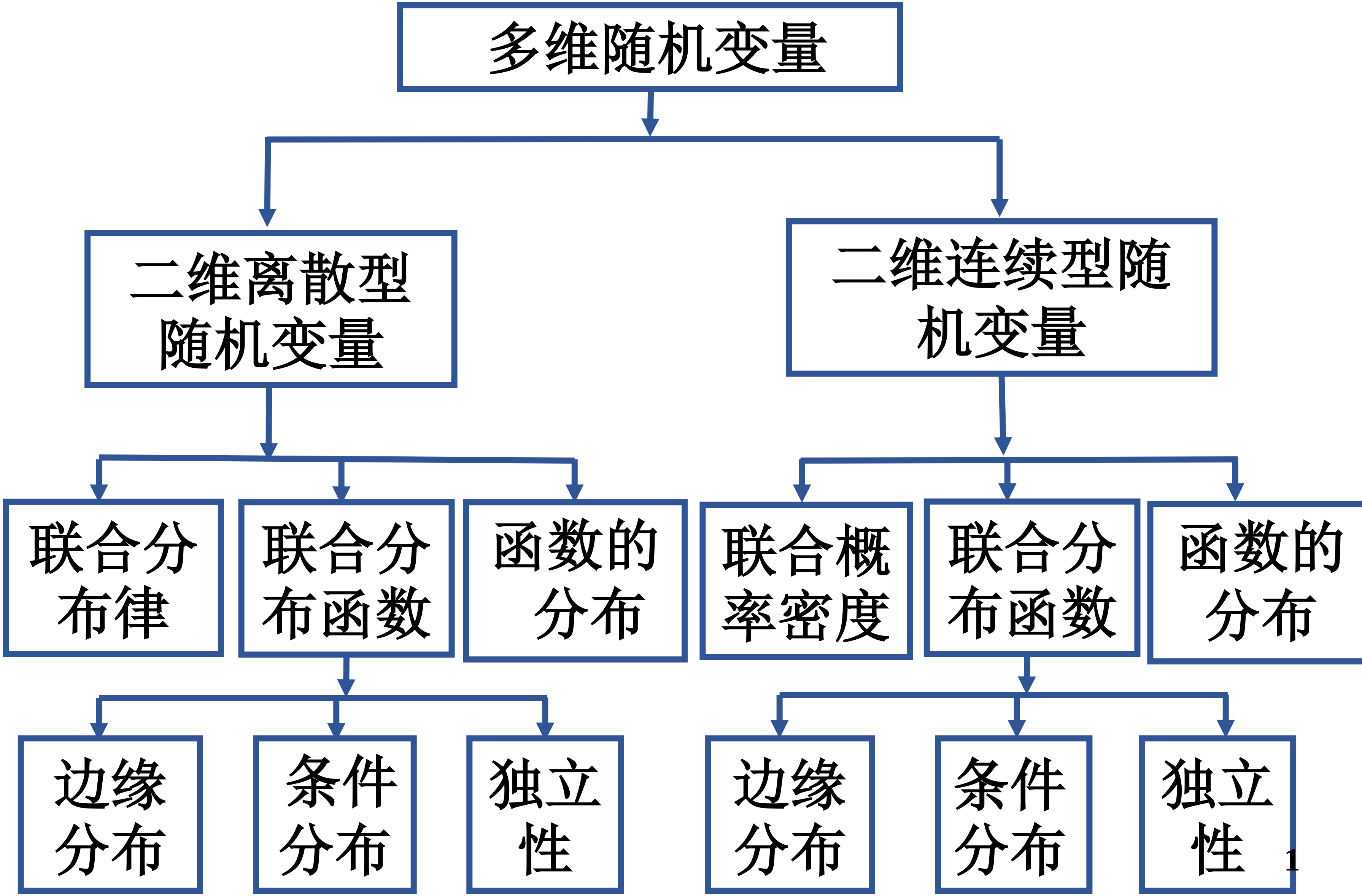
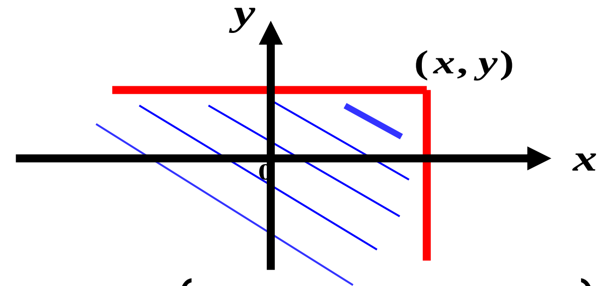
第三章 知识结构图



