第三章 一元积分学

第四节 定积分的应用及广义积分

一．定积分的应用

定积分有着广泛的应用。在这里我们要掌握（1）直接利用公式计算（主要是计算面积、弧长、体积的公式、旋转曲面的面积）（2）用元素法计算。遇到具体问题时，如能直接用公式，我们就用公式去做，如没有现成的公式可用或公式忘了，我们可用元素法去解,尤其是物理或其他方面的应用。元素法同样适用于重积分的应用问题.还可以用元素法建立微分方程，所以说掌握了元素法就可以做到以不变应万变。

注：弧微分公式 $dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$（二维），$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$（三维），$dl=\sqrt{(dx_1)^2+(dx_2)^2+\cdots+(dx_n)^2}$（$n$ 维）。曲线弧长为 $l=\int_I dl$。

若平面曲线的方程为（1）$y=f(x)(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$；（2）$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$；

（3）$r=r(\theta)(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$，

则对应弧长分别为

（1）$l=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$；

（2）$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$；

（3）$l=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(\frac{d(r(\theta)\cos\theta)}{d\theta})^2+(\frac{d(r(\theta)\sin\theta)}{d\theta})^2}d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(r'(\theta))^2+(r(\theta))^2}d\theta$

例 1．（1）曲线 $y=2e^{-x}\sin x\,(x\geq 0)$ 与 x 轴所围成的图形的面积为_____.

（2）曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}dt(0\leq x\leq\pi)$ 的弧长为_____.

解：（1）所求的面积为 $A=\int_0^{+\infty}|2e^{-x}\sin x|dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}2e^{-x}|\sin x|dx$

而 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}2e^{-x}|\sin x|dx=2e^{-k\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt=e^{-k\pi}(1+e^{-\pi})$

$$A=(1+e^{-\pi})\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\pi}=\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$$

（2）弧长为 $l=\int_0^{\pi}\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=4$

例 2．过点 $(4,0)$ 作曲线 $y=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ 的切线，

（1） 求切线方程；

（2） 求由这切线与该曲线及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1） $y'=\dfrac{2-x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

设切点为(x_0,y_0)，则有 $\dfrac{2-x_0}{\sqrt{(x_0-1)(3-x_0)}}=\dfrac{y_0-0}{x_0-4}=\dfrac{\sqrt{(x_0-1)(3-x_0)}}{x_0-4}$

解得 $x_0=\dfrac{5}{2}$，那么切线的斜率为$k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

切线方程为 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$，即$x+\sqrt{3}y-4=0$

（3） 旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{\frac{5}{2}}^{4}[\frac{-1}{\sqrt{3}}(x-4)]^2dx-\pi\int_{\frac{5}{2}}^{3}(x-1)(3-x)dx=\frac{\pi}{6}.$$

例 3. 求椭圆$x^2+xy+y^2=1$的面积.

解：方法一：从方程解出$y_{1,2}(x)=-\dfrac{x}{2}\pm\sqrt{1-\dfrac{3}{4}x^2}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\le x\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

$$S=\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}[y_1(x)-y_2(x)]dx=2\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}dx=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\text{。}$$

方法二：椭圆的极坐标方程为

$$r^2=\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta},$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan\theta+\tan^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{1+\tan\theta+\tan^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\theta+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\theta+1}{\sqrt{3}}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})+\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{2}))=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

方法三：将方程配方为

$$\frac{3}{4}x^2+(y+\frac{x}{2})^2=1,$$

引入参数方程 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos t$，$y=\sin t-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos t$，$0\le t\le 2\pi$，

$S=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} xdy-ydx=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

方法四：作正交变换$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，（实际上是坐标旋转）

则方程化为$\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{v^2}{2}=1$，$S=\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{2}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$。

注：方法四中的变换必须是正交变换. 正交变换不改变长度，面积，体积等几何度量。

下面介绍一下元素法

我们先看一个例子

例 4.（1）求由曲线$y=2x-x^2$与直线$y=0$围成的图形绕直线$x=3$旋转一周的旋转体的体积.

(2) 求由曲线$y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 0)$绕直线$x=2$旋转的旋转曲面的面积.

（1）分析：求旋转体的体积是我们熟悉的问题．但本题没有现成的公式好用，应考虑用元素法将所求的体积化为一个积分，然后计算积分得结果．在学习定积分概念时，讲过将曲边梯形的面积化为一个定积分的几个步骤：分割、近似、求和、取极限．用元素法将所求的量化为一个定积分的步骤稍微简化一点：分割、近似（近似的思想是：以直代曲，以常代变）后得元素、积分（以得到的元素为被积表达式在相应区间上积分）．先要选好积分变量并确定积分区间，本题中可选x也可选y．若选y为积分变量，则积分区间为$[0,1]$，分割：在$[0,1]$上任取一个小区间$[y,y+dy]$，近似：该小区间对应的一小片绕直线$x=3$旋转一周的旋转体的体积ΔV近似为$\Delta V\approx\pi[(2+\sqrt{1-y})^2-(2-\sqrt{1-y})^2]dy=8\pi\sqrt{1-y}dy$，从而得体积元素$dV=8\pi\sqrt{1-y}dy$，积分得结果：$V=\int_0^1 dV=\int_0^1 8\pi\sqrt{1-y}dy=\dfrac{16}{3}\pi$．若选$x$为积分变量，则积分区间为$[0,2]$，分割：在$[0,2]$上任取一个小区间$[x,x+dx]$，近似：该小区间对应的小曲边梯形绕直线$x=3$旋转一周的旋转体的体积$\Delta V$近似为$\Delta V\approx\pi\, y[(3-x)^2-(3-x-dx)^2]=2\pi(x^3-5x^2+6x)dx-\pi\, y(dx)^2$

$\approx 2\pi(x^3-5x^2+6x)dx$，从而得体积元素$dV=2\pi(x^3-5x^2+6x)dx$，积分得结果：

$V=\int_0^2 dV=\int_0^1 2\pi(x^3-5x^2+6x)dx=\dfrac{16}{3}\pi$．解答过程自己完成.

（2）选x为积分变量，则面积元素为

$$ds=2\pi(2-x)\sqrt{1+4x^2}dx，$$

$$s=2\pi\int_{-1}^{0}(2-x)\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\pi\int_{-2}^{0}\sqrt{1+t^2}\,dt-\frac{\pi}{2}\int_{-2}^{0}t\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})\,|_{-2}^{0}-\pi\cdot\frac{1}{6}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\,|_{-2}^{0}$$

$$=\pi(2\sqrt{5}-\ln(\sqrt{5}-2))+\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

$$=(\frac{17}{6}\sqrt{5}+\ln(\sqrt{5}+2)-\frac{1}{6})\pi\text{。}$$

也可以选 y 为积分变量，那么面积元素为

$$ds=2\pi(2+\sqrt{y})\sqrt{1+(\frac{1}{2\sqrt{y}})^2}\,dy=\pi(2+\sqrt{y})\sqrt{\frac{1+4y}{y}}\,dy\text{，}$$

$$s=\pi\int_0^1(2+\sqrt{y})\sqrt{\frac{1+4y}{y}}\,dy=2\pi\int_0^1\sqrt{\frac{1+4y}{y}}\,dy+\pi\int_0^1\sqrt{1+4y}\,dy$$

$$\int_0^1\sqrt{1+4y}\,dy=\frac{1}{6}(1+4y)^{\frac{3}{2}}\,|_0^1=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

