组合数学引论第二章答案

1，注意到2与5乘积产生0，故只要考虑1到50中含有因子2的个数和5的个数，先考虑含因子5的个数1到50中5的倍数有10个，但25,和50含有两个5 因子，故总的5因子数为12个，而2作为因子的次数显然大于12，故产生12个0，即末尾有12个0。

2.如果首位数字是5，则有1×3×6×5+6×5=120个，如果首位数字不是5，则有3×7×6×5=630个。所以共有120+630=750个。

3, 11!-2*10!=9*10!

4, (1)4!, (2) 4+4*3+4*3*2+4! (3)4+6+4+1=15

5.(1)C_{100}^3

(2)$\frac{C_{100}^3-C_{98}^3}{C_{100}^3}$

(3)$\frac{C_2^1C_{98}^2}{C_{100}^3}$

7,(1), C(8,5)P(8,5)*3! (2), C(12,8)C(8,5)P(12,5)P(7,3)

8.共有C_{10}^4(或C_{10}^6)种送法

9. (1) 93; (2) 99+98+97+...+93

10.记$y_i = x_i - i$,则原问题转化为求方程$y_1 + y_2 + \cdots + y_8 = 4$的非负整数解数，易知共$\binom{8+4-1}{4} = 330$个。

11. 此题等价于从$(0,1)$ 到(b,a)的不接触对角线的非降路径数，即有$(1-\frac{b}{a})C(a+b-1, a-1)$ 种

12, $\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$

13. $2\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$

14.设取的第一组数有a个，第二组数有b个，要求第一组里的最小数大于第二组里的最大数，即只要取出$m(m = a+b, m \leq n)$个数,按从小到大的顺序排列，将前a个作为第一组，剩下b 个作为第二组。注意从m个数中取第一组的方法共$m-1$种，那么总的方案数为$\sum_{m=2}^{n}(m-1)C_m^n = \sum_{m=2}^{n} mC_m^n - \sum_{m=2}^{n} C_m^n = n2^{n-1} - 2^n + 1$

15, 5n+1

16.根据题意，每四个不同顶点组成的两条对角线有一个交点，而任意3条对角线不共点，故该凸10边形的对角线交于$C_{10}^4 = 210$ 个点。又每个对角线交点关联的段数为4，每个顶点关联的段数为$(10-1-2) = 7$，故把所有的对角线分割成$\frac{210\times4+10\times7}{2} = 455$段。

17, $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_l)$

19, 显然此时任何三点不共线，故可以确定$C(25,3)$个三角形，$C(25,4)$个四面体。

20.(1)$\because$最大元素恰好是j，$\therefore$其他元素是从比它小的$j-1$个元素中选取，这$j-1$个元素每个都有被选取或没被选取两种情况，故最大元素恰好是j的子集数为2^{j-1}.

(2)等式左边可以看做最大元素依次为$1,2,\cdots,n+1$子集数之和，等式右边表示集合$1,2,\cdots,n+1$的非空子集数，两边显然相等。

21, 1～1000中被4整除余1、余2、余3、余0（即被4整除）的数各有250个. 3个数如果都能被4整除，其和自然也能被4 整除；同样，一个余0的、一个余1的、一个余3的数之和，或一个余0的、两个余2的数之和，或两个余1的、一个余2 的数之和，或两个余3的、一个余2的数之和，都可以被4整除. 除此之外没有别的情况可以使题设成立了. 故而总的有$C(250,3)+C(250,1)^3+3\times C(250,1)C(250,2)=33760500$

22. (1), 先给出满足要求的放法，然后将剩余的0和1填入已部分放好的0,1序列中，而后者等价于将k个相同的球放入m个不同的盒子中的放球问题。注意到要放成出现4种01或10,则必为01010或10101,然后分别在0的位置选择放0，1的位置选择放1，分别有
$\binom{3+2-1}{2}\binom{2+2-1}{2}=18$和$\binom{3+2-1}{3}\binom{1+2-1}{1}=12$种,从而总的有30种。

(2), 思路与(1)类似, 分k为奇数和偶数考虑。
当k为奇数时,则必有且仅有一个1放在序列的开头或者末尾，由对称性，我们只需要考虑1开头即可，此时组成0,1交替序列，即$101010\cdots10$，分别有$\frac{k+1}{2}$个1和0. 类似前面做法,将剩余的0和1放入，则有

$$2\binom{m-1}{m-\frac{k+1}{2}}\binom{n-1}{n-\frac{k+1}{2}}$$

种.

当k为偶数时,则必有序列的开头和末尾都同时为1或者同时为0，

先考虑开头和结尾均为1的情形，即$101010\cdots101$，分别有$\frac{k}{2}+1$个1和$\frac{k}{2}$个0. 类似前面做法,将剩余的0 和1 放入，则有

$$\binom{m-1}{m-\frac{k}{2}}\binom{n-1}{n-\frac{k}{2}-1}$$

种.

