

1. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛  $\Leftrightarrow$  部分和数列  $\{S_n\}$  收敛

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$   $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  均收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (ku_n + lv_n)$  收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  发散

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \times$$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

4. 比较法. 正项  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ .

"大"收敛  $\Rightarrow$  "小"收敛

"小"发散  $\Rightarrow$  "大"发散.

5. 等比级数.  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n, |q| < 1$  收敛.

★  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ .  $\begin{cases} p \leq 1, & \text{发散} \\ p > 1, & \text{收敛} \end{cases}$

证明: 当  $p < 1$  时.  $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$

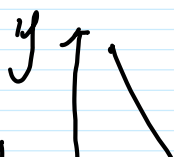
"大"发散  $\Leftarrow$  "小"发散

当  $p > 1$  时.

$$S_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$$

$$= 1 + S_{n-1}$$

$$\leq 1 + \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$



$p=2$ .

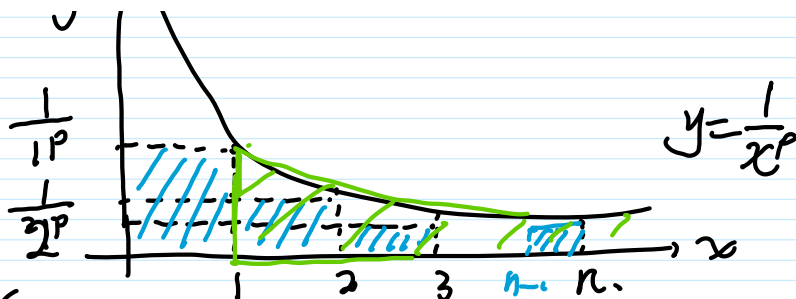
$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

"小"收敛  $\Leftarrow$  "大"收敛

$$\leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

$$= 1 + M.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$



例.

正项  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛.

解:

特例.  $a_n = \frac{1}{n^2}$

②  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  收敛  
 $a_n = \frac{1}{n^4}$   $\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \frac{1}{n^3}$

$$a_n^2 = \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n^2} = a_n$$

"小"收敛  $\Leftarrow$  "大"收敛

①

$$a_n a_n = a_n^2 \leq a_n$$

由收敛, 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

$\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时,  $a_n < 1$ , 则  $a_n^2 < a_n$ .

故由比较法可得收敛.

②  $\sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{a_n + \frac{1}{n^2}}{2}$

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

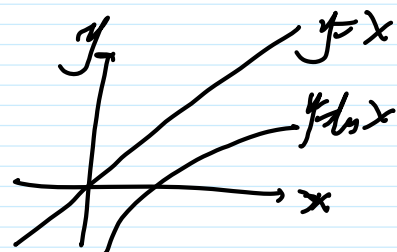
"小"收敛  $\Leftarrow$  "大"收敛

例

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$  收敛.

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$$



$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

"大" 发散.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$$

取  $\varepsilon = 1$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ 当 } n > N.$

$$\left| \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon.$$

$$\text{即 } \ln n < n^{\frac{1}{2}}.$$

$\exists N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时.}$

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

"小" 收敛  $\Leftarrow$  "大" 收敛

例.

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ , 当  $p > 1$  时, 收敛  
当  $p \leq 1$  时, 发散.

解: 当  $p=1$  时.  $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$

"大" 发散  $\Leftarrow$  "小" 发散

当  $p < 1$  时.  $\frac{\ln n}{n^p} \geq \frac{\ln n}{n}$

当  $p > 1$  时.

$$\frac{\ln n}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\alpha > 1.$

$$p = \alpha + r, (r > 0)$$

$$\frac{\ln n}{n^r} \cdot \frac{1}{n^2} \leq 1 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^r} = 0.$$

↑↑

$\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时,

$$\frac{\ln n}{n^r} \leq 1$$

★定理: 1. 比较法极限形式: 第11页定理之泰勒公式

正项  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  且  $v_n \neq 0$ .

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$   $l \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{l v_n} = 1 \Leftrightarrow u_n \sim l v_n$

(1) 当  $0 < l < +\infty$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  同敛散.  $u_n \sim l v_n$  ( $n \rightarrow \infty$ )

(2)  $l = 0$  时, 若  $v_n$  大  $v_n = \frac{1}{n^2}$   $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛

(3)  $l = +\infty$  时, 若  $v_n$  小  $v_n = \frac{1}{n^3}$   $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛

证明: (1) 取  $\varepsilon = \frac{l}{2}$   
 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时有

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \frac{l}{2} = l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon = \frac{3}{2}l.$$

$$\frac{l}{2} \cdot v_n < u_n < \frac{3}{2}l \cdot v_n.$$

★推论: 取  $v_n = \frac{1}{n^p}$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot u_n = l.$

例 (1)  $p > 1$  且  $t \in [0, +\infty)$

(2)  $p \leq 1$  且  $t \in (0, +\infty]$

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  收敛  
 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  发散.

例:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$  收敛.

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 0, \quad p = \frac{3}{2} > 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 0, \quad p = 1$

例.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  发散.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^p}$  当  $p > 1$  收敛  
当  $p \leq 1$  发散

解:  $\sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ .

$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ . 得与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  同敛散

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1, \quad \sin \frac{1}{n^p} \sim \frac{1}{n^p} \quad (n \rightarrow \infty)$

例.  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$  收敛.

$\arctan \frac{1}{2n^2} \sim \frac{1}{2n^2} \quad (n \rightarrow \infty)$ .

例. 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n})$  收敛.

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n}) = 0$ .

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n}) = 0.$

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x} = 0.$$

$p=1$ .  $1=0$ . 无法判断.

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n} &= \left( 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \\ &\quad - \left( 1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

原级数与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  同敛散. 得收敛.

★ 定理 (比值法/根值法).

正项  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . 且  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  或  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$

则. ①  $0 \leq \rho < 1$  时. 收敛.

②  $\rho > 1$  时. 发散.

③  $\rho = 1$  时. 无法判断.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛.

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1.$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1.$

$\exists N > 0, \forall n > N, \quad u_{n+1} > u_n$

$\dots > \dots > u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \dots > u_N \neq 0.$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq u_N \neq 0 \Rightarrow \text{发散},$