令 $t=\sqrt{\frac{1+4y}{y}}$，则

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1+4y}{y}}\,dy=\int_{+\infty}^{\sqrt{5}}td\,\frac{1}{t^2-4}=\frac{t}{t^2-4}\,|_{+\infty}^{\sqrt{5}}+\int_{\sqrt{5}}^{+\infty}\frac{1}{t^2-4}\,dt=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

$$s=2\pi(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}))+\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)=(\frac{17\sqrt{5}}{6}+\ln(2+\sqrt{5})-\frac{1}{6})\pi\text{。}$$

$$\int_0^1\sqrt{1+4y}\,dy=\frac{1}{6}(1+4y)^{\frac{3}{2}}\,|_0^1=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\text{。}$$

令 $t=\sqrt{\frac{1+4y}{y}}$，则

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1+4y}{y}}\,dy=\int_{+\infty}^{\sqrt{5}}td\,\frac{1}{t^2-4}=\frac{t}{t^2-4}\,|_{+\infty}^{\sqrt{5}}+\int_{\sqrt{5}}^{+\infty}\frac{1}{t^2-4}\,dt=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

$$s=2\pi(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}))+\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)=(\frac{17\sqrt{5}}{6}+\ln(2+\sqrt{5})-\frac{1}{6})\pi\text{。}$$

总结：用元素法求某个量 U 的一般步骤：

（1） 建立坐标系，选取积分变量，比如 x．确定该变量的变化区间即为积分区间，比如 $[a,b]$．

（2） 在区间 $[a,b]$ 上任取一个小区间 $[x,x+dx]$，对应于该小区间的部分量记为 ΔU，找出该部分量的近似值 $\Delta U\approx f(x)dx$，那么得到量 U 的元素 $dU=f(x)dx$．

（3） 以元素 $dU=f(x)dx$ 为积分表达式在区间 $[a,b]$ 上积分便得欲求的量 U

$$U=\int_a^b dU=\int_a^b f(x)dx$$

这里关键是找出元素 $dU=f(x)dx$，找元素的思想是：以直代曲，以常代变.

例 5．设有半径为 R 的密度不均匀的圆盘．已知其面密度为 $\mu=ar+b$，其中 r 为所考虑的点到圆盘中心的距离，a,b 为正常数，求圆盘的质量.

解：以圆盘上的点到圆心的距离 r 为积分变量，则 $r\in[0,R]$，任取 $[0,R]$ 上的一个小区间 $[r,r+dr]$，该小区间对应的小圆环的质量近似为

$$\Delta M\approx[\pi(r+dr)^2-\pi r^2](ar+b)\approx 2\pi r(ar+b)dr$$

于是质量元素为 $dM=2\pi r(ar+b)dr$，所以圆盘质量为

$$M=\int_0^R 2\pi r(ar+b)dr=\pi R^2(\frac{2}{3}aR+b)$$

注：本题可用二重积分计算。

第 8 届决赛的一道题：曲线 $L_1: y=\frac{x^3}{3}+2x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转所生成的曲面的面积为______.

答案　任取小区间 $[x,x+dx]$，该区间对应的曲线 $L_1: y=\frac{x^3}{3}+2x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上的一段弧绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转所生成的曲面的面积元素为

$$ds=2\pi\frac{|y-\frac{4}{3}x|}{\sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}}\sqrt{1+(x^2+2)^2}dx=2\pi\cdot\frac{1}{5}(x^3+2x)\sqrt{1+(x^2+2)^2}dx,$$

所以面积为

$$s=\frac{2\pi}{5}\int_0^1(x^3+2x)\sqrt{1+(x^2+2)^2}dx=\frac{\pi}{5}\int_0^1(x^2+2)\sqrt{1+(x^2+2)^2}d(x^2+2)$$

$$=\frac{\pi}{5}\int_2^3 t\sqrt{1+t^2}dt=\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi 。$$

另解作正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$s=2\pi\int_0^{\frac{37}{15}}|v|\sqrt{(du)^2+(dv)^2}=2\pi\int_0^{\frac{37}{15}}|-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y|\sqrt{(\frac{3}{5}dx+\frac{4}{5}dy)^2+(-\frac{4}{5}dx+\frac{3}{5}dy)^2}$$

$$=\frac{2\pi}{5}\int_0^1(-4x+x^3+6x)\sqrt{(dx)^2+(x^2+2)^2(dx)^2}=\frac{2\pi}{5}\int_0^1(x^3+2x)\sqrt{1+(x^2+2)^2}dx$$

$\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$。

问题：曲线 $L_1: y=\frac{x^3}{3}+2x$ 与直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 及直线 $L_3: y=-\frac{3}{4}x+\frac{37}{12}$ 围成的图形绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转一周的旋转体的体积是多少？

答案 曲线 $L_1: y=\frac{x^3}{3}+2x$ 与直线 $L_3: y=-\frac{3}{4}x+\frac{37}{12}$ 的交点是 $(1,\frac{7}{3})$，且直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 与直线 $L_3: y=-\frac{3}{4}x+\frac{37}{12}$ 垂直。体积元素为

$$dV=\pi[\frac{|y-\frac{4}{3}x|}{\sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}}]^2\cdot(\frac{3}{5}dx+\frac{4}{5}dy)=\frac{\pi}{25}(x^3+2x)^2(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}(x^2+2))dx$$

体积为

$$V=\frac{\pi}{25}\int_0^1(x^3+2x)^2(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}(x^2+2))dx$$

$$=\frac{\pi}{125}\int_0^1(4x^8+27x^6+60x^4+44x^2)dx$$

$$=\frac{1951}{7875}\pi\text{。}$$

另解作正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$V=\pi\int_0^1 v^2du=\pi\int_0^1(-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y)^2(\frac{3}{5}dx+\frac{4}{5}dy)$$

$$=\frac{\pi}{125}\int_0^1(-4x+3(\frac{x^3}{3}+2x))^2(3dx+4d(\frac{x^3}{3}+2x))=\frac{\pi}{125}\int_0^1(x^3+2x)^2(3+4(x^2+2)dx$$

初赛试题：设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$，$y\geqslant 0$，已知抛物线与直线 $y=0,x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a,b,c，使得图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积 V 最小。

答案 $c=1$，

$\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，得 $a=1-\frac{3b}{2}$。

$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3})\pi=(\frac{1}{5}(1-\frac{2b}{3})^2+\frac{b}{2}(1-\frac{2}{3}b)+\frac{b^2}{3})\pi$，

往下略。

第 3 届初赛试题：在 xOy 平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 ρ。在点 $(0,h)(h>0)$ 有一质量为 m 的质点，求射线对该质点的引力。

答案 $F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho}{x^2+h^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}dx=\frac{Gm\rho}{\sqrt{a^2+h^2}}$，

$$F_y=-\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho}{x^2+h^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}dx=-\frac{Gm\rho}{h}(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}})$$

射线对质点的引力为 $(\frac{Gm\rho}{\sqrt{a^2+h^2}},-\frac{Gm\rho}{h}(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}))$。

注：引力是向量。物理中应用题是常考的，需要关注功，引力，转动惯量，质量，质心的计算，大多数是多重积分，要善于应用元素法。

练习题

1.曲线 $r=\sin\frac{\theta}{3}$ 位于区间 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，$\theta\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$ 的扇形面积分别为 S_1,S_2,S_3，则 S_1,S_2,S_3 成等差数列.

2.设曲线 $y=\sin x$ 与直线 $x=0,x=\frac{\pi}{2}$ 以及 $y=t(0\le t\le 1)$ 所围部分的面积为 $S(t)$，求 $S(t)$ 的最大值和最小值.

3.设 $f(x)=x\ln x(x\in[a,b],0<a<b)$.求曲线 $y=f(x)$ 以及其上的一条切线,直线 $x=a,x=b$ 所围部分面积的最小值.

4.已知 $f(x)$ 可导,且 $xf'(x)=f(x)+3x^2$.若已知由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0,x=1,y=0$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积达到最小值,求此时平面图形面积.

5.（1）求由曲线 $y^2-2xy+x^3=0$ 所确定的封闭曲线所围成的平面图形的面积.

