第三章 一元积分学

第三节　定积分值的估计及不等式

定积分值的估计及不等式证明是一个较难的问题，方法多样，用到的知识（微分学的知识，积分学的知识等）也很多。总的说来：

（1）用积分学的知识，除了定积分的性质、积分中值定理、计算方法（换元、分部等）外，以下几个简单的不等式也是有用的：

（i）若 $f(x)\le g(x)\,(x\in[a,b])$，则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

（ii）$|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

（iii）若 $f(x)\ge 0\,(x\in[a,b]),a\le c\le d\le b$,则 $\int_c^d f(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$.

(iv)(柯西不等式) $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

(2)用微分学的知识,包括前面已讲过的利用微分学知识证明不等式的一切方法.

(3)利用二重积分、级数等.

值得注意的是：题目的解法往往有多种，同一题目其解答过程中往往要用到各种知识和方法.

例１．判断积分 $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx$ 的符号

分析：这个积分值是求不出来的．如果被积函数在积分区间上有确切的符号，那么积分值的符号很容易判断．如果被积函数在积分区间上有正、有负，可根据被积函数的正、负情况将积分区间分成部分区间，然后利用积分学等方面的知识比较在这些部分区间上的积分值（实际上是比较部分区间上的积分值的绝对值）．本题中被积函数 $\sin x^2$ 在积分区间上有正、有负，先作换元：$t=x^2$，把积分变为 $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 后，问题更清晰，因而想到

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt)$$

至此积分的符号凭直觉已经能判断了．但严格说明还需做一些工作，上式右端两个积分的积分区间不一样，为了方便比较，应将两个积分放在同一积分区间上进行比较（通常用换元法达到目的）．有了这些分析和思路后，解答就容易了．

解：令 $t=x^2$，则

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt==\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt)$$

对上式右端后一积分换元 $t=u+\pi$ 得 $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{\pi}\frac{-\sin u}{\sqrt{u+\pi}}du=-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}}dt$

从而$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx==\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}}dt)$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}})\sin tdt>0$

注：本题的解答过程并不复杂，但其过程中有两个技巧很有用（1）将积分区间分成部分区间（尤其是等分区间，特别是二等分）（2）如要比较两个在不同积分区间上的积分的大小，可通过换元变成相同积分区间上的积分，然后作比较.

本题在换元$t=x^2$后，利用上一节"利用对称性计算积分"的有关结论可直接给出证明：

$\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{\pi}[\frac{\sin(\pi-t)}{\sqrt{\pi-t}}+\frac{\sin(\pi+t)}{\sqrt{\pi+t}}]dt=\int_0^{\pi}(\frac{1}{\sqrt{\pi-t}}-\frac{1}{\sqrt{\pi+t}})\sin tdt>0$。

利用对称性的有关结论解决的问题，一般有某种"对称性"(这种对称性与积分区间和被积函数都有关)，本题中被积函数中的$\sin x$在积分区间$[0,2\pi]$上的对称性是明显的。

一般场合，要比较两个在不同积分区间上的积分的大小，先作换元变成相同积分区间上的积分，再合并成一个积分，然后判断被积函数在积分区间内的符号（恒正或恒负）从而达到比较积分大小之目的，这是一种常用的思路。比如，设$f(x)$在$[0,1]$上单调增加且有界，$0<\alpha<1$，比较$\int_0^{\alpha}f(x)dx$与$\alpha\int_0^1f(x)dx$的大小。

解：对积分$\int_0^{\alpha}f(x)dx$作换元$x=\alpha t$，则$\int_0^{\alpha}f(x)dx=\alpha\int_0^1f(\alpha t)dt=\alpha\int_0^1f(\alpha x)dx$，从而$\int_0^{\alpha}f(x)dx-\alpha\int_0^1f(x)dx=\alpha\int_0^1[f(\alpha x)-f(x)]dx$，

由于$f(\alpha x)\le f(x)$，故$\alpha\int_0^1[f(\alpha x)-f(x)]dx\le 0$，即$\int_0^{\alpha}f(x)dx\le\alpha\int_0^1f(x)dx$。

如本题条件改为：$f(x)$在$[0,1]$上连续且单调增加，则还可用积分中值定理或常数变易法解法：

（用积分中值定理） $\alpha\int_0^1f(x)dx-\int_0^{\alpha}f(x)dx=(\alpha-1)\int_0^{\alpha}f(x)dx+\alpha\int_{\alpha}^1f(x)dx$

$=(\alpha-1)\alpha f(\xi_1)+\alpha(1-\alpha)f(\xi_2)=\alpha(1-\alpha)(f(\xi_2)-f(\xi_1))\ge 0$。

（用常数变易法）令$g(t)=\alpha\int_0^tf(x)dx-\int_0^{\alpha t}f(x)dx$，则$g(0)=0$，

$g'(t)=\alpha f(t)-\alpha f(\alpha t)\ge 0$，

所以$g(1)\ge g(0)=0$，即$\alpha\int_0^1f(x)dx-\int_0^{\alpha}f(x)dx\ge 0$。

或：令$g(t)=t\int_0^1f(x)dx-\int_0^tf(x)dx$，则$g(0)=0$，

$g(1)=0$，$g'(t)=\int_0^1 f(x)dx-f(t)$，

易见 $g'(t)$ 单调减少，所以 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 上为上凸函数，故

$$g(\alpha)=g((1-\alpha)\times 0+\alpha\times 1)\ge(1-\alpha)g(0)+\alpha g(1)=0\text{。}$$

例 2．设 $a>0$，证明：$\int_0^{\pi} xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\sin x}dx\ge\dfrac{\pi^3}{4}$

分析:： 从形式上看很象柯西不等式，但两个积分的积分区间不一样，前面的积分我们可用教材中介绍的一个等式 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$（利用“对称性”很容易证明这个等式：$\int_0^{\pi} xf(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}[xf(x)+(\pi-x)f(\sin(\pi-x))]dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ ）变为 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的积分，再用柯西不等式便可得结论。

解：$\int_0^{\pi} xa^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\sin x}dx$

$$\int_0^{\pi} xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{\frac{\sin x}{2}})^2dx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{\frac{-\sin x}{2}})^2dx\ge\pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx)^2=\frac{\pi^3}{4}.$$

注：柯西不等式和均值不等式是数学中的两个基本的不等式。

柯西不等式的三种常见形式：

（1）离散形式

$$|\sum_{i=1}^n a_ib_i|\leqslant[\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2]^{1/2}\text{；}$$

（2）连续形式

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx|\leqslant[\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx]^{1/2}$$

多元积分也成立。

（3）概率形式

$$|E(XY)|\leqslant[E(X^2)\cdot E(Y^2)]^{1/2}$$

统一形式是

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$$

其中 α,β 是内积空间（定义了内积的向量空间）的向量。等号成立当且仅当 $\alpha//\beta$.

