组合数学

张义
北京邮电大学数学系

第2章　排列和组合

2.1 加法法则与乘法法则
2.2 集合的排列
2.3 集合的组合
2.4 多重集合的排列
2.5 多重集合的组合

2.1 加法法则与乘法法则

加法法则：如果完成一件事情有两个方案，而第一个方案有m种方法，第二个方案有n种方法可以实现。只要选择任何方案中的某一种方法，就可以完成这件事情，并且这些方法两两互不相同。则完成这件事情共有$m+n$种方法。

集合描述： 若 $|A| = m$, $|B| = n$, $A \cap B = \varnothing$ ，则 $|A \cup B| = m + n$.

2.1 加法法则与乘法法则

乘法法则： 如果完成一件事情需要两个步骤，而第一步有m种方法、第二步有n种方法去实现。则完成该件事情共有$m \cdot n$种方法。

集合描述： 给定集合 A，B，$|A| = m$，$|B| = n$，令 $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$，则 $|A \times B| = m \cdot n$ 。

在乘法法则中要注意事件 A 和 事件 B 的**相互独立性**

2.1 加法法则与乘法法则

减法法则： 设U是全集，|U|=n, A是U的子集 |A|=m, 令 A^C= {x   U|x   A}，则 $|A^C|$=n-m

除法法则: 设A是一个有限集合，将A划分成k个不交子集，且每个子集的基数都相等，则每个子集的基数都为|A|/k.

2.1 加法法则与乘法法则

【**例4**】 求小于10000的含1的正整数的个数.

解：小于10000的不含1的正整数可均看做4位数处理,但0000除外. 故有 **9×9×9×9－1＝6560**个.
于是含1的有：**9999－6560=3439**个

2.1 加法法则与乘法法则

【例4】 求小于10000的含0的正整数的个数

注:“含0”和“含1”不可直接套用。**0019含1但不含0**。

解：不含0的1位数有9个,2位数有9^2个,3位数有9^3个,4位数有9^4个.不含0小于10000的正整数有

$$\mathbf{9+9^2+9^3+9^4=7380\ (个)}$$

含0小于10000的正整数有**9999－7380=2619**个。

2.2 集合的排列

定义2.1 从n个元素的集合S中有序选取的r个(不重复的)元素，称为S的一个r-**无重排列**。

1 $\mathbb{P}(S,r)$：不同的排列的全体组成的集合。

2 P(n,r)：排列的总数。

当 $r = n$ 时称为**全排列**。

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)$$

2.2 集合的排列

【例6】 A单位有7名代表，B单位有3位代表，排成一列合影要求B单位的3人排在一起，问有多少种不同的排列方案。

解：先将B单位3位代表在一起，看成一个人，参与排列，有8！种，然后B单位内部人之间有一个排列，3！，故按乘法原理，共有：3！*8！种

2.2 集合的排列

圆周排列

定义2.2：从 n个数中取出 r 个沿一圆周排列，称为一个**圆周排列.**

Q(n.r)：所有的 r-圆周排列数。

$$Q(n,r)=P(n,r)/r\ ,\quad 2\le r\le n$$

2.2 集合的排列

- **项链排列**就是说排列的方法和项链一样,在圆排列的基础上，正面向上和反面向上两种方式放置各个数是同一个排列。

- 从n个中取r个的项链排列的排列数为

$$P(n,r)/2r,\ \ 3\le r\le n$$

例如 下面两种方式实际上表示的都是3个元素的同一种排列。

2.2 集合的排列

【例】 5对夫妇出席一个宴会，围一圆桌坐下，试问有几种不同的坐法？要求每对夫妇相邻又如何？

解: (1): $Q(10,10)$, (2): $Q(5,5)*2^5$

2.3 集合的组合

定义2.3 从 n 个不同元素的集合S中无序选取 r 个(不重复的)元素称为S的一个r-**无重组合**。

组合的个数用 $C(n,r)$ 或 $\binom{n}{r}$表示.

C(n, r)=P(n, r)/r!

