2024年06月04日 星期二6-8

2024年6月4日 8:39

平面曲线积分与路径无关.

定理: (1). D单连通

(2) P, Q 偏导连续

则 $\boxed{\underset{(i)}{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}} \Rightarrow \underset{(ii)}{\int_{L_1} Pdx+Qdy = \int_{L_2} Pdx+Qdy}}$

其中 L_1 与 L_2 起点. 终点相同

P, Q 在 L_1 与 L_2 所围成区域 D' 上偏导连续.

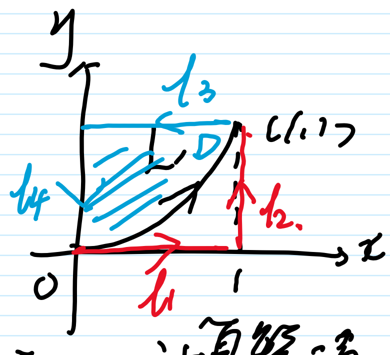
(iii) $\oint_L Pdx+Qdy = 0$.

(iv). $du = Pdx+Qdy$ $u(x,y)$ 为一个原函数

且 $u(s,t) = \int_{(x_0,y_0)}^{(s,t)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

例 $I = \int_L (2x\cos y - y^2\cdot\sin x + y)dx + (2y\cos x - x^2\cdot\sin y)dy$. 记 $I_2=$

其中 L: $y=x^2$. 从 $(0,0)\to(1,1)$.



解. (1)法:

$I = \int_0^1 (2x\cos x^2 - x^4\cdot\sin x)\cdot 1 \quad)dx$

$+ \int_0^1 (2x^2\cos x - x^2\sin x^2)\cdot 2x\, dx = \cdots$ 计算繁琐.

$\int_0 \ldots$

方法：$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\sin y$

与路径无关

$\| $

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x$. $+1.$ $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$

$I = \int_{L_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{L_2} P\,dx + Q\,dy$. $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1$.

格林公式.

$= \int_0^1 P(x,0)\,dx + \int_0^1 Q(1,y)\,dy$

$= \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 (2y\cdot\cos 1 - 1^2\cdot\sin y)\,dy$

$= 1^2 - 0^2 + \cos 1\cdot(1^2 - 0^2) + \cos 1 - \cos 0 = \cdots$

构造封闭曲线 $L' = L + L_3 + L_4$. 正向

由格林公式 $\oint_{L'} P\,dx + Q\,dy = +\iint_D (-1)\,dx\,dy = -S_D$.

$\|$

$I + \underset{\sim}{I_{L_1}} + \underset{\sim}{I_{L_2}}$.

例：求一个原函数 $u(x,y)$.

使得 $du = \underbrace{(2x\cos y - y^2\sin x)}_{P}dx + (\underbrace{2y\cos x - x^2\sin y}_{Q})dy$

方法：偏积分法

解：$P = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$

$u(x,y) = \int (2x\cdot\cos y - y^2\sin x)\,dx$

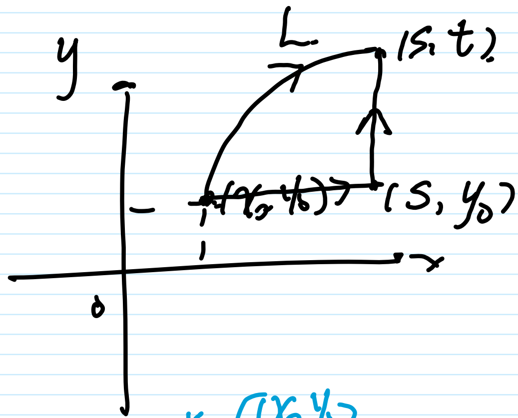
$= x^2\cos y + y^2\cos x + \boxed{C(y)}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2\sin y + 2y\cos x + c'(y) = 2y\cos x - x^2\sin y$$

$$c'(y) = 0. \Rightarrow c(y) = C.$$

综上. $u(x,y) = x^2\cos y + y^2\cos x + C.$

二法: 线积分法.



$$u(s,t) = \int_{(x_0,y_0)}^{(s,t)} p\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_{x_0}^{s} p(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{t} Q(s, y)\,dy$$

差 $\underbrace{\int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} p\,dx + Q\,dy}_{常数}$

$$u(s,t) = \int_{(0,0)}^{(s,t)} p\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_0^s p(x, 0)\,dx + \int_0^t Q(s,y)\,dy$$

$$= \int_0^s 2x\,dx + \int_0^t (2y\cos s - s^2\sin y)\,dy$$

$$= s^2 + \cos s\,(t^2 - 0^2) + s^2(\cos t - \cos 0)$$

$$= t^2\cos s + s^2\cos t$$

$$u(x,y) = x^2\cos y + y^2\cos x$$

例. $I = \int_L p\,dx + Q\,dy$ $\quad P, Q$ 同上.

$$=\int_A^B Pdx+Qdy.$$

L_1: $(1,1)\to(2,2)$.　　$I_{L_1}=u(2,2)-u(1,1)$

L_2: $(1,1)\to(3,-4)$　　$I_{L_2}=u(3,-4)-u(1,1)$.

