第二章
随机变量及其分布

王笑尘

北京邮电大学网络空间安全学院

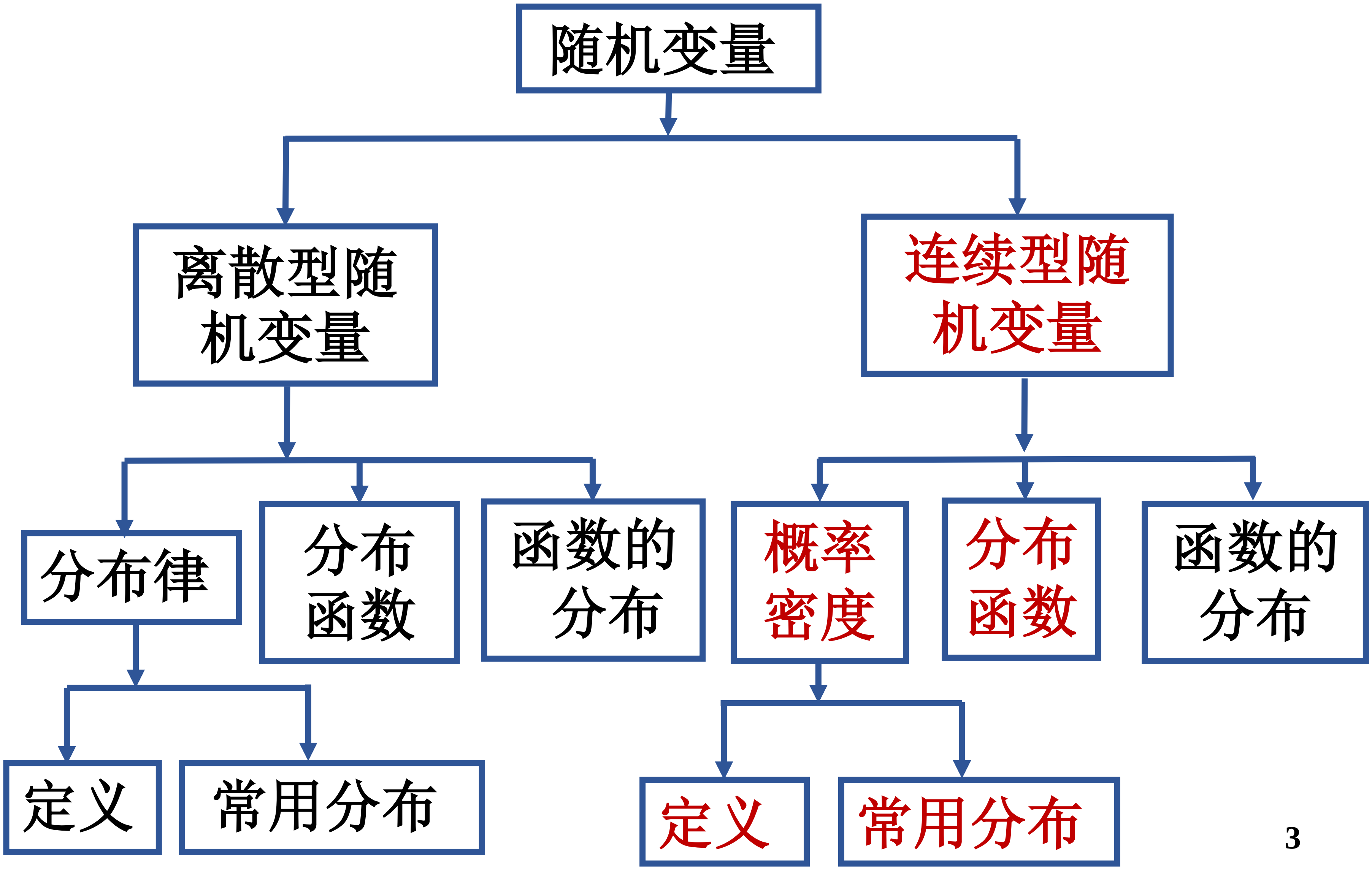
wxiaochen@bupt.edu.cn

第二章 知识结构图

随机变量

- 离散型随机变量
  - 有限个或可列无限个
- 连续型随机变量
  - 在整个数轴或至少一部分是某些区间

第四节 连续型随机变量及其概率密度



第四节 连续型随机变量及其概率密度

一. 连续型随机变量的概率密度

1.定义 若对于随机变量 X 的分布函数F(x)，存在非负可积函数 f(x)，使得对于任意实数 x 有:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (=P(X\le x))$$

则称 X 为连续型随机变量，f(x)为 X 的概率密度函数。

注: ▲ 连续型随机变量与离散型随机变量的区别

离散型: $P(X=x_k)\ge 0$

连续型: $P(X=x_k)=0$

证明: 任取$x_0\in(-\infty,\infty)$,并给x_0以增量Δx

$$0\le P(X=x_0)\le P(x_0\le X\le x_0+\Delta x)$$

$$=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx$$

当$\Delta x\to 0$时, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx=0$

$$0\le P(X=x_0)\le \lim_{\Delta x\to 0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx=0$$

$$\therefore\quad P(X=x_0)=0$$

这个结论的意义：

1. $P(X=x_0)=0$ 从积分的几何意义上说，当底边缩为一点时，曲边梯形面积退化为零。

2. 由此可知连续型随机变量X在某区间上取值的概率与区间是闭、开、半开半闭无关，即有：

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2)$$

$$= P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

▲ 不可能的事件的概率为0（$P(\Phi)=0$），但概率为0的事不一定是不可能事件。

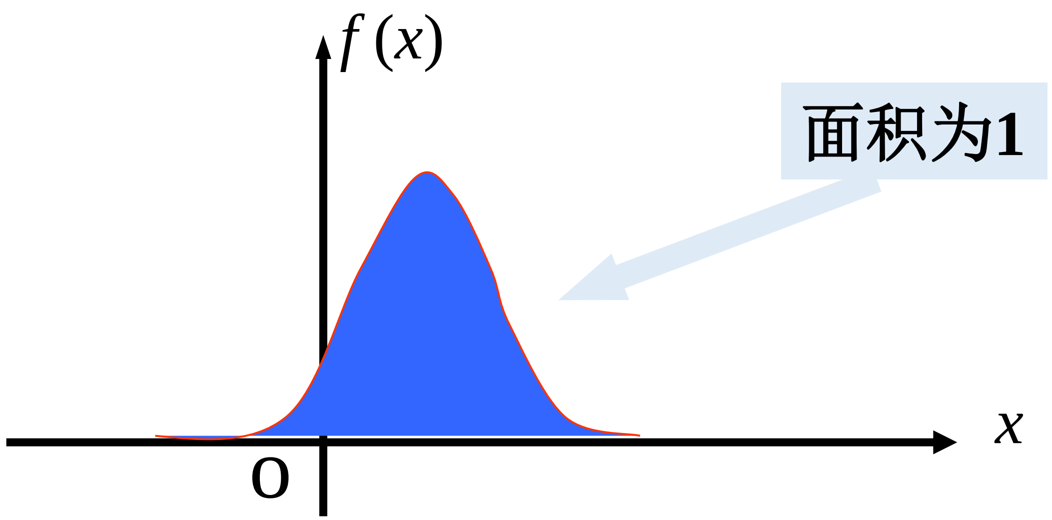
如，打靶时打在任意一个点的概率都趋近于0（几乎不可能精确的打在一个特殊点上）。）

2. 概率密度函数的性质

性质1 $f(x) \geq 0$

性质2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

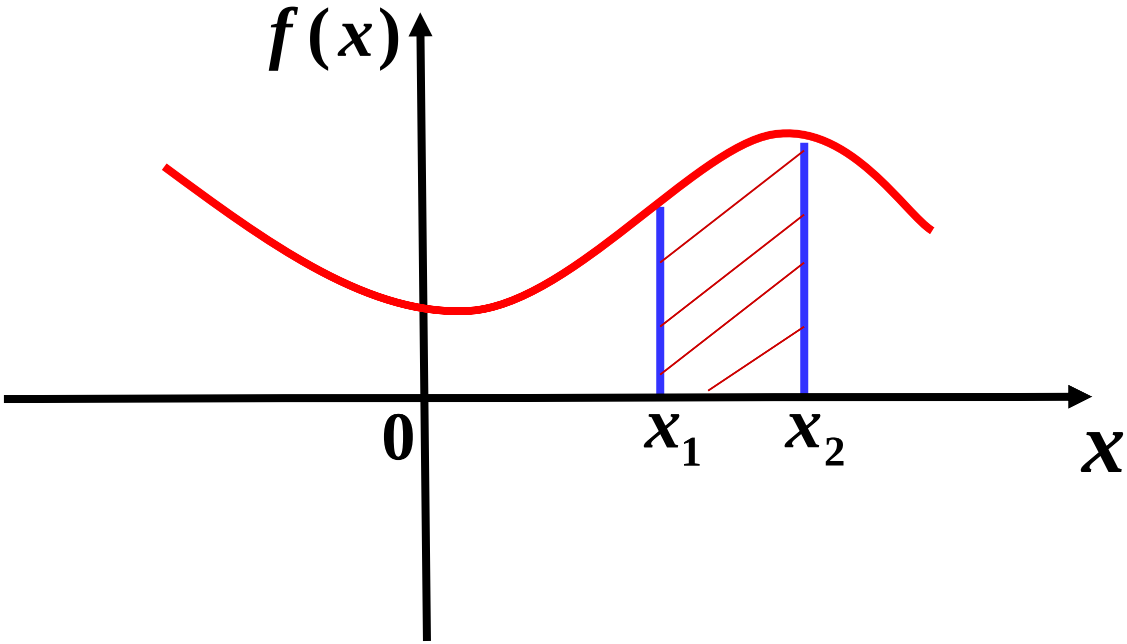
这两条性质是判定一个函数 $f(x)$是否为某连续型随机变量X概率密度函数的充要条件。