均值不等式：$\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，$a_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

均值不等式也有离散形式和连续形式，还有加权均值不等式.后面有更详细讨论.

第 5 届决赛的一题：设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $\int_0^1 f(x)dx=1$，求一个这样的函数 $f(x)$，使得积分 $\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx$ 最小。

解答：由柯西不等式

$$\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})^2 dx \cdot \int_0^1 (\sqrt{1+x^2} f(x))^2 dx \geqslant (\int_0^1 f(x)dx)^2 = 1,$$

由 $\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})^2 dx = \frac{\pi}{4}$，得

$$\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \geqslant \frac{4}{\pi},$$

所求的函数为 $f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}$ 时等号成立.故所求的函数为 $f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}$.

注：如果不知道柯西不等式本题无从下手，但如果知道柯西不等式本题是简单的.

例 3．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，且 $f(a)=0$，证明：

（1）$|\int_a^b f(x)dx| \le \frac{(b-a)^2}{2} \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

（2）$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$

分析：（1）该不等式实际上给出了左边积分的一个界。若令 $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$，则有 $|f'(x)| \le M$，即给出了导数的界，再加条件 $f(a)=0$，可得到 $|f(x)| \le M(x-a), x\in[a,b]$，进而估计出积分的界。（2）不等式两边分别有 $f(x)$ 和 $f'(x)$，而等式 $f(x) = \int_{x_0}^x f'(x)dx + f(x_0)$ 可将两者联系起来，这里 x_0 要根据具体问题具体选择，本题中容易想到 $x_0 = a$

证明：（1）令 $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$，由拉氏中值定理知

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a),$$

从而 $|f(x)| = |f'(\xi)(x-a)| \le M(x-a), x\in[a,b]$

所以 $|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)| dx \le \int_a^b M(x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2} M$.

本题也可利用等式 $f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a) = \int_a^x f'(t)dt$ 去证:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\int_a^x f'(t)dt)dx = \int_a^b (\int_t^b f'(t)dx)dt = \int_a^b (b-t) f'(t)dt$$

所以 $|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)| dx \le \int_a^b |(b-t) f'(t)| dt \le M\int_a^b (b-t)dt = \frac{(b-a)^2}{2} M$.

（2） $f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)=\int_a^x f'(t)dt$，则

$$f^2(x)=[\int_a^x f'(t)dt]^2\le\int_a^x 1dt\int_a^x[f'(t)]^2dt\le(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2dt$$

故 $\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b[f'(t)]^2dt\int_a^b(x-a)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx$

注：

（1）中，若将条件 $f(a)=0$ 改为(i) $f(b)=0$，结论仍成立，(ii) 若 $f(\frac{a+b}{2})=0$,则右端可改为 $\frac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,(iii)若 $f(a)=0$ 且 $f(b)=0$,则右端改为 $\frac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.下面给出证明：

（ii）令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,则

$$|f(x)|=|f(x)-f(\frac{a+b}{2})|=|f'(\xi)(x-\frac{a+b}{2})|\le\begin{cases}M(\frac{a+b}{2}-x),x\in[a,\frac{a+b}{2}],\\M(x-\frac{a+b}{2}),x\in(\frac{a+b}{2},b],\end{cases}$$

从而

$$|\int_a^b f(x)dx|\leqslant|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx|+|\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx|\leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(\frac{a+b}{2}-x)dx+M\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})dx=\frac{(b-a)^2}{4}M\text{。}$$

（iii） $|f(x)|\le\begin{cases}M(x-a),x\in[a,\frac{a+b}{2}],\\M(b-x),x\in(\frac{a+b}{2},b],\end{cases}$,

$$|\int_a^b f(x)dx|\leqslant|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx|+|\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx|\leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx+M\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx=\frac{(b-a)^2}{4}M$$

有一道考过的题，其解题思路与本题相似。

问：在区间 $[0,2]$ 上是是否存在连续可导函数 $f(x)$，满足 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\leqslant 1$，$|\int_0^2 f(x)dx|\leqslant 1$？请说明理由。

答案：假设存在这样的函数，那么

$f(x)=f(0)+f'(\xi)x\geqslant 1-x,x\in[0,1]$，

$f(x)=f(2)+f'(\xi)(x-2)\geqslant x-1,x\in[1,2]$，

令 $g(x)=\begin{cases}1-x,x\in[0,1],\\x-1,x\in(1,2]\end{cases}$,则 $f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0,x\in[0,2]$，且 $\int_0^2 g(x)dx=1$，因此 $\int_0^2 f(x)dx\geqslant 1$，

又 $|\int_0^2 f(x)dx|\leqslant 1$，故 $\int_0^2 f(x)dx=1$，于是有

$\int_0^2 (f(x)-g(x))dx=0$，

由于函数 $f(x)-g(x)\geqslant 0$，且连续，所以 $f(x)=g(x), x\in[0,2]$，易见 $g(x)$ 在 $x=1$ 处不可导，这与 $f(x)$ 的可导性矛盾.所以不存在满足条件函数.

(2) 本题(2)中右边作为左边积分的一个界，比较粗糙(证明过程中能感觉到这一点),我们可以更精细一点：

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 (x-a)^2 dx$$

不做(2)的证明过程中的第二步放大,便可证出上面结论：

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \int_a^b \{(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2 dt\}dx = \int_a^b (\int_a^x [f'(t)]^2 dt)d\frac{(x-a)^2}{2}$$,再分部即可.

