组合数学引论 第一章

习题解答

1，设该组有 n 个人，第 i 个人认识的人数为 a_i，则 $0 \le a_i \le n-1$，如果任何两人认识的人数都不相等，则说明这些 a_i 取遍 0,1，…,n-1，不妨设为 $a_i=i-1$，即 $a_1=0$，第 1 个人不认识任何人，但 $a_n=n-1$ 说明他认识所有人，矛盾。故必有两个相等相等。

2，设这 11 个数为 a_1，$a_2,\ldots,a_{11}$，它们除以 10 的余数为 r_1，$r_2,\ldots,r_{11}$，且诸 ri 介于 0 至 9 之间，由鸽巢原理，必有两个相等，不妨设为 $r_i=r_j$，则 $10|a_i-a_j$，即它们的差是 10 的倍数。

3，设这 n+1 个数为 a_1，$a_2,\ldots,a_{n+1}$，它们除以 n 的余数为 r_1，$r_2,\ldots,r_{n+1}$，且诸 r_i 介于 0 至 n-1 之间，由鸽巢原理，必有两个相等，不妨设为 $r_i=r_j$，则 $n|a_i-a_j$，即它们的差是 n 的倍数。

4.令 b_1，b_2，…，b_{77} 分别为这 11 周期间他每天下棋的次数，并作部分和

$a_1=b_1$，

$a_2=b_1+b_2$，

…，

$a_{77}=b_1+b_2+\ldots+b_{77}.$

依题意，$b_i \ge 1 \quad (1 \le i < j \le 77)$，

$b_i+b_{i+1}+\ldots+b_{i+6} \le 12 \ (1 \le I \le 71)$，

故有 $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{77} \le 12 \cdot 11 = 132$，

当 $1 \le k \le 21$ 时，

考虑数列 a_1，a_2，…，a_{77}；a_1+k，a_2+k，…，$a_{77}+k$，

它们都在 1 与 132+k 之间，共有 154 项。由鸽巢原理，必有两项相等。由于 a_1，a_2，…，a_{77} 这 77 项互不相等，a_1+k，a_2+k，…，$a_{77}+k$ 这 77 项也互不相等，所以一定存在 $1 \le i < j \le 77$，使得 $a_j = a_i + 21$.

故而 $k= a_j - a_i$.

k=22 时，若 a_1，a_2，…，a_{77}；a_1+22，a_2+22，…，$a_{77}+22$ 这 154 项必有有两项相等，则类似于前面证明，结论成立。反证法，假设这 154 个数均不相等，且取值介于 1 与 154 之间，即取遍 1 至 154 之间的所有数，从而有 $a_1=1,a_2=2,\ldots,a_{22}=22$, $a_1+22=23$，$a_2+22=24,\ldots,a_{22}+22=44$, 于是 $a_{23} \ge 45$，则表明第 23 天下了至少 23 盘棋，与题中条件矛盾，故必有两项相等。

5, 推广：从 1 到 $2n$ 的正整数中任取 $n+1$ 个，则这 $n+1$ 个数中至少有一对数，其中一个是另一个的倍数.

证明：设这 $n+1$ 个数是 $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$ ，对此序列中的每一个数去掉一切 2 的因子，直至 剩下一个奇数为止. 例如，68＝2×2×17，则去掉 2×2，只留下 17. 那么我们会得到一个由奇数组成的序列 $b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}.$

1 到 $2n$ 之间只有 n 个奇数，故序列{ $b_1,b_2,\dots,b_{n+1}$}中至少有两个是相同的. 设 $b_i = b_j = b$，则 $a_j = 2^p b_i$，　$a_j = 2^q b_j$,由于 $a_i \neq a_j$，显然，其中一个是另一个的倍数.