多维随机变量
二维离散型随机变量
二维连续型随机变量
联合分布律
联合分布函数
函数的分布
联合概率密度
联合分布函数
函数的分布
边缘分布
条件分布
独立性
边缘分布
条件分布
独立性

知识回顾



定义在同一样本空间的（X,Y）

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}$$

分布函数四个性质

（1）非减
（2）右连续
（3）[0,1]
（4）矩形区域内概率非负

多维随机变量

二维离散型随机变量

取值(x,y)只能是有限对或可列无限多对

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$$
$$i,j=1,2,\cdots\cdots$$

$$\begin{cases}(1)\quad p_{ij}\ge 0\\(2)\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1\end{cases}$$

联合分布律

联合分布函数

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

知识回顾

多维随机变量

二维连续型随机变量

联合概率密度

联合分布函数

（1）4个性质：

（a）非负

（b）规范性

（c）分布函数与概率密度的关系（二阶偏导）

（d）某区域内概率的求解

（2）常用分布扩展：

均匀分布、指数分布和正态分布

$$\boxed{F(x,y)}=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\boxed{f(u,v)}\,dudv$$

知识回顾　边缘分布—离散型随机变量(X,Y)

已知 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$ 为(X,Y)的联合分布律

则 X：

边缘分布函数　$\boxed{F_X(x)=F(x,+\infty)}=\sum_{x_i\le x}\boxed{\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}}$

边缘分布律　$p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\quad i=1,2\cdots$

则 Y：

边缘分布函数　$\boxed{F_Y(y)=F(+\infty,y)}=\sum_{y_j\le y}\boxed{\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}}$

边缘分布律　$p_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\quad j=1,2\cdots$

$p_{i\cdot}$ 是由 p_{ij} 关于 j 求和得到；$p_{\cdot j}$ 是由 p_{ij} 关于 i 求和得到。

知识回顾　边缘分布—连续型随机变量 (X,Y)

已知连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度 $f(x,y)$

及联合分布函数 $F(x,y)$

则 X 的

边缘分布函数:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\boxed{[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy]}dx$$