例 4．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$，证明：

$$|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})|\le \frac{M}{24}(b-a)^3$$ 。

（本题的证明方法很多）

方法一：利用上一节中的例 11 中的（2），或上一节的练习题 26 可证出结论。

方法二：由泰勒公式有

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

两边在 $[a,b]$ 上积分并注意到 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx=0$ 得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx$$，从而得

$$|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})|=\frac{1}{2}|\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx|\le \frac{M}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 dx=\frac{M(b-a)^3}{24}$$

方法三：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x), F'''(x)=f''(x)$，且

$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$，由泰勒公式有：

$$F(b)=F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}F''(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})^2+\frac{F'''(\xi_1)}{6}(\frac{b-a}{2})^3 \qquad (1)$$

$$F(a)=F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}F''(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})^2+\frac{F'''(\xi_2)}{6}(\frac{a-b}{2})^3 \qquad (2)$$

（1）—（2）得

$$F(b)-F(a)=F'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}(F'''(\xi_1)-F'''(\xi_2))$$

所以 $|\int_a^b f(x)dx - f'(\frac{a+b}{2})(b-a)| = \frac{(b-a)^3}{48} | f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \le \frac{M}{24}(b-a)^3$

$$\le \frac{(b-a)^3}{48}[| f''(\xi_1)| + | f''(\xi_2)|] \le \frac{M}{24}(b-a)^3$$

例 5．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，求证：

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

分析：本题有多种证明方法，思路一：这里有两个参数 a,b，把 b 改成变量 x，问题化为证明函数不等式：

$$\int_a^x tf(t)dt \ge \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$$

可利用导数去证明．思路二：欲证的不等式变形为 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2}) f(x)dx \ge 0$，

被积函数中因子 $x-\frac{a+b}{2}$ 关于积分区间中点具有对称性，而 $f(x)$ 又单调，因此可想到前面介绍的利用对称性计算积分的有关公式去处理．思路三：基于思路二的考虑，将积分区间二等分，然后用积分中值定理，或通过换元，再合并成一个积去处理．思路四：由于 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2}) f(\frac{a+b}{2}) = 0$，故 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2}) f(x)dx = \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(f(x) - f(\frac{a+b}{2}))dx$，至此就一目了然．思路五：欲证的不等式变形为

$$(b-a)\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b 1dx\int_a^b xf(x)dx \ge \int_a^b xdx\int_a^b f(x)dx,$$

那么看过例 6 后就知道怎么做了．

证法一：令 $F(x) = \int_a^x tf(t)dt - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，则 $F(a) = 0,$ 且

$$F'(x) = \frac{x-a}{2} f(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^x [f(x) - f(t)]dt \ge 0$$

从而　$F(x) \ge F(a) = 0, x \in [a,b]$

取 $x = b$，便得 $F(b) \ge 0$，结论得证．

证法二：$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2}) f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [(x-\frac{a+b}{2}) f(x) + (a+b-x-\frac{a+b}{2}) f(a+b-x)]dx$

$\frac{1}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(f(x) - f(a+b-x))dx \ge 0$。

证法三：

$$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2}) f(x)dx = \int_0^{\frac{b-a}{2}} [(\frac{a+b}{2} - x - \frac{a+b}{2}) f(\frac{a+b}{2} - x) + (\frac{a+b}{2} + x - \frac{a+b}{2}) f(\frac{a+b}{2} + x)]dx$$

$$=\int_0^{\frac{b-a}{2}} x[f(\frac{a+b}{2}+x)-f(\frac{a+b}{2}-x)]dx\ge 0\,.$$

证法四：$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$

$=f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})dx+f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})dx=\frac{(b-a)^2}{8}(f(\xi_2)-f(\xi_1))\ge 0$ 。

证法五：由题设知 对于 $x\in[a,b]$, $(x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(\frac{a+b}{2}))\ge 0$.从而

$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(\frac{a+b}{2}))dx\ge 0$,

结合 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2})=0$,

得$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\ge 0$.

所以 $\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

证法六:化为二重积分(看过例 6 后,同学们自自己完成)

注：第一种方法我们称之为变易常数法，即把某个常数（在积分中一般是积分上限或下限）换成变量，从而化为一个函数不等式，再利用微分学的知识或其它知识去证明，这是一种常用的技巧。本题若把条件“连续且单调增加”改为“单调且有界”，结论仍成立。但变易常数法不能用（为什么？）。

例 6．设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续且单调增加，求证：

$$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx\ge\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

分析：右端出现了两个积分，若将两个积分的积分变量换成不同符号则可化为二重积分：

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(y)dy\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\int_a^b f(y)g(x)dxdy=\int_a^b\int_a^b f(x)g(y)dxdy$$

而左边亦可化为二重积分：$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx=\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)dxdy=\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)dxdy$

这样就化为二重积分的比较了。

证：令 $I=(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx-\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$,

则 $I=\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)dxdy-\int_a^b\int_a^b f(x)g(y)dxdy=\int_a^b\int_a^b f(x)[g(x)-g(y)]dxdy$,

同样可得 $I==\int_a^b\int_a^b f(y)[g(y)-g(x)]dxdy$,

两式相加得 $2I=\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy$,

由于 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上都单调增加,故$2I\ge 0$,

所以 $I=(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx-\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\ge 0$，

结论得证。

注：本题是通过化为二重积分来证明，这也是一个有用的方法。仔细体会这个证明过程，并用此方法去证明柯西不等式及本节的例 5。

凹凸性及均值不等式

例 7．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且为凹函数即对 $\forall\lambda\in[0,1]$，及 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

证明：$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$

证明：$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx=\int_a^b\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}dx$

$\ge\int_a^b f(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(a+b-x))dx=\int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

从而左边不等式得证，下证右过不等式

$\forall x\in[a,b]$，有 $x=\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b$

从而 $f(x)\le\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$

两边积分得 $\int_a^b f(x)dx\le\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

于是得右过不等式.

注：能看出该不等式的几何意义吗？

下面介绍凹凸性在平均值方面的表现.

n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的调和平均、几何平均、算术平均有如下关系：

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$$

广义调和平均、几何平均、算术平均有如下关系:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n\frac{\lambda_i}{a_i}}\le\prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}\le\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i .$$

其中 $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$,且 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$.

(利用函数 $f(x)=\ln x$ 的凹凸性便可证得上面不等式.)

