第二章 一元微分学

第二节 中值定理

有关知识：

（1）费马定理：对于可导函数，极值点处的导数为零.反之不然.

（2）罗尔定理，拉氏中值定理，柯西中值定理。

（3）达布定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)\neq f'(b)$，则对于介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任一实数 c，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=c$。

A. 单介值问题

此类问题需要一定的技巧，主要体现上：找一个合适的函数（大多数情况下需要我们去构造，称为辅助函数）,在合适的区间上（有时就是题中给出的区间，有时需我们构造新的区间，称为辅助区间)，使用合适的中值定理(大多是罗尔定理. 换言之,尽量把问题纳入罗尔定理的框架.涉及高阶导的介值问题,泰勒公式是一个常用的工具).下面通过一些例子说明解决这类问题的思路和技巧.

例 1：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

分析：欲证的结论实际上是：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $[f(x)-x]'|_{x=\xi}=0$，即 $F'(\xi)=0$，其中 $F(x)=f(x)-x$，容易想到辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，并考虑对 $F(x)$ 用罗尔定理。但 $F(0)\neq F(1)$，故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上用罗尔定理行不通。应重新找一个区间，使得 $F(x)$ 在该区间上满足罗尔定理的条件。易见 $F(0)=0, F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}, F(1)=-1$，故存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $F(x_0)=0$，因此 $F(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足罗尔定理的条件。那么对 $F(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上用罗尔定理便可得结论。具体的证明过程学生自己完成。

注：本题中构造了辅导函数 $F(x)=f(x)-x$，也构造了辅导区间 $[0,x_0]$。这是本问题解决的关键，这也是解决此类问题常用的思路和技巧。

例 2：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$ 且曲线 $y=f(x)$ 与抛物线 $y=(x-a)(x-b)$ 有一个交点 $(c,f(c))$ $(a<c<b)$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=2$。

分析：欲证的结论为 $[f(x)-g(x)]''|_{x=\xi}=0$，其中 $g(x)$ 为满足 $g''(x)=2$ 的某个函数，由题设容易想到：$g(x)=(x-a)(x-b)$。可作辅助函数 $F(x)=f(x)-(x-a)(x-b)$，则有 $F(a)=F(c)=F(b)(=0)$，进而可证明结论。

证明 令 $F(x)=f(x)-(x-a)(x-b)$，由题设知 $F(a)=F(c)=F(b)$，由罗尔定理知，存在

$\xi_1 \in (a,c)$，使得 $F'(\xi_1)=0$；及存在 $\xi_2 \in (c,b)$，使得 $F'(\xi_2)=0$.再利用罗尔定理知 $\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=2$.

注：欲证 $F^{(k)}(\xi)=0$ 时,下面两种情况是常见的:

(1) 由 $F(x_1)=F(x_2)=\cdots=F(x_{k+1})$（$x_1<x_2<\cdots<x_{k+1}$ 是需要我们找出来的),得 $F^{(k)}(\xi)=0$

(2) 由 $F(a)=F(b)=F'(b)=F''(b)=\cdots=F^{(k-1)}(b)=0$（或 $F(a)=F'(a)=F''(a)=\cdots=F^{(k-1)}(a)=F(b)=0$），得 $F^{(k)}(\xi)=0$。

例 3. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，证明存在 $\xi \in (-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$。

分析：欲证的结果化为 $f'''(\xi)-3=0$，由此想到找一个 3 次多项式 $P(x)$，使得 $P'''(x)=3$，再作辅导函数 $F(x)=f(x)-P(x)$，那么 $P(x)$ 如何找呢？首先易见 $P(x)=\frac{x^3}{2}+Ax^2+Bx+C$，为证得结论我们希望 $F(x)$ 满足条件：$F(-1)=0$，$F(1)=0$，$F(0)=0$，$F'(0)=0$,由 $F'(0)=0$ 可得 $B=0$，由 $F(0)=0$ 可得 $C=f(0)$，再由 $F(-1)=0$ 得 $A=\frac{1}{2}-f(0)$，从而 $P(x)=\frac{x^3}{2}+(\frac{1}{2}-f(0))x^2+f(0)$.容易验证 $F(1)=0$.至此,问题得以解决.

证明:令 $F(x)=f(x)-[\frac{x^3}{2}+(\frac{1}{2}-f(0))x^2+f(0)]$,则

$F(-1)=0$，$F(1)=0$，$F(0)=0$，$F'(0)=0$,

由罗尔定理知 $\exists \xi_1 \in (-1,0), \xi_2 \in (0,1)$,使得

$$F'(\xi_1)=0, F'(\xi_2)=0$$

从而 $F'(\xi_1)=F'(0)=F'(\xi_2)$,

由罗尔定理知 $\exists \eta_1 \in (\xi_1,0), \eta_2 \in (0,\xi_2)$,使得

$$F''(\eta_1)=0, F''(\eta_2)=0$$

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (\eta_1,\eta_2) \subset (-1,1)$,使得

$$F'''(\xi)=0,$$

即 $f'''(\xi)=3$.

