第一章　函数、极限、连续

第一节　函数

本节主要问题有：（1）函数的运算（主要是函数的复合运算），函数性质的讨论，函数性质主要指单调性、有界性（这两个性质的讨论主要运用导数）、周期性和奇偶性。（2）函数方程求解。

A. 函数的运算及函数性质的讨论。这类问题并不难，考试中偶而会出现。

例 1：（1）按周期性和奇偶性 $y=\ln(\sec x+\tan x)$ 是＿＿＿＿＿＿。

（2）设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$, 则 $f(f(x))=$＿＿＿＿＿。

（3）设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 则 $f(f(f(x)))$ 的定义域为＿＿＿＿＿。

解：（1）以 2π 为周期的奇函数

（2） $f(x)=|1+x|-|1-x|=\begin{cases}-2, x\le -1\\ 2x,-1<x\le 1\\ 2, x>1\end{cases}$

$$f(f(x))=\begin{cases}-2, f(x)\le -1\\ 2f(x),-1<f(x)\le 1\\ 2, f(x)>1\end{cases}$$

即 $f(f(x))=\begin{cases}-2, x\le -\dfrac{1}{2}\\ 4x,-\dfrac{1}{2}<f(x)\le \dfrac{1}{2}\\ 2, x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

（3） $f(f(f(x)))=\dfrac{x}{\sqrt{1-3x^2}}$，定义域为 $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

例 2：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$，证明：$f(x)$ 为周期函数.

分析：本题就是要找一个 $T>0$，使得 $f(x+T)=f(x)$，由题中所给的条件容易猜到 T 应该是一个整数,这就有思路了：由 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，得 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，$f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$，至此可得 $f(x+3)=-f(x)$，由此等式可得 $f(x+6)=f(x)$，于是命题得证．解答过程不再重述.

B. 函数方程。这类问题其实难度不大. 但由于学生在平时训练中涉及不多,因而在考试中一旦出现这类题，会有无从下手的感觉。下面举几个例子。

例3．设 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 时满足 $3f(x)+4x^2 f(-\frac{1}{x})+\frac{7}{x}=0$，

（1） 求 $f(x)$ 的表达式；

（2） 求 $f(x)$ 的极值.

解：（1）由已知

$$3f(x)+4x^2 f(-\frac{1}{x})+\frac{7}{x}=0 \qquad (1)$$

令 $x=-\frac{1}{t}$，代入式（1）得

$3f(-\frac{1}{t})+\frac{4}{t^2}f(t)-7t=0$，即 $3f(-\frac{1}{x})+\frac{4}{x^2}f(x)-7x=0$ （2）

由（1）和（2）可得 $f(x)=4x^3+\frac{3}{x}$.

（2） 略

例4 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，且满足 $f(3x)-f(2x)=x$，求 $f(x)$。

解：由题设知

$$f(x)=\frac{x}{3}+f(\frac{2}{3}x)=\frac{x}{3}+\frac{2}{3^2}x+f((\frac{2}{3})^2 x)$$

$$=\cdots=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{3^n})x+f((\frac{2}{3})^n x)$$

令 $n\to\infty$，得 $f(x)=x+f(0)$，即 $f(x)=x+c$。

例5．设 $f(x)$ 可导且 $f'(0)=1$，对于任意 x,y 满足。

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

求 $f(x)$.

解：令 $y=0$，得 $f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

由题设有

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x$$

令 $y\to 0$，得 $f'(x)=1+2x$

解此微分方程并注意到 $f(0)=0$，得 $f(x)=x+x^2$.

例题5是一类常考的问题,可归于微分方程应用之范畴. 还有一类常考的问题：已知 $f(x)$ 满足某些

条件，证明此函数是某类函数, 比如证明函数 $f(x)$ 是线性函数、二次函数.这类问题一般可归于导数应用之范畴（如下例）.

例 6.设在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数 $f(x), g(x)$ 满足对任意 x 及 h，都有

$$f(x+h)-f(x-h)=2hg(x),$$

且 $f(x)$ 可导，证明： $f(x)$ 是至多为二次的多项式。

证明：由题设知

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=g(x),$$

令 $h\to 0$，得

$$g(x)=f'(x),$$

从而知 $g(x)$ 可导， $f(x)$ 二阶可导。

方程 $f(x+h)-f(x-h)=2hg(x)$ 两边对 h 求导得

$$f'(x+h)+f'(x-h)=2g(x),$$

再对 h 求导得

$$f''(x+h)=f''(x-h),$$

由于 x,h 都是任意实数，故 $f''(x)$ 为常数，因此 $f(x)$ 是至多为二次的多项式。

补充：下面介绍一下柯西方程.

设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$，且满足柯西方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)=cx$。

该结论的证明见本节的附录. 下面举一个例子展示柯西方程的应用.

例 7. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，且满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$，求非零解 $f(x)$。

解：由题设知

$$f(x)=[f(\frac{x}{2})]^2,$$

从而知 $f(x)>0$，令 $g(x)=\ln f(x)$，易知 $g(x)$ 连续，且满足柯西方程

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

故 $g(x)=cx$，从而 $f(x)=e^{cx}$，记 $a=f(1)=e^c$，可得

$f(x)=a^x$。

总结:求解函数方程的问题,常考的是可化为微分方程的问题(如例 5),以及给定某些条件下证明函数是某类函数(一般都与导数有关,如例 6).而例 4 与极限有关.柯西方程的应用没考过.

练习题

1．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$， $a\neq 0$，证明： $f(x)$ 为周期函数 .

