第二章 一元微分学

第六节 利用导数讨论函数性质

本节内容包括：利用导数讨论函数的单调性、求函数极值点和极值、最值点和最值，及其应用，利用导数讨论函数图形的凹凸性、求曲线的拐点，求曲线切线、法线、渐近线、函数作图及曲率和曲率半径等。

这部分内容很重要，事实上前面几节的知识都用到了本节的内容。在高等数学的各种考试中本节的知识都是重要部分，同学们一定要很熟练。但由于这部分内容一般不要求很高的技巧（要求熟练、准确及对概念的清楚），所以只简单地举几个例子。最后举二个例子介绍相关变化率的问题。

例1． 设 $f(x)$ 二阶可导，$\dfrac{dy}{dx}=(4-y)y^{\beta}(\beta>0)$．若曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点为 $(x_0,3)$，则

$\beta=$ ________.

分析：由题设知 $y|_{x=x_0}=3,$ 并且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0}=0$，而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}[(4-y)y^{\beta}]=\dfrac{d}{dy}[(4-y)y^{\beta}]\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$=[-y^{\beta}+\beta(4-y)y^{\beta-1}]\cdot(4-y)y^{\beta}=(4-y)y^{2\beta-1}(4\beta-(\beta+1)y)$

由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0}=\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{y=3}=0$，得 $\beta=3$

注：本题的解决无需技巧，关键是清楚拐点的概念及清楚复合函数的求导.

例 2：求曲线 $\begin{cases}x=t\ln t\\ y=\dfrac{\ln t}{t}+1\end{cases}$ 的渐近线

解：先看是否有水平渐近线：易见 $t\to+\infty$ 时 $x\to+\infty, y\to1$，所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$，故有水平渐近线 $y=1$；

再看是否有铅直渐近线：易见 $t\to+0$ 时 $x\to0, y\to\infty$，所以有 $\lim\limits_{x\to0}y=\infty$，故有铅直渐近线 $x=0$；

再看是否有斜渐近线：易见 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=0$，故无斜渐近线.

例 3.设 $a>1$，求 a 的值，使得对任意 $x\in(0,+\infty)$，有 $x^a\le a^x$。

解：方法一：令 $f(x)=x^{-a}a^x$，$g(x)=\ln f(x)=x\ln a-a\ln x$，

易见 $g'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}$，得 $g(x)$ 的唯一驻点 $x=\dfrac{a}{\ln a}$，且 $x<\dfrac{a}{\ln a}$ 时，$g'(x)<0$；$x>\dfrac{a}{\ln a}$ 时，$g'(x)>0$。所以 $g(x)$ 的最小值为

$g(\frac{a}{\ln a})=a-a\ln\frac{a}{\ln a}=a(1-\ln\frac{a}{\ln a})$，

对任意 $x\in(0,+\infty)$，有 $x^a\le a^x$ 当且仅当 $1-\ln\frac{a}{\ln a}\ge 0$，即 $\frac{\ln a}{a}\ge\frac{1}{e}$，

而函数 $h(t)=\frac{\ln t}{t}\le\frac{1}{e}$，且等号成立当且仅当 $t=e$，所以 $a=e$.

方法二：注意到 $x^a\le a^x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}\le\frac{\ln a}{a}$，

又由于 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $x=e$ 取得 $(0,+\infty)$ 的最大值，且 $x=e$ 为唯一的最大值点，故 $a=e$。

例 4．求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的切线，使它被两坐标轴所截的线段最短.

解法一：椭圆的参数方程为 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$，设切点为 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，

那么切线的斜率为 $k=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$，切线方程为

$$y-b\sin\theta=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}(x-a\cos\theta)$$

切线在 x 轴上的截距为 $\frac{a}{\cos\theta}$，切线在 y 轴上的截距为 $\frac{b}{\sin\theta}$．从所截线段长为

$$l(\theta)=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}}\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

求 $l(\theta)$ 的最小值点等价于求 $f(\theta)=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{\mathrm{b}^2}{\sin^2\theta}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的最小值点.

$$f'(\theta)=\frac{2a^2}{\cos^3\theta}\sin\theta-\frac{2b^2}{\sin^3\theta}\cos\theta=0\Rightarrow\tan\theta=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

