组合数学引论第三章答案

2. x^5y^{13}的系数是：$C_{18}^5\cdot 3^5\cdot(-2)^{13}=-C_{18}^5\cdot 3^5\cdot 2^{13}$,

x^8y^{10}的系数是：$C_{18}^8\cdot 3^8\cdot(-2)^{10}=C_{18}^8\cdot 3^8\cdot 2^{10}$.

3(2).等式左边$=\frac{1}{n+1}[(n+1)\binom{n}{0}+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\frac{n+1}{4}\binom{n}{3}+$
$\cdots+\frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n}]$
$=\frac{1}{n+1}[\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\cdots+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}]$
$=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$
=右边

8. 令$m=1$ 代入上式得$c=1$，再令$m=2$代入上式得$b=6$,再令$m=3$代入上式得$a=6$,

$1^3+2^3+\cdots+n^3$

$=[(6\binom{1}{3}+6\binom{1}{2}+\binom{1}{1})+(6\binom{2}{3}+6\binom{2}{2}+\binom{2}{1})+\cdots+(6\binom{n}{3}+6\binom{n}{2}+\binom{n}{1})]$

$= 6(\binom{1}{3} + \binom{2}{3} + \cdots + \binom{n}{3}) + 6(\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \cdots + \binom{n}{2}) + \cdots + (\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1})$

$= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$

$= 6\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{2}$

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

10.(1)法一：考虑3项式展开式

$(x+y+z)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3} x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$ (10.1)
其中一般项$x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$里x的次幂对应到0出现的次数，y的次幂对应到1出现的次数，z的次幂对应到2出现的次数。上述式子(10.1)中令$x = y = z = 1$得等式
$3^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}$ (10.2)
左边即所有可能的n长字符串数量，右边一般项表示的是n_1个0，n_2个1和n_3个2的字符串的数量。于是令$x = -1, y = z = 1$,（10.1）式即
$1 = 1^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n}(-1)^{n_1} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}$ (10.3)
上述式子右边一般项表示的是偶数个0的字符串的数量减去奇数个0的字符串的数量，它的值为1，等于左边。
于是(10.2)+(10.3)除以2即偶数个0的字符串的个数。

法二：利用数学归纳法证明：

法三：利用递推关系证明：
设长度为n的字符串中，0出现偶数次的字符串个数为$f(n)$个，出现奇数次的字符串个数为$g(n)$个，那么，有

$$f(n)=g(n-1)+2f(n-1)=3^{n-1}-f(n-1)+2f(n-1)=3^{n-1}+f(n-1),$$

$$f(n)=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^1+f(1)=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)+2=\frac{3^n+1}{2}$$

(2)等式左边可以理解为长度为长度为n的字符串中，0出现偶数次的字符串个数总和，即同第(1)问,根据0出现的次数分类，再用加法原理即得左式。右边即(1)所得结果，从而两者相等。

14. $\binom{10}{3,1,4,2}$

15.做组合证明如下：考虑如下组合问题的解：给定n个物体$a_1,a_2,\cdots,a_n$,从中取出k个物体，要求a_1,a_2,a_3中至少有一个被选中，求其方案数。
等式左边是上述问题的如下求解方法所得的方案数：先取出k个物体，再减去不符合要求的方案（即a_1,a_2,a_3都没有被选中)
等式右边是根据取出的a_1,a_2,a_3分类，右边第一项表示包含a_1的方案数，第二项是不包含a_1,包含a_2的方案数，第三项是不包含a_1,a_2,包含a_3的方案数，由加法原理立得右式。

16.考虑组合方法：设有红球m_1个,黄球a_2个,绿球a_3个，求从中取出n个的方案数。本题式子即按取出的各类球的个数分类。
而直接算即得结果为$\binom{m_1+m_2+m_3}{n}$

18. (组合证明)考虑如下组合问题：从n名学生中选出一个委员会（人数不限），并选出该委员会的主席和秘书长，假设主席可以兼任秘书长。求其方案数
左边表示先选定主席和秘书长，再选其他成员（非主席和秘书长的委员），右边是根据委员会的人数进行分类，先选定委员会成员，再从

成员中选定主席和秘书长。两种方法都无重复无遗漏的选出了符合要求的委员会，从而相等。