第三章 一元积分学

第二节 定积分计算及相关问题

一、定积分计算。

定积分与不定积分有着密切联系（牛顿－莱布尼兹定理揭示了其联系）。但两者是两个不同的概念，有很大的区别，从最后结果上看定积分是一个数值而不定积分是一个函数簇；定积分有明显的几何、物理等方面的实际意义，其内容非常丰富。我们首先要熟悉定积分的概念、性质、几何意义.重点要熟悉定积分的计算。定积分的计算方法也可分为基本方法和特殊方法。基本方法涉及牛－莱公式、换元法、分部法（简称为一式二法）.其基本步骤和思路与不定积分有很多相似的地方，比如恒等变形、一些常用的凑微分、换元和分部积分的典型类型和原则. 要注意与不定积分不一样的地方：定积分的结果与积分表达式中所用的符号（积分变量）无关而不定积分的结果必须是一簇以原积分变量为自变量的函数;定积分在换元时除了要换积分表达式，同时还要换积分上、下限;定积分的换元要符合换元公式的条件（否则就可能得出错误的结果）；周期函数、分段函数、奇偶函数等函数的定积分有其自身的特点，等等。特殊方法有: 裂项相消法、循环回归法（方程法）、配对法、递推法.

例1． 求下列定积分

(1) $\int_0^a \arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx$ (2) $\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^{10}}})\sqrt{1+\cos 2x}dx$

解(1)分析:思路一：被积函数中有比较复杂的因子$\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$不好直接处理，可试一下直接将此因子换成一个变量：$t=\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$。思路二：被积函数可视为两类不同函数：幂函数$x^0=1$和反三角函数$\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$的积，可试一试分部法，按不定积分中介绍的用分部法的原则应该是1与dx结合凑出$dv=dx$。思路三：将$\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$变形为$\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a+x}$，那么容易想到作三角代换：$x=a\cos t$. 思路四：被积表达式中有$\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$，可试一试换元$t=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$. 事实上以上几种思路都可行，下面给出按前两种思路的解答过程。

方法一：令$t=\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$，则$x=\dfrac{a(1-\tan^2 t)}{1+\tan^2 t}=a\cos 2t$，$x=0$时$t=\dfrac{\pi}{4}$，$x=a$时$t=0$，从而

$$\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^0 td(a\cos 2t)=-\int_0^{\frac{\pi}{4}} td(a\cos 2t)=-at\cos 2t\,|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\cos 2tdt=\frac{a}{2}$$

方法二：$\int_0^a \arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx=x\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\,|_0^a+\int_0^a \dfrac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^a\frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,|_0^a=\frac{a}{2}$$

（2）分析：首先可以看出积分区间是关于原点对称的区间，此时应先看一看被积函数有无奇偶性，本题中被积函数无奇偶性，而是一个奇函数与一个偶函数的和。下面给出解答过程.

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+\frac{x^3}{\sqrt{1+x^{10}}})\sqrt{1+\cos 2x}dx=2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2 x}dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=4\sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx)=8\sqrt{2}$$

注：本题的计算比较简单，但计算过程中涉及到定积分计算中的几个要注意的方面：（1）奇偶函数的积分的特点.（2）周期函数积分的特点，本题中有一步：$2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$，这是因为$|\cos x|$是周期为$\pi$的周期函数。

(3)本题还出现了$\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$,在不定积分中当出现$\sqrt{g^2(x)}$时可以按$\sqrt{g^2(x)}=g(x)$计算下去（虽不严谨，但不算错）. 但在定积分中要特别小心, 如果按$\sqrt{g^2(x)}=g(x)$计算下去很有可能得出错误结果。为避免这种错误，我们都按$\sqrt{g^2(x)}=|g(x)|$往下计算,当出现绝对值$|g(x)|$时我们要根据$g(x)$的正负情况将积分区间分段处理. 绝对值函数实际上属于分段函数，对于分段函数（$\min(f(x),g(x)),\max(f(x),g(x))$，$|f(x)|$都属于分段函数）都需分段处理.

关于周期函数的积分有以下结论:若 $f(x)$ 是周期为T 的可积的周期函数，则（i）$\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx$， (ii) $\int_0^{nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$，

（iii）$\int_0^x f(t)dt=G(x)+ax$,其中$G(x)$是周期为T 的周期函数，$a=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$，

（iv）$F(x)=\int_0^x f(x)dx$ 周期为T 的周期函数的充分必要条件是$\int_0^T f(x)dx=0$。

下面给出结论（iii）的证明：

令$G(x)=\int_0^x(f(t)-a)dt$，则

$$G(x+T)=\int_0^{x+T}(f(t)-a)dt=\int_0^x(f(t)-a)dt+\int_x^{x+T}(f(t)-a)dt$$

$$=\int_0^x(f(t)-a)dt+\int_0^T(f(t)-a)dt$$

$$=G(x)\text{，}$$

故$G(x)$是周期为T 的周期函数，且$\int_0^x f(t)dt=G(x)+ax$。

（iv）是（iii）的推论。（i）,(ii)的证明留给同学们完成。

例 2． 求下列定积分

（1）$\int_0^1 e^x \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx$ （2）$\int_1^e \sin(\ln x)dx$

(3) $\int_0^\pi \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

解：（1）$\int_0^1 e^x \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 e^x \frac{1-2x+x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 e^x \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 e^x \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}de^x - \int_0^1 e^x \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{e^x}{1+x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}de^x - \int_0^1 e^x \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{e}{2} - 1.$$

或： $\int_0^1 e^x \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 e^x \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^1 e^x d\frac{1}{1+x^2}$

$$= \int_0^1 e^x \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{e^x}{1+x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{e}{2} - 1。$$

（2）$I = \int_1^e \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x)dx$

$$= e\sin 1 - [x\cos(\ln x)\Big|_1^e + \int_1^e \sin(\ln x)dx]$$

$$= e\sin 1 - e\cos 1 + 1 - I$$

所以 $I = \frac{1}{2}(e\sin 1 - e\cos 1 + 1)$

（3）作换元 $x = \pi - t$， 则

$$I = \int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin^3 t}{1+\cos^2 t}(-dt) = \pi\int_0^\pi \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^\pi \frac{t\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^\pi \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt - I$$

从而 $I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}d(\cos t) = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$.

(4) 令 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$， $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$,则

$$I + J = \frac{\pi}{4}, I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x+\cos x}dx = \ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2,$$

所以 $I=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$.

注：不定积分中的裂项相消法、循环回归法（也叫方程法）、配对法等方法对定积分也适用．不定积分中一般通过分部积分达到“相消”或“回归”之目的. 在定积分中既可通过分部积分达到“相消”或“回归”之目的,也可通过换元达到“相消”或“回归”之目的. 本例之(1)是通过分部积分达到“相消”的目的. 本例之(2)是通过分部积分达到“回归”之目的. 本例之（3）是通过换元达到“回归”的目的. 通过分部积分达到“相消”或“回归”之目的的题目，在题目类型，解题思路及解题过程等方面和不定积分差不多。通过换元达到“相消”或“回归”之目的的题目大部分可归到“利用对称性计算定积分”的类型(利用对称性计算定积分在下面介绍).例如，本例(3)利用对称性可作如下解答(省去了换元这一步).

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}[\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^3(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx]$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dt=\frac{\pi}{2}(\pi-2).$$

利用对称性计算定积分

我们知道对于积分 $\int_{-a}^{a}f(x)dx$，当 $f(x)$ 具有奇偶性时，可以利用奇偶性简化计算．从几何上看这里有两个特点（1）积分区间的中点为 $x=0$，（2） $f(x)$ 为偶函数时，其图像关于直线 $x=0$ 对称，（3） $f(x)$ 为奇函数时，其图象关于原点 $(0,0)$ 对称．我们可以把以上特点和方法推广至一般的积分 $\int_a^b f(x)dx$，此积分区间的中点为 $x=\frac{a+b}{2}$.为此先介绍两个命题（其证明留在后面给出）：

命题 1： $\int_a^b f(x)dx=\int_0^{\frac{b-a}{2}}[f(\frac{a+b}{2}-x)+f(\frac{a+b}{2}+x)]dx$.

命题 2： $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{1}{2}[\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$.

由此得出几个有用的推论：

推论 1： $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$， $\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^a[f(x)+f(a-x)]dx$

推论 2：若 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2},0)$ 对称，即

$f(\frac{a+b}{2}-x)=-f(\frac{a+b}{2}+x)\,(x\in[0,\frac{b-a}{2}])$，或 $f(a+b-x)=-f(x)\,(x\in[a,b])$，

则 $\int_a^b f(x)dx=0$ (比如 $\int_0^{\pi}\cos xdx=0$).

推论 3：若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称，即

$f(\frac{a+b}{2}-x)=f(\frac{a+b}{2}+x)\ (x\in[0,\frac{b-a}{2}])$，或 $f(a+b-x)=f(x)\ (x\in[a,b])$，

则 $\int_a^b f(x)dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx=2\int_0^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}-x)dx$（比如 $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$）.

推论 4：如果 $f(\frac{a+b}{2}-x)+f(\frac{a+b}{2}+x)=l\ (x\in[0,\frac{b-a}{2}])$，

或 $f(a+b-x)+f(x)=l\ (x\in[a,b])$，

则 $\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}l$.（比如对于积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$，其中 $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$，由于 $f(x)+f(\frac{\pi}{2}-x)=1$，故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{4}$）

例 3．求下列定积分：

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx$　　(2) $\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx$　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\alpha} x}dx$

解:(1)分析:这个积分的上、下限的和为 $\frac{\pi}{2}$,而且被积函数中有 $\cos x$,试一试利用上面介绍的命题.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}[\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}+\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)2x}]dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x})dx=\frac{\ln 2}{\pi}.$$

(2)分析:被积函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(\pi-x)$,故 $\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}dx=0$

(3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln\sin x+\ln\sin(\frac{\pi}{2}-x)]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin 2x-\ln 2)dx$

$$=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2xdx=\frac{-\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln\sin tdt=\frac{-\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt$$

$$=\frac{-\pi\ln 2}{4}+\frac{I}{2}$$

所以 $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$

注：本题第一步用了命题 2，也用了: $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$，中间有一步换元：$t=2x$，最后达到循环回归的目的。也可以先用命题 1:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln\sin(\frac{\pi}{4}-x)+\ln\sin(\frac{\pi}{4}+x)]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln\sin(\frac{\pi}{4}-x)+\ln\cos(\frac{\pi}{4}-x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{2}-2x)dx-\frac{\pi}{4}\ln 2$$

令 $\frac{\pi}{2}-2x=t$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{2}-2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=\frac{1}{2}I$.

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}+\frac{1}{1+\tan^{\alpha}(\frac{\pi}{2}-x)}]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{4}$.

注：可以看出，以上例子利用“对称性”计算，非常快捷.但要注意的是:可以利用“对称性”计算的积分与积分区间及被积函数都有密切联系.一般表现为被积函数或被积函数的一部分在积分区间上有某种“对称性”，比如例 3 之(1)中被积函数的一部分: $\frac{1}{x(\pi-2x)}$ 关于积分区间具有对称性(积分区间的中点为 $x=\frac{\pi}{4}$,而 $y=\frac{1}{x(\pi-2x)}$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称),再比如例 3 之(4),被积函数 $f(x)=\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}$ 关于积分区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 有某种对称性: $f(x)+f(\frac{\pi}{2}-x)=1$. 利用“对称性”还可以证明一些定积分的不等式，例如：证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$。

证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x-\frac{\pi}{4})}{1+(\frac{\pi}{4}-x)^2}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4})}{1+(\frac{\pi}{4}+x)^2}]dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x[\frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}+x)^2}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}-x)^2}]dx\le 0。$$

或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}\right)dx$$

当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时, $\sin x-\cos x\le 0$, $\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}\ge 0$,从而

$$(\sin x-\cos x)\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}\right)\le 0\quad;$$

同样地当 $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 时,也有 $(\sin x-\cos x)\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}\right)\le 0$,

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}\right)dx\le 0$.