从而知 $f(\theta)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 有唯一驻点 $\theta=\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}$，由本问题的实际背景我们可以判断 $f(\theta)$ 在

$(0,\frac{\pi}{2})$ 内取得最小值，因此 $\theta=\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时 $f(\theta)$ 取得最小值．此时切点坐标为

$$x=a\sqrt{\frac{a}{a+b}},\ y=b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

所求的切线方程为 $y-b\sqrt{\frac{b}{a+b}}=-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}(x-a\sqrt{\frac{a}{a+b}})$，化简得

$$\frac{x}{\sqrt{a(a+b)}}+\frac{y}{\sqrt{b(a+b)}}=1$$

解法二：设切点为$(x,y)\,(0<x<a)$，那么切线的斜率为$k=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$，切线方程为

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x)$$

切线在x轴上的截距为$\dfrac{a^2}{x}$，切线在y轴上的截距为$\dfrac{b^2}{y}$．从所截线段长为

$$l(x)=\sqrt{\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}}\quad(0<x<a),$$

求$l(x)$的最小值点等价于求$f(x)=\dfrac{a^4}{x^2}+\dfrac{b^4}{y^2}\,(0<x<a)$的最小值点．

$f'(x)=-\dfrac{2a^4}{x^3}-\dfrac{2b^4}{y^3}y'=-\dfrac{2a^4}{x^3}-\dfrac{2b^4}{y^3}(-\dfrac{b^2x}{a^2y})=0\Rightarrow\dfrac{x^2}{a^3}=\dfrac{y^2}{b^3}$，又$x,y$满足$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

联立以上两个方程得：$x=\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\ y=\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$。

从而知$f(x)$在$(0,a)$有唯一驻点$x=\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$，由本问题的实际背景我们可以判断$f(x)$在$(0,a)$内取得最小值，因此$x=\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$时$f(x)$取得最小值．此时切点坐标为

$$x=a\sqrt{\frac{a}{a+b}},\ y=b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

所求的切线方程

$$\frac{x}{\sqrt{a(a+b)}}+\frac{y}{\sqrt{b(a+b)}}=1$$

注：利用高等数学知识解决实际问题（即所谓的应用题）在考试中也会出现．其中用微分学（一元或多元微分学）知识解决实际应用中的最大值或最小值问题是其中很重要的一部分．解决这种问题的一般步骤是：根据实际背景和问题的要求选好自变量并求出目标函数同时确定该目标函数的定义域I（一般情况下I是一个区间，可以是开的、闭的或半开半闭，也可是有限区间、无限区间．）

求出目标函数在I内的驻点，如果驻点是唯一的，那么可用下面两种方式说明该驻点就是所求的最大值点或最小值点：（1）根据实际问题的背景，可以判定目标函数在区间I内部取得最大值（或最小值），则该驻点就是最大值点（最小值点）．（2）通过一阶导或二阶导可以判定该驻点为极大值点（或极小值点），则该驻点就是最大值点（最小值点）．另外要注意：选择不同的自变量，目标函数的表达式会不一样，计算量及复杂性可能有很大差别，因此选择合适的自变

量有时是很关键的．

有的问题既可用一元微分学去解决，也用二元微分学去解决，就看哪个更简便．事实上例 3 用二元微分学知识去解可能更方便，实际就是求目函数 $f(x,y)=\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}\,(0<x<a,0<y<b)$

在约束条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 下的最小值问题，可用拉格朗日乘数法去解决．

例 4．一长度为 $5m$ 的梯子铅直地靠在铅直的墙上，其下端沿地板以 $3m/s$ 的速率离开墙角而滑动，

（1） 当其下端离开墙角 $1.4m$ 时，梯子上端下滑的速率是多少？

（2） 何时梯子上、下端滑行的速率相同？

解：（1）梯子滑行 t 秒时，上、下端距离墙角的距离分别记为 y 米和 x 米，依题意有

$y=\sqrt{25-x^2}$ ，以及 $\frac{dx}{dt}=3$，

本题欲求 $\frac{dy}{dt}|_{x-1.4}$，

对 $y=\sqrt{25-x^2}$ 两边对时间 t 求导得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\frac{dx}{dt}=\frac{-3x}{\sqrt{25-x^2}}$$

从而得 $\frac{dy}{dt}|_{x-1.4}=\frac{-1\times 1.4}{\sqrt{25-1.4^2}}=-0.875$，即上端下滑速率为 $0.875m/s$.

