第一章　函数、极限、连续

第三节　函数极限

有关知识及方法：

（1）最常用方法：洛必塔法则和泰勒公式 ，要注意和其它方法相结合，比如等价无穷小的替代，变量代换，恒等变形，因子分离，重要极限，微分学和积分学的各种知识。

（2）两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$（或$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$）

（3）常用的等价无穷小和泰勒公式：$x\to 0$时，有

（ a）$\sin x=x+o(x),\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

$$\sin x=x+o(x^2),\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

(b)　$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$.

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^3),\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

(c) $e^x-1=x+o(x)$，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(d) $\ln(1+x)=x+o(x),\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$

(e) $(1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+o(x)$ ，

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

(f) $\tan x=x+o(x),\arctan x=x+o(x),\arcsin x=x+o(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在$\Leftrightarrow$ $f(a^-),f(a^+)$都存在且相等

例 1：求$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n})$

分析：如用洛必塔法则需通分$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)}$，然后分子、分母分别求导，能做出来但较繁。不如换个思路，先作代换$x=1+t$，再结合泰勒公式有

$$\frac{m}{1-x^m}=-\frac{m}{(1+t)^m-1}=-\frac{m}{mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2+o(t^2)},$$

$$\frac{n}{1-x^n}=-\frac{n}{(1+t)^n-1}=-\frac{n}{nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+o(t^2)},$$

从而 $$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{mnt+\frac{nm(m-1)}{2}t^2-mnt-\frac{mn(n-1)}{2}t^2+o(t^2)}{(mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2+o(t^2))(nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+o(t^2))}$$

$$=\frac{\frac{mn(m-n)}{2}t^2+o(t^2)}{mnt^2+o(t^2)}$$

答案就一目了然。

解：令 $x=1+t$，则 $x\to1$ 等价于 $t\to0$，所以

$$\lim_{x\to1}(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n})=\lim_{t\to0}(\frac{n}{(1+t)^n-1}-\frac{m}{(1+t)^m-1})=\lim_{t\to0}\frac{\frac{mn(m-n)}{2}t^2+o(t^2)}{mnt^2+o(t^2)}$$

$$=\frac{m-n}{2}。$$

例 2：求（1）$\lim\limits_{x\to0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$，（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}$　（$a>0,b>0$）

分析：这两题都是幂指函数的极限，容易看出（1）属于 1^∞ 型的极限问题，（2）属于 ∞^0 型或 0^0 型的极限问题。幂指函数的问题（包括极限、导数、极值等）总可利用等式 $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$（$f(x)>0$）去处理，而属于 1^∞ 型的极限问题还可用重要极限去解决。

解：（1）　$(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=(1+\frac{a^x+b^x-2}{2})^{\frac{2}{a^x+b^x-2}\times\frac{a^x+b^x-2}{2x}}$

而 $\frac{a^x+b^x-2}{2x}=\frac{1}{2}(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x})\to\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}\ (x\to0)$

故　原式＝$\lim\limits_{x\to0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}$。

或　$(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}(\ln(a^x+b^x)-\ln 2)}\to e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}=\sqrt{ab}\ (x\to0)$

（2）若 $a\ge b$，则 $a\le(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}\le 2^{\frac{1}{x}}a\to a$。所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=a$。若 $b\ge a$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=b$。

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=\max\{a,b\}$

或

$(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(a^x+b^x)}$。若 $a\geq b$，则

$$\frac{\ln(a^x+b^x)}{x}=\ln a+\frac{1}{x}\ln(1+(\frac{b}{a})^x)\to\ln a\ (x\to+\infty)$$

从而　原式＝a

若　$a<b$，同样可得　原式＝b

总之　$\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=\max(a,b)$

例 3.　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

解：（用洛必塔法则）

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{1}{2}$$

或（用泰勒公式）

$$x-(1+x)\ln(1+x)=x-(1+x)(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

注：1^0：用洛必塔法则时　（Ⅰ）要符合洛必塔法则的条件　（ⅠⅠ）注意与等价无穷小替换，变量代换，恒等变形，因子分离等方法相结合。

2^0：用泰勒公式求极限时要注意两点：（Ⅰ）当求 $x\to x_0$ 的极限时，一定是在 x_0 处展开成泰勒公式；当求 $x\to\infty$ 的极限时，可作变换 $t=\dfrac{1}{x}$，化为 $t\to 0$ 时的极限。（ⅠⅠ）用带皮亚诺余项的泰勒公式。

