第二节　双因素试验的方差分析

一、双因素等重复试验的方差分析

二、双因素无重复试验的方差分析

三、小结

一、双因素等重复试验的方差分析

因素A: $A_1, A_2, \cdots, A_r$. 因素B: $B_1, B_2, \cdots, B_s$.

表 9.8

因素B / 因素A	B_1	B_2	$\cdots$	B_s
A_1	$X_{111}, X_{112}, \cdots, X_{11t}$	$X_{121}, X_{122}, \cdots, X_{12t}$	$\cdots$	$X_{1s1}, X_{1s2}, \cdots, X_{1st}$
A_2	$X_{211}, X_{212}, \cdots, X_{21t}$	$X_{221}, X_{222}, \cdots, X_{22t}$	$\cdots$	$X_{2s1}, X_{2s2}, \cdots, X_{2st}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_r	$X_{r11}, X_{r12}, \cdots, X_{r1t}$	$X_{r21}, X_{r22}, \cdots, X_{r2t}$	$\cdots$	$X_{rs1}, X_{rs2}, \cdots, X_{rst}$

假设

$$X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2), i = 1, \cdots, r, j = 1, \cdots, s, k = 1, \cdots, t.$$

各X_{ijk}独立,μ_{ij}, σ^2均为未知参数.

$$\left.\begin{array}{l} X_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \\ \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), \text{各} \varepsilon_{ijk} \text{独立}, \\ i = 1,2,\cdots,r, j = 1,2,\cdots,s, \\ k = 1,2,\cdots,t. \end{array}\right\}$$

记号

$$\boxed{\mu = \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}}$$ 总平均

$$\mu_{i\bullet} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}, i = 1,\cdots,r \qquad \mu_{\bullet j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}, j = 1,\cdots,s$$

$$\boxed{\alpha_i = \mu_{i\bullet} - \mu, \quad i = 1,\cdots,r}$$ 水平A_i的效应

$$\boxed{\beta_j = \mu_{\bullet j} - \mu, \quad j = 1,\cdots,s}$$ 水平B_j的效应

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0.$$

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \boxed{(\mu_{ij} - \mu_{i\bullet} - \mu_{\bullet j} + \mu)}$$ 记为 γ_{ij}

$$= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_{ij} = 0, j = 1, \cdots, s$$

$$\sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} = 0, i = 1, \cdots, r$$

水平 A_i 和水平 B_j 的交互效应

$$\left.\begin{array}{l} X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \\ \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), \text{各} \varepsilon_{ijk} \text{独立}, \\ i = 1,2,\cdots,r, j = 1,2,\cdots,s, k = 1,2,\cdots,t, \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{s} \beta_j = 0, \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ij} = 0, \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} = 0. \end{array}\right\}$$

双因素试验方差分析的数学模型

检验假设

$$\begin{cases} H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0, \\ H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \text{不全为零}. \end{cases}$$

因素A各水平的效应（影响）无差异

$$\begin{cases} H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0, \\ H_{12}: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \text{不全为零}. \end{cases}$$

因素B各水平的效应（影响）无差异

$$\begin{cases} H_{03}: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \cdots = \gamma_{rs} = 0, \\ H_{13}: \gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{rs} \text{不全为零}. \end{cases}$$

因素A和B各水平的交互效应（影响）无差异

检验步骤 1. 分解平方和;

2. 研究统计特性;

3. 确定拒绝域.

1.分解平方和

$$\overline{X} = \frac{1}{rst}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk} \qquad \overline{X}_{ij\bullet} = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk}$$

$$\overline{X}_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{st}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk} \qquad \overline{X}_{\bullet j\bullet} = \frac{1}{rt}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk}$$

$$\boxed{S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(X_{ijk} - \overline{X})^2}$$ 总偏差平方和(总变差)

