1. $f(x)=f(x+2l)$. $T=2l$. $l=\frac{T}{2}$ $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

$x\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x\neq$间断点

其中. $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$ $(n=1,2,\cdots)$

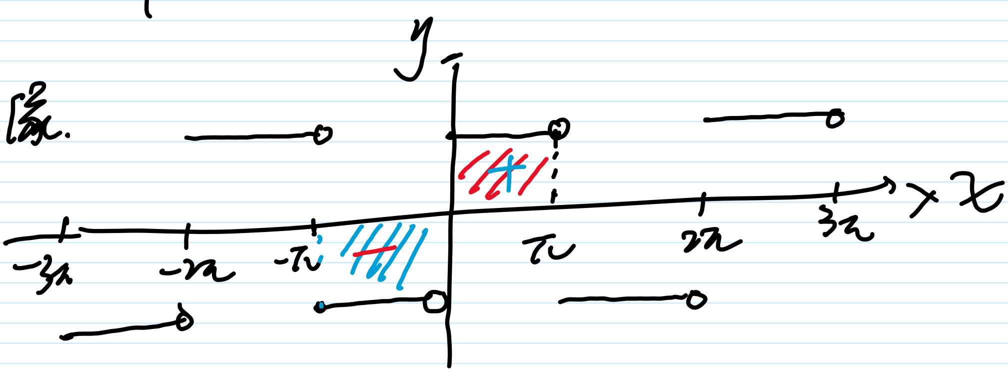
$=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

2. $S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{连续点} \\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, & x\text{间断点}\end{cases}$

例. $f(x)=f(x+2\pi)$. $T=2\pi$. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

将$f(x)$展开成傅里叶级数.

解: (1) 画$f(x)$图像.



(2) 间断点 $x=k\pi$ $(k\in Z)$

(3) $f(x)=$ - - - - - , $x\in R$ 且 $x\neq k\pi$ $(k\in Z)$

(3) $f(x)=$ - - - - - , $x\in R$ 且 ...

$l=\pi$. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)}_{奇}\underbrace{\cos nx}_{偶}\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx\right)$

$=0.\qquad (n=0,1,2,\cdots)$.

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx.$

$=-\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}d\cos nx=-\frac{2}{n\pi}[\cos n\pi-1]$

故. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi-1)\sin nx$, ($x\neq k\pi$, $k\in Z$)

$\cos n\pi=(-1)^n$. $\qquad b_n=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$

$$=\begin{cases}0, & n=2k.\\ \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x\quad x\neq k\pi.$$

定义: 正弦级数. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$,

余弦级数. $\frac{a_0}{2}\cdot 1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$.