规定 C(n, r)=0, 若$n < r$

2.3 集合的组合

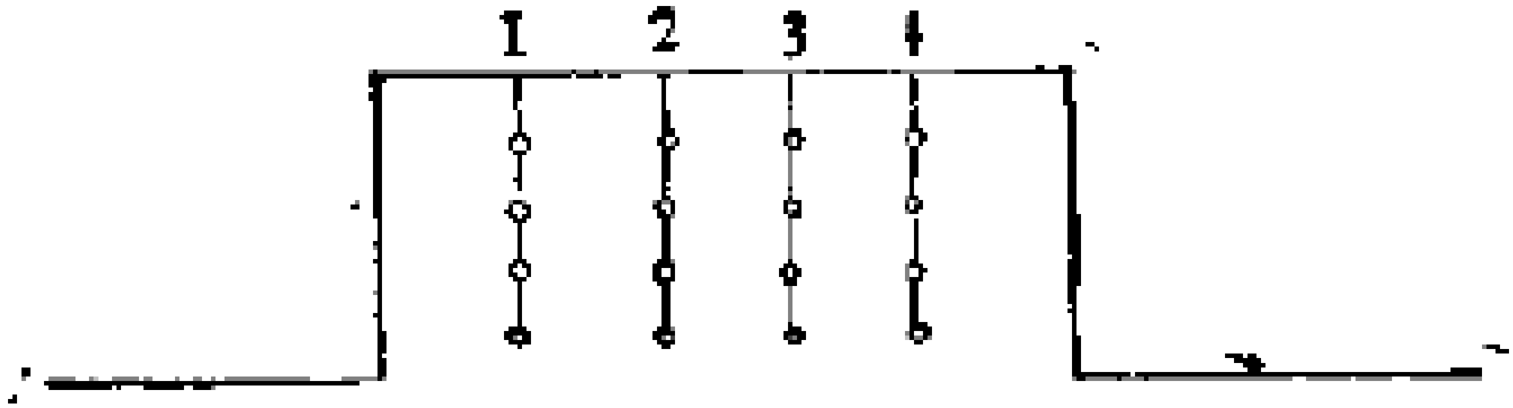
【例】某车站有6个入口处，每个入口处每次只能进一人，一组9个人进站的方案有多少?

2.3 集合的组合

【例16】一个凸n边形，它的任何3条对角线都不交于同一点，问它的所有对角线在凸n边形内部有多少个交点。

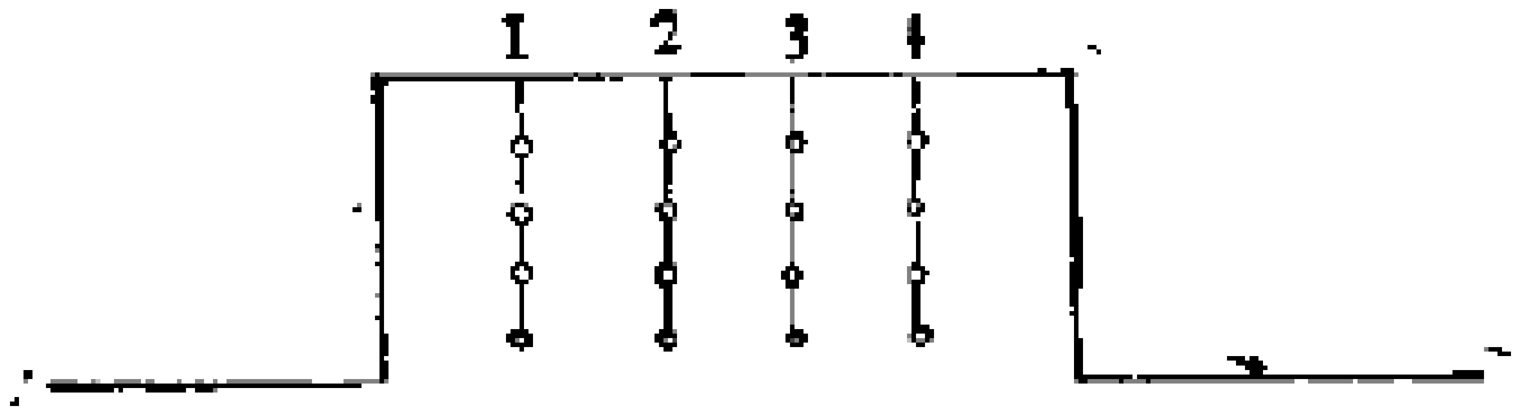
2.4 多重集的排列

- 几个射击手在射击场表演他们的高超射击技术，靶子是16颗玻璃球，挂在4条金属线上，每条金属线各4个球，如图



2.4 多重集的排列

- 当监察员在{1,2,3,4}中任报一数i时，表演着应击毁第i条线的最下面一个球，而不能击中其它任何球，这样射击16次均符合要求的选手为优胜者，问监察员有多少种不同的方法让射手射击这16颗球？



2.4 多重集的排列

- **多重集**—元素可以多次出现的集合。我们把某个元素a_i出现的次数n_i (n_i=0,1,2,…)叫做该元素的重复数，通常把含有k种不同元素的多重集S记作

$$\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$$

定义2.4 从一个多重集 $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$ 中有序选取的r个元素叫做S的一个r-(可重)排列。当 $r = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ 时也叫做S的一个全排列.

