公式, 对于类似的分析是有帮助的.

- $x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(xy)$;
- $x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)$;
- $\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]$;
- $\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$;
- $\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{y^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{x}{y}\right)$;
- $\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$;

- $\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2-y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y}\right)$;
- $\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\frac{y}{x}\right)$;
- $\frac{2xy\,\mathrm{d}y-y^2\,\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{x}\right)$;
- $\frac{2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y}\right)$.

1.2 高阶常微分方程

高阶常微分方程中通常难以求出解析解. 本讲义只针对一些特殊情况做简单的介绍.

1. 不显含 y 的二阶常微分方程 $y''=f(x,y')$. 此类方程可按如下方法求解.

令 $p=y'$, 则原方程转化为一阶常微分方程 $p'=f(x,p)$, 可按一阶常微分方程求解. 若其解为 $p=\varphi(x,C_1)$, 则原方程的通解为 $y=\int\varphi(x,C_1)\,\mathrm{d}x+C_2$,

2. 不显含 x 的二阶常微分方程. $y''=f(y,y')$, 此类方程可按如下方法求解. 令 $y'=p$. 由

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

代人原方程即可化为一阶方程

$$p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$$

若其解为 $p=\varphi(y,C_1)$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$, 则原方程的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

3. 二阶常系数线性方程 $y''+py'+qy=f(x)$. 此类方程是为数不多的理论较为完备的高阶微分方程. 可以分为以下两类讨论.

1) 二阶齐次常系数线性方程 $y''+py'+qy=0$. 此时考虑特征方程 $r^2+pr+q=0$, 则

1. 若 $p^2-4q>0$, 则特征方程有两个互异实根 $\lambda_1,\lambda_2\ (\lambda_1\neq\lambda_2)$, 此时原方程的通解为
$$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x};$$
2. 若 $p^2-4q=0$, 则特征方程有两个相等实根 $\lambda_1,\lambda_2\ (\lambda_1=\lambda_2)$, 此时原方程的通解为
$$y=\mathrm{e}^{\lambda_1x}\left(C_1+C_2x\right);$$
3. 若 $p^2-4q<0$, 则特征方程有一对共轭虚根 $\lambda_{1.2}=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$, 此时原方程的通解为
$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

2) 二阶非齐次常系数线性方程 $y''+py'+qy=f(x)$. 此类方程的通解为

$$y=Y+y^*$$

其中 Y 是对应的齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解, y^* 是原方程的一个特解 (即原方程的一个解). 对于以下两类形式的 $f(x)$, 其特解有如下形式

- 当 $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 时, 其中 $P_n(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式. 此时特解形式可设为 $y^*=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, 其中 $Q_n(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式,
$$k=\begin{cases}0, & \text{若}\lambda\text{ 不是特征根},\\ 1, & \text{若}\lambda\text{ 是特征根, 且为单根},\\ 2, & \text{若}\lambda\text{ 是特征根, 且为重根}.\end{cases}$$
- 当 $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$ 时, 其中 $P_n(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式, 其中 $Q_m(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式. 可设特解为
$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}\left(R_L^{(1)}(x)\cos\beta x+R_L^{(2)}(x)\sin\beta x\right)$$
其中 $R_L(x)$ 是关于 x 的 L 次多项式,
$$L=\max\{m,n\}\quad k=\begin{cases}0, & \text{若}\alpha\pm\beta i\text{ 不是特征根},\\ 1, & \text{若}\alpha\pm\beta i\text{ 是特征根}.\end{cases}$$

4. 欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数. 此类方程可以通过变量代换化为常系数线性微分方程来求解.

令 $x = \mathrm{e}^t$, 并记 $\mathrm{D}^n y \triangleq \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}$ ，则

$$x^k y^{(k)} = \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y$$

代入原方程并化简, 便得到一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程. 在求出这个方程的解之后，把 t 换成 $\ln x$，即得原方程的解.