定积分计算还可以利用二重积分、递推等方法。

例 4．求下列定积分：

（1） $\int_0^1\frac{(x^b-x^a)\sin(\ln x)}{\ln x}dx\quad(b>a>0)$,

（2）设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0,\ f'(x)=\frac{\sin x}{\pi-x}$,求 $\int_0^{\pi}f(x)dx$ 。

（3） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nx dx$,（ n 为正整数）

解:（1）由于 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy$

$$\int_0^1\frac{(x^b-x^a)\sin(\ln x)}{\ln x}dx=\int_0^1[\sin(\ln x)\int_a^b x^y dy]dx=\int_a^b(\int_0^1 x^y\sin(\ln x)dx)dy$$

令 $x=e^t$ ，则 $\int_0^1 x^y\sin\ln x dx=\int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t}\sin t dt=-\frac{1}{1+(y+1)^2}$

所以 $\int_0^1\frac{(x^b-x^a)\sin\ln x}{\ln x}dx=\int_a^b\frac{-1}{1+(y+1)^2}dy=\arctan(a+1)-\arctan(b+1)$.

(本题实际上属广义积分)

（2）由题设知 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt$

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dtdx=\int_0^{\pi}\int_t^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}dxdt=\int_0^{\pi}\sin t dt=2$$

注：本题也可用分部法去解：$\int_0^{\pi} f(x)dx = xf(x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)dx$，后面的过程由学生自己完成。化为二重积分计算的两个关键步骤：（1）将被积函数或其中一部分表示为一个变限积分函数，（2）交换积分次序。

（3）$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d\sin nx = -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx d(\cos^n x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin nx \sin x dx$$

$$2I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x \cos nx + \cos^{n-1} x \sin nx \sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\cos x \cos nx + \sin x \sin nx)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(n-1)x dx = I_{n-1}$$

于是得 $I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$，结合 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos x dx = \frac{\pi}{4}$，

可得 $I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

例 5.

（1）设 $f(x)$ 连续，，且 $F'(x) = f(x), F(0) = 1, F(2) = 3, F'(2) = -2,$ 则 $\int_0^1 xf'(2x)dx =$ ____ 。

（2）已知 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(\pi) = 2, \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\sin x dx = 5$，则 $f(0) =$ ____ 。

（3）已知 $\int_a^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \frac{\pi}{6}$，则 $a =$ ____ 。

解：（1）令 $t = 2x$，则 $\int_0^1 xf'(2x)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^2 tdf(t) = \frac{1}{4}[tf(t)|_0^2 - \int_0^2 f(t)dt]$

$$= \frac{1}{4} \times 2f(2) - \frac{1}{4}F(t)|_0^2 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

下面解法错在哪里？$\int_0^1 xf'(2x)dx = \int_0^1 xdf(2x) = xf(2x)|_0^1 - \int_0^1 f(2x)dx = \cdots$.

（2）$\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\sin x dx = \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx + \int_0^{\pi} f''(x)\sin x dx$,

而

$$\int_0^{\pi} f''(x)\sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x df'(x) = -\int_0^{\pi} f'(x)\cos x dx$$

$$= -\int_0^{\pi} \cos x df(x) = f(0) + f(\pi) - \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx,$$

所以 $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\sin x dx = f(0) + f(\pi) = 2 + f(0) = 5 \Rightarrow f(0) = 3$

（3）方法一：令 $t = \sqrt{e^x - 1},$ 则 $x = \ln(1 + t^2), dx = \frac{2tdt}{1 + t^2}$

$$\int_a^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int_b^{\sqrt3}\frac{2}{1+t^2}dt=2(\arctan\sqrt3-\arctan b)=\frac{2\pi}{3}-2\arctan b$$，其中$b=\sqrt{e^a-1}$

由$\frac{2\pi}{3}-2\arctan b=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\arctan b=\frac{\pi}{4}\Rightarrow b=1\Rightarrow a=\ln 2$

方法二： $\int_a^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int_a^{2\ln 2}\frac{e^x}{e^x\sqrt{e^x-1}}dx=2\int_a^{2\ln 2}\frac{d(\sqrt{e^x-1})}{1+(\sqrt{e^x-1})^2}=\frac{2\pi}{3}-2\arctan\sqrt{e^a-1}$

注：方法一符合我们前面提到的思路：把复杂的因式设为一个变量。方法二也是常见的：当被积函数只是指数函数的函数$f(e^x)$时，总可以凑成$\int f(e^x)dx=\int\frac{f(e^x)}{e^x}de^x$，然后用换元等方法去解。

练习题:

1．求下列定积分：

（1）$\int_{-2}^{-\sqrt2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ （2）$\int_0^{100}(x-[x])dx$ （3）$\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$（n为正整数）

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$ （5）$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx$ （6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x dx$

（7）$\int_0^1\frac{\ln(1+x)dx}{(2-x)^2}$ （8）$\int_1^3 f(x-2)dx,\quad f(x)=\begin{cases}1+x^2,x<0\\ e^{-x},x\ge 0\end{cases}$

2．求下列定积分：

（1）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$ （2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$ （3）$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(e^{\cos x}-e^{-\cos x})dx$

（4）$\int_{-2}^{2}x\ln(1+e^x)dx$ （5）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}dx$ （6）$\int_0^1\frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx$

(7) $\int_{\frac12}^{2}(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$， (8)$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}$ ， (9)$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$，

(10) $\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}dx$， (11)$\int_0^{\pi}\frac{x^2\sin 2x\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{2x-\pi}dx$，

（12）$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$， （13）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$， （14）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$，

（15）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$， （16）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$， （17）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$，

（18）$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$。

3. 求下列定积分(n为正整数)

(1) $\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$， $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$ 。 (2) $\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$ 。

(3) $\int_0^{\pi}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx$， $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx$ 。

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}dx}{\ln n}$.

（5） $\int_0^{\pi}\cos^{2n-1}x\sin(2n+1)xdx$， $\int_0^{\pi}\sin^{2n-1}x\cos(2n+1)xdx$ 。

（6）利用例 4 的结果计算

$\int_0^{\pi}\sin^4 x\sin 4xdx$， $\int_0^{\pi}\sin^5 x\sin 5xdx$， $\int_0^{\pi}\sin^6 x\sin 6xdx$， $\int_0^{\pi}\sin^7 x\sin 7xdx$,

$\int_0^{\pi}\sin^4 x\cos 4xdx$， $\int_0^{\pi}\sin^5 x\cos 5xdx$.

4.计算 （1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx$，（2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\sin x})^2 dx$， （3） $\int_0^{+\infty}(\frac{\arctan x}{x})^3 dx$,

（4） $\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx$ （5） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\ln\sin xdx$ （6） $\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)dx$,

5.（1）求 $\int_0^1 x^2 f(x)dx,\ f(x)=\int_1^x\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

（2）设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0,\ f'(x)=\arcsin(x-1)^2$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$ 。

6．设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且满足 $f(x)=f(a-x),g(x)+g(a-x)=c$，证明：

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{c}{2}\int_0^a f(x)dx$$

7.（1）设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx$，试建立 I_n 的推递公式，并求 I_4 .

（2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos nxdx$， $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\sin nxdx$ 。

8．设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，试建立 I_n 的推递公式，并讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的收敛性。

9．设 $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$，求 $I_n,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n},\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}I_n$

10.设 $f(x)\geq 0$ 且在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且满足 $f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x$,求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值.

二：变限积分函数

变限积分函数也是函数，那么上一章中用导数讨论函数的有关问题和方法对变限积分函数同样适用，同样也存在求导、求极限、单调性、极值、最值、介值、泰勒展开等一系列问题，与微分方程问题也有联系．又由于变限积分函数是通过积分表达的，因此又有积分学的特点．我们首先熟悉两点：

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$．

进一步，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，在 $x_0\in[a,b]$ 处连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 x_0 处可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$．

（2）变限积分函数的求导公式：设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x),\psi(x)$ 连续可导，则

$(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$，$(\int_x^b f(t)dt)'=-f(x)$，$(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$，

$(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$．

例 6．（1）设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$，则 $F'(x)=$______，$F''(x)=$______．

（2）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\int_2^x[\int_t^2 e^{-u^2}du]dt}{(x-2)^2}=$______．

（3）设 $f(x)=x^2+x\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$______．

（4）设 $f(x)=x^2-2\int_0^x f(x)dx$，则 $f(x)=$______．

（5）设 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(xt)dt=f(x)+x\sin x$，且 $f(x)$ 可导，则 $x\neq0$ 时，$f'(x)=$_____．

(6)设 $a(x),b(x),c(x),d(x)$ 均为多项式，证明

$$\int_1^x a(t)b(t)dt\int_1^x b(t)d(t)dt-\int_1^x a(t)d(t)dt\int_1^x b(t)c(t)dt$$

能被 $(x-1)^4$ 整除。

解：（1）换元 $u=x-t$，那么

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt=\int_x^0(x-u)f(u)(-du)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

从而 $F'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du$，$F''(x)=f(x)$

注：遇到涉及积分变限函数的有关问题时，首先要分清楚积分变量和函数变量。对于函数 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,t)dt$ 的求导问题，被积函数中还有函数变量 x，常见的情形有两种：（1）$f(x,t)=h(x)g(t)$，此时 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,t)dt=h(x)\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} g(t)dt$；（2）如不属情形（1），则考

虑通过换元变成如下形式：

$$\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)dt \quad 或 \int_{a(x)}^{b(x)} g(t)h(x)dt = h(x)\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)dt$$

再求导。如不是这两种情况，还有一个求导公式：

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[\int_a^x f(x,t)dt] = f(x,x) + \int_a^x f_x'(x,t)dt 。$$

（2）用洛比达法则计算（涉及积分变限函数的未定式的极限，往往用洛比达法则）

$$\lim_{x\to 2}\frac{\int_2^x [\int_t^2 e^{-u^2}du]dt}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{\int_x^2 e^{-u^2}du}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-e^{-x^2}}{2} = -\frac{e^{-4}}{2}$$

（3）令 $c=\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=x^2+cx$，从而 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+cx)dx = \frac{1}{3}+\frac{c}{2}$

故 $c=\frac{1}{3}+\frac{c}{2} \Rightarrow c=\frac{2}{3} \Rightarrow f(x)=x^2+\frac{2x}{3}$

（4）两边求导得微分方程 $f'(x)=2x-2f(x)$，并且 $f(0)=0$，解此微分方程得

$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$。

注：注意（3），（4）的区别，（3）的题设中出现的积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 是一个常数。（4）中出现的积分 $\int_0^x f(x)dx$ 是一个函数，（4）是一个积分方程，对积分方程的求解，我们总是通过对方程两边求导以达到消掉积分的目的（必要时要对方程变形以方便求导和方便消去积分），从而得到一个微分方程，另外如能从原方程中找出初始条件，那么需求出微分方程的特解.

（5）令 $u=xt(x\neq 0)$，则 $\int_0^1 f(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，

故 $\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du = f(x)+x\sin x$，变形得

$\int_0^x f(u)du = xf(x)+x^2\sin x$，两边求导得

$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x$，从而得

$f'(x)=-2\sin x+x^2\cos x$。

注：本题可进一步求出 $f(x)$，但求不出特解.

（6）分析：$F(x)=\int_1^x a(t)b(t)dt\int_1^x b(t)d(t)dt-\int_1^x a(t)d(t)dt\int_1^x b(t)c(t)dt$ 是多项式，$F(x)$ 能被 $(x-1)^4$ 整除当且仅当 $F(1)=F'(1)=F''(1)=F'''(1)=0$。为此只需证明 $F(1)=F'(1)=F''(1)=F'''(1)=0$。证明过程同学们自己完成。

例 7．（1）$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{t}dt}{x}$；（2）设 $F(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt$，求 $F'(0)$。

解（1）分析：由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，因此不能用洛必塔法则。

$$\int_0^x \sin\frac{1}{t}dt=-\int_0^x t^2 d\cos\frac{1}{t}=-t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x+2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt=-x^2\cos\frac{1}{x}+2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{t}dt}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2\cos\frac{1}{x}+2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt}{x}=-\lim_{x\to 0^+}x\cos\frac{1}{x}+2\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt}{x}=0$$

（2）分析：$x\neq 0$ 时，$F'(x)=\cos\frac{1}{x}$，而由于被积函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续，不能套用前面的公式去求导．因此只能用导数定义 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$ 去求.