（2）求由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 围成的图形绕直线 $y=x$ 旋转一周的旋转体的体积及表面积.

二．广义积分（反常积分）

本节主要介绍广义积分的计算及敛散性判定。

1. 广义积分的计算也有基本方法和特殊方法，基本方法与定积分差不多但要分清瑕点。

例 6. 求下列积分

（1）$\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$,其中 $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a|^{\frac{1}{2}}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}dx\,(b>0)$，　(4) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)\cdots(n+x)}\,(n\ge 1)$

解:(1) (分析:注意这里有两个瑕点: $0,2$)

$$\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$$

$$=\arctan f(x)|_{-1}^{0}+\arctan f(x)|_{0}^{2}+\arctan f(x)|_{2}^{3}$$

$$=(-\frac{\pi}{2}-0)+(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})+(\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2})=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$$

注:本题的计算很容易出错: $\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\arctan f(x)|_{-1}^{3}=\arctan\frac{32}{27}-0=\arctan\frac{32}{27}$,错误的根源在于没注意到积分区间内有两个瑕点,由此可看出计算这类积分时一定要把瑕点找出来然后按本题的做法那样去处理,还要注意极限的单侧性.

（2）(分析：首先容易想到用分部法去求：$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{-1}{2}\int_0^{+\infty}\ln x\, d\,\frac{1}{1+x^2}$

$=-\frac{1}{2}[\frac{\ln x}{1+x^2}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx]$，至此问题出来了，由于 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+x^2}=-\infty$，这就没法做下去了，但我们不能因此就说该积分发散，也不能说分部法不能用．事实上很容易判断该积分是收敛的（实际上 $x=0$ 不是瑕点），用分部法计算广义积分时要求分部积分公式右边两项均收敛（上面做法中右边两项均发散）．本题用分部法应这样做：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^{1}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\ln x d(1-\frac{1}{1+x^2})+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\ln x d\frac{-1}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{x^2\ln x}{1+x^2}|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx]+\frac{1}{2}[\frac{-\ln x}{1+x^2}|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)dx}]$$

$$=-\frac{1}{4}[\ln(1+x^2)]|_0^1+\frac{1}{4}[\ln\frac{x^2}{1+x^2}]|_1^{+\infty}=-\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\ln 2=0.$$

下面有一种更简便方法:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^{1}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$$

对后一积分作换元 $x=\frac{1}{t}$，得 $\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\int_1^{0}\frac{\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}}{(1+\frac{1}{t^2})^2}(-\frac{1}{t^2})dt=-\int_0^{1}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=0$，

注：以上方法称为分段相消法.若求 $\int_0^{1}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$，则不能用分段相消法，只能用前面方法。

（3）(分析：初一看此题比较复杂，我们试着先换元简化问题，令 $t=x-a$，则积分变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a|^{\frac{1}{2}}\ \frac{b}{(x-a)^2+b^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b|t|^{\frac{1}{2}}}{t^2+b^2}dt$$

再利用奇偶性有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b|t|^{1/2}}{t^2+b^2}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{b\sqrt{t}}{t^2+b^2}dt$

再作换元 $u=\sqrt{\frac{t}{b}}$，即 $t=bu^2$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{b\sqrt{t}}{t^2+b^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{b\sqrt{b}u}{b^2(1+u^4)}\cdot 2budu=2\sqrt{b}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du$，

但积分 $\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du$ 仍不好算，我们可用配对法计算此积分：

设 $I=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du$， $J=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^4}du$

令 $u=\frac{1}{v}$，则 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+v^4}dv=J$

又 $I+J=\int_0^{+\infty}\frac{u^2+1}{1+u^4}du=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{u^2}}{2+(u-\frac{1}{u})^2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(u-\frac{1}{u})|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}))$

$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，故 $I=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a|^{\frac{1}{2}}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}dx=4\sqrt{b}I=\sqrt{2b}\pi$，完整的解答过程请同学们完成）

注：以上方法很像利用对称性计算定积分的技巧，这里过配出的 J 是由 I 通过换元变出来的，从而 $I=J$ 相等，因此 $I=\frac{I+J}{2}$。

对于形如 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 的积分，作换元 $t=\frac{1}{x}$（或 $t=\frac{a}{x}$），然后把两个积分合并起来，这也是一种常用的技巧。具体公式是

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx.$$

比如 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[\frac{1}{1+x^6}+\frac{x^4}{1+x^6}]dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2+x^4+x^2}{1+x^6}dx$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^6}dx]=\dots$$

（4）（分析：被积函数是有理函数，我们总可以将它分拆成最简分式的和

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{A_0}{x}+\frac{A_1}{x+1}+\cdots+\frac{A_n}{x+n},$$

上式两边同乘 $x+k$，然后令 $x=-k$，得

$A_k=\frac{1}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k)}=\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}=\frac{(-1)^k C_n^k}{n!}$，并且 $\sum_{k=0}^{n}A_k=0$（只需对

$\dfrac{x}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\dfrac{A_0x}{x}+\dfrac{A_1x}{x+1}+\cdots+\dfrac{A_nx}{x+n}$ 两边令 $x\to\infty$，即可得此结果）.

从而 $I_n=\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(1+x)\cdots(n+x)}=\lim\limits_{b\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\int_1^b\dfrac{A_k}{x+k}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}A_k(\ln(b+k)-\ln(1+k))$

而 $\lim\limits_{b\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\ln(b+k)=\lim\limits_{b\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\ln(1+\dfrac{k}{b})+\lim\limits_{b\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\cdot\ln b=0+0=0$，故

$I_n=\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(1+x)\cdots(n+x)}=\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(1+k)$．完整的解答过程请同学们完成）

例 7. 求下列积分

（1） 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$，求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xdx}{1+e^x}$.

（2） 已知 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，求 $\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}dx$

（3） 计算 $I(m,n)=\int_0^1 x^n(\ln x)^m dx$

（4） $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan ax-\arctan bx}{x}dx\,(a>0,b>0)$

解：（1） $\int_0^{+\infty}\dfrac{xdx}{1+e^x}=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\dfrac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}dx$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}xe^{-(n+1)x}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

注：在 $x\ge 0$ 时下面展开式是错误的（为什么？）：

$$\frac{1}{1+e^x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{nx}.$$

（2）令 $I=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}dx$， $J=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}\dfrac{1}{x^2}dx$,

则 $J=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}\dfrac{1}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}d\dfrac{1}{x}=\int_0^{+\infty}e^{-(t^2+\frac{1}{t^2})}dt=I$,

$I+J=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}(1+\dfrac{1}{x^2})dx=\int_0^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{x})^2-2}d(x-\dfrac{1}{x})=e^{-2}\int_0^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\dfrac{1}{x})$,

令 $u=x-\dfrac{1}{x}$，则 $\int_0^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\dfrac{1}{x})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$

故 $I=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$.

