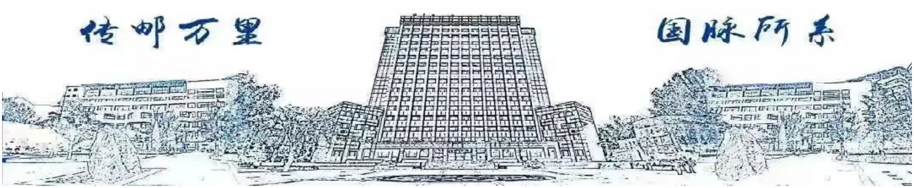
网络空间安全学院
School of Cyberspace Security, BUPT

信息安全数学基础

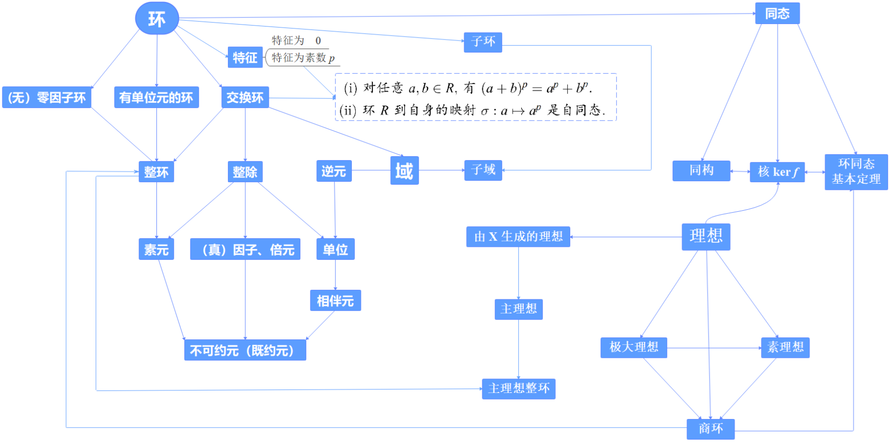
—— 环 (2)

信数课题组

北京邮电大学



上次课回顾



环
同态
子环
特征
特征为 0
特征为素数 p
(无）零因子环
有单位元的环
交换环
(i) 对任意 $a, b \in R$, 有 $(a+b)^p = a^p + b^p$.
(ii) 环 R 到自身的映射 $\sigma : a \mapsto a^p$ 是自同态.
整环
整除
逆元
域
子域
同构
核 $\ker f$
环同态基本定理
由 X 生成的理想
理想
素元
(真）因子、倍元
单位
相伴元
主理想
不可约元（既约元）
极大理想
素理想
主理想整环
商环

目录

目录

定义 7.4.1

设 $(R,+,\cdot)$ 是整环, x 为变量, $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $a_i\in R$, 则称 $f(x)$ 为 **环 R 上的 (一元) 多项式**. 此时,

(i) a_i 称为多项式 $f(x)$ 的**系数**, $a_i\in R$.

(ii) 若 $a_n\neq 0$, 则称多项式 $f(x)$ 的**次数**为 n, 记为 $\deg f=n$.

定义 7.4.1

设 $(R,+,\cdot)$ 是整环, x 为变量, $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $a_i\in R$, 则称 $f(x)$ 为 **环 R 上的 (一元) 多项式**. 此时,

(i) a_i 称为多项式 $f(x)$ 的**系数**, $a_i\in R$.

(ii) 若 $a_n\neq 0$, 则称多项式 $f(x)$ 的**次数**为 n, 记为 $\deg f=n$.

我们考虑整环 R 上的全体多项式组成的集合 $R[x]$.

首先, 定义 $R[x]$ 上的加法. 设

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,\quad g(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0,$$

定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的加法为

$$(f+g)(x)=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0).$$

则 $R[x]$ 中零元为 0, $f(x)$ 的负元为

$$(-f)(x)=(-a_n)x^n+\cdots+(-a_1)x+(-a_0).$$

其次，定义 $R[x]$ 上的乘法. 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, b_m \neq 0,$$

定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的乘法为

$$(f \cdot g)(x) = c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

其中

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k,\\ 0\leqslant i\leqslant n,\\ 0\leqslant j\leqslant m}} a_i b_j = a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k, 0 \leqslant k \leqslant n+m,$$

即

$$c_{n+m} = a_n b_m, c_{n+m-1} = a_n b_{m-1} + a_{n-1}b_m, \cdots, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \cdots, c_0 = a_0 b_0,$$

则 $R[x]$ 中单位元为 1.