2.4 多重集的排列

定理1： 设多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$ 则 S 的 r-(可重)排列数是 k^r.

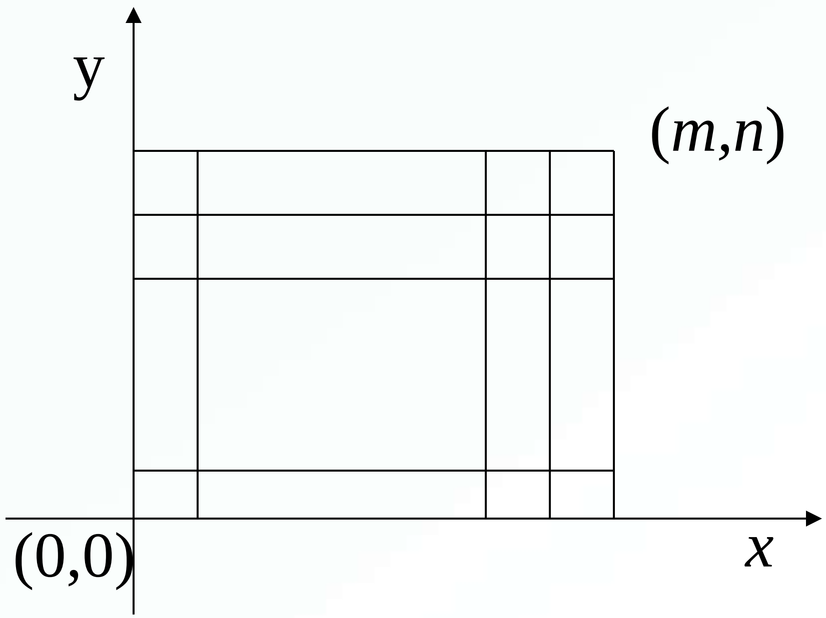
问题：给定多重集$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$,其中对一切的 i=1, 2, . . . k, 有$n_i\geq r$,则 S 的 $r-$排列数是多少?

定理2：设$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$,且$n=\sum_{i=1}^{k}n_i$,则$S$的排列数等于 $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$.

2.4 多重集的排列

非降路径问题

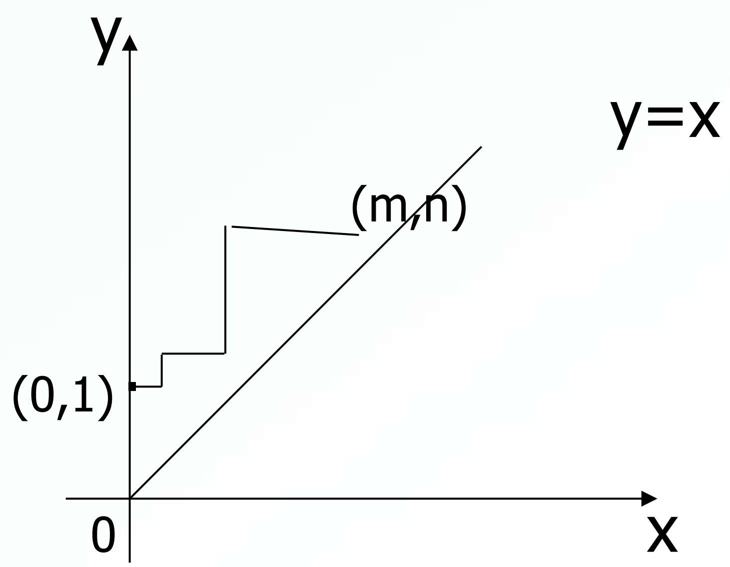
假设一只蚂蚁要从(0,0)点出发沿如下图中的横线或者竖线以最短的路线爬到(m,n)点，有多少种爬法?



