第三章
多维随机变量及其分布

王笑尘

北京邮电大学网络空间安全学院

wxiaochen@bupt.edu.cn

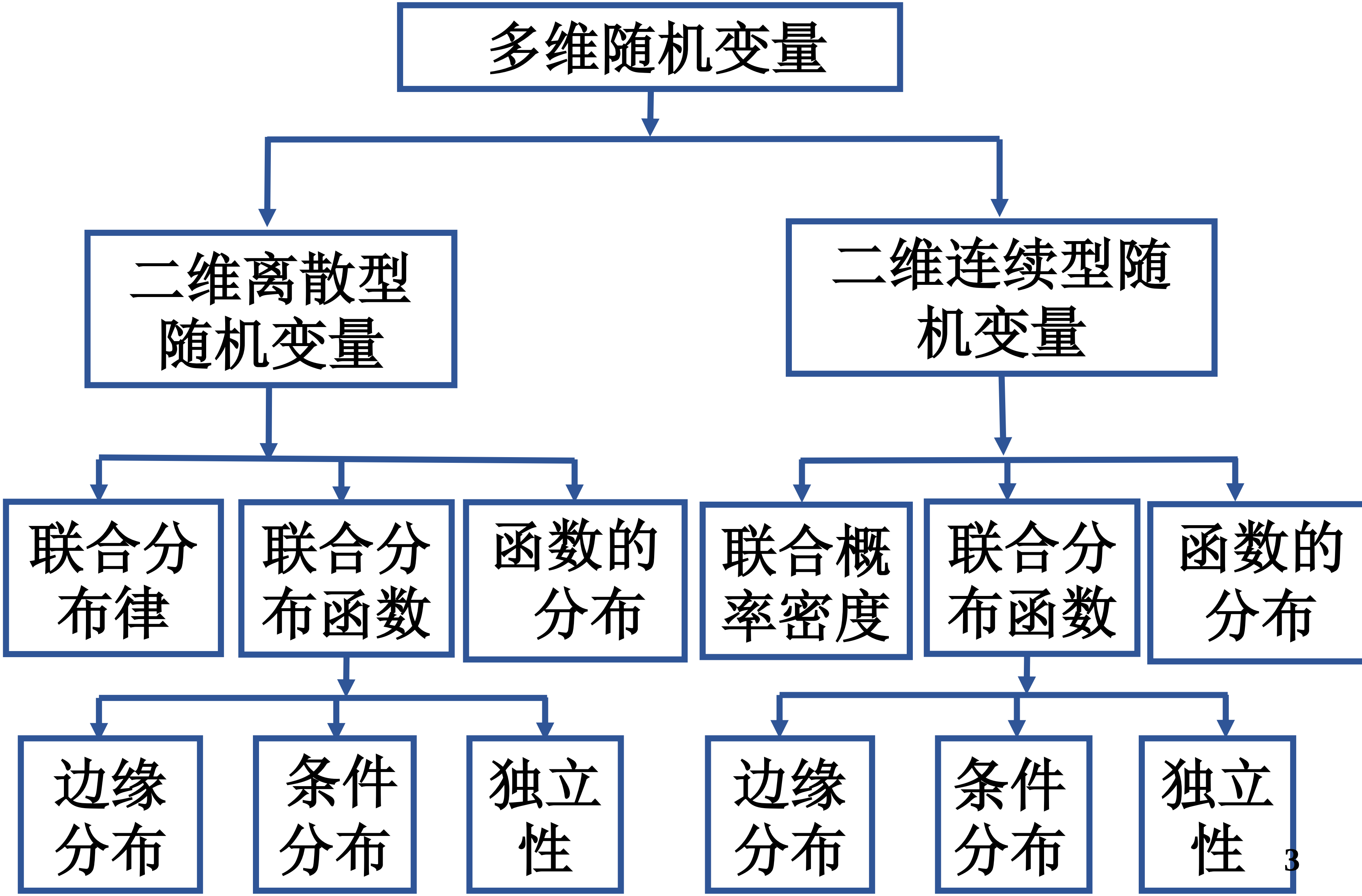
第三章 多维随机变量及其分布

1.一维随机变量和分布函数的概念
2.一维离散型随机变量及其分布律
3.一维连续型随机变量及其概率密度
4. 随机变量函数的分布

第二章中讨论的问题

本章将介绍多维随机变量，即某些随机试验的结果需要同时用两个或两个以上的随机变量来描述的情况。

第三章 知识结构图


多维随机变量
二维离散型随机变量
二维连续型随机变量
联合分布律
联合分布函数
函数的分布
联合概率密度
联合分布函数
函数的分布
边缘分布
条件分布
独立性
边缘分布
条件分布
独立性

第一节 二维随机变量

- 多维随机变量
  - 二维离散型随机变量
    - 联合分布律
    - 联合分布函数
      - 边缘分布
      - 条件分布
