第一章 函数、极限、连续

第二节 数列极限

有关定理及方法：（1）柯西准则，（2）夹逼定理，（3）单调有界定理 （4）数列极限与其子列极限的关系 （5）求极限常用方法：适当缩放，利用等价无穷小，化为函数极限，利用微分学、积分学及级数的知识及方法，另外极限的定义、性质、重要极限、恒等变形、变量代换是经常用到的知识和技巧。

补充：

（1） stolz 定理

$\frac{0}{0}$ 型 stolz 定理:设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是无穷小量,数列$\{a_n\}$严格单调减少,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$,则有

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$.

$\frac{*}{\infty}$型 stolz 定理:设$\{a_n\}$是正无穷大量,且严格单调增加,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$.

($l=-\infty$，或$l=+\infty$时，以上结论也成立，必须是有确定符号的无穷)

(2)均值极限:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$.又若$a_n>0$，则$\lim\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

($a=-\infty$，或$a=+\infty$时，以上结论也成立，必须是有确定符号的无穷。由几何均值的极限可得到一个结果:若$a_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=a$,那么$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}=a$).

（3）$\sqrt[n]{n}\to1,\sqrt[n]{a}\to1(a>0),1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$（$\gamma=0.577\cdots$为欧拉常数，$\varepsilon_n\to0$）.

若$a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则$\sqrt[n]{a_n}\to1$。

曾经考过均值极限的证明：（1）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$.（2）设$p$为正整数，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$。

（1）用$\varepsilon-N$语言给出证明。下面给出证明:

对$\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$知$\exists N_1$，使得当$n>N_1$时，有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

考虑$n>N_1$，

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|&=\left|\frac{a_1+\cdots+a_{N_1}-N_1a}{n}+\frac{1}{n}(a_{N_1+1}-a+\cdots+a_n-a)\right|\\&\leqslant\frac{|a_1+\cdots+a_{N_1}-N_1a|}{n}+\frac{1}{n}(|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|)\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{|a_1+\cdots+a_{N_1}-N_1 a|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

对此取定的N_1，由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_1+\cdots+a_{N_1}-N_1 a|}{n}=0$，知$\exists N(N>n)$，使得当$n>N$时，有

$$\frac{|a_1+\cdots+a_{N_1}-N_1 a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2},$$

则当$n>N$时，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$.

（2）对任意的正整数$n\geqslant p$，存在唯一的整数$k\geqslant 1$及$m\in\{0,1,\cdots,p-1\}$，使得$n=kp+m$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_{p+m}-a_m+\cdots+a_{kp+m}-a_{(k-1)p+m}}{n}+\frac{a_m}{n}\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{a_{p+m}-a_m+\cdots+a_{kp+m}-a_{(k-1)p+m}}{k}\cdot\frac{k}{kp+m}\right]+\lim_{n\to\infty}\frac{a_m}{n}$$

$$=\frac{\lambda}{p}。$$

几何均值极限的证明至少有下面两种方法：

1.（1）若$a=0$,则由$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,可得$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to 0$

（2）若$a>0$，

(1) $\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\to\ln a\Rightarrow\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to a$.

2. 利用不等式$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，结合算术均值的极限可得结论。

A. 数列极限的计算及数列收敛的证明

例 1：设$x_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$，求(1)$\lim\sqrt[n]{x_n}$，(2) $\lim x_n$　(3)$\lim\sqrt{2n+1}x_n$.

解：（1）由于$\frac{1}{2n}<x_n<1$，又$\lim\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}=1$，由夹逼定理知$\lim\sqrt[n]{x_n}=1$.

（2）由于$2>\sqrt{1\cdot 3},4>\sqrt{3\cdot 5},\cdots,2n>\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$，所以$x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，又$x_n>0$

由夹逼定理知 $\lim x_n=0$.

或：令$y_n=\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$，则$x_n<y_n$，从而$x_n^2<x_ny_n=\frac{1}{2n+1}$，所以$x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

（3）（分析：$(2n+1)x_n^2=(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)})^2(2n+1)=[\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}/\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}]$

由此想到积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$,且 $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)})^2(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}(2n+1)x_n^2$.因此问题化为如何求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$．此极限能猜出是 1,并且能想到夹逼定理）

解：考虑积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$，则

$I_{2n}=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\times\frac{\pi}{2}$， $I_{2n+1}=\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$,

又 $I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}=\frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$，故 $1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{2n+1}{2n}\Rightarrow\lim\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1$，

而 $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)})^2(2n+1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}(2n+1)x_n^2$,

所以 $\lim(2n+1)x_n{}^2=\frac{2}{\pi}$.故 $\lim\sqrt{2n+1}x_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

例 2：求 $\lim\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

解：方法一（利用均值极限）：令 $a_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}},b_n=\frac{n^n}{n!}$，则 $a_n=\sqrt[n]{b_n}=\sqrt[n]{b_1\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}}$

而 $\lim\frac{b_n}{b_{n-1}}=\lim(\frac{n}{n-1})^{n-1}=e$，故 $\lim a_n=e$.

方法二（利用 stolz 公式）：令 $a_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,则 $\ln a_n=\frac{n\ln n-(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)}{n}=\frac{x_n}{n}$，其中

$x_n=n\ln n-(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)$,

又 $\lim\frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)-n}=\lim n\ln\frac{n+1}{n}=1$，所以 $\lim\ln a_n=1$，从而 $\lim a_n=e$

方法三(利用积分)：令 $a_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,则

$$\lim\ln a_n=-\lim\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n-n\ln n)=-\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=-\int_0^1\ln xdx=1$$

所以 $\lim a_n = e$

方法四(适当缩放,即利用夹逼定理)：由 $\int_{k-1}^{k}\ln x dx < \ln k < \int_{k}^{k+1}\ln x dx$， $k = 1,2,\ldots$， 得

$$\int_0^n \ln x dx < \ln(n!) < \int_1^{n+1}\ln x dx ,$$

即 $n\ln n - n < \ln n! < (n+1)\ln(n+1) - n$,因此有

$$\frac{n^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} ,$$

于是

$$\frac{1}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{n+1} ,$$

由夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$， 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ 。

方法五：由 stirling 公式：

$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$（准确表达是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(n/e)^n\sqrt{2n\pi}}}\cdot\sqrt[n]{\frac{(n/e)^n\sqrt{2n\pi}}{n!}} = e \text{ 。}$$

(stirling 公式是关于阶乘 $n!$ 的重要结果,有许多应用).

第 9 届决赛的一道题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!})$.

答案： $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}(\sqrt[n+1]{(n+1)!}/\sqrt[n]{n!} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n(\sqrt[n+1]{(n+1)!}/\sqrt[n]{n!} - 1)$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$， 及

$$\sqrt[n+1]{(n+1)!}/\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n(n+1)]{\frac{[(n+1)!]^n}{[n!]^{n+1}}} = (\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}})^{\frac{1}{n}}$$

$$= (\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}})^{\frac{1}{n}} = (\mathrm{e} + o(1))^{\frac{1}{n}}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n+1]{(n+1)!}/\sqrt[n]{n!} - 1) = \lim_{n\to\infty} n((e+o(1))^{1/n} - 1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(\mathrm{e}+o(1))} - 1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}\ln(\mathrm{e}+o(1)) = 1 ,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

本题解决的关键是用到了例 2 的结果.考试时需要推导这个结果.

例 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$

分析：$n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})=n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}-2)=\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n^2}}$,

至此想到函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$. 此函数极限可用洛必塔法则求出：$-\frac{1}{4}$.

本题直接用泰勒公式去求更方便些：$\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)\times\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$,

$\sqrt{1-\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)\times\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$,

故 $n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})=n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}-2)=n^2(-\frac{1}{4n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\to\frac{-1}{4}$.

解法一（利用函数极限求数列极限）:

先求函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=-\frac{1}{4},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{4}.$$

解法二（利用泰勒公式）:

由泰勒公式，我们有

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)\times\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}),$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)\times\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}-2)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2(-\frac{1}{4n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=\frac{-1}{4}\text{。}$$

本题还有一种做法（这种方法不便于推广到一般情形）：

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}})$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{-2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}$$

$$=-2\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}.$$

注:数列极限通过函数极限去求,目的是使用函数极限的计算方法,特别是洛必塔法则或泰勒公式.如用泰勒公式,则可直接对数列使用泰勒公式：先把 a_n 表示为 $a_n=f(\frac{1}{n})$，然后利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式得到 a_n 的 Taylor 展开式。如将本题改为：求 a，k，使得 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}$ 与 $\frac{a}{n^k}$ 为等价无穷小，那么用 Taylor 公式求解会简便些。本题可引申出另外的题目：设 $a_n=2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 收敛性及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n^p$ 收敛性

例 4：设 $f'(a)$ 存在，且 $f(a)\neq 0$，求 $\lim(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})})^n$.

