第二章 一元微分学

第四节 不等式证明

不等式的问题内容丰富，变化较多，用到的知识和方法很广，在微积分中讨论的不等式主要是：用微分学知识证明的不等式和用积分学知识证明的不等式。本节主要讨论用微分学知识证明不等式。

用微分学知识证明不等式的主要工具就是导数，主要方法有：（1）利用单调性、极值与最值，（2）利用中值定理和 Taylor 公式，（3）利用凹凸性。

A. 几个简单不等式：

（1）$e^x \geq 1+x$，（2）$\ln(1+x) \leq x$，

（3）$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x(x>-1,\alpha>1)$，

（4）$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x(x>-1,\alpha<1)$，

（5）$x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x(x>0)$，

（6）$\tan x>x(0<x<\dfrac{\pi}{2})$，

（7）$1-\dfrac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$

下面以不等式（1）的证明来说明一些证明方法.

例 1 证明: $e^x \geq 1+x$.

方法一（利用单调性，最值）

令 $f(x)=e^x-1-x$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=e^x-1$，

易见 $f'(0)=0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，故对于 $\forall x \in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x) \geq f(0)=0$，即

$e^x \geq 1+x$。

方法二（利用泰勒公式）

由泰勒公式知

$$e^x=1+x+\frac{e^{\xi}}{2!}x^2,$$

由于对于 $\forall x \in(-\infty,+\infty)$，$\dfrac{e^{\xi}}{2!}x^2 \geq 0$，故有 $e^x \geq 1+x$。

方法三（利用拉氏中值定理）

若 $x=0$，不等式显然成立。

若 $x\neq 0$，由拉氏中值定理知

$e^x-1=e^x-e^0=e^{\xi}x$，ξ 介于 0 和 x 之间，

当 $x>0$ 时，$e^{\xi}>1$，故 $e^x-1=e^{\xi}x>x$；

当 $x<0$ 时，$e^{\xi}<1$，故 $e^x-1=e^{\xi}x>x$。

综上知，对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $e^x\geq 1+x$。

方法四（利用凹凸性）

令 $f(x)=e^x$

由于 $f''(x)=e^x>0$，故 $f(x)$ 为凹函数，又曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y=1+x$，

所以 $e^x\geq 1+x$。

其他几个不等式的证明请同学们自己完成.对这些不等式,一方面要熟悉他们的证明方法，另一方面要会灵活运用这些不等式去证明更复杂的不等式。以后这些不等式可以作为基本不等式而直接使用，比如下面例子。

例 2.证明：$\sin(\tan x)\geq x$，$x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$。

证明：令 $f(x)=\sin(\tan x)-x$，则 $f(0)=0$，

$$f'(x)=\sec^2 x\cos(\tan x)-1=\frac{\cos(\tan x)-\cos^2 x}{\cos^2 x},$$

（此至，可以看出的是 $f'(x)$ 的符号与 $\cos(\tan x)-\cos^2 x$ 的符号相同，但看不出 $\cos(\tan x)-\cos^2 x$ 的正、负以及是否有驻点。是否需要用二阶导来解决也不清晰（因为二阶导也很复杂），因此我们还是考察一阶导，试试利用前面的基本不等式）

$$\cos(\tan x)-\cos^2 x\geq 1-\frac{1}{2}\tan^2 x-\cos^2 x=\frac{2\cos^2 x-\sin^2 x-2\cos^4 x}{2\cos^2 x}$$

$$=\frac{3\cos^2 x-1-2\cos^4 x}{2\cos^2 x}=\frac{(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)}{2\cos^2 x}$$

当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 时，$2\cos^2 x-1\geq 0$，

因此当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 时，$f'(x)\geq 0$，即 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上单调增加，故 $f(x)\geq f(0)$，即

$\sin(\tan x)\geq x$，$x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$.

B.下面就几种常用的证明方法展开讨论.

一. 利用单调性、极值、最值，

我们总可以把欲证的不等式变形为: $f(x)\ge 0, x\in I$ (或 $f(x)>0, x\in I$)，I 可以是开,闭,半开半闭区间,可以是有限区间,也可以是无限区间。

一般步骤为

(1) 求导 $f'(x)$；

(2) 讨论 $f'(x)$ 在区间 I 上的符号；

(3) 若 $f'(x)$ 在区间 I 上有确定的符号(即可确定 $f'(x)$ 在区间 I 上恒正或恒负),那么就可以判断 $f(x)$ 的单调性,进而证得不等式。比如若 $f'(x)\ge 0, x\in I$，则有 $f(x)\ge f(a), f(x)\le f(b)$ 或 $f(x)\ge f(a+0), f(x)\le f(b-0)$，$x\in I$ （a,b 分别表示 I 的左，右端点，可以是无穷）.若需证明严格不等式,则需判断 $f(x)$ 的严格单调性。