      - 独立性
    - 函数的分布
  - 二维连续型随机变量
    - 联合概率密度
    - 联合分布函数
      - 边缘分布
      - 条件分布
      - 独立性
    - 函数的分布

第一节 二维随机变量

一. 二维随机变量及分布函数的概念

1. 定义 设 $S=\{e\}$ 是随机试验 E 的样本空间，

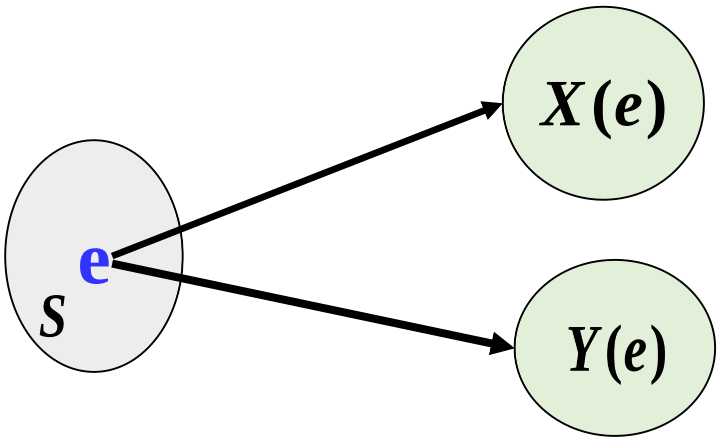
$X=X(e)$, $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，

由它们构成的一个向量 (X,Y) 称为二维随机变量或二维随机向量。

注：▲ X,Y 均要求定义在同一个样本空间S上。

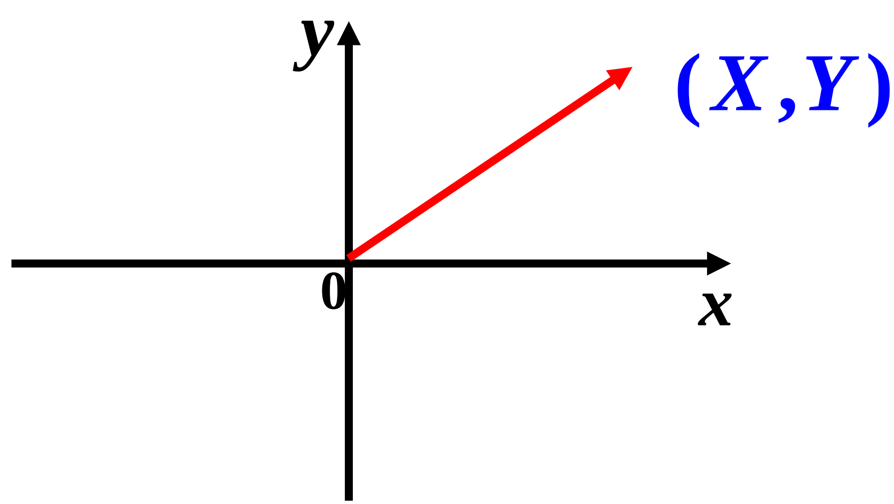
▲ 向量 (X,Y) 的性质不仅与 X 及 Y 有关，而且还依赖于这两个随机变量的相互关系。