6. 首先，运用抽屉原理将整数 1 至 200 按照 $1*2^n$，$3*2^n$，$5*2^n$，… ，197，199 的形式分成 100 个抽屉，从 1 到 200 中任取 100 个，其中有一数 a 小于 16，假设没有两个构成整除关系，首先按抽屉原理，这 100 个数必须为每个抽屉中仅取且必取 1 个数，否则假设不成立，其次，1、当 a 为小于 16 的奇数时（比如 15），显然有数与其构成整数关系（比如抽屉 15*11=165）结论成立

2、当此数为 $1*2^n$ 时，显然 $n \leq 3$,考虑抽屉 $3*2^{n1}$，$9*2^{n2}$，$27*2^{n3}$，$81*2^{n4}$，显然若不存在整除关系，则 $n_4 < n_3 < n_2 < n_1 < 3$，即四个数只能在 0、1、2 三个数中选择，此时产生矛盾，必存在两数整除关系;

3、更一般的，当此数为非 2 的幂的偶数时，可写成 $b*2^n$，b 为奇数，且 $1<b\leq 7$，$n\leq 2$，考虑抽屉 $3b*2^{n1}$,$9b*2^{n2}$,$27b*2^{n3}$(因 $b\leq 7$,$27b<200$), $n_3<n_2<n_1<2$，即三个数只能在 0、1 两个数中选择，此时产生矛盾，

综上，假设不成立，必存在两数整除关系。

7. 取出 101---200 即可。

8，设此 52 个整数为 $a_1,a_2,\dots,a_{52}$.被除的余数分别为 $r_1,r_2,\dots,r_{52}\in\{0,1,\dots,99\}$.构造鸽子巢为{0},{1,99},{2,98},{3,97},…,{49,51},{50}

共 51 个，这 52 个余数必有 2 个落入同一个巢，比如说是 r_i, r_j,若它俩相等则 a_i-a_j 被 100 整除，否则 $r_i+r_j=100$，此时 a_i+a_j 被 100 整除。

9，这里需假设任何三点不共线。

设这 13 个点的坐标分别为{（x_1,y_1）,(x_2,y_2)…,(x_{13},y_{13})}，从中任取三点（x_i,y_i）,(x_j,y_j)…,(x_k,y_k) 为顶点，形成的三角形的重心坐标为 $((x_i+x_j+x_k)/3,(y_i+y_j+y_k)/3)$

注意到 x_i，y_i 被 3 除以后的余数为 0,1,2， 根据鸽巢原理，这 13 个点必有至少 $\lceil 13/3 \rceil=5$ 个点，其 x 坐标被 3 除以后的余数相同，不妨设为{（x_1,y_1）,(x_2,y_2)…,(x_5,y_5)}，由于这些 xi 除以 3 的余数相同，故从中任取 3 个，其和被 3 整除，再注意到对 y1，y2,…,y5 这 5 个数被 3 除以后的余数为 0,1,2 之一，若其中有 3 个被 3 整除后的余数相同，则取此 3 数，其对应的点构成的三角形重心为整点，否则余数分别为 0,1,2 的数每种至多 2 个，即余数为 0,1，和 2 的都会出现，则取这样的三个 yi，其除以 3 后的余数分别是 0,1,2 则其和除以 3 余数为零，从而对应点组成的三角形满足要求。

10，可以，证明如下：不妨把坐标除以 3，则坐标形式必为（0,0），(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2).

考虑 x 坐标（除以 3 以后）都为 i 的点其数量若大于等于 5，则由上题的证明知道结论为真，故 x 坐标（除以 3 以后）都为 i 的点其数量最多为 4，不妨设 0 时最多，不妨设为（0,0），（0,1）各两个（因若（0,0），(0,1),(0,2),均有，则显然则

3 个点的重心为整点)，考虑 x 坐标为 1 和 2 的情形，根据鸽巢原理必有一个的点数至少为 3，不妨设为 x 坐标为 1 的，其三个点的坐标中必是{（1,0），（1,1）(1,2)}中取 2，不能同时都出现，否则此三点符合要求，不妨设为{（1,0），（1,1）}则考虑 x 坐标为 2 的点至少一个，若其坐标为（2,0），则{（0,0）(1,0),（2,0）}符合要求，若其坐标为（2,1），则{（0,1）(1,1),（2,1）}符合要求，若其坐标为（2,2），则{（0,0）(1,1),（2,2）}符合要求，故得证。