分析：易见 $\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\to 1$，该极限属于 1^∞ 型的问题，一般地可利用重要极限或利用等式 $[a(n)]^{b(n)}=e^{b(n)\ln a(n)}$ 去处理，属于 $\infty^0,0^0$ 型的极限问题一般是利用等式 $[a(n)]^{b(n)}=e^{b(n)\ln a(n)}$,再处理 $b(n)\ln a(n)$ 的极限.

$$\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^n=\left[1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^n$$

$$=\left[1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^{\frac{f(a-\frac{1}{n})}{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}\times\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{f(a-\frac{1}{n})}}\to e^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}$$

或：若 $f(a)>0$

$$\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^n=e^{n(\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a-\frac{1}{n}))}\to e^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}.$$

若 $f(a)<0$，同样可求出答案.

例 5：设 $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$，证明$\{a_n\}$收敛.

分析：为证数列收敛，我们首先想到用收敛准则,在这里容易想到单调有界准则，我们用单调有界准则试一试.
先看是否单调：

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<0$$

可见该数列单调减少，下面再说明有下界：

由 $\frac{1}{\sqrt{k}}>\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$，可得 $a_n>\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx-2\sqrt{n}=2\sqrt{n+1}-2-2\sqrt{n}>-2$

由此可得结论．证明过程同学自己完成.

有更一般的结果：设 $\delta\in(0,1)$，$a_n=1+\frac{1}{2^\delta}+\cdots+\frac{1}{n^\delta}-\frac{n^{1-\delta}}{1-\delta}$，则$\{a_n\}$收敛.

利用单调有界准则证明：

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^\delta}-\frac{1}{1-\delta}((n+1)^{1-\delta}-n^{1-\delta})=\frac{1}{(n+1)^\delta}-\frac{1}{(n+\theta)^\delta}<0,$$

由 $\frac{1}{k^\delta}>\int_k^{k+1}\frac{1}{x^\delta}dx$，可得 $a_n>\int_1^{n+1}\frac{1}{x^\delta}dx-\frac{n^{1-\delta}}{1-\delta}=\frac{1}{1-\delta}((n+1)^{1-\delta}-1)-\frac{n^{1-\delta}}{1-\delta}>-\frac{1}{1-\delta}$。

用单调有界准则证明数列收敛是常用和常规的思路与方法。本题单调性易证，但有界性的证明不是很容易，这里使用了定积分进行缩放。利用积分对数列（通常是多项的和）进行缩放是一

个有用的技巧.比如，首届竞赛的压轴题：求当 $x\to 1^-$ 时与 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的一个无穷大量。解决的关键点是利用积分对 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 进行缩放：

对于 $x\in(0,1)$，有 $\int_n^{n+1}x^{t^2}dt<x^{n^2}<\int_{n-1}^{n}x^{t^2}dt, n=1,2,\cdots$，以及 $\int_0^1 x^{t^2}dt<1$，从而

$$\int_0^{\infty}x^{t^2}dt<\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}<1+\int_0^{\infty}x^{t^2}dt,$$

再由

$$\int_0^{\infty}x^{t^2}dt=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\ln\frac{1}{x})t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln(1-(1-x))}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}, x\to 1^-,$$

得结论.

这里用到了一个结论：$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$，或 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$，其中 $a>0$ 为常数。可用二重积分证明此结果：

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ay^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-ar^2}dr=\cdots$$

同学们学过概率论后对此结果会更熟悉。

第 8 届决赛的填空题：$\sum_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为_____.

$$\sum_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}<1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+2(\sqrt{100}-1)=19,$$

$$\sum_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}>\int_1^{101}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{101}-2>18,$$

所以答案为 18.

续例 5. 利用级数的知识证明数列 $\{a_n\}$ 收敛更容易些：

$$0<a_n-a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}<\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

由正项级数审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，从而数列 $\{a_n\}$ 收敛.

注：利用级数的知识去说明数列收敛甚至求极限也是要掌握的方法，一般有两种情况：

（1） 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim a_n = 0$.（这是大家熟悉的级数收敛的必要条件,练习题 2 就需用此性质.）

（2） 数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$收敛（或级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$收敛）,且

$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$.（如例题 6，练习题 9）

例 6. 设$a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+2} = (1-\frac{1}{n})a_{n+1} + \frac{1}{n}a_n$,求$\lim_{n\to\infty} a_n$.

解:由$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{n}(a_{n+1} - a_n) = \cdots = (-1)^n \frac{b-a}{n!}$,

可得 $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(b-a)}{(n-1)!} = a + (b-a)e^{-1}$.

例 7.（1）设$\lim a_n = a$，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$发散，求$\lim \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$；（2）设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，数列$\{p_n\}$严格单调增加，且$\lim p_n = +\infty$，求$\lim \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_n}$.

解:（1）由 Stolz 定理得

$$\lim \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \lim \frac{p_n a_n}{p_n} = a,$$

注：这是算术均值极限的推广。这一方面可以想到上面结果可以用$\varepsilon - N$语言给予证明，另一方面可以看到算术均值极限是 Stolz 定理的一个简单推论。

（2）令$A_n = a_1 + \cdots + a_n$，则$a_n = A_n - A_{n-1} (n \ge 2), a_1 = A_1$,

由题设知 $\lim A_n = A$存在，

$$\frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = \frac{p_1 A_1 + p_2(A_2 - A_1) + \cdots + p_n(A_n - A_{n-1})}{p_n}$$

$$= \frac{p_n A_n - [A_{n-1}(p_n - p_{n-1}) + \cdots + A_1(p_2 - p_1)]}{p_n} = A_n - \frac{B_n}{p_n}$$

其中$B_n = A_1(p_2 - p_1) + \cdots + A_{n-1}(p_n - p_{n-1})$,

而$\lim \frac{B_n}{p_n} = \lim \frac{B_{n+1} - B_n}{p_{n+1} - p_n} = \lim A_n = A$,

故$\lim \frac{p_1 a_1 + \cdots p_n a_n}{p_n} = A - A = 0$.

利用极限定义（即$\varepsilon - N$方法）或柯西准则证明极限的试题在竞赛中也出现过.

例 设$\{u_n\}$为单调递减的正实数列，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，$\{a_n\}$为实数列，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$收敛,证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)u_n = 0.$$

证明 对于任意的$\varepsilon > 0$，由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$收敛知，存在正整数$N_1$，使得对任意的$n > N_1$，有

$$\left|\sum_{k=N_1+1}^{n} a_k u_k\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

记$A_i = \sum\limits_{k=N_1+1}^{N_1+i} a_k u_k, i = 1, 2, \cdots, A_0 = 0$，那么$|A_i| < \dfrac{\varepsilon}{4}$，$a_{N_1+i} = \dfrac{A_i - A_{i-1}}{u_{N_1+i}}, i = 1, 2, \cdots$

考虑$n > N_1$，

$$|(a_1 + \cdots + a_{N_1} + a_{N_1+1} + \cdots + a_n)u_n| \leqslant |(a_1 + \cdots + a_{N_1})u_n| + |(a_{N_1+1} + \cdots + a_n)u_n|,$$

$$\begin{aligned}
(a_{N_1+1} + \cdots + a_n)u_n &= u_n \sum_{i=1}^{n-N_1} \frac{A_i - A_{i-1}}{u_{N_1+i}} \\
&= u_n\left(\sum_{i=1}^{n-N_1} \frac{A_i}{u_{N_1+i}} - \sum_{i=1}^{n-N_1} \frac{A_{i-1}}{u_{N_1+i}}\right) \\
&= u_n\left(\sum_{i=1}^{n-N_1} \frac{A_i}{u_{N_1+i}} - \sum_{i=0}^{n-N_1-1} \frac{A_i}{u_{N_1+i+1}}\right) \\
&= u_n\left(\sum_{i=1}^{n-N_1-1} \left(\frac{1}{u_{N_1+i}} - \frac{1}{u_{N_1+i+1}}\right)A_i + \frac{A_{n-N_1}}{u_n}\right),
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
|(a_{N_1+1} + \cdots + a_n)u_n| &\le u_n\left(\sum_{i=1}^{n-N_1-1} \left|\frac{1}{u_{N_1+i}} - \frac{1}{u_{N_1+i+1}}\right| \cdot |A_i| + \frac{|A_{n-N_1}|}{u_n}\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} u_n\left(\sum_{i=1}^{n-N_1-1} \left(\frac{1}{u_{N_1+i+1}} - \frac{1}{u_{N_1+i}}\right) + \frac{1}{u_n}\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{4} u_n\left(\frac{2}{u_n} - \frac{1}{u_{N_1+1}}\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

