第三章 一元积分学

第一节 不定积分

本节基本内容有：原函数及不定积分的概念，不定积分的计算。重点是掌握不定积分的计算。不定积分的计算方法大致可分为基本方法和特殊方法。

1.基本方法是指“一表三法”，即基本积分公式表、第一、二换元法、分部积分法。这里要求：（1）熟记基本积分公式表；（2）凑微分是计算积分的基本功，要很熟练，特别是一些简单的微分式要非常熟悉（比如$\frac{1}{x}dx = d\ln x$，$\frac{1}{x^2} = -d\frac{1}{x}, \cos xdx = d\sin x$等）；（3）基本方法中也包括对被积函数的恒等变形，特别将被积函数分拆成简单函数的和、差（比如有理函数的分拆、三角函数的分拆）以及对分子、分母同乘以（或同除以）一个因子等技巧；（4）熟悉换元法、分部法的一些典型的类型和一般原则（通过例题和练习题总结）。

2. 特殊方法有很多，本节通过几个例子介绍几个方法：裂项相消法、循环回归法（方程法）配对法，递推法。

例1． 求下列不定积分

(1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (2) $\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$

解(1)分析:思路一:被积函数为无理函数且含有$\sqrt{x^2-1}$,容易想到通过换元$x = \sec t$将被积函数中的根号消掉（一般而言当被积函数中含有$\sqrt{a^2 \pm x^2}, \sqrt{x^2 \pm a^2}$时可试一试三角代换）. 思路二：被积函数中分母的次数比分子高二次，可想到倒代换$t = \frac{1}{x}$（一般而言当被积函数中分母的次数比分子高二次或二次以上时，可试一试倒代换$t = \frac{1}{x+a}$），思路三：如分子分母同乘以x，则被积表达式变成$\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{dx^2}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$，可作换元$t = x^2$使问题得到简化，但还需再换元.

思路四：被积表达式变形为$\frac{dx}{x(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$，可作换元$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. 以上思路正是使用换元法的一般原则.下面就前三个思路试一试.

方法一：令$x = \sec t$，那么$dx = \sec t\tan tdt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int 1dt = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C$$

方法二：令$x = \frac{1}{t}$，那么$dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C$$

或（直接变形）$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C$.

方法三：

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

作换元 $t = x^2$，则 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$,

（至此问题得到了简化，容易想再换元 $u = \sqrt{t-1}$ 消去根号）

令 $u = \sqrt{t-1}$ ，则 $t = u^2 + 1, dt = 2udu$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \arctan u + C = \arctan\sqrt{t-1} + C = \arctan\sqrt{x^2-1} + C .$$

或（不换元，直接通过凑微分解决

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d\sqrt{x^2-1}}{1+(\sqrt{x^2-1})^2} = \arctan\sqrt{x^2-1} + C .$$

（2）思路：被积函数是两类不同函数 $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ 和 $\arctan x$ 的乘积，此时应想到用分部法。一般而言当被积函数是五类函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）中两类或多类函数的乘积时，可试一试分部法 $\int udv = uv - \int vdu$ 。记住两条原则：（1）$\int vdu$ 比 $\int udv$ 简单，（2）被积函数中选择哪一部分与 dx 结合凑成 dv（或凑出 v）是关键，有一般规律：$\int$ 反, 对, 幂, 三, 指 dx ，式中离 dx 越近的那类函数越优先与 dx 结合凑出 v .

本题中应是 $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ 与 dx 结合凑出 dv： $\frac{x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}d(\frac{1}{1+x^2})$

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \arctan x d\frac{1}{1+x^2} = -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

对后一积分，可作换元 $t = \arctan x$ ，那么

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}+C=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\arctan x}{2}+C$$

故$\displaystyle\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{\arctan x}{4}+C$

注：对后一积分也可用教材中介绍过的关于积分$\displaystyle\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$的推递式去解决．本题也可先作换元$x=\tan t$，再分部：

$$\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx=\int t\sin t\cos tdt=-\frac{1}{4}\int td\cos 2t=\cdots.$$

总结：不定积分的试题变化多样、技巧性较强，往往一题有多种解法，也可能需要同时用换元、分部等方法和技巧才能解决．但无论如何我们首先掌握其一般步骤、基本方法和基本思路，通过加强训练达到熟能生巧的程度．一般步骤是：首先看是否需要对被积函数通过代数运算作恒等变形（特别是变为若干简单函数的和、差。例如，有理分式的拆分，三角函数的变形等），然后根据被积函数的特点选择采用凑微分法、第二换元法或分部法或组合使用，最后利用不定积分的线性运算法则和基本积分公式求出结果。