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt}{x}$$

$$\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt=-\int_0^x t^2 d(\sin\frac{1}{t})=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}dt$$

从而 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}dt}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}(-x\sin\frac{1}{x})+2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\sin\frac{1}{t}dt}{x}=2\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 8．设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且对 $\forall x\in[a,+\infty), f(x)\ge 0, f(x)\le\int_a^x f(t)dt$，证明：$f(x)=0, x\in[a,+\infty)$

方法一：分析：（若令 $F(x)=\int_a^x f(x)dx$，则有 $F(a)=0$，$F'(x)=f(x)$，$F'(x)-F(x)\le 0\Rightarrow[e^{-x}F(x)]'\le 0$，由此再想办法证得结论.)

证明：令 $F(x)=\int_a^x f(x)dx$，则有 $F(a)=0$, $F'(x)=f(x)$，令 $G(x)=e^{-x}F(x)$,

由题设有 $G'(x)=e^{-x}[F'(x)-F(x)]\le 0$

从而对 $\forall x\in[a,+\infty)$，$G(x)\le G(a)=0$，又由题意有 $G(x)\ge 0$,

所以对 $\forall x\in[a,+\infty)$，$G(x)=0$，即对 $\forall x\in[a,+\infty)$, $\int_a^x f(t)dt=0$,再由 $f(x)\ge 0$ 且连续得

$$f(x)=0, x\in[a,+\infty).$$

方法二：设 $f(x)$ 在 $[a,a+1]$ 上的最大值为 M ,由题设知 $M\ge 0$.又设 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,a+1]$ 上的最大值点,由题设有

$$M = f(x_0) \le \int_a^{x_0} f(x)dx,$$

若 $x_0 < a+1$,则由 $M \le (x_0 - a)M$,及 $M \ge 0$ 得 $M = 0$;

若 $x_0 = a+1$,则 $\int_a^{a+1}[f(x)-M]dx \ge 0$.由 $f(x) \le M$,及 $f(x)$ 连续知 $f(x) = M, x \in [a,a+1]$,又 $f(a) = 0$,故 $M = 0$.

因此对 $\forall x \in [a,a+1]$, $f(x) = 0$,

同样可得对 $\forall x \in [a+1,a+2]$, $f(x) = 0$,如此继续下去可得

$$f(x) = 0, x \in [a,+\infty).$$

（2019 年的一道考题与此题类似.设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微， $f(0) = 0$，且存在常数 $A > 0$，使得 $|f'(x)| \le A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，证明：在 $[0,+\infty)$ 上有 $f(x) \equiv 0$ 。

可用上题的证法二做。设 $|f(x)|$ 在 $[0,\frac{1}{2A}]$ 上的最大值为 M ,由题设知 $M \ge 0$.又设 x_0 为 $|f(x)|$ 在 $[0,\frac{1}{2A}]$ 上的最大值点,由题设有

$$M = |f(x_0) - f(0)| = |f'(\xi)|x_0 \le A|f(\xi)|x_0 \le \frac{1}{2}M$$，所以 $M = 0$ 。

还有一个类似的题：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\int_0^x f(t)dt$ 单调减少，证明： $f(x) \equiv 0$ 。

例 9 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负连续，且有

$$f(x) \le A + \int_0^x f(t)g(t)dt,$$

其中 $A > 0$ 为常数，证明 $f(x) \le A\exp(\int_0^x g(t)dt), x \ge 0$ 。

证明：由题设得

$$\frac{f(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} \le 1,$$

从而 $\dfrac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} \le g(x)$,

故对于 $x > 0$， $\int_0^x \dfrac{f(t)g(t)}{A + \int_0^t f(u)g(u)du} dt \le \int_0^x g(t)dt$，即得

$$\ln(A + \int_0^x f(u)g(u)du) - \ln A \le \int_0^x g(t)dt$$

所以 $A+\int_0^x f(u)g(u)du \le A\exp(\int_0^x g(t)dt)$,

结合题设有

$$f(x)\le A+\int_0^x f(t)g(t)dt \le A\exp(\int_0^x g(t)dt).$$

另解:令 $F(x)= A+\int_0^x f(t)g(t)dt$, 则 $F(0)=A$, $F'(x)= f(x)g(x)\le F(x)g(x)$,

从而 $\dfrac{d}{dx}[e^{-\int_0^x g(t)dt}F(x)]\le 0$,

所以对 $\forall x\ge 0$, 有 $e^{-\int_0^x g(t)dt}F(x)\le F(0)=A$, 即 $F(x)\le Ae^{\int_0^x g(t)dt}$

故 $f(x)\le F(x)\le A\exp(\int_0^x g(t)dt)$.

注:本题两种做法本质上没有区别,只是一个利用积分,一个利用导数.本题的更一般化有两种形:

（1）设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负连续，且有

$$f(x)\le A+B\int_0^x f(t)g(t)dt,$$

其中 $A>0$， $B>0$ 为常数，证明 $f(x)\le A\exp(B\int_0^x g(t)dt), x\ge 0$；

（2）设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且有

$$|f(x)|\le A+B\int_0^x |f(t)g(t)|dt,$$

其中 $A>0$， $B>0$ 为常数，证明 $|f(x)|\le A\exp(B\int_0^x |g(t)|dt), x\ge 0$。也可以把区间 $[0,+\infty)$ 改成别的区间,比如 $[a,+\infty)$, $[a,b]$ 等.

类似的题：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上正值连续，且有

$$f^2(x)\leqslant 1+2\int_0^x f(t)dt,$$

证明： $f(x)\leqslant 1+x$。

证明方法与前面例题相似：

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}}\leqslant 1\Rightarrow \int_0^x \frac{f(u)}{\sqrt{1+2\int_0^u f(t)dt}}du\leqslant x\Rightarrow \sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}-1\leqslant x\Rightarrow \sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}\leqslant 1+x,$$

所以 $f(x)\leqslant \sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}\leqslant 1+x$。

或

令 $F(x)=\sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}$,则 $F(0)=1$, $F'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+2\int_0^x f(t)dt}}\leqslant 1$,从而

$F(x)=F(0)+\int_0^x F'(t)dt\leqslant 1+x$，故 $f(x)\leqslant F(x)\leqslant 1+x$。

练习题:

11.（1）设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln u}{1+u}du$，则 $f(x)+f(\frac{1}{x})=$______.

（2）设 $f(x)$ 有一阶连续导数，$x\to 0$ 时，$\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)dt$ 的导数与 x^2 为等价无穷小，则 $f'(0)=$______.

（3）$f(x)=\int_0^1 t\,|t-x|\,dt$ 的最小值点为_________．最小值为_________。

（4）设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$，$f(1)=\frac{1}{2}$，则 $\int_1^2 f(x)dx=$______.

（5）$x\to 0$ 时，$\int_0^x \arcsin t^2 dt$ 是关于 x 的______阶无穷小；$\int_0^{x^2}\arcsin t dt$ 是关于 x 的______阶无穷小.

（6）设 $f(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt}{x^{2n}}=$___.

12．设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,du$，(i)证明 $f(x)$ 为周期函数；(ii)求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

13.设 $f(x)$ 连续可导,且 $f(0)=0$,令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$$

(1)求 $F'(0)$,(2)证明 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

14．设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$ 单调减少，证明：$f(x)=0, x\in(-\infty,+\infty)$.

15.设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续,且对于任意正数 a,b ,积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值只与 $\frac{b}{a}$ 有关,且 $f(1)=1$,求 $f(x)$ $(0<x<+\infty)$.

16.设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续,且 $f(1)=3$, $\int_1^{xy} f(t)dt=x\int_1^y f(t)+y\int_1^x f(t)dt$,求 $f(x)$.

三：积分等式的证明

例 10．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明：

（1）$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{\frac{b-a}{2}}[f(\frac{a+b}{2}-x)+f(\frac{a+b}{2}+x)]dx$

（2） $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{2}[\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx$

证：（1） $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$，

换元 $x = \frac{a+b}{2} - t$，得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{b-a}{2}}^0 f(\frac{a+b}{2}-t)(-dt) = \int_0^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}-t)dt = \int_0^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}-x)dx$$

同样地，换元 $x = \frac{a+b}{2} + t$，得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = \int_0^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}+t)dt = \int_0^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}+x)dx$$

所以 $\int_a^b f(x)dx = \int_0^{\frac{b-a}{2}} [f(\frac{a+b}{2}-x)+f(\frac{a+b}{2}+x)]dx$

（2） $I = \int_a^b f(x)dx$，换元 $x = a+b-t$，得

$$I = \int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$2I = \int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx$$

命题得证.

例11．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，证明：

（1） $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$；

（2） $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f''(x)(x-a)^2dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f''(x)(x-b)^2dx$。

证明：（1） $\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx = \int_a^b (x-a)(x-b)df'(x) = -\int_a^b f'(x)(2x-a-b)dx$

$$= -\int_a^b (2x-a-b)df(x) = -(b-a)(f(a)+f(b)) + 2\int_a^b f(x)dx$$

从而得结论.

注：本题也可左边推出右边，同学们去试一试.（2）的证明留给同学们去完成. 这两个结论与后面几个题目有联系.

总结：这类问题的解决主要用分部、换元及积分区间的分段等方法（比如练习题 17），另外也可使用导数证明恒等式的方法去证明积分恒等式（比如练习题 20 的解法一）。

例 12. 证明 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \frac{1}{k+n+1}$，并求 $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \frac{1}{k+n+1}$.

证明： 因为$\dfrac{1}{k+m+1}=\int_0^1 x^{k+m}dx$，所以

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{k+m+1}=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{k+m}dx=\int_0^1 x^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k dx=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx,$$

同样可得 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \frac{1}{k+n+1}=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$，

对积分$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$作换元$x=1-t$，得$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx=\int_0^1 t^m(1-t)^n dt=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$，

所以 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \frac{1}{k+n+1}$。

下面用推递法求积分 $I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$，

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{1}{m+1}\int_0^1(1-x)^n dx^{m+1}=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1},$$

由此推递式可得

$$I_{m,n}=\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}I_{m+2,n-2}=\cdots=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}I_{m+n,0}$$

$$=\frac{n!}{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)}\int_0^1 x^{m+n}dx=\frac{n!m!}{(m+n+1)!},$$

即$\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \frac{1}{k+n+1}=\frac{n!m!}{(m+n+1)!}$

练习题：

17．设$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续，且$f(\dfrac{a^2}{x})=f(x)$，$a>0$为常数，试证：

（1）$\displaystyle\int_a^{a^2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$

（2）$\displaystyle\int_1^a\frac{f(x^2)}{x}dx=\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$

（3）$\displaystyle\int_1^a g(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}dx=\int_1^a g(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$，其中$g(x)$为连续函数.

18. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(\dfrac{ab}{x})=f(x)$，$a>0$为常数，试证：

$$\int_a^b\frac{f(x)\ln x}{x}dx=\frac{\ln(ab)}{2}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$$

19．设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin 2x)\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2 x)\cos x dx$.

20．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导，且 $f(0)=0, f'(x)>0$，$y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，证明：

(I) $\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} g(x)dx = a\ f(a)\,, a>0$;

(II) $ab \le \int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(x)dx \le bg(b)+af(a)-f(a)g(b)\,, a>0, b>0$.

21. 证明: (1) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, (2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}C_n^k = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

((1) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k x^{k-1} = \frac{1-(1-x)^n}{x}$,而 $\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx \overset{t=1-x}{=} \int_0^1\frac{1-t^n}{1-t}dt = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

(2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k} = (1-x^2)^n, \int_0^1(1-x^2)^n dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}xdx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$)

四：涉及定积分的介值问题

例 1 3．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，不恒为常数，且 $f(a)=f(b)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\int_a^{\xi} f(x)dx = (\xi-a)f(\xi)$

证明：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(x)$，则 $F(b)=\int_a^b f(t)dt-(b-a)f(b)$

$=\int_a^b(f(t)-f(b))dt>0$

又由题设知 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\max f(x)>f(a)$

所以 $F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt-(x_0-a)f(x_0)=\int_a^{x_0}(f(t)-f(x_0))dt<0$，

由连续函数的零点存在定理，知 $\exists\xi(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即得结论.

