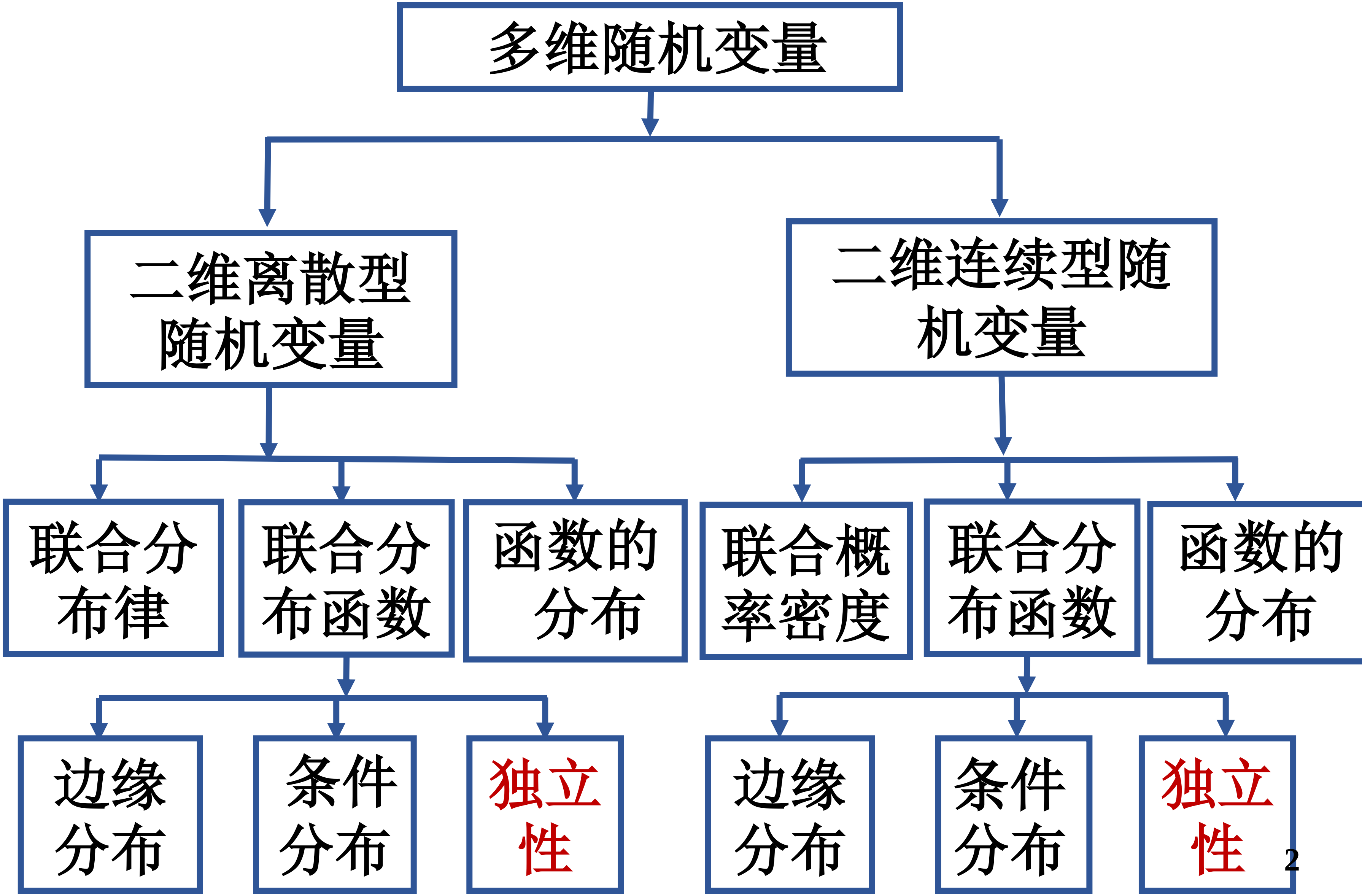
第三章
多维随机变量及其分布

王笑尘

北京邮电大学网络空间安全学院

wxiaochen@bupt.edu.cn

第四节 相互独立的随机变量



两个随机变量独立概念的引出

两个事件A, B独立的定义是：若$P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A, B相互独立 。

问：

若 X, Y 是两个随机变量，它们相互独立的条件？

一. 随机变量相互独立的定义

设 (X,Y) 的联合分布函数及边缘分布函数为$F(x,y)$及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$。若对任意的 x, y 都有:

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$$

即 $$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则 称 随机变量 X和 Y是相互独立的。

二. 当 (X,Y) 为离散型随机变量

X和Y相互独立 ⟺ 对于 (X,Y) 的所有可能的取值 (x_i, y_j) 有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

例1. 设 X,Y 相互独立，它们的分布律分别为:

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

求: (X,Y) 的联合分布律.