（4）若 $f'(x)$ 在区间 I 上的符号有正有负，则可考虑 $f(x)$ 在 I 上的最大值或最小值，进而证出不等式。比如若 $f(x)$ 在 I 上的最大值和最小值分别为 M, m，则 $f(x)\ge m, f(x)\le M, x\in I$ 。

（5）若 $f'(x)$ 在区间 I 上的符号难以确定，可考虑再求导 $f''(x)$，通过 $f''(x)$ 去讨论 $f'(x)$ 的符号（按步骤（3）或（4））。若二阶导还解决不了，可考虑更高阶的导数或其他方法。

值得注意的是：由于所作的辅助函数 $f(x)$ 不同，导数的计算、导数符号的确定以及驻点的确定的难易程度可能很不同，所以可不拘一格地对目标不等式作等价变形,以利于构造出简单且易于处理的辅助函数.不同辅助函数的构造源于原不等式的不同的同解变形。

例 3.证明： $\dfrac{2(b-a)}{b+a}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}\ (b>a>0)$

分析：不等式中有两个参数 a,b，用一元微分学的知识去处理时，要视为或变为单参数（或单变量）问题。一般有以下两个处理办法：

（1）把其中一个参数视为常数，而另一个参数作变量。

（2）作变换 $t=\varphi(a,b)$ 把原不等式变形为单变量的不等式。要注意的是所有变形必须是变形。

证明：先证左边不等式，方法一: $f(x)=\ln\dfrac{x}{a}-\dfrac{2(x-a)}{x+a}, x\ge a$，

则 $f(a)=0, f'(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x(x+a)^2}$

可见 $x>a>0$ 时，$f'(x)>0$ 即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上严格单调增加，又 $b>a$，故有

$f(b) > f(a) = 0$，即得$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$ 。

方法二： 原不等式变形为 $\ln\frac{b}{a} > \frac{2(\frac{b}{a}-1)}{1+\frac{b}{a}}$

令$t=\frac{b}{a}$，则原不等式等价于

$\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ $(t>1)$

令 $f(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$,$t>1$

下面的证明过程学生自己完成。

再证右边不等式，方法一 ：原不等式等价变形为

$2\ln\sqrt{\frac{b}{a}} < \sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$，令$t=\sqrt{\frac{b}{a}}$,则原不等式等价于$t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$（$t>1$)，

考察函数 $f(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$，利用单调性可证得结论,往下的证明请同学们完成。

方法二: 令 $f(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}$,利用单调性可证得结论.

例 4.设n为正整数,证明:$\frac{1+x^2+\cdots+x^{2n}}{x+x^3+\cdots+x^{2n-1}} \ge \frac{n+1}{n}$, $x>0$.

分析: $x=1$时显然成立; $x\ne 1$时,原不等式变形为

$$\frac{1-x^{2n+2}}{x(1-x^{2n})} \ge \frac{n+1}{n},$$

此不等式等价于

$n(1-x^{2n+2}) \ge (n+1)x(1-x^{2n})$, $0<x<1$;及$n(1-x^{2n+2}) \le (n+1)x(1-x^{2n})$, $x>1$.

至此可以看出要讨论的函数(即辅导函数): $f(x)=n(1-x^{2n+2})-(n+1)x(1-x^{2n})$.

证明: $x=1$时原不等式显然成立,下面考虑$x\ne 1$,此时原不等式等价于

$$\frac{1-x^{2n+2}}{x(1-x^{2n})} \ge \frac{n+1}{n},$$

令 $f(x)=n(1-x^{2n+2})-(n+1)x(1-x^{2n})$,则 $f(1)=0$,

$$f'(x)=-n(2n+2)x^{2n+1}-(n+1)+(2n+1)(n+1)x^{2n}$$

$$=(n+1)[(2n+1)x^{2n}-2nx^{2n+1}-1]$$

(至此可以看出 $f'(1)=0$,但 $f'(x)$ 的符号不好确定,可用二阶导(此处二阶比较简单,且符号很容易确定)试一试)

由于 $f''(x)=2n(n+1)(2n+1)x^{2n-1}(1-x)$,

可见 $f''(1)=0$; $f''(x)>0, x\in(0,1)$; $f''(x)<0, x\in(1,+\infty)$,故 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值,因此对 $\forall x>0$, $f'(x)\le f'(1)=0$.从而知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty]$ 上单调减少.

因此,当 $0<x<1$ 时, $f(x)\ge f(1)=0$,即 $n(1-x^{2n+2})\ge(n+1)x(1-x^{2n})$,再结合 $x(1-x^{2n})>0$,可得

$$\frac{1-x^{2n+2}}{x(1-x^{2n})}\ge\frac{n+1}{n};$$

当 $x>1$ 时, $f(x)\le f(1)=0$,即 $n(1-x^{2n+2})\le(n+1)x(1-x^{2n})$,再结合 $x(1-x^{2n})<0$,可得

$$\frac{1-x^{2n+2}}{x(1-x^{2n})}\ge\frac{n+1}{n}.$$

综上,可得 $\dfrac{1+x^2+\cdots+x^{2n}}{x+x^3+\cdots+x^{2n-1}}\ge\dfrac{n+1}{n}, x>0$.