我们把以上关系推广到积分形式：设 $f(x)$ 正值连续，则

$$\frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx} \le e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

上面不等式中的第一项称为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的调和平均，第二项称为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的几何平均，第三项称为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的算术平均．还可推广到加权平均(也叫广义平均)的形式：设 $f(x)$, $p(x)$ 为正值连续函数,则

$$\frac{\int_a^b p(x)dx}{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}dx} \le \exp\left(\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \le \frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}, \qquad (2)$$

下面证不等式（1）

方法一(利用 $f(x)=e^x$ 的凹凸性)

对于任意u,u_0，有$e^u = e^{u_0} + e^{u_0}(u-u_0) + \frac{e^{\xi}}{2!}(u-u_0)^2 \ge e^{u_0} + e^{u_0}(u-u_0)$，

取$u_0 = \frac{\int_a^b \ln f(x)dx}{b-a}$，则$\int_a^b \ln f(x)dx = (b-a)u_0$，

对不等式 $f(x) = e^{\ln f(x)} \ge e^{u_0} + e^{u_0}(\ln f(x) - u_0)$，

两边在$[a,b]$上积分，并注意到不等式右边最后一项的积分为零，得

$$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)e^{u_0}, \text{即 } e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

下证左边不等式：左边不等式等价于$\frac{\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx}{b-a} \ge e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\frac{1}{f(x)}dx}$，这就是右边不等式。

方法二(利用 $f(x)=\ln x$ 的凹凸性,两种方法本质上相同)：

（1）的右边不等式等价于$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$。

对于任意$u,u_0 \in (0,+\infty)$，有$\ln u = \ln u_0 + \frac{1}{u_0}(u-u_0) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)(u-u_0)^2 \le \ln u_0 + \frac{1}{u_0}(u-u_0)$

取$u_0 = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$，则$\int_a^b f(x)dx = (b-a)u_0$

又$\ln f(x) \le \ln u_0 + \frac{1}{u_0}(f(x)-u_0)$，

两边在$[a,b]$上积分，并注意到不等式右边最后一项的积分为零，得

$$\int_a^b \ln f(x)dx \le (b-a)\ln u_0 = (b-a)\ln(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx),$$

所以$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \le \ln(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)$ 。

方法三

$$\int_a^b \ln f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(a+\frac{k}{n}(b-a)) = (b-a)\ln(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a))})$$

$$\leqslant (b-a)\ln(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a)) = (b-a)\ln(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx) 。$$

（2）的证明与（1）类似:

对于任意u, u_0，有$e^u = e^{u_0} + e^{u_0}(u-u_0) + \frac{e^{\xi}}{2!}(u-u_0)^2 \ge e^{u_0} + e^{u_0}(u-u_0)$

取$u_0 = \frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$，则$\int_a^b p(x)\ln f(x)dx = u_0\int_a^b p(x)dx$

$f(x) = e^{\ln f(x)} \ge e^{u_0} + e^{u_0}(\ln f(x) - u_0)$，从而

$p(x)f(x) \ge p(x)e^{u_0} + e^{u_0}(p(x)\ln f(x) - u_0 p(x))$

两边在$[a,b]$上积分，并注意到不等式右边最后一项的积分为零，得

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \ge e^{u_0}\int_a^b p(x)dx$$

即$\exp(\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}) = e^{u_0} \le \frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$,

于是得(2)的右边不等式. 把(2)右边不等式中的$f(x)$换成$\frac{1}{f(x)}$便是左边不等式.

分析上面证明过程，可以发现e^x(或$\ln x$)的凹凸性起了关键作用,而且与具体函数没有关系．因此有下面更一般的结论：

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$m \le f(x) \le M$，$\varphi(x)$在$[m,M]$上有二阶导数，且$\varphi''(x) \ge 0$，则

$$\varphi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx \qquad (3)$$

更一般情形是:

设 $f(x), p(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $m \le f(x) \le M, p(x) > 0$， $\varphi(x)$ 在 $[m,M]$ 上有二阶导数，且 $\varphi''(x) \ge 0$，则

$$\varphi[\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}] \le \frac{\int_a^b p(x)\varphi[f(x)]dx}{\int_a^b p(x)dx} \qquad (4)$$

注：$\varphi''(x) \le 0$，则上面不等式变号．条件“ $p(x) > 0$ ”可改为“ $p(x) \ge 0, \int_a^b p(x)dx > 0$ ”．

（3），（4）的证明作为练习题留给同学们完成。（3），（4）及下面的不等式(5)都叫做 Jensen 不等式.

设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $\varphi''(x) \ge 0$，则对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$，及满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 的 n 个正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，有

$$\varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i). \qquad (5)$$

练习题:

1.证明:$\int_0^\pi e^{\sin^2 x}dx \ge \sqrt{e}\pi$.

2.证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

3.证明:$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

4. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $0 \le g(x) \le 1$，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，证明：

$$\int_{b-\lambda}^b f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^{a+\lambda} f(x)dx，其中 \lambda = \int_a^b g(x)dx.$$

5. 设 l 表示椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的周长，证明：

$$\pi(a+b) \le l \le \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

6.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 | f(x) | dx \le \max\{\int_0^1 | f'(x) | dx, | \int_0^1 f(x)dx |\}.$$

7.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，证明对 $\forall x \in [a,b]$，有

$$| f(x) | \le \frac{1}{b-a}\int_a^b | f(x) | dx + \int_a^b | f'(x) | dx.$$

8.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=0$，证：

$$(\int_a^b f(x)dx)^2 \le \frac{(b-a)^3}{3}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

9.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=0$，证：

$$\int_a^b | f(x)f'(x) | dx \le \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

10.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=0$，$0 < f'(x) \le 1$，证：

$$(\int_a^b f(x)dx)^2 \ge \int_a^b f^3(x)dx.$$

11.（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0, | f''(x) | \le M$，证明：

$$| \int_a^b f(x)dx | \le \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $2n$ 阶连续导数，$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0(k=0,1,\cdots,n-1)$，

$| f^{(2n)}(x) | \le M$，证明：

$$| \int_a^b f(x)dx | \le \frac{(n!)^2 M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}.$$

12.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0,$ 证明：对 $\forall x \in (a,b)$ 有

$$| \frac{b-a}{(x-a)x-b)} f(x) | \le \int_a^b | f''(x) | dx.$$

13．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0,\ f(x) \ne 0(x \in (a,b))$，证明：

$$\int_a^b | \frac{f''(x)}{f(x)} | dx \ge \frac{4}{b-a}.$$

14.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，且 $| f'(x) | \le M$，证明：

$$| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) | \le \frac{M}{2n}.$$

15．设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加， $p(x)\ge 0$ 且连续，求证：

$$\int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)g(x)f(x)dx \ge \int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx .$$

16．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $1\le f(x)\le 2$，证明：

$$1\le \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le \frac{9}{8} .$$

第 10 届的一道题：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $1\le f(x)\le 3$，证明：

$$1\leqslant \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leqslant \frac{4}{3}$$ 。

17.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $0<m\le f(x)\le M$ ，证明

（1） $\dfrac{1}{M}\displaystyle\int_a^b f(x)dx+m\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge 2\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a)$；

（2） $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$.

18. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值和最大值分别为 m_1 和 M_1 , $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值和最大值分别为 m_2 和 M_2 ,记 $\mu=\int_0^1 f(x)dx$,证明:

(1) $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx-[\int_0^1 f(x)dx]^2 \ge 0$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx-[\int_0^1 f(x)dx]^2=(M_1-\mu)(\mu-m_1)-\int_0^1(M_1-f(x))(f(x)-m_1)dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx-[\int_0^1 f(x)dx]^2 \le (M_1-\mu)(\mu-m_1)$;

(4) $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx \le \frac{(M_1-m_1)(M_2-m_2)}{4}$.

19．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(x)>0$，且单调减少，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} .$$

20．证明： $\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})} < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \frac{4}{5}$.

21．设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $g''(x)\ge 0$， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a\le f(x)\le b$，证

明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g[f(x)]dx \ge g[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx].$$

22.设 $f(x), p(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $m \le f(x) \le M, p(x) > 0$，$\varphi(x)$ 在 $[m,M]$ 上有二阶导数，

且 $\varphi''(x) \ge 0$，则

$$\varphi[\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}] \le \frac{\int_a^b p(x)\varphi[f(x)]dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

23．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f''(x) \ge 0$，证明：

$$\int_0^1 f(x^\mu)dx \ge f(\frac{1}{\mu+1})\,(\mu > 0).$$

24．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0 < f(x) < 1$，证明：

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}dx \ge \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1-\int_0^1 f(x)dx}.$$

25.设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0 < g(x) \le 1$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负单调减少，$p \ge 1$，证明：

（1）$[\frac{\int_0^1 f(x)g(x)dx}{\int_0^1 g(x)dx}]^p \le \frac{\int_0^1 g(x)f^p(x)dx}{\int_0^1 g(x)dx}$；

（2）$(\int_0^1 f(x)g(x)dx)^p \le \int_0^\lambda f^p(x)dx$，其中 $\lambda = (\int_0^1 g(x)dx)^p$。

26 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x) \geqslant m > 0, |f(x)| \leqslant \pi$，证明: $|\int_a^b \sin f(x)dx| \leqslant \frac{2}{m}$.

27 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, $\int_a^x f(t)dt \ge \int_a^x g(t)dt\ (a \le x \le b)$,证

明: $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$.

28.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，且 $f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$，$p(x) = x^3 - x^2$，

（1）证明 $\int_0^1 [(f''(x))^2 - (p''(x))^2]dx = \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx$；

（2）证明 $\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \ge 4$，且等号成立当且仅当 $f(x) = p(x)$.

29 第 4 届初赛的一题：求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1 |f(x)|dx = 1$ 的连续函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x})\,|\,dx \leqslant C$$

答案或提示。

1. $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin^2 x}dx$,而$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos^2 x}dx$,故

$$\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[e^{\sin^2 x}+e^{\cos^2 x}]dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{e^{\sin^2 x+\cos^2 x}}=\sqrt{e}\pi$$

2. 利用对称性证明,在上一节已证过.

3. 通过换元将左、右积分别变为

$$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)dt\text{，}\quad\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)dt\text{，}$$

由于$\frac{\pi}{2}-\sin t>\cos t$（利用$\sin t+\cos t\le\sqrt{2}$得到），从而

$$\cos(\sin t)=\sin(\frac{\pi}{2}-\sin t)>\sin(\cos t)\text{，}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)dt>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)dt\text{。即}\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx<\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx\text{。}$$

4. 下面给出左边不等式的证明（右边不等式的证明完全类似）。

方法一（可用变易常数法证）:

令 $\lambda(x)=\int_a^x g(t)dt, x\in[a,b]$ ， 则 $0\le\lambda(x)\le x-a$ ， $\lambda(a)=0,\ \lambda(b)=\int_a^b g(t)dt$ ，

$\lambda'(x)=g(x)$。

令$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt-\int_{x-\lambda(x)}^x f(t)dt$，那么$F(a)=0$，

$$F'(x)=f(x)g(x)-\{f(x)-f[x-\lambda(x)](1-g(x))\}$$

$$=(1-g(x))(f[(x-\lambda(x)]-f(x))\text{，}$$

由题设知 $1-g(x)\ge0$ 。又由于 $f(x)$ 单调减少及 $x-\lambda(x)\le x$ ，所以 $f[(x-\lambda(x)]-f(x)\ge0$，从而$F'(x)\ge0$，即$F(x)$单调增加，故

$$F(b)\ge F(a)=0\text{，}$$

于是得不等式

方法二:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_{b-\lambda}^b f(x)dx=\int_a^{b-\lambda} f(x)g(x)dx+\int_{b-\lambda}^b f(x)[g(x)-1]dx$$

$$\ge \int_a^{b-\lambda} f(x)g(x)dx + f(b-\lambda)\int_{b-\lambda}^{b}[g(x)-1]dx$$

$$= \int_a^{b-\lambda} f(x)g(x)dx + f(b-\lambda)[\int_{b-\lambda}^{b} g(x)dx - \int_a^b g(x)dx]$$

$$= \int_a^{b-\lambda}[f(x)-f(b-\lambda)]g(x)dx \ge 0。$$

5.由弧长公式可得 $l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$，

先证左边不等式，

由柯西不等式得

$$\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\ \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \ge a\sin^2 t + b\cos^2 t，$$

从而

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt \ge 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2 t + b\cos^2 t)dt = \pi(a+b)；$$

再证右边不等式，

由柯西不等式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\cdot 1dt$$

$$\le \{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin^2 t + b\cos^2 t)dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\}^{\frac{1}{2}} = \pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{8}}，$$

所以

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt \le \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}。$$

6. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不变号，则 $\int_0^1 |f(x)|dx = |\int_0^1 f(x)dx|$，从而不等式成立；若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上变号，则存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0)=0$，由 $|f(x)| = |\int_{x_0}^x f'(t)dt| \le \int_0^1 |f'(t)|dt$，可得结论.

7. 由积分中值定理知 $\exists x_0 \in [a,b], f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，

由 $f(x) = \int_{x_0}^x f'(t)dt + f(x_0)$ 可得

$$|f(x)| = |\int_{x_0}^x f'(t)dt + f(x_0)| \le |\int_{x_0}^x f'(t)dt| + |f(x_0)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |f'(x)|dx。$$

命题得证.