解: $\because \quad X, Y$ 相互独立

$$\therefore \quad \boxed{P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)}$$

从而:
$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1)$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

依次可得 (X,Y) 的联合分布律为:

X \ Y	1	2	3
0	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

从此例可得出:

- 对离散型随机变量而言，已知联合分布律可求出其相应的边缘分布律，但反之则不然。
- 而一旦已知 X,Y 相互独立条件后，则可由边缘分布律直接求得其联合分布律。

三. 当 (X,Y) 为连续型随机变量

X 和 Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

例2. 设 (X,Y) 服从正态分布，其边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$-\infty<x<+\infty \qquad -\infty<y<+\infty$$

问: X 和 Y 相互独立的充分必要条件是什么?

解: $\because \quad f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_1)^2}{2\sigma_2^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

二维随机变量概率密度为：

$$f(x,y)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

对于 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$

要 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$

则比较可知其充分必要条件是：$\rho=0$

例3. 设随机变量 (X,Y) 在矩形域: $a \le x \le b\,,\, c \le y \le d$ 内服从均匀分布

求: (1) 联合概率密度及边缘概率密度

(2) 检验 X 和 Y 是否相互独立

(3) (X,Y) 的联合分布函数

(4) $P(X \le b, Y \le \dfrac{c+d}{2})$

解: (1). 由题意在 $a \le x \le b, c \le y \le d$ 区域内

(X,Y) 服从均匀分布,

所以，其联合概率密度为:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a \le x \le b, c \le y \le d \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在矩形 $a \le x \le b, c \le y \le d$ 上，边缘概率密度为:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{dy}{(b-a)(d-c)} = \frac{1}{b-a}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{dx}{(b-a)(d-c)} = \frac{1}{d-c}$$

在其它域上: $f_X(x)=0\,,\ f_Y(y)=0$

所以得其边缘概率密度分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 与 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c} & c\le y\le d\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

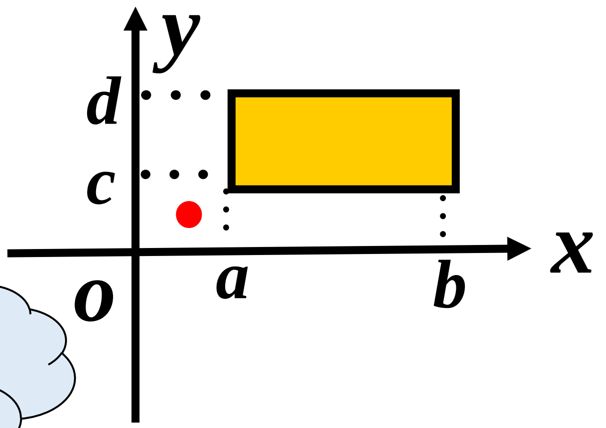
(2).

$$\because\quad f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\cdot\dfrac{1}{d-c} & a\le x\le b,\ c\le y\le d\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=f(x,y)$$