性质3

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

几何意义: X落在区间$(x_1, x_2]$的概率等于区间$(x_1, x_2]$上曲线$f(x)$之下的曲边梯形的面积



性质4

若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有：$F'(x)=f(x)$

物理意义：

$$f(x)=\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

- 故 $f(x)$ 在 x 这一点的值，恰好是 $\Delta x\to 0$的极限下，X 落在区间$(x,x+\Delta x]$ 上的概率与区间长度Δx之比。故称 $f(x)$为概率密度函数。

注： $P(x < X \le x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x)$

不计高阶无穷小

$$= \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx$$

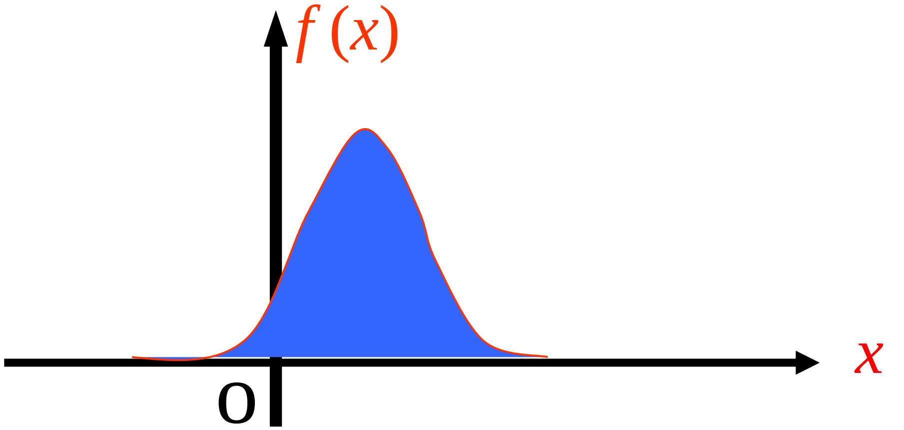
$$\approx f(x)\Delta x$$

这表示落在区间 $(x, x+\Delta x]$ 上的概率近似等于 $f(x)\Delta x$。

$f(x)$ 值的大小直接影响关系到概率的大小，所以 $f(x)$ 的确描述了连续型随机变量概率分布的情况。

但要**注意**的是：

- 密度函数$f(x)$在某点处a的高度，并不反映X取值的概率。
- 但是，这个高度越大，则X取a附近值的概率就越大。
- 也可以说，在某点密度曲线的高度反映了**概率集中在该点附近的程度**。



$f(x)\Delta x$ 在连续型随机变量理论中所起的作用与

$P(X = x_k) = p_k$

在离散型随机变量理论中所起的作用相类似。

例1. 证明：函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\quad(-\infty<x<+\infty)$

是一个连续型随机变量的概率密度函数。

证明： (1). 显然, $f(x)>0\quad(-\infty<x<\infty)$

(2). $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

一般只需验证
f(x)性质中的
这两条即可。

例2. 某电子计算机在毁坏前运行的总时间(单位:小时)是一个连续型随机变量,其密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\frac{x}{100}} & \text{当} x\geq 0\\ 0 & \text{当} x<0\end{cases}$$

求: (1). λ的值.

(2). 这台计算机在毁坏前能运行50到150小时的概率。

(3). 运行时间少于100小时的概率。

解: (1) $\because\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\frac{x}{100}}dx$

$$=-100\lambda e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{0}^{+\infty}=100\lambda$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{1}{100}$$

(2) $P(50<X<150)=\int_{50}^{150}\frac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}dx$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\frac{x}{100}} & \text{当}x\geq 0\\ 0 & \text{当}x<0\end{cases}$$

(1) λ的值.

(2) 50 到 150 小时

(3) 少于100小时

$$=-e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{50}^{150}$$

$$=0.384$$

(3) $$P(X<100)=\int_0^{100}\frac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}dx$$

$$=1-e^{-1}\approx 0.633$$

补充：若 X 具有概率密度:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad \theta>0$$

则称 X 为服从参数 θ 的 指数分布。

二．连续型随机变量的分布函数

定义：若定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可积函数 $f(x)$

满足：(1). $f(x)\geq 0$

$$(2).\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

则称 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

为连续型随机变量的分布函数

- f (x)确定了分布函数F(x)
- f (x)是F(x)的导函数
- F(x)是f (x)的一个原函数

二．连续型随机变量的分布函数

注：**F(x) 具备了分布函数的性质：**

（1）F(x)是不减的函数；

（2） $0 \le F(x) \le 1$ 且：$\begin{cases} F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \\ F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 \end{cases}$

（3）F(x)是右连续的。

例3　设有函数 $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

问：　$F(x)$能否成为某个连续随机变量的分布函数。

例3　设有函数 $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

问:　$F(x)$能否成为某个连续随机变量的分布函数。

解:　注意到:　函数 $F(x)$ 在 $[\pi/2,\pi]$上下降，即不满足性质(1)。

或者:　$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

即不满足性质(2)。

故: $F(x)$不能是某个连续随机变量的分布函数。

例4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ $(a>0)$

求: (1) X的分布函数

(2) $P(0\leq X<1)$

解: (1) 由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

当 $x<0$时 $f(x)=0$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dx=0$$

当 $x \geq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{x}\frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}dx$$

$$=[-e^{-\frac{x^2}{2a}}]\Big|_0^x=1-e^{-\frac{x^2}{2a}}$$

综合上述得:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\geq 0\end{cases}$$

(2). $P(0\leq X<1)=F(1)-F(0)=1-e^{-\frac{1}{2a}}$

例5. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 : $F(x)$

解: $$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$

当 $-1\le x\le 1$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\cdot dt+\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}dt$$

$$=\frac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,dt} = \frac{2}{\pi}t\sqrt{1-t^2}\Big|_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x}\frac{2t}{\pi}\frac{1}{2}\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \boxed{\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,dt} + \int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

当 $x > 1$ 时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dt + \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0 \cdot dt = 1$$

即得所求的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin x + \dfrac{1}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

例6. 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

(1) 求X取值在区间(0.3,0.7)的概率；

(2) 求X的概率密度。

解: (1) $P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

(2) $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其　它} \end{cases}$

注意到$F(x)$在1处导数不存在，根据改变被积函数在个别点处的值不影响积分结果的性质，可以在$F'(x)$没意义的点处，任意规定$F'(x)$的值。

说明：

1、根据改变被积函数在个别点处的值不影响积分结果的性质，可以在没意义的点处，随意指定 $F'(x)$ 为有限值；

2、在求连续的F(x)时，它的定义域中各子区间的端点，只要表达清楚，属于哪一个区间无关紧要（也无需一定要与f(x)保持一致）。

三. 几种常见的连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

若连续型随机变量 X 具有概率密度 f (x)为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & 其它\end{cases}$$

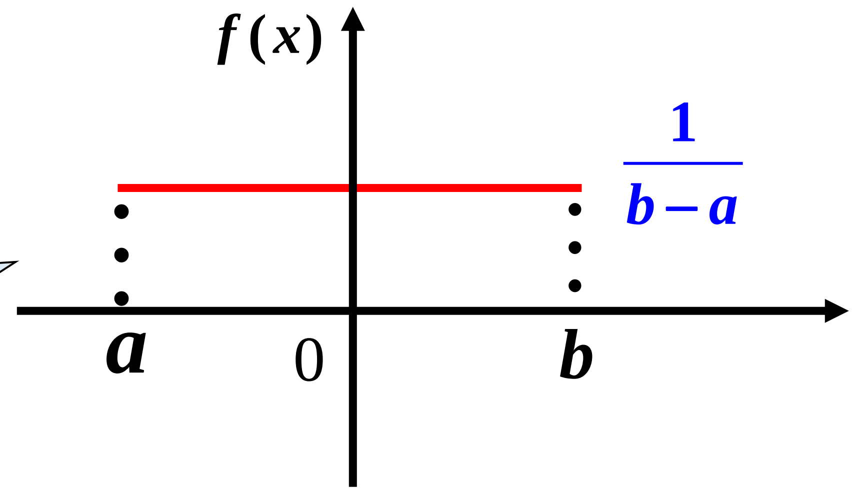
则称 X 在区间 (a, b)上服从均匀分布 (或等概率分布)

注: ▲ 易证 $f(x)$ 满足:

$$1^0.\ f(x)\geq 0, \qquad 2^0.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

▲ $f(x)$ 的图形：

若抽取其概率密度的背景，$f(x)$ 是一种 $f(x) \equiv c$ 的函数



▲ 服从均匀分布的随机变量具有如下性质：

X 落在区间 (a, b) 中**任意等长度**的子区间的**可能性是相同的**，即它落在子区间的概率只依赖于子区间的长度，而与子区间的位置无关。

[证]: 设 $(c,d)\subset(a,b)$

$$P(c<X<d)=\int_c^d f(x)dx=\int_c^d \frac{1}{b-a}dx$$

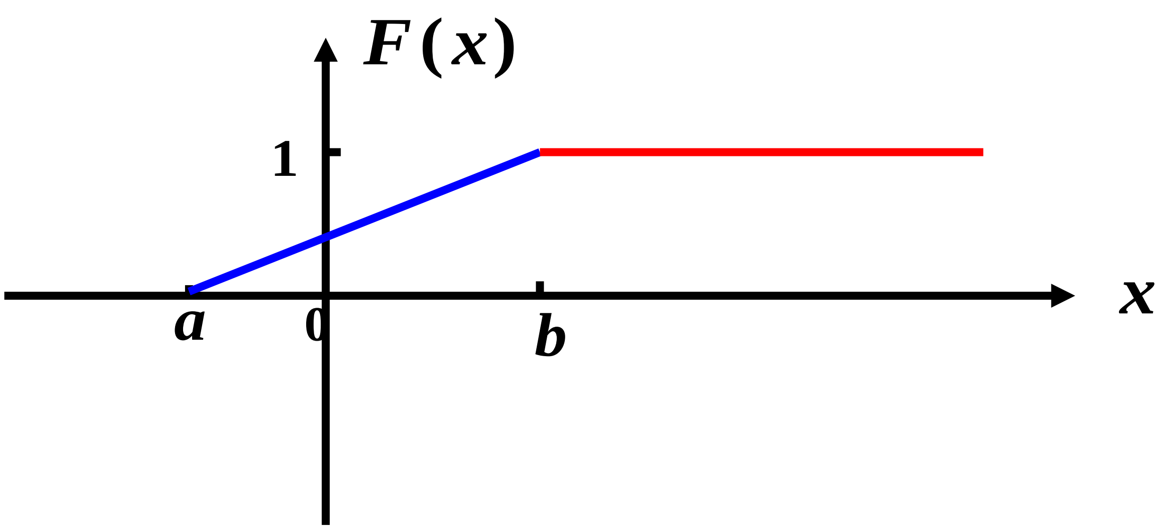
$$=\frac{1}{b-a}(d-c)$$

即 X 落在 (c, d) 内的概率只与 (c, d) 的长度有关, 而与(c, d) 在 (a, b) 中的位置无关。

▲ 由分布函数定义可得：若X 服从均匀分布，则 X 的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

图形:



例7. 某公共汽车站从上午7时起，每15分钟来一班车，即 7:00，7:15，7:30, 7:45 等时刻有汽车到达此站，如果乘客到达此站时间 X 是7:00 到 7:30 之间的均匀随机变量

试求：

(1) 乘客候车时间少于 5 分钟的概率

(2) 乘客候车时间超过10分钟的概率

解：设以7:00为起点0，以分为单位，依题意 $X \sim U(0, 30)$

从上午7时起，每15分钟来一班车，即7:00，7:15，7:30等时刻有汽车到达汽站

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30} & 0<x<30\\ 0 & \text{其　它}\end{cases}$$

为使候车时间少于 5 分钟，乘客必须在 7:10 到 7:15 之间，或在7:25 到 7:30 之间到达车站。

故所求概率为：

$$P\{10<X<15\}+P\{25<X<30\}$$

$$=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

候车时间超过10分钟,则乘客必须在7:00到7:05或7:15到7:20之间到达车站。

$$P\{0 < X < 5\} + P\{15 < X < 20\}$$

$$= \int_0^5 \frac{1}{30} dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30} dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

从上午7时起，每15分钟来一班车，即7:00，7:15， 7:30等时刻有汽车到达汽站

2. 指数分布

若连续型随机变量 X 具有概率密度 f (x)为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为常数

则称 X 为服从参数 θ 的指数分布

注: 易证 $f(x)$ 满足:

$$1^0.\ f(x)\geq 0,\quad 2^0.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

▲ 由分布函数定义可得：若X 服从指数分布，则X的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其密度函数图形见教材（第五版）P46，关于分布函数的图形请自行完成。

▲ 指数分布的性质(无记忆性)

若X 服从指数分布，则: 对任意的 $s,t>0$ 有:

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$$

若设X是某一元件的寿命，则上式表明：元件对它已使用过 s 小时没有记忆。

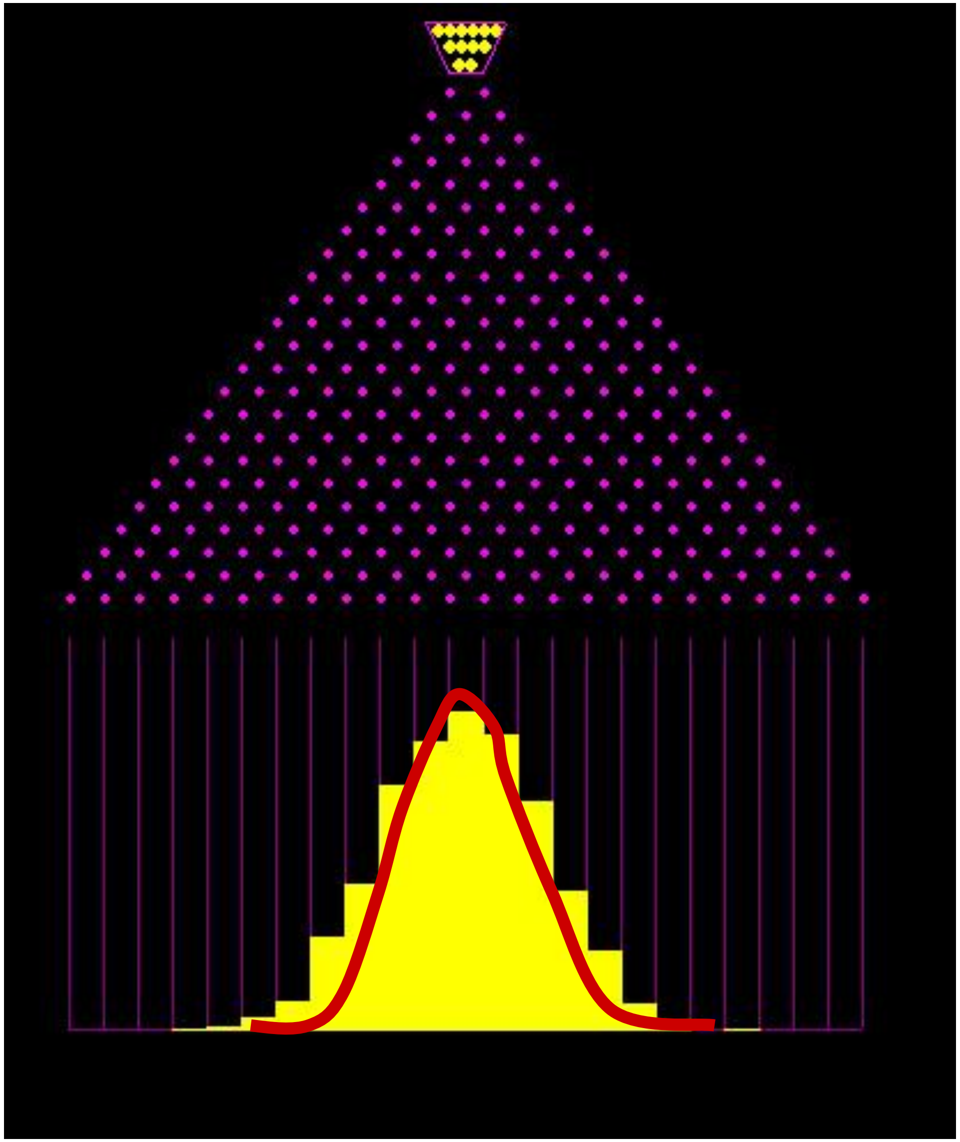
3. 正态分布

- 正态分布是应用最广泛的一种连续型分布。
- 法国数学家棣莫弗最早发现。
- 在十九世纪前叶由数学家高斯加以推广，所以正态分布通常也称为高斯分布。

棣莫弗

高斯

高尔顿钉板试验



每个钉子彼此的距离均相等，上一层每一颗的水平位置恰好位于下一层的两颗正中间。

小球下落位置的规律性：

一旦试验次数增多，就会发现，最后得出的是一条优美的曲线，这条曲线就近似正态分布的密度曲线。

(1). 正态分布的定义

若随机变量 X 的概率密度为：

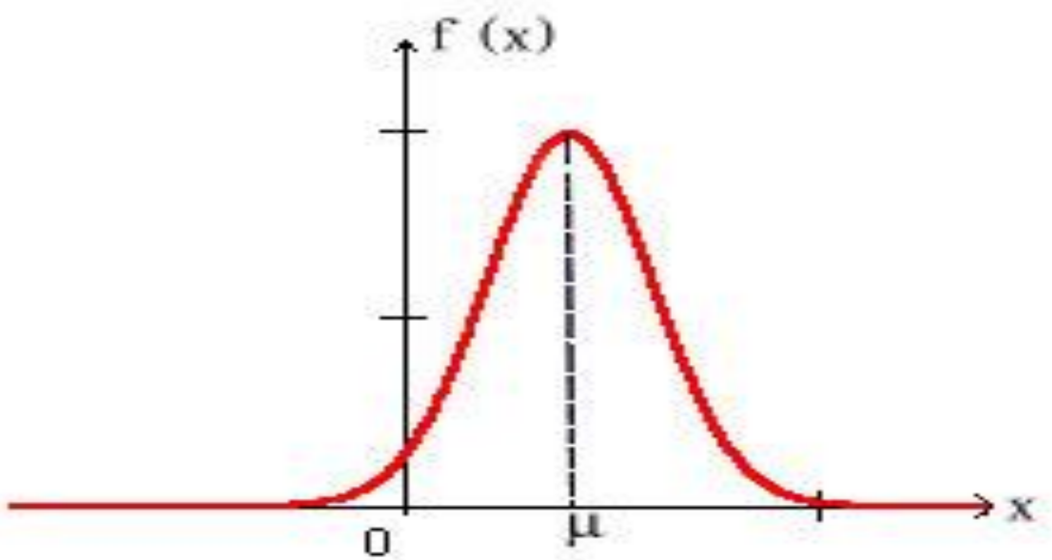
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