▲ (X,Y) 的几何解释:



定义在同一个样本空间。

或:



(X,Y) ⟷ 平面上的一个随机点(随机向量)。

与一维情况类似，借助“分布函数”来研究二维随机变量。

定义2 (二维随机变量的分布函数) 设 (X,Y) 是二维随机变量，对于任意的实数 x, y， 二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=}P(X\le x,Y\le y)$$

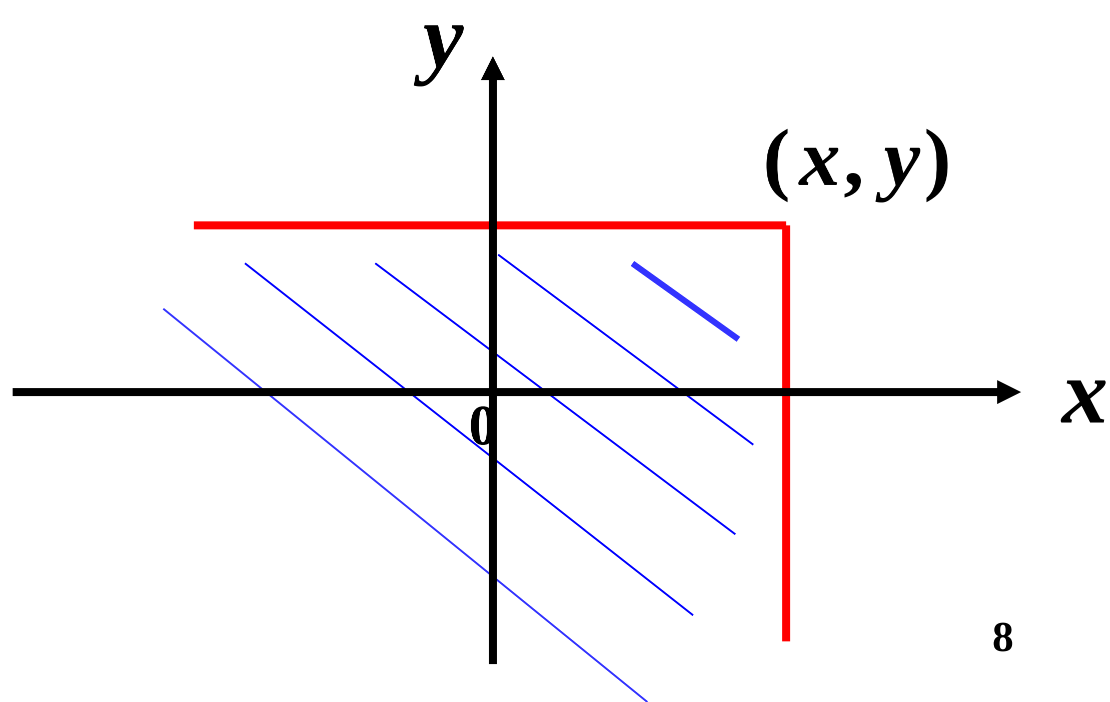
称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数，或称为随机变量X和Y的联合分布函数。

▲ (X,Y)的联合分布函数的几何意义:

$\because \quad F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$

$\therefore$ 若将 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标

则 $F(x,y)$ 在 (x,y) 处的函数值=随机点 (X,Y) 落在以 (x,y) 为顶点，位于该点左下方的无穷矩形内的概率。



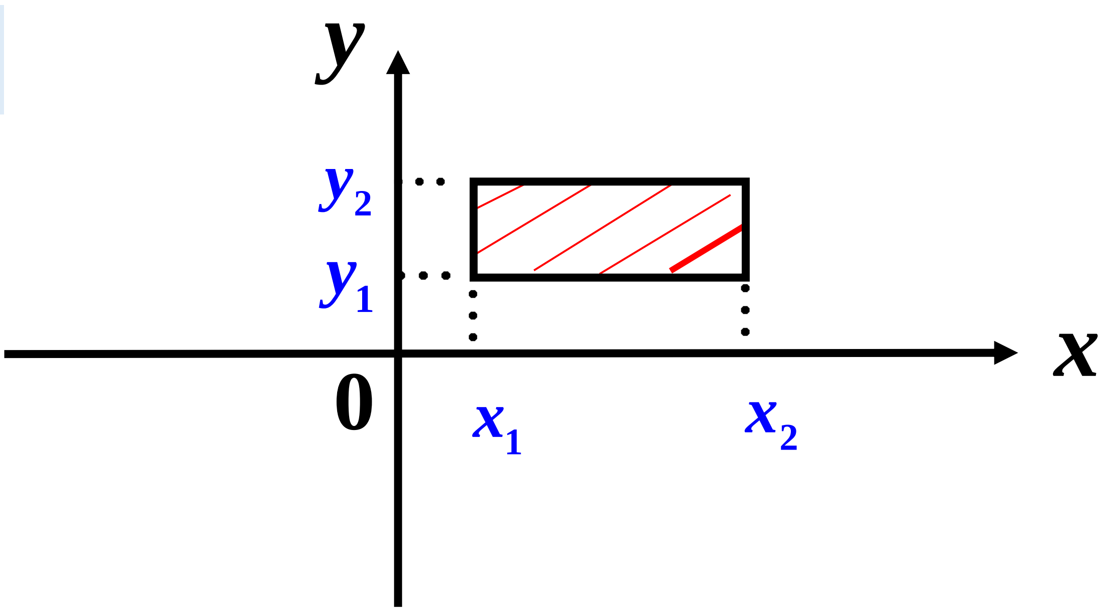
▲ (X,Y) 落在矩形区域: $x_1 < x \le x_2$, $y_1 < y \le y_2$ 的概率为:

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$

$$= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - [F(x_1,y_2) - F(x_1,y_1)]$$

$$= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1)$$

如图:



2. 二维随机变量分布函数 F(x,y) 的性质

性质1　F(x,y) 分别对 x 和 y 单调非减, 即:

当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$　对固定的y, 对x是非减

当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$　对固定的x, 对y是非减

性质2　F(x,y)对每个变量x 或 y是右连续的，即:

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y)$$

$$\lim_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0)$$

性质3　$0 \le F(x, y) \le 1$　且：

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0$$

随机点落在这三种情形所对应的矩形内是不可能事件，故概率趋向于0

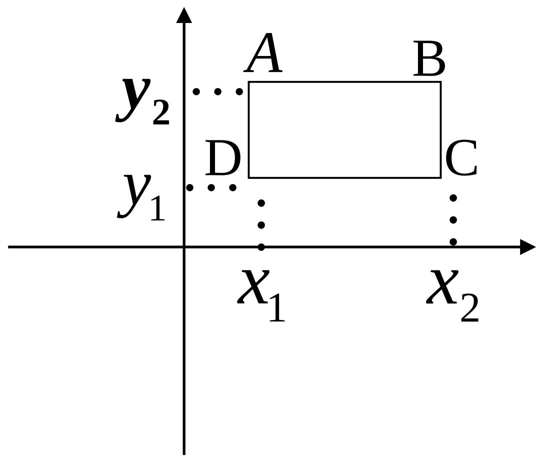
$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$$