注：本题用泰勒公式证明更容易：

由 Taylor 公式知，存在 $\xi_1\in(-1,0)$， $\xi_2\in(0,1)$，使得

$f(-1)=f(0)-f'(0)+\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}$，即 $\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}=0$

$f(1)=f(0)+f'(0)+\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}$，即 $\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}=1$，

两式相减得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3,$$

由导函数的介值性质知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$，使得 $\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=f'''(\xi)$，故

$$f'''(\xi)=3$$

例 4. 设 $0<a<b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi(f(b)-f(a))=(b^2-a^2)f'(\xi)。$$

分析：欲证的结论变形为

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

这正是柯西中值定理的结论．具体的证明过程学生自己完成。

注：这里无须技巧，关键一点是作恒等变形，使之变成柯西中值定理之形式.

介值问题中构造辅助函数是解题的关键、也是难点，下面通过举例重点说明如何构造辅助函数.

例 5.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=0$,证明在在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f'(\xi)=(1-\frac{1}{\xi})f(\xi)$$

分析:为构造辅助函数并纳入罗尔定理的框架,先将目标等式变形：

$$\xi f'(\xi)=\xi f(\xi)-f(\xi),$$

为方便，把 ξ 换成 x ,则上式为 $xf'(x)=xf(x)-f(x)$,再变形为 $xf'(x)+f(x)=xf(x)$,即

$$(xf(x))'-xf(x)=0,$$

由此想到应当辅导函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}[xf(x)]$.

以上构造的辅助函数是通过观察、分析后找出来的，技巧性较强．下面介绍一个方法（称为积分还原法），可以比较容易地找出辅助函数，无需太多技巧而且比较程序化.

欲证的结论 $f'(\xi)=(1-\frac{1}{\xi})f(\xi)$ 中的 ξ 换成 x 得 $f'(x)=(1-\frac{1}{x})f(x)$，再将其变形为

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1-\frac{1}{x}$$

对上式两边积分得

$$\ln f(x)=x-\ln x+c$$

变形得 $f(x)=C\frac{e^x}{x}$,再变形得

$$xe^{-x}f(x)=C$$

那么 $F(x)=xe^{-x}f(x)$ 便是要找的辅助函数.

总结：这种方法的一般过程是这样的：把欲证的结论中的介值 ξ 换成 x，必要时要作恒等变形（以便于便积分）．然后等式两边求不定积分，再移项、化简、整理得如下形式的等式：

$$F(x)=C$$

那么 $F(x)$ 便是要找的辅助函数．找到了辅助函数后,证明过程往往是简单的.具体的证明过程学生自己完成。

例 6．设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0,\ f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：

$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

分析：首先由题设可以看出 $g(x)\neq 0, x\in(a,b)$，下面用积分还原法找辅助函数：

把结论中的 ξ 换成 x，并作恒等变形

$$f(x)g''(x)=g(x)f''(x)$$

两过积分得

$$f(x)g'(x)-\int f'(x)g'(x)dx=g(x)f'(x)-\int f'(x)g'(x)dx$$

整理得

$$f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=C$$

辅助函数便是

$$F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x).$$

注：本题也可以通过观察、分析找出辅助函数，需要看出 $f(x)g''(x)-g(x)f''(x)$ 是

$F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$ 的导数。原则上讲用积分还原法能找出的辅助函数都可以用观察、

分析方法找出。可见观察、分析方法适用面更广，但技巧性更高，而积分还原法更程序化因而可能会更快捷。

下面再举例子简单介绍另一种方法：常值法.

例 7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$c\in(a,b)$,证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b)$$

分析：本题可以用观察、分析方法找出辅助函数，目标等式变形为（把ξ 替换成 x ）

$$f''(x)-\frac{2f(c)}{(c-b)(c-b)}=0,$$

由此想到需找一个函数 $g(x)$，使得 $g''(x)=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，并使得 $F(x)=f(x)-g(x)$ 有三

个零点，根据所给条件及目标，取 $g(x)=\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$。因此辅助函数为

$$F(x)=f(x)-\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b),$$

容易验证 $F(a)=F(b)=F(c)=0$。至此问题可以解决了。

通过积分还原法找辅助函数：

ξ 替换为 x，并变形得 $f''(x)=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，两边积分两次得

$$f(x)=\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x^2+c_1x+c_2)$$

这里出现了两个任意常数，需取合适的 c_1，使之变为

$$f(x)=\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)+C$$

便可得出辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$

下面介绍另一个方法（称为常值法）:

令 $\lambda=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，那么欲证的结论为 $f''(\xi)=\lambda$

把 $\lambda=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$ 变形为 $f(c)-\dfrac{\lambda}{2}(c-a)(c-b)=0$

把上式左端的 c 换成 x，便是要找的辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{\lambda}{2}(x-a)(x-b),$$

那么自然有 $F(c)=0$，由题设知 $F(a)=F(b)=0$.故 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，结论得证。

证明：记 $\lambda=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，令 $F(x)=f(x)-\dfrac{\lambda}{2}(x-a)(x-b)$，

则 $F(a)=F(b)=F(c)=0$，两次用罗尔定理可得 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$F''(\xi)=0$$

即 $f''(\xi)=\lambda$，也即 $f''(\xi)=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，从而得结论.

本题看不出常值法有何优势，但确有些题目用前两个方法都不方便，而用常值法会比较方便，看下面例子。

例 8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]=\frac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi)。$$

分析：用常值法来解决,

令 $\lambda=12\{f(a)-f(b)+\dfrac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]\}/(b-a)^3$,问题化为欲证 $f'''(\xi)=\lambda$,

把上式改为

$$f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{\lambda}{12}(b-a)^3=0,$$

把上式左端的 a 改为 x,便得到辅助函数：

$$F(x)=f(x)-f(b)+\frac{1}{2}(b-x)[f'(x)+f'(b)]-\frac{\lambda}{12}(b-x)^3,$$

易见 $F(a)=F(b)=0$，及 $F'(b)=0$.

也可把上式左端的 b 改为 x,得到辅助函数：

$$F(x)=f(a)-f(x)+\frac{1}{2}(x-a)[f'(a)+f'(x)]-\frac{\lambda}{12}(x-a)^3。$$

下面给出解答.

证明:记 $\lambda=12\{f(a)-f(b)+\dfrac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]\}/(b-a)^3$,令

$$F(x)= f(x)-f(b)+\frac{1}{2}(b-x)[f'(x)+f'(b)]-\frac{\lambda}{12}(b-x)^3,$$

则 $F(a)=F(b)=0$，

$$F'(x)= f'(x)-\frac{1}{2}[f'(x)+f'(b)]+\frac{b-x}{2}f''(x)+\frac{\lambda}{4}(b-x)^2$$

$$F''(x)=\frac{b-x}{2}[f'''(x)-\lambda]$$

由 $F(a)=F(b)=0$ 知,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $F'(\eta)=0$,

又 $F'(b)=0$,故存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F''(\xi)=0$,即 $\frac{b-\xi}{2}[f'''(\xi)-\lambda]=0$,

由于 $b-\xi\neq 0$,所以 $f'''(\xi)=\lambda$.命题得证.

（同学们以辅助函数 $F(x)= f(a)-f(x)+\frac{1}{2}(x-a)[f'(a)+f'(x)]-\frac{\lambda}{12}(x-a)^3$ 去完成此题的证明）

注:本题涉及三阶导。涉及高阶导的介值问题，一种常用方法是运用带拉氏余项的泰勒公式(见泰勒公式一节),但本题用泰勒公式也不方便.

练习题

1．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0,$ 求证：对任意实数 $x_0\in(0,1)$ ，$\exists\xi\in(0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=f(x_0)$.

2.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$ ，求证：对任意实数 λ ，$\exists\xi\in(0,1)$ ，使得

$$f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1。$$

3．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，曲线 $y=f(x)$ 与连接点 $A(a,f(a))$ 与点 $B(b,f(b))$ 的直线有一个交点 $C(c,f(c))$ $(a<c<b)$ ，求证：$\exists\xi\in(a,b)$ ，使得 $f''(\xi)=0$ 。

4．设 $0<a<b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ ，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

5.设 $f(x)$在$[\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi]$ 上可导,且 $f(\frac{3\pi}{4})=f(\frac{7\pi}{4})=0$,证明 $\exists\xi\in(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$,使得 $f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$.

6.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导， $f(x)>0(a\le x\le b), f'(a)=f'(b)=0$ ，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ ，使得

$$f(\xi)f''(\xi)=2[f'(\xi)]^2$$

7．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(x)\ne 0(x\in(0,1), f(0)=0$ ，证明：$\exists\xi\in(0,1)$ ，使得

$$\frac{\alpha f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}\ (\alpha>0\text{ 为常数})$$

8．设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导， $g'(x)\ne 0$ ，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ ，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}$$

9．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$,证明：

(1) $\exists\xi\in(a,b)$ ，使得 $f(\xi)=0$ ；

(2) $\exists\eta\in(a,b)$ ，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

10．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$ ，

(1) $\exists\xi\in(0,1)$ ，使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ ；

(2) $\exists\eta\in(0,1)$ ，使得 $f''(\eta)=\dfrac{-2}{\eta}f'(\eta)$.

