第二章 一元微分学

第五节 函数零点或方程根的讨论

方程 $f(x)=0$ 根的讨论与函数 $f(x)$ 零点的讨论是等价的问题。一般的方程总可变成 $f(x)=0$ 之形式。这里总假定函数 $f(x)$ 连续（在具体问题中，$f(x)$ 可以不连续，但一定是分段连续，此时只需在各个连续段上讨论。）

1．这种问题用到的知识和方法主要有：连续函数的性质，中值定理，函数单调性、极值和最值等。

2．常见类型有：（1）证明函数 $f(x)$ 在某区间内存在零点。最常用的方法就是用连续函数零点存在定理，有时会用到微分中值定理（主要是罗尔定理）。（2）证明函数 $f(x)$ 在某区间内有唯一零点。此时既要证存在性也要证唯一性，证唯一性，大多利用单调性，极值与最值，反证法等。（3）讨论方程 $f(x)=0$ 根的情况，此时需指明无根、有根及有几个根。若方程中含有参数，则需根据参数的不同取值情况进行讨论。(4）证明方程 $f_n(x)=0$ 有唯一实根 x_n，并求极限 $\lim x_n$。

3．讨论方程 $f(x)=0$（或 $f(x)=g(x)$) 根的问题和讨论曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点（或曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 的交点）问题等价，因此讨论这种问题时尽量与函数作图问题联系起来，只是这里的作图不需考虑凹凸性、拐点、渐近线，只需考虑曲线的升降、极值或最值及自变量趋于区间端点时的极限（单侧极限）。这里强调一句：很多问题可以从几何直观上寻找思路。

例 1：设有 n 次方程

$$1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n}=0$$

证明：当 n 为奇数时，方程恰有一个实根；当 n 为偶数时，方程无实根。

证明：令 $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n}$，

（1） 当 n 为奇数时

由于 $f(-\infty)=+\infty, f(+\infty)=-\infty$，及 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个零点，即方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个实根；

又 $f'(x)=-1+x-\cdots+(-1)^n x^{n-1}=\begin{cases}-\dfrac{1+x^n}{1+x}, x\neq -1\\ -n, x=-1\end{cases}$

可见 $f'(x)<0$，从而知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调减少，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至多有一个零点。即方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至多有一个实根；

综上知方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有一个实根；

（2）当 n 为偶数时

$$f'(x)=-1+x-\cdots+(-1)^n x^{n-1}=\begin{cases}-\dfrac{1-x^n}{1+x}, x\neq -1\\ -n, x=-1\end{cases},$$

可见 $f'(1)=0,$ 当 $x<1$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>1$ 时 $f'(x)>0$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内唯一的极值点且为极小值点，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值，

最小值为 $f(1)=1-1+\dfrac{1}{2}-\cdots+\dfrac{1}{n}=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1})+\dfrac{1}{n}>0,$

故对任意 $x\in(-\infty,+\infty), f(x)\geq f(1)>0$，从而知方程 $f(x)=0$ 无实根。

例 2．讨论三次方程 $x^3-3a^2x-6a^2+3a=0$ 的实根情况；并问 a 为何值时？方程只有一个实根且为正根。

解：$a=0$ 时，方程有且只有一个实根 $x=0$；

$a\neq 0$ 时

令 $f(x)=x^3-3a^2x-6a^2+3a$，则有 $f'(x)=3(x-|a|)(x+|a|)$

$f(x)$ 的单调性和极值情况如下表：

x	$(-\infty,-\|a\|)$	$-\|a\|$	$(-\|a\|,\|a\|)$	$\|a\|$	$(\|a\|,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $2\|a\|^3-6a^2+3a$	↘	极小值 $-2\|a\|^3-6a^2+3a$	↗

又 $f(-\infty)=-\infty, f(+\infty)=+\infty$，所以

当 $2|a|^3-6a^2+3a<0$ 或 $-2|a|^3-6a^2+3a>0$ 时，原方程有且只有一个实根，

即 $a\in(-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2},0)\cup(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2})\cup(0,\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2})$ 时，方程有且只有一个实根；