随机点落在这种情况所对应的矩形内（即，全平面）是必然事件，故概率趋于1

性质4 当 $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ 时，有：

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

说明：



不等式左边恰好是（X,Y）落在矩形ABCD内的概率，而概率具有非负性，故得此不等式。

注：

- 性质1～性质3同一维随机变量分布函数的性质。
- 若性质1～性质3均满足，但性质4不满足，则不称之为联合分布函数。

比如：

$$F(x,y)=\begin{cases}1 & x+y\geq 0\\ 0 & x+y<0\end{cases}$$

对这分布函数来验证第4条性质。

现找 4 个点如下：

$$(x_2,y_2)=(1,\ 1);\qquad (x_1,y_2)=(-1,1)$$

$$(x_2,y_1)=(1,-1);\qquad (x_1,y_1)=(-1,-1)$$

$$F(1,1)-F(-1,1)-F(1,-1)+F(-1,-1)$$

$$=1-1-1+0=-1<0$$

即第4条性质不满足

这说明 $F(x,y)$不是二维随机变量的分布函数，仅仅是一个二元函数。

二. 二维离散型随机变量及其分布

1. 二维离散型随机变量的定义

如果随机变量X,Y的取值(x,y)只能是有限对或可列无限多对，则称(X,Y)为二维离散型随机变量。

2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量(X,Y)的所有可能取值为

$(x_i, y_j), i, j = 1,2\cdots\cdots$ 则：其相应的概率

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots\cdots$$

为二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布或分布律，

或称为随机变量X和Y的联合分布律。

注: ▲ 同一维离散型随机变量类似，一般可用下列表格形式表示:

X \ Y	y_0	y_1	$\cdots\cdots y_j \cdots\cdots$
x_0	p_{00}	p_{01}	$\cdots\cdots p_{0j} \cdots\cdots$
x_1	p_{10}	p_{11}	$\cdots\cdots p_{1j} \cdots\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i0}	p_{i1}	$\cdots\cdots p_{ij} \cdots\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

▲ (同一维情形）二维离散型随机变量的联合分布律具有两条性质

$$\begin{cases} (1) \quad p_{ij} \geq 0 \\ (2) \quad \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \end{cases}$$

例1. 从 $1,2,3,\cdots\cdots 21$数中任取一个数 n

当 n 能被 2 整除时：　随机变量　$X=1$

当 n不能被2整除时：随机变量　$X=0$

当 n 能被 3 整除时：　随机变量　$Y=1$

当 n不能被3整除时：　随机变量　$Y=0$

求：　(X,Y) 的分布律

解: 由题意可知：X取值为0, 1；Y的取值为 0, 1

$$P(X=0,Y=0)=\frac{7}{21}$$

1,5,7,11,13,17,19这7个数不能被2,3整除

$$P(X=0,Y=1)=\frac{4}{21}$$

3,9,15,21这4个数不能被2,能被3整除

$$P(X=1,Y=0)=\frac{7}{21}$$

2,4,8,10,14,16,20这7个数不能被3整除,但能被2整除

$$P(X=1,Y=1)=\frac{3}{21}$$

6,12,18这3个数能被2整除,又能被3整除

不难易证:

$$p_{ij}>0,\quad \sum_{0}^{1}\sum_{0}^{1}p_{ij}=\frac{7}{21}+\frac{4}{21}+\frac{7}{21}+\frac{3}{21}=1$$

故得： (X,Y) 的联合分布律为:

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{21}$
1	$\frac{7}{21}$	$\frac{3}{21}$

例2. 同一品种的五个产品中，有两个正品。每次从中取一个检验质量，不放回地抽样，连续两次。若记 "$x_k = 0$" 表示第 k 次取到正品；"$x_k = 1$" 表示第 k 次取到次品 (k =1, 2)

求: (X_1, X_2) 的联合分布律.

解: 由题意 X_1 的取值为：0, 1；　X_2 的取值为：0, 1

$$P(X_1=0, X_2=0)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=0|X_1=0)$$

第1次正品，第二次也是正品

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

$$P(X_1=0, X_2=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P(X_1=1, X_2=0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P(X_1=1, X_2=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

显然所求概率满足联合分布律的两条性质。

故 (X_1, X_2) 的联合分布律为:

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

3. 二维离散型随机变量的分布函数

若(X,Y)是离散型随机变量，则其联合分布函数为：

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

$$=P(X\le x,Y\le y)$$

其中“和式”是对一切满足 $x_i\le x, y_j\le y$的i,j求和.