8. 由于 $f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a) = \int_a^x f'(t)dt$,故

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b(\int_a^x f'(t)dt)dx = \int_a^b (b-t)f'(t)dt,$$

柯西不等式有

$$(\int_a^b f(x)dx)^2 = [\int_a^b (b-t)f'(t)dt]^2 \le \int_a^b (b-t)^2 dt \cdot \int_a^b [f'(t)]^2 dt = \frac{(b-a)^3}{3}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

命题得证.

9. $|f(x)|=|\int_a^x f'(t)dt|\le\int_a^x|f'(t)|dt$,

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\le\int_a^b|f'(x)|(\int_a^x|f'(t)|dt)dx=\frac{1}{2}[\int_a^x|f'(t)|dt]^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}[\int_a^b|f'(t)|dt]^2$$

$$\le\frac{1}{2}\int_a^b dt\cdot\int_a^b[f'(t)]^2dt=\frac{b-a}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx.$$

命题得证.

10. 令 $F(x)=(\int_a^x f(t)dt)^2-\int_a^x f^3(t)dt$，则 $F(a)=0$,且

$$F'(x)=2f(x)\int_a^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)[2\int_a^x f(t)dt-f^2(x)],$$

令 $G(x)=2\int_a^x f(t)dt-f^2(x)$,则 $G(a)=0$,且

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)(1-f'(x)),$$

由题设知 $f(x)\ge 0,1-f'(x)\ge 0$,故 $G'(x)\ge 0$,因此 $G(x)\ge G(a)$,从而 $F'(x)\ge 0$,

所以 $F(b)\ge F(a)=0$,即

$$(\int_a^b f(x)dx)^2\ge\int_a^b f^3(x)dx$$

命题得证.

11. (1)由等式(上一节中例 11 的（1）)

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx,$$

得

$$|\int_a^b f(x)dx|=\frac{1}{2}|\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx|\le\frac{M}{2}\int_a^b|(x-a)(x-b)|dx=\frac{M}{12}(b-a)^3。$$

命题得证.

（2）（是（1）的推广，先证明 $\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)dx=(2n)!\int_a^b f(x)dx$，其中 $g(x)=(x-a)^n(x-b)^n$ ）

记 $g(x)=(x-a)^n(x-b)^n$，则 $g^{(k)}(a)=g^{(k)}(b)=0(k=0,1,\cdots,n-1)$， $g^{(2n)}(x)=(2n)!$,

从而

$$\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)dx=[f^{(2n-1)}(x)g(x)]\Big|_a^b-\int_a^b f^{(2n-1)}(x)g'(x)dx=-\int_a^b f^{(2n-1)}(x)g'(x)dx$$

$$=\cdots=(-1)^n\int_a^b f^{(n)}(x)g^{(n)}(x)dx=\cdots=\int_a^b f(x)g^{(2n)}(x)dx=(2n)!\int_a^b f(x)dx。$$

故

$$|\int_a^b f(x)dx| = \frac{1}{(2n)!}|\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)dx| \le \frac{M}{(2n)!}\int_a^b |g(x)|dx 。$$

（下面求$\int_a^b |g(x)|dx$）

又$\int_a^b |g(x)|dx = \int_a^b [(x-a)(b-x)]^n dx = \int_a^b [(\frac{b-a}{2})^2 - (x-\frac{a+b}{2})^2]^n dx$

$$\overset{t=\frac{2}{b-a}(x-\frac{a+b}{2})}{=} \int_{-1}^1 [(\frac{b-a}{2})^2 - (\frac{b-a}{2})^2 t^2]^n \cdot \frac{b-a}{2} dt$$

$$= 2(\frac{b-a}{2})^{2n+1}\int_0^1 [1-t^2]^n dt$$

$$\overset{t=\cos u}{=} 2(\frac{b-a}{2})^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} du$$

$$= \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}(b-a)^{2n+1} 。$$

（也可利用递推法求$\int_a^b |g(x)|dx$：$I(n,m) = \int_a^b (x-a)^n (b-x)^m dx = \frac{m}{n+1} I(n+1, m-1)$

$= \cdots = \frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} I(n+m, 0)$）

所以$|\int_a^b f(x)dx| \le \frac{(n!)^2 M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}$.

12. $|\frac{b-a}{(x-a)x-b)} f(x)| = |\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(x)-f(b)}{x-b}| = |f'(\xi) - f'(\eta)| = |\int_\xi^\eta f''(t)dt|$

$\le \int_a^b |f''(x)|dx$.

13． 设$|f(c)| = \max|f(x)|$，则$c\in(a,b)$，且$|f(c)|>0$。利用上一练习题有

$$\frac{1}{|f(c)|}|\frac{b-a}{(c-a)(c-b)} f(c)| \le \frac{\int_a^b |f''(x)|dx}{|f(c)|} = \int_a^b |\frac{f''(x)}{f(c)}|dx \le \int_a^b |\frac{f''(x)}{f(x)}|dx,$$

而当$c\in(a,b)$时总有 $|\frac{b-a}{(c-a)(c-b)}| \ge \frac{4}{b-a}$，故

$$\int_a^b |\frac{f''(x)}{f(x)}|dx \ge |\frac{b-a}{(c-a)(c-b)}| \ge \frac{4}{b-a}.$$

命题得证。

14. $|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})|\le\frac{M}{2n}=|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx|\le\sum_{k=1}^{n}|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx|$

而

$$|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx|\le\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x)-f(\frac{k}{n})|dx$$

$$=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f'(\xi)|\cdot|x-\frac{k}{n}|dx\le M\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(\frac{k}{n}-x)dx=\frac{M}{2n^2},$$

所以 $|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})|\le\frac{M}{2n}$.