二阶线性非齐次方程的一般理论回顾: 考虑二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{1.1}$$

与之对应的二阶齐次线性微分方程为

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1.2}$$

则

1. 若 y_1 和 y_2 都是 (1.1) 方程的解，则 $y_1 - y_2$ 是方程 (1.2) 的解;
2. 若 y_1 和 y_2 都是方程 (1.2) 的解，则 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 也是方程 (1.2) 的解（其中 C_1, C_2 是任意常数);
3. 若 y_1 和 y_2 分别是方程 (1.1) 和 (1.2) 的解，则 $y_1 + C y_2$ 仍是方程 (1.1) 的解 (其中 C 是任意常数);
4. 若 y_1 和 y_2 是方程 (1.2) 的两个线性无关的解，且 y^* 是方程 (1.1) 的一个特解，则

   $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

   是方程 (1.2) 的通解，而 $y = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是方程 (1.1) 的通解 (其中 C_1, C_2 是任意常数);
5. 若方程 (1.1) 的右端 $f(x)$ 是两个函数之和: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$，且 y_1 与 y_2 分别是方程

   $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) \text{ 与 } y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

   的特解, 则 $y_1 + y_2$ 就是方程 (1.1) 的特解.

例题 1.8 求微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解。

解 令 $p = y'$, 则

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

所以

$$p\left(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p\right) = 0$$

当 $p = 0$ 时, $y' = 0$ (舍去);

当 $p \neq 0$ 时, $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p = 0$ 得 $p = C_1/y$. 由 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 得 $C_1 = \frac{1}{2}$, 即 $y' = \frac{1}{2y}$, 解得 $y^2 = x + C_2$. 又 $x = 0$ 时 $y = 1$, 所以 $C_2 = 1$. 故原方程的特解为 $y^2 = x + 1$.

例题 1.9 已知 $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ 是方程 $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ 的一个解, 求其通解.

解 根据解的结构只需找一个与 $y_1(x)$ 线性无关的特解, 设 $y_2(x) = y_1(x)u(x)$ 且 $u(x)$ 不恒等于常数. 将 $y_2(x)$ 代入方程, 得

$$y_1 u'' + 2\left(y_1' + \frac{y_1}{x}\right)u' + \left(y_1'' + \frac{2}{x}y_1' + y_1\right)u = 0.$$

注意到 $y_1'' + \frac{2}{x}y_1' + y_1 = 0$, 从而有

$$u'' + 2\left(\frac{y_1'}{y_1} + \frac{1}{x}\right)u' = 0.$$

视为 u' 的可分离变量的一阶方程求解:

$$u' = C\mathrm{e}^{-2\int\left(\frac{y_1'}{y_1} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x} = C_1\mathrm{e}^{-2\ln(xy_1)} = \frac{C}{\sin^2 x}.$$

因此, 有 $u(x) = -C\cot x$. 取 $C = 1$, 则 $y_2(x) = -\cos x/x$. 所以, 原方程的通解为

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1 \sin x - C_2 \cos x\right)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例题 1.10 求 $y'' + y = x + \cos^2 x$ 的通解.

解 先考虑对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 的通解. 易得 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. 其次求

$$y'' + y = x + \cos^2 x = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

的特解. 由解的结构定理, 分别求 $y'' + y = x + \frac{1}{2}$ 的特解和 $y'' + y = \frac{1}{2}\cos 2x$ 的特解, 易得 $y_1^* = x + \frac{1}{2}$. $y_2^* = -\frac{1}{6}\cos 2x$. 故原方程的通解为

$$y = Y + y_1^* + y_2^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x.$$

例题 1.11 求欧拉方程 $x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$ 的通解.

解 作变换 $x = \mathrm{e}^t$, 原方程化为

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)y + \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y - 4\mathrm{D}y = 3\mathrm{e}^{2t},$$

即 $\mathrm{D}^3 y - 2\mathrm{D}^2 y - 3\mathrm{D}y = 3\mathrm{e}^{2t}$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3\mathrm{e}^{2t} \tag{1.3}$$

方程 (1.3) 对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

其特征方程为 $r^3 - 2r^2 - 3r = 0$. 其特征根为 $r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 3$. 所以方程 (1.3) 的通解为

$$Y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{3t} = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3$$

根据 (1.3) 设特解的形式为

$$y^* = b\mathrm{e}^{2t} = bx^2,$$

代入原方程, 求得 $b = -\frac{1}{2}$, 即 $y^* = -\frac{x^2}{2}$. 故所给欧拉方程的通解为

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

1.3 综合题型

例题 1.12 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, $z = f\left(\mathrm{e}^x \cos y\right)$ 满足

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = \left(4z + \mathrm{e}^x \cos y\right)\mathrm{e}^x.$$