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}[(X_{ijk} - \underline{\overline{X}_{ij\bullet}}) + (\underline{\overline{X}_{i\bullet\bullet}} - \overline{X}) + (\underline{\overline{X}_{\bullet j\bullet}} - \underline{\overline{X}})$$

$$+ (\underline{\overline{X}_{ij\bullet}} - \underline{\overline{X}_{i\bullet\bullet}} - \underline{\overline{X}_{\bullet j\bullet}} + \underline{\overline{X}})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}[(X_{ijk}-\overline{X}_{ij\bullet})+(\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X})+(\overline{X}_{\bullet j\bullet}-\overline{X})+(\overline{X}_{ij\bullet}-\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X}_{\bullet j\bullet}+\overline{X})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(X_{ijk}-\overline{X}_{ij\bullet})^2+st\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X})^2+rt\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{\bullet j\bullet}-\overline{X})^2+t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{ij\bullet}-\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X}_{\bullet j\bullet}+\overline{X})^2$$

$$S_T = \boxed{S_E}+\boxed{S_A}+\boxed{S_B}+\boxed{S_{A\times B}}$$

误　差平方和

因素 A 的效应平方和

因素 B 的效应平方和

因素*A*,*B*的交互效应平方和

2.研究统计特性

	自由度	数学期望
S_T	$rst-1$	
S_E	$rs(t-1)$	$rs(t-1)\sigma^2$
S_A	$r-1$	$(r-1)\sigma^2+st\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2$
S_B	$s-1$	$(s-1)\sigma^2+rt\sum_{i=1}^{r}\beta_j^2$
$S_{A\times B}$	$(r-1)(s-1)$	$(r-1)(s-1)\sigma^2+t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij}^2$

3.确定拒绝域

当$H_{01}:\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$为真时,

$$F_A=\frac{S_A/(r-1)}{S_E/(rs(t-1))}\sim F(r-1,rs(t-1)).$$

取显著性水平为α,得假设H_{01}的拒绝域为

$$F_A=\frac{S_A/(r-1)}{S_E/(rs(t-1))}\ge F_\alpha(r-1,rs(t-1)).$$

类似地,取显著性水平为α,得假设H_{02}的拒绝域为

$$F_B=\frac{S_B/(s-1)}{S_E/(rs(t-1))}\ge F_\alpha(s-1,rs(t-1)).$$

取显著性水平为 α, 得假设 H_{03} 的拒绝域为

$$F_{A\times B} = \frac{S_{A\times B} \big/ ((r-1)(s-1))}{S_E \big/ (rs(t-1))}$$

$$\geq F_{\alpha}((r-1)(s-1), rs(t-1)).$$

表9.9 双因素试验的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均 方	F 比
因素 A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = \dfrac{S_A}{r-1}$	$F_A = \dfrac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
因素 B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B = \dfrac{S_B}{s-1}$	$F_B = \dfrac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E}$
交互作用	$S_{A\times B}$	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_{A\times B} = \dfrac{S_{A\times B}}{(r-1)(s-1)}$	$F_{A\times B} = \dfrac{\bar{S}_{A\times B}}{\bar{S}_E}$
误 差	S_E	$rs(t-1)$	$\bar{S}_E = \dfrac{S_E}{rs(t-1)}$	
总 和	S_T	$rst-1$		

例1 一火箭用四种燃料,三种推进器作射程试验. 每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭两次,得射程如下（以海里计）.

表9.3 火箭的射程

推进器(B)		B_1	B_2	B_3
燃料(A)	A_1	58.2 52.6	56.2 41.2	65.3 60.8
	A_2	49.1 42.8	54.1 50.5	51.6 48.4
	A_3	60.1 58.3	70.9 73.2	39.2 40.7
	A_4	75.8 71.5	58.2 51.0	48.7 41.4

假设符合双因素方差分析模型所需的条件,在水平0.05下,检验不同燃料(因素*A*)、不同推进器(因素*B*)下的射程是否有显著差异?交互作用是否显著?

具体求解步骤（教材P236）

在*MATLAB*中求解

函数:***anova2***

格式:***p=anova2(x,reps)***

在MATLAB中求解

函数:*anova2*

格式:*p=anova2(x,reps)*

说明:执行双因素试验的方差分析来比较*x*中两个或多个列或行的均值.