其中：μ和σ^2都是常数，μ任意，$\sigma>0$，
则称X服从参数为μ和σ^2的正态分布。记作：

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

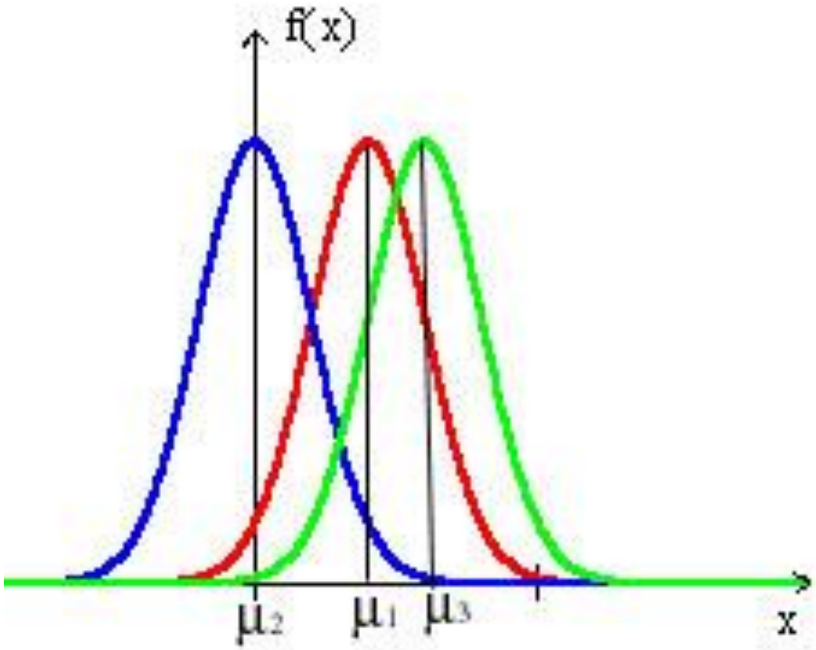
$f(x)$ 所确定的曲线叫作正态曲线。

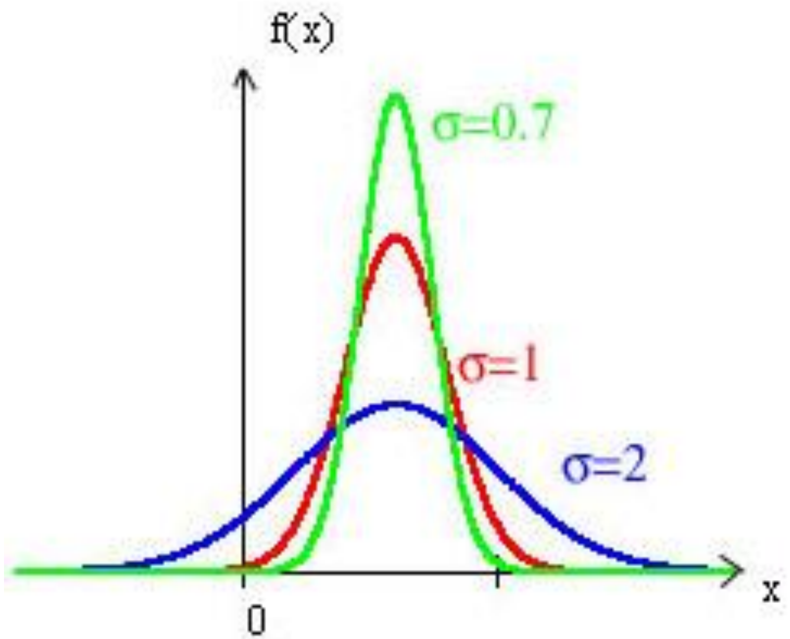
(2). 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ 的图形特点



正态分布的密度曲线是一条关于μ对称的钟形曲线，特点是“两头小，中间大，左右对称”。

正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ 的图形特点





μ决定了图形的中心位置(不改变形状)；
σ 决定了图形中峰的陡峭程度： σ 越小时，
X落在μ附近的概率越大。

(3)由密度函数的表达式，分析正态分布的图形特点

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

▲ 显然: $f(x)\geq 0$

即整个概率密度曲线都在 x 轴的上方。

▲ $f(x)$以μ为对称轴，并在$x=\mu$处达到最大值:

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

▲ $f(x)$以μ为对称轴，并在$x=\mu$处达到最大值。

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

证明： 令：$x=\mu+c$，$x=\mu-c$ $(c>0)$

分别代入$f(x)$可得:

$$f(\mu+c)=f(\mu-c)$$

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

且 $f(\mu+c)\le f(\mu)$，$f(\mu-c)\le f(\mu)$

故得：$f(x)$ 以μ为对称轴，并在$x=\mu$处达到最大值

$$P\{\mu-c<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+c\}$$

▲ $f(x)$以 x 轴为渐近线

因为当 $x \to \pm\infty$时，$f(x) \to 0$

这说明：曲线 $f(x)$向左右伸展时，越来越贴近 x 轴。即 $f(x)$以 x 轴为渐近线。

▲ $x = \mu \pm \sigma$ 为 $f(x)$的两个拐点的横坐标。

（即$f(x)$二阶导数的零点）

(4) 正态分布的分布函数

由分布函数定义，若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 X 分布函数是

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt, \quad -\infty < x < \infty$$

$$F(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

证明见教材P46

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$$

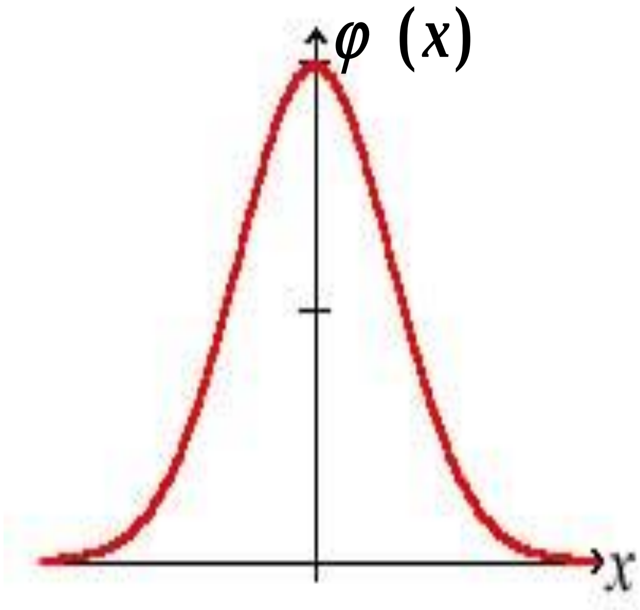
（5）标准正态分布

▲ 称 $\mu = 0, \sigma = 1$ 的正态分布为标准正态分布。

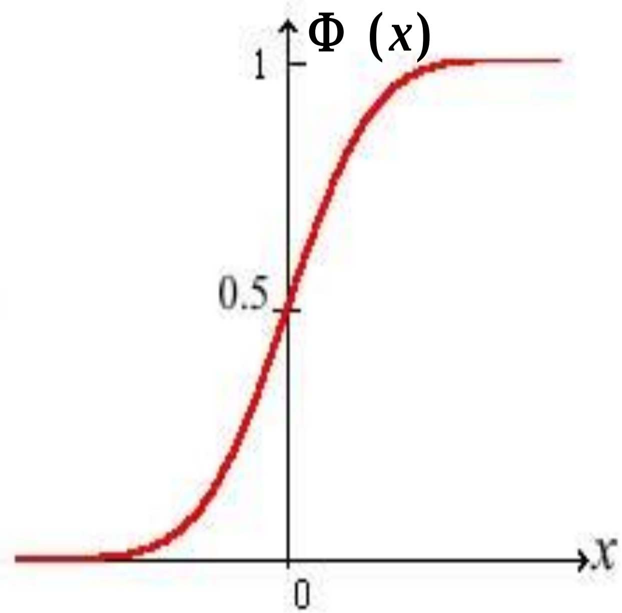
其密度函数和分布函数常用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示：

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



密度函数 $\varphi(x)$



分布函数 $\Phi(x)$

▲ 标准正态分布的重要性

任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ 转化为标准正态分布。

引理: 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则: $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

（一般正态分布与标准正态分布的关系）

证明: 见后

证明: $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的分布函数为:

$$P(Z\le x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le x\right)$$

作一个线性变换

$$=P(X\le \mu+\sigma x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

令 $\dfrac{t-\mu}{\sigma}=u$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(x)$$

即证得: $Z\sim N(0,1)$

▲ 由此可得：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则其分布函数

$$F(x) = P(X \le x) = P(\boxed{\frac{X-\mu}{\sigma}} \le \frac{x-\mu}{\sigma})$$

$$= \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

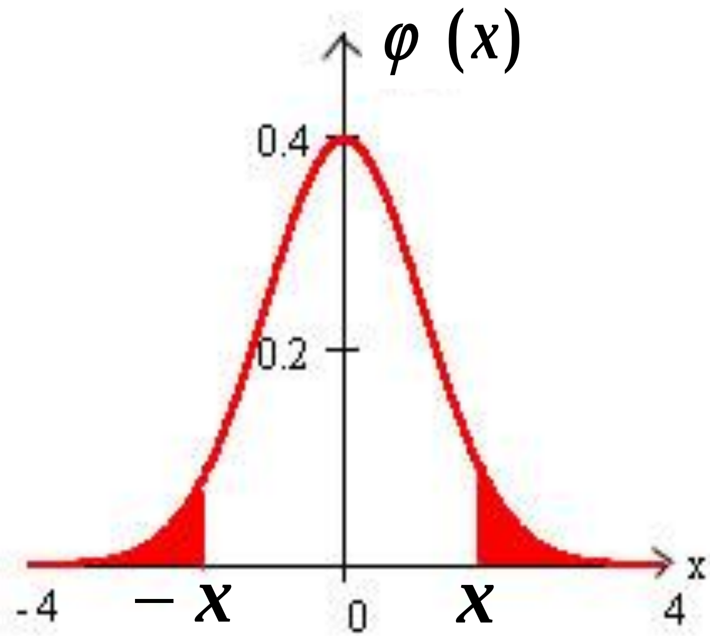
$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