已知 $f(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

解 由 $z = f\left(\mathrm{e}^x \cos y\right)$ 知,

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 y f'(\mathrm{e}^x \cos y)\mathrm{e}^x + \sin^2 y f'(\mathrm{e}^x \cos y)\mathrm{e}^x = f'(\mathrm{e}^x \cos y)\mathrm{e}^x$$

又由已知, 得 $f'(\mathrm{e}^x \cos y)\mathrm{e}^x = \left(4z + \mathrm{e}^x \cos y\right)\mathrm{e}^x$, 所以

$$f'(u) = 4f(u) + u.$$

即 $f'(u) - 4f(u) = u$. 此时可以有两种选择, 一种是用一阶线性微分方程求解公式得,

$$f(u) = \mathrm{e}^{\int 4\,\mathrm{d}u}\left[\int u\mathrm{e}^{\int(-4)\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u + C\right] = C\mathrm{e}^{4u} - \frac{u}{4} - \frac{1}{16}.$$

另一种是用非齐次常系数线性微分方程求解方法, 首先得到对应齐次方程的通解 $(C\mathrm{e}^{4u})$, 再找一个特解 (易知 $\frac{1}{4}u-$ $-\frac{1}{16}$ 是一个特解).

由条件 $f(0)=0$ 得 $C=\frac{1}{16}$. 于是有

$$f(u)=\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4u}-4u-1\right).$$

例题 1.13 设 $y(x)$ 满足 $y(x)=x^3-x\int_1^x \frac{y(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t+y'(x)(x>0)$, 且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}$ 存在, 求 $y(x)$.

解 注意到已知条件中既含有导数又含有积分, 所以考虑求导, 将其转为不含积分. 另一方面, 由于直接求导, 不能完全消除积分, 所以做如下变形.

由 $x>0$, 所以原方程等价于

$$\frac{y(x)}{x}=x^2-\int_1^x\frac{y(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t+\frac{y'(x)}{x}.$$

注意到此时方程两边可以关于 x 求导, 所以

$$\frac{y'x-y}{x^2}=2x-\frac{y}{x^2}+\frac{y''x-y'}{x^2}.$$

即 $y'x=2x^3+y''x-y'$. 整理得

$$y''-\frac{1+x}{x}y'=-2x^2.$$

所以

$$y'=\mathrm{e}^{\int 1+\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int -2x^2\mathrm{e}^{-\int 1+\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\right)=\mathrm{e}^x x\left(\int -2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x x\left(2x\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-x}+C\right)=2x^2+2x+C\mathrm{e}^x x.$$

所以

$$y=\frac{2}{3}x^3+x^2+C\int \mathrm{e}^x x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3+x^2+C_1(x-1)\mathrm{e}^x+C_2.$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}$ 存在, 所以 $C_1=0$. 所以

$$y=\frac{2}{3}x^3+x^2+C_2.$$

由此可知, $y'=2x^2+2x$. 所以 $y'(1)=4$. 又 $y(1)=\frac{5}{3}+C_2$. 所以

$$\frac{5}{3}+C_2=1+4$$

即 $C_2=10/3$, 所求函数为

$$y(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+\frac{10}{3}\quad(x>0).$$

例题 1.14 设 $u_0=0,u_1=1,u_{n+1}=au_n+bu_{n-1},n=1,2,\cdots$. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$, 试导出 $f(x)$ 满足的微分方程.

解 由已知, 得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{n!}x^n,\quad f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_n}{(n-2)!}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+2}}{n!}x^n.$$

由 $u_{n+1}=au_n+bu_{n-1},n=1,2,\cdots,\ \ u_0=0$ 得

$$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{au_{n+1}+bu_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{au_{n+1}}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{bu_n}{n!}x^n=af'(x)+bf(x)$$

由 $u_1=1$, 得 $f'(0)=1$. 所以 $f(x)$ 满足微分方程为

$$\begin{cases} f''(x)-af'(x)-bf(x)=0,\\ f(0)=0,f'(0)=1.\end{cases}$$

例题 1.15 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 满足 $\int_x^{x+f(x)}g(t-x)\mathrm{d}t=x^2\ln(1+x)$, 其中 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $f(x)$.