$\therefore$ X 和 Y 相互独立。

(3). 当 $x<a$ 或 $y<c$ 时：

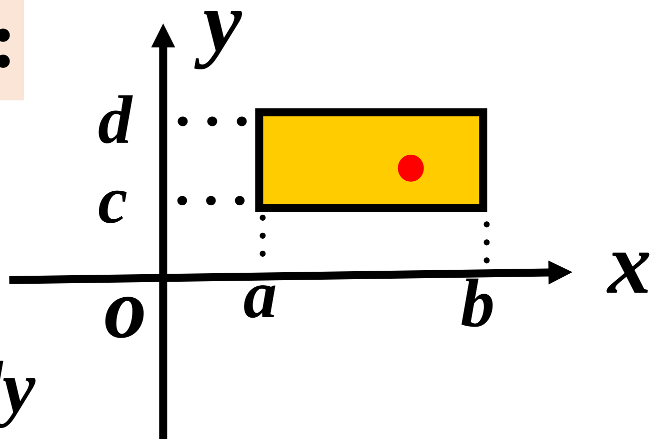


$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} o\,dxdy=0$$

视它为不可能事件

当 $a\le x\le b$ 且 $c\le y\le d$ 时：



$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy$$

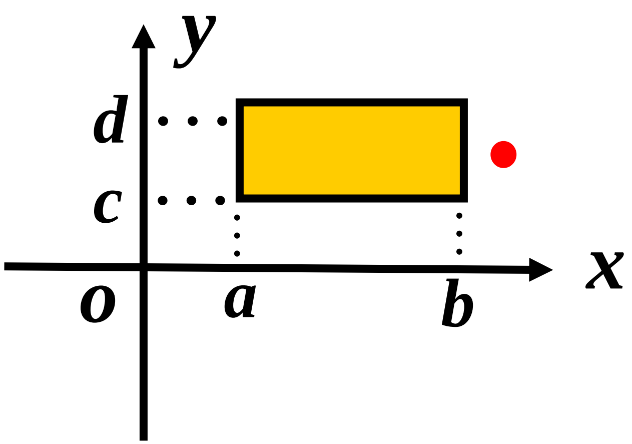
$$=\int_{c}^{y}\int_{a}^{x}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\,dxdy$$

$$=\frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}$$

当 $x>b, c\le y\le d$ 时：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy$$

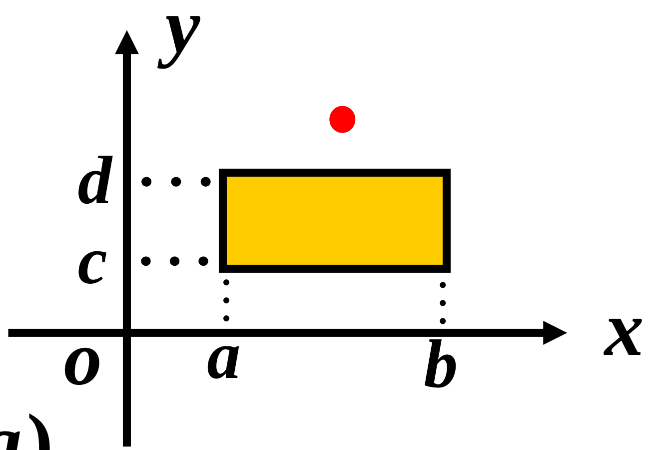
$$=\int_{c}^{y}\int_{a}^{b}\frac{1}{(b-a)(d-c)}dxdy=\frac{(y-c)}{(d-c)}$$



当 $y>d, a\le x\le b$ 时：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy$$

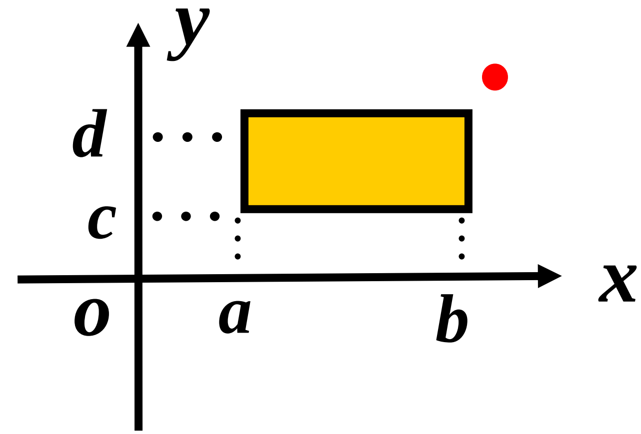
$$=\int_{c}^{d}\int_{a}^{x}\frac{1}{(b-a)(d-c)}dxdy=\frac{(x-a)}{(b-a)}$$



当 $x>b\,,y>d$ 时：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{c}^{d}\int_{a}^{b}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\,dxdy \quad =1$$



故(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x<a\text{或}y<c \\ \dfrac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)} & a\le x\le b,c\le y\le d \\ \dfrac{y-c}{d-c} & x>b,c\le y\le d \\ \dfrac{x-a}{b-a} & y>d,a\le x\le b \\ 1 & x>b\text{或}y>d \end{cases}$$

(4). $$\boxed{P(X \le b, Y \le \frac{c+d}{2}) = F(b, \frac{c+d}{2})}$$

$$= \frac{(b-a)(\frac{c+d}{2} - c)}{(b-a)(d-c)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

知识回顾

二维离散型随机变量

联合分布函数

条件分布

在$\{Y=y_j\}$条件下，随机变量X的条件分布律为（=联合分布/边缘分布）：

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

2. 性质：

$1^0.$ $P(X=x_i \mid Y=y_j)\geq 0$

$2^0.$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(X=x_i \mid Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{1}{p_{\cdot j}}\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\frac{1}{p_{\cdot j}}\cdot p_{\cdot j}=1$

$3^0.$ $\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(Y=y_j \mid X=x_i)=1$

知识回顾

二维连续型随机变量

联合分布函数

条件分布

在条件 $Y=y$ 下，X 的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$$

对于$f_Y(y)>0$，在条件$Y=y$下的X的条件概率密度：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