其次, 定义 $R[x]$ 上的乘法. 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, b_m \neq 0,$$

定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的乘法为

$$(f \cdot g)(x) = c_{n+m} x^{n+m} + c_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

其中

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k,\\ 0 \leqslant i \leqslant n,\\ 0 \leqslant j \leqslant m}} a_i b_j = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k, 0 \leqslant k \leqslant n+m,$$

即

$$c_{n+m} = a_n b_m, c_{n+m-1} = a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m, \cdots, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \cdots, c_0 = a_0 b_0,$$

则 $R[x]$ 中单位元为 1.

综上, $R[x]$ 对上述加法和乘法运算构成一个整环, 称其为**多项式整环**.

例 7.4.1 设 $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^7 + x + 1 \in F_2[x]$, 则

$$f(x) + g(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2.$$

$$f(x)g(x) = x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1.$$

事实上,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)(x^7 + x + 1) \\ &= x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^7 \\ &\quad + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x \\ &\quad + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1 \\ &= x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1. \end{aligned}$$

例 7.4.2 设 R 是模 7 的剩余类环, 计算 $R[x]$ 中乘积

$$([3]x^3+[5]x-[4])([4]x^2-x+[3]).$$

例 7.4.2 设 R 是模 7 的剩余类环, 计算 $R[x]$ 中乘积

$$([3]x^3+[5]x-[4])([4]x^2-x+[3]).$$

解：模 7 的剩余类环 $R=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]\}$.

首先把负号变成正号, 然后有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= ([3]x^3+[5]x+[3])([4]x^2+[6]x+[3]) \\
&= [3][4]x^5+[3][6]x^4+[3][3]x^3 \\
&\quad +[5][4]x^3+[5][6]x^2+[5][3]x \\
&\quad +[3][4]x^2+[3][6]x+[3][3] \\
&= [5]x^5+[4]x^4+x^3+[5]x+[2].
\end{aligned}$$

定义 7.4.2

设 $f(x), g(x)$ 是整环 R 上的任意两个多项式，其中 $g(x) \neq 0$. 如果存在一个多项式 $q(x)$ 使得等式 $f(x) = q(x) \cdot g(x)$ 成立，就称 $g(x)$ **整除** $f(x)$ 或者 $f(x)$ 被 $g(x)$ 整除，记作 $g(x) \mid f(x)$.

这时，把 $g(x)$ 叫作 $f(x)$ 的**因式**，把 $f(x)$ 叫作 $g(x)$ 的**倍式**.

否则，就称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$ 或者 $f(x)$ 不能被 $g(x)$ 整除，记作 $g(x) \nmid f(x)$.

定义 7.4.2

设 $f(x), g(x)$ 是整环 R 上的任意两个多项式，其中 $g(x) \neq 0$. 如果存在一个多项式 $q(x)$ 使得等式 $f(x) = q(x) \cdot g(x)$ 成立，就称 $g(x)$ **整除** $f(x)$ 或者 $f(x)$ 被 $g(x)$ 整除，记作 $g(x) \mid f(x)$.

这时，把 $g(x)$ 叫作 $f(x)$ 的**因式**，把 $f(x)$ 叫作 $g(x)$ 的**倍式**.

否则，就称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$ 或者 $f(x)$ 不能被 $g(x)$ 整除，记作 $g(x) \nmid f(x)$.

定义 7.4.3

设 $f(x)$ 是整环 R 上的非常数多项式. 若除因式 1 和 $f(x)$ 外, $f(x)$ 没有其他非常数因式，那么 $f(x)$ 叫作**不可约多项式**；否则, $f(x)$ 叫作**合式**.

定义 7.4.2

设 $f(x), g(x)$ 是整环 R 上的任意两个多项式，其中 $g(x) \neq 0$. 如果存在一个多项式 $q(x)$ 使得等式 $f(x) = q(x) \cdot g(x)$ 成立，就称 $g(x)$ **整除** $f(x)$ 或者 $f(x)$ 被 $g(x)$ 整除，记作 $g(x) \mid f(x)$.

这时，把 $g(x)$ 叫作 $f(x)$ 的**因式**，把 $f(x)$ 叫作 $g(x)$ 的**倍式**.

否则，就称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$ 或者 $f(x)$ 不能被 $g(x)$ 整除，记作 $g(x) \nmid f(x)$.