（3）由 $\frac{3x}{\sqrt{25-x^2}}=3$，得 $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，从而 $t=\frac{x}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$，即梯子滑行 $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ 秒后，其上、下端滑行的速率相同．

注：仔细体会本题的解答，本题中涉及三个变量 x,y,t， x,y 都是 t 的函数且 x 与 y 有明确的函数关系。本题中已知 x,y 的函数关系： $y=\sqrt{25-x^2}$ （或 $x^2+y^2=25$），且已知 x 对 t 的导数，目标是求 y 对 t 的导数．这种问题称为相关变化率的问题．在确定了 x,y 的函数关系 $F(x,y)=0$ 后，这种问题是简单的，只须两边对 t 求导可得 $F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}=0$，从而求出 $\frac{dy}{dt}$．在具体问题中，建立 x,y 的函数关系是关键．

例 5． 溶液自深 $18cm$，顶直径为 $12cm$ 的正圆锥漏斗中漏入一直径为 $10cm$ 的圆柱形容器中，开始时漏斗盛满水，当溶液在漏斗中深 $12cm$ 时，其水平面下落速度为 $1cm/\min$，问此时圆柱形容器中水平面上升的速度为多少？

分析：这里涉及三个变量：时刻 t，及时刻 t 时漏斗水面深度 x、圆柱形容器中的水面高度 y，x,y 都是 t 的函数，y 是 x 的函数。已知 $\frac{dx}{dt}|_{x=12}=-1$，欲求 $\frac{dy}{dt}|_{x=12}$。仿上面例题，如能建立 x,y 的函数关系，问题就不难了。那么 x,y 的函数关系的建立成为解决本题的关键，这种关系的建

立是基于“漏斗漏出的水量和圆柱形容器中的水量相等”。

解：设在t时刻漏斗水的深度和圆柱形容器中水的深度分别为x厘米和y厘米，

t时刻漏斗的水面半径为$r=\frac{1}{3}x$，此时漏斗漏出的水量为 $\frac{\pi}{3}(6^2\times 18-\frac{x^3}{9})$，此时圆柱形容器中的水量为$25\pi y$，因此有

$$25\pi y=\frac{\pi}{3}(6^2\times 18-\frac{x^3}{9})$$

两边对t求导得 $25\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{9}\frac{dx}{dt}$，又由$\frac{dx}{dt}|_{x=12}=-1(cm/\min)$，得

$\frac{dy}{dt}|_{x=12}=\frac{12^2}{9\times 25}=\frac{16}{25}(cm/\min)$.

练习题:

1．设 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!},(n$ 为正整数），证明在$(-\infty,+\infty)$内有正的最小值.

2．比较e^π与π^e的大小.

3．求数列$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$中的最大项.

4.求a的值,使得 $f(x)=5x^2+ax^{-5}(x>0)$ 的值不小于28.

5．求曲线$\begin{cases}x=t^2\\y=3t+t^3\end{cases}$的拐点.

6.设$y=y(x)$由参数式表示为

$$x=\frac{t^3}{t^2+1},y=\frac{t^3-2t^2}{t^2+1}$$

求$y(x)$的极值.

7.设$y=y(x)$是由方程$x^2+y+\sin(xy)=0$确定的隐函数,证明$x=0$是$y(x)$的极大值点.

8.设 $f(x)=a^x-ax\ (a>1)$ 在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为$x(a)$,问a为何值时,$x(a)$最小,并求最小值.

9 设函数 $f(x)$ 的定义域为$D=\{x\mid x\neq 0,x\neq 1\}$，且满足 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=1+x$，求 $f(x)$ 的表达式并求曲线$y=f(x)$的渐近线.