对此取定的N_1，由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$知$\exists N_2$，使得当$n>N_2$时，有

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_{N_1})u_n|<\frac{\varepsilon}{2},$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，有

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n|\le|(a_1+a_2+\cdots+a_{N_1})u_n|+|(a_{N_1+1}+a_{N_2+2}+\cdots+a_n)u_n|<\varepsilon。$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0$。

证明二：

设$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_ku_k, n=1,2,\cdots$， $S_0=0$，则$a_n=\dfrac{S_n-S_{n-1}}{u_n}, n=1,2,3,\cdots$。

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=u_n\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{u_k}$$

$$=u_n[\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{u_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{S_{k-1}}{u_k}]$$

$$=u_n[\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{u_k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{S_k}{u_{k+1}}]$$

$$=u_n(\frac{S_n}{u_n}-\frac{S_0}{u_1}+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_{k+1}})S_k)$$

$$=S_n-u_n\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k})S_k。$$

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n=S$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$。

由于$\{\dfrac{1}{u_n}\}$单调增加且趋于$+\infty$，由 Stolz 定理我们有

$$\lim_{n\to\infty}u_n\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k})S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k})S_k}{\frac{1}{u_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n-1}})S_{n-1}}{\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n-1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}$$

$$=S\text{ 。}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=\lim_{n\to\infty}[S_n-u_n\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k})S_{k-1}]=S-S=0\text{ 。}$$

练习题

1．求极限 (1) $\lim n(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n^2}})$ （ $a>0)$ ，（2） $\lim n^2\ln(n\sin\frac{1}{n})$ ，（3）设 $n\sin\frac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\frac{1}{n+1}$，求 $\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ （4）$\lim(-1)^n n\sin\sqrt{n^2+2}\pi$，

（5）$\lim(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})$ （6）$\lim(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_{n+p}\sqrt{n+p})$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 为满足 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$ 的 $p+1$ 个常数。

（7）$\lim(1+\sin\sqrt{1+4n^2}\pi)^n$

2．设 $a_n=\frac{5}{1}\times\frac{6}{3}\times\cdots\times\frac{n+4}{2n-1}$，求 $\lim a_n$

3．$s_n=\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k/n^2$，求 $\lim s_n$

4．将二项系数 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 的算术平均和几何平均上分别记为 A_n 和 G_n,求 $\lim\sqrt[n]{A_n},\lim\sqrt[n]{G_n}$

5.用 stolz 定理求下列极限

(1) 已知 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$,求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{k}}$. (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^{n+1}}(a+\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{a^n}{n})$ $(a>1)$.

6．设 $a_n=e-(1+\frac{1}{n})^n$， a,k 为何值时， a_n 与 $\frac{a}{n^k}$ 为等价无穷小。

7.（1）证明 $\frac{1}{(n+1)!}<e-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})<\frac{1}{n\cdot n!}$，

（2）求 $\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$，

（3）求 $\lim_{n\to\infty}(n+1)!(e-(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}))$.

8．设 $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$，其中 a_n,b_n 为正整数，

求$\lim(a_n-\sqrt{3}b_n)$，$\lim\frac{a_n}{b_n}$，$\lim A_n$，其中$A_n=(2+\sqrt{3})^n-[(2+\sqrt{3})^n]$

9.设$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$,证明$\{a_n\}$收敛.

10.正数a,b,c之间满足什么关系，使得$2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}}=o(\frac{1}{n})$。

11.设a,b,c为不全等的正数，讨论无穷小$2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}}$的阶。

B.两类典型的极限问题

一. 由递推式$x_{n+1}=f(x_n)$生成的数列$\{x_n\}$的极限.

首先介绍两个结论.

命题一：设$x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$,且$x_n\in I$, $f(x)$在区间I上连续，如果极限$\lim x_n$存在，则极限值$l=\lim x_n$满足方程 $l=f(l)$.

命题二：设$x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$,且$x_n\in I$,如果$f(x)$在区间$I$上单调, 则只有两种情况：(1)当$f(x)$在$I$上单调增加时, 则数列$\{x_n\}$为单调数列, 并且当$x_1\le x_2$时,$\{x_n\}$单调增加；当$x_1\ge x_2$时,$\{x_n\}$单调减少.（2）当$f(x)$在$I$上单调减少时, 则$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{2n}\},\{x_{2n-1}\}$分别为单调数列但单调性相反，且当$x_1\le x_3$时,$\{x_{2n-1}\}$单调增加, $\{x_{2n}\}$单调减少；当$x_1\ge x_3$时,$\{x_{2n-1}\}$单调减少, $\{x_{2n}\}$单调增加.

下面用归纳法给出命题二的证明:

(1) 若$f(x)$在I上单调增加,且$x_1\le x_2$,

设$x_n\le x_{n+1}$, 则$f(x_n)\le f(x_{n+1})$, 即$x_{n+1}\le x_{n+2}$,

由归纳法知,对$n=1,2,\cdots$,总有$x_n\le x_{n+1}$,即数列$\{x_n\}$单调增加.

(2) 若$f(x)$在I上单调减少,且$x_1\le x_3$,则$f(x_1)\ge f(x_3)$,即$x_2\ge x_4$,

设 $x_{2n-1}\le x_{2n+1}$，则 $f(x_{2n-1})\ge f(x_{2n+1})$，即 $x_{2n}\ge x_{2n+2}$，进而 $f(x_{2n})\le f(x_{2n+2})$. 即$x_{2n+1}\le x_{2n+3}$,

由归纳法知 $\{x_{2n-1}\}$单调增加, $\{x_{2n}\}$单调减少.

注意:命题二的作用在于可使我们迅速地判断数列的单调情况,从而确定解题思路和方法.由于此命题在教材中并没有介绍,因此最好不要直接利用它去解题,如需用它也要把归纳法的证明过程写完整(见下面例子).两个命题也有另外一个作用:若能判断数列$\{x_n\}$单调增加(减少),且方程$x = f(x)$无实根,则数列$\{x_n\}$的极限为$+\infty$(或$-\infty$),即数列$\{x_n\}$发散.

例 8. 设$x_1 > 0$，$x_{n+1} = \dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$（$c > 1$为常数），证明：$\lim x_n$存在，并求其极限.

分析:令$f(x) = \dfrac{c(1+x)}{c+x}$，$f'(x) = \dfrac{c^2-c}{(c+x)^2} > 0$,知$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加,又$x_n \in (0,+\infty)$，故$\{x_n\}$为单调数列，再比较$x_1, x_2$的大小：$x_1 - x_2 = \dfrac{{x_1}^2 - c}{c+x_1}$，易见$x_1 \le \sqrt{c}$时，$x_1 \le x_2$，知$\{x_n\}$单调增加；$x_1 \ge \sqrt{c}$时，$x_1 \ge x_2$，知$\{x_n\}$单调减少.有了以上“认识”后解题思路就很清楚和明确：对首项x_1分两类$x_1 \le \sqrt{c}$，$x_1 \ge \sqrt{c}$讨论，再设法证明数列单调和有界。

解法一：（i）若$x_1 \le \sqrt{c}$，

令$f(x) = \dfrac{c(1+x)}{c+x}$，$f'(x) = \dfrac{c^2-c}{(c+x)^2} > 0$，知$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加，由题设易知$x_n > 0$，由$x_1 - x_2 = \dfrac{{x_1}^2 - c}{c+x_1} \le 0$得$x_1 \le x_2$，设$x_{n-1} \le x_n$，那么$x_n = f(x_{n-1}) \le f(x_n) = x_{n+1}$，由归纳法知数列$\{x_n\}$单调增加。

又$x_1 \le \sqrt{c}$,设$x_n \le \sqrt{c}$,则$x_{n+1} = f(x_n) \le f(\sqrt{c}) = \dfrac{c(1+\sqrt{c})}{c+\sqrt{c}} = \sqrt{c}$,由归纳法知$x_n \le \sqrt{c}$，综上知$\{x_n\}$单调增加且有上界，从而极限$\lim x_n$存在。