例 14．设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0, \int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$,证明：在 $(0,\pi)$ 内存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

证明:（证法一：用罗尔定理）令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F'(x)=f(x)$，$F(0)=F(\pi)=0$

又 $0=\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos xdF(x)=\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx$

从而知 $\exists x_0\in(0,\pi)$，使得 $F(x_0)\sin x_0=0$，又 $\sin x_0\ne 0$,从而 $F(x_0)=0$.

由罗尔定理知 $\xi_1\in(0,x_0),\xi_2\in(x_0,\pi)$，使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证法二：（用反证法）由$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ 知$\exists x_0 \in (0,\pi)$，使得$f(x_0)=0$

若$f(x)$在$(0,\pi)$内只有这个零点，则由连续函数性质知$f(x)$在$(0,x_0)$与(x_0,π)必定异号，又

$\cos x - \cos x_0$在$(0,x_0)$与(x_0,π)异号，从而$f(x)(\cos x-\cos x_0)$在$(0,x_0)$与(x_0,π)同号．故

必有$\int_0^{\pi} f(x)(\cos x - \cos x_0)dx \neq 0$，

又由题设知 $\int_0^{\pi} f(x)(\cos x-\cos x_0)dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx - \cos x_0 \int_0^{\pi} f(x)dx = 0$

于是得出矛盾，所以$f(x)$在$(0,\pi)$内至少有两个零点．即得结论．

总结：这类问题的解决主要用连续函数的介值性质、微分中值定理、泰勒公式(可对被积函数用微分中值定理或泰勒公式，也可对积分变限函数用微分中值定理或泰勒公式）及积分中值定理。在教材里面介绍的积分中值定理的结论是这样的：$\exists \xi \in [a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$。

而事实上该可改为：$\exists \xi \in (a,b)$，使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$，用拉氏微分中值定理很容易证明该结论。以上结论的前提条件是$f(x)$在$[a,b]$上连续.

练习题：

22．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且严格单调增加，证明：存在唯一的$\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b-\xi)$$

23．设$f(x)$在$[0,1]$上正值连续，证明：

（1）存在唯一的$a \in (0,1)$，使得 $\int_0^a f(x)dx = \int_a^1 \frac{1}{f(x)}dx$;

（2）对任意整数$n \geq 2$，存在唯一的$x_n \in (0,1)$，使得 $\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)}dx$，且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

24．设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = 0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$,

证明：在$(0,\pi)$内存在两个不同的点ξ_1, ξ_2，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

25．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx = 0, \int_a^b f(x)xdx = 0$,

证明：$f(x)$在(a,b)内至少存在2个不同的零点.

26．设$f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可导，证明：存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})=\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$$

27. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2}[b^2 f'(b)-a^2 f'(a)]+\frac{f''(\xi)(b^3-a^3)}{6}$$

28．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶连续可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)}{2}(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

五：与定积分有关的极限

例 15．设 $f(x),g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续正值函数，令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x),d_n=\int_a^b g(x)[f(x)]^n dx$，

证明：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}=M$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=M$.

证明：（1）$\sqrt[n]{d_n}\le M[\int_a^b g(x)dx]^{\frac{1}{n}}\to M$

另一面，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $f(x)\ge M-\varepsilon,x\in[\alpha,\beta]$，因此

$$\sqrt[n]{d_n}\ge[\int_\alpha^\beta g(x)f^n(x)dx]^{\frac{1}{n}}\ge(M-\varepsilon)[\int_\alpha^\beta g(x)dx]^{\frac{1}{n}}\to M-\varepsilon$$

综上得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}=M$

（2）(分析:先介绍一个命题:设 $a_n>0$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

那么如能证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 存在，则由上面命题及（1）便知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=M$)

$$d_n^2=[\int_a^b\sqrt{g(x)f^{n-1}(x)}\sqrt{g(x)f^{n+1}(x)}dx]^2\le\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)dx\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)dx=d_{n-1}d_{n+1}$$

故有 $\frac{d_n}{d_{n-1}}\le\frac{d_{n+1}}{d_n}$,即 $\{\frac{d_n}{d_{n-1}}\}$ 单调增加.

又 $d_n=\int_a^b g(x)[f(x)]^n dx\le M\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)dx=Md_{n-1}\Rightarrow\frac{d_n}{d_{n-1}}\le M$,即 $\{\frac{d_n}{d_{n-1}}\}$ 有界,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 存在,再由(1)知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=M$.

注：取 $g(x)=1$，便得 $[\int_a^b f^n(x)dx]^{\frac{1}{n}} \to M$ 。

例 16．设 $f(x),g(x)$ 为 $[0,T]$ 上的连续， $g(x)$ 为周期为 T 的周期函数且 $g(x)\ge 0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx\int_0^T g(x)dx.$$

证明： $g(nx)$ 为周期为 $\frac{T}{n}$ 的周期函数，记 $c=\int_0^T g(x)dx$，那么 $\int_{\frac{i-1}{n}T}^{\frac{i}{n}T} g(nx)dx=\frac{c}{n}, i=1,2,\cdots,n$

$$\int_0^T f(x)g(nx)dx=\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}T}^{\frac{i}{n}T} f(x)g(nx)dx=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\int_{\frac{i-1}{n}T}^{\frac{i}{n}T} g(nx)dx=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\frac{c}{n}$$

$$=\frac{c}{T}\sum_{i=1}^n\frac{T}{n}f(\xi_i)\to\frac{c}{T}\int_0^T f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_0^T f(x)dx.$$

例 17．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数， $A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(a+\frac{i}{n}(b-a))-\int_a^b f(x)dx$，求

$\lim_{n\to\infty} nA_n$.

分析：显然 A_n 是用小矩形面积之和去近似定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 时的误差,易见 $A_n\to 0$,即 A_n 为无穷小，本题就是讨论误差的阶的问题.

解： $A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(a+\frac{i}{n}(b-a))-\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^n\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}[f(a+\frac{i}{n}(b-a))-f(x)]dx$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f'(\xi_i)(a+\frac{b-a}{n}i-x)dx$$

记 $M_i=\max_{x\in I_i} f'(x)$， $m_i=\min_{x\in I_i} f'(x)$，其中区间 $I_i=[a+\frac{i-1}{n}(b-a),a+\frac{i}{n}(b-a)]$，

则有 $\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n\frac{b-a}{n}m_i\le nA_n\le\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n\frac{b-a}{n}M_i$

而 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i-1}^n\frac{b-a}{n}m_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{b-a}{n}M_i=\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$

所以 $\lim_{n\to\infty} nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$.

练习题：

29．求（1） $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin x|dx$.

（2） $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx$, $f(x)$ 连续且 $f(1)=1$.

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(1)=0$，$f'(1)\neq 0$，确定 k，使得 $\int_0^1 x^n f(x)dx$ 与 $\frac{1}{n^k}$ 为同阶无穷小量.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx$，$f(x)$ 连续.

第 3 届决赛的一道题：（1）求解微分方程 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}-xy=xe^{x^2},\\ y(0)=1.\end{cases}$（2）设 $y=f(x)$ 是上述方程的解，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{2}$.

30．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\ln(1+x)|\sin nx|dx$.

31．设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续，且严格单调增加，由积分中定理知存在 $x_n\in[a,b]$，使得

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$

32．设 $A_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，求：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n(\ln 2-A_n)$.

33.(1)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，记 $B_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{2i-1}{2n}(b-a))$，

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}n^2B_n=\frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$.

(2) 设 $A_n=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\cdots+\frac{2}{4n-1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\ln 2-A_n)$.

六：从积分中提取信息

例 18．设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{x-1}f(x)dx$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

分析：这是介值问题，首先要作辅导函数，根据题设及欲证的结论容易想到辅导函数：$F(x)=e^{x-1}f(x)$，题设中通过积分给了我们信息，由积分中值定理知 $f(1)=e^{x_0-1}f(x_0)$，从而 $F(x_0)=F(1)$，在 $[x_0,1]$ 对 $F(x)$ 用罗尔定理便可得结论。证明过程略。

例 19．设 $f(x)$ 为$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 x^2 f(x)dx = 1$，

（1） 证明：$\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq 3$;

（2） 又若$\int_0^1 xf(x)dx = 0$，证明：$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) \geq 3(2+\sqrt{2})$.

证明：（1）记$M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$，则$|\int_0^1 x^2 f(x)dx| \leq \int_0^1 x^2 |f(x)| dx \leq M\int_0^1 x^2 dx = \frac{M}{3}$.

由题设 $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 1$，可得$\frac{M}{3} \geq 1 \Rightarrow M \geq 3$

（2） 由题设可得 对任意实数a ，有 $\int_0^1 x(x-a)f(x)dx = 1$。

记$M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$，那么 $1 = |\int_0^1 x(x-a)f(x)dx| \leq M\int_0^1 x|x-a|dx$

当$0 \leq a \leq 1$时，$\int_0^1 x|x-a|dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$,

即对$\forall a \in [0,1]$，有$M(\frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}) \geq 1$，取$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$，可得$\frac{2-\sqrt{2}}{6}M \geq 1 \Rightarrow M \geq 3(2+\sqrt{2})$.

例 20．设 $f(x)$ 为$[-a,b](a>0,b>0)$上的非负连续，且$\int_{-a}^b x\ f(x)dx = 0$，证明：

$\int_{-a}^b x^2 f(x)dx \leq ab\int_{-a}^b f(x)dx$.

分析：条件$\int_{-a}^b x\ f(x)dx = 0$该怎么用？先看欲证的结论

$$\int_{-a}^b x^2 f(x)dx \leq ab\int_{-a}^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-a}^b (x^2 - ab)f(x)dx \leq 0.$$

再由条件$\int_{-a}^b x\ f(x)dx = 0$，可知对任意实数$c$

$$\int_{-a}^b (x^2 - ab)f(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_{-a}^b (x^2 + cx - ab)f(x)dx \leq 0,$$

取一个适当的c，使得$x^2 + cx - ab = (x+a)(x-b)$，就会有

$(x^2 + cx - ab)f(x) = (x+a)(x-b)f(x) \leq 0, x \in [-a,b]$，结论就出来了。

证明：由题设知

$$\int_{-a}^b (x^2 - ab)f(x)dx = \int_{-a}^b (x+a)(x-b)f(x)dx,$$

又由题设知，当$x \in [-a,b]$时，$(x+a)(x-b)f(x) \leq 0$,

所以 $\int_{-a}^b (x^2 - ab)f(x)dx = \int_{-a}^b (x+a)(x-b)f(x)dx \leq 0 \Rightarrow \int_{-a}^b x^2 f(x)dx \leq ab\int_{-a}^b f(x)dx$。

例 21 设函数 $f(x)$ 为正值连续函数，且满足对任意实数t，有$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-x|} f(x)dx \le 1$，证明

$$\int_a^b f(x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)+1.$$

证明 由题设有

$$\int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dx \le 1,$$

从而

$$\int_a^b \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dxdt \le b-a \text{。}$$

又由于

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dxdt &= \int_a^b \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dtdx \\ &= \int_a^b [\int_a^x e^{t-x} f(x)dt + \int_x^b e^{-t+x} f(x)dt]dx \\ &= \int_a^b [e^{-x} f(x)(e^x - e^a) + e^x f(x)(e^{-x} - e^{-b})]dx \\ &= \int_a^b [2f(x) - e^{a-x} f(x) - e^{x-b} f(x)]dx \\ &= 2\int_a^b f(x)dx - \int_a^b e^{-|a-x|} f(x)dx - \int_a^b e^{-|b-x|} f(x)dx \text{。}\end{aligned}$$

所以

$$2\int_a^b f(x)dx - \int_a^b e^{-|a-x|} f(x)dx - \int_a^b e^{-|b-x|} f(x)dx \le b-a$$

即

$$2\int_a^b f(x)dx \le b-a + \int_a^b e^{-|a-x|} f(x)dx + \int_a^b e^{-|b-x|} f(x)dx,$$

由题设知

$$\int_a^b e^{-|a-x|} f(x)dx \le 1$$

$$\int_a^b e^{-|b-x|} f(x)dx \le 1$$

故有

$$\int_a^b f(x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)+1 \text{。}$$

练习题：

34．设 $f(x)$ 为$[0,1]$上可导，且 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2} f(x)dx$，证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得

$$f'(\xi) = 2\xi f(\xi) \text{。}$$

35．设 $f(x)$ 为$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \cdots = \int_0^1 x^{n-1} f(x)dx = 0$，

$\int_0^1 x^n f(x)dx = 1$，证明：$\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq 2^n(n+1)$

第 7 届初赛的一道题：设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$，$\int_0^1 xf(x)dx = 1$，证明：

（1）存在 $x_0 \in [0,1]$，使得 $|f(x_0)| > 4$；

（2）存在 $x_1 \in [0,1]$，使得 $|f(x_1)| = 4$。

36．设 $f(x)$ 为 $[-1,1]$ 上可导，$|f'(x)| \leq M$，且存在 $a \in (0,1)$，满足 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$，证明：$|\int_{-1}^{1} f(x)dx| \leq M(1-a^2)$

37．设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)| \leq M$，$\int_a^b f(x)dx = 0$，记 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

（1）证明：对 $\forall x \in [a,b]$，有 $|F(x)| \leq \dfrac{M(b-a)^2}{8}$；

（2）又若 $f(a) = f(b) = 0$，证明：对 $\forall x \in [a,b]$，有 $|F(x)| \leq \dfrac{M(b-a)^2}{16}$。

38. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若对满足 $\int_a^b g(x)dx = 0$ 的任一连续函数 $g(x)$，均有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数。

39.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $\int_0^1 f(x)dx = 1$,求 $I = \int_0^1 (1+x^2) f^2(x)dx$ 的最小值.