二.利用微分中值定理和 Taylor 公式.

例 5. 设 $n\ge2$ 为正整数, $\alpha>0$,证明: $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}<\dfrac{1}{\alpha}[\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\dfrac{1}{n^{\alpha}}]$.

分析:不等式变形为 $\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\dfrac{1}{n^{\alpha}}>\dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$,从形式上看左边具有 $f(b)-f(a)$ 之形式,因此想到用拉氏中值定理试一试.

证明:考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$,则 $f'(x)=-\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$,

由拉氏中值定理知 $\xi\in(n-1,n)$,使得

$$f(n)-f(n-1)=f'(\xi),即\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}=-\frac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}}$$

也即 $\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\dfrac{1}{n^{\alpha}}=\dfrac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}}$,

由于 $\xi\in(n-1,n)$,因此 $\dfrac{1}{\xi^{\alpha+1}}>\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$.故 $\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\dfrac{1}{n^{\alpha}}>\dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$,所以

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}}<\frac{1}{\alpha}[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}].$$

(易见不等式 $\frac{1}{(n-1)^{\alpha+1}}>\frac{1}{\alpha}[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}]$ 也成立.)

例 6.设 $a>1$,证明: $a^{y}-a^{x}>(\cos x-\cos y)a^{x}\ln a$, $0<x<y<\frac{\pi}{2}$.

分析:原不等式变形为

$$\frac{a^{y}-a^{x}}{(-\cos y)-(-\cos x)}>a^{x}\ln a,$$

不等式左边有柯西中值定理之形式,可用柯西中值定理值试一试,具体的证明过程请同学完成.

总结：用中值定理证明不等式的一般步聚：,先将欲证的不等式变形为 $f(x)\le M, x\in I$，且 $f(x)$ 具有拉氏中值定理或柯西中值定理之形式(比如 $f(x)=\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$,或 $f(x)=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}$),然后用中值定理得 $f(x)=\mathrm{g}(\xi)$,再说明 $g(x)$ 在 I 上总有 $g(x)\le M$,证明就完成了.

例 7．求证 $\frac{x}{\sin x}<\frac{\tan x}{x}\ (0<x<\frac{\pi}{2})$

解法一

分析：原不等式等价于 $\sin x\tan x>x^{2}$，右边是多项式，可试一试函数 $f(x)=\sin x\tan x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开： $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^{2}+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^{3}$，经计算有 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2$,如能说明 $f'''(x)>0\ (0<x<\frac{\pi}{2})$ 问题就解决了。

证明：令 $f(x)=\sin x\tan x$，则 $f'(x)=\cos x\tan x+\sin x\sec^{2}x=\sin x+\tan x\sec x$，

$$f''(x)=\cos x+\sec^{3}x+\sec x\tan^{2}x=\cos x+2\sec^{3}x-\sec x$$

$$f'''(x)=-\sin x+6\sec^{2}x\sec x\tan x-\sec x\tan x=\frac{\sin x(6-\cos^{2}x-\cos^{4}x)}{\cos^{4}x}$$

所以 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(x)>0\ (0<x<\frac{\pi}{2})$

由 Taylor 公式有

$\sin x\tan x=x^{2}+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^{3}>x^{2}$,$0<x<\frac{\pi}{2}$,于是命题得证.

总结:当遇到证明形如 $f(x)\ge a_{0}+a_{1}(x-x_{0})+\cdots+a_{n}(x-x_{0})^{n}$ (也许需要变形,变成这种形式)

的不等式时,可试一试泰勒公式. 要注意的是用 Taylor 公式证明不等式时,一定是选择拉氏余项,而且能确定拉氏余项的符号.

解法二（用用单调性证明）

令 $f(x)=\sin x\tan x-x^2$,则 $f(0)=0$,

$$f'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x>2\sqrt{\sin x\cdot\sin x\sec^2 x}-2x=2\tan x-2x>0,$$

由此可得结论.

解法三（变形）原不等式等价于 $\ln\sin x+\ln\tan x-2\ln x>0, 0<x<\frac{\pi}{2}$,

令 $f(x)=\ln\sin x+\ln\tan x-2\ln x$,则有

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{2}{x}=\frac{x\cos^2 x-2\sin x\cos x+x}{x\sin x\cos x},$$

注意到 $x\cos^2 x+x>2\sqrt{x\cdot x\cos^2 x}=2x\cos x>2\sin x\cos x$,以及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，便可得结论.