结论：正态分布的边缘分布及条件分布仍服从正态分布。

一. 随机变量相互独立的定义

设 (X,Y) 的联合分布函数及边缘分布函数为$F(x,y)$及$F_X(x)$，$F_Y(y)$。若对任意的 x, y 都有:

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$$

即 $$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则 称 随机变量 X和 Y是相互独立的。

二. 当 (X,Y) 为离散型随机变量

X和Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ 对于 (X,Y) 的所有可能的取值 (x_i, y_j) 有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

三. 当 (X,Y) 为连续型随机变量

X 和 Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

例4. 甲乙两人约定中午12时30分在某地会面。

设甲在时间12:15到12:45之间到达某地是均匀分布；

乙独立地到达，而且到达时间在12:00到13:00之间也是均匀分布。

试求： (1) 先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率。

(2) 甲先到的概率。

解: 设 X：甲到达时刻， Y：乙到达时刻

若以12时为起点，以分为单位，依题意：

$X \sim U(15, 45)$, $Y \sim U(0, 60)$ 且有：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 15<x<45\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0<x<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1800}, & 15<x<45, 0<y<60\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

所求为： $P(|X-Y|\le 5)$ 及 $P(X<Y)$

先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率

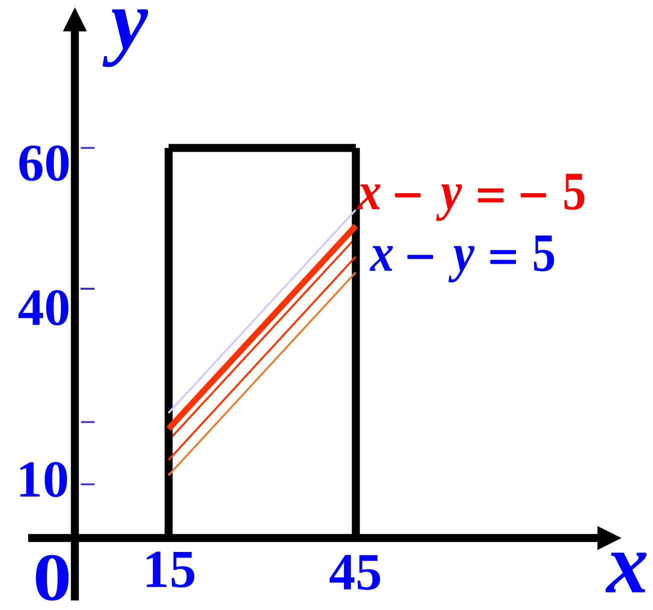
甲先到的概率

解: $P(|X-Y|\le 5)$

$= P(-5\le X-Y\le 5)$

$$=\int_{15}^{45}\left[\int_{x-5}^{x+5}\frac{1}{1800}dy\right]dx$$

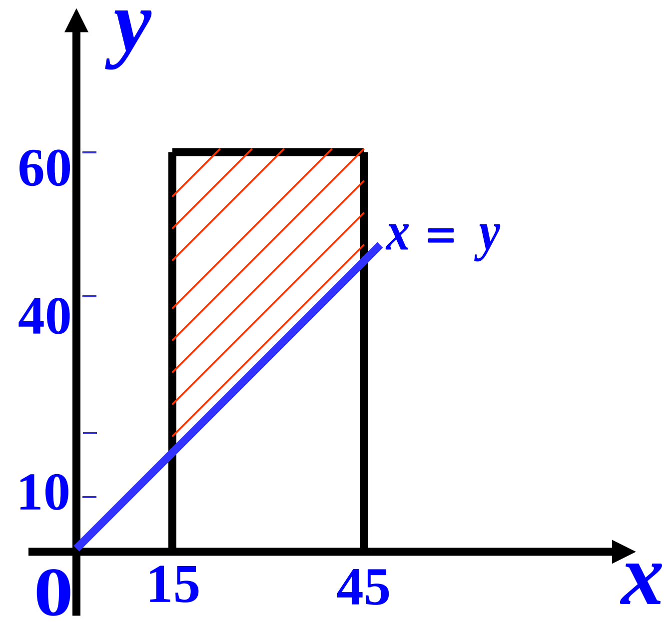
$=1/6$



$P(X<Y)$

$$=\int_{15}^{45}\left[\int_{x}^{60}\frac{1}{1800}dy\right]dx$$

$=1/2$



类似的问题如：

★ 船只停泊问题：

甲、乙两船同日欲靠同一码头，设两船各自独立地到达，并且每艘船在一昼夜间到达是等可能的。若甲船需停泊1小时，乙船需停泊 2小时。而该码头只能停泊一艘船。

试求：其中一艘船不需要等待码头空出的概率。

四. n个随机变量相互独立的概念

关于X_i的边缘分布函数，例
$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \cdots, \infty)$