40.设 $P(x)$ 是 n 次多项式,且 $\int_0^1 x^k P(x)dx = 0\ (k = 1,2,\cdots,n)$,试证明:

$$\int_0^1 P^2(x)dx = (n+1)^2\left(\int_0^1 P(x)dx\right)^2。$$

答案或提示

1． （1）$-\dfrac{\pi}{12}$（小心：很容易出现错误答案 $\dfrac{\pi}{12}$），（2）（注意到 $f(x) = x - [x]$ 是周期为 1 的周期函数）50，（3）方法一：$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x|\sin x|dx$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (t+k\pi)\sin t dt = n\int_0^{\pi} t\sin t dt + \frac{n(n-1)\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t dt = n^2\pi。$$

方法二：$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \dfrac{1}{2}\int_0^{n\pi} [x|\sin x| + (n\pi - x)|\sin(n\pi - x)|]dx$

$$=\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin x|dx=\frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin xdx=n^2\pi$$

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{4}-t}{\cos^2 t}dt=\cdots=\frac{\ln 2}{4}$ 。

（5）作换元$t=\sqrt{1-e^{-2x}}$， $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$，

（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xd\cos x$，用分部法， $\ln 2-1$，

（7）用分部法， $\frac{\ln 2}{3}$ 。

（8）$\int_1^3 f(x-2)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt\cdots=\frac{7}{3}-e^{-1}$

2． （1）（用对称性）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos^2 x}{1+e^{x}}]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ 。

（2）（用对称性）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(1+\tan x)+\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))]dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(1+\tan x)+\ln(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x})]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

（3）（用对称性）$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(e^{\cos x}-e^{-\cos x})dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(e^{\cos x}-e^{-\cos x}+(e^{\cos(\pi-x)}-e^{-\cos(\pi-x)}))dx=0$；

或作换元$t=\cos x$，然后由奇偶性得结果。

（4）（用对称性）$\int_{-2}^{2}x\ln(1+e^x)dx=\int_0^2[x\ln(1+e^x)-x\ln(1+e^{-x})]dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$ 。

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\frac{x}{2}}d\sqrt{\cos x}=2^{\frac{3}{4}}e^{\frac{\pi}{8}}-2$ 。

(6) $\int_0^1\frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1[\frac{x}{e^x+e^{1-x}}+\frac{1-x}{e^{1-x}+e^x}]dx=\frac{1}{2\sqrt{e}}(\arctan\sqrt{e}-\arctan\frac{1}{\sqrt{e}})$ 。

(7) $\int_{\frac{1}{2}}^2(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^2 x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\cdots=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$

(8) $\int_{-1}^1\frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}=\int_0^1[\frac{1}{(1+e^x)(1+x^2)}+\frac{1}{(1+e^{-x})(1+x^2)}]dx=\frac{\pi}{4}.$

(9)方法一:作换元 $x=\tan t$,利用习题(2),得答案 $\frac{\pi}{8}\ln 2$;方法二:作换元 $x=\frac{1-t}{1+t}$ ，则

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$,从而 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

(10)方法一: $\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}dx=\int_0^1\arctan x d\ln(1+x)=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$;

方法二:作换元 $x=\frac{1-t}{1+t}$, $\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}dx=\int_0^1\frac{\arctan\frac{1-t}{1+t}}{1+t}dt$,注意到 $\arctan\frac{1-t}{1+t}=\frac{\pi}{4}-\arctan t$ 便可得结果.

(11).

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x^2\sin 2x\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{2x-\pi}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\frac{x^2\sin 2x\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{2x-\pi}+\frac{(\pi-x)^2\sin 2(\pi-x)\sin(\frac{\pi}{2}\cos(\pi-x))}{\pi-2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\pi\ (2x-\pi)\sin 2x\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{2x-\pi}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)dx$$

$$=-2\int_0^{\pi}\cos x\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)d(\frac{\pi}{2}\cos x)$$

令 $t=\frac{\pi}{2}\cos x$,则 $I=\frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt\ \ I=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt=\frac{8}{\pi}$.

（12）（用对称性）

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot(\arctan e^x+\arctan e^{-x})}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}(\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)})dx$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}[-\arctan\cos x)|_0^{\pi}]=\frac{\pi^3}{8}$$ 。

（13） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\sin x\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{\tan^2 x-\tan x+1}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2-t+1}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\frac{3}{4}+(t-\frac{1}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{6}))=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$ 。

或

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\sin x\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{2-\sin 2x}dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2-\sin t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2-\sin t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+\sin t}{4-\sin^2 t}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d\tan t}{4+3\tan^2 t}dt+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{3+\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}[\arctan(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi\,.$$

（14）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sin x+\cos x)(3-(\sin x+\cos x)^2)}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})(3-2\cos^2(x-\frac{\pi}{4}))}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t(3-2\cos^2 t)}dt=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t(3-2\cos^2 t)}dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin t}{\cos^2 t(3-2\cos^2 t)}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{(1-u^2)(1+2u^2)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{1-u^2}+\frac{2}{1+2u^2})du$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}})=\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\pi}{6}\text{。}$$

（15）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\tan^4 x+1}d\tan x=\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1/t^2+1}{1/t^2+t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{d(t-1/t)}{(t-1/t)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t-1/t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}))=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\text{。}$$

或

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\int_0^{\pi}\frac{dt}{2-\sin^2 t}=2\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{2-\sin^2 t}$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\tan t}{2+\tan^2 t}=\sqrt{2}\arctan\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\text{。}$$

（16）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$。

（17）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\frac{\pi}{4}$。

（18）$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\sin^4(\frac{\pi}{2}-x)+\cos^4(\frac{\pi}{2}-x)}+\frac{1}{\sin^4(\frac{\pi}{2}+x)+\cos^4(\frac{\pi}{2}+x)})dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\sqrt{2}\pi\,.$$

实际上，由于$\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$是$\sin x$的函数（注意：$\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$在$[0,\pi]$上不是$\sin x$的函数），由对称性立即可得到

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx\text{。}$$

3.

(1)方法一

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\frac{\sin 2nx}{\sin x}+\frac{\sin 2n(\pi-x)}{\sin(\pi-x)}]dx=0,$$

或$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\sin 2n(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}+\frac{\sin 2n(\frac{\pi}{2}+x)}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}]dx=0$。

方法二：利用等式$\frac{\sin 2nx}{\sin x}=2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$可得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos(2k-1)xdx=0。$$

（等式$\frac{\sin 2nx}{\sin x}=2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$的证明：

$$\begin{aligned}\sin 2nx&=\sin 2nx-\sin(2n-2)x+\sin(2n-2)x-\sin(2n-4)x+\cdots+\sin 4x-\sin 2x+\sin 2x\\&=2\cos(2n-1)x\sin x+2\cos(2n-3)x\sin x+\cdots+2\cos 3x\sin x+2\cos x\sin x,\end{aligned}$$

得

$$\frac{\sin 2nx}{\sin x}=\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x\ =2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x。$$

或由

$$\sin x\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\sum_{k=1}^{n}\sin x\cdot\cos(2k-1)x$$

得$\frac{\sin 2nx}{\sin x}=2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$）

方法三：（先建立递推式）

由$\sin 2nx=\sin x\cos(2n-1)x+\sin(2n-1)x\cos x$

$$=\sin x\cos(2n-1)x+\frac{1}{2}(\sin 2nx+\sin(2n-2)x)$$

得

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\cos(2n-1)x}{\sin x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-2)x}{\sin x}dx=\frac{1}{2}(I_n+I_{n-1}),$$

从而$I_n=I_{n-1}=\cdots=I_1=0$。

或$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx-\sin(2n-2)x}{\sin x}dx=2\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n-1)x\sin x}{\sin x}dx=0$

所以$I_n=I_{n-1}=\cdots=I_1=0$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$的计算不可用方法一，可用方法二和三。

利用等式$\frac{\sin 2nx}{\sin x}=2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=2(1-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1})。$$

或由递推式 $I_n=\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}+I_{n-1}$ 得结果。

进一步的问题：求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$.为此需求级数 $1-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和,下面求此级数的和.令

$$s(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots,-1\leqslant x\leqslant 1,$$

则 $s(0)=0$ ， $s'(x)=1-x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\cdots=\frac{1}{1+x^2}(-1<x<1)$ ，故

$$s(x)=s(0)+\int_0^x s'(t)dt=\arctan x,-1\leqslant x\leqslant 1,$$

（注意：尽管级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ 在 $x=-1$ ， $x=1$ 处发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 在 $x=-1$ ， $x=1$ 处收敛，且其和函数 $s(x)$ 在 $x=-1$ ， $x=1$ 处单侧连续，因此 $s(1)=\lim_{x\to 1^-}s(x)$ ）

所以

$$s(1)=\frac{\pi}{4}$$

即得 $1-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}$ ，因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

(2)方法一:利用等式 $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$ （等式的证明与（1）中用到的等式的证明相同）可得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\pi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}。$$

方法二（先建立递推式）由

$$\sin(2n+1)x=\sin x\cos 2nx+\sin 2nx\cos x=\sin x\cos 2nx+\frac{1}{2}(\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x)$$

得

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\cos 2nx}{\sin x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=\frac{1}{2}(I_n+I_{n-1}),$$

所以 $I_n=I_{n-1}=\cdots=I_0=\pi$.

或 $I_n-I_{n-1}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=2\int_0^{\pi}\frac{\cos 2nx\sin x}{\sin x}dx=0$.

同样地

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=J_{n-1}=\cdots=J_0=\frac{\pi}{2}。$$

(3) 由 $\sin(n+1)x=\sin x\cos nx+\cos x\sin nx$,得

$$(\sin(n+1)x)^2=\sin^2 x\cos^2 nx+\cos^2 x\sin^2 nx+2\sin x\cos x\sin nx\cos nx$$

$$=\sin^2 nx+\sin^2 x(\cos^2 nx-\sin^2 nx)+\frac{1}{2}\sin x(\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x)$$

$$I_{n+1}=\int_0^{\pi}(\frac{\sin(n+1)x}{\sin x})^2 dx=I_n+\int_0^{\pi}(\cos^2 nx-\sin^2 nx)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=I_n+\pi.$$

或 $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(n+1)x-\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\sin(n+1)x+\sin nx)(\sin(n+1)x-\sin nx)}{\sin^2 x}dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{2\sin\frac{2n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}}{\sin^2 x}dx \quad =\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x\sin x}{\sin^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\pi,$$

由 $I_1=\pi$,得 $\int_0^{\pi}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx=n\pi$.

