

北京邮电大学 2022 — 2023 学年第 1 学期

《组合数学》期末考试试题 (A 卷)

1. (21 分) 填空

(1) 一个凸 7 边形, 它的任何 3 条对角线都不交于同一点, 问它的所有对角线在凸 7 边形内部有_____个交点。

(2) 9 个不同的球放到 2 个相同的盒子中不允许空盒的放球方案数为_____。

(3) 10 个相同的球放到 3 个相同的盒子中允许空盒的放球方案数为_____。

(4) 10 个不同的球放到 2 个不相同的盒子中允许空盒的放球方案数为_____。

(5) $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_t=n \\ n_i \geq 0, 1 \leq i \leq t}} \binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$, 其中 t 和 n 都是

正整数, 公式中求和号包含的项数为_____;

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_t=n \\ n_i \geq 0, 1 \leq i \leq t}} \binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_t} =$$

_____。

(6) $\sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,s,t \geq 0}} \binom{m_1}{r} \binom{m_2}{s} \binom{m_3}{t} =$ _____。

2. (10 分) 证明对 18 个顶点的完全图 K_{18} 任意进行红蓝两色边着色, 都或者有一红色的 K_4 , 或者有一蓝色的 K_4 。(提示: 可以直接利用 $r(3, 3)$ 或者 $r(4, 3)$ 的结果)

3. (9 分) 求 $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$ 。

4. (10 分) 求不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 49$ 满足 $x_i \geq i$ ($i = 1, 2, \cdots, 9$) 的整数解的个数。

5. (10 分) 5 对夫妻围一圆桌而坐, 求恰好有 3 对夫妻坐在一起的方案数。

6. (10 分) 5 名旅客 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 要去 5 个地方 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , 其中 P_1 不愿意去 C_1, C_3 , P_2 不愿意去 C_4 , P_3 不愿意去 C_2, C_5 , P_4 不愿意去 C_2 , P_5 不愿意去 C_1, C_3 。每一个人只去一个地方, 每一个地方只接待一个人, 问 P_1 去 C_4 的概率有多少?

7. (15 分) 求解如下递推关系

$$\begin{cases} f(n) - 6f(n-1) + 9f(n-2) = 3^n + 4 \\ f(0) = 1, f(1) = 3 \end{cases}$$

8. (15 分) 给出第二类 Stirling 数 $S(n, k)$ 的定义, 求出第二类 Stirling 数 $S(n, k)$ 的显式表达式和 $\{S(n, k)\}_{n=k}^{\infty}$ 的指数型生成函数。