定义 7.4.3

设 $f(x)$ 是整环 R 上的非常数多项式. 若除因式 1 和 $f(x)$ 外, $f(x)$ 没有其他非常数因式，那么 $f(x)$ 叫作**不可约多项式**；否则, $f(x)$ 叫作**合式**.

例 7.4.3　在 $\mathbb{Z}[x]$ 中，多项式 $x^2 + 1$ 不可约.

目录

定理 7.4.1

设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_n \neq 0$, $g(x) = x^m + \cdots + b_1x + b_0, m \geq 1$, 是整环 R 上的两个多项式, 则一定存在多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使得

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \ \deg r < \deg g.$$

定理 7.4.1

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$, $g(x) = x^m + \cdots + b_1 x + b_0, m \geq 1$, 是整环 R 上的两个多项式, 则一定存在多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使得

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \ \deg r < \deg g.$$

证：对 $f(x)$ 的次数 $\deg f = n$ 作数学归纳法.

(i) 如果 $\deg f < \deg g$, 则取 $q(x) = 0, r(x) = f(x)$. 结论成立.

定理 7.4.1

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$, $g(x) = x^m + \cdots + b_1 x + b_0, m \geq 1$, 是整环 R 上的两个多项式，则一定存在多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使得

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x),\ \deg r < \deg g.$$

证：对 $f(x)$ 的次数 $\deg f = n$ 作数学归纳法.

(i) 如果 $\deg f < \deg g$, 则取 $q(x) = 0, r(x) = f(x)$. 结论成立.

(ii) 设 $\deg f \geqslant \deg g$. 假设结论对 $\deg f < n$ 的多项式成立.

对于 $\deg f = n \geqslant \deg g$, 有 $f(x) - a_n x^{n-m} \cdot g(x)$

$= (a_{n-1} - a_n b_{m-1})x^{n-1} + \cdots + (a_{n-m} - a_n b_0)x^{n-m} + a_{n-m+1}x^{n-m-1} + \cdots + a_0$.

这说明 $f(x) - a_n x^{n-m} \cdot g(x)$ 是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式. 对其运用归纳假设或情形 (i), 存在整系数多项式 $q_1(x)$ 和 $r_1(x)$ 使得

$$f(x) - a_n x^{n-m} \cdot g(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x),\ \deg r_1(x) < \deg g(x).$$

注：此过程称为**多项式欧几里德除法**, 上式中的 $q(x)$ 叫作 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的**不完全商**, $r(x)$ 叫作 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的**余式**.

注：此过程称为**多项式欧几里德除法**，上式中的 $q(x)$ 叫作 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的**不完全商**，$r(x)$ 叫作 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的**余式**.

例 7.4.4 设 $f(x) = x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$, $g(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1 \in F_2[x]$，求 $q_1(x)$ 和 $r_1(x)$ 使得 $f(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x),\ \deg r_1 < \deg g$.

注：此过程称为**多项式欧几里德除法**，上式中的 $q(x)$ 叫作 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的**不完全商**，$r(x)$ 叫作 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的**余式**.

例 7.4.4 设 $f(x)=x^{13}+x^{11}+x^9+x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+1$, $g(x)=x^8+x^4+x^3+x+1\in F_2[x]$，求 $q_1(x)$ 和 $r_1(x)$ 使得 $f(x)=q_1(x)\cdot g(x)+r_1(x),\ \deg r_1<\deg g$.

解：逐次消除最高次项

$$x^{13}+x^{11}+x^9+x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+1-x^5(x^8+x^4+x^3+x+1)$$

$$=x^{11}+x^4+x^3+1.$$

$$x^{11}+x^4+x^3+1-x^3(x^8+x^4+x^3+x+1)$$

$$=x^7+x^6+1.$$

因此，$q_1(x)=x^5+x^3$ 和 $r_1(x)=x^7+x^6+1$.

类似于整数中的最大公因数和最小公倍数, 我们可以给出多项式环 $R[x]$ 中的最大公因式和最小公倍式.

类似于整数中的最大公因数和最小公倍数, 我们可以给出多项式环 $R[x]$ 中的最大公因式和最小公倍式.

定义 7.4.4

设 $f(x), g(x) \in R[x]$, 如果 $d(x) \in R[x]$ 满足

(1) $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$.

(2) 若 $h(x) \mid f(x), h(x) \mid g(x)$, 则 $h(x) \mid d(x)$.