2.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的图形关于点 $P(x_0,y_0)$ 对称，即 $f(x_0+x)-y_0=y_0-f(x_0-x)$，以及关于在直线 $x=b(b\neq x_0)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数。

3.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,若存在常数 $\alpha,\beta\in(0,1),\alpha+\beta=1$,使得对任意实数 x,h,有

$$f(x+\alpha h)-f(x-\beta h)=hf'(x)$$

证明 $f(x)$ 是至多为二次的多项式.

4．设 $f(x)$ 对任意实数 x,a 满足

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}f(t)dt=f(x)\quad (a\neq 0)$$

证明： $f(x)$ 为线性函数.

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,若对任意实数 x,y,有

$$f(x)-f(y)=f'(\frac{x+y}{2})(x-y)$$

求 $f(x)$

6．设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3})=x, f(x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，求 $f(x)$

7．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的邻域内有界，且满足方程

$$f(x)-qf(qx)=x^2\quad (0<q<1)$$

求 $f(x)$.

8.设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续函数,且满足 $f(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$，证明 $f(x)$ 为线性函数。

答案或提示

1． $f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-f^2(x+a)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}=f(x)$.(这里用到了 $f(x)\geq\frac{1}{2}$)

2. $f(b+x)=f(x_0+b+x-x_0)=2y_0-f(2x_0-b-x)$，

$f(b-x)=f(x_0+b-x-x_0)=2y_0-f(2x_0-b+x)$，

又由于 $f(x)$ 关于直线 $x=b$ 对称，从而有 $f(b+x)=f(b-x)$，故

$f(2x_0-b-x)=f(2x_0-b+x)$，

因此 $f(x)=f(b+(x-b))=f(b-(x-b))=f(2b-x)=f(2x_0-b-(x-3b+2x_0))$

$=f(2x_0-b+x-3b+2x_0)=f(x+4(x_0-b))$。

3.两边对 h 求导得

$$\alpha f'(x+\alpha h)+\beta f'(x-\beta h)=f'(x),$$

由题设知 $f(x)$ 有二阶导,对上式两边对 h 求导得

$$\alpha^2 f''(x+\alpha h)=\beta^2 f''(x-\beta h),$$

若 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$,则 $f''(x+\frac{1}{2}h)=f''(x-\frac{1}{2}h)$,由 x,h 的任意性可得 $f''(x)$ 为常数,从而 $f(x)$ 是至多为二次的多项式.

若 $\alpha\neq\beta$,取 $h=0$ 得 $\alpha^2 f''(x)=\beta^2 f''(x)$,由此得 $f''(x)=0$,从而 $f(x)$ 为一次的多项式.

4. （$f(x)$ 为线性函数 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 为常数，由此想到应设法证明 $f'(x)$ 为常数）

由题设可知 $f(x)$ 可导．先将方程变形为 $\int_{x-a}^{x+a}f(t)dt=2af(x)$，

两边对 a 求导得

$$f(x+a)+f(x-a)=2f(x),$$

再对 a 求导得

$$f'(x+a)=f'(x-a)$$

由 x,a 的任意性知 $f'(x)$ 为常数,故 $f(x)$ 为线性函数.

5. 令 $t=\frac{x+y}{2},x-y=2h$, 即 $x=t+h,y=t-h$, 往下的证明同练习题 4.

6．对等式$\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3})=x$ （1）

中的x分别用$\frac{x}{3},\frac{x}{3^2},\cdots,\frac{x}{3^{n-1}}$代替后得

$\sin f(\frac{x}{3})-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3^2})=\frac{x}{3}$ （2）

$\sin f(\frac{x}{3^2})-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3^3})=\frac{x}{3^2}$ （3）

……

$\sin f(\frac{x}{3^{n-1}})-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3^n})=\frac{x}{3^{n-1}}$ （n）

$(1)+(2)\times\frac{1}{3}+(2)\times\frac{1}{3^2}+\cdots+(n)\times\frac{1}{3^{n-1}}$ 得

$\sin f(x)-\frac{1}{3^n}\sin f(\frac{x}{3^n})=\frac{9}{8}x(1-\frac{1}{3^{2n}})$，令$n\to\infty$得 $f(x)=\arcsin\frac{9x}{8}$.

7．仿练习题 6. $f(x)=\frac{x^2}{q^3}$

8． $f(\frac{x}{2})=f(\frac{x+0}{2})=\frac{1}{2}(f(x)+f(0))=\frac{1}{2}f(x)+\frac{b}{2}$，其中$b=f(0)$，

从而有 $f(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}(f(x+y)+b)$，

结合题设可得 $f(x)+f(y)=f(x+y)+b$，

令$g(x)=f(x)-b$,则$g(x)$满足柯西方程.由柯西方程得结论.

注:练习题 3、练习题 4 是以前的考题,这类题其实并不难.考生做得不好的原因主要是见得少,甚至没见过,因而无从下手.

附录:柯西方程之证明:

由条件可知$f(2x)=2f(x)$,

由此可得对于任意正整数n, $f(nx)=nf(x)$,

所以对于任意正整数n, $f(x)=f(n\cdot\frac{x}{n})=nf(\frac{x}{x})$,

从而对于任意正整数n,m, $f(\frac{m}{n}x)=\frac{m}{n}f(x)$,

又由条件可知$f(0)=0, f(-x)=-f(x)$，因此对于任意有理数r,有$f(rx)=rf(x)$,

取$x=1$,便得$f(r)=cr$, $c=f(1)$.

对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$,

$\lim_{h\to0}(f(x+h)-f(x))=\lim_{h\to0}(f(h)=f(0)=0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,存在有理数列 $\{r_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$,

由 $f(r_n)=cr_n$,及 $f(x)$ 的连续性,可得 $f(x)=cx$.结论得证.