当$2|a|^3-6a^2+3a=0$或$-2|a|^3-6a^2+3a=0$时，原方程有二个实根，

即$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$或$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$时，原方程有二个实根；

当$2|a|^3-6a^2+3a>0$且$-2|a|^3-6a^2+3a<0$时，原方程有三个实根，

即$a\in(-\infty,-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2})\bigcup(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2})\bigcup(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},+\infty)$时，原方程有三个实根；

综上知

当$a\in(-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2})\cup(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2})$时，方程有且只有一个实根；

当$a=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$或$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$时，原方程有二个实根；

当$a\in(-\infty,-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2})\cup(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2})\cup(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},+\infty)$时，原方程有三个实根。

由以上分析可知方程只有一个实根且为正根当且仅当$2|a|^3-6a^2+3a<0$，

即可知方程只有一个实根且为正根当且仅当$a\in(-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2},0)\cup(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2})$。

例 3.（1）证明方程$2^x=ax^2+bx+c$至多有三个根；

（2）证明方程$2^x=x^2+1$恰有三个根;

（3）证明对任意的正整数n，方程$e^x=x^n$至多有三个根。

分析：对（1）容易想到用反证法。对（2）,结合(1)可知只需证方程$2^x=x^2+1$有三个根. 对(3),可考察函数$g(x)=e^x-x^n$，用反证法，但与（1）有所不同，需用如下结论：若$f(x)$在$[a,b]$可导，且$f(a)=f(b)=0$，则$f(x)-f'(x)$在(a,b)内至少有一个零点（这个结论是容易证明的，只需考察函数$g(x)=e^{-x}f(x)$）. 或考察函数$g(x)=x^ne^{-x}$，也是用反证法。.

（1）证明：令$f(x)=2^x-ax^2-bx-c$，

假设方程$2^x=ax^2+bx+c$有四个或四个以上的根，也即$f(x)$有四个或四个以上零点，则由罗尔定理知，$f'''(x)$至少有一个零点，而$f'''(x)=2^x(\ln 2)^3>0,x\in(-\infty,+\infty)$.从而矛盾,故方

程$2^x=ax^2+bx+c$至多有三个根。

（2）令$f(x)=2^x-x^2-1$，则易见$f(0)=f(1)=0$，又$f(2)=-1<0$, $f(5)=6>0$,故$f(x)$在$(2,5)$至少有一个零点,因此方程$2^x=x^2+1$至少有三个根.再由(1)知方程$2^x=x^2+1$恰有三个根.

(3) 令$g(x)=e^x-x^n$，

假设方程$e^x=x^n$有四个或四个以上的根，也即$g(x)$有四个或四个以上零点，那么$g(x)-g'(x)$至少有三个零点，而$g(x)-g'(x)=x^{n-1}(n-x)$只有两个零点。从而矛盾。故方程$e^x=x^n$至多有三个根.

另解: 令$g(x)=x^ne^{-x}-1$.假设方程$e^x=x^n$有四个或四个以上的根,则$g(x)=x^ne^{-x}-1$有四个或四个以上零点,那么$g'(x)$至少有三个零点, 而$g'(x)=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$只有两个零点。从而矛盾。故方程$e^x=x^n$至多有三个根.

注: (3)的两种做法中,第二种做法更容易想到,但第一种做法也有“价值”,因为这种做法可以解决其他题目(如练习题 13,14).

例 4.设有方程$x^n+x-1=0$，其中n为正整数,

(1) 证明此方程存在惟一正根x_n；

(2) 证明数列$\{x_n\}$收敛, 并求此数列的极限。

证明：令$f_n(x)=x^n+x-1$.（1）由$f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=1>0$，知$f_n(x)$在$(0,1)$内至少有一个零点，又$f_n(x)$在$[0,+\infty)$单增，所以$f_n(x)$在$(0,+\infty)$内有唯一零点，即方程存在惟一正根x_n.