15. 令 $I=\int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)g(x)f(x)dx-\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx$,

则 $I=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(y)g(y)dxdy-\int_a^b\int_a^b p(x)f(x)p(y)g(y)dxdy$

$$=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y)-f(x)]dxdy,$$

同样可得 $I==\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x)-f(y)]dxdy$,

两式相加得 $2I=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy$,

由于 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都单调增加,且 $p(x)\ge 0$，故 $2I\ge 0$,

所以 $I=\int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)g(x)f(x)dx-\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx$,

结论得证。

16．先证左边不等式（可用二重积分或柯西不等式去证）

方法一（用柯西不等式）

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\int_0^1(\sqrt{f(x)})^2dx\int_0^1(\frac{1}{\sqrt{f(x)}})^2dx$$

$$\ge[\int_0^1\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx]^2=1。$$

方法二（用二重积分）

令 $I=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$，则

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{f(x)}{f(y)}dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{f(y)}{f(x)}dxdy,$$

所以 $2I=\int_0^1\int_0^1[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}]dxdy\ge\int_0^1\int_0^1 2dxdy=2$，即 $I\ge 1$。

（注：左边不等式与条件“$1\le f(x)\le 2$”无关，只需“$f(x)>0$”。）

再证右边不等式

$$1\le f(x)\le 2\Rightarrow[f(x)-1][2-f(x)]\ge 0\Rightarrow f^2(x)+2\le 3f(x),$$

即得 $f(x)+\frac{2}{f(x)}\le 3$，从而 $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{2}{f(x)}dx\le 3$，

又 $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{2}{f(x)}dx\ge 2[\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1\frac{2}{f(x)}dx]^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}[\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx]^{\frac{1}{2}}$

所以

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\le\{\frac{1}{2\sqrt{2}}[\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{2}{f(x)}dx]\}^2\le\frac{9}{8}.$$

17. （1）$\frac{1}{M}\int_a^b f(x)dx+m\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\sqrt{\frac{m}{M}}[\int_a^b\frac{1}{\sqrt{Mm}}f(x)dx+\int_a^b\sqrt{Mm}\frac{1}{f(x)}dx]$

$$=\sqrt{\frac{m}{M}}\int_a^b[\frac{1}{\sqrt{Mm}}f(x)+\sqrt{Mm}\frac{1}{f(x)}]dx\le\sqrt{\frac{m}{M}}\int_a^b 2dx=2\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a)\text{。}$$

(也可用二重积分证明:

$$I=\frac{1}{M}\int_a^b f(x)dx+m\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\frac{1}{M}\int_a^b f(x)dx+m\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b dy\int_a^b\frac{f(x)}{M}dx+\frac{1}{b-a}\int_a^b dx\int_a^b\frac{m}{f(y)}dy$$

$=\frac{1}{b-a}\iint_D[\frac{f(x)}{M}+\frac{m}{f(y)}]dxdy$，其中 $D=[a,b]\times[a,b]$，

同样有 $I=\frac{1}{b-a}\iint_D[\frac{f(y)}{M}+\frac{m}{f(x)}]dxdy$，

从而 $2I=\frac{1}{b-a}\iint_D[\frac{f(x)}{M}+\frac{m}{f(x)}+\frac{f(y)}{M}+\frac{m}{f(y)}]dxdy$

$$\ge\frac{1}{b-a}\iint_D 4\sqrt{\frac{m}{M}}dxdy=4\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a),$$

所以$I \ge 2\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a)$.)

（2）此不等式是练习题 16 的右边不等式的推广，证明方法相同，同学们自己完成。

18.(1)证明是简单的,可由柯西不等式得结论.也可由等式

$$\int_0^1 f^2(x)dx - [\int_0^1 f(x)dx]^2 = \int_0^1 [f(x)-\mu]^2 dx$$

得结论.

(2)(从右边往左边证)

$$(M_1-\mu)(\mu-m_1) - \int_0^1 (M_1 - f(x))(f(x)-m_1)dx$$

$$= M_1\mu + m_1\mu - M_1 m_1 - \mu^2 - M_1\int_0^1 f(x)dx - m_1\int_0^1 f(x)dx + M_1 m_1 + \int_0^1 f^2(x)dx$$

$$= \int_0^1 f^2(x)dx - \mu^2 = \int_0^1 f^2(x)dx - [\int_0^1 f(x)dx]^2 .$$

(3) 由(2)可得结论.

(4) 由(3)知

$$\int_0^1 [f(x)-\mu]^2 dx = \int_0^1 f^2(x)dx - [\int_0^1 f(x)dx]^2 \le \frac{(M_1-m_1)^2}{4},$$

同样有 $\int_0^1 [g(x)-\nu]^2 dx \le \frac{(M_2-m_2)^2}{4}$,其中$\nu = \int_0^1 g(x)dx$,

从而 $[\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx]^2 = [\int_0^1 (f(x)-\mu)(g(x)-\nu)dx]^2$

$$\le \int_0^1 (f(x)-\mu)^2 dx \cdot \int_0^1 (g(x)-\nu)^2 dx \le \frac{(M_1-m_1)^2}{4}\cdot\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

所以$\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx \le \frac{(M_1-m_1)(M_2-m_2)}{4}$.

注:本题之(4)的一般形式是

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx \le \frac{(M_1-m_1)(M_2-m_2)}{4},$$

对于一般形式,可通过换元$t = \frac{x-a}{b-a}$化成本题的形式.

19. （用二重积分证明）

令$I = \int_0^1 xf(x)dx\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 xf^2(x)dx\int_0^1 f(x)dx$，仿例 6 的做法可得

$$2I = \int_0^1\int_0^1 f(x)f(x)(x-y)(f(y)-f(x))dxdy \ge 0,$$

从而得结果。

20. 先证左边不等式，令$I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$，则$I^2 = \int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}dxdy > \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，

其中$D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，

而$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})$，故$I=\int_0^1 e^{-x^2}dx>\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})}$。

再证右边不等式．当$u<0$ 时，有$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{e^{\xi}}{3!}u^3<1+u+\frac{u^2}{2}$，

故$e^{-x^2}<1-x^2+\frac{x^4}{2}$，两边积分可得右边不等式。

21． （本题是均值不等式中的结论（３））下面结出证明：

由题设知$g(u)\ge g(u_0)+g'(u_0)(u-u_0)$，

取$u_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，$u=f(x)$，则

$$g(f(x))\ge g(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)+g'(u_0)(f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx),$$

两边积分并注意到右端后一项的积分为零，便可得结论。

22. （本题是均值不等式中的结论（4））下面结出证明：

由题设知$\varphi(u)\ge\varphi(u_0)+\varphi'(u_0)(u-u_0)$，

取$u_0=\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$，$u=f(x)$，则

$$\varphi(f(x))\ge\varphi(u_0)+\varphi'(u_0)(f(x)-u_0),$$

从而

$$p(x)\varphi(f(x))\ge\varphi(u_0)p(x)+\varphi'(u_0)(p(x)f(x)-u_0p(x))$$

两边积分并注意到右端后一项的积分为零，便可得结论。

23． 本题为练习题 21 的特例

24． 方法一（本题为练习题 21 的特例）令$g(x)=\frac{x}{1-x}$，则$g''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\ge 0,\ \ x\in(0,1)$，