或直接用公式 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx$，有

$$I=\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{x})^2-2}d(x-\frac{1}{x})$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$$

。

注：若改为计算 $I=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{2}{x^2})}dx$，就不好直接用公式 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx$，我们可以先换元 $x=\sqrt[4]{2}t$，则

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-(\sqrt{2}t^2+\frac{2}{\sqrt{2}t^2})}d=\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{2}(t^2+\frac{1}{t^2})}dt,$$

再用公式 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx$，有

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(1+\frac{1}{x^2})(e^{-\sqrt{2}(x^2+\frac{1}{x^2})}dx=\frac{e^{2\sqrt{2}}}{2}\int_0^{+\infty}(e^{-\sqrt{2}(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x})=\frac{e^{2\sqrt{2}}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sqrt{2}t^2}dt$$

$$=e^{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{2}t^2}dt=\frac{e^{2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{2}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{e^{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}$$

可见 形如 $I=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx(a>0,b>0)$ 的积分都可以算出来。题中给了结果 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，事实上可以不给这个结果。我们可以用二重积分算出此积分：

$$(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx)^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}re^{-r^2}drd\theta=\frac{\pi}{4}$$

所以 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

（4） 对 m 建立递推式

$$I(m,n)=\frac{1}{n+1}\int_0^1(\ln t)^m dt^{n+1}=-\frac{m}{n+1}\int_0^1 t^{n-1}(\ln t)^{m-1}dt=\frac{-m}{n+1}I(m-1,n)$$

$$=\cdots=\frac{(-1)^m m!}{(n+1)^m}I(0,n)=\frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

（5）（利用二重积分）

$$\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}=\int_b^a\frac{1}{1+x^2y^2}dy$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}dx=\int_0^{+\infty}\int_b^a\frac{1}{1+x^2y^2}dydx=\int_b^a(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2y^2}dx)dy=\int_b^a\frac{\pi}{2y}dy$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}。$$

注：广义积分的计算方法比定积分的计算方法还要丰富，基本知识还是牛顿—莱布尼兹公式、换元和分部积分法。循环回归法（也叫方程法）、相消法、配对法、递推法在广义积分计算中使用得更多，而且相消法中还多了分段相消法。别外化为二重积分计算、利用级数计算也是要掌握的方法。

2. 非负函数的广义积分的敛散性判定

非负函数广义积分的敛散性判定的方法有

（1）比较法，这一方法适用于被积函数在瑕点附近或无穷远点附近非负（若非正，则加负号可变为非负），并且与正项级数的比较审敛法相似．可以直接的大小比较，也可以极限形式的比较。最常用的比较对象是$\int_0^a\frac{1}{x^p}dx$，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$。这里先要熟悉几个简单广义积分的收敛性：

对于$\int_0^a\frac{1}{x^p}dx$，（$a>0$），$p<1$时收敛，$p\ge 1$时发散.

对于$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$，（$a>0$），$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散.

对于$\int_a^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$，（$a>0$），$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散.

对于$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$，（$a>1$），$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散.

极限形式的比较法常演化为判阶法：对于无界区间上的非负函数的广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$（假定在$[a,+\infty)$上无瑕点），若$x\to+\infty$时，$f(x)$是无穷小,并且和$\frac{1}{x^p}$是同阶无穷小,那么可根据$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$的敛散性得出$\int_a^{+\infty}f(x)dx$的敛散性.如果$f(x)$的同阶无穷小不好找,也可以找$f(x)$的高阶(或低阶)的无穷小（比如，若$x\to+\infty$时，$f(x)$是$\frac{1}{x^p}$高阶无穷小，且$p>1$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛）。对于无界函数的广义积分$\int_a^b f(x)dx$（假定$x=a$是瑕点，无其他瑕点），若$x\to a^+$时，$f(x)$为正无穷大,则通过找到和$f(x)$同阶的无穷大$\frac{1}{(x-a)^p}$（或高阶、低阶无穷大）达到判断广义积分$\int_a^b f(x)dx$敛散性之目的.

(2) 用泰勒公式(带佩亚诺余项,对于非负函数的广义积分,这个方法和方法(1)的判阶法没有本质区别,只是有的时候更方便些.比较法(包括判阶法)只适用于非负函数的广义积分,而泰勒公式适用于各种场合.).

(3) 用正项级数的敛散性判断广义积分的敛散性：

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负连续，取数列 $\{A_n\}$ 满足：$A_n \in [a,+\infty)$，$A_n < A_{n+1}$，且 $A_n \to +\infty$，令 $a_n = \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)dx$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

在被积函数当 $x \to +\infty$ 时不是无穷小时常用此方法（见例 9），对于瑕积分也有似类方法。要注意的是:这个方法只适用于非负函数的广义积分.

（4）利用定义，或直接把积分求出来（比如 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ ）

例 8. （1）$\int_e^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} dx$，（2）$\int_2^{+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p \ln\frac{x+1}{x-1} dx$

（3）$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} dx$　　（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - e^{-x^2}}{x^\alpha \tan x} dx$

（5）$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \ln(1+\frac{1}{x^\alpha}) dx \ (\alpha > 0)$

解：（1）当 $x > e^{e^2}$ 时，$\ln x > e^2$，从而 $(\ln x)^{\ln x} > e^{2\ln x} = x^2$，即 $\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} < \frac{1}{x^2}$，

故 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} dx$ 收敛。

（2）$x \to +\infty$ 时，$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p = (\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}})^p \sim \frac{1}{2^p x^{\frac{p}{2}}}$，

$\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln(1+\frac{2}{x-1}) \sim \frac{2}{x}$，因此 $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p \ln\frac{x+1}{x-1} \sim \frac{2}{2^p x^{\frac{p}{2}+1}}$

故 $p>0$ 时收敛，$p \le 0$ 时发散。

（3）$x \to 0+$ 时，$e^{\sin x} - 1 \sim x$，从而 $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$，故收敛。

（4）$x \to 0+$ 时，$\cos^2 x - e^{-x^2} = (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4))^2 - (1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4))$

$= -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$，故

$\frac{\cos^2 x - e^{-x^2}}{x^\alpha \tan x} \sim -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$，

故 $\alpha < 4$ 时收敛，$\alpha \ge 4$ 时发散。

（5）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^\alpha})dx=\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^\alpha})dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^\alpha})dx=I_1+I_2$

$I_1=\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^\alpha})dx=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^{2-\alpha}}$ 收敛当且仅当 $\alpha<1$

当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^\alpha})\sim\frac{1}{x^{2\alpha}}$，所以

$I_1=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^\alpha})dx$ 收敛当且仅当 $2\alpha>1$，即 $\alpha>\frac{1}{2}$

故当 $\frac{1}{2}<\alpha<1$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^\alpha})dx$ 收敛；当 $\alpha\le\frac{1}{2}$ 或 $\alpha\ge1$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^\alpha})dx$ 发散.

例 9．判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$ 的敛散性。

分析：可以看出被积函数非负，但当 $x\to+\infty$ 时并不是无穷小。因此不好用比较法，也无法直接计算。由此想到利用正项级数的敛散性去判断。

解：令 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$，则 $a_n>0$，且

$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx\le\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(n+1)\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}dx$$

$$=2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}dx\quad,$$

利用不等式 $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$，可得

$$a_n\le2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi)^6(\frac{2}{\pi}x)^2}dx=\frac{n+1}{n^3\pi}\int_0^{n^3\pi^3}\frac{1}{1+t^2}dt\le\frac{n+1}{n^3},$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，从而原积分收敛。

第 3 届决赛的一道题：讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2+x^\alpha\sin^2 x}dx$ 的收敛性。

答案：由于 $f(x)=\frac{x}{\cos^2+x^\alpha\sin^2 x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，故只需讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\cos^2+x^\alpha\sin^2 x}dx$ 的收敛性。

若 $\alpha\leqslant0$，在 $f(x)=\frac{x}{\cos^2+x^\alpha\sin^2 x}\geqslant\frac{x}{2}$，可得 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\cos^2+x^\alpha\sin^2 x}dx$ 发散。

若 $\alpha>0$，记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x)dx,n=1,2,\cdots$，

当 $x\in[n\pi,(n+1)\pi]$ 时，

$$\frac{n\pi}{\cos^2 x+((n+1)\pi)^\alpha\sin^2 x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{(n+1)\pi}{\cos^2+(n\pi)^\alpha\sin^2 x},$$

设 $a>0$，下面计算积分

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{\cos^2 x+a^2\sin^2 x}dx=2\int_0^{\pi/2}\frac{1/\cos^2 x}{1+a^2\tan^2 x}dx=\frac{2}{a}\arctan(a\tan x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{a},$$

因此有

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{\cos^2 x+(n\pi)^{\alpha}\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{(n\pi)^{\alpha/2}},\quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{\cos^2 x+((n+1)\pi))^{\alpha}\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{((n+1)\pi)^{\alpha/2}},$$

所以

$$\pi^{2-\alpha/2}\cdot\frac{n}{(n+1)^{\alpha/2}}\leqslant a_n\leqslant\pi^{2-\alpha/2}\cdot\frac{n+1}{n^{\alpha/2}}$$

当 $\alpha>4$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^{\alpha/2}}$ 收敛，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\cos^2+x^{\alpha}\sin^2 x}dx$ 收敛；

当 $\alpha\leqslant 4$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^{\alpha/2}}$ 发散，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\cos^2+x^{\alpha}\sin^2 x}dx$ 发散，

综上，当 $\alpha\leqslant 4$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{x}{\cos^2+x^{\alpha}\sin^2 x}dx$ 发散；当 $\alpha>4$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{x}{\cos^2+x^{\alpha}\sin^2 x}dx$ 收敛.