11．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $f(a)=f'(a)=f(b)=0$ ， $c\in(a,b)$,证明：$\exists\xi\in(a,b)$ ，使得

$$f(c)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(c-a)^2(c-b)$$

12．设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导， $c\in(a,b)$,证明：$\exists\xi\in(a,b)$ ，使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

13．设 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个区间 I 上二阶可导， $x_0+h\in I$ ， $\alpha\in(0,1)$ ，证明：$\exists\theta\in(0,1)$ ，使得

$$f(x_0+\alpha h)=\alpha f(x_0+h)+(1-\alpha)f(x_0)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 f''(x_0+\theta h)$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,则对 $c\in(a,b)$,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{2}(c-b)f''(\xi).$$

B.多介值问题：下面通过两个例子说明此类问题

例 9. 设 $0<a<b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}(b+a)=\frac{f'(\xi_3)}{3{\xi_3}^2}(b^2+ab+a^2)$$

分析：欲证的等式中有三项，仔细观察每一项，能想到应该与拉氏中值定理或柯西中值定理有关：将三项变形为

$$f'(\xi_1)=\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{f'(\xi_3)}{3{\xi_3}^2}\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a},$$

再想到

$$f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2},\quad \frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3},$$

因此就能想到下面等式：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(b+a)=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}(b^2+ab+a^2)$$

由以上等式，问题就解决了。

证明：由拉氏中值定理及柯西中值定理知 $\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2},\quad \frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}$$

又由于 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(b+a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}(b^2+ab+a^2)$

故 $f'(\xi_1)=\dfrac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}(b+a)=\dfrac{f'(\xi_3)}{3{\xi_3}^2}(b^2+ab+a^2)$

例 10．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ \lambda_1,\lambda_2$ 是满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的任意正数，证明：在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ 和 η，使得

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi)}+\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}=1$$

分析：初一看，不知从何处下手，而且题中特别强调了 ξ 和 η 是不同的两点。我们从物理意义上来分析此问题，以此寻找思路：

设 $s=f(t)$ 是某物体的运动方程，该物体在时刻 $t=0$，处于位置 0，在时刻 $t=1$，处于位置 1，经过 1 个单位时间，运动了 1 个单位路程，$s=f(t)$ 的导数 $\frac{ds}{dt}=f'(t)$ 是速度，若把 λ_1,λ_2 视为路程，路程除以速度是时间，欲证的结论的物理意义就非常明显了：将物体运动的 1 个单位路程分成两段 λ_1,λ_2，两段所用的时间分别为 $\frac{\lambda_1}{v_1},\frac{\lambda_2}{v_2}$（$v_1,v_2$ 分别为两段的平均速度），两段所用时间之和等于总时间 1。而平均速度等于某时刻点上的瞬时速度，问题就简单了。

证明：对于 $\lambda_1\in(0,1)$，$\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=\lambda_1$，

从而 $\lambda_2=1-\lambda_1=f(1)-f(x_0)$，由拉氏中值定理知 $\exists\xi\in(0,x_0),\eta\in(x_0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{\lambda_1}{x_0},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{\lambda_2}{1-x_0},$$

所以 $\frac{\lambda_1}{f'(\xi)}+\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}=x_0+1-x_0=1$，并且 $\xi\neq\eta$。

注：以上两个问题虽同属多介值问题，但有很大的不同。例 9 中只要求证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是存在的，不要求说明它们是不同的，证明过程简单。关键一点是：根据欲证的等式（必要时要对等式作恒等变形），设法构造出一个有二项或多项的恒等式，然后对等式中各项(各项的某个因子)分别用中值定理（拉氏中值定理或柯西中值定理）。例 10 中既要求证明 ξ,η 是存在的，还要求说明它们是不同的，这时应想到如果它们是在不相交的区间内找到的，那它们自然就不相同了，这种问题的处理往往是先将区间分成两个或多个区间，然后在各个区间上用中值定理。能分析该题的几何意义吗？本题的推广见练习题 17.