定理: $du=Pdx+Qdy$

$$\Rightarrow \int_L Pdx+Qdy=\underbrace{\int_A^B Pdx+Qdy=u(B)-u(A)}.$$

例. $I=\int_L Pdx+Qdy$, P, Q带参数与路径无关

① 求参数，原函数. ② L: $(x_1,y_1)\to(x_2,y_2)$. 计算I.

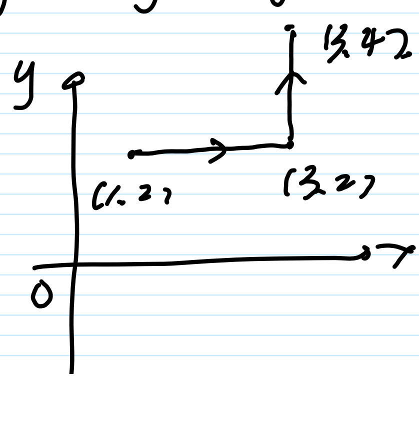
解: $du=Pdx+Qdy$　求P、Q中的参数

$P=\frac{\partial u}{\partial x}$　$Q=\frac{\partial u}{\partial y}$　$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}}$.　$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}}$

$\Downarrow$

参数

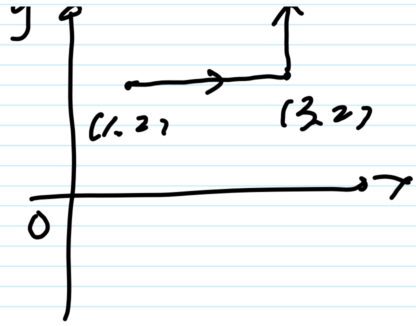
例. $I=\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$



解: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

①法: $(1,2)\to(3,2)\to(3,4)$

解：$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.



①法：$C(1,2) \to (3,2) \to (3,4)$

$$I = \int_1^3 (6x\cdot 2^2 - 2^3)\,dx + \int_2^4 (6\cdot 3^2\cdot y - 3\cdot 3\cdot y^2)\,dy$$

②法：$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy^2 - y^3$.

$$u = 3x^2y^2 - xy^3 + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2 + C'(y) = 6x^2y - 3xy^2$$

得 $C'(y) = 0$

故取 $C(y) = 0$. 则一个原函数 $u = 3x^2y^2 - xy^3$

$$I = u(3,4) - u(1,2)$$

例.

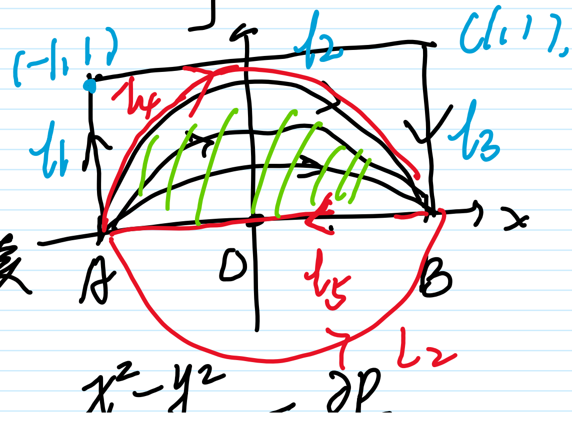
$$I = \int_L \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$\begin{array}{ccc} -\pi & & \pi \\ \| & & \| \\ I_{L_2} & \cancel{=} & I \end{array}$$

L_2 与 L 所包围区域含 $(0,0)$. P, Q 无定义.

L_2: $A \to B$ 下半平面

其中 L: $A(-1,0) \to B(1,0)$ 任意一条不过原点的曲线(上半平面)



解：$P = \frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$

P, Q 在 $(0,0)$ 无定义. 不满足 偏导连续

$(x^2+y^2) - x\cdot 2x \quad x^2-y^2 \quad \partial P$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

法二: $L = l_1 + l_2 + l_3$、有向折线

$$I = \int_0^1 -\frac{(-1)}{(-1)^2+y^2}\,dy + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1^2}\,dx + \int_1^0 -\frac{1}{1^2+y^2}\,dy$$

$= \cdots$

L_3: $y = -\sqrt{1-x^2}$

法三: $L = l_4$. l_4: $y = \sqrt{1-x^2}$, $x: -1 \to 1$. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $t: \pi \to 0$　　$t: \pi \to 2\pi$

$$I = \int_{l_4} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{l_4} \underbrace{y}_{P'}\,dx \underbrace{-x}_{Q'}\,dy.$$

$\frac{\partial Q'}{\partial x} = -1$　$\frac{\partial P'}{\partial y} = 1$

(i) ☆ 利用参数方式

$$= \int_{\pi}^{0} (-\sin t\cdot \sin t - \cos t\cdot\cos t)\,dt = \pi.$$

$\frac{\partial Q'}{\partial x} \neq \frac{\partial P'}{\partial y}$ 格林公式.