11. 证明：考虑有理数 p/q,根据带余除法，有

$p/q=k.k_1k_2\ldots.k_m\ldots$

其中 $p=q*k+r_0,\ 0\le r0<q$

$10r_0=q*k1+r1,\ 0\le r1<q$

$10r1=q*k2+r2,\ 0\le r2<q$

$10r2=q*k3+r3,\ 0\le r3<q$

于是得到序列 r,r1,r2,….rn…..

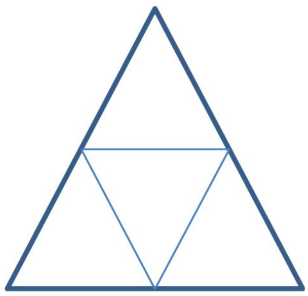
其取值都介于 0,1,2,…,q-1 之间，于是由鸽巢原理，当 n>q 时必有两个 ri 相等，即存在 $i\neq j$ 使得 ri=rj，即从 ki+1 到 kj 形成循环节。于是，展开式从 ki 后开始循环。

12，做如下数列 7,77,777,7777，…,即第 n 项由 n 个 7 组成，

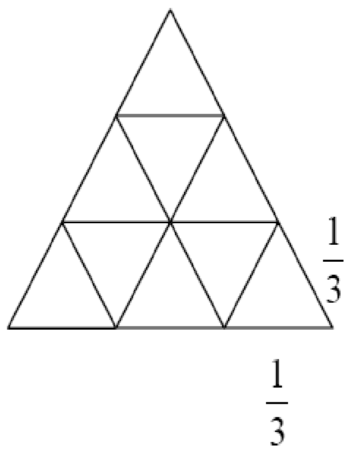
则这些数除以 N 以后的余数为 0,1，…,n-1，取上述数列的前 N+1 项，则由鸽巢原理，必有两项除以 N 后的余数相等，从而它俩的差是 N 的倍数，而这两数的差是由 0 和 7 组成。

13，将图形做如下划分即可

（1）



（2）



（3）$m_n=n^2+1$,将边长为 1 的正三角形每边 n 等分然后做过分点做平行于边的连线即形成 n^2 个边长为 1/n 的小正三角形.

14, 令 S_i 是第 1 天到第 i 天复习的总时间数(i=1,2,…,37) ，则 $1\le S_1<S_2<\ldots<S_{37}\le 60$，作序列 S_1，S_2，…，S_{37}，S_1+13, …，$S_{37}+13$.共 74 项．其中最大项

$S_{37}+13\le 60+13=74$

由鸽巢原理，必有两项相等．而且必是前段中某项与后段中某项相等．设

$S_k = S_h +13$，$k>h$ $S_k - S_h =13$

即从第 h+1 天道到第 k 天复习总时间恰好为 13 小时。

15. 选取的 n+1 个数必有两个数相邻，相邻的两个数的最大公因子为 1.

16，如取 m=4，n=6，a=1，b=2，若存在 x=pm+a=qn+b,即有
4p+1=6q+2，这是不可能的，因为左边为奇数，右边为偶数。

17，证明　对 $a+b$ 作归纳.
当 $a+b\le 5$ 时,a=2 或 b=2,故只要证明 r(2,n)=n 即可.对 n 个顶点的完全图，红蓝二色进行边着色，要么有一条红色边，要么全是蓝色边，前者即红色 K2，后者蓝色 Kn，故得证。
假设对一切满足 $5\le a+b<m+n$ 的 a,b，定理成立，由定理 1.3.1 及归纳假设，有
$r(m,n)\le r(m,n-1)+r(m-1,n)\le$