定义1. 若对所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的。

定义2. 若对所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) \cdot F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中 F_1, F_2, F 依次为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$, $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 和 $(X_1, X_2, \cdots, X_m; Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 的分布函数。则称

$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是相互独立的。

关于独立性的三个结果：

定理1 若连续型随机变量（$X_1, \ldots, X_n$）的概率密度函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 可表示为 n 个函数 $g_1, \ldots, g_n$ 之积，其中 g_i 只依赖于 x_i，即

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \ldots g_n(x_n)$$

则 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，且 X_i 的边缘密度 $f_i(x_i)$ 与 $g_i(x_i)$ 只相差一个常数因子。

定理 2 若 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，而：

$Y_1 = g_1(X_1, \ldots, X_m)$， $Y_2 = g_2(X_{m+1}, \ldots, X_n)$

则 Y_1 与 Y_2 相互独立。

定理3 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立

则 $X_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 和 $Y_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 相互独立。

又若 h, g 是连续函数，则：

$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立。

第五节 两个随机变量的函数分布

- 多维随机变量
  - 二维离散型随机变量
    - 联合分布律
    - 联合分布函数
      - 边缘分布
      - 条件分布
      - 独立性
    - 函数的分布
  - 二维连续型随机变量
    - 联合概率密度
    - 联合分布函数
      - 边缘分布
      - 条件分布
      - 独立性
    - 函数的分布

第五节 两个随机变量的函数分布

研究的问题

- 在一维随机变量中讨论了：已知随机变量 X 及它的分布，如何求其函数 $Y=g(X)$ 的分布。

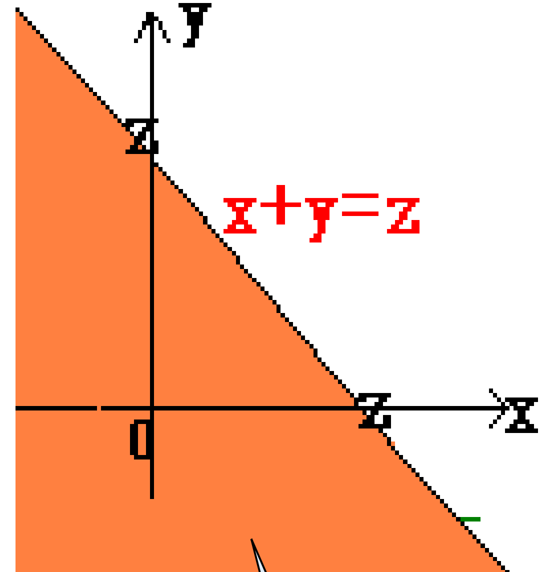
- 在多维随机变量中需讨论：已知随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 及其联合分布，如何求出它们的函数：$Y_i = g_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，$i=1, 2, \ldots, m$的联合分布。

一般，先讨论两个随机变量的函数的分布问题，然后将其推广到多个随机变量的情形。

一. Z=X+Y 的分布(和的分布)

设 (X, Y)的概率密度为 $f(x,y)$。

则 Z= X + Y 的分布函数为:



$$F_Z(z)=P(\boxed{Z\le z})=\iint_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

累次积分

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy$$

只存在一个量，与x无关

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,[\int_{-\infty}^{\boxed{z}} f(x,u-x)\,du]$$

交换积分次序

$$=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\,dx]\,du$$

固定 z 和 x，对内层积分作变量替换 y= u – x。

$x+y\le z$ 是直线 $x+y=z$ 左下方的半平面。

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)dx\right]du$$

对$F_Z(z)$求导, 得 Z=X+Y 的概率密度为:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$

由 X 和 Y 的对称性，$f_Z(z)$又可写为:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

注: 当 X, Y 相互独立时，则由 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

有: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$

或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\,dy$

称为卷积公式

记为: $f_X * f_Y$

$$\therefore \quad f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例1. 设 X 和 Y相互独立的随机变量，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

求： Z = X + Y 的概率密度

解： 利用卷积公式：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-[\boxed{(z-x)}-\mu_2]^2 / 2\sigma_2^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\boxed{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x-\frac{\sigma_2^2\mu_1-\sigma_1^2\mu_2+\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}} dx$$