(ii) 格林公式:

构造一条封闭曲线 $L' = l_4 + l_5$. 负向

$$\oint_{L'} P'dx + Q'dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y}\right)dxdy = 2\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 = \pi.$$

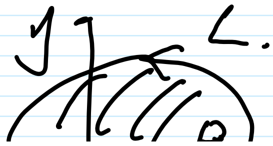
$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$I + \int_{l_5} P'dx + Q'dy = I + \int_1^{-1} 0\,dx = I$$

例. $$I = \oint_L \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

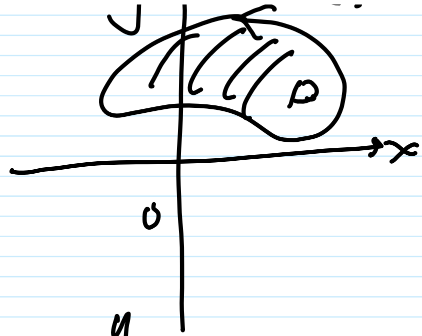
L: 条不过原点的封闭曲线. 方向: 逆时针.

解: (1)、L 不包含原点



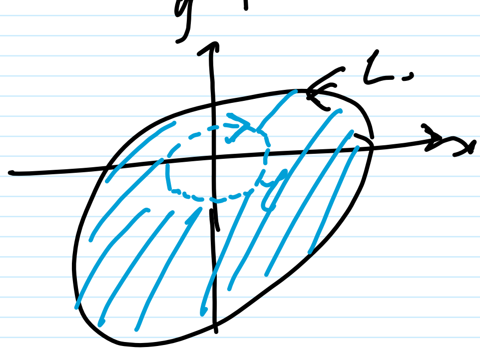
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow I = 0.$$

解: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow I=0.$



P, Q在D偏导连续. 故 $I=0$

② L包含原点



P, Q在D上有无定义点、不满足偏导连续.

特殊情况: $L:\ x^2+y^2=R^2$. 逆时针

$$I=\frac{1}{R^2}\oint_L y\,dx-x\,dy$$

$$=\frac{1}{R^2}\iint_D(-1-1)\,dxdy=-\frac{2}{R^2}\iint_D 1\,dxdy$$

$$=-\frac{2}{R^2}\cdot\pi R^2=-2\pi.$$

构造封闭曲线 l: 顺时针

L与l构造一个复连通区域D', P, Q在D'偏导连续.

L, l: 正向

$$\oint_{L+l}P\,dx+Q\,dy=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

$$\|$$

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+\oint_l P\,dx+Q\,dy=0$$

$$\oint_L Pdx+Qdy + \oint_{l} Pdx+Qdy = 0$$

前提: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \oint_L Pdx+Qdy = -\oint_l Pdx+Qdy \\ &= \oint_{l^-} Pdx+Qdy \end{aligned}}$$

L 与 l^- 均为逆时针.

不妨考虑 l: $x^2+y^2=\varepsilon^2$ ($\varepsilon>0$ 足够小) 逆时针.

结论. $I=-2\pi$.

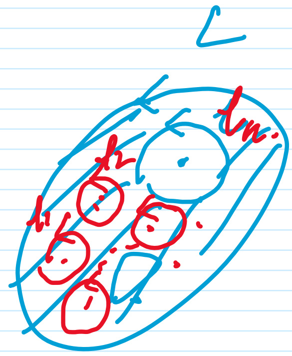
定理: ① L、l 方向同为逆或顺时针

推广: L 外 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 内.

② L、l 围成区域 D 复连通.

P、Q 在 D 上偏导连续

③ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$



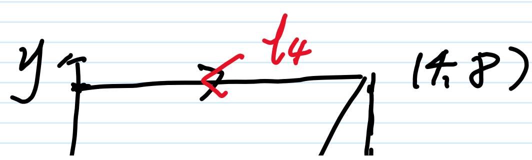
$$\Rightarrow \oint_L Pdx+Qdy = \oint_l Pdx+Qdy$$

$$\oint_L Pdx+Qdy = \sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} Pdx+Qdy$$

例 $I=\int_L \frac{-y\,dx+(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$.