则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的**最大公因式**, 记作 $(f(x), g(x))$.

类似于整数中的最大公因数和最小公倍数, 我们可以给出多项式环 $R[x]$ 中的最大公因式和最小公倍式.

定义 7.4.4

设 $f(x), g(x) \in R[x]$, 如果 $d(x) \in R[x]$ 满足

(1) $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$.

(2) 若 $h(x) \mid f(x), h(x) \mid g(x)$, 则 $h(x) \mid d(x)$.

则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的**最大公因式**, 记作 $(f(x), g(x))$.

定义 7.4.5

设 $f(x), g(x) \in R[x]$, 如果 $D(x) \in R[x]$ 满足

(1) $f(x) \mid D(x), g(x) \mid D(x)$.

(2) 若 $f(x) \mid h(x), g(x) \mid h(x)$, 则 $D(x) \mid h(x)$.

则称 $D(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的**最小公倍式**, 记作 $[f(x), g(x)]$.

如何求 $(f(x), g(x))$?

设 $f(x), g(x)$ 是域 K 上的多项式, $\deg g \geqslant 1$.

记 $r_0(x) = f(x)$, $r_1(x) = g(x)$. 反复运用多项式欧几里德除法, 有

$$
\begin{aligned}
r_0(x) &= q_1(x) \cdot r_1(x) &+ \quad & r_2(x), \quad 0 \leqslant \deg r_2 < \deg r_1, \\
r_1(x) &= q_2(x) \cdot r_2(x) &+ \quad & r_3(x), \quad 0 \leqslant \deg r_3 < \deg r_2, \\
&\vdots \\
r_{k-2}(x) &= q_{k-1}(x) \cdot r_{k-1}(x) &+ \quad & r_k(x), \quad 0 \leqslant \deg r_k < \deg r_{k-1}, \\
r_{k-1}(x) &= q_k(x) \cdot r_k(x) &+ & r_{k+1}(x), \quad \deg r_{k+1} = 0.
\end{aligned}
$$

如何求 $(f(x), g(x))$？

设 $f(x), g(x)$ 是域 K 上的多项式, $\deg g \geqslant 1$.

记 $r_0(x) = f(x)$, $r_1(x) = g(x)$. 反复运用多项式欧几里德除法, 有

$$
\begin{aligned}
r_0(x) &= q_1(x) \cdot r_1(x) + r_2(x), && 0 \leqslant \deg r_2 < \deg r_1,\\
r_1(x) &= q_2(x) \cdot r_2(x) + r_3(x), && 0 \leqslant \deg r_3 < \deg r_2,\\
&\vdots\\
r_{k-2}(x) &= q_{k-1}(x) \cdot r_{k-1}(x) + r_k(x), && 0 \leqslant \deg r_k < \deg r_{k-1},\\
r_{k-1}(x) &= q_k(x) \cdot r_k(x) + r_{k+1}(x), && \deg r_{k+1} = 0.
\end{aligned}
$$

经过有限步骤, 必然存在 k 使得 $r_{k+1}(x) = 0$, 这是因为

$$0 = \deg r_{k+1} < \deg r_k < \deg r_{k-1} < \cdots < \deg r_2 < \deg r_1 = \deg g,$$

且 $\deg g$ 是有限正整数.

定理 7.4.2

设 $f(x), g(x)$ 是域 K 上的多项式, $\deg g \geqslant 1$, 则

$$(f(x), g(x)) = r_k(x),$$

其中 $r_k(x)$ 是多项式广义欧几里得除法中最后一个非零余式.

定理 7.4.2

设 $f(x), g(x)$ 是域 K 上的多项式, $\deg g \geqslant 1$, 则

$$(f(x), g(x)) = r_k(x),$$

其中 $r_k(x)$ 是多项式广义欧几里得除法中最后一个非零余式.

从多项式广义欧几里德除法中逐次消去 $r_{k-1}(x)$, $r_{k-2}(x)$, $\cdots$, $r_3(x)$, $r_2(x)$ 我们可找到多项式 $s(x), t(x)$ 使得

$$s(x) \cdot f(x) + t(x) \cdot g(x) = (f(x), g(x)).$$

定理 7.4.2

设 $f(x), g(x)$ 是域 K 上的多项式, $\deg g \geqslant 1$, 则

$$(f(x), g(x)) = r_k(x),$$

其中 $r_k(x)$ 是多项式广义欧几里得除法中最后一个非零余式.