设$\lim x_n = a$,则有$a = \dfrac{c(1+a)}{c+a}$,解得$a = -\sqrt{c}$（不合题意,舍去），$a = \sqrt{c}$,故$\lim x_n = \sqrt{c}$。

（ii）若$x_1 \ge \sqrt{c}$，其解法同上（留给同学去完成）

解法二：（i）若$x_1 \le \sqrt{c}$，

由于$x_{n+1} - x_n = \dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n} - \dfrac{c(1+x_{n-1})}{c+x_{n-1}} = \dfrac{c(c-1)(x_n - x_{n-1})}{(c+x_n)(c+x_{n-1})}$，由题设知$c > 1, x_n > 0$,

因此 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，又

$$x_2-x_1=\frac{c-x_1^{\ 2}}{c+x_1}\geq 0,$$

故 $x_{n+1}-x_n\geq 0$，即 $\{x_n\}$ 单调增加。

设 $x_n\leq\sqrt{c}$，则 $x_{n+1}-\sqrt{c}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}-\sqrt{c}=\dfrac{(c-\sqrt{c})(x_n-\sqrt{c})}{c+x_n}\leq 0\Rightarrow x_{n+1}\leq\sqrt{c}$，由归纳法知 $x_n\leq\sqrt{c}$.

综上知 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界，从而 $\lim x_n$ 存在。

设 $\lim x_n=a$，则有 $a=\dfrac{c(1+a)}{c+a}$，得 $a=-\sqrt{c}$（不合题意,舍去），$a=\sqrt{c}$，故 $\lim x_n=\sqrt{c}$ 。

（ii）若 $x_1\geq\sqrt{c}$，其解法同上（留给同学去完成）

本题亦可先证明有界性，再利用有界性证明单调性。下面给出这种解法:

解法三：（i）若 $x_1\leq\sqrt{c}$,

由题设易知 $x_n>0$,

设 $x_n\leq\sqrt{c}$，$x_{n+1}-\sqrt{c}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}-\sqrt{c}=\dfrac{(c-\sqrt{c})(x_n-\sqrt{c})}{c+x_n}\leq 0\Rightarrow x_{n+1}\leq\sqrt{c}$，由归纳法知 $x_n\leq\sqrt{c}$，即数列 $\{x_n\}$ 有上界。

又 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}-x_n=\dfrac{c-x_n^2}{c+x_n}$,

由于 $x_n\leq\sqrt{c}$,可得 $x_{n+1}\geq x_n$.即数列 $\{x_n\}$ 单调增加。

综上知 $\{x_n\}$ 单调增加且有界，从而 $\lim x_n$ 存在。

设 $\lim x_n=a$，则有 $a=\dfrac{c(1+a)}{c+a}$，得 $a=-\sqrt{c}$（不合题意舍去），$a=\sqrt{c}$，故 $\lim x_n=\sqrt{c}$ 。

注：由于 $x_n>0$，因而数列的单调性也可这样去说明:先用归纳法证明 $x_n\leq\sqrt{c}$,再由

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{c(1+\frac{1}{x_n})}{c+x_n}=\frac{1+\frac{1}{x_n}}{1+\frac{x_n}{c}}\geq 1,$$

得 $x_{n+1}\ge x_n$ 。

总之，说明数列$\{x_n\}$单调性的方法除了利用导数（本题的方法一）之外，一般有以下方法：

(1)作相邻两项的差 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})$，并能说明 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，则只须通过比较 x_1 与 x_2 的大小便可证明数列$\{x_n\}$单调性。

(2) 作相邻两项的差 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n$，如能直接证明 $f(x_n)-x_n\ge 0$ (或 $f(x_n)-x_n\le 0$)，那么就说明了数列$\{x_n\}$单调性。这时一般要先证明数列的有界性。

(3)若数列是正数列，也可以用相邻两项之比 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 去讨论.

本题还有以下两种做法:

做法一.由题设知 $x_n>0,n=1,2,\cdots$,从而有

$$|x_n-\sqrt{c}|=\left|\frac{c(1+x_{n-1})}{c+x_{n-1}}-\sqrt{c}\right|=\frac{c-\sqrt{c}}{c+x_{n-1}}|x_{n-1}-\sqrt{c}|\le\frac{c-\sqrt{c}}{c}|x_{n-1}-\sqrt{c}|$$

$$\le(\frac{c-\sqrt{c}}{c})^2|x_{n-2}-\sqrt{c}|\le\cdots\le(\frac{c-\sqrt{c}}{c})^{n-1}|x_1-\sqrt{c}|,$$

又由于 $0<\dfrac{c-\sqrt{c}}{c}<1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{c}|=0$,即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\sqrt{c}$.

做法二. 由题设知 $x_n>0,n=1,2,\cdots$,从而有

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n|&=\left|\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}-\frac{c(1+x_{n-1})}{c+x_{n-1}}\right|\\&=\frac{c(c-1)|x_n-x_{n-1}|}{(c+x_n)(c+x_{n-1})}\\&\le\frac{c-1}{c}|x_n-x_{n-1}|.\end{aligned}$$

由于 $0<\dfrac{c-\sqrt{c}}{c}<1$,于是级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim x_n=a$，则有 $a=\dfrac{c(1+a)}{c+a}$，得 $a=-\sqrt{c}$ （不合题意,舍去），$a=\sqrt{c}$，故 $\lim x_n=\sqrt{c}$ 。

例 9. 设数列$\{b_n\}$由 $b_1=1,b_{n+1}=2+\dfrac{1}{b_n}$ 生成，求证 $\lim b_n$ 存在，并求其极限.

分析：令 $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少。又 $b_n\in(0,+\infty)$,故数列$\{b_n\}$不是单调数列，但奇、偶分别单调。此时有以下处理方法：（ 1 ）证明 $\lim b_{2n-1},\lim b_{2n}$ 存在且极限值都是 a，那

么 $\lim b_n$ 存在且 $\lim b_n = a$.（2）若 $|b_n - a| \le \alpha |b_{n-1} - a|$ ，其中 $0 < \alpha < 1$ 为常数，则 $\lim b_n = a$.（这里的 a 是方程 $f(x) = x$ 的一个解）.（3）若 $|b_{n+1} - b_n| \le \alpha |b_n - b_{n-1}|$，其中 $0 < \alpha < 1$ 为常数，则 $\lim b_n$ 存在，且极限值 a 是方程 $f(x) = x$ 的一个根.

解：方法一： 易见 $b_n \ge 2, n = 2,3,\cdots$，令 $a = 1+\sqrt{2}$，则 a 满足 $a = 2+\frac{1}{a}$,因此

$$|b_n - a| = \left|2+\frac{1}{b_{n-1}} - 2 - \frac{1}{a}\right| = \frac{|b_{n-1}-a|}{ab_{n-1}} \le \frac{1}{4}|b_{n-1}-a| \le \cdots \le \frac{|b_1 - a|}{4^{n-1}} \to 0$$

所以 $\lim b_n = a = 1+\sqrt{2}$

方法二：易见 $b_n \ge 2, n = 2,3,\cdots$,

$$|b_{n+1} - b_n| = \frac{|b_n - b_{n-1}|}{b_n b_{n-1}} \le \frac{1}{4}|b_n - b_{n-1}|,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛 $\Rightarrow \lim b_n$ 存在，设 $\lim b_n = a$，则 a 满足 $a = 2+\frac{1}{a}$

解此方程得 $a = 1-\sqrt{2}$（舍去）, $a = 1+\sqrt{2}$，故 $\lim b_n = 1+\sqrt{2}$.

方法三：易见 $2 \le b_n \le 3, n = 2,3,\cdots$

$$b_{n+2} - b_n = \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_{n-1}} = \frac{1}{2+\frac{1}{b_n}} - \frac{1}{2+\frac{1}{b_{n-2}}} = \frac{b_n - b_{n-2}}{(2b_n+1)(2b_{n-2}+1)},$$

可见 $b_{n+2} - b_n$ 与 $b_n - b_{n-2}$ 同号

由 $b_1 < b_3$ 及归纳法知 $\{b_{2n-1}\}$ 单调增加，由 $b_2 > b_4$ 及归纳法知 $\{b_{2n}\}$ 单调减少。

所以 $\lim b_{2n-1}, \lim b_{2n}$ 都存在，设 $\lim b_{2n-1} = a, \lim b_{2n} = b$，则 a, b 满足

$a = 2+\frac{1}{b}$， $b = 2+\frac{1}{a}$

解得 $a = b = 1+\sqrt{2}$，故 $\lim b_n$ 存在，且 $\lim b_n = 1+\sqrt{2}$.