边缘概率密度:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

则 Y 的

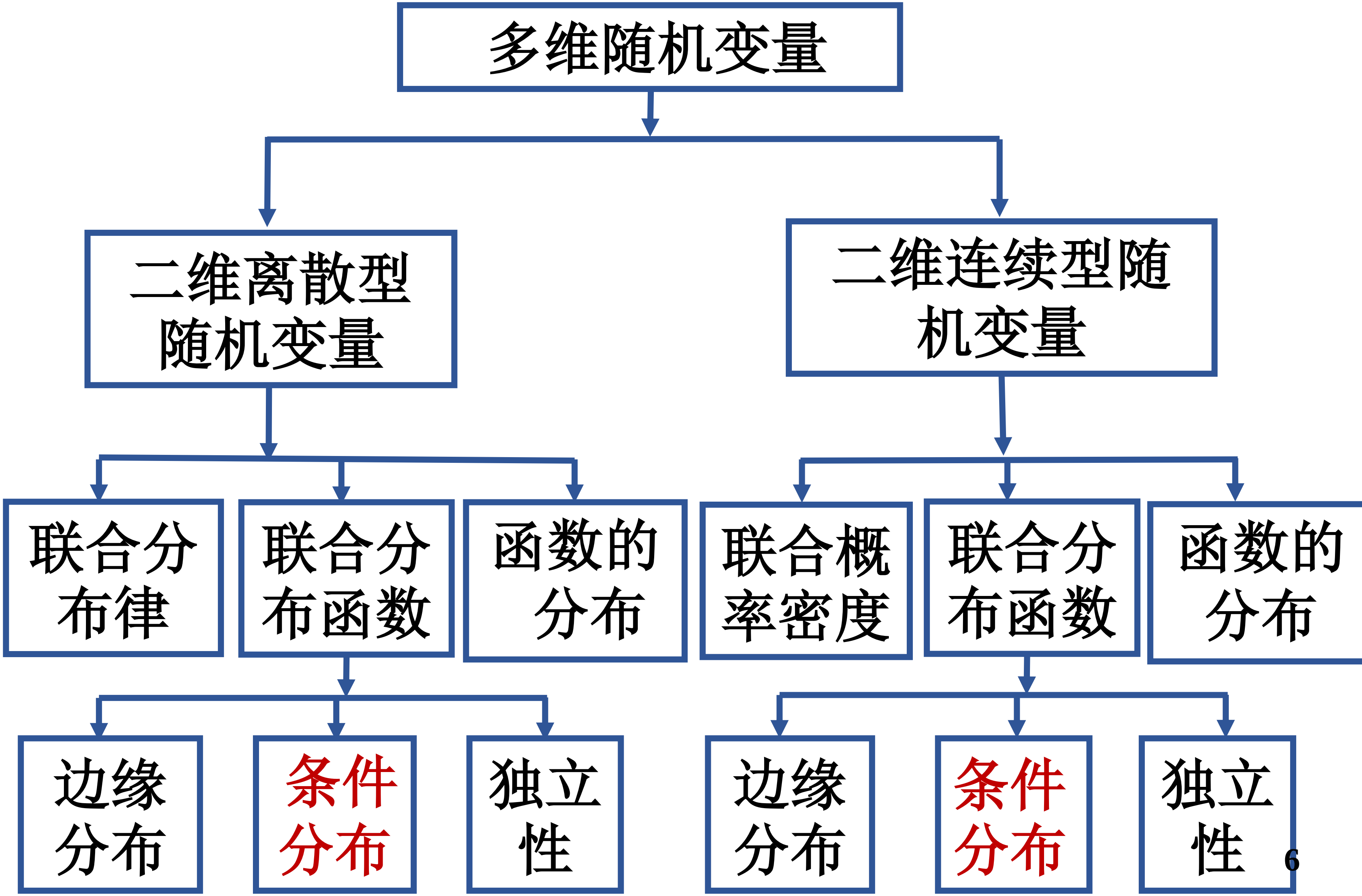
边缘分布函数:

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\boxed{[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx]}dy$$

边缘概率密度:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

第三节 条件分布


多维随机变量
二维离散型随机变量
二维连续型随机变量
联合分布律
联合分布函数
函数的分布
联合概率密度
联合分布函数
函数的分布
边缘分布
条件分布
独立性
边缘分布
条件分布
独立性

第三节 条件分布

问题的提出

在第一章中已经介绍了条件概率的概念，即在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率:

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

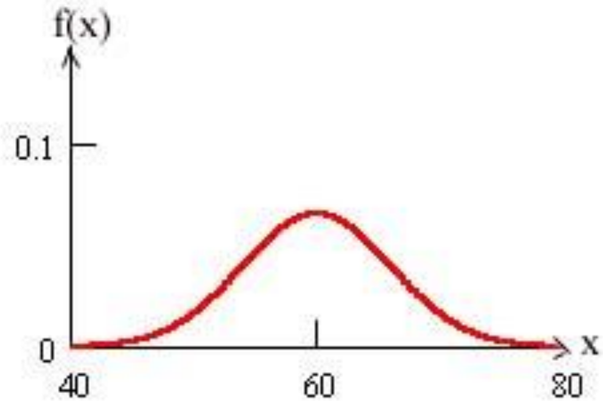
现设有两个随机变量X, Y，若问:在给定Y取某个或某些值的条件下，求随机变量X的概率分布?