注：根据引理，只要将标准正态分布的分布函数制成表，就可以解决一般正态分布的概率计算问题。

而现已编制了$\Phi(x)$的表，可供查用。请见教材(第五版)P397附表2。

▲ 关于正态分布表

教材P397附表2为标准正态分布函数数值表，借助于附表2，可以查表计算一般正态分布的概率问题。



$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

表中给出的是 $x>0$ 时，$\Phi(x)$的值。

当 $-x<0$ 时有：

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

注： ◆ 若 $X \sim N(0,1)$,则有

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

◆ 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

则有：$P(a < X < b) = P(\dfrac{a-\mu}{\sigma} \le Y \le \dfrac{b-\mu}{\sigma})$

$$= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

◆ 对任意区间$(x_1 < X \le x_2)$，则有

$$P(x_1 < X \le x_2) = P(\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma})$$

$$= \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$$

(6) 3σ法则

由标准正态分布的查表计算可以求得,

当$X \sim N(0, 1)$时,

$$P(|X| \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$P(|X| \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

$$P(|X| \leq 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

这说明： X 的取值几乎全部集中在 $[-3, 3]$ 区间内，超出这个范围的可能性仅占不到 0.3%

将上述结论推广到一般的正态分布, 有：

$Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ 时,

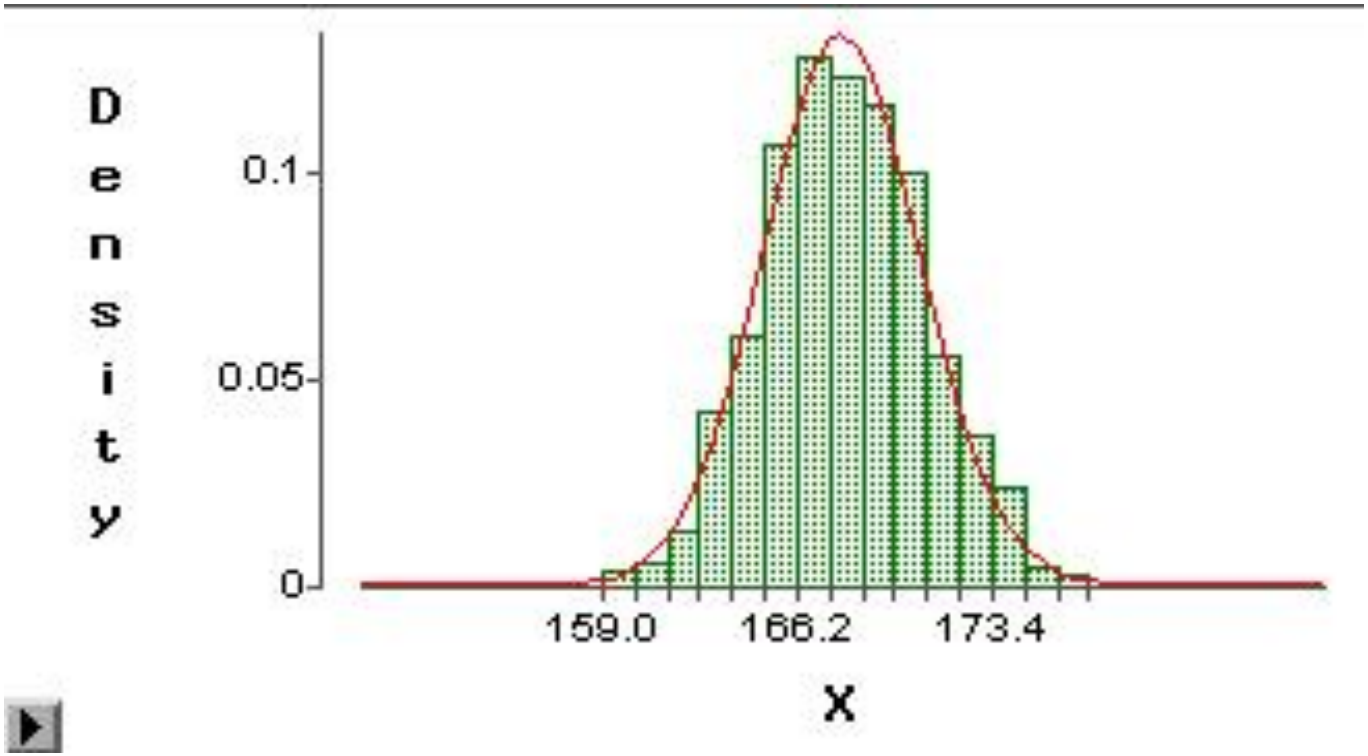
$$P(|Y-\mu| \le \sigma) = 0.6826$$

$$P(|Y-\mu| \le 2\sigma) = 0.9544$$

$$P(|Y-\mu| \le 3\sigma) = 0.9974$$

Y 的取值几乎全部集中在 $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ 区间内。这在统计学上称作“3σ 法则”。
（三倍标准差原则）

常见应用：下图是用某大学男大学生身高的数据画出的频率直方图：



红线是拟合的正态密度曲线

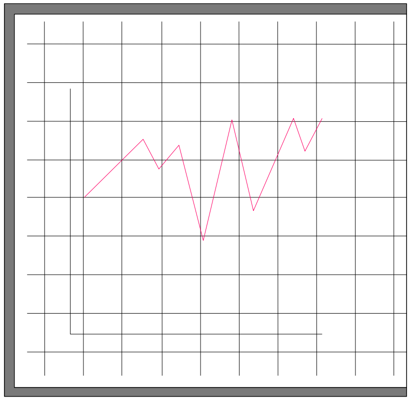
可见，某大学男大学生的身高应服从正态分布。

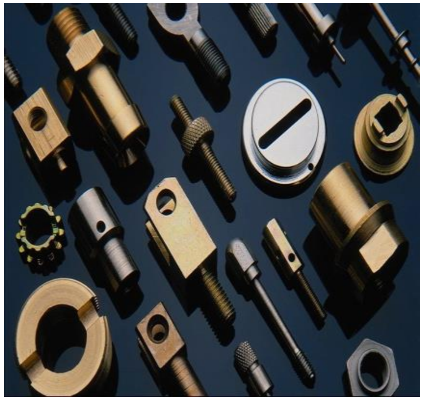
人的身高高低不等，但中等身材的占大多数，特高和特矮的只是少数，而且较高和较矮的人数大致相近。
—这从一个方面反映了服从正态分布的随机变量的特点。

除了前面介绍的身高外：

- 在正常条件下年降雨量；
- 各种产品的质量指标，如零件的尺寸；
- 农作物的指标，如小麦的穗长、株高；
- 测量误差，如射击目标的水平或垂直偏差；
- 信号噪声等等

都服从或近似服从正态分布。





例1. 已知自动车床生产的零件的长度X(毫米)服从正态分布 $N(50,0.75^2)$,如果规定零件的长度在 50 ± 1.5 毫米之间为合格品。

求:生产零件是合格品的概率

解: $\because \quad X \sim N(50,0.75^2)$

$\therefore$ 所求的概率为:

$$P(48.5 < X < 51.5)$$

$$=\Phi\left(\frac{51.5-50}{0.75}\right)-\Phi\left(\frac{48.5-50}{0.75}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)-(1-\Phi(2))$$

$$=2\Phi(2)-1=2\times0.9772-1=0.9544$$

查附表2

例2.从旅馆到飞机场沿 A 路走(路程短，交通拥挤)所需时间(分钟) $X \sim N(27,5^2)$, 沿 B 路走（路程长，阻塞少)所需时间(分钟) $Y \sim N(30,2^2)$，若现在只有 30分钟。

问：分别选择哪一条路为好?

解: 依题意，选择所需时间超过规定时间的概率较小的路线为好。

当只有30分钟可用时:

A 路:

$$P(X>30)=1-P(X\le 30)=1-\Phi\left(\frac{30-27}{5}\right)$$
$$=1-\Phi(0.6)=1-0.7257$$
$$=0.2743$$

B 路:

$$P(Y>30)=1-P(Y\le 30)=1-\Phi\left(\frac{30-30}{2}\right)$$
$$=1-0.5=0.5$$

结论：此时应选择A路

例3. 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内，调节器调整在 d^0C 液体的温度X（以℃计）是一个随机变量，且 $X \sim N(d, 0.5^2)$

(1) 若 $d = 90$ ，求 X 小于89的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为80的概率不低于0.99，问 d 至少为多少?

解: (1) $P(X<89)=P\left(\frac{X-90}{0.5}<\frac{89-90}{0.5}\right)$

$$=\Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right)=\Phi(-2)=1-\Phi(2)$$

$$=1-0.9772=0.0288$$

(2) 按题意需求d满足:

$$0.99\le P(X\ge 80)=P\left(\frac{X-d}{0.5}>\frac{80-d}{0.5}\right)$$

$$=1-P\left(\frac{X-d}{0.5}\le\frac{80-d}{0.5}\right)\quad =1-\Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)$$

即 $\boxed{\Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)\le 1-0.99=0.01}$

反查正态分布表，由于表中无**0.01**的值$\Phi(x)$

故采用如下方法处理:

令 $-u=\dfrac{80-d}{0.5}$

$\because \quad \Phi(-u)=1-\Phi(u)\le 0.01$

$\therefore \quad \Phi(u)=1-\Phi(-u)\ge 0.99$

查表可知: $\Phi(2.32)=0.9898 \quad \Phi(2.33)=0.9901$

由此可得: $u\ge 2.33 \qquad -u=\dfrac{80-d}{0.5}\le -2.33$

故得: $d\ge 81.165$

例4. 公共汽车车门的高度是按男子与车门顶头碰头机会在**0.01以下**来设计的。设男子身高$X\sim N(170, 6^2)$。

问：应如何确定车门高度

解：设车门高度为 h cm，

按设计要求即求满足：

$P(X\geq h)\leq 0.01$或

$P(X< h)\geq 0.99$的最小h

求满足 $P(X < h) \geq 0.99$ 的最小的 h 。

因为: $X \sim N(170, 6^2)$， 所以: $\frac{X-170}{6} \sim N(0,1)$

故: $P(X < h) = \Phi(\frac{h-170}{6}) \geq 0.99$

查表得: $\Phi(2.33) = 0.9901 > 0.99$

所以: $\frac{h-170}{6} = 2.33$

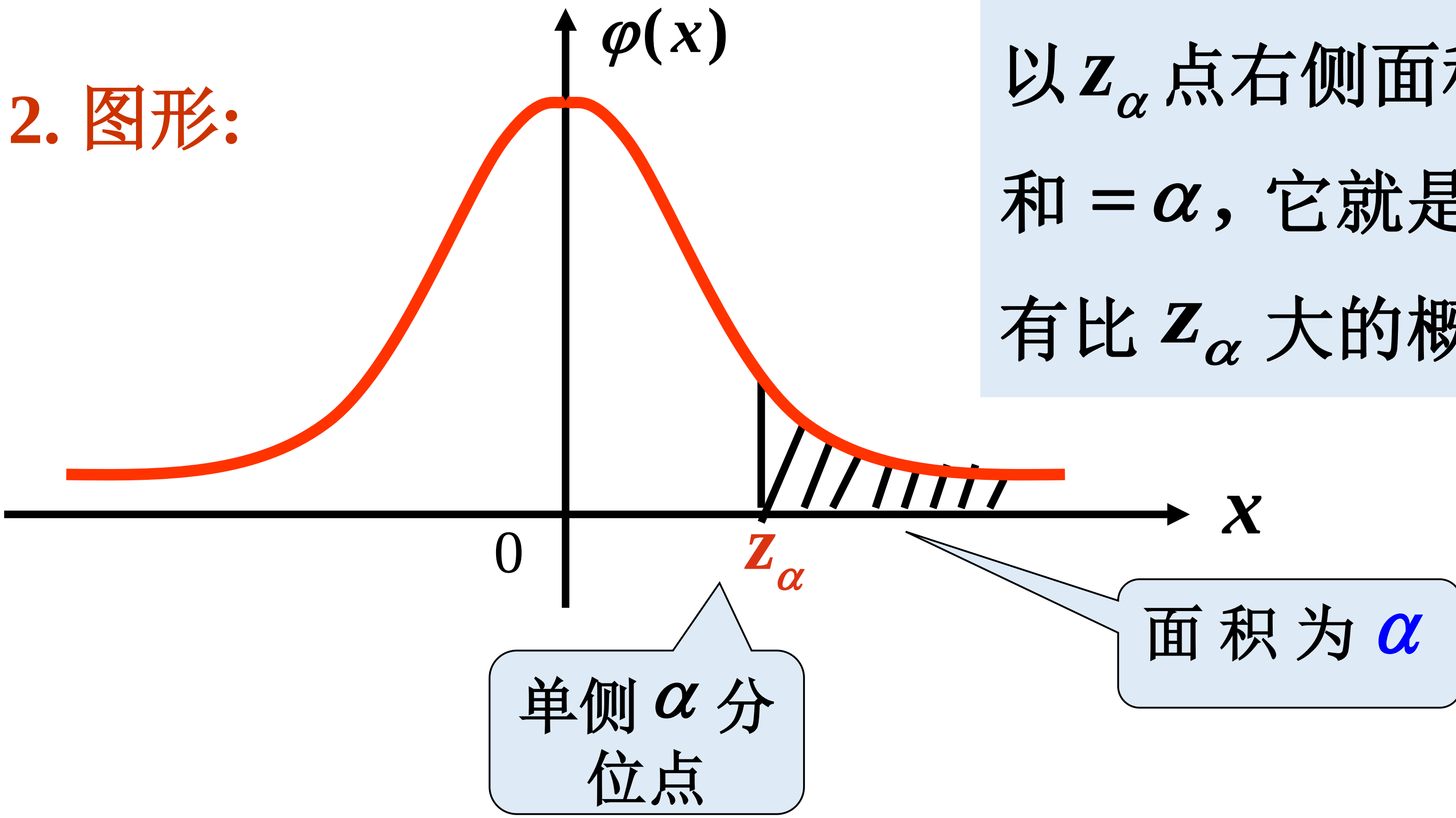
即: $h = 170 + 13.98 \approx 184$

结论: 设计车门高度为 184 厘米时，可使男子与车门碰头机会不超过0.01。

四. 关于 α 分位点的概念

1. 定义 $X \sim N(0,1)$，若 z_α 满足条件 $P(X > z_\alpha) = \alpha$，$0 < \alpha < 1$，则称点 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点。

2. 图形:



以 z_α 点右侧面积总和 $= \alpha$，它就是所有比 z_α 大的概率。

注: ▲ $\Phi(z_\alpha) = \int_{-\infty}^{z_\alpha} f(x)dx = 1-\alpha$

$=$用整块面积减去点 z_α 以后的那块面积

▲从正态分布表上如何求 z_α 的值:

对于给定的 α，则:

点 $z_\alpha =$ 概率 $(1-\alpha)$ 所对应的 z 值

比如: $z_{0.05} = z(1-0.05) = z(0.95) = 1.645$

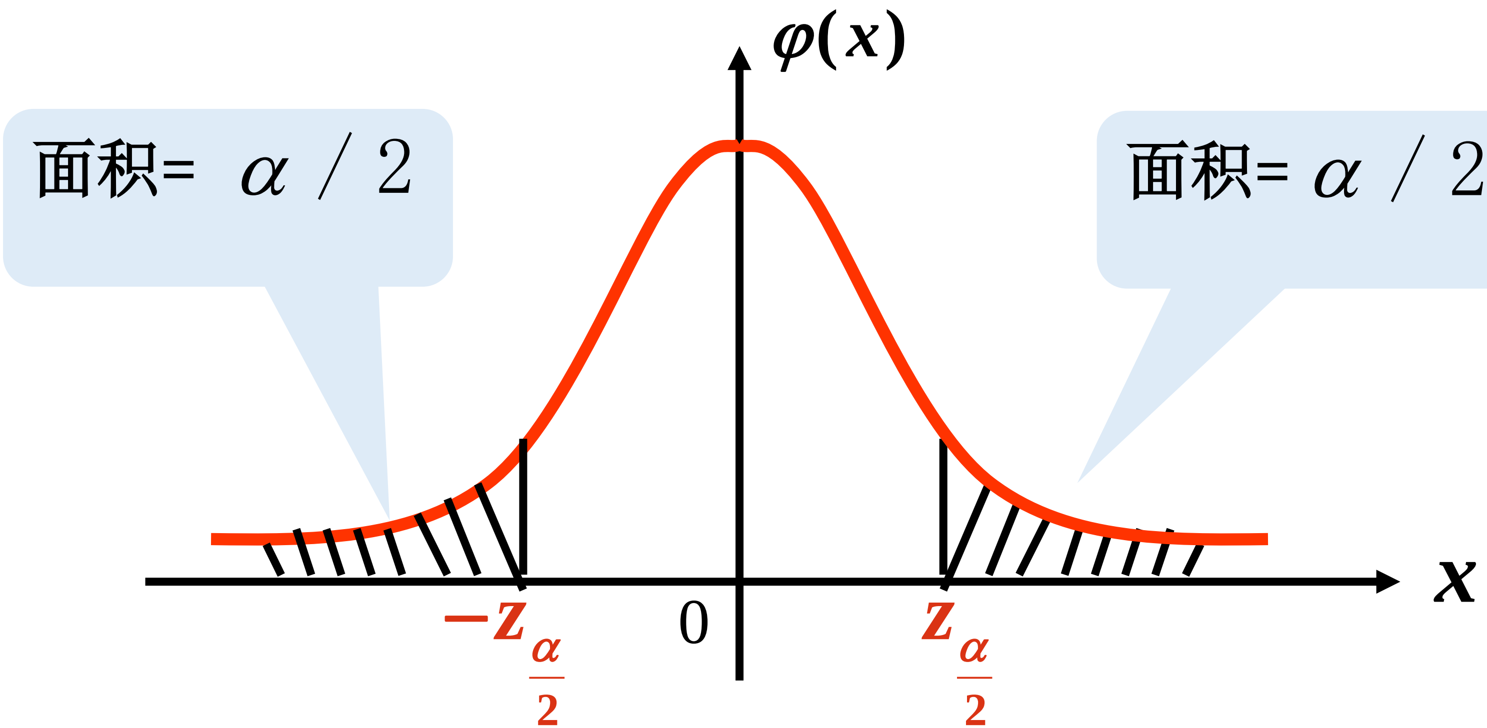
反过来可以验证: $\Phi(1.645) = 1-\alpha = 1-0.05 = 0.95$

又比如: $z_{0.005} = z(1-0.005) = z(0.995) = 2.57$

(同样可以验证: $\Phi(2.57) = 1-0.005 = 0.995$)

3. 双侧 α 分位点的定义

若 $P(|X| > Z_{\alpha/2}) = \alpha$ 则称 $z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的双侧 α 分位点。