不同列的数据代表某一因素的差异,不同行的数据代表另一因素的差异.

如果每行列对有多于一个的观察值,则变量*reps*指出每一单元观察点的数目,每一单元包含*reps*行.

表9.3 火箭的射程

推进器(B)		B_1	B_2	B_3
燃料(A)	A_1	58.2 52.6	56.2 41.2	65.3 60.8
	A_2	49.1 42.8	54.1 50.5	51.6 48.4
	A_3	60.1 58.3	70.9 73.2	39.2 40.7
	A_4	75.8 71.5	58.2 51.0	48.7 41.4

源程序:
```
a=[58.2,56.2,65.3;52.6,41.2,60.8;
   49.1,54.1,51.6;42.8,50.5,48.4;
   60.1,70.9,39.2;58.3,73.2,40.7;
   75.8,58.2,48.7;71.5,51.0,41.4];
p=anova2(a,2)
```

Figure 1: Two-way ANOVA

文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	370.98	2	185.49	9.39	0.0035
Rows	261.68	3	87.225	4.42	0.026
Interaction	1768.69	6	294.782	14.93	0.0001
Error	236.95	12	19.746		
Total	2638.3	23			

例2 在某种金属材料的生产过程中,对热处理温度(因素B)与时间(因素A)各取两个水平,产品强度的测定结果(相对值)如表所示.在同一条件下每个实验重复两次.设各水平搭配下强度的总体服从正态分布且方差相同.各样本独立.问热处理温度、时间以及这两者的交互作用对产品强度是否有显著的影响?(取显著性水平为 0.05)

$A \backslash B$	B_1	B_2	$T_{i\bullet\bullet}$
A_1	38.0 38.6 (76.6)	47.0 44.8 (91.8)	168.4
A_2	45.0 43.8 (88.8)	42.4 40.8 (83.2)	172
$T_{\bullet j \bullet}$	165.4	175	340.4

在MATLAB中求解

源程序

```
a=[38.0,47.0;38.6,44.8;45.0,42.4;43.8,40.8];
p=anova2(a,2)
```

程序运行结果 方差分析表

Figure 1: Two-way ANOVA

文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	11.52	1	11.52	10.02	0.034
Rows	1.62	1	1.62	1.41	0.3009
Interaction	54.08	1	54.08	47.03	0.0024
Error	4.6	4	1.15		
Total	71.82	7			

二、双因素无重复试验的方差分析

$$\left.\begin{aligned}
&X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \boxed{\gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}},\\
&\varepsilon_{ijk} \sim N(0,\sigma^2), \text{各}\varepsilon_{ijk}\text{独立},\\
&i = 1,2,\cdots,r, j = 1,2,\cdots,s, k = 1,2,\cdots,t,\\
&\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0, \sum_{i=1}^{r}\gamma_{ij} = 0, \sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij} = 0.
\end{aligned}\right\}$$

双因素试验方差分析的数学模型

检验两个因素的交互效应,对两个因素的每一组合至少要做两次试验.

二、双因素无重复试验的方差分析

如果已知不存在交互作用,或已知交互作用对试验的指标影响很小,则可以不考虑交互作用.

对两个因素的每一组合只做一次试验,也可以对各因素的效应进行分析——双因素无重复试验的方差分析.

表 9.14

因素B / 因素A	B_1	B_2	$\cdots$	B_s
A_1	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1s}
A_2	X_{21}	X_{22}	$\cdots$	X_{2s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_r	X_{r1}	X_{r2}	$\cdots$	X_{rs}

假设

$$X_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2), i = 1, \cdots, r, j = 1, \cdots, s.$$

各 X_{ij} 独立, μ_{ij}, σ^2 均为未知参数.

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}, \\ i = 1,2,\cdots,r, j = 1,2,\cdots,s, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2), \text{各}\varepsilon_{ij}\text{独立}, \end{array}\right\}$$

水平A_i和水平B_j的交互效应

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \boxed{(\mu_{ij} - \mu_{i\bullet} - \mu_{\bullet j} + \mu)} \text{记为}\gamma_{ij}$$

由于不存在交互作用，$\gamma_{ij} = 0, \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$.