三. 二维连续型随机变量及其分布

1. 二维连续型随机变量的定义

如果随机变量 (X, Y) 的取值 (x, y) 不能一 一列出，

而是连续的, 则称 (X,Y) 为连续型随机变量。

2. 二维连续型随机变量的(联合)概率密度与分布函数

(1) 定义: 若存在非负可积的二元函数 $f(x, y)$， 对任意的 x, y 有:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u, v)dudv$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量，$f(x, y)$ 为 (X,Y) 的联合概率密度；$F(x, y)$ 为 (X,Y) 的联合分布函数。

(2) f (x,y) 的性质

非负性

性质1 $f(x,y) \geq 0$

规范性

性质2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

性质3 若 f (x,y) 在点 (x, y) 处连续，则：

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

分布函数与概率密度的关系（证明P64）

性质4 设 G 是 XOY 平面上的一个区域，则点(X, Y)落在G内的概率为:

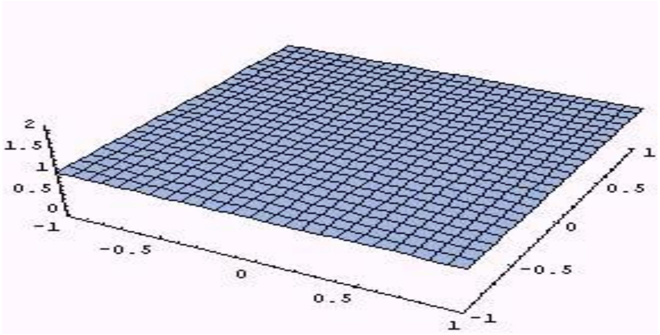
$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)\;dx\,dy$$

求区域上的概率

注：一维连续型随机变量的几种常用分布可推广到二维及多维随机变量。

1^0 若 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)} & \begin{matrix} a_1\le x\le b_1 \\ a_2\le y\le b_2\end{matrix} \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

则称 (X,Y) 服从 均匀分布



2^0 若 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{(x+y)}{\lambda}} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

则称 (X,Y) 服从参数为 λ 的 指数分布

3^0 若 $f(x,y)$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$$

其中：$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为5个常数

则称 (X,Y)服从 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的 二维正态分布（P68）

例3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

求: (1) 分布函数 $F(x,y)$

(2) (X,Y) 落在G内的概率

其中 G: x+y=1及 x 轴、y轴所围区域

例3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

求: (1) 分布函数 $F(x,y)$

(2) (X,Y) 落在G内的概率

其中 G: x+y=1及 x 轴、y轴所围区域

解: (1) $\because \quad F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$

$\therefore$ 当 $x\le 0, y\le 0$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} 0 \ dxdy=0$$

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

当 $x\le 0, y>0$ 时 $F(x,y)=0$

当 $x>0, y\le 0$ 时 $F(x,y)=0$

当 $x>0, y>0$ 时 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} e^{-(x+y)}\,dx\,dy$

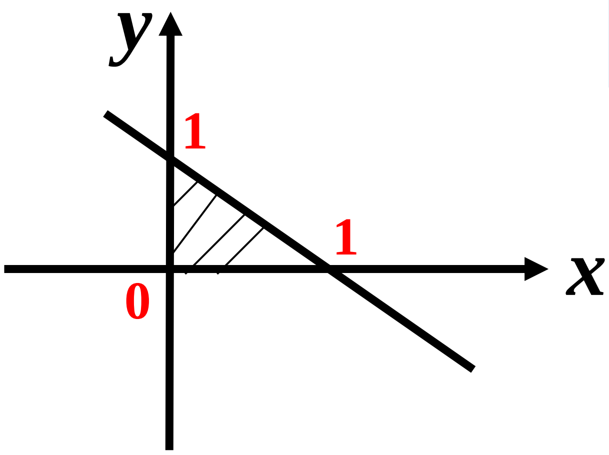
$$=\int_0^x e^{-x}dx\int_0^y e^{-y}dy=(1-e^{-x})(1-e^{-y})$$

从而得分布函数为:

$$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 画出G域图：

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



$$G: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$$

从而得：

$$P\{(x,y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x} e^{-(x+y)}dydx = 1-2e^{-1} \approx 0.2642$$

