第七章 多元函数微分学

点集 → 极限（重）→ 连续 → 导数/微分 { 偏导数 → 导数 ⇐ 一元极限；方向导数；可微/全微分-偏微分 }

→ 高阶. 复合. 隐函数(组)等 → 极值最值

→ 几何应用 { 空间曲线：切线，法平面 ← 直线、平面；空间曲面：切平面 法线 ←

第一节 多元函数的极限与连续

一、点集概念

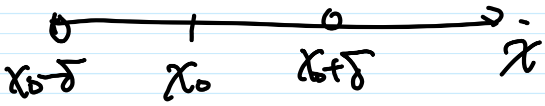
例. 平面点集 $R^2=\{(x,y)\mid x\in R,\ y\in R\}$

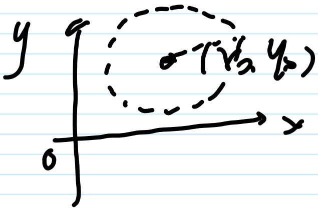
$E=\{(x,y)\mid x=y\}$

1. 邻域

一元函数. $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$

$=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$





二元函数（多元函数）

$U(P_0,\delta)$. 其中 $P_0(x_0,y_0)$ （$P_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$）

$=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$ 其中 $P(x,y)$ ($P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$)

特别地 $U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$.

类似地 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

$U(P_0)$, $\mathring{U}(P_0)$.

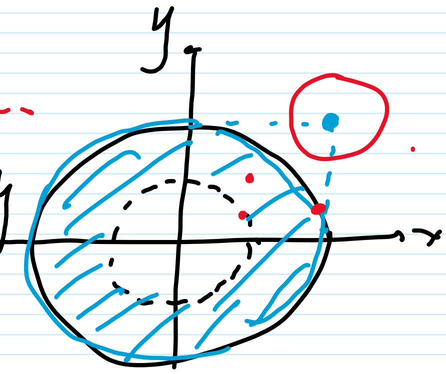
2. 点的分类.

① 内点: $\exists\delta>0$, $U(P_0,\delta)\subseteq E$.

② 外点: $\exists\delta>0$, $U(P_0,\delta)\cap E=\varnothing$.

③ 边界点: $\forall\delta>0$, $U(P_0,\delta)$ 总有E的点. 也有E的外点

例. $E=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2\le 4\}\cup\{(2,2)\}$. 不是闭集. 不是开集



$\mathring{E}$ 内部 $=\text{int}\,E=E_1=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 开集.

外部 $\text{ext}\,E=E_2=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1$ 或 $x^2+y^2>4\}$
$-\{(2,2)\}$ 无界集

边界 $\partial E=E_3=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1$ 或 $x^2+y^2=4\}\cup\{(2,2)\}$

3. 点集的另一种分类:

① 聚点、 $\forall\delta>0$ $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 总有E的点 可能属于E, 也不属于E.

② 孤立点: $\exists\delta>0$ $U(P_0,\delta)\cap E=\{P_0\}$ 或 $\mathring{U}(P_0,\delta)\cap E=\varnothing$
且 $P_0\in E$
属于E.

$\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2\le 4\}$ 内点和非孤立的边界点

属于E. 且 $P_0\in E$

导集. $E' = E_4 = \{(x,y) \mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$. 内点和非孤立的边界点

闭集

4. 点集一些分类.

(1) 开集: E的所有点都是内点

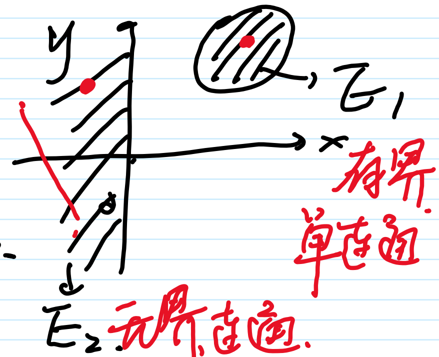
(2) 闭集: E的余集是开集, 则E是闭集, 或 $E'\subseteq E$

例: R^2: 既开又闭. ϕ: 既开又闭.

(3) 有界: $\exists M>0$. $E\subseteq U(O,M)$

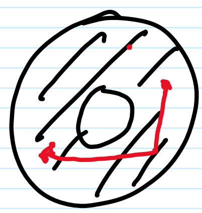
(4) 无界:

(5) 连通集: 任两点可有限个折线连接.