先证

$$\int_0^{\pi}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx,$$

从而得结果 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx=\frac{n}{2}\pi$.

或由递推式 $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin nx}{\sin x})dx=J_{n-1}+\frac{\pi}{2}$ 得结果。

（4） $\sin^2 nx-\sin^2(n-1)x=(\sin nx+\sin(n-1)x)(\sin nx-\sin(n-1)x)$

$$=2\sin\frac{2n-1}{2}x\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{2n-1}{2}x\sin\frac{x}{2}$$

$$=\sin(2n-1)x\sin x,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx-\sin^2(n-1)x}{\sin x}dx+\cdots+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)xdx+\cdots+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$$

$$=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin nx)^2}{\sin x}dx}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}{\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2n+\gamma+\varepsilon_{2n}-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma+\varepsilon_n)}{\ln n}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

（5）$\int_0^{\pi}\cos^{2n-1}x\sin(2n+1)xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos^{2n-1}x\sin(2n+1)x+\cos^{2n-1}(\pi-x)\sin(2n+1)(\pi-x))dx=0$。

$\int_0^{\pi}\sin^{2n-1}x\cos(2n+1)xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin^{2n-1}x\cos(2n+1)x+\sin^{2n-1}(\pi-x)\cos(2n+1)(\pi-x))dx=0$。

（6）

$\int_0^{\pi}\sin^4 x\sin 4xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4(\frac{\pi}{2}-x)\sin 4(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^4(\frac{\pi}{2}+x)\sin 4(\frac{\pi}{2}+x))dx=0$。

或 $\int_0^{\pi}\sin^4 x\sin 4xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin^4 x\sin 4x+\sin^4(\pi-x)\sin 4(\pi-x))dx=0$，

$$\int_0^{\pi}\sin^5 x\sin 5xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5(\frac{\pi}{2}-x)\sin 5(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^5(\frac{\pi}{2}+x)\sin 5(\frac{\pi}{2}+x))dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5 x\cos 5x+\cos^5 x\cos 5x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\cos 5xdx$$

$$=\frac{2\pi}{2^6}=\frac{\pi}{32}\text{。}$$

$$\int_0^{\pi}\sin^6 x\sin 6xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^6(\frac{\pi}{2}-x)\sin 6(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^6(\frac{\pi}{2}+x)\sin 6(\frac{\pi}{2}+x))dx=0$$

$$\int_0^{\pi}\sin^7 x\sin 7xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7(\frac{\pi}{2}-x)\sin 7(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^7(\frac{\pi}{2}+x)\sin 7(\frac{\pi}{2}+x))dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7 x)(-\cos 7x)+\cos^7 x(-\cos 7x))dx=-\frac{2\pi}{2^8}=-\frac{\pi}{128}\text{。}$$

$$\int_0^{\pi}\sin^4 x\cos 4xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4(\frac{\pi}{2}-x)\cos 4(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^4(\frac{\pi}{2}+x)\cos 4(\frac{\pi}{2}+x))dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 x\cos 4x+\cos^4 x\cos 4x))dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\cos 4xdx$$

$$=\frac{\pi}{16}.$$

$$\int_0^{\pi}\sin^5 x\cos 5xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5(\frac{\pi}{2}-x)\cos 5(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^5(\frac{\pi}{2}+x)\cos 5(\frac{\pi}{2}+x))dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5 x\sin 5x+\cos^5 x(-\sin 5x))dx=0.$$

4. 本题的小题与例 3 之(3)有关.

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\ln\sin x=\frac{\pi}{2}\ln 2$。

注意：这里用到了 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\sin x=0$.

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\sin x})^2 dx=-x^2\cot x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot xdx=\pi\ln 2$

（3）$\int_0^{+\infty}(\frac{\arctan x}{x})^3 dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^3}{\tan^3 t}\sec^2 tdt=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^3 d\frac{1}{\sin^2 t}=-\frac{\pi^3}{16}+\frac{3}{2}\pi\ln 2$

（4）$\int_0^{\pi} x\ln\sin xdx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx = \frac{-\pi^2}{2}\ln 2$

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\ln\sin xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\ln\sin xdx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xd\sin 2x = -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}\text{。}$$

副产品：$\int_0^{\pi}\sin^2 x\cdot\ln\sin xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\ln\sin xdx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$。

（6）$\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\ln(1+\cos x)+\ln(1+\cos(\pi - x))]dx = \int_0^{\pi}\ln\sin xdx = -\pi\ln 2$

5. （1）方法一：

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt = -\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt\int_0^t x^2dx = -\frac{1}{3}\int_0^1\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}dt = -\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$$

方法二：$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx^3 = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx = -\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$。

（2）$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1[\int_0^x \arcsin(t-1)^2dt]dx = \int_0^1[\int_t^1\arcsin(t-1)^2dx]dt = \int_0^1[(1-t)\arcsin(t-1)^2dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\arcsin udu = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{。}$$

方法二：

$$\int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1\arcsin(x-1)^2dx - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2dx$$

$$= \int_0^1[(1-x)\arcsin(x-1)^2dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{。}$$

6. $\int_0^a f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^a[f(x)g(x) + f(x-a)g(x-a)]dx = \frac{c}{2}\int_0^a f(x)dx$

7. （1）$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx = -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xd\cos nx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\cos^{n-1}x\sin xdx$,

从而

$$2I_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^n x\sin nx - \cos^{n-1}x\cos nx\sin x)dx = \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x(\sin nx\cos x - \sin x\cos nx)dx$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin(n-1)xdx = \frac{1}{n} + I_{n-1},$$

故 $I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}I_{n-1}$。

$$I_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}I_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}I_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{3}\text{。}$$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos nxdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cos n(\frac{\pi}{2}-t)dx=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nxdx, n=4k,\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx, n=4k+1,\\ -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nxdx, n=4k+2,\\ -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx, n=4k+3\end{cases}$

利用例 4 的结果和（1）的结果得答案。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\sin nxdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\sin n(\frac{\pi}{2}-t)dx=\begin{cases}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx, n=4k,\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nxdx, n=4k+1,\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin xdx, n=4k+2,\\ -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nxdx, n=4k+3\end{cases}$$

利用例 4 的结果和（1）的结果得答案。

8. $I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n-2}x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 xdx=\dfrac{1}{n-1}$。

$I_n=\dfrac{1}{n-1}-I_{n-2}$。

易见$\{I_n\}$单调下降，且$\dfrac{1}{2(n+1)}<I_n<\dfrac{1}{2(n-1)}$，故

当$p>1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$绝对收敛；当$0<p<1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$条件收敛；当$p\leqslant 0$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$发散。

9. $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx=n\int_0^1 2x^2(1-x^2)^{n-1}dx=2n\int_0^1(x^2-1+1)(1-x^2)^{n-1}dx$

$=2n\int_0^1(x^2-1+1)(1-x^2)^{n-1}dx=2nI_{n-1}-2nI_n$，

故$I_n=\dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$，又$I_1=\dfrac{2}{3}$，所以

$I_n=\dfrac{2n\cdot(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$。

(或:令$x=\cos t$,则$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}tdt=\dfrac{2n\cdot(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$.)

$\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=\dfrac{2n+2}{2n+3}\to 1$.

令 $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt$,则 $\lim_{n\to\infty}\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}}=1$ (仿第一章第二节例 1)，

又 $J_{2n+1}=\frac{2n\cdot(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$, $J_{2n}=\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}$,

从而 $\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}}=(2n+1)I_n^2\cdot\frac{2}{\pi}\to 1$,即 $(2n+1)I_n^2\to\frac{\pi}{2}$,因此 $nI_n^2=\frac{n}{2n+1}(2n+1)I_n^2\to\frac{\pi}{4}$,

故 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}I_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

10.令 $F(x)=\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(t)dt$ ，则 $F(0)=0$ ， $F(x)F'(x)=\sin^4 x$ ，从而

$$\frac{1}{2}F^2(\pi)=\int_0^{\pi}F(x)F'(x)dx=\int_0^{\pi}\sin^4 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3\pi}{8},$$

又题设知 $F(\pi)\ge 0$ ，故 $F(\pi)=\frac{\sqrt{3\pi}}{4}$ ， $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}F(\pi)=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}}。$$

11． （1）对积分 $f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln u}{1+u}du$ 作换元 $u=\frac{1}{t}$ 得， $f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}dt=\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}du$ ，所以

$$f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln u}{u}du=\frac{1}{2}\ln^2 x。$$

（2） 记 $F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt$ ， 则 $F'(x)=2xf(x)$ ，由题设知 $\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x)}{x^2}=1$ ，从而 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$ ，所以 $f'(0)=\frac{1}{2}$ 。

（3） $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x, x\le 0,\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}, 0<x<1,\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{3}, x\ge 1\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, x\le 0,\\ x^2-\frac{1}{2}, 0<x<1,\\ \frac{1}{2}, x\ge 1\end{cases}$ 易见 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 是 $f(x)$ 的唯一驻点，且为极小值点，故 $f(x)$ 的最小值点为 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 。

（4）令 $u=2x-t$ ，

$F(x)=\int_0^x tf(2x-t)dt=\int_{2x}^x(2x-u)f(u)(-du)=2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du$，

$F'(x)=2\int_x^{2x}f(u)du-xf(x)$，故 $2\int_x^{2x}f(u)du-xf(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$，令 $x=1$，并结合 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，

得 $\int_1^2 f(x)dx=\dfrac{1}{2}$

（5）3,4

（6） $\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt=-\dfrac{1}{n}\int_0^x f(x^n-t^n)d(x^n-t^n)=\dfrac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)du$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^n}f(u)du}{nx^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)nx^{n-1}}{n\cdot 2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n}$$

$=\dfrac{1}{2n}f'(0)=\dfrac{1}{2n}$。

12． $f'(x)=|\sin(x+\dfrac{\pi}{2})|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$,可得 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$,

$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$.又 $f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|du=1$, $f(\dfrac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin u|du=\sqrt{2}$,

$f(\dfrac{3\pi}{4})=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin u|du=2-\sqrt{2}$, $f(\pi)=f(-0)=1$,比较以上各值可得 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$,

最小值为 $2-\sqrt{2}$.

13.

(1) $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3x}=\dfrac{1}{3}f'(0)$.

当 $x\neq 0$ 时, $F'(x)=\dfrac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$,

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=f'(0)-\frac{2}{3}f'(0)=\frac{1}{3}f'(0)=F'(0),$$

所以 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,又 $F'(x)$ 在 $x\neq 0$ 时均连续,故 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

14．由题设知 $\varphi(0)=0$; $\varphi(x)\le 0$, $x>0$; $\varphi(x)\ge 0$, $x<0$.

$\int_0^x\varphi(t)dt=\dfrac{1}{2}[\int_0^x f(t)dt]^2\ge 0$,

又因为当 $x>0$ 时, $\varphi(x)\le 0$;当 $x<0$ 时, $\varphi(x)\ge 0$,故 $\int_0^x\varphi(t)dt\le 0$,

从而$\int_0^x \varphi(t)dt=\frac{1}{2}[\int_0^x f(t)dt]^2=0$,即对$\forall x$,有$\int_0^x f(t)dt=0$,两边求导得 $f(x)=0, x\in(-\infty,+\infty)$.

15. 令$\int_a^b f(x)dx=g(\frac{b}{a})$,

对a求导得$-f(a)=-\frac{b}{a^2}g'(\frac{b}{a})$,

对b求导 $f(b)=\frac{1}{a}g'(\frac{b}{a})$,

所以$bf(b)=af(a)$,取$a=1$,便得 $f(b)=\frac{f(1)}{b}=\frac{1}{b}$,所以 $f(x)=\frac{1}{x}$.

16.等式两端对x求导,然后令$x=1$得

$$yf(y)=\int_0^y f(t)dt+3y,$$

再对y求导得

$$yf'(y)=3,$$

结合 $f(1)=3$得

$$f(y)=3\ln y+3.\text{即 } f(x)=3\ln x+3$$

17. （1）作换元$x=\frac{a^2}{t}$,则$\int_a^{a^2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^1\frac{f(\frac{a^2}{t})}{a^2/t}(-\frac{a^2}{t^2})dt=\int_1^a\frac{f(t)}{t}dt=\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$.