从多项式广义欧几里德除法中逐次消去 $r_{k-1}(x), r_{k-2}(x), \cdots, r_3(x)$, $r_2(x)$ 我们可找到多项式 $s(x), t(x)$ 使得

$$s(x) \cdot f(x) + t(x) \cdot g(x) = (f(x), g(x)).$$

定理 7.4.3

设 $f(x), g(x)$ 是域 K 上的多项式, 则存在多项式 $s(x), t(x)$ 使得

$$s(x) \cdot f(x) + t(x) \cdot g(x) = (f(x), g(x)).$$

定理 7.4.2

设 $f(x), g(x)$ 是域 K 上的多项式, $\deg g \geqslant 1$, 则

$$(f(x), g(x)) = r_k(x),$$

其中 $r_k(x)$ 是多项式广义欧几里得除法中最后一个非零余式.

从多项式广义欧几里德除法中逐次消去 $r_{k-1}(x), r_{k-2}(x), \cdots, r_3(x), r_2(x)$ 我们可找到多项式 $s(x), t(x)$ 使得

$$s(x) \cdot f(x) + t(x) \cdot g(x) = (f(x), g(x)).$$

定理 7.4.3

设 $f(x), g(x)$ 是域 K 上的多项式, 则存在多项式 $s(x), t(x)$ 使得

$$s(x) \cdot f(x) + t(x) \cdot g(x) = (f(x), g(x)).$$

注：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x)) = 1$, 则称它们是 **互素** (**或互质**) 的.

例 7.4.5 设 $f(x) = x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$, $g(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$,
求多项式 $s(x), t(x)$ 使得 $s(x) \cdot f(x) + t(x) \cdot g(x) = (f(x), g(x))$.

例 7.4.5 设 $f(x)=x^{13}+x^{11}+x^9+x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+1\in\mathbb{F}_2[x]$, $g(x)=x^8+x^4+x^3+x+1\in\mathbb{F}_2[x]$,
求多项式 $s(x),t(x)$ 使得 $s(x)\cdot f(x)+t(x)\cdot g(x)=(f(x),g(x))$.

解：在例 7.4.4 的基础上, 反复运用广义多项式欧几里德除法, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x)\cdot g(x)+r_1(x), & q_1(x)&=x^5+x^3, & r_1(x)&=x^7+x^6+1,\\
g(x) &= q_2(x)\cdot r_1(x)+r_2(x), & q_2(x)&=x+1, & r_2(x)&=x^6+x^4+x^3,\\
r_1(x) &= q_3(x)\cdot r_2(x)+r_3(x), & q_3(x)&=x+1, & r_3(x)&=x^5+x^3+1,\\
r_2(x) &= q_4(x)\cdot r_3(x)+r_4(x), & q_4(x)&=x, & r_4(x)&=x^3+x,\\
r_3(x) &= q_5(x)\cdot r_4(x)+r_5(x), & q_5(x)&=x^2, & r_5(x)&=1.\\
r_4(x) &= q_6(x)\cdot r_5(x)+r_6(x), & q_6(x)&=x^3+x, & r_6(x)&=0.
\end{aligned}
$$

从而,

$$
\begin{aligned}
r_5(x) &= q_5(x)\cdot(q_4(x)\cdot r_3(x)+r_2(x))+r_3(x) \\
&= (q_5(x)\cdot q_4(x)+1)\cdot r_3(x)+q_5(x)\cdot r_2(x) \\
&= (x^3+1)\cdot(q_3(x)\cdot r_2(x)+r_1(x))+x^2\cdot r_2(x) \\
&= (x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(q_2(x)\cdot r_1(x)+g(x))+(x^3+1)\cdot r_1(x) \\
&= (x^5+x^3)\cdot(q_1(x)\cdot g(x)+f(x))+(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot g(x) \\
&= (x^5+x^3)\cdot f(x)+(x^{10}+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot g(x)
\end{aligned}
$$

从而,

$$\begin{aligned}
r_5(x) &= q_5(x)\cdot(q_4(x)\cdot r_3(x)+r_2(x))+r_3(x)\\
&= (q_5(x)\cdot q_4(x)+1)\cdot r_3(x)+q_5(x)\cdot r_2(x)\\
&= (x^3+1)\cdot(q_3(x)\cdot r_2(x)+r_1(x))+x^2\cdot r_2(x)\\
&= (x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(q_2(x)\cdot r_1(x)+g(x))+(x^3+1)\cdot r_1(x)\\
&= (x^5+x^3)\cdot(q_1(x)\cdot g(x)+f(x))+(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot g(x)\\
&= (x^5+x^3)\cdot f(x)+(x^{10}+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot g(x)
\end{aligned}$$

故 $s(x)=x^5+x^3, t(x)=x^{10}+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1.$

对应的, 也可以给出多项式同余的概念.