解 令 $u=t-x$, 则

$$\int_x^{x+f(x)}g(t-x)\mathrm{d}t=\int_0^{f(x)}g(u)\mathrm{d}u=x^2\ln(1+x).$$

由于 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 所以 $g(x)$ 是连续. 所以对上式两端关于 x 求导, 得

$$g(f(x))f'(x)=2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}.$$

即

$$f'(x)=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}.$$

又 $f(0)=0$, 所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x\left(2\ln(1+t)+\frac{t}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\&=2(\ln(1+x)+x\ln(1+x)-x)+x-\ln(1+x)\\&=\ln(1+x)+2x\ln(1+x)-x\end{aligned}$$

例题 1.16 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,(t>-1)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定, 且 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)}$, 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$ 在 $t=1$ 处相切, 求函数 $\psi(t)$.

解 由 $\begin{cases}x=2t+t^2,(t>-1)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 知,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{2+2t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3}.$$

又 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)}$, 所以

$$\frac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3}=\frac{3}{4(1+t)}.$$

即

$$\psi''(t)-\frac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t).$$

所以

$$\begin{aligned}\psi'(t)&=u=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t}\left(\int 3(1+t)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{C}_1\right)=(1+t)\left(3t+\mathrm{C}_1\right)\\\psi(t)&=\int(1+t)\left(3t+C_1\right)\mathrm{d}t=t^3+\frac{1}{2}\left(3+C_1\right)t^2+C_1t+C_2\end{aligned}$$

由曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$ 在 $t=1$ 处相切知, $\psi(1)=\frac{3}{2\mathrm{e}},\psi'(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$, 代人上两式得 $C_1=\frac{1}{\mathrm{e}}-3,C_2=2$, 于是

$$\psi(t)=t^3+\frac{1}{2\mathrm{e}}t^2+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-3\right)t+2,\quad t>-1.$$

例题 1.17 (2009 年, 初赛) 已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ (n 为正整数), 且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

解 对 $u_n'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$ 用一阶线性微分方程求解公式, 得

$$u_n(x)=\mathrm{e}^{\int 1\,\mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}e^x\mathrm{e}^{\int -1\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x(\frac{1}{n}x^n+C).$$

由 $u_n(1)=\mathrm{e}/n$, 所以

$$u_n(x)=\frac{1}{n}x^n\mathrm{e}^x.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x\ln(1-x),x\in[-1,1).$$

注 原方程也可以用观察法求解. 注意到

$$e^{-x}u_n'(x)=e^{-x}u_n(x)+x^{n-1}$$

令 $v_n=e^{-x}u_n(x)$, 则

$$v_n'=-e^{-x}u_n(x)+e^{-x}u_n'(x).$$

所以 $v_n'=x^{n-1}$, 故

$$u_n=e^xv_n=e^x(\frac{1}{n}x^n+C).$$

例题 1.18 (2019 年，初赛) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足

$$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2e^{-x^2},$$

且 $f(0)\leqslant 1$. 证明: 存在常数 $M>0$, 使得 $x\in[0,+\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明 由已知, 得

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{\left[1+f^2(x)\right]^2}{3+f^2(x)}e^{-x^2},$$

设 $y=f(x)$, 则 $y'>0$ （$x\in[0,+\infty)$）且

$$\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2}y'\leq\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}y'=\frac{2}{3}e^{-x^2},$$

即

$$\frac{1}{1+y^2}y'\leq\frac{2}{3}e^{-x^2},$$

所以

$$(\arctan y)'\leq\frac{2}{3}e^{-x^2}$$

对上式在 $[0,x]$ 上积分, 得

$$\arctan y-\arctan f(0)\leq\frac{2}{3}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

所以

$$\begin{aligned}\arctan y&<\frac{2}{3}\int_0^x e^{-x^2}dx+\arctan f(0)\\&\leq\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx+\arctan 1\end{aligned}$$

由此可知 y 有上界, 又 $y'>0$, 所以 y 单增, 必有下界.

例题 1.19 (2021 年, 初赛) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数, 证明: 方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数.

证明 对 $y''+14y'+13y=f(x)$ 有

$$y''+14y'+13y=(y'+13y)+y'+13y=f(x)$$

设 $u=y'+13y$, 则

$$u'+u=f(x)$$

对这个方程用求解公式,

$$u=e^{-x}(\int_0^x f(x)e^{-x}dx+C)$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(x)e^{-x}dx+C}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{-x}}{e^x}=0$$

所以 u 有界.

类似讨论 y 即可.