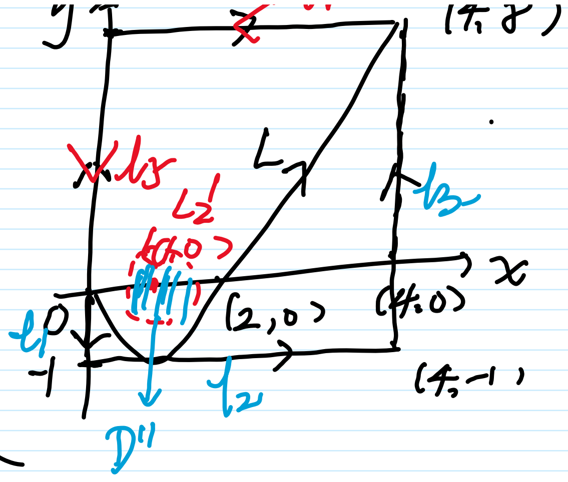
其中 L: $y=x^2-2x$. 从 $(0,0)\to(4,8)$.

解:



解：

$P=\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$ $\quad Q=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$



在(1,0)无定义

①法：$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ ⇒ 与路径无关

$$I=\int_{l_1+l_2+l_3}Pdx+Qdy$$

$$=\int_0^{-1}\frac{0-1}{(0-1)^2+y^2}dy+\int_0^4\frac{-(-1)}{(x-1)^2+(-1)^2}dx+\int_{-1}^{8}\frac{4-1}{(4-1)^2+y^2}dy$$

$=\cdots$

②法：构造一封闭曲线 $L_1'=L+l_4+l_5$ 方向：逆时针

构造另一封闭曲线 L_2'：$(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon$足够小）方向：逆时针

L_1' 与 L_2' 构造一个复连通区域 D'，P,Q在D'偏导连续

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

故 $\oint_{L_1'}Pdx+Qdy=\oint_{L_2'}Pdx+Qdy$ 参数形式

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_2'}\underbrace{-y}_{P'}dx+\underbrace{(x-1)}_{Q'}dy$$

$\frac{\partial Q'}{\partial x}=1$

$\frac{\partial P'}{\partial y}=-1$

格林公式：L_2'，D''

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D''}(1-(-1))dxdy$$

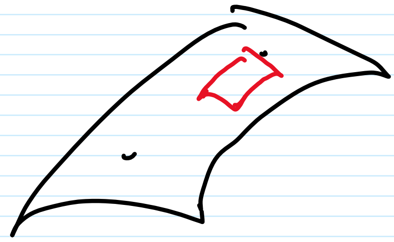
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot\pi\varepsilon^2=2\pi.$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 2 \cdot \pi\varepsilon^2 = 2\pi.$$

$$\oint_{L} P\,dx + Q\,dy = I + \underbrace{\int_{L_4} P\,dx + Q\,dy} + \underbrace{\int_{L_5} P\,dx + Q\,dy}.$$

第四节 对面积的曲面积分

引例：曲面形状物体的质量，$\rho = f(x,y,z)$



$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta S_i$$

定义：$f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界。

① 任意分割 ② 任意取点

若 $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 存在，则称为

$f(x,y,z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分（I型）

记为 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\, \underline{dS}$ 曲面面积元素

当 $f(x,y,z)=1$ 时 $\iint_{\Sigma} 1\, dS = S$（曲面面积）

性质：① 积分中值定理

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = f(\xi,\eta,\zeta) \cdot S$$

② 对称性 —— 类似于三重积分

Σ

③ 对称性 —— 类似于三重积分

(i) Σ 关于 xoy 面对称 其中 Σ_1: 上半部分

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} f\,dS = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_1} f\,dS, & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0, & -f(x,y,z)=f(x,y,-z). \end{cases}$$

(ii) Σ 具有轮换对称性

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\Sigma} f(y,z,x)\,dS = \iint_{\Sigma} f(z,x,y)\,dS$$

例. Σ: $x^2+y^2+z^2=R^2$. 具有轮换对称性

$$\iint_{\Sigma} x^2\,dS = \iint_{\Sigma} y^2\,dS = \iint_{\Sigma} z^2\,dS$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS = \frac{R^2}{3}\iint_{\Sigma} 1\,dS = \frac{R^2}{3}\cdot 4\pi R^2.$$

$$\iint_{\Sigma}(ax+by+cz)^2\,dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,dS$$

$$\xlongequal{\text{轮换对称性}} \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}R^2\cdot 4\pi R^2.$$

例. $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv \qquad \Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2.$

$= \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv \ \cancel{=} \ \frac{1}{3}R^2\iiint\limits_{\Omega} 1\,dv = \frac{R^2}{3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$

$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{R} r^2 \quad r^2 dr = \cdots$

I型曲面积分的计算 ——→ 二重积分

曲面 $z=z(x,y)$. $\quad (x,y)\in D_{xy}$.

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

故 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$

$= \iint\limits_{D_{xy}} f(x,\ y,\ z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ dxdy$