3^0 下面解法错在哪里？

由于当 $x\to 0,\ln(1+x)\sim x$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)x}{x^2}=-1$。

如果对 $\ln(1+x)$ 不是用等价无穷小替代，而是用带皮亚诺余项的泰勒公式 $\ln(1+x)=x+o(x)$ 替代（等同于恒等变形）就可看出问题出在哪里：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)(x+o(x))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x)}{x^2}=-1+\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2},$$

而极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x^2}$ 确定不了，由此可以看出错在哪里。解决方法就是将带皮亚诺余项的泰勒公式

$\ln(1+x)=x+o(x)$ 改用更高阶的泰勒公式 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}\text{。}$$

用等价无穷小替换时要记住：只能用分子（或分母）作为一个整体的等价无穷小去替代，而不能将分子（或分母）的某一部分加减项用等价无穷小替代。用带皮亚诺余项的泰勒公式总是可行的，至于用几阶的泰勒公式，只能根据具体题目去 “试”.

例 4. 求（1）$\lim\limits_{x\to\infty}x(e-(1+\frac{1}{x})^x)$，（2）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{1-x})\ln x}{\sin(1-x)\sqrt[3]{1-x^2}}$

解：（1）令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x(e-(1+\frac{1}{x})^x)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}$，

（用洛必塔法则）$\lim\limits_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}(-(1+t)^{\frac{1}{t}}\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2})$

$$=-\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{e}{2}.$$

或（用泰勒公式）

$$e-(1+t)^{\frac{1}{t}}=e-e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e-e^{1-\frac{t}{2}+o(t)}=e(1-e^{-\frac{t}{2}+o(t)})=\frac{e}{2}t+o(t),$$

所以

$$\lim_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\mathrm{e}t}{2}+o(t)}{t^2}=\frac{\mathrm{e}}{2}\text{。}$$

本题用泰勒公式比用洛必塔法则要简便得多。

（2）令 $t=1-x$ 则

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{1-x})\ln x}{\sin(1-x)\sqrt[3]{1-x^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{t})\ln(1-t)}{\sqrt[3]{2-t}\,\sqrt[3]{t}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{2-t}}\ \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{t})}{\sqrt[3]{t}}\times\frac{\ln(1-t)}{\sin t}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

另外，涉及两侧极限及无穷小与有界量之积是无穷小的问题也是要熟悉的。例如：

例 5 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x-x^3\arctan\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln\cos x}$$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x-x^3\arctan\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x-x^3\arctan\frac{1}{x}}{\ln\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\ln\cos x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3\arctan\frac{1}{x}}{\ln\cos x}$$

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x-1}=-2$，

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\cos x-1}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\arctan\frac{1}{x}}{\ln\cos x}=0$ ，

， 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x-x^3\arctan\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln\cos x}=-2$$

例 6　 求极限

$$\lim_{x\to 0}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]$$

分析：这里出现了绝对值函数（绝对值函数实际上是分段函数）以及$e^{\frac{1}{x}}$（$\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0$），容易想到要考虑左、右极限。

解：

$$\lim_{x\to 0+}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=\lim_{x\to 0+}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}]=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=\lim_{x\to 0-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}]=2-1=1$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}]=1$.

例 7. 设 a,b,c 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-(ax+bx^2+cx^3)}{\sin^3 x}=1$，求 a,b,c 。

分析：由于分母 $\sin^3 x$ 与 x^3 为等价无穷小，故分母可用 x^3 代替，从而分子一定等于 $x^3+o(x^3)$，由此也可以看出这种问题用泰勒公式去解决是方便的,比用洛比塔法则要更简便.

解：依题意知 $\ln(1+2x)-(ax+bx^2+cx^3)=x^3+o(x^3)$

而 $\ln(1+2x)-(ax+bx^2+cx^3)=2x-\dfrac{(2x)^2}{2}+\dfrac{(2x)^3}{3}-(ax+bx^2+cx^3)+o(x^3)$

$=(2-a)x-(2+b)x^2+(\dfrac{8}{3}-c)x^3+o(x^3)$

比较可得 $a=2,b=-2,c=\dfrac{5}{3}$.