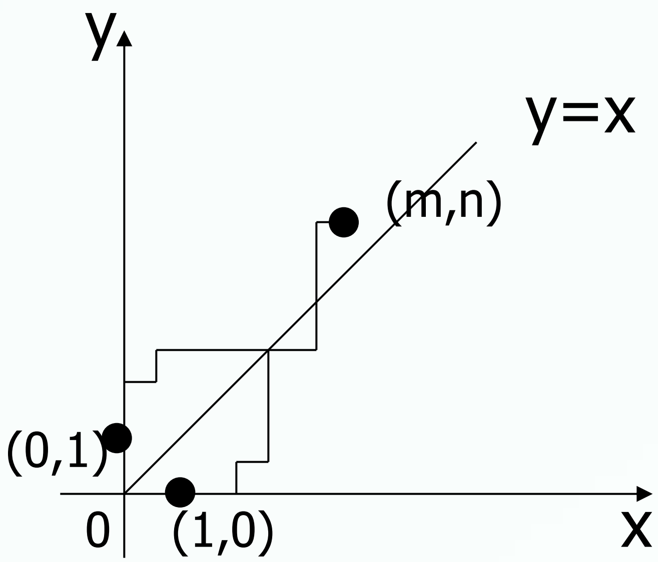
2.4 多重集的排列

若 $m<n$，蚂蚁在(0,1)点，而对角线$x=y$及其下方的横竖线均已损坏，问此时蚂蚁的爬法有多少种?

解：注意到从(0,1)点到(m,n)点的非降路径，有的接触$x=y$，有的不接触。



2.4 多重集的排列



容易看出从$(0,1)$到(m,n)接触$x=y$的非降路径与$(1,0)$到(m,n)的非降路径(必穿过$x=y$)一一对应.

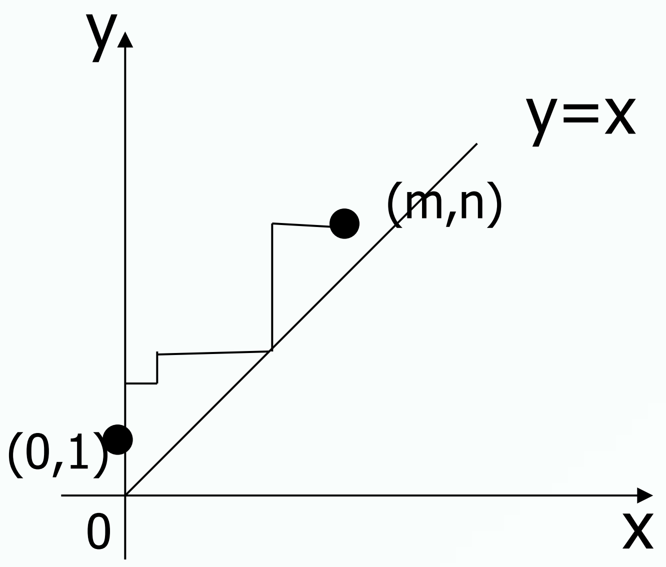
2.4 多重集的排列

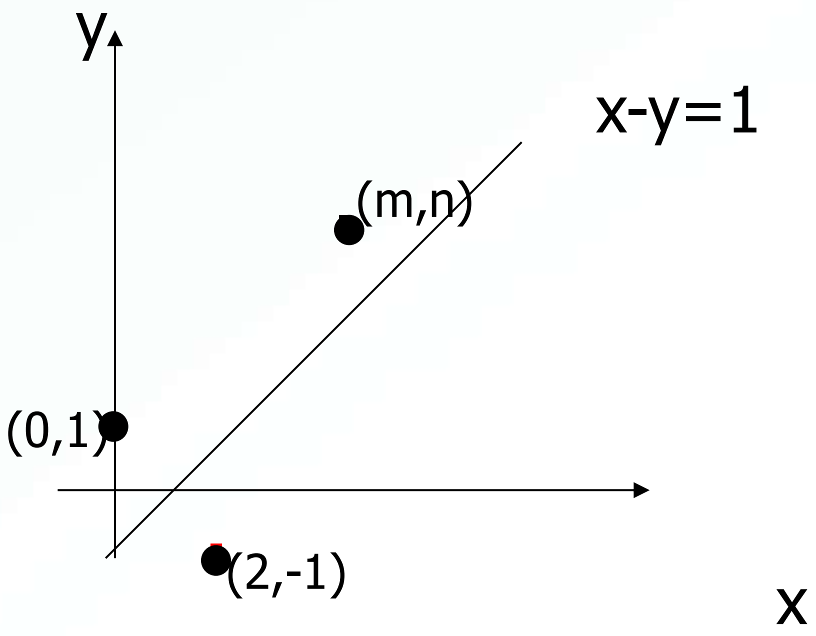
故所求非降路径数为

$$\binom{m+n-1}{m}-\binom{m+n-1}{m-1}$$

2.4 多重集的排列

- 若条件改为可接触但不可穿过，
  则限制线要向下或向右移一格，得x - y=1。





2.4 多重集的排列

所求非降路径数为：

$$\binom{m+n-1}{m}-\binom{m+n-1}{m-2}$$

2.4 多重集的排列

设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\},n=n_1+n_2+\ldots+n_k$

则S的r-排列数N满足：

1)若$r>n$,则$N=0$;