由练习题 21 的结论知

$$\int_0^1 g(f(x))dx\ge g(\int_0^1 f(x)dx),$$

于是得结论。

方法二（利用二重积分）

$$I=\int_0^1\frac{f(x)}{(1-f(x))}dx\int_0^1(1-f(x))dx-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\cdot(1-f(y))dxdy-\int_0^1\int_0^1 f(x)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f(x)\frac{f(x)-f(y)}{1-f(x)}dxdy\text{，}$$

$$2I=\int_0^1\int_0^1[f(x)\frac{f(x)-f(y)}{1-f(x)}+f(y)\frac{f(y)-f(x)}{1-f(y)}]dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1\frac{[f(x)-f(y)]^2}{(1-f(x))(1-f(y))}dxdy\geqslant 0\text{。}$$

25.（1）这是练习题 22（即均值不等式（4）的特例，其中 $\varphi(x)=x^p$ 。

（2） 由（1）得

$$(\int_0^1 f(x)g(x)dx)^p\le[\int_0^1 g(x)dx]^{p-1}\int_0^1 g(x)f^p(x)dx,$$

如能证明不等式 $[\int_0^1 g(x)dx]^{p-1}\int_0^1 g(x)f^p(x)dx\le\int_0^\lambda f^p(x)dx$，则可得结论.下面证明此不等式。

记 $\mu=[\int_0^1 g(x)dx]^{p-1}$,那么

$$\int_0^\lambda f^p(x)dx-[\int_0^1 g(x)dx]^{p-1}\int_0^1 g(x)f^p(x)dx=\int_0^\lambda f^p(x)dx-\mu\int_0^1 g(x)f^p(x)dx$$

$$=\int_0^\lambda f^p(x)[1-\mu g(x)]dx-\mu\int_\lambda^1 g(x)f^p(x)dx$$

$$\ge f^p(\lambda)\int_0^\lambda[1-\mu g(x)]dx-\mu\int_\lambda^1 g(x)f^p(x)dx$$

$$=f^p(\lambda)(\int_0^1 g(x)dx)^p-\mu\int_0^\lambda g(x)dx)-\mu\int_\lambda^1 g(x)f^p(x)dx$$

$$=\mu f^p(\lambda)\int_\lambda^1 g(x)dx)-\mu\int_\lambda^1 g(x)f^p(x)dx$$

$$=\mu\int_\lambda^1 g(x)(f^p(\lambda)-f^p(x)]dx\ge 0\text{。}$$

因此命题得证.

(本题之(2)是练习题 4 的推广,而把练习题 4 中的条件“$0\le g(x)\le 1$”改为“$0<g(x)\le 1$”是为了照顾本题之(1))

26.由题设知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增，从而有严格单增的反函数，作换元 $t=f(x)$，则

$$|\int_a^b\sin f(x)dx|=|\int_{f(a)}^{f(b)}\sin t df^{-1}(t)|=|\int_{f(a)}^{f(b)}\sin t\cdot(f^{-1}(t))'dt|\text{，}$$

若 $f(a)\geqslant 0$，则 $|\int_{f(a)}^{f(b)}\sin t\cdot(f^{-1}(t))'dt|\leqslant|\int_0^\pi\sin t\cdot(f^{-1}(t))'dt\leqslant\frac{1}{m}\int_{f(a)}^{f(b)}\sin tdt=\frac{2}{m}$，

若 $f(b)\leqslant 0$，则 $|\int_{f(a)}^{f(b)}\sin t\cdot(f^{-1}(t))'dt|\leqslant\int_{-\pi}^0|\sin t|\cdot(f^{-1}(t))'dt\leqslant\frac{2}{m}$，

若 $f(a)<0,f(b)>0$，则

$|\int_{f(a)}^{f(b)}\sin t\cdot(f^{-1}(t))'dt|\leqslant\max\{|\int_{f(a)}^{0}\sin t\cdot(f^{-1}(t))'dt|,\int_{0}^{f(b)}\sin t\cdot(f^{-1}(t))'dt|\leqslant\frac{2}{m}$ 。

所以$|\int_a^b\sin f(x)dx|\leqslant\frac{2}{m}$ 。

27.令$h(x)=\int_a^x(f(t)-g(t))dt$, 则$h(x)\geq 0\ (a\leq x\leq b)$, 且$h(a)=h(b)=0$.

$$\int_a^b xf(x)dx-\int_a^b xg(x)dx=\int_a^b x(f(x)-g(x))dx=\int_a^b xh'(x)dx$$

$$=xh(x)|_a^b-\int_a^b h(x)dx\leq 0.$$

28. （1）易见

$\int_0^1[(f''(x))^2-(p''(x))^2]dx=\int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2dx$等价于$\int_0^1 p''(x)[f''(x)-p''(x)]dx=0$，

下证$\int_0^1 p''(x)[f''(x)-p''(x)]dx=0$，事实上

$$\int_0^1 p''(x)[f''(x)-p''(x)]dx=\int_0^1 p''(x)d[f'(x)-p'(x)]$$

$$=[p''(x)(f'(x)-g'(x))]|_0^1-\int_0^1 p'''(x)[f'(x)-p'(x)]dx 。$$

$$=-\int_0^1 p'''(x)[f'(x)-p'(x)]dx=0 。$$

（2）由（1）知

$\int_0^1[(f''(x))^2-(p''(x))^2]dx=\int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2dx\geq 0$，从而

$\int_0^1(f''(x))^2dx\geq\int_0^1[p''(x)]^2dx=\int_0^1(6x-2)^2dx=4$，

等号成立当且仅当$\int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2dx=0$，又$f''(x),p''(x)$连续，且$[f''(x)-p''(x)]^2\geq 0$，故等号成立当且仅当$f''(x)=p''(x)$，再结合题设条件知$f(x)=p(x)$。

29. $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 tf(t)dt\leqslant 2\int_0^1|f(t)|dt=2$，

令$f(x)=(n+1)x^n$，则$\int_0^1|f(x)|dx=1$，

$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 tf(t)dt=2(n+1)\int_0^1 t^{n+1}dt=\frac{2(n+1)}{n+2}\to 2$，

所以$C=2$。