注:综合上面两个例子可以总结出这类题的一般解题思路:先判断数列是否有单调性,再选择解法.类似的题还有另外一种解法,就是设法求出数列的通项公式,再求极限.数列的通项公式不一定有简洁的表达式,即使有,也需要较高的技巧才能求出来,一般不易掌握.但是有些题目,如果其通项公式较容易求出来,这时可以先求出通项公式再求极限或求解其它问题.

例 10. 设$0<x_1<\dfrac{\pi}{2}$， $x_{n+1}=\sin x_n, n=1,2,\cdots$，求(1)$\lim x_n$，（2）$\lim(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$，

（3） $\lim\sqrt{n}x_n$.

分析：问题（1）是容易的，只需说明该数列单调有界便可求出$\lim x_n=0$

对问题（2），由（1）知$x_n\to 0$，从而$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sin x_n}{x_n}\to 1$，$\dfrac{1}{x_n^2}\to\infty$，因此此极限问题属于$1^\infty$型未定式问题，由此想到两种处理办法：1. $A^B=e^{A\ln B}$；2.重要极限.

对问题(3) ，由（1）知$\{x_n\}$是无穷小，自然就有找出该无穷小的阶的问题，同样当数列为无穷大时也会有找无穷大的阶的问题(如练习题 14，15). 更一般地,若数列的极限为a,会有数列收敛于a的速度问题.通过（3）的解答知该数列与$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$为同阶无穷小。这种问题用 Stolz 定理去解并不困难,但要注意变形,本题要先求$\lim nx_n^2$，而不是直接求$\lim\sqrt{n}x_n$。

解(1)略

（2）$\lim(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim e^{\frac{1}{x_n^2}(\ln x_{n+1}-\ln x_n)}$

$$\text{而}\lim\frac{\ln x_{n+1}-\ln x_n}{x_n^2}=\lim\frac{\ln\sin x_n-\ln x_n}{x_n^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{x(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

或

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}=-\frac{1}{6}$$

故$\lim(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{\frac{-1}{6}}$.

另解：由于 $\lim(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1)=\lim\frac{\sin x_n}{x_n}-1=1-1=0$

$$\lim(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim(1+\frac{x_{n+1}}{x_n}-1)^{\frac{x_n}{x_{n+1}-x_n}\times\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n^3}}$$

而 $\lim\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$，

故 $\lim(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{\frac{-1}{6}}$

(3) $\lim nx_n^2=\lim\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}$

$$=\lim\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim\frac{x_n^2\sin^2 x_n}{x_n^2-\sin^2 x_n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=3$$

故 $\lim\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.

(对于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}$，既可用洛必塔法则也可用泰勒公式去求，但先利用等价无穷小 $x^2\sin^2 x\sim x^4$ 会更简便.这是求函数极限中最常用的方法和思路.下面给出计算过程:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{2(1-\cos 2x)}=3$$

或 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4))}=3.)$$

本题可再引出另一个问题：讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^p$ 的收敛性。

第 10 届决赛的一道题其实是本题的一般化：设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有三阶连续导数，满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$.又设数列$\{a_n\}$满足$a_1\in(0,1)$，$a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\cdots)$，严格单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$。

例 11. 设数列$\{x_n\}$为正数列,且$x_{n+1}+\dfrac{1}{x_n}<2$,证明：$\lim x_n$存在，并求其极限.

分析：本题中x_{n+1},x_n的关系与前面不一样，但用到的思路是一样的，最容易想到的是单调有界准则.

解：由于$x_n+\dfrac{1}{x_n}\ge 2>x_{n+1}+\dfrac{1}{x_n}\Rightarrow x_n>x_{n+1}$，即$x_n$单调减少，又$x_n>0$，所以$\lim x_n$存在，设$\lim x_n=a$，则$a$满足 $a+\dfrac{1}{a}\le 2$，从而得$a=1$，即$\lim x_n=1$.

练习题：

12．设$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$，证明：$\lim x_n$存在，并求之.

13．设$x_1>0$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明：$\lim x_n$存在，并求之.

14．设$x_1>0$，$x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}$，求$\lim\dfrac{x_n}{\sqrt{2n}}$.

15．设$b_1>1$，$b_{n+1}=\dfrac{{b_n}^2}{b_n-1}$，证明：$\lim b_n=+\infty$ ，并求$\lim\dfrac{n}{b_n}$.

16．设$1>x_1>0$，$x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$，求$\lim x_n$及$\lim\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

17．设$x_1=a,x_2=b$，$x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2},n=3,4,\cdots$，求$\lim x_n$.

18．设$x_n>0$，$x_n+\dfrac{4}{x_{n+1}^2}\le 3$，证明：$\lim x_n$存在，并求之.

19．设$1>x_n>0$，$x_{n+1}(1-x_n)\ge\dfrac{1}{4}$，证明：$\lim x_n$存在，并求之.

20．三角形Δ_0的三边长为$a_0=a,b_0=b,c_0=c$，三角形Δ_n的三边长为$a_n=\dfrac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2},b_n=\dfrac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2},c_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$，$n=1,2,3,\cdots$。三角形$\Delta_n$的面积记为$A_n$。

（1）证明：三角形Δ_n的周长l_n不变而面积A_n单调增加;

（2）求 $\lim a_n, \lim A_n$

21．设 $-1 < a_0 < 1$，$a_n = \sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}$，求 $\lim a_n$，$\lim 4^n(1-a_n)$，$\lim a_1 a_2 \cdots a_n$

22.设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内三阶连续可导，满足 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$.又设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \in (0,1)$，$a_{n+1}=f(a_n)$,严格单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$.

二. 多项之和，多项之积的极限

此类问题常用到的知识和方法有：（1）夹逼定理；（2）利用定积分的知识：积分和的极限为积分值；（3）Stolz 定理；(4)把一般项的表达式求出来,再求极限; (5)取对数将积变为和.

例 12. 求（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$，（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$

解:（1）$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

而 $\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}} = \int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(1+\sqrt{2})$.

注：这两题形式上很相似，但解法完全不同，仔细体会其中的差别：（1）中的 k 相对于 n^2 是微不足道的，因此甩掉 k 不会影响极限，这就是用夹逼定理的思路.（2）中的 k^2 就不是如此，因此在求极限时必须用到 k^2，这里要注意变形：将和式变形为积分和（也叫黎曼和）的形式，常见的情况是积分区间 n 等分，且 ξ_i 取为小区间的左端点或右端点或中点.

例 13：求（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{2k-1}{n^2}$，（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\dfrac{k}{n})\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$

分析: 对(1) 令 $\theta = \dfrac{1}{n^2}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2} = \sin\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin(2n-1)\theta,$$

由

$\sin\theta(\sin\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin(2n-1)\theta)$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta+\cos 2\theta-\cos 4\theta+\cdots+\cos(2n-2)\theta-\cos 2n\theta)$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2n\theta)$,

可得 $\sin\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin(2n-1)\theta=\frac{1-\cos 2n\theta}{2\sin\theta}$.

这样就可以将$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}$表示出来,进而求出极限.但这种情况不多见,在求不出和的表达式时,还是要考虑夹逼定理，定积分的积分和，或其他方法。

解: (1)由等式$\sin\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin(2n-1)\theta=\frac{1-\cos 2n\theta}{2\sin\theta}$ $(\sin\theta\neq 0)$

得$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}=\frac{1}{2\sin\frac{1}{n^2}}(1-\cos\frac{2}{n})\to 1$

另解:本题也可以考虑用夹逼定理及定积分的积分和去求解.

由 $x-\frac{1}{3!}x^3\le\sin x\le x(x\ge 0)$，得

$$\frac{2k-1}{n^2}-\frac{(2n)^3}{6n^6}\le\frac{2k-1}{n^2}-\frac{(2k-1)^3}{6n^6}\le\sin\frac{2k-1}{n^2}\le\frac{2k-1}{n^2}$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}-\frac{4}{3n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}$

由$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}=n^2$得$\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}=1=\lim(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}-\frac{4}{3n^2})$，得$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}=1$

（2）(分析:本题难以求出和的表达式,形式上接近于定积分的积分和之形式，但又不完全是定积分的积分和，因此想到先进行缩放(即夹逼定理),再用定积分的积分和的极限).