(2) (分析:这种场合,证明数列$\{x_n\}$收敛一般有两个方法:用单调有界定理,夹逼定理.下面分别用这两个方法来解决问题)

方法一(用单调有界定理).由$f_{n+1}(x_n)<f_n(x_n)=0$及$f_{n+1}(1)>0$并结合（1）知$x_{n+1}\in(x_n,1)$，即$x_{n+1}>x_n$.即得数列$\{x_n\}$单调增加.

综上知数列$\{x_n\}$单调有界,故数列$\{x_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $a\le 1$，且 $x_n\le a$.

假设 $a<1$,则 $0=f_n(x_n)=x_n^n+x_n-1\le a^n+a-1$,即有 $a^n+a-1\ge 0$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+a-1)=a-1<0$，这与 $a^n+a-1\ge 0$ 矛盾，故 $a=1$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

方法二（用夹逼定理）:对于任意给定的 $\varepsilon>0(\varepsilon<1)$,由于 $f_n(1-\varepsilon)=(1-\varepsilon)^n-\varepsilon\to-\varepsilon,n\to\infty$，

故 $\exists N$,当 $n>N$ 时, $f_n(1-\varepsilon)<0$,从而知当 $n>N$ 时,$1-\varepsilon<x_n<1$,由 ε 的任意性知

数列 $\{x_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

注：以上用“夹逼定理”的做法，“数学分析”的味道较浓.下面用夹逼定理的通常做法给出一个解答：

$$f_n(1-\frac{1}{\sqrt{n}})=(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^n-\frac{1}{\sqrt{n}}=e^{n\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})}-\frac{1}{\sqrt{n}}\le e^{n(-\frac{1}{\sqrt{n}})}-\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{1+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}<0$$

(此处用到了两个不等式 $\ln(1+x)\le x$， $e^x\ge 1+x$)

又 $f_n(1)>0$，再结合方程 $f_n(x)=0$ 根的唯一性，知 $1-\frac{1}{\sqrt{n}}<x_n<1$，

由夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

注：用单调有界定理或夹逼定理来解决此类问题是常用的思路.

练习题：

1. 证明:方程 $3^x+4^x=5^x$ 恰有一根.

2. 设 $p(x)=x^6-2x^2-x+3$.

(1) 分别把 $p(x)$ 表示成 $(x-1)$ 幂和 $(x+1)$ 幂的多项式;

(2) 求证：方程 $p(x)=0$ 在 $|x|\ge 1$ 上无实根；

(3) 求证：方程 $p(x)=0$ 无实根.

3．设 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_n\ne 0$)，且 $p(a)\ge 0, p^{(k)}(a)\ge 0,$

$k=1,2,\cdots,n$． 证明方程 $p(x)=0$ 没有大于 a 的实根.

4.讨论方程 $(1+a^2)x^3-3a^3x+a^4$ 的实根,并指出根的重数.

5.设 $a>0$,讨论方程 $a^x=x$ 的根.

6．（1）作函数 $y=x^2e^{-x}$ 的图形；

（2） 讨论方程 $e^x=ax^2$ 的实根情况，并指出每个根所在的区间.

7．方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个根，求 k 的取值范围.

8．讨论方程 $a^x=bx\,(a>1)$ 的实根情况.

9．设 $a>0$，证明方程 $ae^x=1+x+\frac{x^2}{2}$ 有且只有一个根.

10．讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

11．设 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x$，

(1) 证明：对任意正整数 $n\geq 2$，方程 $f_n(x)=1$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且只有一个根 x_n；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

12．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导且 $f(0)=f(1)=0,\ f''(x)<0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值记为 M .

（1）证明：$M>0$，且存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=M$；

（2）证明：对任意正整数 n，存在唯一的 $x_n\in(0,1)$，使得 $f'(x_n)=\frac{M}{n}$；

（3）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

13.设 $p_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$,证明: (1)当 n 为奇数时,方程 $p_n(x)=0$ 有且只有一个实根;

(2)当 n 为偶数时,方程 $p_n(x)=0$ 无实根.