$E=E_1\cup E_2$

非连通



(6) 开区域: 连通的开集. (区域)

(7) 闭区域: 开区域连同其边界.

有界闭区域 ⟶ 闭区间.

$\{(x,y) \mid x^2+y^2\ge 1\}$.

$\{(x,y) \mid x^2+y^2>1\}$

二. 极限与连续. (二元函数).

1. 二元函数的极限

定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$

当 $P(x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta)$，其中 $P_0(x_0,y_0)$ 聚点

有 $|f(P)-A| = |f(x,y)-A| < \varepsilon$ 恒成立.

则称 A 为 $z=f(P)=f(x,y)$ 在 P 趋于 P_0 即 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时极限（二重）

记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$.

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立

二元函数.

$f:(x,y)\longmapsto z$.

$R^2 \longmapsto R$

记 $z=f(x,y)$. 定义域 $D\subseteq R^2$，值域 $\subseteq R$.

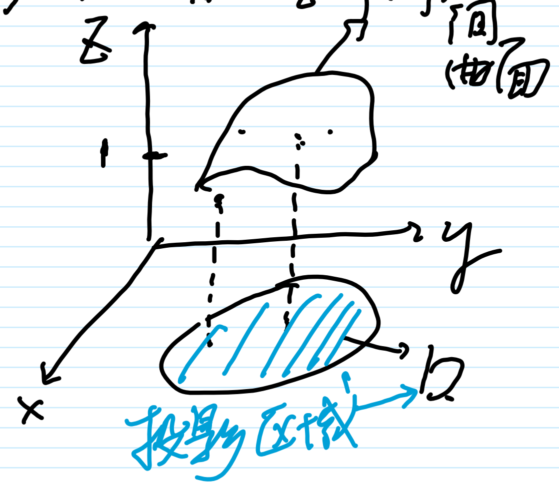
$u=f(x,y,z)$，或 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

一元函数

平面曲线 $y=f(x)$.

$f: x\longmapsto y$.

几何意义：$z=f(x,y)$

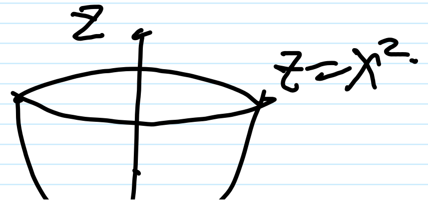


12类重要的空间曲面.

① $z=x+y-1$ 空间平面

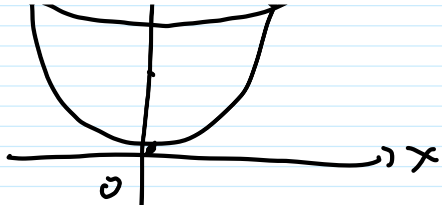
或 $z=1$

② $z=x^2+y^2$. 旋转抛物面



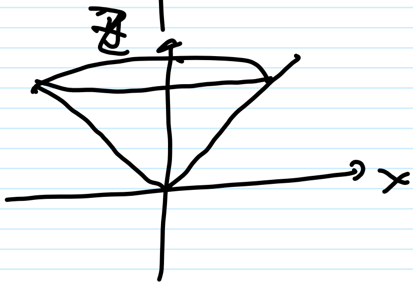
② $z=x^2+y^2$ 旋转抛物面

或 $z=1-x^2-y^2$.



③ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 圆锥面.

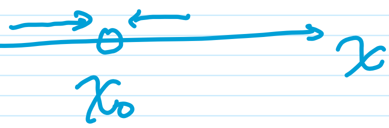
或 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

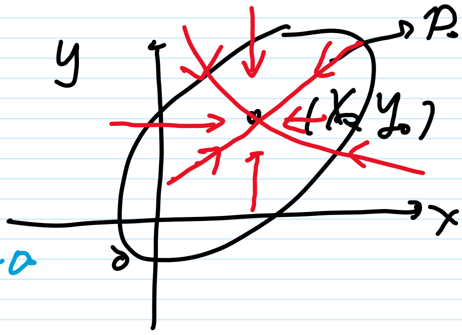


④ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上半球面

⑤ $x^2+y^2=1$、圆柱面

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$





$\lim\limits_{t\to 0^+} t\sin\frac{1}{t}=0$

例: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{(x^2+y^2)}\sin\frac{1}{\boxed{x^2+y^2}} =$ ______0______.

无穷小 × 有界

解: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0^2+0^2=0$

3. 连续定义: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) \Leftrightarrow$ 连续,

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0) \Leftrightarrow$ 间断