由 $x-\frac{1}{3!}x^3\le\sin x\le x(x\ge 0)$，得

$$\frac{k\pi}{n^2}-\frac{(n\pi)^3}{6n^6}\le\frac{k\pi}{n^2}-\frac{(k\pi)^3}{6n^6}\le\sin\frac{k\pi}{n^2}\le\frac{k\pi}{n^2}$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{k\pi}{n^2}-\frac{\pi^3}{3n^2}\le\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}\le\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{k\pi}{n^2}$.

由$\lim\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{k\pi}{n^2}=\pi\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{k}{n}\times(1+\frac{k}{n})=\pi\int_0^1 x(1+x)dx=\frac{5\pi}{6}$及$\lim\frac{\pi^3}{n^2}=0$,

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{5\pi}{6}$.

例 14. 求 $\lim(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$ 。

解：令 $a_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$,

$$\ln a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2}),$$

由不等式： $x-\frac{1}{2}x^2\le\ln(1+x)\le x\ (x>0)$ 得

$\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2n^2}\le\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\le\ln(1+\frac{k}{n^2})\le\frac{k}{n^2}$ ，及夹逼定理可得 $\lim\ln a_n=\frac{1}{2}$,

所以 $\lim a_n=\sqrt{e}$.

练习题：

23．求（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}})$ ；（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n+k}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2})$.

24．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$,

25.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)$.

26.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}(k\ge0)$.

27.(1)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}$.

28．设 $a_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$ ，求 $\lim a_n$.

29．设 $a_n=(\frac{2}{2^2-1})^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\frac{2^2}{2^3-1})^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots(\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$ ，求 $\lim a_n$.

30.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1-\cos\frac{k}{n\sqrt{n}})$ 。

31 (1)设$\lim a_n=a$，$\lim b_n=b$，（i）求$\lim\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$；

（ii）证明$\lim\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$。

（2）设$\{a_n\}$满足$\lim(a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2)=1$，求$\lim\sqrt[3]{n}a_n$。

（3）设$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n, n=1,2,\cdots$（i）证明$\{a_n\}$收敛；（ii）求$a_n-C$的一个等价无穷小，其中$C=\lim a_n$；（iii）讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-C)^p$的收敛性；$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(a_n-C)^p$.

答案或题示。

1. （1）由拉氏中值定理 $a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n^2}}=a^{\xi}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})\ln a$，易得结果：$\ln a$。或通过求函数极限

$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-a^{x^2}}{x}$得到结果.

（2）$\ln n\sin\frac{1}{n}=\ln(1-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=\frac{-1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2})\Rightarrow n^2\ln(n\sin\frac{1}{n})\to\frac{-1}{6}$.

（3）由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，从而$\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=1$.

（4）注意到$\sin(\sqrt{n^2+2}\pi)=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+2}-n)\pi=(-1)^n\sin\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}$，可得答案：$\pi$。

（5）方法一

$$\lim(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})=\lim\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln2$$

方法二

$$\lim(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})=\lim(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}))$$

$$=\lim(\ln(2n)+\gamma+\varepsilon_{2n}-(\ln n+\gamma+\varepsilon_n))=\ln2$$ 。

方法三

利用不等式 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，有

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{2n-1})=\ln\frac{2n}{2n-1}\to\ln2,$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\ln(1+\frac{1}{n+1})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{2n})=\ln\frac{2n+1}{n+1}\to\ln2,$$

所以

$$\lim(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})=\ln2$$ 。

方法四：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

又$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}\to\ln 2$（该结果可由泰勒展开式$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$得到），所以

$\lim(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})=\ln 2$。

（6）

$$\lim(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_{n+p}\sqrt{n+p})=\lim(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_{n+p}\sqrt{n+p}-(a_0+a_1+\cdots+a_p)\sqrt{n})$$

$$=\lim(a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\cdots+a_{n+p}(\sqrt{n+p}-\sqrt{n}))=0\text{。}$$

（7）注意到$\sin(\sqrt{1+4n^2}\pi)=\sin(\sqrt{1+4n^2}-2n)\pi=\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$

$$\lim(1+\sin\sqrt{1+4n^2}\pi)^n=\lim(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n})^{(\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n})^{-1}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}}=e^{\frac{\pi}{4}}\text{。}$$

2．由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

3． 两次用 stolz 定理可得结果:$\frac{1}{2}$

4． $A_n=\frac{2^n}{n}\Rightarrow\sqrt[n]{A_n}\to 2;\ln\sqrt[n]{G_n}=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k\to\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt[n]{G_n}\to\sqrt{e}$。

5. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}a_{n+1}=2a$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^{n+1}}(a+\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{a^n}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(a+\frac{a^2}{2}+\cdots+\frac{a^n}{n})/\frac{a^{n+1}}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^{n+2}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n}}=\frac{1}{a-1}.$$

6．利用泰勒公式更方便:

$a_n=e-(1+\frac{1}{n})^n=e-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=e-e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}=e\{1-e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\}=\frac{e}{2n}+o(\frac{1}{n})$,至此易得答案:

$a=\frac{e}{2}, k=1;$

利用洛必塔法则也可解决,但更麻烦:考虑函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^k}$.

7. （1）由$e-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$，易得左边不等式。为证右边不等式，注意到

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^k}+\cdots)$$

$$=\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\frac{1}{n\cdot n!}\text{。}$$

（2）方法一

记$\varepsilon_n=e-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})$

$$\sin(2\pi n!e)=\sin(2\pi n!(e-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}))=\sin(2\pi n!\varepsilon_n)$$

利用(1)的结果知 $n\sin\frac{2\pi}{n+1}<n\sin(2\pi n!\varepsilon_n)<n\sin\frac{2\pi}{n}$,

由$\lim n\sin\frac{2\pi}{n+1}=\lim n\sin\frac{2\pi}{n}=2\pi$，得$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)=2\pi$。

方法二

由$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+2)!}$，$\theta_n\in(0,1)$，得

$$n\sin(2\pi n!\mathrm{e})=n\sin(2\pi n!(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+2)!}))$$

$$=n\sin(2\pi(\frac{1}{n+1}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+1(n+2)}))\to 2\pi\text{。}$$

曾经有一道竞赛题：极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(\pi n!\mathrm{e})$的值是_____.

解答 记$a_n=n\sin(\pi n!\mathrm{e})$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=-\pi$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=\pi$，故极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在。要填的答案是“不存在”，这多少有点让人吃惊。

(3)方法一 利用（1）的结果立即可得答案为 1.

方法二（利用 Stolz 定理）记 $a_n = e-(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})$，

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)!a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=1\text{。}$$

8． 由题设知 $(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$，从而 $\lim(a_n-\sqrt{3}b_n)=0$，并且有

$$a_n=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})],\ b_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})],$$

由此可得 $\lim\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{3}$，

$$A_n=\sqrt{3}b_n-[\sqrt{3}b_n],$$

$$0<(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}<1\Rightarrow a_n-1<\sqrt{3}b_n<a_n\Rightarrow[\sqrt{3}b_n]=a_n-1,$$

$$A_n=\sqrt{3}b_n-a_n+1\to 1$$

9. 可以利用级数证明：注意到

$$0<a_{n+1}-a_n=a_n=a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}-\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}+\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots\sqrt{n}}}}$$

$$=\cdots=\frac{\sqrt{n+1}}{(\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}+\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots\sqrt{n}}})\cdots(\sqrt{n+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n})}$$

$$\le\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n-1}},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛,所以数列 $\{a_n\}$ 收敛。

也可以用单调有界准则证明：$\{a_n\}$ 单调增加是显然的，但有界性证明就比较困难，下面给出有界性的一种证明法，

利用 $\sqrt{n}<2\sqrt{n-1},n=2,3,\ldots$，得

$$\sqrt{n-1+\sqrt{n}}<\sqrt{n-1+2\sqrt{n-1}}<\sqrt{n-1+2\sqrt{n-1}+1}=\sqrt{n-1}+1,$$

$$\sqrt{n-2+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}<\sqrt{n-2+\sqrt{n-1}+1}<\sqrt{n-2+2\sqrt{n-2}+1}=\sqrt{n-2}+1,$$

所以 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}<\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots\sqrt{n-3+\sqrt{n-2+1}}}}<\cdots<2$。