例 10. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^{\beta}}dx$ 收敛的充要条件是 β 满足_______.（$\alpha\neq 0$ 为常数）

分析：首先可以看出本题答案与 α 大于零还是小于零无关，故可考虑 α 大于零，这个积分有瑕点 $x=0$ 和无穷点 $x=+\infty$，这两点都要考虑：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^{\beta}}dx=\int_0^{1}\frac{\arctan\alpha x}{x^{\beta}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^{\beta}}dx$$

对于 $\int_0^{1}\frac{\arctan\alpha x}{x^{\beta}}dx$，由于 $\arctan\alpha x\sim\alpha x\ (x\to 0)$，因此该积分与 $\int_0^{1}\frac{1}{x^{\beta-1}}dx$ 具有相同的敛散性，故该积分收敛的充要条件是 $\beta<2$。

对于 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^{\beta}}dx$，由于 $\arctan\alpha x\to\frac{\pi}{2}\ (x\to+\infty)$，因此该积分与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\beta}}dx$ 具有相同的敛散性，故该积分收敛的充要条件是 $\beta>1$。

综上分析知要填的答案是 $1<\beta<2$

3.一般函数的广义积分敛散性判定。

一般函数广义积分的敛散性判定的方法有：

（1） 看是否绝对收敛；

（2） 用泰勒公式将被积函数分拆成两个或多个函数的和，或直接将被积函数分拆成两个或多个函数的和；

（3） 用定义判定，或把积分计算出来；

（4） 补充：

（Dirichlet 定理） 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续.若

（i）对任意 $b>a$,存在正数 M ,使得 $|\int_a^b f(x)dx|\leq M$；

(ii) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

(Abel 定理) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续.若

(i) $\int_a^{+\infty} f(x))dx$ 收敛

(ii) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

对于瑕积分也有类似的定理.

例 11. 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 的敛散性,如收敛指出是条件收敛还是绝对收敛?

分析:由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,所以 $x=0$ 不是瑕点.说明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛的方法有多种:

方法一:用 Dirichlet 定理: 对任意 $b>0$, $|\int_0^b \sin x dx| = |1-\cos b| \le 2$, 又 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 由 Dirichlet 定理知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛.

方法二:用分部积分法

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{d\cos x}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$,

由于 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2}$ 收敛,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}=0$ 存在,故广义积分收敛.

说明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不是绝对收敛的方法也有多种;

方法一：令 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$， $n=1,2,\ldots$， 则 $a_n>0$

$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \ge \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散知 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ 发散.

综上, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛.

方法二：$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$， 而 $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx$ 发散，故 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ 发散。

更一般地：讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ （ $p>0$) 的敛散性。

例 12. 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x} dx$ $(p>0)$ 的敛散性,如收敛指出是条件收敛还是绝对收敛?

分 析 ： 不 能 用 Dirichlet 定 理 。 但 被 积 函 数 与 $\frac{\sin x}{x^p}$ 相 差 不 大 ， 于 是 想 到 $\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$ 。

另一想法是利用泰勒公式:

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x^p}}=\frac{\sin x}{x^p}(1-\frac{\sin x}{x^p}+o(\frac{\sin x}{x^p}))$$

$$=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}(1+o(1)).$$

解：方法一: 由于在 $x=0$ 右侧附近, $\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\le 1$,所以 $x=0$ 不是瑕点.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^p+\sin x},$$

由于 $\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$,

又广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 在 $0<p\le 1$ 时条件收敛;在 $p>1$ 时绝对收敛.

当 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时, 由 $\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\ge\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}$ 及 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}dx$ 发 散, 知 广 义 积 分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$ 发散;

当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 由 $\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\le\frac{1}{x^p(x^p-1)}\sim\frac{1}{x^{2p}}$, 知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$ 收敛且是绝对收敛.

综上 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 发散; $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时; $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 条件收敛;

$p>1$ 时; $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 绝对收敛.

方法二: 由于在 $x=0$ 右侧附近, $\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\le 1$,所以 $x=0$ 不是瑕点.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^p+\sin x}$$

当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{\sin x}{x^p+\sin x}==\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}(1+o(1))$,

当$0<p\le\frac{1}{2}$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$收敛，$\int_1^{+\infty}[\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}+o(\frac{1}{x^{2p}})]dx$发散;

当$\frac{1}{2}<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$条件收敛，$\int_1^{+\infty}[\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}+o(\frac{1}{x^{2p}})]dx$绝对收敛;

当$p>1$时，由$\frac{|\sin x|}{x^p}\le\frac{1}{x^p}$知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$绝对收敛，$\int_1^{+\infty}[\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}+o(\frac{1}{x^{2p}})]dx$绝对收敛;

综上，$0<p\le\frac{1}{2}$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$发散；$\frac{1}{2}<p\le 1$时;$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$条件收敛;

$p>1$时；$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$绝对收敛.

4.其它.

例 13. 设$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛,则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$.

证明: $\int_0^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})dx=\int_0^1 f(x-\frac{1}{x})dx+\int_1^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})dx$

$$\int_{-\infty}^0 f(x-\frac{1}{x})dx=\int_{-\infty}^{-1}f(x-\frac{1}{x})dx+\int_{-1}^0 f(x-\frac{1}{x})dx$$

作换元$t=x-\frac{1}{x}$,则

$$\int_0^1 f(x-\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 f(t)(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}})dt$$

$$\int_1^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(t)(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}})dt$$

$$\int_{-1}^0 f(x-\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f(t)(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}})dt,$$

$$\int_{-\infty}^{-1}f(x-\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 f(t)(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}})dt,$$

所以$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$.

例 14.设$a>0,b>0$, $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-A]\ln\frac{b}{a}.$$

证明:对$0<r<R<+\infty$,

$$\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_r^R\frac{f(ax)}{x}dx-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}dx$$

$$=\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$=\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$=f(\xi)\int_{ar}^{br}\frac{1}{x}dx-f(\eta)\int_{aR}^{bR}\frac{1}{x}dx$$

$$=[f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a}$$

令 $r\to 0+, R\to +\infty$,可得结论.

注:本节例 2 之(4)是该结论的特例.

练习题

6.(1)广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\beta}dx$ 收敛的充要条件是 β 满足_______.

(2)积分 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\ln x dx$ 收敛的充要条件是_______.

7.（1） $\lim\limits_{x\to 0+}x^\alpha\int_x^1\frac{f(t)}{t^{1+\alpha}}dt=$______.（$\alpha>0, f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数）

（2）设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_x^{+\infty}\frac{f(t)}{t^{1+\alpha}}dt\ (\alpha>0)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，$x\to+\infty$ 时 $F(x)$ 与 $\frac{c}{x^\alpha}$ 为等价无穷小，则 $c=$_____ .