10．将10分成n份$a_1,a_2,\cdots,a_n$（即$a_i>0,\sum_{i=1}^{n}a_i=10$），$n$为多少且$a_1,a_2,\cdots,a_n$各是多少时，乘积$a_1a_2\cdots a_n$最大。

11．（1）求$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$的最小值；

（2）设正值序列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，证：$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

12．由直线$y=0,x=8$及抛物线$y=x^2$围成一个曲边三角形，在其曲边$y=x^2$上求一点，使曲线$y=x^2$在该点处的切线与直线$y=0,x=8$及曲线$y=x^2$围成的图形的面积最小。

答案与提示

1．由$f(-\infty)=+\infty,f(+\infty)=+\infty$，故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有最小值点，最小值点记为$x_0$，则$f'(x_0)=0$，所以$f(x_0)=f'(x_0)+\frac{{x_0}^{2n}}{(2n)!}>0$。

2．取对数变成为比较$\pi\ln e$与$e\ln\pi$的大小，等价于比较$\frac{\ln e}{e}$与$\frac{\ln\pi}{\pi}$的大小，利用$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调性可解决问题。

3． 数列a_n也是函数$a_n=f(n)$，求其最大值（即最大项）的问题可用单调性解决．这种函数的自变量n是离散变量，不能对n求导，于是把n变成x，通过讨论$f(x)$的单调性进而得到数列a_n随n增加时（或随$\frac{1}{n}$减少时）的变化情况，再求出最大项．本题中$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，但由于求导不是很方便，可考虑函数$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，答案$\sqrt[3]{3}$。

4. 问题等价于$a\geq 28x^5-5x^7$,因此就是求$g(x)=28x^5-5x^7$在$(0,+\infty)$的最大值问题。答案$a\geq 2^8$。

5．答案：$(1,4),(1,-4)$ ．

6. $y'(x)=\frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}$,

(i) $t=1$时,$x=\frac{1}{2}$.当$x<\frac{1}{2}$时,$t<1$,从而$y'(x)<0$;当$x>\frac{1}{2}$时,$t>1$,从而$y'(x)>0$.故$y(x)$有极

小值 $y(\frac{1}{2})=y|_{t=1}=-\frac{1}{2}$.

(ii) $t=0$ 时, $x=0$. 当 $x<0$ 时, $t<0$,从而 $y'(x)>0$;当 $x>0$ 时, $t>0$,从而 $y'(x)<0$.故 $y(x)$ 有极大值 $y(0)=y|_{t=0}=0$.

7. $y'(x)=-\frac{2x+y\cos(xy)}{1+x\cos(xy)}$.由 $y|_{x=0}=0$ 及 $y'(0)=0$ 得 $y(x)=y(0)+y'(0)x+o(x)=o(x)$,故 $2x+y\cos(xy)=2x+o(x)\cos(xy)=2x+o(x)$ 在 $x=0$ 附近的符号由 x 的符号决定，由此可证得结论。

8. $x(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}$,令 $t=\ln a$,则 $x(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}=1-\frac{\ln t}{t}$,易得 $a=e^e$ 时 $x(a)$ 取得最小值 $1-\frac{1}{e}$。

9. 对 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=1+x$，作换元 $t=\frac{x-1}{x}$ 得 $f(t)+f(\frac{1}{1-t})=\frac{2-t}{1-t}$，即 $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2-x}{1-x}$，再作换元 $x=\frac{t-1}{t}$ 得 $f(\frac{t-1}{t})+f(\frac{-1}{1-t})=\frac{2t-1}{t}$，得 $f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{x-1})=\frac{2x-1}{x}$，由以上三个式子可得 $f(x)$ 的表达式，有了表达式后再求渐近线是容易的

10. 对于固定的 n， $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{10}{n}$ 时乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 最大，最大值为 $(\frac{10}{n})^n$，问题转化求 n，使 $(\frac{10}{n})^n$ 最大，即 $n\ln\frac{10}{n}=10\times\frac{\ln\frac{10}{n}}{\frac{10}{n}}$ 最大，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，通过考察 $f(x)$ 的最值及单调性易得结论。

11.（1） $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ 的最小值为 $f(1)=1$。

（2） 由（1）知 $\ln x_n+\frac{1}{x_n}\ge 1$，又 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，从而 $x_n\le x_{n+1}$，又由 $\ln x_n<\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，得 $x_n\le e$，故数列 $\{x_n\}$ 单增且有界，因此 $\{x_n\}$ 收敛。设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则 $\ln a+\frac{1}{a}\ge 1$，又由于 $\ln a+\frac{1}{a}\ge 1$，故 $\ln a+\frac{1}{a}=1$，结合（1）得 $a=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

12. $(\frac{16}{3},\frac{256}{9})$