14.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导,且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 至少有三个零点,证明方程 $f(x)-2f'(x)+f''(x)=0$ 至少有一个根.

15(第 2 届初赛试题).设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且

$$f''(x)>0,\quad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\quad \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$，证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两根.

答案或提示

1. 易见 $x=2$ 是方程的根.由 $f(x=(3/5)^x+(4/5)^x$ 的单调性可知只有一个根。

2. （1）设 $p(x)=x^6-2x^2-x+3$,

$p'(x)=6x^5-4x-1$， $p''(x)=30x^4-4$， $p'''(x)=120x^3$， $p^{(4)}(x)=360x^2$，

$p^{(5)}(x)=720x$， $p^{(6)}(x)=720$,

从而 $p(1)=1, p'(1)=1, p''(1)=26, p'''(1)=120, p^{(4)}(1)=360, p^{(5)}(1)=720, p^{(6)}(1)=720$，

$p(-1)=3, p'(-1)=-3, p''(-1)=26, p'''(-1)=-120, p^{(4)}(-1)=360, p^{(5)}(-1)=-720, p^{(6)}(-1)=720$

所以 $p(x)=1+(x-1)+13(x-1)^2+20(x-1)^3+15(x-1)^4+6(x-1)^5+(x-1)^6$，

$p(x)=3-3(x+1)+13(x+1)^2-20(x+1)^3+15(x+1)^4-6(x+1)^5+(x+1)^6$

（2）由（1）知，当 $x\ge 1$ 时，

$p(x)=1+(x-1)+13(x-1)^2+20(x-1)^3+15(x-1)^4+6(x-1)^5+(x-1)^6>0$；

当 $x\le -1$ 时，

$p(x)=3-3(x+1)+13(x+1)^2-20(x+1)^3+15(x+1)^4-6(x+1)^5+(x+1)^6>0$，

所以方程 $p(x)=0$ 在 $|x|\ge 1$ 上无实根。

（3） 方程 $p(x)=0$ 等价于 $x^6=2x^2+x-3$，

当 $x\in(-1,1)$ 时， $2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)<0$， 而 $x^6\ge 0$， 所以方程 $p(x)=0$ 在 $(-1,1)$ 内无根，再结合（2）的结论知方程 $p(x)=0$ 无实根。

3. 由 $p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\dfrac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\dfrac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 可得结论。

4.令 $f(x)=(1+a^2)x^3-3a^3x+a^4$,

则 $f(-\infty)=-\infty, f(+\infty)=+\infty$ $f'(x)=3(1+a^2)x^2-3a^3$, $f''(x)=6(1+a^2)x$，

(i) 若 $a<0$,则由 $f(-\infty)=-\infty, f(+\infty)=+\infty$，及 $f'(x)>0$ 知方程有且只有一个实根,且为单根.

(ii) 若 $a=0$, $x=0$ 为方程的唯一实根且为三重根;

(iii) 若 $a>0$, $f(x)$ 有两个驻点 $x_1=-\sqrt{\dfrac{a^3}{1+a^2}}$, $x_2=\sqrt{\dfrac{a^3}{1+a^2}}$,且分别为 $f(x)$ 的极大值点和极

小值点,且极大值 $f(x_1)>f(0)>0$,极小值为 $f(x_2)=a^4(1-2\sqrt{\frac{a}{1+a^2}})$。

由此可得结论: $a=2-\sqrt{3}$ 时,方程有二个实根,且 $2-\sqrt{3}$ 为其二重根, $(-\infty,0)$ 内有一个单根; $a=2+\sqrt{3}$ 时,方程有二个实根,且 $2+\sqrt{3}$ 为其二重根, $(-\infty,0)$ 内有一个单根; $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$ 时,方程有三个实根,且都是单根; $0<a<2-\sqrt{3}$ 或 $a<2+\sqrt{3}$ 时,方程有且只有一个实根,且为单根.

