第3章 二项式系数

3.1 二项式定理

3.2 二项式系数的基本性质

3.3 组合恒等式

3.4 多项式定理

3.1 二项式定理

定理3.1.1(二项式定理)

设n为一正整数，则对任意的x 和y,有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{或} \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

定理3.1.2(牛顿二项式定理)

对$\alpha \in R$，x满足$|x|<1$成立

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \text{其中} \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

3.1 二项式定理

定理3.1.2(牛顿二项式定理)

对$\alpha \in R$，x满足$|x|<1$成立

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}, \text{其中}\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$(1+x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{n+k-1}{k}x^{k},$$

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{k},$$

3.1 二项式定理

定理3.1.2(牛顿二项式定理)

对$\alpha \in R$，x满足$|x|<1$成立

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \text{其中} \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} x^k,$$

3.2 二项式系数的基本性质

1. (对称性) $C(n,r)=C(n,n-r)$

2. （递推关系）

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$$

3.2 二项式系数的基本性质

3 单峰性

$(1): n = 2k$

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{k}, \binom{n}{k} > \binom{n}{k+1} > \ldots. > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

$(2): n = 2k+1$

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} > \ldots. > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

3.3 组合恒等式

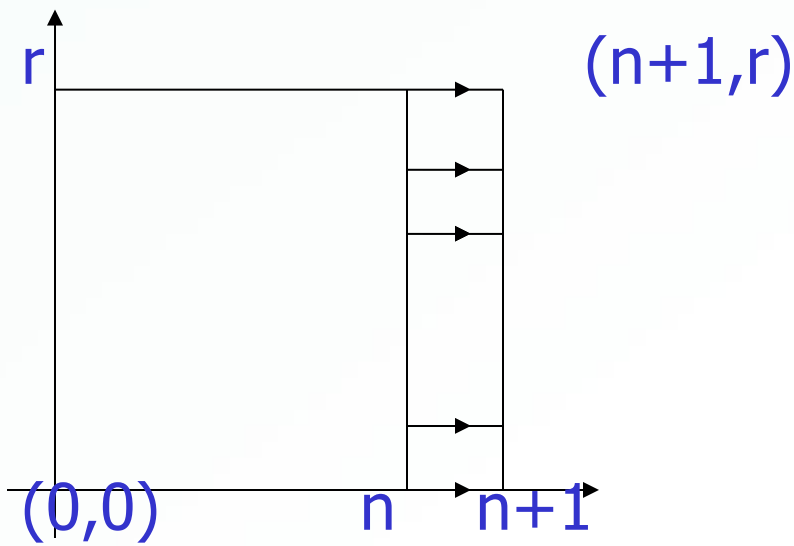
1. $$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\dots+\binom{n+r}{n}=\binom{n+r+1}{n+1}.$$

证法一：
$$左边=\binom{n+1}{n+1}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\dots+\binom{n+r}{n}$$
$$=\binom{n+2}{n+1}+\binom{n+2}{n}+\dots+\binom{n+r}{n}$$
$$=\binom{n+r}{n+1}+\binom{n+r}{n}$$
$$=\binom{n+r+1}{n+1}$$

3.3 组合恒等式

1. $$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+r}{n}=\binom{n+r+1}{n+1}.$$

证法二：考虑非降路径。



3.3 组合恒等式

2. $$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{m}=2^m$$

证1: $$(x+y)^m=\sum_{k=0}^{m}C(m,k)x^k y^{m-k},$$

证2: 集合{1,2,3,…,m}的所有子集的个数。

3.3 组合恒等式

3. $\binom{m}{0}+\binom{m}{2}+\binom{m}{4}+\ldots=\binom{m}{1}+\binom{m}{3}+\binom{m}{5}+\ldots$

证1 $$(x+y)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k y^{m-k},$$

证2 考虑{1，2，…，m} 的所有子集。

包含 1 的子集和不包含 1 的子集是一一对应的，且一个是包含奇数个元素，一个包含偶数个元素。

3.3 组合恒等式

4. $$1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$$

证：$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$\mathrm{n}(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