例 8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内 $f(x)\neq 0$，且 $f''(0)$ 存在，并且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0,\ f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$ 。

分析：由题设可推出 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0,\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$

由泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=2x^2+o(x^2)$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x+o(x))^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to \mathbf{0}}e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x+o(x))}=e^2$ 。

习题

1．求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{\tan^3 x}$ （2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ (3) $\lim\limits_{x\to +\infty}((x^3-x^2+\dfrac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6})$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}$ (5) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x^2}e^{-x}$，（6） $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}})^{e^{2x}}$，

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln(x\ln a)\cdot\ln\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a}],a>1$.

(8) （第 3 届决赛试题） $\lim\limits_{x\to +\infty}[(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6})$.

2．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x})}{2^x-1}=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$ ________.

3．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\ln(1-2x)+c(1-e^{-x^2})}=2$，则 $a=$ ________ .

4．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{a+t^2}dt}{x^2}, x<0\\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{(e^x-1)x}, x>0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，则 $a=$ ________ .

5．已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=2$，求 $f(0), f'(0)$.

6．设 $y(x)$ 满足方程 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x, y'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=$ ________ .

7．已知 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$，求：

$f(0), f'(0), f''(0)$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$.

8（第 4 届决赛题）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}],$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。

答案或提示

1.（1）$\dfrac{1}{3}$，（2）$-\dfrac{1}{2}$，（3）$\dfrac{1}{6}$，（4）（用拉氏中值定理很简便）1，（5）$e^{-\frac{1}{2}}$，（6）e^2 。

(7).易见 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a}\to 1, \ln(x\ln a)\to\infty$，将 $\ln(x\ln a)\cdot\ln\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a}$ 变形为

$\ln(\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a})^{\ln(x\ln a)}$，只需求出 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a})^{\ln(x\ln a)}$，便可得答案，

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a})^{\ln(x\ln a)}=\lim_{x\to 0^+}(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a})^{\ln(x\ln a)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a})^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}\cdot\frac{\ln x+\ln\ln a}{\ln x-\ln a}\cdot 2\ln a}=e^{2\ln a},$$

所以答案是 $2\ln a$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3[(1+\dfrac{1}{2x^2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^6}})-\lim\limits_{x\to+\infty}\tan\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^3[(1+\frac{1}{2x^2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}),$$

设 $t=\dfrac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}x^3[(1+\frac{1}{2x^2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^6}})==\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+\frac{t^2}{2})e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3},$$

由 Taylor 公式

$$(1+\frac{t^2}{2})e^t-\sqrt{1+t^6}=(1+\frac{t^2}{2})(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3))-(1+o(t^3))=t+t^2+\frac{2}{3}t^3+o(t^3),$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}]=\lim_{t\to 0^+}\frac{t+t^2+\frac{2}{3}t^3+o(t^3)}{t^3}=+\infty.$$

2． $2\ln 2$， 3. -4 ， 4． $\frac{1}{4}$， 5． $-1,2$， 6． 1， 7． 0， 0， 4， e^2，

8.分析：由不等式 $\ln(1+x)\geqslant x$ 知 $\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\geqslant 0$ ，及 $f'(x)\geqslant 0$，从而 $f(x)$ 单增，因此为证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在只需证 $f(x)$ 有上界。易见 $f'(x)\leqslant\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}$，于是

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)dt\leqslant f(1)+\int_0^x(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{t})})dt\leqslant f(1)+\int_1^{+\infty}(\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})})dx$$

问题转化为证明反常积分 $\int_0^{+\infty}(\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})})dx$ 收敛，由于被积函数非负（实际上是正值函数），故可用比较法说明其收敛。下面给出反常积分 $\int_0^{+\infty}(\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})})dx$ 收敛的证明：

由不等式 $\ln(1+t)\geqslant t-\frac{t^2}{2}(t\geqslant 0)$（用 Taylor 公式很容易证得此不等式），有

$$\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\leqslant\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}}=\sqrt{\frac{1}{x}}(1-\sqrt{1-\frac{1}{2x}})\sim\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{4x}=\frac{1}{4x^{3/2}},x\to+\infty,$$

（或 $\sqrt{\frac{1}{x}}(1-\sqrt{1-\frac{1}{2x}})=\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{2x}/(1+\sqrt{1-\frac{1}{2x}})<\frac{1}{2x^{3/2}},x>1$ ），

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}(\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})})dx$ 收敛。

具体的证明过程，同学自己完成。