C.其他：费马定理、达布定理在证明介值问题时也是很有用的。另外也可用中值定理证明含介值的不等式。

例 11. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=1,|f(x)|\le e^{-x}$，证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得

$$f'(\xi)=-e^{\xi}$$

分析：辅助函数很容易看出 $F(x)=f(x)-e^{-x}$，但没法对 $F(x)$ 用罗尔定理。考虑用费马定理去解决：想办法说明 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得最大或最小值。

证明：令 $F(x)=f(x)-e^{-x}$，则 $F(0)=0,F(+\infty)=0,F(x)\le 0$

若 $F(x)=0,\forall x\in[0,+\infty)$，则对 $\forall\xi\in(0,+\infty)$，有 $F'(\xi)=0$，从而结论成立。

若 $\exists x_0\in(0,+\infty),F(x_0)<0$，则 $\exists A>x_0$，使得当 $x\ge A$ 时, $F(x)>F(x_0)/2$,这样 $F(x)$ 在 $[0,A]$

上的最小值在$(0,A)$内取得,即$\exists\xi\in(0,A)$使得

$$F(\xi)=\min_{x\in[0,A]}F(x)$$

由费马定理知 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-e^{\xi}$,结论得证。

注：证明问题： $\exists\xi\in I$，使得$F'(\xi)=0$时，容易想到

（1）用罗尔定理，要注意验证罗尔定理的条件；

（2）用费马定理，要说明$F(x)$在区间I 的内部取得最大值或最小值。

（3）达布定理，该定理不常用，有些题需用该定理，后面的泰勒公式一节中，有例子用到了达布定理。

例 1 2.设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续， $f(x)$ 在$(0,1)$ 内可导， $f(0)=0,$ 且 $f(x)$ 在$[0,1]$上不恒等0，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)f'(\xi)>0$

证明：令$F(x)=f^2(x)$，则$F(0)=0$，由题设知 $\exists x_0\in(0,1),F(x_0)>0$

由拉氏中值定理 $\exists\xi\in(0,1),F'(\xi)=\dfrac{F(x_0)-F(0)}{x_0}>0$，得结论.

练习题

15.设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导,且 $f(a)=f(b)=1$,证明存在$\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$e^{\xi-\eta}(f(\xi)+f'(\xi))=1$$

16．设$0<a<b$, $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：$\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi_1)}{2\xi_1}=\frac{f'(\xi_2)}{4\xi_2{}^3}(b^2+a^2)=\frac{\xi_3f'(\xi_3)}{(b^2-a^2)}(\ln b-\ln a)$$

17．设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续， $f(x)$ 在$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ a_1,a_2,\cdots,a_n$是$n$ 个正数，证明：在$(0,1)$内存在n个互不相同的点$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，使得

$$\frac{a_1}{f'(\xi_1)}+\frac{a_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{a_n}{f'(\xi_n)}=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

18.设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导，且$0\le f(x)\le\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

19．设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ I 上二阶可导，且 $|f(x)|\le 1, [f(0)]^2+[f'(0)]^2=4,$ 证明：$\exists\xi\in(-2,2)$，

使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

20.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f(a)=f(b)$,证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

21. 设 $a<c<b$， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'(c)=0$,证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

22. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'(a)=f'(b)$,证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

23（第 9 届决赛试题）.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)dx\neq 0$，证明：在区间 $[0,1]$ 上存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3，使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx=[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1}f(t)dt+f(x_1)\arctan x_1]x_3=[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2}f(t)dt+f(x_2)\arctan x_2](1-x_3)$$

答案或提示

1. 容易想到辅助函数 $F(x)=f(x)-xf(x_0)$，但不能在 $[0,1]$ 上使用罗尔定理，需找辅助区间。注意到 $F(x_0)F(1)\le 0$，知 $\exists\eta\in[x_0,1]$，使得 $F(\eta)=0$，又 $F(0)=0$，对 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上使用罗尔定理便得结论。

2. (可用观察、分析的方法找出辅助函数,本题的条件与例 1 完全相同，欲证的结论是例 1 的推广（取 $\lambda=0$ 时便是例 1 的结论）。

欲证的结论变形为(把 ξ 换成 x)

$$[f(x)-x]'-\lambda[f(x)-x]=0$$

由此便想到辅助函数 $F(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x))$.

也可用积分还原法找出辅助函数.

记 $g(x)=f(x)-x$,欲证的结论 $g(\xi)'-\lambda g(\xi)=0$ 中的 ξ 换成 x 得 $g(x)'-\lambda g(x)=0$，将其变

形为

$\frac{g'(x)}{g(x)}=\lambda$，两边积分得 $\ln g(x)=\lambda x+c$，变形得 $e^{-\lambda x}g(x)=C$，

那么 $F(x)=e^{-\lambda x}g(x)$ 便是要找的辅助函数.

验证一下是否符合罗尔定理的条件：$g(0)=g(x_0)=0\Rightarrow F(0)=F(x_0)=0$（$x_0$ 在例 1 中找到的）. 对 $F(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上用罗尔定理便可得结论。

注：本题利用了 $g(0)=g(x_0)=0$，因而构造了辅助函数 $F(x)=e^{-\lambda x}g(x)$.一般地若把罗尔定理中的条件“$f(a)=f(b)$”改为“$f(a)=f(b)=0$”,那么可编出很多题:令 $F(x)=f(x)g(x)$（$g(x)$ 为任一可导函数),则有 $F(a)=F(b)=0$,从而 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.取不同的 $\mathrm{g}(x)$,便可编出许多不同的题.比如:取 $\mathrm{g}(x)=e^{x^2}$,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$;若 $a>0$,取 $g(x)=\frac{1}{x}$,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.等等.