解法四（变形）原不等式等价于 $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}>x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$,

令 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}-x$,则有

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\sqrt{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}-1=\frac{2\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos x\sqrt{\cos x}}-1=\frac{1+\cos^2 x-2\cos x\sqrt{\cos x}}{2\cos x\sqrt{\cos x}},$$

由于 $1+\cos^2 x-2\cos x\sqrt{\cos x}>2\cos x-\cos x\sqrt{\cos x}>0, 0<x<\frac{\pi}{2}$,

(或 $1+\cos^2 x-2\cos x\sqrt{\cos x}>1+\cos^2 x-2\cos x>0, 0<x<\frac{\pi}{2}$)

故 $f'(x)>0, 0<x<\frac{\pi}{2}$，由此可得结论.

三．利用凹凸性

主要是利用（1）凹凸性定义，（2）凹凸曲线在切线和割线一侧的几何特性，

（3）凹凸性在平均值方面的表现：若 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数（指上凸），则对任意

$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\ge\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)),$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\ge\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)\quad（\lambda_k\ge 0,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1）$$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凹函数，则上述不等式反向。

例 8．设 $p>0,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$， $a>0,b>0$，证明：

$$ab\le\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q}$$

分析：不等式变形 $\ln(\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q})\ge\ln ab=\frac{1}{p}\ln a^{p}+\frac{1}{q}\ln b^{q}$，若记 $\alpha_1=\frac{1}{p},\alpha_2=\frac{1}{q}$，

$x_1=a^{p},x_2=b^{q}$，上面不等式即为 $\ln(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\ge\alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2$，这正是函数 $f(x)=\ln x$ 的凸性.

证明：令 $f(x)=\ln x$，则有 $f''(x)=-\frac{1}{x^{2}}<0$，故 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数，由凸函数定义有

$$f(\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q})\ge\frac{1}{p}f(a^{p})+\frac{1}{q}f(b^{q})$$

从而得结论.

本题也可以用前面的方法解决：

令 $f(x)=\frac{a^{p}}{p}+\frac{x^{q}}{q}-ax$，

则 $f'(x)=x^{q-1}-a$，可知 $f'(a^{\frac{1}{q-1}})=0$，且当 $x<a^{\frac{1}{q-1}}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>a^{\frac{1}{q-1}}$ 时，$f'(x)>0$。

故 $f(x)$ 在 $x=a^{\frac{1}{q-1}}$ 处取得最小值 $f(a^{\frac{1}{q-1}})=\frac{a^{p}}{p}+\frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q}-a^{\frac{q}{q-1}}=0$，

所以 $f(q)\ge0$，故 $ab\le\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q}$.

例 9.设 $\alpha>1,x_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，证明:

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+\frac{1}{x_k})^{\alpha}\ge\frac{(n^{2}+1)^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}.$$

分析:初一看,无从下手.那就变变形式,

$$\frac{(n^{2}+1)^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}=n(\frac{n^{2}+1}{n})^{\alpha}=n(n+\frac{1}{n})^{\alpha}=n[\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k]^{\alpha}$$

$$=n[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{x}x_k)^{-1}]^{\alpha}$$

那么原不等式变为

$$[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{x}x_k)^{-1}]^{\alpha}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k+\frac{1}{x_k})^{\alpha},$$

令 $f(x)=(x+\frac{1}{x})^{\alpha}$,那么上面不等式就是

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\le\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

这就眼熟了,这是利用凹凸性可得到的典型不等式.

证明: 令 $f(x)=(x+\frac{1}{x})^{\alpha}$,则

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(x+\frac{1}{x})^{\alpha-2}(1-\frac{1}{x^2})^2+2\alpha(x+\frac{1}{x})^{\alpha-1}/x^3\ge 0, x>0,$$

所以对 $x_k>0(k=1,2,\cdots,n)$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,有

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\le\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)),$$

整理得

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+\frac{1}{x_k})^{\alpha}\ge\frac{(n^2+1)^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}.$$

四. 其他：比如用幂级数展开，定积分证明不等式.

比如　由 $1>\cos x\,(x\ne 2k\pi)\Rightarrow\int_0^x dt>\int_0^x\cos tdt\Leftrightarrow x>\sin x\Rightarrow\int_0^x tdt>\int_0^x\sin tdt$

$$\Leftrightarrow\cos x>1-\frac{x^2}{2}\Rightarrow\int_0^x\cos tdt>\int_0^x(1-\frac{t^2}{2})dt\Leftrightarrow\sin x>x-\frac{x^3}{3!},\quad x>0.$$

再比如,可用定积分的知识证明例 3 的左边不等式: $\frac{2(b-a)}{b+a}<\ln\frac{b}{a}(b>a>0)$

该不式等价于 $\int_a^b f(x)dx>(b-a)f(\frac{a+b}{2})$,其中 $f(x)=\frac{1}{x}$,结合 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的凹凸性可得结果（下一章会讨论）.