$f(-x)=-f(x)$ 奇 $\leftarrow\sin\frac{n\pi x}{l}\leftarrow$ 正弦级数

$f(-x)=f(x)$ 偶 $\leftarrow\cos\frac{n\pi x}{l}\leftarrow$ 余弦级数

$f(-x)=f(x)$ 偶 $\leftarrow \cos\frac{n\pi x}{l} \leftarrow$ 余弦级数

推论：

① $f(x)=f(x+2l).\quad f(-x)=-f(x).$

$\Rightarrow a_n=0.\ (n=0,1,2,\cdots).$

$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

② $f(x)=f(x+2l).\quad f(-x)=f(x)$

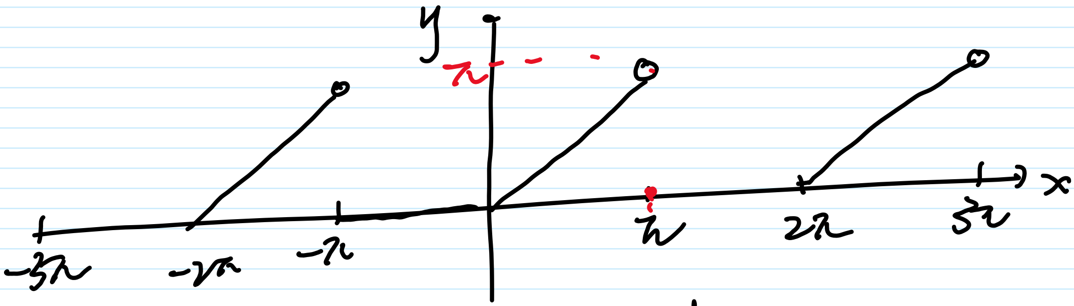
$\Rightarrow b_n=0.\ (n=1,2,\cdots)$

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$

例. $f(x)=f(x+2\pi).\quad f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

则 $f(x)=$ ________________ $,x\neq(2k+1)\pi.\ k\in Z$

解：



间断点 $x=(2k+1)\pi.\quad k\in Z$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\, d\sin nx.$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\underbrace{x\sin nx\Big|_0^{\pi}} - \int_0^{\pi}\sin nx\, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\int_0^{\pi} d\cos nx.$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot 1\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

综上. $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cdot\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right].$

$(x \neq (2k+1)\pi, k\in Z)$

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \underline{\frac{\pi^2}{4}}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$x=0$是连续点

当$x=0$时

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{2}{1^2} + \frac{0}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{4^2} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2}$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

$$S-\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}S.$$

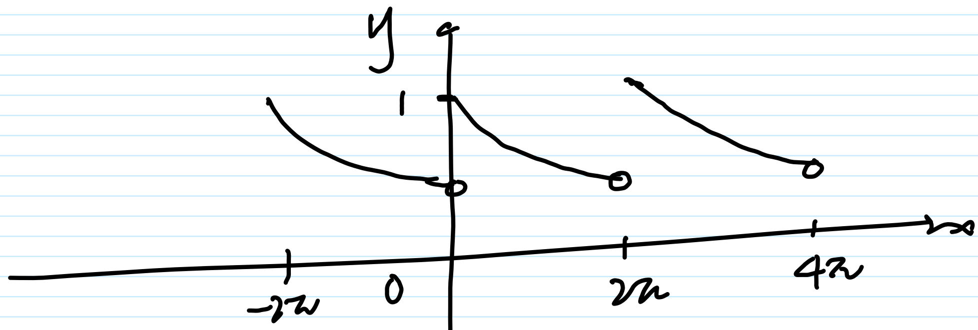
另一法：代入 $x=\pi$： $x=\pi$是间断点.

$$\frac{\pi+0}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=S(\pi)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}.$$

例 $f(x)=f(x+2\pi)$ $f(x)=e^{-x}$. $[0,2\pi)$

则 $f(x)=$ ______________________ , $x\neq 2k\pi$, $k\in Z$.

解：



间断点： $x=2k\pi$ $k\in Z$.

反>对>幂>指>三

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos nx\,dx.$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}e^{-x}\,d\sin nx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(e^{-x}\cdot\sin nx\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\sin nx\cdot e^{-x}dx\right)$$

$= \frac{1}{n\pi}\left(e^{\cdot}\sin nx\Big|_0 + \int_0\right.$

$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin nx\,dx,\quad y\ (n=1,2,\cdots)$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin nx\,dx = n a_n.$

$a_n = \frac{1}{n\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\int_0^{2\pi} e^{-x}\,d\cos nx$

$= -\frac{1}{n^2\pi}\left(e^{-x}\cdot\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos nx\cdot e^{-x}dx\right)$

$a_n = -\frac{e^{-2\pi}-1}{n^2\pi} - \frac{1}{n^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos nx\,dx}_{=a_n}.$

$a_n = \frac{1-e^{-2\pi}}{(1+n^2)\pi}\quad (n=1,2,\cdots)$

$\uparrow$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\,dx = \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}$

综上. $f(x) = \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 对 $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$(0,2\pi)$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = $ ______.

$e^{-x} = \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(\qquad\qquad)\ ,\quad x\in(0,2\pi)$

三. 非周期函数 在有限区间展开成傅里叶级数.

例. $f(x) = e^{-x},\ x\in(0,2\pi)$. $f(x) =$ ______.

总结: 周期做延拓.

定义：周期延拓.

$f(x)$ 定义 $[-l, l]$ 或 $[0, 2l]$. 满足收敛条件.