这个分布就是条件分布

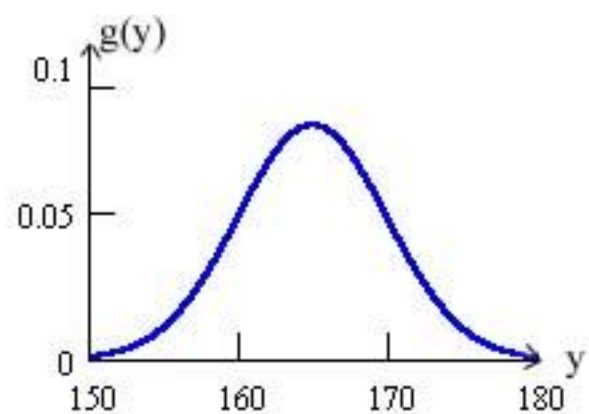
例如： 考虑某大学的全体学生，从其中随机抽取一个学生，分别以X和Y表示其体重和身高。 则 X 和Y 都是随机变量，它们都有一定的概率分布。

体重X

身高Y



体重X的分布



身高Y的分布

现在若限制 $1.7 < Y < 1.8$ (米) 这个条件，求：X 的条件分布？

这就意味着要从该校的学生中把身高在 1.7米和1.8米之间的那些人都挑出来，然后在挑出的学生中求其体重的分布。

显然：这个分布与不加这个条件时的分布会很不一样。

例如：在条件分布中（选取个高的），体重取大值的概率会显著增加 。

一. 离散型随机变量的条件分布

1. 定义: 若 (X,Y) 是二维随机变量,其联合分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots,$$

(X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布律为 $P(X=x_i)=p_{i\cdot}$,

$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$, 且 $p_{i\cdot}>0,\ p_{\cdot j}>0$。

则在事件 $\{Y=y_j\}$ 已发生的条件下事件 $\{X=x_i\}$ 发生的概率为:

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i=1,2\cdots$$

亦称为随机变量X 在 $\{Y=y_j\}$ 下的条件分布律。

同理可定义: 随机变量Y在条件$X=x_i$下的条件分布律为:

$$P(Y=y_j \mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad j=1,2,\cdots$$

2. 性质:

$1^0.$ $P(X=x_i \mid Y=y_j)\geq 0$

$2^0.$ $\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i \mid Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{1}{p_{\cdot j}}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\frac{1}{p_{\cdot j}}\cdot p_{\cdot j}=1$

$3^0.$ $\sum_{j=1}^{\infty}P(Y=y_j \mid X=x_i)=1$

例1. 设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取值；另一随机变量Y 在 1 ~ X 中等可能地取一整数。

求：条件分布律 $P(X=x_i \mid Y=y_j)$ 及 $P(Y=y_j \mid X=x_i)$

解: $\because$ X 的取值有 $1,2,3,4$； Y 的取值有 $1,2,3,4$

$\therefore$ 相应的分布律有16个，现分别计算两个:

$$P(X=1 \mid Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{1/4}{25/48}=\frac{12}{25}$$

第二节例2中已给出(X,Y) 边缘分布律

X	1	2	3	4
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
P_k	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$

$$P(X=2\mid Y=1)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{1/8}{25/48}=\frac{6}{25}$$

$$P(Y=1\mid X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{1/4}{1/4}=1$$

$$P(Y=2\mid X=1)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=\frac{0}{1/4}=0$$

第二节例2中已给出(X,Y) 边缘分布律

X	1	2	3	4
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
P_k	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$

二. 连续型随机变量的条件分布

引言：

- 在离散型随机变量中，条件分布律是由条件概率引出的，其中对任意的$P(X=x)>0$，$P(Y=y)>0$。
- 但注意到：在一维随机变量的讨论中指出过连续型与离散型随机变量根本区别之一就在于对于连续型随机变量而言$P(X=x)=0$，$P(Y=y)=0$。
- 因此，对于连续型随机变量就无法用条件概率去引出条件分布的概念了。所以必须从分布函数着手并且加以极限的方法引出条件分布的概念。

定义1.

给定y，对于任意固定的$\varepsilon > 0$,有$\boxed{P(y < Y \le y + \varepsilon) > 0}$,

且对任意实数 x，极限 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} P(\boxed{X \le x} | y < Y \le y + \varepsilon)$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(X \le x, y < Y \le y + \varepsilon)}{P(y < Y \le y + \varepsilon)}$$ 存在.