再考虑开头和结尾均为0的情形，即$0101010\cdots10$，分别有$\frac{k}{2}$个1和$\frac{k}{2}+1$个0. 类似前面做法,将剩余的0 和1 放入，则有

$$\binom{m-1}{m-\frac{k}{2}-1}\binom{n-1}{n-\frac{k}{2}}$$

种. 两式相加即得结果。

23, 先把5封不同的信放好. 共$P(5,5)$种放法. 然后在每两封信之间加入3个空格. 由于空格都是相同的，故只有1种方法. 现在还剩下$15-3\times 43$个空格；而信队列前、后和队列中共有6个地方可以插入空格. 这相当于把3个相同的球放入6个不同的盒子，允许有空盒. 故总的放法数为：$P(5,5)\times 1\times C(3+6-1,3)=6720$

24, 分成如下三种情形：
(1)abc在一起，将其看成一个字母，则有$P(6,6)$种；
(2)ab在一起但与c分离，则先将剩余的5个字母排好，再从6个空格中取两个空格放ab和c，有$P(5,5)C(6,2)$种;
(3)a,b,c均分离，则则先将剩余的5个字母排好，再从6个空格中取3个空格分别放a，b和c，有$P(5,5)C(6,3)$种;
故总的方法有$P(6,6)+(C(6,2)+C(6,3))\times P(5,5)$

25.x与y的乘积xy不能被3整除，这说明x与y都不能被3整除。在1至100的整数中，不能被3整除的数有67个，故所求有序对(x,y)共有$A_2^2\times C_{67}^2=4422$.

28. (1)当$k\geq 2$时,

$$\begin{aligned}
(-1)^k k^2\binom{n}{k} &= (-1)^k k(k-1)\binom{n}{k}+(-1)^k k\binom{n}{k}\\
&= (-1)^k (k-1)\binom{n}{k}\binom{k}{1}+(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{1}\\
&= (-1)^k (k-1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{1}+(-1)^k\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}\\
&= (-1)^k n\binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{1}+(-1)^k n\binom{n-1}{k-1}\\
&= (-1)^k n(n-1)\binom{n-2}{k-2}+(-1)^k n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

将此式代入得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2\binom{n}{k} &= (-1)^0 0^2\binom{n}{0}+(-1)^1 1^2\binom{n}{1}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k k^2\binom{n}{k}\\
&= 0-n+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k n(n-1)\binom{n-2}{k-2}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1}\\
&= n(n-1)(1-1)^{n-2}+(1-1)^n=0(n>2)
\end{aligned}$$

注意: $n=2$时上述式子等于2.

(2)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!}\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}[\sum_{k=0}^{n+2}\frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!}-1-(n+2)]\\
&= \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

(4)当$k \geq 2$时,类似(1)的证明，有

$$\begin{aligned}(k+1)^2\binom{n}{k} &= (k(k-1)+3k+1)\binom{n}{k}\\ &= n(n-1)\binom{n-2}{k-2}+3n\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\end{aligned}$$

将此式代入得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2\binom{n}{k} &= (0+1)^2\binom{n}{0}+(1+1)^2\binom{n}{1}+\sum_{k=2}^{n}(k+1)^2\binom{n}{k}\\ &= 1+4n+n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\\ &\quad +3n\sum_{k=2}^{n}\binom{n-1}{k-1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\\ &= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}+3n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\ &= 2^{n-2}(n^2+5n+4)\end{aligned}$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)}\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)}{(n+1)(n+2)}\frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!}\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n+2}{k+2}\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+2-1)\binom{n+2}{k+2}\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\sum_{k=0}^{n}(k+2)\binom{n+2}{k+2}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2})\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\sum_{k=0}^{n}(n+2)\binom{n+1}{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2})\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\sum_{k=0}^{n+1}(n+2)\binom{n+1}{k}-\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}+1)\\
&= \frac{(n+2)2^{n+1}-2^{n+2}+1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

29. 解: 按列依次计算。

第一列显然有$m(m-1)$种方法，再考虑第2列，若第2列的第一行染色与第一列的第二行同色，则第二列第二行的格子有$m-1$种染色方法，否则，第二列第一行有的格子有$m-1$种染色方法，第二列第二行的格子有$m-2$种染色方法，有$(m-1)(m-2)$种方法，于是第二列共有$m-1+(m-1)(m-2)=m^2-3m+3$种方法。与此类似的分析，第3列,第4列,$\cdots$, 第n列均有$m-1+(m-1)(m-2)=m^2-3m+3$种方法。于是由乘法原理，共有

$m(m-1)(m^2-3m+3)^{n-1}$种方法。