↓ 构造

$F(x)=F(x+2l)$ $T=2l$. $F(x)=f(x)$ $x\in(-l, l)$ 或 $[0, 2l)$.

↓ 展开

① 画 $F(x)$ 的图.

② $F(x)$ 的间断点 在 $[-l, l]$ 或 $[0, 2l]$

③ a_n, b_n.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

得 $F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\quad \cdots\cdots \quad)$, $x\neq$间断点

↓

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\cdots\cdots)$, $x\in[-l, l]$ 或 $[0, 2l]$

且 $x\neq F(x)$的间断点

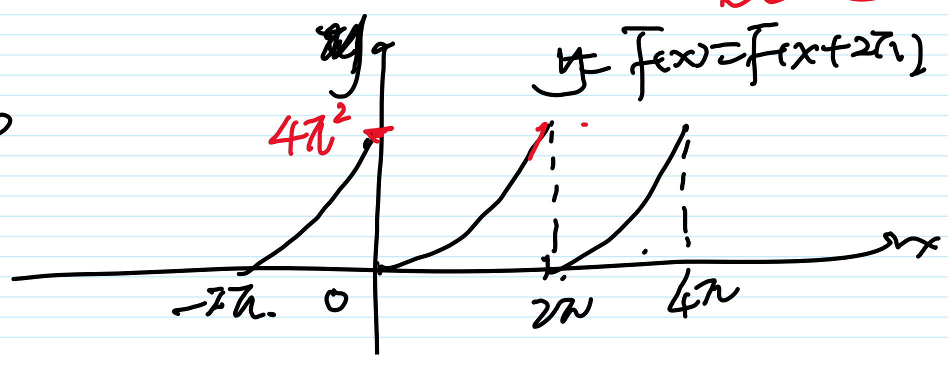
例 $f(x)=x^2$, $[0, 2\pi]$ 则其傅里叶展开式为.

$f(x)=$ ________________, $x\in(0, 2\pi)$

解：① 周期延拓

$T=2\pi$

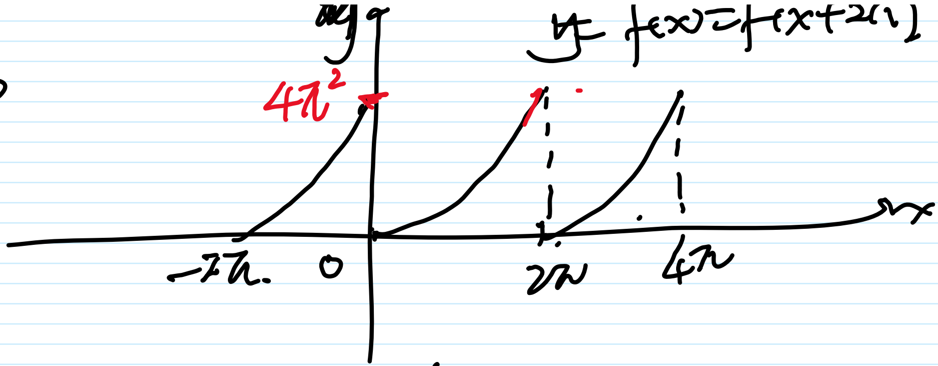
由 $F(x)=F(x+2\pi)$



解：(1) 周期延拓

$T=2\pi$

由 $f(x)=f(x+2\pi)$



(2) $F(x)$ 的间断点 $x=2k\pi \quad k\in Z$

在 $[0,2\pi]$ 上的间断点 $x=0$ 和 $x=2\pi$.

(3)、 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,dx=\frac{8\pi^2}{3}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=-\frac{4\pi}{n}\ (n=1,2,\cdots)$

综上 $x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$

$x\in(0,2\pi)$.

例. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=$ $\frac{\pi^2}{6}$ 　 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}$

$=\frac{\pi^2}{12}$

$x=0$ 间断点

当 $x=0$.

$\frac{4\pi^2+0}{2}=S(0)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$

$x=\pi$ 是连续点

当 $x=\pi$:

$\pi^2=\frac{4}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=$ ____$\ln 2$____.

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}x^n.$

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$