10.做法很多。方法一：

$$\frac{2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}}}{1/n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{1/n}-\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{1/n}+\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{1/n}-\frac{c^{\frac{1}{n}}-1}{1/n}\to\ln a-\ln b+\ln a-\ln b=\ln\frac{a^2}{bc},$$

可得结果：$a^2=bc$。

方法二(用洛必塔法则，先求函数极限):利用函数极限

$$\lim_{x\to0}\frac{2a^x-b^x-c^x}{x}=\lim_{x\to0}2a^x\ln a-b^x\ln b-c^x\ln c=2\ln a-\ln b-\ln c。$$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}}}{1/n}=2\ln a-\ln b-\ln c$

方法三（用泰勒公式）：$a^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln a}=1+\dfrac{1}{n}\ln a+o(\dfrac{1}{n})$，$b^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln b}=1+\dfrac{1}{n}\ln b+o(\dfrac{1}{n})$，

$c^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln c}=1+\dfrac{1}{n}\ln c+o(\dfrac{1}{n})$，所以

$$2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}(2\ln a-\ln b-\ln c)+o(\frac{1}{n})）$$

11. $a^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln a}=1+\dfrac{1}{n}\ln a+\dfrac{1}{2n^2}\ln^2 a+o(\dfrac{1}{n^2})$，$b^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln b}=1+\dfrac{1}{n}\ln b+\dfrac{1}{2n^2}\ln^2 b+o(\dfrac{1}{n^2})$，

$c^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln c}=1+\dfrac{1}{n}\ln c+\dfrac{1}{2n^2}\ln^2 c+o(\dfrac{1}{n^2})$，

从而 $2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}(2\ln a-\ln b-\ln c)+(\ln^2 a-\dfrac{1}{2}\ln^2 b-\dfrac{1}{2}\ln^2 c)\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$，

当 $a^2\ne bc$ 时，$2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}}$ 是 $\dfrac{1}{n}$ 的一阶无穷小；

当 $a^2=bc$ 时，由于 a,b,c 为不全等，故 $\ln^2 a-\dfrac{1}{2}\ln^2 b-\dfrac{1}{2}\ln^2 c\ne0$，所以 $2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}}$ 是 $\dfrac{1}{n}$ 的二阶无穷小。

注:本题与上一个练习题差不多，上一个练习题的方法一、二，对本题而言也适用但比较繁琐，而方法三（即泰勒公式）用于两题没有多大差别，可见泰勒公式在讨论极限尤其是讨论无穷小的阶的方面有其优势，泰勒公式的应用后面还会再讲。

12.（很快可判断数列 $\{x_n\}$ 不是单调数列，但奇偶子列单调，于是想到例 9）方法一：易见 $x_n>0$，

令 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 a 满足 $a=\frac{1}{1+a}$，从而

$$|x_n-a|=|\frac{1}{1+x_{n-1}}-\frac{1}{1+a}|=\frac{|x_{n-1}-a|}{(1+x_{n-1})(1+a)}\le\frac{1}{1+a}|x_{n-1}-a|$$

$$\le\cdots\le\frac{1}{(1+a)^{n-1}}|x_1-a|\to 0$$，故 $\lim x_n$ 存在，且 $\lim x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

方法二：易见 $\frac{1}{2}\le x_n\le 1,n=2,3,\cdots$，

$$|x_{n+1}-x_n|=|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}\le\frac{4}{9}|x_n-x_{n-1}|,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛 $\Rightarrow\lim x_n$ 存在，设 $\lim x_n=a$，则 a 满足 $a=\frac{1}{1+a}$

解此方程得 $a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，故 $\lim x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

方法三：易见 $\frac{1}{2}\le x_n\le 1,n=2,3,\cdots$

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{1+x_{n+1}}-\frac{1}{1+x_{n-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}}-\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_{n-2}}}=\frac{x_n-x_{n-2}}{(2+x_n)(2+x_{n-2})}$$

可见 $x_{n+2}-x_n$ 与 x_n-x_{n-2} 同号

当 $0<x_1<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，由 $x_1<x_3$ 及归纳法知 $\{x_{2n-1}\}$ 单调增加， $\{x_{2n}\}$ 单调减少。往下的过程略；

当 $x_1>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，由 $x_1>x_3$ 及归纳法知 $\{x_{2n-1}\}$ 单调减少， $\{x_{2n}\}$ 单调增加。往下的过程略；

当 $x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$\{x_n\}$ 为常数列。

13．很快可判断数列 $\{x_n\}$ 是单调数列，且当 $0<x_1<3$ 时数列单增；当 $x_1>3$ 时数列单减；$x_1=3$ 为常数列。

14．由于 $x_n>0$，故 $x_{n+1}>x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调增加，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a(0<a<+\infty)$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a(0<a<+\infty)$，则有 $a=a+\frac{1}{a}$，而此等式对任意实数都不成立，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。

由 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$ 得 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{x_n^2}\to 1$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{x_{n+1}}{x_n}+1)=1$$

15．仿练习题 14 可证明 $\lim b_n=+\infty$。由 Stolz 定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_n-1}=1$，

所以 $\lim\frac{n}{b_n}=1$.

16．易见 $0<x_n<1$,且 $\{x_n\}$ 单调减少,从而易得 $\lim x_n=0$.

$$\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}=\frac{1}{2}.$$

17．（本题涉及二阶递推，与前面题目有区别，用前面的方法求不出答案，先找出 $x_{n+1}-x_n$ 的表达式）

$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n-x_{n-1}}{2}=\cdots=\frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=\frac{2}{3}(b-a)$

$x_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)+x_1\to\frac{2}{3}(b-a)+a$）

18． (仿例 11) $x_n+\frac{4}{x_n^2}\geq 3$,结合题设 $x_n+\frac{4}{x_{n+1}^2}\leq 3$,可得 $x_{n+1}\geq x_n$,即 $\{x_n\}$ 单增,又 $x_n<3$,所以

$\lim x_n$ 存在.

设 $\lim x_n=a$,则 $a+\frac{4}{a^2}\leq 3$,又 $a+\frac{4}{a^2}\geq 3$,从而 $a+\frac{4}{a^2}=3$,于是得 $a=2$.

(也可以直接利用均值不等式, $x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3$)

19．仿例 11 或练习题 18.答案： $\frac{1}{2}$

20． （1）易证三角形 Δ_n 的周长不变, 下证三角形 Δ_n 的面积单调增加. (这里用到三角形面公式:三边长分别为 a,b,c 的三角形的面积为 $A=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$ ）

记 $l=a_0+b_0+c_0$,

$$A_{n+1}=\frac{\sqrt{l}}{4}\sqrt{(a_{n+1}+b_{n+1}-c_{n+1})(a_{n+1}+c_{n+1}-b_{n+1})(b_{n+1}+c_{n+1}-a_{n+1})}$$

$$=\frac{\sqrt{l}}{4}\sqrt{a_nb_nc_n}=\frac{\sqrt{l}}{4}\sqrt{(b_{n-1}+c_{n-1})/2\cdot(a_{n-1}+c_{n-1})/2\cdot(a_{n-1}+b_{n-1})/2}$$

$$\ge\frac{\sqrt{l}}{4}\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}}=A_n.$$

（2）$a_{2n}=\frac{l}{4}+\frac{a_{2n-2}}{4}=\cdots=\frac{l}{4}+\frac{l}{4^2}+\cdots+\frac{a_0}{4^n}$

$\to\frac{l}{3}$，同样有 $\lim b_{2n}=\lim c_{2n}=\frac{l}{3}$, 从而 $a_{2n+1}=\frac{b_{2n}+c_{2n}}{2}\to\frac{l}{3}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\to\frac{l}{3}$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\frac{l^2}{12\sqrt{3}}$.