3.3 组合恒等式

5 求: $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{n} k^s \binom{n}{k}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \mathrm{n}(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$\mathrm{n}(1+x)^{n-1} x = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$$

$$\mathrm{n}(1+x)^{n-1} + \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\,\mathrm{x}(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}$$

3.3 组合恒等式

6. $$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

- Vandermonde恒等式
- **证：** 考虑从 m 个不同的红球和n个不同的蓝球中取 r个球。

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{n+n}{n}$$

3.3 组合恒等式

7. $$\binom{m+n}{m+s}=\binom{m}{0}\binom{n}{s}+\binom{m}{1}\binom{n}{s+1}+\ldots+\binom{m}{m}\binom{n}{m+s}$$

$$\binom{m+n}{m+s}=\binom{m}{m}\binom{n}{s}+\binom{m}{m-1}\binom{n}{s+1}\ldots+\binom{m}{0}\binom{n}{m+s}$$

3.3 组合恒等式

$$\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s+t=n}} \binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n}{t}$$

3.3 组合恒等式

8. $$\binom{k}{r}-\binom{r+1}{r}\binom{k}{r+1}+\binom{r+2}{r}\binom{k}{r+2}-\dots+(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{k}{k}=0$$

证明：
$$\sum_{i=0}^{k-r}(-1)^i\boxed{\binom{r+i}{r}\binom{k}{r+i}}=\sum_{i=0}^{k-r}(-1)^i\boxed{\binom{k-r}{i}\binom{k}{r}}$$
$$=\binom{k}{r}\sum_{i=0}^{k-r}(-1)^i\binom{k-r}{i}$$
$$=\binom{k}{r}(1-1)^{k-r}=0.$$

求集合{1，2，…，k} 的有序子集对

(S,T) **的个数,** 其中，$S\subset T\subseteq[k], |S|=r, |T|=r+i$

3.4 多项式定理

定理3.1.1(二项式定理)

设n为一正整数，则对任意的x 和y,有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

$$(x_1+x_2)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geq 0,n_2\geq 0}}\binom{n}{n_1\ n_2}x_1^{n_1}x_2^{n_2}$$

其中, $\binom{n}{n_1\ n_2}=\frac{n!}{n_1!n_2!}$.

3.4 多项式定理

定理3.4.1 (多项式定理)

设 n 为一正整数，则

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$$

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2\cdots+n_t=n\\ n_i\geq 0,1\leq i\leq t}}\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$$

其中, $\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_t}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$.

3.4 多项式定理

证明：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=(x_1+x_2+\cdots+x_t)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_t)$$

1 单项式的种类与不定方程的一个解一一对应。

$$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$$

$$n_i\geq 0, i=1,2\cdots t$$

2 随便取一个单项式 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$

3.4 多项式定理

证明:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=(x_1+x_2+\cdots+x_t)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_t)$$

2 单项式 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$ **的个数为多少?**

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots n_{t-1}}{n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}=\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_t}.$$

3.4 多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$$

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2\cdots+n_t=n\\ n_i\ge 0,1\le i\le t}}\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ \cdots x_t^{n_t}$$

1 多项式定理右端的求和号中包含多少项?

2 求 $\displaystyle\sum_{\substack{n_1+n_2\cdots+n_t=n\\ n_i\ge 0,1\le i\le t}}\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_t}=?$

3.4 多项式定理

例1 展开$(3x_1+3x_2-x_3)^8$ 则 $x_1^3x_2^2x_3^3$ 的系数为?

例2 由数字集{0，1}生成的长度为 n 的字符串，0 出现偶数次的字符串有多少个?

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{2}+\binom{m}{4}+\ldots=\sum_{k\text{是偶数}}\binom{n}{k}$$

3.4 多项式定理

例3 由数字集{0，1，2}生成的长度为 n 的字符串，0 出现偶数次的字符串有多少个?

$$(x_1+x_2+x_3)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_i\geq 0}}\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$$

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1\text{是偶数}}}\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}$$

3.4 多项式定理

$$(x_1+x_2+x_3)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_i\geq 0}}\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$$

$$(1+1+1)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1\text{是偶数}}}\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}+\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1\text{是奇数}}}\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}$$

$$(-1+1+1)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1\text{是偶数}}}\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}-\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1\text{是奇数}}}\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}$$