（2）作换元$t=x^2$，则

$$\int_1^a\frac{f(x^2)}{x}dx=\int_1^{a^2}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_1^{a^2}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}[\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx+\frac{1}{2}\int_a^{a^2}\frac{f(x)}{x}dx]=\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx,$$

(3)令 $f(x)=g(x+\frac{a^2}{x})$,则 $f(\frac{a^2}{x})=g(\frac{a^2}{x}+x)=f(x)$,由(2)可得结论.

18.作换元$t=\frac{ab}{x}$，则

$$I=\int_a^b\frac{f(x)\ln x}{x}dx=\int_b^a\frac{f(\frac{ab}{t})\ln\frac{ab}{t}}{ab/t}(-\frac{ab}{t^2})dt=\ln(ab)\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx-I,$$

所以$I=\frac{\ln(ab)}{2}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$.

19. 左边$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(\sin 2x)\cos x+f[\sin 2(\frac{\pi}{2}-x)]\cos(\frac{\pi}{2}-x)\}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin 2x)(\cos x+\sin x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(1-(\sin x-\cos x)^2)d(\sin x-\cos x)$$

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(1-t^2)dt=\int_0^1 f(1-t^2)dt$,

右边$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(1-\sin^2 x)d(\sin x)=\int_0^1 f(1-t^2)dt$,

所以$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\cos xdx$.

20． 证法一：令$F(x)=\int_0^x f(x)dx+\int_0^{f(x)} g(t)dt-x\ f(x)$，那么

$$F'(x)=f(x)+g(f(x))f'(x)-f(x)-xf'(x),$$

注意到 $g(f(x))=x$,于是得 $F'(x)=0,\forall x\ge 0$,

故$F(x)$在$[0,+\infty)$为常数,又$F(0)=0$,所以$F(x)=0,\forall x\ge 0$,

即$\int_0^x f(x)dx+\int_0^{f(x)} g(t)dt=x\ f(x),\forall x\ge 0$.

从而$\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} g(x)dx=a\ f(a)$.

方法二: 令$t=g(x)$，那么$x=f(t)$，则

$\int_0^{f(a)} g(x)dx=\int_0^a tdf(t)=af(a)-\int_0^a f(t)dt$,从而

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} g(x)dx=a\ f(a).$$

方法三:$\int_0^a f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n}a)\cdot\frac{a}{n}$,

记$x_i=f(\frac{i}{n}a)\ (i=0,1,\cdots,n)$,$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$.则有

$g(x_i)=\frac{i}{n}a$,$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=f(a)$,且$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le n}\Delta x_i=0$,从而

$$\int_0^{f(a)} g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n g(x_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}(f(\frac{i}{n}a)-f(\frac{i-1}{n}a))\cdot\frac{i}{n}a,$$

所以 $\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\{\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n}a)\cdot\frac{a}{n}+\sum_{i=1}^n(f(\frac{i}{n}a)-f(\frac{i-1}{n}))\cdot\frac{i}{n}a\}$

$=af(a)$.

(2) 若$b=f(a)$,则由(1)知不等式成立;

若$b>f(a)$,则

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} g(x)dx+\int_{f(a)}^b g(x)dx$$

$$=af(a)+\int_{f(a)}^b g(x)dx$$

由于 $g(x)$ 单调增加，故 $\int_{f(a)}^b g(x)dx \ge g(f(a))[b-f(a)]=ab-af(a)$，及

$$\int_{f(a)}^b g(x)dx \le g(b))[b-f(a)]=bg(b)-f(a)g(b),$$

所以

$$ab\le\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(x)dx\le bg(b)+af(a)-f(a)g(b)$$

若 $b< f(a)$,则 $g(b)<a$,

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(x)dx=\int_0^{g(b)} f(x)dx+\int_{g(b)}^a f(x)dx+\int_0^b g(x)dx$$

$$=bg(b)+\int_{g(b)}^a f(x)dx,$$

由于 $f(x)$ 单调增加，故 $\int_{g(b)}^a f(x)dx \ge f(g(b))[a-g(b)]=ab-bg(b)$，及

$$\int_{g(b)}^a f(x)dx \le af(a))-f(a)g(b),$$

所以

$$ab\le\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(x)dx\le bg(b)+af(a)-f(a)g(b)$$

注:本题的条件“ $f'(x)>0$ ”是为了保证 $f(x)$ 有反函数，而条件“ $f(x)$ 可导”是为了证明方便（可以求导），而事实上条件改为“设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且严格单调”时结论仍成立，此时严格证明只能用方法三.该结论的几何意义是什么？

21. (1) $\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}C_n^k x^{k-1}=\dfrac{1-(1-x)^n}{x}$,

一方面 $\int_0^1\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}C_n^k x^{k-1}dx=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k}C_n^k$,

另一方面 $\int_0^1\dfrac{1-(1-x)^n}{x}dx\overset{t=1-x}{=}\int_0^1\dfrac{1-t^n}{1-t}dt=1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$,

所以 $\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k}C_n^k=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

(2) $\sum_{k=0}^n(-1)^k C_n^k x^{2k}=(1-x^2)^n$,

一方面 $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1} C_n^k$

另一方面 $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$),

所以 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1} C_n^k = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

22. 令 $F(x) = f(a)(x-a) + f(b)(b-x) - \int_a^b f(x)dx$，则

$F(a) = \int_a^b [f(b) - f(x)]dx > 0$，$F(b) = \int_a^b [f(a) - f(x)]dx < 0$，又 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi).$$

由于 $F'(x) = f(a) - f(b) < 0$,所以 $F(x)$ 单调减少,因此存在唯一的 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi).$$

23. (1) 令 $F(x) = \int_0^x f(x)dx - \int_x^1 \frac{1}{f(x)}dx$，则

$F(0) = -\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx < 0$，$F(1) = \int_0^1 f(x)dx > 0$，又 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,故存在 $a \in (0,1)$，使得

$$\int_0^a f(x)dx = \int_a^1 \frac{1}{f(x)}dx.$$

又由于 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$,所以 $F(x)$ 单调增加,因此存在唯一的 $a \in (0,1)$，使得

$$\int_0^a f(x)dx = \int_a^1 \frac{1}{f(x)}dx.$$

(2) x_n 的存在性及唯一性的证明与(1)类似.下证 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$。

方法一（用单调有界定理）令 $F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^x f(x)dx - \int_x^1 \frac{1}{f(x)}dx$,则 $F_n(x_n) = F_{n+1}(x_{n+1}) = 0$,

$$F_n(x_n) = \int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx - \int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)}dx \le \int_{\frac{1}{n+1}}^{x_n} f(x)dx - \int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)}dx = F_{n+1}(x_n),$$

从而 $F_{n+1}(x_{n+1}) \le F_{n+1}(x_n)$,又 $F_{n+1}(x)$ 单调增加，故 $x_{n+1} \le x_n$,故 $\{x_n\}$ 单减且有界,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,则对等式

$$\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_n}^{1} \frac{1}{f(x)}dx$$

两边令 $n \to \infty$ 得，

$$\int_0^b f(x)dx = \int_b^1 \frac{1}{f(x)}dx$$

再结合（1），可知 $b = a$ 。所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 。

（也可用反证法证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ ，.那么 $x_n \ge b$ 且 $b \ge a$ 。假设 $b > a$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$ ，及 $\int_a^b f(x)dx > 0$ ，知 $\exists N$ ，使得当 $n > N$ 时，有

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^{x_n} f(x)dx,$$

从而 $\int_0^a f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx + \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{x_n} f(x)dx < \int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx$,

又 $\int_a^1 \frac{1}{f(x)}dx > \int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)}dx$ ，所以 $\int_0^a f(x)dx < \int_a^1 \frac{1}{f(x)}dx$ ，这与 $\int_0^a f(x)dx = \int_a^1 \frac{1}{f(x)}dx$ 矛盾，故 $b = a$ 。）

方法二(用夹逼定理) 令 $F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{x} f(x)dx - \int_x^1 \frac{1}{f(x)}dx$, 则 $F_n(a) < 0$,

对 $\forall \varepsilon > 0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$ ，及 $\int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx > 0$ ，知 $\exists N$ ，使得当 $n > N$ 时，有

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx < \int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx,$$

从而

$$F_n(a+\varepsilon) = \int_{\frac{1}{n}}^{a+\varepsilon} f(x)dx - \int_{a+\varepsilon}^1 \frac{1}{f(x)}dx$$

$$= \int_0^a f(x)dx - \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx + \int_a^{a+\varepsilon} f(x) - [\int_a^1 \frac{1}{f(x)}dx - \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{f(x)}dx]$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx + \int_a^{a+\varepsilon} f(x) + \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{f(x)}dx > 0,$$

故 $a < x_n < a + \varepsilon$ ，由 ε 的任意性得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

24．证明：（用反证法）由 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = 0$ 知 $\exists x_0 \in (0,\pi)$，使得 $f(x_0)\sin x_0 = 0$，即 $f(x_0)=0$.若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内只有这一个零点，则由连续函数性质知 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 与 (x_0,π) 必定异号，又 $\sin(x-x_0)$ 在 $(0,x_0)$ 与 (x_0,π) 异号，从而 $f(x)\sin(x-x_0)$ 在 $(0,x_0)$ 与 (x_0,π) 同号．故必有 $\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-x_0)dx \neq 0$，又由题设知

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-x_0)dx = \cos x_0 \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx - \sin x_0 \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$$

于是得出矛盾，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点．即得结论.

25． 证法一：(用罗尔定理）令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $F'(x)=f(x)$， $F(a)=F(b)=0$

又 $0=\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xdF(x) = \int_a^b F(x)dx$

从而知 $\exists x_0 \in (a,b)$，使得 $F(x_0)=0$.

由罗尔定理知 $\xi_1 \in (a,x_0), \xi_2 \in (x_0,b)$，使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证法二：(用反证法）证明方法与例 14 相同,略.

注:，本题可推广：若 $\int_a^b x^k f(x)dx = 0\ (k=0,1,\cdots,n)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在 $n+1$ 个不同的零点.

26．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$$

方法一(利用例 1 1 的（ 2 ）及积分中值定理)

$$由于\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f''(x)(x-a)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f''(x)(x-b)^2 dx,$$

由积分中值定理 $\exists \xi_1 \in (a,\frac{a+b}{2}), \xi_2 \in (\frac{a+b}{2},b)$,使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 dx + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 dx$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{24},$$

又 $\xi \in (a,b)$,使得 $f''(\xi) = \dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$,从而得结论.

方法二：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处分别展开 $F(a),F(b)$ 的值.(实际上就是第二章第三节的例 6,略.)

27. $\int_a^b f(x)dx=[xf(x)]|_a^b-\int_a^b xf'(x)dx=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)dx^2$

$$=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2}[x^2f'(x)]|_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)x^2dx$$

$$=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2}[b^2f'(b)-a^2f'(a)]+\frac{1}{2}\int_a^b x^2f''(x)dx.$$

由积分中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b x^2f''(x)dx=f''(\xi)\int_a^b x^2dx=\frac{f''(\xi)(b^3-a^3)}{3},$$

于是得结论.

28. 本题是第二章第二节的例 8, 第二章第二节的例 8 中的题设为“ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导(可用达布定理)”,本题的题设为“ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶连续可导(保证 $f'''(x)$ 可积)”,就是说本题的条件更强.这一更强的条件就使得可用定积分的方法证明：利用例 11 的（1）：

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

可得

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx=\frac{(b-a)}{2}(f'(a)+f'(b))+\frac{1}{2}\int_a^b f'''(x)(x-a)(x-b)dx$$

由积分中值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f'''(x)(x-a)(x-b)dx=f'''(\xi)\int_a^b(x-a)(x-b)dx=-\frac{f'''(\xi)}{6}(b-a)^3,$$

于是可得结论。

29.（1）对 $\forall x>\pi$, $\exists$ 正整数 k ,使得 $x\in[k\pi,(k+1)\pi)$,从而

$$\frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{k\pi}|\sin x|dx\le\frac{1}{x}\int_0^x|\sin x|dx\le\frac{1}{k\pi}\int_0^{(k+1)\pi}|\sin x|dx,$$

而 $\dfrac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{k\pi}|\sin x|dx=\dfrac{k}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|dx=\dfrac{2k}{(k+1)\pi}\to\dfrac{2}{\pi}$,

$$\frac{1}{k\pi}\int_0^{(k+1)\pi}|\sin x|dx=\frac{2(k+1)}{k\pi}\to\frac{2}{\pi},$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x|\sin x|dx=\dfrac{2}{\pi}$.