5．$0<a\le 1$ 时,易见方程有且只有一个根;

下面讨论 $a>1$ 时方程根的情况,

方法一：方程 $a^x=x$ 等价于方程 $xa^{-x}-1=0$，令 $f(x)=xa^{-x}-1$，则

$f(-\infty)=-\infty$， $f(+\infty)=-1$， $f'(x)=(1-x\ln a)a^{-x}$，

易见 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{\ln a}]$ 单增，在 $[\frac{1}{\ln a},+\infty)$ 单减，在 $x=\frac{1}{\ln a}$ 处取得最大值 $f(\frac{1}{\ln a})=\frac{1}{\ln a}(\frac{1}{e}-\ln a)$，所以

当 $\ln a=\frac{1}{e}$，即 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时，方程有唯一根；当 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 时，方程有两个根；当 $a>e^{\frac{1}{e}}$ 时，方程无根.

方法二： $x\neq 0$ 时，方程 $a^x=x$ 等价于方程 $\frac{a^x}{x}-1=0$，令 $f(x)=\frac{a^x}{x}-1$，往下的做法同方法一.

方法三：易见方程在 $(-\infty,0]$ 上无实根，当 $x>0$ 时方程 $a^x=x$ 等价于方程 $x\ln a-\ln x=0$，令 $f(x)=x\ln a-\ln x$，往下的做法同上.

方法四：令 $f(x)=a^x-x$.

也可稍作变化：由于 $a^x=e^{x\ln a}$，故方程等价于 $e^t=\frac{1}{\ln a}t$，于是可考察函数 $f(t)=e^t-\frac{1}{\ln a}t$，这比直接考察 $f(x)=a^x-x$ 稍微简便点.

6．（1）略

（2）易见 $a\le 0$ 时，方程无根，$a>0$ 时，方程等价于 $x^2e^{-x}=\frac{1}{a}$，该问题等价于曲线 $y=x^2e^{-x}$ 与直线 $y=\frac{1}{a}$ 的交点情况的讨论. 利用(1)易得结论： $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时只有一个根且位于 $(-\infty,0)$；

$a=\frac{e^2}{4}$时有二个根且其一位于$(-\infty,0)$，另一个根为 2；$a>\frac{e^2}{4}$时有三个根且分别位于$(-\infty,0)$，$(0,2)$，$(2,+\infty)$内.

7. $k\le 0$或$k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

8. $b=0$时，方程无根；$b\ne 0$时，令$t=bx$，则方程变形为$c^t=t$，其中$c=a^{\frac{1}{b}}$，这便是练习题 5.答案：$b<0$时有且只有一个根；$0\le b<e\ln a$时无根；$b=e\ln a$时有唯一根；$b>e\ln a$时有二个根.

9．考察函数 $f(x)=(1+x+\frac{x^2}{2})e^{-x}-a$ 可证得结论.

10. $k<4$时无交点；$k=4$时有且只有一个交点；$k>4$时有二个交点.

11. （1）由 $f_n(\frac{1}{2})<1, f_n(1)>1$，及 $f_n(x)$ 在$(0,+\infty)$单增得结论；

（2）本题可用单调有界准则或夹逼定理可得到结论.

方法一（用夹逼定理）

$$f_n(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})=(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n+\cdots+(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})$$
$$>\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}>1,$$

结合（1）可得 $\frac{1}{2}<x_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$,

由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

（或 $f_n(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n})=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n})^n+\cdots+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n})$
$$>\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}=1,$$

结合（1）可得 $\frac{1}{2}<x_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$.）

方法二（用单调有界准则）

由(1)知$x_n\in(\frac{1}{2},1)$,对于固定的$x\in(\frac{1}{2},1)$,有 $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$,故

$f_n(x_{n+1})\le f_{n+1}(x_{n+1})=0$,又 $f_n(x_n)=0$,所以 $f_n(x_{n+1})\le f_n(x_n)$,

又因为 $f_n(x)$在$[0,+\infty)$单增,所以$x_{n+1}\le x_n$,即数列$\{x_n\}$单调减少.