练习题:

1. 比较 $\frac{e^b-e^a}{b-a}$ 与 $\frac{e^b+e^a}{2}$ 的大小, $a\ne b$.

2. 求证：(1)当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,有 $\sin x>\frac{2x}{\pi}$

(2)如果 ΔABC 是锐角三角形，那么 $\sin A+\sin B+\sin C>2$. 如果是直角三角形此不等式还成立吗？如果是钝角三角形此不等式还成立吗？

3. 证明：$(\frac{x+1}{2})^{x+1}\le x^x, x>0$。

4. 证明: $\frac{1}{x(1+x)}>\ln^2(1+\frac{1}{x}),\ x>0$

5. 设$a>\ln 2-1$，证明：

$$x^2-2ax+1<e^x, x>0$$

6. 求证: (1) $\dfrac{1+x}{1+x^2}\le\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, x>0$ (2) $2\arctan x<3\ln(1+x), x>0$

7. 证明:$1+x^2<2^x, 0<x<1$。

8. 设$a>0, b>0$，证明: $p>1$时,有

$$a^p+b^p\ge 2^{1-p}(a+b)^p$$

9.设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f''(x)+2f'(x)+f(x)\le 0$.证明:

$f(x)\ge 0, x\in[0,1]$.

10. 证明:$1+(\sum_{k=1}^{n}p_k x_k)^{-1}\le\prod_{k=1}^{n}(\dfrac{1+x_k}{x_k})^{p_k}$, $(0<x_k<1, p_k>0, \sum_{k=1}^{n}p_k=1)$

11. 证明：$(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}<e(1+\dfrac{1}{2n})$。

12.证明：$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}\le\sqrt[n]{x-y}, x\ge y\ge 0$ ，n为正整数。

13. 证明：$x^n(1-x)<\dfrac{1}{ne}$，（$0\le x\le 1$），n为正整数。

14. 证明：$\tan(\sin x)\ge x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$。

15. 证明: $x>0$时,有$e^{\frac{x}{2}}<\dfrac{e^x-1}{x}<\dfrac{e^x+1}{2}$

16. 证明：$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}, x>0, y>0, 0<\alpha<\beta$。

17.（1）求$f(x)=x^x\ (x>0)$的最小值;（2）证明：$x^y+y^x>1\ (x>0, y>0)$.

18. 设$a\ge 1$，证明：当$x\in[0,a]$时，成立不等式

$$0\le e^{-x}-(1-\frac{x}{a})^a\le\frac{x^2}{a}e^{-x}.$$

19(第 8 届决赛试题).设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明：当$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$.

答案或提示

1. 答案:$\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<\dfrac{e^b+e^a}{2}$.

方法一:不妨设$b>a$，$\dfrac{e^b-e^a}{b-a}-\dfrac{e^b+e^a}{2}=\dfrac{e^a}{2(b-a)}[2(e^{b-a}-1)-(b-a)(e^{b-a}+1)]$，

考察函数 $f(x)=2(e^x-1)-x(e^x+1)$， $x>0$,则

$f'(x)=e^x-xe^x-1$, $f''(x)=-xe^x<0, x>0$

所以当$x>0$时, $f'(x)<f'(0)=0$,从而当$x>0$时, $f(x)<f(0)=0$,所以

$f(b-a)<0$,即得结论.

方法二.不妨设$b>a$，注意到$\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，$\dfrac{e^b+e^a}{2}=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$，其中

$f(x)=e^x$，再结合$f(x)$的凹凸性可得结果(见第三章第三节例 7).

2. 对（1）,左边是函数$y=\sin x$,而右边函数$y=\dfrac{2x}{\pi}$正是曲线$y=\sin x$上的两点$(0,0),(\dfrac{\pi}{2},1)$的连线的方程. 利用$y=\sin x$的凸性很容易得结论. 由（1）很容易得那么$\sin A+\sin B+\sin C>2$,直角三角形还成立, 钝角三角形不成立.

3. 原不等式等价于$(x+1)[\ln(x+1)-\ln 2]\le x\ln x$,

令 $f(x)=(x+1)[\ln(x+1)-\ln 2]-x\ln x$, 则

$f'(x)=\ln\dfrac{x+1}{x}-\ln 2$,

由此可知$f(x)$在$x=1$处取得$(0,\infty)$内的最大值$f(1)=0$,从而得结论.