第 4 届决赛的一道题：求$\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx$。

解答分析：被积函数是三类函数的积，几乎可以肯定要用分部法。

简单的思路是$xdx=\frac{1}{2}d(1+x^2)$，

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\arctan x\ln(1+x^2)d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int(\ln(1+x^2)+2x\arctan x)dx=\cdots$$

也可以用$x\ln(1+x^2)dx$凑出dv，为此求积分

$$\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d(1+x^2)=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+c,$$

可见$x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}d[(1+x^2)\ln(1+x^2)-(x^2+1)]=\frac{1}{2}d[(1+x^2)(\ln(1+x^2)-1)]$，

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\arctan xd[(1+x^2)(\ln(1+x^2)-1)]$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x[\ln(1+x^2)-1)]-\frac{1}{2}\int(\ln(1+x^2)-1)dx=\cdots$$ 。

还可以用$x\arctan xdx$凑出dv：

$$\int x\arctan xdx=\frac{1}{2}\int\arctan xd(1+x^2)=\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x-\frac{1}{2}x+c,$$

从而$x\arctan xdx=\frac{1}{2}d[(1+x^2)\arctan x-x]$，

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d[(1+x^2)\arctan x-x]$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)[(1+x^2)\arctan x-x]-\int(x\arctan x-\frac{x^2}{1+x^2})dx=\cdots$$ 。

例 2．求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1+\tan x}{\cos x}e^x dx$　　(2) $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$　　（3）$\int\frac{1}{1+x^3}dx$

（1）分析：先作变形：$\int\frac{1+\tan x}{\cos x}e^x dx=\int(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x})e^x dx=\int\frac{e^x dx}{\cos x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx$，分成了两个积分，每个积分都不好求，它们的被积函数都是不同类型函数的积，可用分部法试一试：先试第一个$\int\frac{e^x dx}{\cos x}=\int\frac{1}{\cos x}de^x=\frac{e^x}{\cos x}-\int e^x d\,\frac{1}{\cos x}=\frac{e^x}{\cos x}-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx$，分部后右端出现的积分并不比左端的积分简单，但正好可以与原积分中的后一项相消，于是问题得以解决。

解：$\int\frac{1+\tan x}{\cos x}e^x dx=\int(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x})e^x dx=\int\frac{e^x dx}{\cos x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx$

$$=\int\frac{1}{\cos x}de^x+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx=\frac{e^x}{\cos x}-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx=\frac{e^x}{\cos x}+C.$$

总结：这种方法我们称之为裂项相消法，基本过程是这样的：将欲求的不定积分 I 分拆成两项或多项，然后对其中某一项或多项作分部积分，如能达到相消的目的，那问题就解决了。本题对后一项作分部积分也能达到相消的目的$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx=\int e^x d\,\frac{1}{\cos x}$。注意：最后结果中要加上任意常数$C$。

（2019 年的一道填空题，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=$ _____ 。这是定积分，其做法的思路与此题一样。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x d\tan\frac{x}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}dx=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$$ 。）

（2）分析：被积函数比较复杂，涉及几类函数，可试一试分部法：

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

右端积分还不好求，再分部试一试：

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

右端出现了与左端一样的积分，那么我们把该积分解出来就可得结果。

解：$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

所以$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$

此题有另外常用的思路，思路一：被积函数中有$\arctan x$（并且分母中还有$1+x^2$），可试一试换元$t = \arctan x$，即$x = \tan t$：

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \sin t e^t dt = \cdots$$

换元后的积分是我们熟悉的积分。

思路二：被积函数中有一个复杂的因子$e^{\arctan x}$。有一种值得一试的方法：当被积函数中有一个复杂并且不好处理的因子时，可将这个复杂的因子直接设为一个变量。本题可设$t = e^{\arctan x}$，则原积分变为$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \sin(\ln t)dt = \cdots$

本例的后两种思路中，换元后的积分还需通过循环回归法去解.