则称此极限为在条件$Y = y$下, X 的条件分布函数。记为:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x | Y = y)$$

同理:

$F_{Y|X}(y|x) = P(Y \le y | X = x)$为条件 $X = x$下 Y 的

条件分布函数。

利用条件分布对条件概率密度的推导

推导:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x|Y = y)$$

条件概率定义

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} P(X \le x|y < Y \le y+\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{P(X \le x, y < Y \le y+\varepsilon)}{P(y < Y \le y+\varepsilon)}$$

分布函数性质

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{F(x, y+\varepsilon) - F(x, y)}{F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y)}$$

分子分母同乘 $\frac{1}{\varepsilon}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{[F(x, y+\varepsilon) - F(x, y)]/\varepsilon}{[F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y)]/\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{[F(x, y+\varepsilon) - F(x,y)]/\varepsilon}{[F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y)]/\varepsilon}$$

- 分子是由二元偏导数定义;
- 分母是由一元导数定义。

$$= \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \Big/ \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

- 分子是由分布函数定义;
- 分母是由分布函数与概率密度关系。

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy\right]}{f_Y(y)}$$

对 y求偏导后只含 x 的积分

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

综上:

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

又因为定义: $F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x|Y = y)$

故可表示为: $F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\, dx$

可得:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

同理得:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

定义2: 设二维随机变量（X,Y）的概率密度函数为$f(x,y)$，(X,Y) 关于Y的边缘密度函数为$f_Y(y)$。若对于固定的y，$\boxed{f_Y(y) > 0}$，则称 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在条件$Y = y$下的X的条件概率密度，记为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

同理 $$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

为在条件 $X = x$ 下的Y的条件概率密度。

例2. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0 & (x,y)\text{ 在其它域}\end{cases}$$

求: (1) X,Y 的边缘概率密度。

(2) X,Y 的条件概率密度。

解: (1) 由已知的 $f(x,y)$ 可知:

当 $0<x<1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^x 3x\,dy=3x^2$$

当 $x\le 0$ 时, 或 $x\ge 1$ 时

$$f_X(x)=0$$

$\therefore$ X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

同理, 当 $0 < y < 1$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_y^1 3x dx = \frac{3}{2}(1 - y^2)$$

当 $y \le 0$ 或 $y \ge 1$时

$$f_Y(y) = 0$$

$\therefore$ Y 的边缘概率密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - y^2) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases}$$

(2). 依条件概率密度的定义可知:

对于使 $f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$ 为非零值的区域有:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3x}{3/2(1-y^2)}=\frac{2x}{1-y^2}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{3x}{3x^2}=\frac{1}{x}$$

$$\therefore f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2} & y<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & x\le y \text{ 或 } x\ge 1,\ 0<y<1\end{cases}$$

$$\therefore f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & 0<y<x,\ 0<x<1\\ 0 & y\le 0 \text{ 或 } y\ge x,\ 0<x<1\end{cases}$$

例3. 设 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

(即均服从正态分布)

求: $f_{X|Y}(x|y)$

解: 因为: $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}]^2}$$

显然它也是服从正态分布:

$$N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ (1-\rho^2)\sigma_1^2\right)$$

结论：正态分布的边缘分布及条件分布仍服从正态分布。

例 4.　设 (X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} & 0<x<\infty, 0<y<\infty \\ 0 & \text{其　它} \end{cases}$$

求：　$P(X>1 \mid Y=y)$

解：　$P(X>1|Y=y)=\int_1^{\infty} f_{X|Y}(x \mid y)dx$

为此，需求出　$f_{X|Y}(x \mid y)$

由于

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}dx=\frac{e^{-y}}{y}[-ye^{-x/y}]\Big|_0^{\infty}=e^{-y},$$

$$0<y<\infty$$

于是对 $y>0$， $f_Y(y)>0$

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-x/y}}{y},\quad x>0$$

故对 $y>0$

$$P(X>1\,|\,Y=y)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-x/y}}{y}dx=-e^{-x/y}\Big|_1^{\infty}=e^{-1/y}$$

例5. 设(X,Y)服从单位圆上的均匀分布，概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求: $f_{Y|X}(y\mid x)$

解: X 的边缘密度为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$\boxed{当 |x|<1}$ 时，$f_X(x) > 0$，有：

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

即当 $|x|<1$ 时，有：

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ 0 & y \text{ 取其它值} \end{cases}$$

第三章（1-3节）作业（教材第五版）：

P86：3、5、6
P87：9、11、13
P88：14、15