2)若$r=n$, 则 N= $\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$

3)若$r<n$,且对所有的$i,n_i\geq r$,则 $N=k^r$

4)若$r<n$,且存在i, $n_i<r$ ，则对N没有一般的求解公式，具体解法以后再说。

2.5 多重集的组合

定义2.5: 多重集$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$上的一个$r$-组合是指从 S 中取 r 个元素$b_1,b_2,\ldots,b_r$,允许重复,即允许$b_i=b_j,i\neq j$,但每个元素a_i 出现的次数不超过 n_i 的组合。

2.5 多重集的组合

问题一：求多重集合 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$ 上的 r 组合的个数?

问题二：求不定方程

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_k=r \\ x_i\text{是非负整数}，\ i=1,2,...k \end{cases}$$

解的个数？

问题三：r个相同的球放入k个不同的盒子,每盒球的数目不限的方案数?

2.5 多重集的组合

问题三：r个相同的球放入k个不同的盒子,每盒的球的数目不限的方案数?

问题四：求 r个 1 与 k-1 个 0 全排列的个数?

易知问题四全排列的个数为$\dfrac{(k-1+r)!}{r!\,(k-1)!} = C(k+r-1,r).$

2.5 多重集的组合

定理2.5.1 多重集合 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 *r* 组合的个数为 C(n+r-1,r)

一一对应原理

- **一一对应原理**：给定两个集合A和B，若存在一个A到B的双射（一一对应），则这两个集合的基数相同，即|A|=|B|

2.5 多重集的组合

问题 1： 多重集合 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 r 组合的个数

问题 2： 多重集合 $S=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\cdots,\infty\cdot n\}$ 的 r 组合的个数

2.5 多重集的组合

另证

A:由多重集合 $S=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\cdots,\infty\cdot n\}$ **的 r 组合的全体构成。**

B:由集合 $S=\{1,2,3,\cdots,\mathrm{n}+\mathrm{r}-1\}$ **的 r 组合的全体构成。**

$$f:\quad \mathrm{A} \quad \rightarrow \quad B$$

$$a_1,a_2,\ldots,a_r \quad \rightarrow \quad b_1,b_2,\ldots,b_r$$

2.5 多重集的组合

$$f: \quad A \quad \to \quad B$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \quad \to \quad b_1, b_2, \ldots, b_r$$

对应的规则 $b_i = a_i + i - 1, i = 1, \ldots, r.$

需要验证三点：

1 的确是一个从 A 到 B 的一个映射；

2 单射；

3 满射。

2.5 多重集的组合

问题：求多重集 $S=\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\ldots,k_n\cdot a_n\}$ 的 $r-$组合数？其中 $k_i\geq r$，i=1, 2, . . n。

2.5 多重集的组合

问题：求多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\dots,\infty\cdot a_n\}$，每个元素至少取一个的 $r-$组合数？其中 $r\geq n.$

2.5 多重集的组合

问题二：求不定方程

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=18 \\ x_1 \geq 3, x_2 \geq 1, x_3 \geq 4, x_4 \geq 2 \end{cases}$$

整数解的个数？

2.5 多重集的组合

例1：从{1,2,…,n}中能够取出多少个长为 r 的递增序列 $a_1, a_2, \ldots, a_r$, 使得 $a_{i+1}-a_i \geq s+1$ $(s \geq 0,\ i=1,2,\ldots,r-1)$。

证明：

A:满足题目条件的所有 r 组合构成的集合。

B:集合 $S=\{1,2,3,\cdots,n-(r-1)s\}$ **的所有 r 组合构成的集合。**

$$
\begin{array}{llll}
f: & A & \rightarrow & B \\
 & a_1, a_2, \ldots, a_r & \rightarrow & b_1, b_2, \ldots, b_r
\end{array}
$$

2.5 多重集的组合

$$f: \quad A \quad \to \quad B$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \quad \to \quad b_1, b_2, \ldots, b_r$$

对应的规则 $b_i = a_i - (i-1)s, i = 1, \ldots, r.$

需要验证三点：

1 的确是一个从 A 到 B 的一个映射；

2 单射；

3 满射。

2.5 多重集的组合

例1：从{1,2,…n}中能够取出多少个长为 r 的递增序列 $a_1, a_2, \ldots, a_r$, 使得 $a_{i+1}-a_i \geq s+1$ ($s \geq 0$, $i=1,2,\ldots,r-1$)。

证法二：转化成求一个不定方程。