3.（本题思路与例 2 差不多）作辅助函数 $F(x)=f(x)-[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)]$

4. 把左端变形为 $\dfrac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$，然后用柯西中值定理。

5. 注意到 $\cos x=\frac{\sin x+\cos x}{2}+(\frac{\sin x+\cos x}{2})'$，便可找出辅助函数 $F(x)=e^x[f(x)-\frac{\sin x+\cos x}{2}]$。

6. 用积分还原法找辅助函数,变形为 $\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2f'(x)}{f(x)}$,两边积分便可得辅助函数 $F(x)=\frac{f'(x)}{f^2(x)}$。

7. 用积分还原法找辅助函数 $F(x)=[f(x)]^{\alpha}f(1-x)$

8. 欲证的结论变形为 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-g(b)f'(x)-f(a)g'(x)=0$，通过观察可看出辅助函数 $F(x)=f(x)g(x)-g(b)f(x)-f(a)g(x)$

9. （1）由题设可知 $\exists x_1,x_2$，使得 $f(x_1)f(x_2)<0$，用连续函数的性质便可证得结论.

（2）通过观察、分析找出辅助函数：

$$f''(\eta)=f(\eta)\to[f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)]|_{x=\eta}=0\to[g'(x)+g(x)]|_{x=\eta}=0$$

$\to [e^x g(x)]|_{x=\xi} = 0\,(g(x) = f'(x) - f(x))$，由此可以看出辅助函数可设为

$F(x) = e^x g(x)$，

为了对 $F(x)$ 使用罗尔定理，需找到两个点 ξ_1, ξ_2 使得 $F(\xi_1) = F(\xi_2)$（显然 $F(a) = F(b)$ 不成立），注意到 $F(x)$ 的零点就是 $f'(x) - f(x)$ 的零点，而且 $[e^{-x} f(x)]' = e^{-x}(f'(x) - f(x))$，因此若能找到 $e^{-x} f(x)$ 的三个零点即 $f(x)$ 的三个零点，就有 $[e^{-x} f(x)]'$ 的二个零点，进而就得到 $F(x)$ 的两个零点，那么就可对 $F(x)$ 使用罗尔定理得到结论。

令 $G(x) = e^{-x} f(x)$，那么 $G(a) = G(\xi) = G(b) = 0 \Rightarrow G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0$

$\Rightarrow F(\xi_1) = F(\xi_2) = 0\,(\xi_1 \in (a, \xi), \xi_2 \in (\xi, b))$，即得到辅助区间为 $[\xi_1, \xi_2]$，再对 $F(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上使用罗尔定理便可得到结论。

10． （用积分还原法找辅助函数）（1）作辅助函数 $F(x) = (1-x)^2 f'(x)$；（2）作辅助函数 $F(x) = x^2 f'(x)$

11． （参照例 7）令 $\lambda = \dfrac{6f(c)}{(c-a)^2(c-b)}$，作辅助函数 $F(x) = 6f(x) - \lambda(x-a)^2(x-b)$，则 $F(a) = F(c) = F(b) = 0, F'(a) = 0$，由罗尔定理知 $\exists \xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$，使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$，$\eta_1 \in (a, \xi_1), \eta_2 \in (\xi_1, \xi_2)$，使得 $F''(\eta_1) = F''(\eta_2) = 0$，再由罗尔定理知 $\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2),$，使得 $F'''(\xi) = 0$，即得结论。

12． 方法一：常值法：令 $\lambda = 2[\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}]$，变形为

$$f(a)(b-c) + f(c)(a-b) + f(b)(c-a) - \frac{\lambda}{2}(a-b)(b-c)(a-c) = 0$$

用 x 取代 c（亦可用 x 取代 a 或 b）便得辅助函数

$$F(x) = f(a)(b-x) + f(x)(a-b) + f(b)(x-a) - \frac{\lambda}{2}(a-b)(a-x)(b-x)$$

方法二：通过观察、分析找出辅助函数：

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

其中 $g(x)=\dfrac{f(a)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(c)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{f(b)(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$

13．（用常值法）．记 $\lambda=2[f(x_0+\alpha h)-\alpha f(x_0+h)-(1-\alpha)f(x_0)]/\alpha(\alpha-1)h^2$，