4. 令$t=\dfrac{1}{x}$，则原不等式等价于 ：$\dfrac{t^2}{(1+t)}>\ln^2(1+t), t>0.$

令 $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{1+t}}-\ln(1+t), t>0$,则

$f'(t)=\dfrac{t+2-2\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}}$,

注意到 $t+2=1+(t+1)>2\sqrt{t+1}, t>0$,可得 $f'(t)>0, t>0$,

从而当$t>0$时, $f(t)>f(0)=0$,即$\dfrac{t}{\sqrt{1+t}}>\ln(1+t)$,故

$$\frac{t^2}{(1+t)} > \ln^2(1+t), t > 0.$$

5. 可用单调性证.而证 $f'(x) > 0$ 时用最值,其中 $f(x) = e^x - x^2 + 2ax - 1$.

6. (1)(实际上就是证明左边在 $(0,+\infty)$ 内的最大值不超过右边)

令 $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$,易证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值为 $f(\sqrt{2}-1) = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)} = \dfrac{\arctan x - \arctan 0}{\ln(1+x) - \ln(1+0)} = \dfrac{1+\xi}{1+\xi^2} \le \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} < \dfrac{3}{2}$,得结论.

7.令 $f(x) = 2^x - 1 - x^2$,则 $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2$,易见当 $0 < x < 1$ 时, $f''(x) < 0$,故

$f(x) = f(x \cdot 1 + (1-x) \cdot 0) > xf(1) + (1-x)f(0) = 0$,即得结论

8. 当 $p > 1$ 时, $f(x) = x^p$ 在 $(0,+\infty)$ 内为凹函数,故

$$f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a+b}\right) \le \frac{1}{2}f\left(\frac{a}{a+b}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{b}{a+b}\right),$$

整理可得结论.

9.令 $F(x) = e^x f(x)$,则 $F''(x) \le 0$,结合 $F(0) = F(1) = 0$, 得 $F(x) \ge 0$,即得结论.

10. 不等式两过取对数 $\ln(1 + (\sum_{k=1}^{n} p_k x_k)^{-1}) \le \sum_{k=1}^{n} p_k \ln((1 + \dfrac{1}{x_k})$,令 $f(x) = \ln(1 + \dfrac{1}{x})$,不等式变形

为 $f(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k) \le \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$,利用 $f(x)$ 的凹凸性可得结论.

11. 变形为 $(n+1)\ln(1+\dfrac{1}{n}) < 1 + \ln(1+\dfrac{1}{2n})$, 即 $(1+\dfrac{1}{n})\ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\ln(1+\dfrac{1}{2n})$,

考察函数 $f(x) = x + x\ln(1+\dfrac{x}{2}) - (1+x)\ln(1+x)$,则

$$f'(x) = \ln(1+\frac{x}{2}) + \frac{x}{2+x} - \ln(1+x),\ f''(x) = \frac{1}{(2+x)(1+\frac{x}{2})} - \frac{1}{(2+x)(1+x)} > 0, x > 0,$$

由 $f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$,可得结论.

12. 令 $t = x - y$, 则不等式等价于 $\sqrt[n]{y+t} - \sqrt[n]{y} \le \sqrt[n]{t}$,

方法一:令 $f(t) = \sqrt[n]{y+t} - \sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{t}$, 利用单调性可证得结论。

方法二:令 $f(z) = \sqrt[n]{t+z} - \sqrt[n]{z}$, 原不等式等价于 $f(y) \le f(0), y > 0$,因此只需证明 $f(z)$ 单

调减少.

方法三:（3）原不等式变形为$\dfrac{\sqrt[n]{y+t}-\sqrt[n]{y}}{\sqrt[n]{t}-0}\le 1$,运用柯西中值定理可得结论.

13. 先求出$f(x)=x^n(1-x)$的最大值$f(\dfrac{n}{n+1})=\dfrac{1}{n}(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}$，

结合$(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}=\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}<\dfrac{1}{e}$,可得结论

14. 令$f(x)=\tan(\sin x)-x$，则

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}-1=\frac{\cos x-\cos^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)},$$

又$\cos x-\cos^2(\sin x)=\cos x-\dfrac{1+\cos(2\sin x)}{2}=\cos x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2\sin x)$

$$\ge\cos x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[1-(2\sin x)^2/2+(2\sin x)^4/4!]=\cos x-1+\sin^2 x-\frac{1}{3}\sin^4 x$$

$$\ge\cos x-1+\sin^2 x-\frac{1}{3}\sin^2 x=\cos x-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cos^2 x=\frac{1}{3}(1-\cos x)(2\cos x-1)$$

$\ge 0,0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$。从而

$$f(x)\ge f(0)=0,0\le x\le\frac{\pi}{3},$$

结论得证.

15. 本题有很多方法可证,还可以利用幂级数展开去证明:

方法一(利用单调性)：先证左边不等式.令$F(x)=e^x-1-xe^{\frac{x}{2}}$，则$F(0)=0$，且

$$F'(x)=e^x-e^{\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1-\frac{x}{2})>0,x>0;$$

（此处用了不等式$\mathrm{e}^x>1+x,x\ne 0$）

又$F(x)$连续，所以$F(x)$在$[0,+\infty)$严增，故当$x>0$时，$F(x)>0$.