总结：以上方法我们称之为循环法，基本过程是这样的：将欲求的不定积分$I = \int f(x)dx$通过运算（主要是分部积分两次或多次，且每次分部中都要用同一类函数去凑v）后出现如下形式

$$I = F(x) + \alpha I \ (\alpha \neq 1)$$

再解出I（要注意：最后结果中要加上任意常数C）。其实这种方法我们在学高数时已经学过，典型例子就是求$\int \sin x e^x dx$。

这种方法在定积分计算中也很有用。不同的是不定积分是通过多次分部来循环，而定积

分则可通过分部、换元等各种方法来循环。这种方法最后是通过解方程得到答案，所以又称为方程法。

(3)分析:相信同学们都能做出这题,这是有理函数的积分. 我们总可以通过将有理函数分拆成最简分式的和，然后再求出答案： $\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}$. 本题可用另一种方法：配对法去解。

解：令 $I=\int\frac{1}{1+x^3}dx,\ J=\int\frac{x}{1+x^3}dx$ ，则

$$I+J=\int\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int\frac{1}{1-x+x^2}dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\frac{1}{2})+C_1$$

$$I-J=\int\frac{1-x}{1+x^3}dx=\int\frac{1-x+x^2-x^2}{1+x^3}dx=\int\frac{1}{1+x}dx-\int\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

$$=\ln(1+x)-\frac{1}{3}\ln(1+x^3)+C_2$$

由以上两式可得

$$I=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(1+x^3)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\frac{1}{2})+C$$

总结: 这种方法的思路是这样的: 为求积分 I ，给它配另一个积分 J ，然后求出 $I+J,I-J$ （更一般的是 $aI+bJ,cI+dJ$ ）再解出 I 。此方法我们应该见过，有个典型的例子：求 $I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx,J=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$,此例中 $I+J,I-J$ 都很容易求得.

例 3.（1）已知 $f'(\ln x)=\begin{cases}1,0<x<1\\ \sqrt{x},x\geq 1\end{cases}$ ，则 $f(x)=$ ________ ，又若 $f(0)=0$ ，则 $f(x)=$ ________ 。

（2）已知 $(f(\ln x))'=\begin{cases}1,0<x<1\\ \sqrt{x},x\geq 1\end{cases}$ ，则 $f(x)=$ ________ 。

（3）已知 $\int\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$ 的结果中不含反正切函数，则 $a=$ ______ 。

（4）已知 $\int x^3 f'(x)dx=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$ ，则 $f(x)=$ ________ 。

（5）设 $y=y(x)$ 是由方程 $y(x-y)^2=x$ 所确定的隐函数，则 $\int\frac{dx}{x-3y}=$ ______ 。

解：（1）令 $t=\ln x$，则 $f'(t)=\begin{cases}1,t<0\\ e^{\frac{t}{2}},t\geq 0\end{cases}$

$f(t)=\int f'(t)dt=\begin{cases}t+c_1,t<0\\ 2e^{\frac{t}{2}}+c_2,t\geq 0\end{cases}$，再由 $f(t)$ 在 $t=0$ 处的连续可得 $c_1=2+c_2$

所以 $f(t)=\begin{cases}t+2+c,t>0\\ 2e^{\frac{t}{2}}+c,t\geq 0\end{cases}$，即 $f(x)=\begin{cases}x+2+c,x>0\\ 2e^{\frac{x}{2}}+c,x\geq 0\end{cases}$

若 $f(0)=0$ 则 $c=-2$，所以

$$f(x)=\begin{cases}x,x>0\\ 2e^{\frac{x}{2}}-2,x\geq 0\end{cases}$$

（2） $f(\ln x)=\int (f(\ln x))'dx=\begin{cases}x+c,0<x<1\\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}+c,x\geq 1\end{cases}$

所以 $f(x)=\begin{cases}e^x+c,x<0\\ \frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}+\frac{1}{3}+c,x\geq 0\end{cases}$

注：（1），（2）有何区别？

（3） $\dfrac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

依题意必有 $C=0$，从而有恒等式

$$\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx}{x^2+1}$$

两边同乘 $(x+1)(x^2+1)$，并比较两边系数可得

$\begin{cases}A+B=1\\ B=a\\ A=2\end{cases}$，从而得 $a=-1$

（4）依题意有

$x^3f'(x)=(x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x)'=-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x$，而从

$$f'(x)=\frac{2\sin x}{x^3}-\frac{2\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}$$

$$f(x)=2\int\frac{\sin x}{x^3}dx-2\int\frac{\cos x}{x^2}dx-\int\frac{\sin x}{x}dx=2\int\frac{\sin x}{x^3}dx-2\int\frac{\cos x}{x^2}dx+\int\frac{1}{x}d\cos x$$

$$=2\int\frac{\sin x}{x^3}dx-\int\frac{\cos x}{x^2}dx+\frac{\cos x}{x}=\frac{\cos x}{x}-\int\frac{1}{x^2}d\sin x+2\int\frac{\sin x}{x^3}dx=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}+C$$