8．求下列广义积分

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$，　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}dx(a>0)$，　（3）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(a^2+x^2)^2}dx\ (a>0)$

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^4}dx$　（5）$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$　（6）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2015})}$

（7）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}\ (\mathrm{n}>1)$　（8）$\int_{-1}^1\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)dx$

（9）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\ (a>0,b>0)$

（10）已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3(e^{\frac{\pi}{x}}-1)}$.

（11）设 $f(x)$ 为正值连续函数，且 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，证明 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx$；

并求（i）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$,(ii) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$,（iii）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}dx$.

(iv)令 $a_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}dx, n=2,3,\cdots$，判断数列 $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ 的单调性，并证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$。

（12）设 $s>0$，求 $I=\int_0^{\infty}e^{-sx}x^n dx, n=1,2,\cdots$（第 2 届初赛的题）

9. 已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$， 求（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$, (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$.

10. 已知$\int_0^{+\infty}e^{-kx^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$， 求（1）$\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx\ (a>0)$，

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2})}dx\ (a>0,b>0)$, (3) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}dx$.

11. 计算 （1）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^6)}dx$， （2）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^6)}dx$，（3）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2+4x^4}dx$，

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2+4x^4}dx$， (5) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2+4x^4}dx$，（6）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x+x^2}{1+x^2+4x^4}dx$

12.判别下列广义积分的敛散性。

（1）$\int_1^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{x})dx$ （2）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ln(\cos\frac{1}{x})dx$，

（3）$\int_0^1\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx$ （4）$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

（5）$\int_0^{+\infty}(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x})dx$

13. 讨论$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$的收敛性.

14.判别广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4\sin^2 x}dx$的敛散性。

15. 证明$\int_1^{+\infty}\{\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\}dx$收敛，并其值.

16. 求 $f(x)=\int_0^1|\ln|x-t||dt$在$[0,1]$上的最大值.

17. 设$\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})dx$收敛($a>0,b>0$),则$\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx$.

18.设 $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$,(1)证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$单调减少;(2)证明

$\frac{x}{1+x^2}<f(x)<\frac{1}{x}$.

答案或提示

1. $S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{\theta}{3})^2d\theta=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4})$, $S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{\theta}{3})^2d\theta=\frac{\pi}{8}$,

$S_3=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin\frac{\theta}{3})^2d\theta=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4})$

2. $S(t)=\int_0^t\arcsin ydy+\int_t^1(\frac{\pi}{2}-\arcsin y)dy$,

$S'(t)=2(\arcsin t-\frac{\pi}{4})$. 最小值为$S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}-1$;最大值为$S(0)=1$)

3. 设切点为$(t,t\ln t)$,则切线方程为$y=t\ln t+(1+\ln t)(x-t)$,又曲线总在切线上方,故

$S(t)=\int_a^b[x\ln x-t\ln t-(1+\ln t)(x-t)]dx$, $S'(t)=-\frac{b-a}{t}(\frac{a+b}{2}-t)$,

当$t=\frac{a+b}{2}$时面积最小，最小面积为

$$S(\frac{a+b}{2})=\frac{b^2\ln b-a^2\ln a}{2}-\frac{b^2-a^2}{4}-\frac{b^2-a^2}{2}\ln\frac{a+b}{2}。$$

4. $xf'(x)=f(x)+3x^2$的解为$f(x)=3x^2+cx$,

$V(c)=\pi\int_0^1(3x^2+cx)^2dx=\pi(\frac{c^2}{3}+\frac{3c}{2}+\frac{9}{5})$,

$c=-\frac{9}{4}$时,旋转体的体积最小. 故平面图形面积为$S=\int_0^1|3x^2-\frac{9}{4}x|dx=\frac{19}{64}$。

5.（1）方法一

$y_{1,2}(x)=x\pm x\sqrt{1-x}),0\le x\le 1$, $S=\int_0^1[y_1(x)-y_2(x)]dx=2\int_0^1x\sqrt{1-x}dx=\frac{8}{15}$。

方法二

令$y=tx$,得曲线的参数方程 $x=2t-t^2,y=2t^2-t^3$,

$S=\frac{1}{2}\int_0^2(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\int_0^2(4t^2-4t^3+t^4)dt=\frac{8}{15}$。

（2）方法一

$$dV=\pi(\frac{|y-x|}{\sqrt{2}})^2(\frac{\sqrt{2}}{2}dx+\frac{\sqrt{2}}{2}dy)=\pi\cdot\frac{(x-x^2)^2}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}x)dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\cdot(x-x^2)^2(1-2x)dx$$

$$V=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^1(x-x^2)^2(1+2x)dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^1(x^2-3x^4+2x^5)dx=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi.$$

方法二

作正交变换$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} v^2 du = \pi\int_0^1 (-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)^2 (\frac{\sqrt{2}}{2}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}dy)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^1 (-x + x^2)^2 (1+2x)dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{60}\text{。}$$

或

方程$y = x^2$化为$\frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) = \frac{1}{2}(u^2 - 2uv + v^2)$，得

$$v = \frac{2u + \sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2}u + 2}}{2}$$

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} (\frac{2u + \sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2}u + 2}}{2})^2 du = \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} (4u^2 + 12\sqrt{2}u + 4 - 2(2u + \sqrt{2})\sqrt{8\sqrt{2}u + 2})du$$

$$= \frac{\pi}{4}(\frac{8\sqrt{2}}{3} + 12\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2}{5}\frac{1}{8\sqrt{2}}(243\times 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) - \frac{6\sqrt{2}}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{8\sqrt{2}}(27\times 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}))$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{60}.$$

以上做法可行是因为由方程$\frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) = \frac{1}{2}(u^2 - 2uv + v^2)$能解出

$$v = \frac{2u + \sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2}u + 2}}{2},$$

一般情况下这是做不到的，因此这种做法难以推广到一般场合。如果变换后曲线的方程能变得很简单，那么这种做法是可取的。

方法三

$$\begin{cases} Y = X^2 \\ X + Y = 2x \end{cases} \quad X^2 + X - 2x = 0, X = \frac{-1 + \sqrt{1+8x}}{2}$$

$$dV = \pi(\sqrt{2}(\frac{-1 + \sqrt{1+8x}}{2} - x))^2 \sqrt{2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi((\sqrt{1+8x} - 2x - 1))^2 dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi(2 + 12x + 4x^2 - 2(1+2x)\sqrt{1+8x})dx,$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^1 (2 + 12x + 4x^2 - 2(1+2x)\sqrt{1+8x})dx = \frac{\sqrt{2}}{60}\pi.$$

下面求面积

方法一

$$S = 2\pi\int_0^1 \frac{|x - x^2|}{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}dx = \sqrt{2}\pi\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx - \sqrt{2}\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}dx$$

下面分别求$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx$，$\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}dx$

$$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2)=\frac{1}{12}(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}\mid_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$$

$$I=\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{12}\int_0^1 xd(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{1}{12}\int_0^1(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}dx$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx-\frac{1}{3}I$$

$$I=\frac{3}{4}(\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx)=\frac{3}{4}(\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx)$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{16}-\frac{1}{32}\int_0^{\arctan 2}\sec^3 tdt$$

下面计算 $J=\int_0^{\arctan 2}\sec^3 tdt$，

$$J=\int_0^{\arctan 2}\sec^3 tdt=\int_0^{\arctan 2}\sec tdt+\int_0^{\arctan 2}\tan^2 t\sec tdt=\ln(\sec t+\tan t)\mid_0^{\arctan 2}-\int_0^{\arctan 2}\tan td\sec t$$

$$=\ln(\sqrt{5}+2)+2\sqrt{5}-\int_0^{\arctan 2}\sec^3 tdt$$

得 $J=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2)+\sqrt{5}$

所以

$$I=\frac{5\sqrt{5}}{16}-\frac{1}{32}[\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2)+\sqrt{5}]=\frac{9\sqrt{5}}{32}-\frac{1}{64}\ln(\sqrt{5}+2)，$$

所以

$$S=\sqrt{2}(\frac{13\sqrt{5}}{96}-\frac{1}{12}+\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{64})\pi.$$

作正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$S=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}|v|\sqrt{(du)^2+(dv)^2}=2\pi\int_0^1|-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2|\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}dx+\frac{\sqrt{2}}{2}dy)^2+(-\frac{\sqrt{2}}{2}dx+\frac{\sqrt{2}}{2}dy)^2}$$

$$=\sqrt{2}\pi\int_0^1(x-x^2)\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{2}\pi\int_0^1(x-x^2)\sqrt{1+4x^2}dx.$$

6. (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\beta}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\beta}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\beta}dx$,前者收敛当且仅当 $\beta<2$,后者收敛, $\beta>1$，所以 $1<\beta<2$.