开方

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

仍服从正态分布

令: $t = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}\left(x - \frac{\sigma_2^2\mu_1-\sigma_1^2\mu_2+\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$

$$dx = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} dt$$

结论:

▲ 若随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则它们的和仍服从正态分布，

即：$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

▲ 推广到 n 个相互独立正态随机变量之和，即：

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad i = 1, 2, 3, \cdots n$，且它们相互独立，则它们的和仍服从正态分布。即有：

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

▲ 更一般的有：有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布。

例2. 设 X, Y相互独立,且服从参数为 $\alpha_1, \beta, \alpha_2, \beta$ 的Γ分布,

且 X, Y 的概率密度分别为:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad (\alpha_1 > 0,\ \beta > 0)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases} \qquad (\alpha_2 > 0,\ \beta > 0)$$

求: Z = X + Y 的分布

解: 当 $z \le 0$ 时， $f_Z(z) = 0$

当 $z > 0$ 时，

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,dx$$

x 从 $0 \to z$

$$= \int_0^z \left(\frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot x^{\alpha_1-1} e^{-\beta x}\right) \cdot \left(\frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \cdot (z-x)^{\alpha_2-1} e^{-\beta(z-x)}\right) dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\Gamma(\alpha_2)} \int_0^z x^{\alpha_1-1} (z-x)^{\alpha_2-1}\,dx$$

令: $x = z \cdot t$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\Gamma(\alpha_2)} \cdot z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1}\,dt$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\Gamma(\alpha_2)} \cdot z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot B(\alpha_1,\alpha_2)$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\Gamma(\alpha_2)} \cdot z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$= \frac{\beta^{(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

Beta 函数定义： $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \quad ,m>0,\ n>0$

且 B 函数与 Γ 函数之间有关系式： $\boxed{B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}}$

从而得:

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\cdot e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} & z>0 \\ 0 & z\le 0\end{cases}\quad(\alpha_1,\alpha_2>0,\ \beta>0)$$

结论（Γ 分布的可加性）

▲ 若 X,Y 相互独立，且服从参数为 α_1,α_2,β 的 Γ分布，则它们的和仍服从参数为 $\alpha_1+\alpha_2,\beta$ 的 Γ分布

▲ 推广：若 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立,且 X_i 服从参数为α_i,β 的Γ分布, 则其和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 服从参数为 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ ,\beta$ 的Γ分布.

例3. 设 $X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim \pi(\lambda_2)$ **(服从泊松分布)，**

且 **X, Y** 相互独立。

求: Z = X + Y 的分布

例3. 设 $X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim \pi(\lambda_2)$ (服从泊松分布),

且 X, Y 相互独立。

求: Z = X + Y 的分布

解: $\because$ X 与 Y 的取值均为: $0, 1, 2, \cdots$

$\therefore$ Z 的取值也为非负的整数 k

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)$$

$$=P(X=0,Y=k)+P(X=1,Y=k-1)$$

$$+\cdots+P(X=k,Y=0)$$

因为X与Y相互独立

$$=P(X=0)P(Y=k)+P(X=1)P(Y=k-1)$$

$$+\cdots+P(X=k)P(Y=0)$$

$$= e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{1!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda_2} + \cdots + \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot[\lambda_2^k + \frac{k}{1!}\lambda_1\lambda_2^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_1^{\,2}\lambda_2^{k-2}\cdots + \lambda_1^k]$$

$$= \frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^k \quad = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

结论: 若 X, Y 服从参数为λ_1, λ_2的泊松分布，

且X, Y 相互独立。则它们的和服从参数为

$(\lambda_1+\lambda_2)$ 泊松分布，即：$Z \sim \pi(\lambda_1+\lambda_2)$

归纳

- 例1 ~ 例3说明：对于相互独立的连续型随机变量或离散型随机变量，如果它们服从正态分布, Γ分布或泊松分布，那么它们的和也仍然服从正态分布，Γ分布或泊松分布，并且参数是单个参数的相加，具有这种性质的随机变量也称其为满足或具有可加性的随机变量。

- 求解例1 ~ 例2过程中知： 在求随机向量(X, Y)的函数 $Z = X+Y$的分布时，关键是运用独立性时的卷积公式，将其转化为(X, Y)在一定范围内取值的积分形式，从而利用已知的分布求出 Z 的分布。