21．（本题的方法与前面不一样，需求出 a_n 的表达式：设 $a_0=\cos t(0<t<\pi)$，可求出 $a_n=\cos\frac{t}{2^n}$）

设 $a_0=\cos t(0<t<\pi)$,则 $a_1=\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}=\cos\frac{t}{2}$,由归纳法得 $a_n=\cos\frac{t}{2^n}$,从而 $\lim a_n=1$,

$$\lim 4^n(1-a_n)=\lim_{n\to\infty}4^n(1-\cos\frac{t}{2^n})=\lim_{n\to\infty}4^n\cdot\frac{1}{2}(\frac{t}{2^n})^2=\frac{t^2}{2}=\frac{(\arccos a_0)^2}{2}..$$

$$a_1a_2\cdots a_n=\cos\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2^2}\cdots\cos\frac{t}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sin t/\sin\frac{t}{2^n}\to\frac{\sin t}{t}=\frac{\sqrt{1-a_0^2}}{\arccos a_0}.$$

22.本题实际上就是例题 10 的第三问.

$$\lim na_n^2=\lim\frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}=\lim\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}$$

$$=\lim\frac{1}{\frac{1}{f^2(a_n)}-\frac{1}{a_n^2}}=\lim\frac{a_n^2f^2(a_n)}{a_n^2-f^2(a_n)}$$

$$=\lim\frac{a_n^2[a_n-\frac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)]^2}{a_n^2-[a_n-\frac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)]^2}=\lim\frac{a_n^4+o(a_n^4)}{\frac{1}{3}a_n^4+o(a_n^4)}=3$$

故 $\lim\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.

23.（1）易见

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}\le\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\le\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}$,

及

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1})\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}})=\frac{2}{\pi}$.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n+k}-\frac{1}{3!}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{\pi}{n+k})^3\le\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n+k}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n+k}$,

由 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n+k}=\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\to\pi\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\pi\ln 2$,及 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{\pi}{n+k})^3\to 0$,得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n+k}=\pi\ln 2.$$

(3)由 $x-\frac{1}{3!}x^3\le\sin x\le x(x\ge 0)$，得

$$\frac{k}{n^2}-\frac{n^3}{6n^6}\leqslant\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\le\sin\frac{k}{n^2}\le\frac{k}{n^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2},\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n^2}-\frac{n^3}{6n^6})=\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

24. $\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\le\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\le\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{n^2}}$,即 $\frac{2n+2}{n+1}\le\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\le\frac{2n+2}{n}$,

由夹逼定理易得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$.

25.先用泰勒公式证不等式$1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2 \le \sqrt{1+x} \le 1+\frac{x}{2}(x>0)$，再由夹逼定理得到答案：$\frac{1}{4}$。

26.可用 Stolz 定理求解:$\frac{(2n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=\frac{2^k n^k(1+\frac{1}{2n})^k}{n^{k+1}((1+\frac{1}{n})^{k+1}-1)}$

$$=\frac{2^k(1+o(1))}{n(\frac{k+1}{n}+o(\frac{1}{n}))}=\frac{2^k}{k+1},$$

也可用定积分求解: $\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}=\frac{2^k}{n}((\frac{1}{2n})^k+(\frac{3}{2n})^k+\cdots+(\frac{2n-1}{2n})^k)$

注意到 $\frac{2k-1}{2n}=\frac{1}{2}(\frac{k-1}{n}+\frac{k}{n})$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}=2^k\int_0^1 x^k dx=\frac{2^k}{k+1}$$

27.(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$;

(2) $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx\le\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\le\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx$,可得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx\le\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}\le\int_0^n\frac{1}{1+x^2}dx,$$

又 $\lim\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim(\arctan\frac{n^2+1}{n}-\arctan\frac{1}{n})=\frac{\pi}{2}$,

$$\lim\int_0^n\frac{1}{1+x^2}dx=\lim\arctan n=\frac{\pi}{2},$$

故 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{2}$.

28．可求出 a_n 的表达式：$a_n=2(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})=2(1-(\frac{1}{2^{2^n}})^2)$

29．$\ln a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=2}^{n}2^{k-2}\ln\frac{2^{k-1}}{2^k-1}$，再用 stolz 定理可得结果:$\ln a_n\to\ln\frac{1}{2}$.从而 $a_n\to\frac{1}{2}$.

30.由不等式 $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\le 1-\cos x\le\frac{x^2}{2}$,得

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}-\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^6}\le\sum_{k=1}^{n}(1-\cos\frac{k}{n\sqrt{n}})\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3},$$

利用夹逼定理可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1-\cos\frac{k}{n\sqrt{n}})=\frac{1}{6}$.

3(1)

(i)由 $\lim a_nb_n=ab$，得 $\lim\frac{a_1b_1+a_2b_2++a_nb_n}{n}=ab$。

（ii）先证

$$\lim[\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}++a_nb_1}{n}-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)b}{n}]=0。$$

由数列 $\{a_n\}$ 收敛知 $\exists M>0$，使得 $|a_n|\leqslant M,n=1,2,\cdots$。

对 $\varepsilon>0$，由 $\lim b_n=b$ 知 $\exists N_1$，使得当 $n>N_1$ 时，有

$$|b_n-b|>\frac{\varepsilon}{2M},$$

从而

$$|\frac{a_1(b_n-b)+a_2(b_{n-1}-b)+\cdots+a_{n-N_1}(b_{N_1+1}-b)}{n}|\leqslant\frac{|a_1(b_n-b)|+|a_2(b_{n-1}-b)|+\cdots+|a_{n-N_1}(b_{N_1+1}-b)|}{n}<\frac{\varepsilon}{2},$$

对此取定的 N_1，有

$$\lim\frac{a_{n-N_1+1}(b_{N_1}-b)+\cdots+a_n(b_1-b)}{n}=0,$$

故 $\exists N_2$，使得当 $n>N_2$ 时，有

$$|\frac{a_{n-N_1+1}(b_{N_1}-b)+\cdots+a_n(b_1-b)}{n}|<\frac{\varepsilon}{2},$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}&|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}++a_nb_1}{n}-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)b}{n}|\\&\leqslant\frac{|a_1(b_n-b)+a_2(b_{n-1}-b)+\cdots+a_{n-N_1}(b_{N_1+1}-b)|+|a_{n-N_1+1}(b_{N_1}-b)+\cdots+a_n(b_1-b)|}{n}\\&<\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\lim[\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}++a_nb_1}{n}-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)b}{n}]=0,$$

从而

$$\lim\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}++a_nb_1}{n}$$

$$=\lim[\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}++a_nb_1}{n}-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)b}{n}]+\lim\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)b}{n}$$

$=ab$ 。

另解

$a_n=a+\varepsilon_n$， $b_n=b+\tilde{\varepsilon}_n$。其中$\{\varepsilon_n\}$，$\{\tilde{\varepsilon}_n\}$均为无穷小。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+\varepsilon_k)(b+\tilde{\varepsilon}_{n+1-k})$$

$$=ab+b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k+a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_{n+1-k}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\tilde{\varepsilon}_{n+1-k}$$

$$=ab\text{ 。}$$

（2）由题设知当n充分大时，$a_n>0$。若$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2$收敛，则$\lim a_n=0$，与题设$\lim(a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2)=1$矛盾。故$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2=+\infty$，又由$\lim(a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2)=1$，得$\lim a_n=0$。由 Stolz 定理

$$\lim\frac{n}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^3}=\lim\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2)^3-(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^3}=\lim\frac{1}{3a_{n+1}^2(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^2+3a_{n+1}^4(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)+a_{n+1}^6}$$

注意到

$$\lim a_{n+1}^2(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^2=\lim[a_{n+1}(\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2-a_{n+1}^2)]^2=1,\lim a_{n+1}^4(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)=0,\lim a_{n+1}^6=0\text{，}$$

所以

$$\lim\frac{n}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^3}=\frac{1}{3}\text{，}$$

从而

$$\lim na_n^3=\lim\frac{n}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^3}\cdot a_n^3(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^3=\frac{1}{3}\text{，}$$

故

$$\lim\sqrt[3]{n}a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\text{ 。}$$

（3）

（i）由不等式$\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，得

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0\text{，}$$

所以$\{a_n\}$单减，又

$$a_n>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0\text{，}$$

故$\{a_n\}$单调减少且有界，所以$\{a_n\}$收敛。

（2）由 Stolz 定理

$$\lim\frac{a_n-C}{1/n}=\lim\frac{\ln(1+1/n)-1/(n+1)}{1/(n(n+1))}=\lim n(n+1)[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})-\frac{1}{n+1}]=\frac{1}{2},$$

所以a_n-C与$\frac{1}{2n}$为等价无穷小。

（3）由于$a_n-C>0$，结合（2）知，当$p>1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-C)^p$收敛；当$p\leqslant 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-C)^p$发散。

由$\{a_n-C\}$单调减少，且a_n-C与$\frac{1}{2n}$为等价无穷小，可得当$p>1$时$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(a_n-C)^p$绝对收敛；当$0<p\leqslant 1$时$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(a_n-C)^p$条件收敛；当$p\leqslant 0$时$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(a_n-C)^p$发散.