综上知数列$\{x_n\}$单调有界,故数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\frac{1}{2}\leqslant a<1$，且$x_n\geq a$.若$a>\frac{1}{2}$,则

$$f_n(x_n)\geq f_n(a)=\frac{a(1-a^n)}{1-a}\to\frac{a}{1-a}>1,$$

这与$f_n(x_n)=1$矛盾，故$a=\frac{1}{2}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

（或设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\frac{1}{2}\leqslant a<1$，且$x_n\leq x_2<1$.

由$\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$，得$\frac{a}{1-a}=1$，所以$a=\frac{1}{2}$.）

12．（1）由题设知，对$x\in(0,1)$，$f(x)>0$，从而$M>0$，且最大值在$(0,1)$内取得，

由连续函数的性质知，$\exists x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)=M$，

若有两点$x_1,x_2\in(0,1)$，使得$f(x_1)=f(x_2)=M$，则$f'(x_1)=f'(x_2)=0$，从而存在$\xi\in(0,1)$，

使得$f''(\xi)=0$，这与题设$f''(x)<0$矛盾.

综上知存在唯一的$x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)=M$.

（2）由拉氏中值定理知，$\exists\eta\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使得$f'(\eta)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{M}{x_0}>M$，

对任意正整数n，$\frac{M}{n}\in(f'(x_0),f'(\eta))$，又$f'(x)$为连续函数，由连续函数性质知存在$x_n\in(0,1)$，使得$f'(x_n)=M/n$。唯一性可用反证法证明.

（3）由于$f'(x)$单调减少，所以$\{x_n\}$单调增加，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则对

$f'(x_n)=M/n$两边令$n\to\infty$得$f'(a)=0$，结合（1）知$a=x_0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

13.（1）当n为奇数时,由$p_n(-\infty)=-\infty$, $p_n(+\infty)=+\infty$知,方程$p_n(x)=0$至少有一个实根.若有两个根x_1,x_2，易知$x_1,x_2\in(-\infty,0)$，则存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使得$p_n(\xi)-p_n'(\xi)=0$，而

$p_n(\xi)-p_n'(\xi)=\frac{\xi^n}{n!}\neq0$,从而矛盾.

(2)当n为偶数时,则由$p_n'(x)=p_{n-1}(x)$及(1)之结论知,$p_n(x)$有唯一驻点x_0 $(x_0<0)$,且x_0为

$p_n(x)$的最小值点,又$p_n(x_0)=p_{n-1}(x_0)+\frac{x_0^n}{n!}=\frac{x_0^n}{n!}>0$,故方程$p_n(x)=0$无实根.

14.令 $F(x)=e^{-x}f(x)$,则 $F''(x)=e^{-x}[f''(x)-2f'(x)+f(x)]$,用罗尔定理可得结论.

15.由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$ 知，存在一点 x_1 ，使得当 $x>x_1$ 时， $f'(x)>\dfrac{\alpha}{2}$ ，从而对于 $x\in(x_1,+\infty)$ ，有

$$f(x)=f(x_1)+f'(\xi)(x-x_1)>f(x_1)+\frac{\alpha}{2}(x-x_1),$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ，结合 $f(x_0)<0$ ，可知方程 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一个根。

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$ 知，存在一点 x_2 ，使得当 $x<x_2$ 时， $f'(x)<\dfrac{\beta}{2}$ ，从而对于 $x\in(-\infty,x_2)$ ，有

$$f(x)=f(x_2)+f'(\eta)(x-x_2)>f(x_1)+\frac{\beta}{2}(x-x_2),$$

因此 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ，结合 $f(x_0)<0$ ，可知方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,x_0)$ 内至少有一个根。

若方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个或三个以上根，则由罗尔定理， $f''(x)$ 至少有一个零点，这与题设矛盾。

综上，方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两根.