（5）令 $x-y=t$，则有 $yt^2=x$，从而

$$x=\frac{t^3}{t^2-1},\quad y=\frac{t}{t^2-1},$$

$$dx=\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}dt,\quad x-3y=\frac{t(t^2-3)}{t^2-1},$$

从而有

$$\int\frac{dx}{x-3y}=\int\frac{t}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\ln|t^2-1|+c=\frac{1}{2}\ln|(x-y)^2-1|+c.$$

（2019 年的一道填空题与此题类似，设隐函数 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\int\frac{dx}{y^2}=$______。

令 $y=tx$，则 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}$， $y=\dfrac{1}{t(1-t)}$， $dx=\dfrac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}dt$，从而

$$\int\frac{dx}{y^2}=\int\frac{-2+3t}{t}dt=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln|\frac{y}{x}|+C$$ ）

练习题。

1．求下列不定积分。

（1）$\int\frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx$　　（2）$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$　　（3）$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

（4）$\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$　　（5）$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$　　(6) $\int\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

（7）$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^3}dx$　　（8）$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^4}dx$

（9）$\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}dx$　（第 10 届初赛试题）

2．求下列不定积分。

（1）$\int \sin(\ln x)dx$　　（2）$\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx$　　（3）$\int \frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx$

（4）$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$　　（5）$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx$

（6）$\int \frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx$　（第 9 届初赛试题）

(7) $\int \frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$　　(8) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$　　（9）$\int \frac{\sin^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

（10）$\int \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

3.(1)设 $I(m,n)=\int \cos^m x\sin^n x dx,$ 证明:

$$I(m,n)=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)$$

(2) 设 $I(n)=\int \frac{\sin nx}{\sin x}dx\,(n>2),$ 证明:

$I(n)=\frac{2\sin(n-1)x}{n-1}+I(n-2)$。

答案或提示

1．（1）$\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx=\int \frac{(1+x)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx$

$$=\int \frac{d(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}\overset{t=xe^x}{=}\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})dt=x+\ln x-\ln(1+xe^x)+C$$

（2）$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}\overset{t=\sqrt{x}}{=}2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}dt=(\arctan\sqrt{x})^2+C$

（3）$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int \ln x d\frac{1}{1+x^2}=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})d(x^2)=\cdots$$

（4）$\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx\ =\int \frac{x\cos\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}}dx=-\frac{1}{8}\int xd\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdots=-\frac{x}{8}\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C$

（5）$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

$$=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\cdots=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$$

(6) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{1}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx=\int\frac{\sec^2 2x}{\sec^2 2x-\frac{1}{2}\tan^2 2x}dx$

$$=\int\frac{d\tan 2x}{2+\tan^2 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}})+C,$$

或

$$\int\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{1/\cos^4 x}{1+\tan^4 x}dx=\int\frac{\sec^2 xd\tan x}{1+\tan^4 x}dx=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\int\frac{1+1/t^2}{t^2+1/t^2}dt==\int\frac{1}{(t-\frac{1}{t})^2+2}d(t-\frac{1}{t})=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{t-1/t)}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x-\cot x)}{\sqrt{2}}+C.$$

(7) $\displaystyle\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\cos^3(x-\frac{\pi}{4})}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\sec^3(x-\frac{\pi}{4})dx$

$$I=\int\sec^3(x-\frac{\pi}{4})dx=\int\sec(x-\frac{\pi}{4})d\tan(x-\frac{\pi}{4})=\sec(x-\frac{\pi}{4})\tan(x-\frac{\pi}{4})-\int\tan^2(x-\frac{\pi}{4})\sec(x-\frac{\pi}{4})dx$$

$$=\sec(x-\frac{\pi}{4})\tan(x-\frac{\pi}{4})-\int\sec^3(x-\frac{\pi}{4})dx+\int\sec(x-\frac{\pi}{4})dx$$

$$=\sec(x-\frac{\pi}{4})\tan(x-\frac{\pi}{4})+\ln(\sec(x-\frac{\pi}{4})-\tan(x-\frac{\pi}{4}))-I,$$