(2) $m>-1,n>-2$.

7. （1） $\frac{f(0)}{\alpha}$, (2) $\frac{1}{\alpha}$.

8. （1）(利用分段相消法） $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0$.

（2）令 $x=at$，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}[\int_0^{+\infty}\frac{\ln a}{1+t^2}dt+\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt]=\frac{\pi\ln a}{2a}$，

或 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}dx=\int_0^{a}\frac{\ln x}{a^2+x^2}dx+\int_a^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}dx$

$$=\int_0^{a}\frac{\ln x}{a^2+x^2}dx+\int_a^{0}\frac{\ln\frac{a^2}{t}}{a^2+(\frac{a}{t})^2}(-\frac{a^2}{t^2})dt=\int_0^{a}\frac{2\ln a}{a^2+x^2}dx=\frac{\pi\ln a}{2a}.$$

（3）令 $x=at$，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(a^2+x^2)^2}dx=\frac{1}{a^3}[\int_0^{+\infty}\frac{\ln a}{(1+t^2)^2}dt+\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t^2)^2}dt]=I_1+I_2$，

对 I_1 作换元 $t=\tan u$ 易得结果 $I_1=\frac{\pi\ln a}{4a^3}$.或作换元 $t=\frac{1}{u}$,可得 $2I_1=\frac{\ln a}{a^3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}du$.

对 I_2 作换元 $t=\tan x$，则

$$I_2=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot\ln\tan tdt=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\ln\tan tdt$$

$$=\frac{1}{2a^3}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos tdt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan td(\sin 2t)],$$

注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos tdt$,及

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan td(\sin 2t)]=-\pi$,

得 $I_2=-\frac{\pi}{4a^3}$.所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(a^2+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{4a^3}(\ln a-1).$$

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^4}dx=\frac{1}{3}\int_0^{1}\ln xd(1-\frac{1}{(1+x)^3})-\frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\ln xd\frac{1}{(1+x)^3}=-\frac{1}{2}$.

（5）$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}dx=-\int_0^{+\infty}xd\frac{1}{1+e^x}=\ln 2$.

（6）$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2015})}\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2015}}{(1+t^2)(1+t^{2015})}dt$,从而 $2I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$,故 $I=\frac{\pi}{4}$.

(或作换元 $x=\tan t$ 易得结果)

（7）作换元 $t=x+\sqrt{x^2-1}$，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{1}{t^2})dt=\frac{1}{(n-1)(n+1)}$.

（8）$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}})dx=\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}})dx+\int_{0}^{1}\frac{d}{dx}(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}})dx=\frac{2}{1+e}$.

(9) $\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_{0}^{+\infty}dx\int_{a}^{b}e^{-xt}dt=\int_{a}^{b}dt\int_{0}^{\infty}e^{-xt}dx=\int_{a}^{b}\frac{1}{t}dt=\ln\frac{a}{b}$..

（10）$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^3(e^{\frac{\pi}{x}}-1)}\overset{t=\frac{\pi}{x}}{=}\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{+\infty}\frac{tdt}{e^t-1}=\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{+\infty}\frac{te^{-t}dt}{1-e^{-t}}=\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{+\infty}\sum_{t=0}^{\infty}te^{-(n+1)t}dt=\frac{1}{6}$.

(11)证明 作换元$x=\frac{1}{t}$，得

$$\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\int_{+\infty}^{0}f(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{t^2}f(\frac{1}{t})dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx,$$

所以

$$\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}[\int_{0}^{+\infty}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx]=\frac{1}{2}[\int_{0}^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx。$$

(i) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}[\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+1/x^3}]dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^3}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1-x+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\frac{3}{4}+(x-\frac{1}{2})^2}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}。$$

(ii) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}[\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+1/x^4}]dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1/x^2+1}{1/x^2+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{d(x-1/x)}{2+(x-1/x)^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(iii) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}[\frac{1}{1+x^6}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+1/x^6}]dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x^4}{1+x^6}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-x^2+x^4+x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^6}dx$$

$$=\frac{1}{2}[\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}\frac{dx^3}{1+x^6}]=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3}.$$

（iv）$a_n-a_{n+1}=\frac{1}{2}[\int_{0}^{+\infty}(\frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}-\frac{1+x^{n-1}}{1+x^{n+1}})dx=\frac{1}{2}[\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}+x^{n-2}-x^n-x^{n-1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$

$$=\frac{1}{2}[\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{n-2}(x-1)^2(x+1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx>0,$$

所以 $\{a_n\}$单调减少。

（或

$$a_n=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^n}+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}=\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{n-2}}{1+x^n}+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}=\int_{1}^{+\infty}\frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}dx,$$

$$a_n-a_{n+1}=\int_{1}^{+\infty}(\frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}-\frac{1+x^{n-1}}{1+x^{n+1}})dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{n-2}+x^{n+1}-x^n-x^{n-1}}{(1+x^n)((1+x^{n+1})}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{x^{n-2}(1+x)(x-1)^2}{(1+x^n)((1+x^{n+1})}dx>0，$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少。）

$$a_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}dx=b_n+c_n，$$

$0<c_n=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}dx<\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx=\frac{1}{n-1}\to 0$，从而 $\lim\limits_{n\to}c_n=0$

$|b_n-1|=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx<\int_1^{+\infty}x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0$，从而 $\lim\limits_{n\to}b_n=1$，

所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}c_n=1.$$

（12）$I_n=\int_0^{\infty}e^{-sx}x^n dx=-\frac{1}{s}\int_0^{\infty}x^n de^{-sx}=\frac{n}{s}\int_0^{\infty}e^{-sx}x^{n-1}dx=\frac{n}{s}I_{n-1}$，

结合 $I_0=\int_0^{\infty}e^{-sx}dx=\frac{1}{s}$，得 $I_n=\frac{n!}{s^{n+1}}$。

9. (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x d\frac{1}{x}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 2x}{x^2}dx=\frac{\pi}{4}$.

10.令 $x=\frac{a}{t}$，则 $I=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(\frac{a^2}{t^2}+t^2)}\cdot\frac{a}{t^2}dt$，所以

$$2I=\int_0^{+\infty}(1+\frac{a}{x^2})e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(x-\frac{a}{x})^2-2a}d(x-\frac{a}{x})$$

$=e^{-2a}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2e^{-2a}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}e^{-2a}$，故 $\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$.

(或 令 $x=\sqrt{a}t$,则 $I=\sqrt{a}\int_0^{+\infty}e^{-a(\frac{1}{t^2}+t^2)}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$)

（2）令 $t=ax$，则 $\int_0^{+\infty}e^{-(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2})}dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-(t^2+\frac{a^2b^2}{t^2})}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}$。

(或令 $x=\sqrt{\frac{b}{a}}t$,则 $\int_0^{+\infty}e^{-(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2})}dx=\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{+\infty}e^{-ab(t^2+\frac{1}{t^2})}dt$.)