作辅导函数 $F(t)=f(x_0+th)-tf(x_0+h)-(1-t)f(x_0)-\dfrac{t(t-1)}{2}h^2\lambda$ ）

14. 方法一（用常值法） 令 $\lambda=2[\dfrac{f(c)-f(a)}{(c-a)(c-b)}-\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)(c-b)}]$，变形为

$$(f(c)-f(a))(b-a)-[f(b)-f(a)](c-a)-\frac{\lambda}{2}(b-a)(c-a)(c-b)=0$$

用 x 取代 b (亦可用 x 取代 a 或 c)得辅助函数：

$$F(x)=(f(c)-f(a))(x-a)-[f(x)-f(a)](c-a)-\frac{\lambda}{2}(x-a)(c-a)(c-x)$$

则 $F(a)=F(c)=F(b)=0$,由此可得结论。

方法二（通过观察、分析找出辅助函数）作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(c)-f(a)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c)\text{。}$$

15. 欲证的结论变形为 $e^{\eta}=e^{\xi}(f'(\xi)+f(\xi))$，等式左边想到 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$，等式右边想到 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$，

由题设有等式 $\dfrac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$。

16. 由欲证的结论易想到等式：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^4-a^4}(a^2+b^2)=\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}\cdot\frac{\ln b-\ln a}{b^2-a^2}\text{。}$$

17. 记 $\lambda_i=\dfrac{a_i}{\sum_{i=1}^{n}a_i},i=1,2,\cdots,n$，由连续函数的性质知 $\exists x_1\in(0,1)$，使得 $f(x_1)=\lambda_1$；$\exists x_2\in(x_1,1)$，

使得 $f(x_2)=\lambda_1+\lambda_2$； $\exists x_3\in(x_2,1)$， 使得 $f(x_3)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$， …， $\exists x_{n-1}\in(x_{n-2},1)$， 使得

$f(x_{n-1})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}$。记 $x_0=0,x_n=1$，那么有 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n$。由拉氏中

值定理知 $\exists\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$， 使得 $\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i)$， 即 $\dfrac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=x_i-x_{i-1}$， $i=1,2,\cdots,n$，

从而 $\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=1$，即

$$\frac{a_1}{f'(\xi_1)}+\frac{a_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{a_n}{f'(\xi_n)}=\sum_{i=1}^{n}a_i$$ 。

18. 注意到 $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=(\frac{x}{1+x^2})'$ ，因此可想到辅助函数为 $F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$ ，但没法对 $F(x)$ 用罗尔定理。考虑用费马定理去解决：想办法说明 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得最大或最小值。

19. 作辅助函数 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$，用费马定理证明，需要说明 $F(x)$ 可在 $(-2,2)$ 内取得最值：

$$f'(x_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2}\Rightarrow |f'(x_1)|\le 1, x_1\in(-2,0)$$

$$f'(x_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}\Rightarrow |f'(x_2)|\le 1, x_2\in(0,2)$$

$F(x_1)\le 2$， $F(x_2)\le 2$， $F(0)=4\Rightarrow F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的最大值在其内部取得，从而 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(-2,2)$，使得 $F(\xi)=\max\limits_{x\in[x_1,x_2]}F(x)$，则 $F'(\xi)=0$，即 $2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0$ 。下面证明 $f'(\xi)\ne 0,$ 若 $f'(\xi)=0,$ 则 $F(\xi)=f^2(\xi)\le 1$，这与 $F(\xi)\ge 4$ 矛盾，故 $f'(\xi)\ne 0,$ 所以

$f(\xi)+f''(\xi)=0$ 。

20. 用观察法:目标等式变形为 $[f(x)-f(a)]'-\frac{1}{b-a}[f(x)-f(a)]=0$,因此辅助函数为

$F(x)=e^{\frac{-x}{b-a}}(f(x)-f(a))$,用罗尔解决问题。

本题是典型的用罗尔定理解决的问题，放在这里主要是想和下面 2 题作比较.

21. 辅助函数为 $F(x)=e^{\frac{-x}{b-a}}(f(x)-f(a))$,则 $F(a)=0$，

$$F'(x)=-\frac{1}{b-a}e^{\frac{-x}{b-a}}(f(x)-f(a))+e^{-\frac{x}{b-a}}f'(x)$$

由 $f'(c)=0$,得 $F'(c)=-\frac{F(c)}{b-a}$,

(i)若 $F(c)=0$,结合 $F(a)=0$ 易得结论;

(ii)若 $F(c)\ne 0$,由拉氏中值定理知 $\eta\in(a,c)$,使得

$F'(\eta)=\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=\frac{F(c)}{c-a}$,又 $F'(c)=-\frac{F(c)}{b-a}$,故 $F'(\eta)$ 与 $F'(c)$ 必异号,由达布定理可得结论.