所以

$$I=\frac{1}{2}[\sec(x-\frac{\pi}{4})\tan(x-\frac{\pi}{4})+\ln(\sec(x-\frac{\pi}{4})-\tan(x-\frac{\pi}{4}))]+C,$$

故

$$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\sec(x-\frac{\pi}{4})\tan(x-\frac{\pi}{4})+\ln(\sec(x-\frac{\pi}{4})-\tan(x-\frac{\pi}{4}))]+C$$

（8）$\displaystyle\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^4}dx=\frac{1}{4}\int\sec^4(x-\frac{\pi}{4})dx=\frac{1}{4}\int\sec^2(x-\frac{\pi}{4})d\tan(x-\frac{\pi}{4})$

$$=\frac{1}{12}\tan^3(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{4}\tan(x-\frac{\pi}{4})+C$$

或

$$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^4}d\tan x=\frac{1}{4}\int\frac{t^2-1}{(1+t)^4}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{t-1}{(1+t)^3}dt=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{2}{(1+t)^3})dt=\cdots$$

(9) $\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

本题的难点是凑微分：$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx=d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.我们可以先求一个不定积分$\int\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx$，得到此微分式。

2．（1）（用循环法）$I=\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx-I$$

$$I=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$$

（2）（裂项相消法）$\int\frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx=\int\sqrt{1+x^2}e^x dx+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx$

$$=\sqrt{1+x^2}e^x-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx=\sqrt{1+x^2}e^x+C$$

（3）（配对法）令$I=\int\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx$，$J=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}dx$，则

$$I+J=\int\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}dx=\int(1-\sin x\cos x)dx=x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C_1$$

$$I-J=\int\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\cos x-\sin x)((\cos x+\sin x)^2+1)}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(\cos x+\sin x)^2+1}{\cos x+\sin x}d(\cos x+\sin x)=\frac{1}{4}(\cos x+\sin x)^2+\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+C_2,$$

故$I=\int\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin^2 x+\frac{1}{8}(\cos x+\sin x)^2+\frac{1}{4}\ln|\cos x+\sin x|+C$

（4）（裂项相消法，两项同时分部以达到相消的目的）

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int x\cos x e^{\sin x}dx\ +\int e^{\sin x}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int xde^{\sin x}\ +\int e^{\sin x}d\frac{1}{\cos x}=xe^{\sin x}+\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+C$$

（5）$\int\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx=-\int x^2e^x d\frac{1}{x+2}=-\frac{x^2e^x}{x+2}+\int xe^x dx=\cdots$

或 $\int\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx=\int e^x dx-4\int\frac{x+1}{(x+2)^2}e^x dx$

$$=e^x-4\int\frac{e^x}{x+2}dx+4\int\frac{e^x}{(x+2)^2}dx$$

$$=e^x-4\int\frac{1}{x+2}de^x+4\int\frac{e^x}{(x+2)^2}dx$$

$$=e^x-\frac{4e^x}{x+2}+C$$

（6）$\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx=2\int\frac{e^{-\sin x}\sin x}{(1-\sin x)^2}d\sin x=2\int\frac{te^{-t}}{(1-t)^2}dt=2\int te^{-t}d\frac{1}{1-t}$

$$=\frac{2te^{-t}}{1-t}-2\int e^{-t}dt=\frac{2te^{-t}}{1-t}+2e^{-t}+C=\frac{2\sin xe^{-\sin x}}{1-\sin x}+2e^{-\sin x}+C.$$

(7) （配对法）令 $I=\int\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$, $J=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$,则

$$I-J=\int\frac{1-\sin x\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\int\frac{dx}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sec(x-\frac{\pi}{4})+\tan(x-\frac{\pi}{4}))+C_1,$$

$$I+2J=\int\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin x+\cos x}{1-\sin x\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\frac{1}{2}[1+(\sin x-\cos x)^2]}$$

$$=2\arctan(\sin x-\cos x)+C_2$$

所以

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(\sec(x-\frac{\pi}{4})+\tan(x-\frac{\pi}{4}))+\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+C。$$

本题可以不用配对法去求（配出 $J=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$ 不容易想到）:

$$I=\int\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}dx=\int\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})(1-\frac{1}{2}\sin 2x)}dx$$