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2), \text{各}\varepsilon_{ij}\text{独立}, \\ i = 1,2,\cdots,r, j = 1,2,\cdots,s, \\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0. \end{array}\right\}$$

双因素无重复试验方差分析的数学模型

检验假设

$$\begin{cases} H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0, \\ H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \text{不全为零}. \end{cases}$$

因素A各水平的效应（影响）无差异

$$\begin{cases} H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0, \\ H_{12}: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \text{不全为零}. \end{cases}$$

因素B各水平的效应（影响）无差异

表9.15　双因素无重复试验的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均　方	F　比
因素A	S_A	$r-1$	$\overline{S}_A=\dfrac{S_A}{r-1}$	$F_A=\dfrac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E}$
因素B	S_B	$s-1$	$\overline{S}_B=\dfrac{S_B}{s-1}$	$F_B=\dfrac{\overline{S}_B}{\overline{S}_E}$
误　差	S_E	$(r-1)\times(s-1)$	$\overline{S}_E=\dfrac{S_E}{(r-1)(s-1)}$	
总　和	S_T	$rs-1$		

取显著性水平为 α，得假设 H_{01} 的拒绝域为

$$F_A = \frac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E} \geq F_\alpha(r-1, (r-1)(s-1)).$$

取显著性水平为 α，得假设 H_{02} 的拒绝域为

$$F_B = \frac{\overline{S}_B}{\overline{S}_E} \geq F_\alpha(s-1, (r-1)(s-1)).$$

双因素等重复试验的方差分析（P235）

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{rst}$$

$$S_A=\frac{1}{st}\sum_{i=1}^{r}T_{i\cdot\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{rst}$$

$$S_B=\frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{s}T_{\cdot j\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{rst}$$

$$S_{A\times B}=\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}T_{ij\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{rst}\right)-S_A-S_B$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B-S_{A\times B}$$

双因素无重复试验的方差分析（P240）

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}X_{ij}^2-\frac{T_{\cdot\cdot}^2}{rs}$$

$$S_A=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}T_{i\cdot}^2-\frac{T_{\cdot\cdot}^2}{rs}$$

$$S_B=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s}T_{\cdot j}^2-\frac{T_{\cdot\cdot}^2}{rs}$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B$$

例3 下面给出了在某 5 个不同地点、不同时间空气中的颗粒状物 (以 mg/m³ 计) 的含量的数据:

		因素B(地点)					
		1	2	3	4	5	$T_{i\bullet}$
因素A(时间)	1975年10月	76	67	81	56	51	331
	1976年 1 月	82	69	96	59	70	376
	1976年 5 月	68	59	67	54	42	290
	1996年 8 月	63	56	64	58	37	278
$T_{\bullet j}$		289	251	308	227	200	1275

设本题符合模型中的条件,试在显著性水平为0.05下检验:在不同时间下颗粒状物含量的均值有无显著差异,在不同地点下颗粒状物含量的均值有无显著差异.

具体求解步骤（教材P236）

在*MATLAB*中求解

源程序

```
a=[76,67,81,56,51;82,69,96,59,70;
   68,59,67,54,42;63,56,64,58,37];
p=anova2(a)
```

程序运行结果 方差分析表

Figure 1: Two-way ANOVA

文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	1947.5	4	486.875	13.24	0.0002
Rows	1182.95	3	394.317	10.72	0.001
Error	441.3	12	36.775		
Total	3571.75	19			

两个因素下均值均有显著差异

三、小结

双因素等重复（无重复）试验的方差分析步骤

(1) 建立数学模型;
(2) 分解平方和;
(3) 研究统计特性;
(4) 确定拒绝域.

第九章作业（教材第五版）：

P261：1、2

P263：6、7

注：作业不得抄袭；写上姓名、班级、学号和页码（如1/5），与第八章作业一起于12月25日之前提交至教学云平台，标明题目属于第八章/第九章。