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}(e^{-2x^2}-e^{-3x^2})d\frac{1}{x}=\int_0^{+\infty}(6e^{-3x^2}-4e^{-4x^2})dx$

$=\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}$.(或 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\int_2^3 e^{-x^2y}dydx=\int_2^3\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx$

$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_2^3\frac{1}{\sqrt{y}}dy=\sqrt{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$).

11. （1）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^6)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x^5}{x^6(1+x^6)}dx=\frac{1}{6}\int_1^{+\infty}\frac{dx^6}{x^6(1+x^6)}dx=\frac{1}{6}\ln 2$ 。

(2)

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^6)}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[\frac{1}{(1+x^2)(1+x^6)}+\frac{1}{x^2}\frac{1}{(1+1/x^2)(1+1/x^6)}]dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

有一般的结果：设 $\alpha>0$ 为常数，则 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\frac{\pi}{4}$。若作换元 $x=\tan t$ ，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^\alpha t}dt\ ,$$

这就是 3.2 节中例 3 的试题（4）。

（3）方法一

作换元 $x=\frac{t}{\sqrt{2}}$ ，

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2+4x^4}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2/2+t^4}dt\ ,$$

再利用对称性

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2/2+t^4}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^2/2+t^4}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1/t^2+1}{1/t^2+1/2+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(t-1/t)}{\frac{5}{2}+(t-1/t)^2}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\arctan\frac{\sqrt{2}(t-1/t)}{\sqrt{5}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{5}}\ ,$$

所以

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2/2+t^4}dt=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\ 。$$

方法二

作换元 $x=\frac{1}{2t}$，则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2+4x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{4t^2}+4\cdot\frac{1}{16t^4}}\frac{1}{2t^2}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{4t^4+t^2+1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{4x^4+x^2+1}dx\ ,$$

$2I=\int_0^{+\infty}\frac{2x^2+1}{4x^4+x^2+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2+1/x^2}{4x^2+1/x^2+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{d(2x-1/x)}{(2x-1/x)^2+5}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ ，所以

$$I=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

方法三

令 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2+4x^4}dx$， $J=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2+4x^4}dx$，则

$$I+2J=\int_0^{+\infty}\frac{1+2x^2}{1+x^2+4x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1/x^2+2}{1/x^2+1+4x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{d(2x-1/x)}{(2x-1/x)^2+5}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2x-1/x}{\sqrt{5}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{5}},$$

$$I-2J=\int_0^{+\infty}\frac{1-2x^2}{1+x^2+4x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1/x^2-2}{1/x^2+1+4x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{d(2x+1/x)}{(2x+1/x)^2-3}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{d(2x+1/x)}{(2x+1/x)^2-3}dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty}\frac{d(2x+1/x)}{(2x+1/x)^2-3}dx$$

$$=-\int_{2\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-3}dx+\int_{2\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-3}dx$$

$$=0,$$

所以 $I=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$。

注：本题直接利用对称性（即公式 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx$）不方便，而需要一些变化。

（4） $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2+4x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx^2}{1+x^2+4x^4}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t+4t^2}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(2t+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\frac{4(2t+1/4)}{\sqrt{15}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{15}}(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{15}})$$

（5）作换元 $x=\frac{t}{\sqrt{2}}$，则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2+4x^4}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^2/2+t^4}dt=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^2/2+t^4}dt=\frac{\pi}{4\sqrt{5}}。$$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x+x^2}{1+x^2+4x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2+4x^4}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2+4x^4}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2+4x^4}dx$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2+4x^4}dx+2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2+4x^4}dx$$

$$=2(\frac{\pi}{2\sqrt{5}}+\frac{\pi}{4\sqrt{5}})=\frac{3\pi}{2\sqrt{5}}.$$

12. （1） $x\to\infty$ 时 $1-\cos\frac{1}{x}\sim\frac{1}{2x^2}$，收敛。(或 $\int_1^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{x})dx=\int_0^1(1-\cos t)/t^2dt$)

（2） $x\to\infty$ 时 $\ln(\cos\frac{1}{x})=\ln(1+(\cos\frac{1}{x}-1))\sim-\frac{1}{2x^2}$，

$p>-1$ 时收敛， $p\le-1$ 时发散。

(或 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ln(\cos\frac{1}{x})dx=\int_0^1 t^{p-2}\ln(\cos t)dt$)

（3）$x \to 0+$时 $\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$，收敛，

（4）$\dfrac{|\sin\sqrt{x}|}{x}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{x}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ （$x \to +\infty$)，绝对收敛.

（5）$\int_0^{+\infty}(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x})dx = \int_0^1(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x})dx + \int_1^{+\infty}(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x})dx$

对于$\int_0^1(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x})dx$，由于$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$是正常积分，故只需讨论$\int_0^1\ln(1+\frac{1}{x})dx$，

作换元 $t=\frac{1}{x}$，则$\int_0^1\ln(1+\frac{1}{x})dx = \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$ 收敛。

对于$\int_1^{+\infty}(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x})dx$，

由于$x \to +\infty$时 $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$，$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}(1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))$

$\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$

故$\int_1^{+\infty}(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x})dx$收敛.

13. $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$.

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx = -\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\ln t}{(t-1)^2}dt$ 收敛,

注意到$\ln x \sim x-1$（$x \to 1$）, 易知$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$发散.故原积分发散.

14. 令 $a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x}{1+x^4\sin^2 x}dx$，则

$$a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x}{1+x^4\sin^2 x}dx \ge (n-1)\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{1}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}dx$$

$$= 2(n-1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}dx \ \ \ge 2(n-1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi)^4x^2}dx$$

$$= \frac{2(n-1)}{n^2\pi}\int_0^{\frac{n^2\pi^3}{2}}\frac{1}{1+t^2}dt \ge \frac{2(n-1)}{n^2\pi}\cdot\frac{\pi}{4}$$, 由此可知原积分发散.

15. 易见$\int_1^b\{\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\}dx(b>1)$是$b$的单增函数,又

$\int_1^n \{\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\}dx = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n \to \gamma$,其中 γ 为欧拉常数.故 $\int_1^{+\infty} \{\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\}dx$ 收敛,且

$\int_1^{+\infty} \{\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\}dx = \gamma$.

16．先求出 $f(x)$ 的表达式 $f(x)=1-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$，最大值为 $1+\ln 2$.

17. 作换元 $t = ax-\frac{b}{x}$,则 $ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}$, $x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab})$,

$$dx = \frac{1}{2a}(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4ab}})dt ,$$

$$\int_0^{+\infty} f(ax+\frac{b}{x})dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4ab}})dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})dx .$$

18.(1) 作换元 $t = x+u$,则 $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xu-\frac{u^2}{2}}du$,

易见对任意 $0<x_1<x_2$, $e^{-x_1u-\frac{u^2}{2}} > e^{-x_2u-\frac{u^2}{2}} (u>0)$,故 $f(x_1)>f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少.

或 $f'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-1$,用(2)的结论知 $f'(x)<0$.

(2) 先证右边不等式

$$f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xu-\frac{u^2}{2}}du < \int_0^{+\infty} e^{-xu}du = \frac{1}{x} .$$

或: $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt < e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}\frac{1}{x}te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{x}$.

或：令 $F(x)=\int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt-\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$,则 $F'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}+e^{-\frac{x^2}{2}}>0$, 又 $F(+\infty)=0$, 故 $F(x)<0$.

再证右边不等式: 令 $F(x)=\int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt-\frac{x}{1+x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}$,则

$$F'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{x^2}{1+x^2}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-2}{(1+x^2)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}<0 ,又 F(+\infty)=0 ,故 F(x)>0 .$$

即 $\int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt > \frac{x}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}}$，

从而 $e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt > \frac{x}{1+x^2}$．