令 $t=x+\frac{\pi}{4}$，则

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{2}\sin t(1+\frac{1}{2}\cos 2t)}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin t}{(1-\cos^2 t)(\frac{1}{2}+\cos^2 t)}dt$$

$$=-\frac{2}{3\sqrt{2}}\int(\frac{1}{1-\cos^2 t}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos^2 t})d\cos t$$

$$=-\frac{2}{3\sqrt{2}}(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\cos t))+C$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\frac{1+\cos(x+\frac{\pi}{4})}{1-\cos(x+\frac{\pi}{4})}-\frac{2}{3}\arctan(\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}))+C\text{。}$$

或 $f(x)=\int\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)(1+(\cos x-\sin x)^2)}\mathrm{d}x$

$$=2\int\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2(1+(\cos x-\sin x)^2)}\mathrm{d}x$$

$$=-2\int\frac{\mathrm{d}(\cos x-\sin x)}{(2-(\cos x-\sin x)^2)(1+(\cos x-\sin x)^2)}$$

$$=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{(2-t^2)(1+t^2)}=-\frac{2}{3}\int(\frac{1}{2-t^2}+\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}-\frac{2}{3}\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\cos x-\sin x}{\sqrt{2}-\cos x+\sin x}-\frac{2}{3}\arctan(\cos x-\sin x)+C\text{。}$$

(8) 令 $I=\int\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$， $J=\int\frac{\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$， 则

$$I+J=\int\frac{1}{1-\sin x\cos x}dx=\int\frac{d\tan x}{1+\tan^2 x-\tan x}=\int\frac{d\tan x}{\frac{3}{4}+(\tan x-\frac{1}{2})^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}+C_1$$

$$I-J=-\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2)}=-2\int\frac{dt}{t(3-t^2)}=-\frac{1}{3}\int(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{3-t^2})dt^2$$

$$=\frac{-2}{3}\ln t+\frac{1}{3}\ln(3-t^2)+C_2=\frac{-2}{3}\ln(\sin x+\cos x)+\frac{1}{3}\ln(1-\sin x\cos x)+C_2-\frac{1}{3}\ln 2$$

所以

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln(\sin x+\cos x)+\frac{1}{6}\ln(1-\sin x\cos x)+C\text{。}$$

(9) 令 $I=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$， $J=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$， 则

$$I+J=\int\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(\sec(x-\frac{\pi}{4})-\tan(x-\frac{\pi}{4}))+\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+C_1$$

$$I-J=\int\frac{\sin x-\cos x}{1-\sin x\cos x}dx=2\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{3-(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\sin x+\cos x}{\sqrt{3}-\sin x-\cos x}+C_2$$

所以

$$I=\frac{\sqrt{2}}{6}\ln(\sec(x-\frac{\pi}{4})-\tan(x-\frac{\pi}{4}))+\frac{1}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\sin x+\cos x}{\sqrt{3}-\sin x-\cos x}+C \text{。}$$

（10）令 $I=\int\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$， $J=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$，则

$$I+J=x+C_1$$

$$I-J=-\int\frac{(1+(\sin x+\cos x)^2)d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)(3-(\sin x+\cos x)^2)}=-\int\frac{(1+t^2)dt}{t(3-t^2)}=-\frac{1}{6}\int(\frac{1}{t^2}+\frac{4}{3-t^2})dt^2$$

$$=-\frac{1}{6}(2\ln t-4\ln(3-t^2))+C_2=-\frac{1}{3}\ln(\sin x+\cos x)+\frac{2}{3}\ln(1-\sin x\cos x)+C_2-\frac{2}{3}\ln 2$$

所以

$$I=\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\ln(\sin x+\cos x)+\frac{1}{3}\ln(1-\sin x\cos x)+C$$

3. （1）$I(m,n)=\frac{1}{n+1}\int\cos^{m-1}x d\sin^{n+1}x=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\sin^{n+2}x\cos^{m-2}xdx$

$$=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int(1-\cos^2 x)\sin^n x\cos^{m-2}xdx$$

$$=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)-\frac{m-1}{n+1}I(m,n)\text{，}$$

于是得 $I(m,n)=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)$。

(2) $I(n)=\int\frac{\sin(n-1)x\cos x+\sin x\cos(n-1)x}{\sin x}dx$

$$=\frac{\sin(n-1)x}{n-1}+\frac{1}{2}\int\frac{\sin nx+\sin(n-2)x}{\sin x}dx=\frac{\sin(n-1)x}{n-1}+\frac{1}{2}I(n)+\frac{1}{2}I(n-2)\text{，}$$

于是得 $I(n)=\frac{2\sin(n-1)x}{n-1}+I(n-2)$。