以上讨论的关于离散型或连续型随机变量均可推广到n 维(n > 2)随机变量

n维随机变量： $X_1 = X_1(e),\cdots, X_n = X_n(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量：$(X_1, X_2,\cdots X_n)$ 为 n 维随机向量或 n 维随机变量

n维联合分布函数： $F(x_1, x_2,\cdots x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2,\cdots X_n \le x_n)$ 为 n 维随机变量$(X_1, X_2,\cdots X_n)$ 的联合分布函数。

注意到(X,Y)是一个整体，它具有分布函数 F(x,y)。而 X,Y 分别也是随机变量，它们分别具有分布函数为：$F_X(x), F_Y(y)$ 。那么它们各自又有什么特征呢?

第二节 边缘分布

- 多维随机变量
  - 二维离散型随机变量
    - 联合分布律
    - 联合分布函数
      - 边缘分布
      - 条件分布
      - 独立性
    - 函数的分布
  - 二维连续型随机变量
    - 联合概率密度
    - 联合分布函数
      - 边缘分布
      - 条件分布
      - 独立性
    - 函数的分布

第二节 边缘分布

一. 边缘分布的定义

设 $F(x,y)$ 为 X,Y 的联合分布函数，

则 $F_X(x)=F(x,+\infty)$, $F_Y(y)=F(+\infty,y)$

分别称为二维随机变量 (X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数。

第二节 边缘分布

边缘分布定义（概念）的引出

积出的是变量 t 的函数

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)\,dy}\,dt$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,v)\,dv\,dt$$

$$= \lim_{y \to +\infty} F(x,y)$$

分布函数的定义

$$= F(x,+\infty)$$

分布函数的连续性

二. 当 (X,Y) 为离散型随机变量

已知 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ 为(X,Y)的联合分布律

则 X

边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum\limits_{x_i\le x}\boxed{\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}}$

边缘分布律 $p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij} \quad i=1,2\cdots$

则 Y

边缘分布函数 $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\sum\limits_{y_j\le y}\boxed{\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}}$

边缘分布律 $p_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij} \quad j=1,2\cdots$

注:

$p_{i\cdot}$ 是由 p_{ij}关于 j 求和得到; $p_{\cdot j}$ 是由 p_{ij} 关于 i 求和得到。

三. 当 (X,Y) 为连续型随机变量

已知连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度 $f(x,y)$

及联合分布函数 $F(x,y)$

则 X 的

边缘分布函数:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\boxed{[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy]}dx$$

边缘概率密度:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$$

则 Y 的

边缘分布函数:

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\boxed{[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx]}dy$$

边缘概率密度:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$$

例1 把一枚均匀硬币抛掷三次，设 X 为三次抛掷中正面出现的次数，Y为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值。

求：(X,Y)的联合分布律

解： （X, Y）可取值：(0,3), (1,1), (2,1), (3,3)

$P(X=0, Y=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$P(X=1, Y=1) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

$P(X=2, Y=1)=3/8$

$P(X=3, Y=0)=1/8$

列表如下

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

二维联合分布律全面地反映了二维随机变量(X,Y)的取值及其概率规律。
而单个随机变量X,Y也具有自己的概率分布。那么此例中二者之间的关系怎么体现呢？

注意这两个边缘分布律正好是表中的行和与列和。

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

从表中不难求得:

$P(X=0)=1/8$, $P(X=1)=3/8$

$P(X=2)=3/8$, $P(X=3)=1/8$,

$P(Y=1)= P(X=1, Y=1)+P(X=2, Y=1)=3/8+3/8=6/8$,

$P(Y=3)= P(X=0, Y=3)+P(X=3, Y=3)=1/8+1/8=2/8$.