再证左边不等式.令$G(x)=x(e^x+1)-2(e^x-1)$，则$F(0)=0$，且

$$F'(x)=xe^x-e^x+1=e^x(e^{-x}+x-1)>0,x>0;$$

（此处又用了不等式$\mathrm{e}^x>1+x,x\ne 0$）

又$F(x)$连续，所以$F(x)$在$[0,+\infty)$严增，故当$x>0$时，$F(x)>0$.

方法二(利用积分并结合被积函数的凹凸性):

注意到$e^x-1=\int_0^x e^t dt$,及函数$y=e^t$为凹函数便可得结论(只须注意到凹函数的几何特性.)

方法三(利用幂级数展开):

$$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!2^n},\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},\frac{e^x+1}{2}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2n!},$$

比较三个展式的系数便可得结论.

16. 若$x=y$,则不等式成立,

当$x\neq y$时,不妨设$y>x$, 原不等式变形为

$(1+b^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}>(1+b^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$, 其中$b=\dfrac{y}{x}$.

令 $f(x)=(1+b^x)^{\frac{1}{x}}$,则 $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(1+b^x)}=e^{\ln b+\frac{\ln(1+b^{-x})}{x}}$,

由于$\dfrac{\ln(1+b^{-x})}{x}$在$(0,+\infty)$单调减少,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$单调减少,从而得结论.

17.（1）令$g(x)=x\ln x$，易得$g(x)$的最小值为$-\dfrac{1}{e}$，从而$f(x)=x^x$的最小值为$e^{\frac{-1}{e}}$。

（2）$x\geq 1$或$y\geq 1$，不等式显然成立。只需考虑$0<x,y<1$，不妨设$x\leq y$，令$t=\dfrac{x}{y}$，则

$$x^y+y^x=(ty)^y+y^{ty}=y^yt^y+(y^y)^t\geq e^{-\frac{1}{e}}t^y+e^{-\frac{t}{e}}\geq e^{-\frac{1}{e}}t+e^{-\frac{t}{e}},$$

考察函数$h(t)=e^{-\frac{1}{e}}t+e^{-\frac{t}{e}}$，由$h'(t)=e^{-\frac{1}{e}}-\dfrac{1}{e}e^{-\frac{t}{e}}\geq e^{-\frac{1}{e}}-\dfrac{1}{e}>0$，知$h(t)$在([0,1]上递增，

从而$h(t)>h(0)=1,t>0$。从而得结论

18. 先证左边不等式. 不等式变形为$x+a\ln(1-\dfrac{x}{a})\leq 0$,再由不等式$\ln(1+x)\leq x$可得结论. 再证右边不等式(有多种方法).

方法一:$e^{-x}-(1-\dfrac{x}{a})^a\leq\dfrac{x^2}{a}e^{-x}\Leftrightarrow(1-\dfrac{x}{a})^a\geq(1-\dfrac{x^2}{a})e^{-x}$,

若$1-\dfrac{x^2}{a}\leq 0$，即$x\geq\sqrt{a}$，结论成立，若$0\leq x\leq\sqrt{a}$，则

$(1-\dfrac{x}{a})^a\geq(1-\dfrac{x^2}{a})e^{-x}\Leftrightarrow a\ln(1-\dfrac{x}{a})+x-\ln(1-\dfrac{x^2}{a})\geq 0$,考察函数

$F(x)=a\ln(1-\frac{x}{a})+x-\ln(1-\frac{x^2}{a}),0\le x\le\sqrt{a}$.

方 法 二 : $e^{-x}-(1-\frac{x}{a})^a\le\frac{x^2}{a}e^{-x}\Leftrightarrow(1-\frac{x}{a})^a e^x\ge1-\frac{x^2}{a}$ ， 由 $e^x=[e^{\frac{x}{a}}]^a\ge(1+\frac{x}{a})^a$ ， 得

$(1-\frac{x}{a})^a e^x\ge(1-\frac{x}{a})^a(1+\frac{x}{a})^a=(1-\frac{x^2}{a^2})^a$,

如 能 证 明 $(1-\frac{x^2}{a^2})^a\ge1-\frac{x^2}{a}$ ， 那 么 问 题 就 解 决 了 . 而 此 不 等 式 可 由 不 等 式 $(1+x)^\alpha\ge1+\alpha x(x>-1,\alpha>1)$ 得到.