例4. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}$$

求： $Z = X + Y$ 的概率密度

解: 由卷积公式：

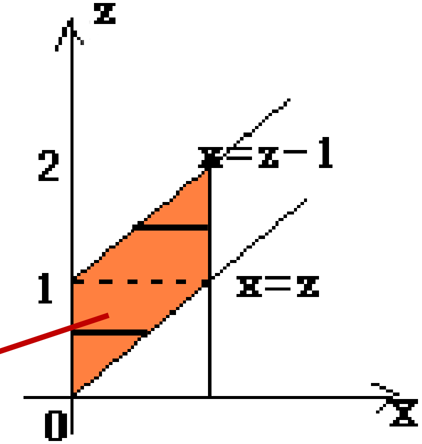
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

为确定积分限，先找出使被积函数不为 0 的区域

由已知：

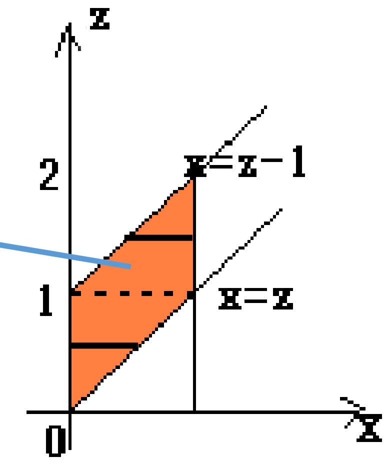
$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}\quad \text{也即}\quad \begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

区域 $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ z-1 \le x \le z \end{cases}$ 如图示:

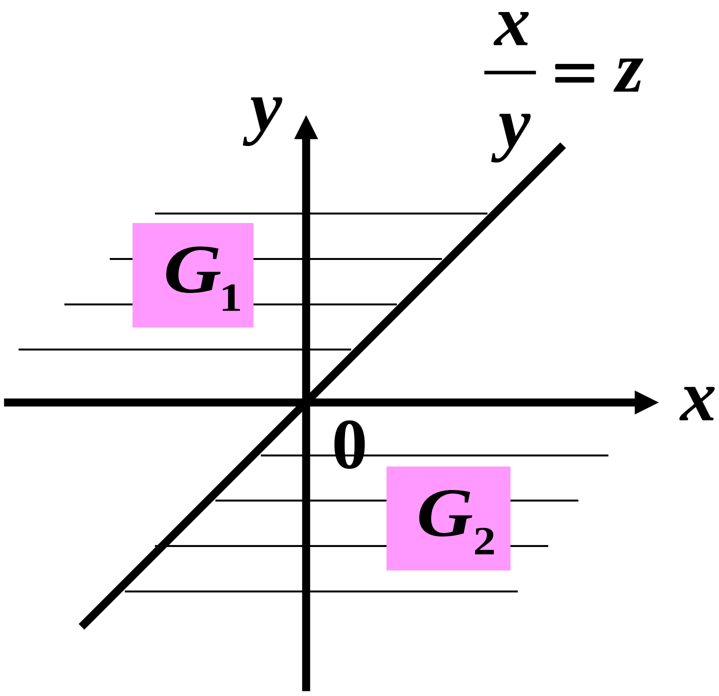


于是得:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z dx = z & 0 \le z < 1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z & 1 \le z \le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



二. $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布 (商的分布)



设 (X, Y) 的概率密度为 f(x, y)

则 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布函数为:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint\limits_{G_1}\ +\iint\limits_{G_2}$$

对于 G_1 :

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{\boxed{yz}} f(x,y)\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{z} y\,f(yu,y)\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\int_0^{+\infty} y\,f(yu,y)\;dy\,du$$

固定 z, y 令:
$u={x}/{y}\quad(y>0)$

对 G_2：令 $u=\dfrac{x}{y}\ (y<0)$ 同样有:

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy = -\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} y\,f(yu,y)\,dydu$$

故有: $F_z(z)=\iint\limits_{G_1}+\iint\limits_{G_2}$

$$=\int_{-\infty}^{z}[\int_{0}^{+\infty} y\,f(yu,y)\,dy-\int_{-\infty}^{0} y\,f(yu,y)\,dy]du$$

对 $F_Z(z)$ 求导得 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 概率密度函数为:

$$f_Z(z)=\int_{0}^{+\infty} y\,f(yz,y)\,dy-\int_{-\infty}^{0} y\,f(yz,y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,dy$$

对 $F_Z(z)$ 求导得 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 概率密度函数为:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,dy$$

注: 当 X, Y 相互独立时，则有:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot f_X(yz)\cdot f_Y(y)\,dy$$

$f_X(x), f_Y(y)$ 为 (X,Y) 关于 X, 关于 Y 的边缘概率密度

类似的，可证明 $Z=XY$ 的概率密度函数为（课下自行证明P81）:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\,dx$$

例5. 设 X, Y 的概率密度分别为:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad f(y)=\begin{cases} 2e^{-2y} & y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