注：本题与上题欲证的结论相同,辅助函数也相同,但由于条件不同,因而在有了辅助函数后往下的做法就不一样了.许多题目在有了辅助函数后,往下的证明过程是简单的,但也有些题目在有了辅

助函数后,往下的证明过程还要费一番周折。

22. 首先易见 $f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow f'(x)-f'(a)=\dfrac{f(x)-f'(a)x-(f(a)-af'(a))}{x-a}$，即

$(f(x)-f'(a)x)'=\dfrac{f(x)-f'(a)x-(f(a)-af'(a))}{x-a}$，

因此可不妨设 $f'(a)=0$ (否则考察函数 $g(x)=f(x)-f'(a)x$)

用观察分析法找辅助函数,目标等式变形为

$(x-a)(f(x)-f(a))'-(f(x)-f(a))=0$，

而上左端正是函数 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的导数的分子.因此作辅助函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, a<x\le b\\ 0, x=a\end{cases}$$

下面给证明过程。

证明:（I）若 $f'(a)=0$，令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, a<x\le b\\ 0, x=a\end{cases}$$

易见 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导，且 $F'(b)=-\dfrac{F(b)}{b-a}$ (这里用到了 $f'(b)=0$))

(i)若 $F(b)=0$,结合 $F(a)=0$,易得结论;

(ii) 若 $F(b)\ne 0$,不妨设 $F(b)>0$,则 $F'(b)=-\dfrac{F(b)}{b-a}<0$,由导数定义可知存在 $x=b$ 的某个左侧邻域 $(b-\delta,b)$,使得对 $\forall x\in(b-\delta,b)$,有 $F(x)>F(b)$. 又 $F(a)=0$,故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值必在 (a,b) 内取到,设 $\xi\in(a,b)$ 是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值点,由费马定理知 $F'(\xi)=0$.从而

$$(\xi-a)f'(\xi)-(f(\xi)-f(a))=0\ ,$$

又由于 $\xi-a\ne 0$,故

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

(II) 若 $f'(a)\ne 0$，令 $g(x)=f(x)-f'(a)x$，则 $g'(a)=g'(b)=0$，由(I)知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$g'(\xi)=\frac{g(\xi)-g(a)}{\xi-a},$$

即 $f'(\xi)-f'(a)=\dfrac{f(\xi)-f'(a)\xi-(f(a)-f'(a)a)}{\xi-a}$,

化简得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

得结论.

(本题难度较大)

23.令 $G(x)=\arctan x\cdot\int_0^x f(t)dt$，则 $G(0)=0$， $G(1)=\dfrac{\pi}{4}\int_0^1 f(x)dx$，且

$G'(x)=f(x)\arctan x+\dfrac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)dt$，

由连续函数的介值性质知存在 $x_3\in(0,1)$ 使得

$$G(x_3)=\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx,$$

由拉格朗日中值定理知存在 $x_1\in(0,x_3)$ 使得

$$G(x_3)=G(x_3)-G(0)=G'(x_1)x_3,$$

即

$[f(x_1)\arctan x_1+\dfrac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)dt]x_3=\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx$。

同样地，存在 $x_2\in(x_3,1)$ 使得

$$G(1)-G(x_3)=G'(x_2)(1-x_3),$$

即

$[f(x_2)\arctan x_2+\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)dt](1-x_3)=\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx$,

所以在区间 $[0,1]$ 上存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3， 使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx=[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)dt+f(x_1)\arctan x_1]x_3=[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)dt+f(x_2)\arctan x_2](1-x_3).$$

本题初一看有点无从下手，我们分析一下欲证的结论:

注意到 $\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2}\arctan 1\cdot\int_0^1 f(x)dx$,

$[\dfrac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)dt+f(x_1)\arctan x_1]x_3=(\arctan x\int_0^x f(t)dt)'|_{x=x_1}\cdot x_3$

$[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)dt+f(x_2)\arctan x_2](1-x_3)=(\arctan x\int_0^x f(t)dt)'|_{x=x_2}\cdot(1-x_3)$

若令 $G(x)=\arctan x\cdot\int_0^x f(t)dt$，则 $G(x)=0$， $G(1)=\dfrac{\pi}{4}\int_0^1 f(t)dt\neq 0$，欲证的结论为

$\frac{1}{2}G(1)=G'(x_1)x_3$，及$\frac{1}{2}G(1)=G'(x_2)(1-x_3)$，

$\frac{1}{2}G(1)$介于$G(0)$与$G(1)$之间，故$\exists x_3\in(0,1)$，$G(x_3)=\frac{1}{2}G(1)$，于是欲证的结论又转化为

$G(x_3)-G(0)=G'(x_1)x_3$，及$G(1)-G(x_3)=G'(x_2)(1-x_3)$，

这就是拉格朗日中值定理.至此问题得到解决.

关键词：剥丝抽茧，转化问题，认清本质，提炼信息，整理思路，确定路径.