如下表所示

Y \ X	1	3	$P(X=x_i)$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$P(Y=y_i)$	6/8	2/8	1

注意：

1. 习惯上常将**边缘分布律**写在联合分布律表格的边缘上，由此得出“边缘分布律”这个名词。
2. 由联合分布律可以确定边缘分布律，但由边缘分布律一般不能确定联合分布律。

例2. 设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取值；另一随机变量Y 在 1 ~ X 中等可能地取一整数。

求：二维随机变量 (X,Y) 的边缘分布律 $p_{i.}$ 与 $p_{.j}$

解：由边缘分布律的定义，可知先得求出 (X,Y) 的联合分布律

(1) $\because$ X的取值 1,2,3,4

$\therefore$ Y的取值也是 1,2,3,4

$$p_{11} = P(X=1,Y=1) = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

X=1时，Y只有一个值，故对Y 来说是必然事件，其概率为1

$$p_{12} = P(X=1,Y=2) = \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$$

X=1时, Y的值取不到2

$$p_{13} = P(X=1, Y=3) = 0$$

$$p_{14} = P(X=1, Y=4) = 0$$

$$p_{21} = P(X=2, Y=1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$p_{22} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad p_{23} = 0, \quad p_{24} = 0$$

$$p_{31} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \quad p_{32} = p_{33} = \frac{1}{12}, \quad p_{34} = 0$$

$$p_{41} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}, \quad p_{42} = p_{43} = p_{44} = \frac{1}{16}$$

(2) (X,Y) 边缘分布律

X	1	2	3	4
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
P_k	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$

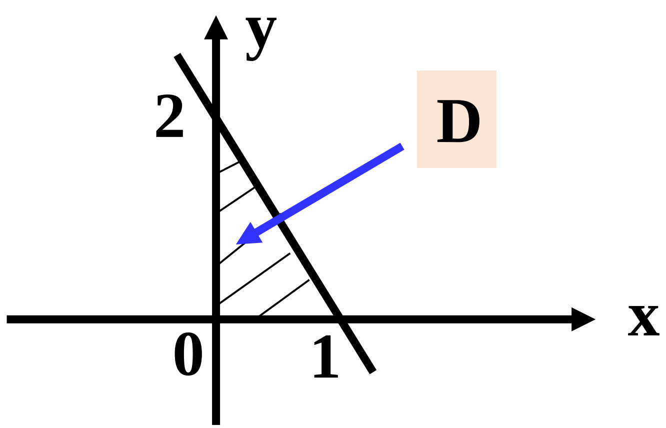
例3. 设(X,Y) 均匀分布在由直线 $x+\frac{y}{2}=1$, x 轴和y 轴所围成的区域 D 上。

求: (X,Y) 的联合概率密度与边缘概率密度。

解: (1). 因为 (X,Y) 服从均匀分布

所以其概率密度为: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$

由题意可知 D 域图为:



$\therefore \quad A=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$

$\therefore$ 其联合密度 $f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$

(2). 因为边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$\because \quad x<0$ 或 $x>1$ 时 $f(x,y)=0 \quad \therefore \quad f_X(x)=0$

$\because \quad 0\le x\le 1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot dy=\int_0^{2(1-x)} dy=2(1-x)$$

则得:

$$f_X(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

同理可得:

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}y & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例4. 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为:

$$f(x,y)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$$

$$-\infty<x<+\infty, \quad -\infty<y<+\infty,$$

求: 二维正态随机变量(X, Y)的边缘概率密度

解: 由于:

$$[\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}]$$

$$=[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}-\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}]^2-[\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}]$$

于是:

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\boxed{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}}dy$$

开方

令: $$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$$

则有:

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$-\infty<x<+\infty$$

同理有: $$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$-\infty<y<+\infty$$

结论

- 二维正态分布的两个边缘分布均是一维正态分布，并且都不依赖于参数$\boldsymbol{\rho}$，亦即对于给定的$\boldsymbol{\mu_1}$，$\boldsymbol{\mu_2}$，$\boldsymbol{\sigma_1}$，$\boldsymbol{\sigma_2}$，不同$\boldsymbol{\rho}$对应不同的二维正态分布，但它们的边缘分布却都是一样的。
- 从而可得出：由X和Y的边缘分布一般是不能确定X和Y的联合分布的。