定义 7.4.6

给定 $R[x]$ 中的首一多项式 $m(x)$. 如果 $R[x]$ 中的两个多项式 $f(x), g(x)$ 满足 $m(x) \mid f(x) - g(x)$, 则称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 模 $m(x)$ **同余**, 记作 $f(x) \equiv g(x) \mod m(x)$. 否则, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 模 $m(x)$ **不同余**, 记作 $f(x) \not\equiv g(x) \mod m(x)$.

对应的, 也可以给出多项式同余的概念.

定义 7.4.6

给定 $R[x]$ 中的首一多项式 $m(x)$. 如果 $R[x]$ 中的两个多项式 $f(x), g(x)$ 满足 $m(x) \mid f(x) - g(x)$, 则称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 模 $m(x)$ **同余**, 记作 $f(x) \equiv g(x) \mod m(x)$. 否则, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 模 $m(x)$ **不同余**, 记作 $f(x) \not\equiv g(x) \mod m(x)$.

定义 7.4.7

设 $p(x)$ 是 $R[x]$ 中的多项式, 则称 $(p(x)) = \{f(x) \in R[x] \mid p(x) \mid f(x)\}$ 为 $R[x]$ 中的**多项式理想**.

注：设 $R[x]$ 是整环，由此可得到商环 $R[x]/\big(p(x)\big)$. 其中商环 $R[x]/\big(p(x)\big)$ 上的运算法则是：

加法: $$f(x)+g(x)=(f+g)(x) \mod p(x).$$

乘法: $$f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x) \mod p(x).$$

注：设 $R[x]$ 是整环，由此可得到商环 $R[x]/(p(x))$. 其中商环 $R[x]/(p(x))$ 上的运算法则是：

加法: $$f(x)+g(x)=(f+g)(x) \mod p(x).$$

乘法: $$f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x) \mod p(x).$$

进一步，可以得到:

定理 7.4.4

设 K 是一个域，$p(x)$ 是 $K[x]$ 中的不可约多项式，则商环 $R[x]/(p(x))$ 对于上述运算法则构成一个域.

注：设 $R[x]$ 是整环，由此可得到商环 $R[x]/(p(x))$. 其中商环 $R[x]/(p(x))$ 上的运算法则是：

加法: $$f(x)+g(x)=(f+g)(x) \mod p(x).$$

乘法: $$f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x) \mod p(x).$$

进一步，可以得到:

定理 7.4.4

设 K 是一个域，$p(x)$ 是 $K[x]$ 中的不可约多项式，则商环 $R[x]/(p(x))$ 对于上述运算法则构成一个域.

证：只需证明 $R[x]/(p(x))$ 中的非零元 $f(x) \mod p(x)$ 为可逆元.

事实上，对于 $f(x)\neq 0 \mod p(x)$，有 $(f(x),p(x))=1$.

根据多项式广义欧几里德除法，存在多项式 $s(x),t(x)$

使得 $s(x)\cdot f(x)+t(x)\cdot p(x)=1$. 从而 $s(x)f(x)\equiv 1 \mod p(x)$.

这说明 $f(x) \mod p(x)$ 为可逆元，$s(x) \mod p(x)$ 为其逆元.

本课作业

1. 设 $a(x), b(x)$ 是如下所示的多项式,

   $a(x) = x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x + 3,$

   $b(x) = x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 2x + 1.$

   试计算 $a(x) + b(x)$ 和 $a(x) \cdot b(x)$ 在数域 F_5 上的结果.

2. 设 R 是整环. 证明: 对 R 上的任何非零多项式 $f(x), g(x)$, 有

   $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$

   如果 R 不是整环, 这一结论还成立吗?

交流与讨论

电子邮箱：

陈秀波：xb_chen@bupt.edu.cn

徐国胜：guoshengxu@bupt.edu.cn

金正平：zhpjin@bupt.edu.cn