并且 X, Y 相互独立。

求: $Z = X/Y$ 的概率密度函数

解: 因为 X, Y 的取值范围分为大于零与小于等于零两段，所以 Z 的取值范围也分为: $z>0$ 与 $z\le 0$

当 $z\le 0$ 时:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\ f_X(yz)f_Y(y)\,dy\ =0$$

当 $z>0$ 时:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\ f_X(yz)f_Y(y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}(-y)\cdot 0\,dy\ +\int_{0}^{+\infty}y\cdot e^{-yz}\cdot 2e^{-2y}\,dy$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}ye^{-y(2+z)}dy\ =\frac{2}{(2+z)^2}$$

所以得：

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

三、$M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

最大值和最小值分布

设X，Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$

求：$M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布函数。

解： 1. $M=\max(X,Y)$ 的分布

因为： $\max(X,Y)\le m \Leftrightarrow X\le m$ 和 $Y\le m$

所以：$$F_{\max}(m) = P(M \le m) = P(X \le m, Y \le m)$$

由独立性

$$= P(X \le m) \cdot P(Y \le m)$$

$$= F_X(m) \cdot F_Y(m)$$

从而得：$$F_{\max}(m) = F_X(m) \cdot F_Y(m)$$

2. N = min (X, Y) 分布

因为：$$F_{\min}(n) = P(N \le n) = 1 - P(N > n)$$

$$= 1 - P(X > n, Y > n)$$

$$= 1 - [1 - P(X \le n)] \cdot [1 - P(Y \le n)]$$

$$= 1 - [1 - F_X(n)] \cdot [1 - F_Y(n)]$$

所以得：$$F_{\min}(n) = 1 - [1 - F_X(n)] \cdot [1 - F_Y(n)]$$

注: ▲ 由 $F_{\max}(m)$ 与 $F_{\min}(n)$ 通过对其求导得相应的概率密度函数 $f_{\max}(m)$ 与 $f_{\min}(n)$.

▲ 推广: $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为:

$$F_{X_i}(x_i),\ i=1,2\cdots n,$$

则：$M=\max(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 与 $N=\min(X_1,X_2\cdots X_n)$ 的分布函数分别为:

$$F_{\max}(m)=F_{X_1}(m)\cdot F_{X_2}(m)\cdots F_{X_n}(m)$$

$$F_{\min}(n)=1-[1-F_{X_1}(n)]\cdot[1-F_{X_2}(n)]\cdots[1-F_{X_n}(n)]$$

▲ 特别，当 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 F(X) 时（即独立同分布），则有：

$$F_{\max}(m) = [F(m)]^n, \quad F_{\min}(n) = 1 - [1 - F(n)]^n$$

例6. 设随机变量X_1，X_2相互独立，并且有相同的几何分布，即 $P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1}$， k=1, 2, … (i =1, 2)

求：$Y = \max(X_1, X_2)$ 的分布

解：解法一

$P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1}$， $k=1, 2, \ldots$ $(i=1, 2)$

因为：$P(Y = n) = P(\max(X_1, X_2) = n)$

$= P(X_1 = n, X_2 \le n) + P(\boxed{X_1 < n}, X_2 = n)$

记:$1 - p = q$

$$= pq^{n-1}\sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} + pq^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}$$

$$= p^2q^{n-1}\frac{1-q^n}{1-q} + p^2q^{n-1}\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

$$= pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1})$$

$n = 1,2,3, \ldots$

解法二

因为： $P(Y=n)=P(Y\le n)-P(Y\le n-1)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{而：}\ P(Y=n)=P(Y\le n)-P(Y\le n-1)\\&=P(\max(X_1,X_2)\le n)-P(\max(X_1,X_2)\le n-1)\\&=P(X_1\le n,\ X_2\le n)-P(X_1\le n-1,\ X_2\le n-1)\end{aligned}}$$

$$=[\sum_{k=1}^{n}pq^{k-1}]^2-[\sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}]^2$$

$$=p^2[\frac{1-q^n}{1-q}]^2-p^2[\frac{1-q^{n-1}}{1-q}]^2$$

$$=(1-q^n)^2-(1-q^{n-1})^2$$

$$=pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1})\qquad n=1,2,\ldots$$

第三章作业（教材第五版）：

P86：3、5、6
P87：9、11、13
P88：14、15、18、19、20
P89：21、22、26
P90：29、34、35、36

证明：$Z = XY$的概率密度函数形式（P81公式（5.8））。

注：作业不得抄袭；写上姓名、班级、学号和页码（如1/5），10月27日前提交至教学云平台。