（2）$n\int_0^1 x^nf(x)dx=n\int_0^{1-\delta}x^nf(x)dx+n\int_{1-\delta}^1 x^nf(x)dx$,

设$|f(x)|$在$[0,1]$上的最大值为M，则$n|\int_0^{1-\delta}x^n f(x)dx|\le nM\cdot\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}\to 0$,

$n\int_{1-\delta}^1 x^n f(x)dx=f(\xi)\cdot\frac{n}{n+1}\cdot(1-(1-\delta)^{n+1})\to f(1)$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)dx=1$.

（3）$\int_0^1 x^n f(x)dx$

$$=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx=-\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}f''(x)dx.$$

可见$k=2$.

(4) $\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}dx=e^{-\frac{1}{\xi}}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2e^{-\frac{1}{\xi}}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{2ne^{-\frac{1}{\xi}}}{\sqrt{n^2+n}+n}\to 1$,

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx+\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{n}{1+n^2x^2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi)\arctan\sqrt{n}=\frac{\pi}{2}f(0)$,

$|\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx|\le M(\arctan n-\arctan\sqrt{n})\to 0$,其中$M=\max|f(x)|$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=\frac{\pi}{2}f(0)$.

30. (本题为例 16 的特例）由例 16,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\ln(1+x)|\sin nx|dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+x)dx\cdot\int_0^{\pi}|\sin x|dx=\frac{2(1+\pi)\ln(1+\pi)-2\pi}{\pi}.$$

31. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<b-a)$,使得当$x\in[b-\delta,b]$时,$f(x)>f(b)-\varepsilon$,从而

$(\frac{\delta}{b-a})^{\frac{1}{n}}(f(b)-\varepsilon)\le[\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx]^{\frac{1}{n}}\le f(b)$,

注意到 $(\frac{\delta}{b-a})^{\frac{1}{n}}\to 1(n\to\infty)$,及$\varepsilon$的任意性,得

$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx]^{\frac{1}{n}}=f(b)$.(这个结果是例 15 的特例)

记 $y_n=f(x_n)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=f(b)$, 记 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数,则 $f^{-1}(x)$ 连续,从而

$x_n = f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(f(b) = b, n \to \infty$.

32. （1）由 1.2 节习题 1 之（5），$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \ln 2$。

（2）注意到 $\ln 2 - A_n = \int_0^1 f(x)dx - \sum\limits_{i=1}^n f(\frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n}$，其中 $f(x) = \frac{1}{1+x}$，

由例 17 的结果知

$$\lim_{n\to\infty} n(\ln 2 - A_n) = -\frac{1}{2}[f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}\text{。}$$

33.(1) $B_n = \sum\limits_{i=1}^n \int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} [f(x) - f(a + \frac{2i-1}{2n}(b-a))]dx$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} [f'(\frac{2i-1}{2n}(b-a))(x-(a+\frac{2i-1}{2n}(b-a)) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x-(a+\frac{2i-1}{2n}(b-a))^2]dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} [f''(\xi_i)(x-(a+\frac{2i-1}{2n}(b-a))^2]dx.$$

记 $M_i = \max\limits_{x\in I_i} f''(x)$，$m_i = \min\limits_{x\in I_i} f''(x)$，其中区间 $I_i = [a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)]$，

则有 $\frac{(b-a)^2}{24n^2}\sum\limits_{i=1}^n \frac{b-a}{n} m_i \le B_n \le \frac{(b-a)^2}{24n^2}\sum\limits_{i=1}^n \frac{b-a}{n} M_i$，

$$\frac{(b-a)^2}{24}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} m_i \le n^2 B_n \le \frac{(b-a)^2}{24}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} M_i,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i-1}^n \frac{b-a}{n} m_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} M_i = \int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 B_n = \frac{(b-a)^2}{24}[f'(b) - f'(a)]$.

(2) （是(1)的特例，其中 $f(x) = \frac{1}{1+x}$）.

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\ln 2 - A_n) = \frac{1}{24}(f'(1) - f'(0)) = \frac{1}{32}\text{。}$$

34. 令 $F(x) = e^{1-x^2} f(x)$，则 $F(1) = f(1)$，

由积分中值定理知 $\exists x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$，使得 $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2} f(x)dx = \frac{1}{2} e^{1-x_0^2} f(x_0)$，结合题设得

$F(x_0) = F(1)$，

对 $F(x)$ 使罗尔定理便可得结论。

35. 由题设知

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx = \int_0^1 x^n f(x)dx = 1,$$

记 $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$，则

$$|\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx| \le M\int_0^1 |(x-\frac{1}{2})^n|dx = \frac{M}{2^n(n+1)},$$

所以 $\frac{M}{2^n(n+1)} \ge 1$，即 $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \ge 2^n(n+1)$。

第 7 届初赛题的答案

（1）$1 = |\int_0^1 (x-\frac{1}{2}) f(x)dx| \leqslant \int_0^1 |x-\frac{1}{2}|\cdot|f(x)|dx \leqslant M\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|dx = \frac{M}{4}$，所以 $M \geqslant 4$，

若 $M=4$，则

$$\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|\cdot|f(x)|dx = 1,$$

从而

$$\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|\cdot(4-|f(x)|)dx = 0$$

由 $4-|f(x)| \geqslant 0$，及 $f(x)$ 连续，得 $|f(x)| \equiv 4$，再由 $f(x)$ 连续有 $f(x)\equiv 4$，或 $f(x)\equiv -4$，这与题设 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 矛盾。因此所以 $M>4$，所以存在 $x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$。

（2）由题设 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 知存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=0$，由连续函数的介值性质，存在 $x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$。

注：若 $f(x)$ 连续，则 $|f(x)|$ 连续。

36. 由题设知 存在 $c\in[-a,a]$，满足 $f(c)=0$，从而 $|f(x)| \le M|x-c|$，$\forall x\in[-1,1]$。

所以

$$|\int_{-1}^1 f(x)dx| = |\int_{-1}^{-a} f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx| \le |\int_{-1}^{-a} f(x)dx| + |\int_a^1 f(x)dx|$$

$$\le \int_{-1}^{-a} M(c-x)dx + \int_a^1 M(x-c)dx = M(1-a^2)$$

37. （1）易见 $F(a)=F(b)=0, F'(x)=f(x)$，记 $A=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$，

（i）若 $A=0$，结论成立;

(ii) 若 $A>0$，则必存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $|F(x_0)|=A$，那么 x_0 是 $F(x)$ 的极值点，从而 $F'(x_0)=f(x_0)=0$，因此 $|f(x)|=|f(x)-f(x_0)|=|f'(\xi)|x-x_0| \le M|x-x_0|$ $(x\in[a,b])$,

若 $x_0\in[a,\frac{a+b}{2}]$,那么有

$$A=|F(x_0)|=|\int_a^{x_0}f(x)dx|\le\int_a^{x_0}|f(x)|dx\le\int_a^{x_0}M(x_0-x)dx=\frac{M(x_0-a)^2}{2},$$

$$\le\frac{M(\frac{a+b}{2}-a)^2}{2}=\frac{M(b-a)^2}{8}.$$

若 $x_0\in[\frac{a+b}{2},b]$,那么有

$$A=|F(x_0)|=|\int_a^{x_0}f(x)dx|=|\int_a^b f(x)dx-\int_a^{x_0}f(x)dx|\le\int_{x_0}^b|f(x)|dx\le\int_{x_0}^b M(x-x_0)dx$$

$$=\frac{M(b-x_0)^2}{2}\le\frac{M(b-\frac{a+b}{2})^2}{2}=\frac{M(b-a)^2}{8}.$$

（2）易见 $F(a)=F(b)=0,F'(x)=f(x)$，

由题设知

$|f(x)|=|f(x)-f(a)|=|f'(\xi)|x-a|\le M|(x-a)\ (x\in[a,b])$，

$|f(x)|=|f(x)-f(b)|=|f'(\xi)|x-b|\le M(b-x)\ (x\in[a,b])$，

记 $A=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$，

（i）若 $A=0$，结论成立;

(ii) 若 $A>0$，则必存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $|F(x_0)|=A$，那么 x_0 是 $F(x)$ 的极值点，从而

$F'(x_0)=f(x_0)=0$，因此 $|f(x)|=|f(x)-f(x_0)|=|f'(\xi)|x-x_0|\le M|x-x_0|\ (x\in[a,b])$,

若 $x_0\in[a,\frac{a+b}{2}]$,那么有

$$A=|F(x_0)|=|\int_a^{x_0}f(x)dx|\le\int_a^{\frac{a+x_0}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{a+x_0}{2}}^{x_0}|f(x)|dx$$

$$\le\int_a^{\frac{a+x_0}{2}}M(x-a)dx+\int_{\frac{a+x_0}{2}}^{x_0}M(x_0-x)dx$$

$$=\frac{M(x_0-a)^2}{4}\quad\le\frac{M(\frac{a+b}{2}-a)^2}{4}=\frac{M(b-a)^2}{16}.$$

若 $x_0\in[\frac{a+b}{2},b]$,那么有

$$A=|F(x_0)|=|\int_{x_0}^{b}f(x)dx|\le\int_{x_0}^{\frac{b+x_0}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{x_0+b}{2}}^{b}|f(x)|dx\le\frac{M(b-a)^2}{16}。$$

38. 记 $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$,取 $g(x)=f(x)-\mu$，则 $\int_a^b g(x)dx=0$，从而

$$\int_a^b \mu g(x)dx=0, \qquad (1)$$

由题设有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0, \qquad (2)$$

(2)-(1)得

$\int_a^b g(x)(f(x)-\mu)dx=0$,即 $\int_a^b g^2(x)dx=0$，又由 $g(x)$ 的连续性和 $g(x)\equiv 0,\forall x\in[a,b]$,

所以

$$f(x)\equiv\mu,\forall x\in[a,b].$$

39.由柯西不等式,

$$1=|\int_0^1 f(x)dx|=|\int_0^1 f(x)\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx|\le(\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

从而 $I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx\ge\frac{4}{\pi}$,取 $f(x)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$,则 $\int_0^1 f(x)dx=1$,且 $I=\frac{4}{\pi}$,所以 I 的最小值为 $\frac{4}{\pi}$.

40. 记 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\cdots+a_1x+a_0$,由题设可得

$$\int_0^1 P^2(x)dx=\int_0^1(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)P(x)dx=a_0\int_0^1 P(x)dx,$$

(于是问题化为证明 $a_0=(n+1)^2\int_0^1 P(x)dx$)

$$0=\int_0^1 x^kP(x)dx=\int_0^1(a_nx^{k+n}+\cdots+a_1x^{k+1}+a_0x^k)dx=\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{k+n+1}$$

记 $\frac{a_0}{x+1}+\frac{a_1}{x+2}+\cdots+\frac{a_n}{x+n+1}=\frac{Q(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$, (1)

则 $Q(x)$ 为多项式,且至多为 n 次的多项式.由题设知 $1,2,\cdots,n$ 为 $Q(x)$ 的零点,故

$$Q(x)=a(1-x)(2-x)\cdots(n-x),$$

对(1)两边乘 $x+1$,然后令 $x=-1$,可得 $a_0=(n+1)a$,从而

$$Q(x)=\frac{a_0}{n+1}(1-x)(2-x)\cdots(n-x),$$

故

$$\int_0^1 P(x)dx=\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=\frac{Q(0)}{(n+1)!}=\frac{a_0}{(n+1)^2},$$

所以 $a_0=(n+1)^2\int_0^1 P(x)dx$,由此可得结论.