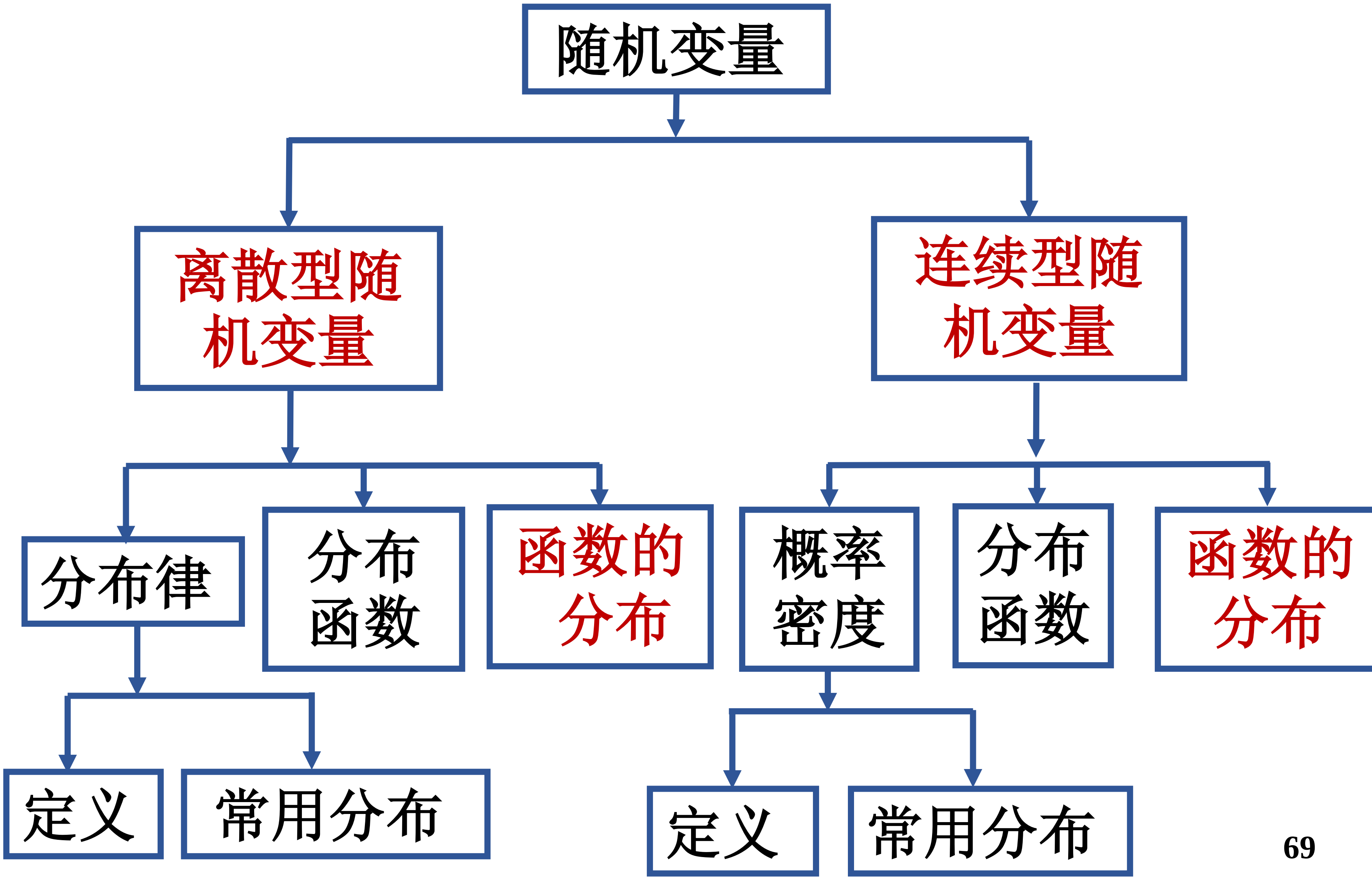
比如

$$z_{\alpha/2} = z_{\frac{0.05}{2}} = z(1-\frac{0.05}{2}) = z(0.975) = 1.96$$

$$z_{\alpha/2} = z_{\frac{0.5}{2}} = z(1-\frac{0.5}{2}) = z(0.75) \approx 0.67$$

即 $P(|X| > 0.67) = 0.5$, 表明 $x > 0.67, x < -0.67$ 之后的两小块面积之和(概率)为0.5, 而每一小块面积(概率)为0.25, 它所对应的点分别为 0.67 与 -0.67

第五节 随机变量的函数的分布

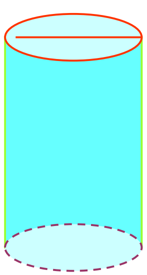


第五节 随机变量的函数的分布

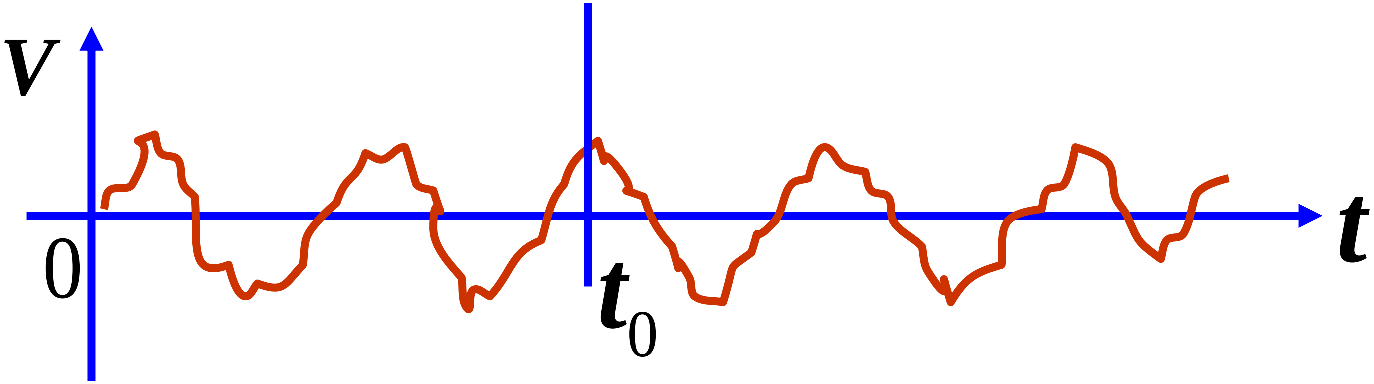
问题的提出

- 在很多实际问题中，我们常对某些随机变量的函数（一般情况下不能直接测量）更感兴趣。
- 因此，需要研究随机变量间存在的函数关系，从而进一步求随机变量函数的分布。

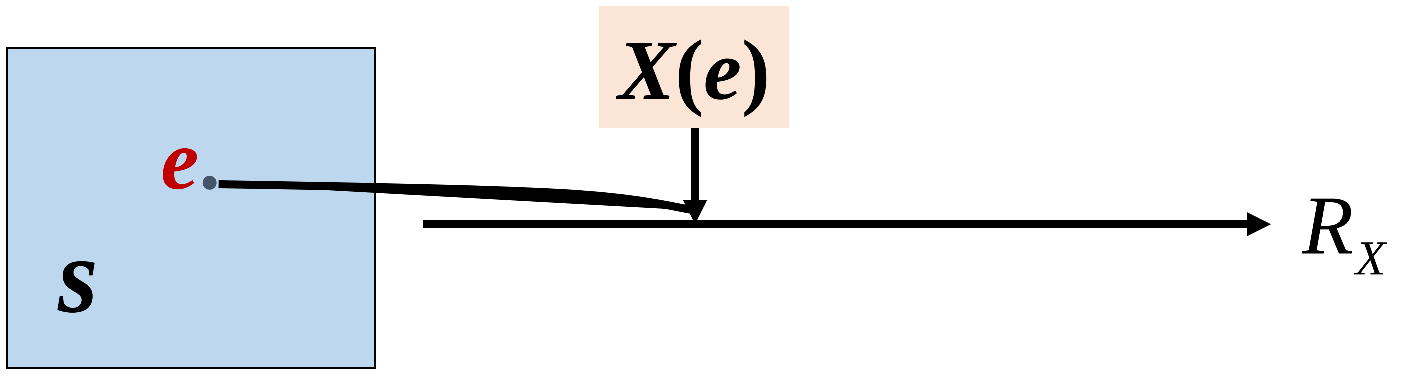
例如：已知圆轴截面直径 d 的分布，求截面面积 $A=\dfrac{\pi d^2}{4}$ 的分布。



又例如：已知 $t = t_0$ 时刻噪声电压 V 的分布，求功率 $W=V^2/R$ (R为电阻)的分布等.



研究问题：已知随机变量 X 及它的分布，求 $Y = g(X)$ 这个随机变量的分布。



从函数角度看：

- 随机变量 X 是基本事件的函数;
- 随机变量 X 的函数 Y=g(X) 实际上是基本事件的复合函数。

一. 随机变量的函数的定义

定义: 设g(x)是定义在随机变量X的一切可能取值 x 的集合上的函数,如果对于X的每一个可能取值 x , 有另一个随机变量 Y的相应取值 y = g(x), 则称 y为 x 的函数, 记为 y = g (x)。

本节的任务: 根据X的分布求出Y的分布。

二. 离散型随机变量的函数的分布

若 X是离散型随机变量, 则 Y =g (X)也是一个离散型随机变量，则:

g (X)的分布可由 X 的分布直接求出。

例1. 已知 X 的概率分布为:

分布律

X	5	10
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

求: $Y = 2X$ 的概率分布(分布律)。

解: $\because$ X的可能取值为 $x_1 = 5, x_2 = 10$

$\therefore$ Y的可能取值为 $y_1 = 10, y_2 = 20$

并且: $P(Y = 10) = P(2X = 10) = P(X = 5) = \dfrac{1}{3}$

$$P(Y = 20) = P(2X = 20) = P(X = 10) = \frac{2}{3}$$

从而得 $Y = 2X$ 的分布律为:

Y	10	20
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

X	5	10
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

例2. 已知 X 的概率分布为:

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求: $Y=(X-2)^2$ 的概率分布(分布律)

例2. 已知 X 的概率分布为:

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求: $Y=(X-2)^2$ 的概率分布(分布律)

解: $\because$ X的取值 $x_1=0,\cdots,x_6=5$

$\therefore$ Y的取值 $y_1=4, y_2=1, y_3=0, y_4=1, y_5=4, y_6=9$

并且: $P(Y=4)=P((X-2)^2=4)=P(X-2=\pm 2)$

$$=P(X=4)+P(X=0)=\frac{2}{9}+\frac{1}{12}$$

$$P(Y=1)=P((X-2)^2=1)=P(X-2=\pm 1)$$

$$=P(X=3)+P(X=1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$$

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$P(Y=0)=P((X-2)^2=0)=P(X-2=0)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=9)=P((X-2)^2=9)=P(X-2=\pm 3)$$

$$=P(X=5)=\frac{1}{9}$$

X	3	4	5
P_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

所以得：$Y=(X-2)^2$ 分布律为：

Y	0	1	4	9
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

归纳

一般，若X是离散型随机变量，X的概率分布为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则 $Y=g(X)$ 的概率分布为：

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

注意：如果$g(x_k)$中有一些是相同的，把它们作并项即可。

三. 连续型随机变量的函数的分布

例3. 设 X 服从区间 (0, 2) 上的均匀分布。

求：$Y = X^2$的概率密度

解: $\because$ X 的取值在(0, 2)内 $\therefore$ Y 的取值在(0, 4)内

(1) 为求 Y 的概率密度,先求出 Y 的分布函数

这是关键一步

$\because$ X 服从(0, 2)上的均匀分布

$$\therefore\quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

- 当 $y < 0$ 时有:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$$

- 当$0 \le y < 4$时有:

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y) = \boxed{P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})}$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{y}}{2}$$

- 当 $y \ge 4$ 时有:

$$F_Y(y) = 1$$

于是求得其分布函数为: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{\sqrt{y}}{2} & 0 \le y < 4 \\ 1 & y \ge 4 \end{cases}$

(2) 又因为**密度函数是分布函数的导函数**，

故将$F_Y(y)$对 y求导即得$Y=X^2$的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}y^{-\frac{1}{2}} & 0<y<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

一般情况:

设连续型随机变量X的密度函数为 $f_X(x)$

则 $Y=X^2$的分布函数为:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

将 $F_Y(y)$ 对 y 求导数,得 $y=x^2$ 的概率密度.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})] & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

注：从上述例子中可以看到，在求 $P(Y\leq y)$ 的过程中，关键的一步是设法从 $\{g(X)\leq y\}$ 中解出 X，从而得到与 $\{g(X)\leq y\}$ 等价的 X 的不等式。

例如：用 $\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}$ 代替 $\{X^2\leq y\}$

这样做是为了利用已知的 X 的分布，从而求出相应的概率。 这是求随机变量函数的分布的一种常用方法。

定理: 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$,又设函数 g(x) 处处可导,

且恒有 $g'(x) > 0$ (或 $g'(x) < 0$)

则 Y= g(X) 是连续型随机变量,

其概率密度为:

严格单调可微的函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中: $\alpha = min(g(-\infty), g(+\infty))$,

$\beta = max(g(-\infty), g(+\infty))$。

$h(y)$ 是 $g(x)$的反函数

[证]: 设 $g'(x) > 0$，此时 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 严格单调递增，它的反函数 $h(y)$ 存在，且在 (α, β) 严格单调递增，可导。

1^0. 先求 $Y = g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$

$\because y = g(x)$ 在(α, β)取值.

$\therefore$ 当 $y \le \alpha$ 时 $\qquad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$

$y \ge \beta$ 时 $\qquad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$

$\alpha < y < \beta$ 时 $F_Y(y) = P(Y \le y)$

$$= P(g(X) \le y) = P(X \le h(y)) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx$$

$$= F_X[h(y)]$$

写出反函数
(满足单调性)

2^0. 再求 $Y = g(X)$ 的概率密度

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导数即得 Y 的概率密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot h'(y) & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

3^0 若 $g'(x)<0$ 则同理有：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\,(-h'(y)) & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

综合以上两式得 $Y=g(X)$ 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\cdot\left|h'(y)\right| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

▲ 若$f(x)$在有限区间$[a,b]$以外的值等于零。

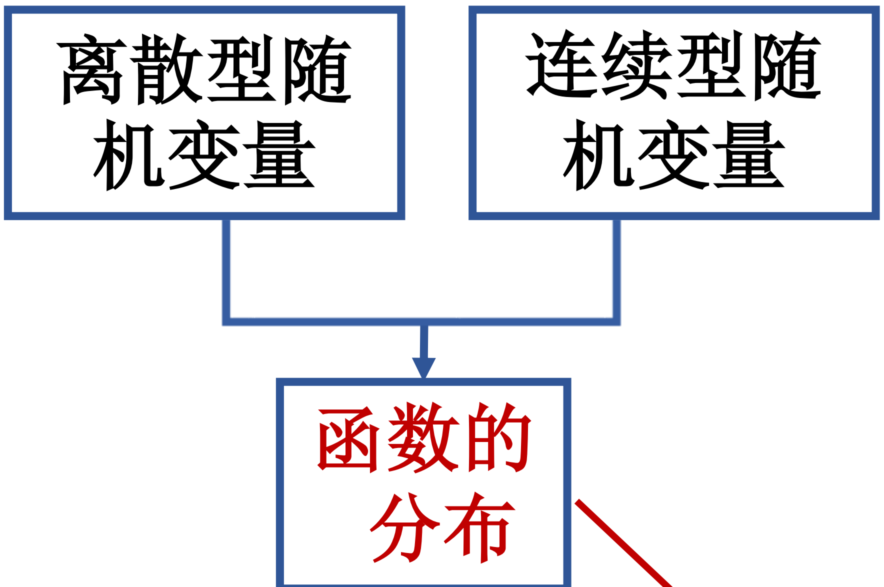
则定理的条件只需假设在$[a,b]$上恒有：

$g'(x)>0$ 或 $g'(x)<0$，并且有：

$$\alpha=\min(g(a),g(b)),\quad \beta=\max(g(a),g(b))$$

➢ 若 y=g(x) 在 x 取值范围内不单调，则此定理不能直接应用，此时可通过求y=g(x)的分布函数。然后对分布函数求导数得y=g(x)的密度函数。

第二章 随机变量及其分布



求Y=g(X)概率分布/概率密度的一般思路：

1、确定Y的取值/取值范围；

2、确定X对应的取值/范围；

3、求Y在某点/某范围取值的概率，即为求X在对应点/对应范围的取值概率(本质、理解)；

4、根据步骤3，即可得到离散型随机变量Y的分布律，或连续型随机变量Y的分布函数。

第二章 随机变量及其分布

离散型随机变量

连续型随机变量

函数的分布

其中，对于连续型随机变量：
对步骤3得到的分布函数进行求导，即得到其概率密度函数。

定理: 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$
$(-\infty < x < +\infty)$,又设函数 g(x) 处处可导,
且恒有 $g'(x) > 0$ (或 $g'(x) < 0$)
则 Y= g(X) 是连续型随机变量,
其概率密度为:

严格单调可微的函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

例4. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

求：Y=a+bX 的概率密度

解： $\because \quad X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\therefore \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

又 $\because \quad Y = a + bX$

$$\therefore \quad y = a + bx \quad \Rightarrow \quad x = h(y) = \frac{y-a}{b}$$

且 $\quad h'(y) = \dfrac{1}{b}$ ，符合单调性

所以由定理可知 Y=a+bX的概率密度为：

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\left|\frac{1}{b}\right|\cdot e^{-\left(\frac{y-a}{b}-\mu\right)^2 \Big/ 2\sigma^2}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{|b|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-[y-(a+b\mu)]^2 \Big/ 2\sigma^2 b^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|b|}\cdot e^{-[y-(a+b\mu)]^2 \Big/ 2\sigma^2 b^2}$$

得到： $Y=a+bX\sim N(a+b\mu,\sigma^2 b^2)$,

结论：正态分布的线性函数仍服从正态分布。

特别：

当 $b=\dfrac{1}{\sigma}, a=-\dfrac{\mu}{\sigma}$ 时 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

例5. 设随机变量 X 在 (0, 1)上服从均匀分布

求：$Y = -2\ln X$ 的概率密度。

解：因为在区间 (0, 1)上，函数 $\ln x < 0$，$y = -2\ln x > 0$

又：$y' = -\frac{2}{x} < 0$，符合单调性

于是 Y 在区间 (0, 1)上单调下降，有反函数

$$x = h(y) = e^{-y/2}$$

由前述定理得:

注意取绝对值

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(e^{-y/2})\left|\dfrac{d(e^{-y/2})}{dy}\right| & y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

已知 X 在 (0,1)上服从均匀分布，所以有：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

代入 $f_Y(y)$ 的表达式

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(e^{-y/2})\left|\dfrac{d(e^{-y/2})}{dy}\right|, & 0<e^{-y/2}<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

得：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2} & y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

即 Y 服从参数为2的指数分布。

例6. 设随机变量X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & 0\le x\le\pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：$Y=\sin X$ 的概率密度.

解： 注意到：当 $0\le x\le\pi$ 时 $0\le y\le 1$

故：当 $y<0$ 时有： $F_Y(y)=0$

当 $y>1$ 时有： $F_Y(y)=1$

当 $0 \le y \le 1$ 时,

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\sin X \le y)$$

$$= P(0 \le X \le \arcsin y)$$

$$+ P(\pi - \arcsin y \le X \le \pi)$$

$$= \int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2} dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} dx$$

$$= \left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)^2 + 1 - \left(\frac{\pi - \arcsin y}{\pi}\right)^2$$

而：$\boxed{f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}}$

对 $F_Y(y)$ 求导得 $Y=\sin X$ 的概率密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}$$

注：

- 若在 X 的可能取值范围内， y=g(x) 是分段严格单调的函数：则首先在各单调区间求X 对应的取值概率，并将结果进行加和，便得到Y的取值概率/$F_Y(y)$。
- 得出结论：应用定理求出 y 在各单调区间上的密度函数，再把各个结果综合，就得到 $f_Y(y)$。

例如：$y = x^2$ 的严格单调区间为：$(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$，则可先由定理求出 y 在各单调区间上的密度函数。各为：

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) \quad 与 \quad \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$$

然后将它们相加后即为所求的 $Y = X^2$ 的密度函数。

例7. 已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是严格单调的连续函数, 且$Y = F(X) \in [0,1]$。

证明：$Y = F(X)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布

证明: 设 Y 的分布函数是 $G_Y(y)$

由于： $0 \le y \le 1$

于是： 当 $y < 0$ 时 $G_Y(y) = 0$;

当 $y > 1$ 时 $G_Y(y) = 1$;

又由于 X 的分布函数 $F(X)$ 是严格单调的连续函数,

所以：其反函数 $F^{-1}(y)$ 存在且严格单调。

当 $0\le y\le 1$ 时， $G_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$

$=P(X\le F^{-1}(y))$

$=F(F^{-1}(y))=y$

即 Y 的分布函数是：

$$G_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0\le y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}$$

对 $G_Y(y)$ 求导得 Y 的密度函数为:

$$g(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

可见, Y 服从[0，1]上的均匀分布。

第二章作业（教材第五版）：

P56：2、4、6、7
P57：12、14、16、17
P58：19、20、21
P59：24、26、30、32
P60：34、35、36、37

注：作业不得抄袭；写上姓名、班级、学号和页码（如1/5），10月13日前提交至教学云平台。