方法三:$e^{-x}-(1-\frac{x}{a})^a\le\frac{x^2}{a}e^{-x}\Leftrightarrow(1-\frac{x}{a})^a e^x+\frac{x^2}{a}-1\ge0$

令 $F(x)=(1-\frac{x}{a})^a e^x+\frac{x^2}{a}-1$,

则 $F(0)=0,F(a)=a-1,F'(x)=\frac{2x}{a}+(1-\frac{x}{a})^a e^x-(1-\frac{x}{a})^{a-1}e^x=\frac{x}{a}[2-e^x(1-\frac{x}{a})^{a-1}]$,

（至此，我们无法判断 $F'(x)$ 是负的，正的，还是有正有负,驻点也求不出来,二阶导也很复杂.这时我们得另辟蹊径:既不判断 $F(x)$ 的单调性,也不求 $F(x)$ 的最值.）

若 $F'(x)$ 在 $(0,a)$ 内无零点，则 $\min\limits_{x\in[0,a]}F(x)=\min(F(0),F(a))=0$,

从而 $F(x)\ge0,x\in[0,a]$，命题成立;

若 $F'(x)$ 在 $(0,a)$ 内有零点，设 ξ 为 $F'(x)$ 的零点，则 ξ 满足：$2-e^\xi(1-\frac{\xi}{a})^{a-1}=0$,

从而 $F(\xi)=(1-\frac{\xi}{a})^a e^\xi+\frac{\xi^2}{a}-1=2(1-\frac{\xi}{a})+\frac{\xi^2}{a}-1=1-\frac{2\xi}{a}+\frac{\xi^2}{a}=\frac{(\xi-1)^2}{a}+1-\frac{1}{a}\ge0$,

故 $\min\limits_{x\in[0,a]}F(x)=\min(F(0),F(\xi),F(a))=0$.

从而 $F(x)\ge0,x\in[0,a]$，命题成立.

19.令 $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}$，则

$$f'(x)=\frac{-2}{x^3}+\frac{2\sec^2 x}{\tan^3 x}=\frac{2(x^3\sec^2 x-\tan^3 x)}{x^3\tan^3 x}=\frac{-2(\sin^2 x\tan x-x^3)}{x^3\sin^3 x\cos x},$$

令 $g(x)=2\ln\sin x+\ln\tan x-3\ln x, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$,则有

$g(x)=3\ln\sin x-\ln\cos x-3\ln x$，

$$g'(x)=\frac{3\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{3}{x}=\frac{3x\cos^2 x-3\sin x\cos x+x\sin^2 x}{x\sin x\cos x}=\frac{2x\cos^2 x-3\sin x\cos x+x}{x\sin x\cos x},$$

由均值不等式有

$$2x\cos^2 x+x>3\sqrt[3]{x\cos x\cdot x\cos x\cdot x}=3x(\cos x)^{2/3}>3x\cos x>3\sin x\cos x，\quad 0<x<\frac{\pi}{2}，$$

从而当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)>0$，又 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\dfrac{\sin^2 x\tan x}{x^3}=0$，所以 $g(x)>0$，从而 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单减,又

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\frac{4}{\pi^2}，\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3))^2-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{2}{3},$$

因此 $\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

本题的解题思路是清晰的，难点在于 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}$ 的导数 $f'(x)=\dfrac{-2(\sin^2 x\tan x-x^3)}{x^3\sin^3 x\cos x}$ 符号的判定。下面再给出两种方法证明:当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\sin^2 x\tan x>x^3$。

一.用 Taylor 公式

令 $g(x)=\sin^2 x\tan x$，则 $g(0)=0$，

$g'(x)=(\sin^2 x\tan x)'=2\sin^2 x+\tan^2 x$，$g'(0)=0$，

$g''(x)=2\sin 2x+2\tan x\sec^2 x$，$g''(0)=0$，

$g'''(x)=4\cos 2x+2\sec^4 x+4\tan^2 x\sec x$，$g'''(0)=6$，

$$g^{(4)}(x)=-16\sin x\cos x+8\sec^4 x\tan x+8\tan x\sec^3 x+4\tan^3\sec x$$

$$>-16\sin x+16\tan x>0, x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

对于 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，由 Taylor 公式，$\exists\xi\in(0,x)$，

$$g(x)=g(0)+g'(0)+\frac{g''(0)}{2}x^2+\frac{g'''(0)}{6}x^3+\frac{g^{(4)}(\xi)}{4!}x^4>x^3.$$

二.变形

令 $g(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x$,则有

$$g'(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{1}{3}\sin^2 x\cdot\cos^{-4/3}-1=\frac{1+2\cos^2 x-3\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}},$$

由于

$$1+2\cos^2 x-3\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}=1+\cos^2 x+\cos^2 x-3\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}$$

$$>3\sqrt[3]{1\cdot\cos x^2\cos^2 x}-3\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}=0,\quad 0<x<\frac{\pi}{2},$$

故 $g'(x)>0,0<x<\frac{\pi}{2}$，再结合 $g(0)=0$，可得 $g(x)>0,0<x<\frac{\pi}{2}$.

不等式 $\sin^2 x\tan x-x^3>0$， $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 的证明与例 7 几乎一样。