$$\binom{m+n-3}{m-1}+\binom{m+n-3}{m-2}=\binom{m+n-2}{m-1}$$

所以，对任意的正整数 $a\ge 2$，$b\ge 2$，定理的结论成立

18，见图
19，证:　用反证法．设命题不真．
即存在划分 $P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6=[1，1978]$，$P_i$ 中不存在一个数是 P_i 中两数之差，i=1,2,3,4,5,6
因 $\lfloor(1978-1)/6\rfloor+1 = 330$，故有一子集，其中至少有 330
个数，设这 330 个数从小到大为 $a_1, \ldots, a_{330}$.

不妨设 $A=\{a_1, \ldots, a_{330}\}\subseteq P_1$。

令 $b_i= a_{i+1} - a_1$，$i = 1$，⋯，329。

设 $B = \{b_1, \cdots, b_{329}\}$，$B\subseteq [1, 1978]$。

由反证法假设，$B\cap P_1 = \phi$。因而

$$B\subset (P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6)$$

因为$\lfloor(329-1)/5\rfloor+1=66$，不妨设$\{b_1, \cdots, b_{66}\}\subseteq P_2$，

令 $c_i=b_{i+1}-b_1$，$i = 1, \cdots,65$

设 $C=\{c_1, \cdots, c_{65}\}$，$C\subset [1, 1978]$

由反证法假设，$C\cap(P_1\cup P_2) =\phi$，故有

$$C\subset(P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6)$$

因为$\lfloor(65-1)/4\rfloor+1=17$，不妨设$\{c_1, c_2, \ldots, c_{17}\}\subset P_3$

余下与 20 题同，见 20 题解答。

20，证: 用反证法．设命题不真．

即存在划分 $P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4=[1，67]$，$P_i$ 中不存在一个数是 P_i 中两数之差，i=1,2,3,4.

因 $\lfloor(67-1)/4\rfloor+1 = 17$，故有一子集，其中至少有 17 个数，设这 17 个数从小到大为 $a_1, \ldots, a_{17}$.

不妨设 $A=\{a_1, \ldots, a_{17}\}\subseteq P_1$。

令 $b_i= a_{i+1} - a_1$，$i = 1$，⋯，16。

设 $B = \{b_1, \cdots, b_{16}\}$，$B\subseteq [1, 67]$。

由反证法假设，$B\cap P_1 = \phi$。因而

$$B\subset (P_2\cup P_3\cup P_4)$$

因为$\lfloor(16-1)/3\rfloor+1=6$，不妨设$\{b_1, \cdots, b_6\}\subseteq P_2$，

令 $c_i=b_{i+1}-b_1$，$i = 1, \cdots,5$

设 $C=\{c_1, \cdots, c_5\}$，$C\subset [1, 67]$

由反证法假设，$C\cap(P_1\cup P_2) =\phi$，故有

$$C\subset(P_3\cup P_4)$$

因为$\lfloor(5-1)/2\rfloor+1=3$，不妨设$\{c_1, c_2, c_3\}\subset P_3$

令 $d_i= c_{i+1} - c_1$，$i = 1, 2$

设 $D=\{d_1, d_2\}$，$D\subset[1, 67]$。

由反证法假设， $D\cap(P_1\cup P_2\cup P_3)=\phi$，因而

$$D\subset P_4$$

由反证法假设，

$$d_2-d_1\notin P_1\cup P_2\cup P_3 \text{ 且 } d_2-d_1\notin P_4，$$

故 $d_2-d_1\notin [1, 67]$，

但显然 $d_2-d_1\in [1, 67]$，矛盾。

21，q3，证明与定理 1.4.6 类似，故略

22. 把每个三角形的最短边染成红色，剩下的所有边染成白色，则由 Ramsey 定理可知，必出现同色三角形。又每个三角形都有最短边，即每个三角形都有红色边。于是上述同色三角形是红色的，则它的最长边也是红色的，所以原命题得证。