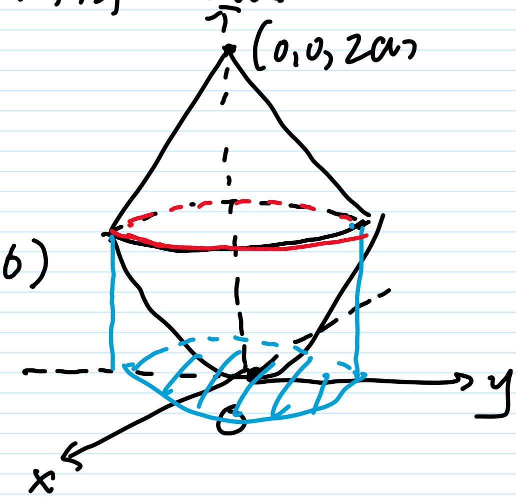
例 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的体积 $(a>0)$



解: $V = V_{上曲} - V_{下曲}$

$$=\iint_D \left(2a-\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma-\left(\iint_D \frac{x^2+y^2}{a}\,d\sigma\right)$$

$D:\ x^2+y^2\le a^2$

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=az \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

消去z ↓ xoy面上的投影曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{a}=2a-\sqrt{x^2+y^2}. \\ z=0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=a^2. \\ z=0. \end{cases}$$

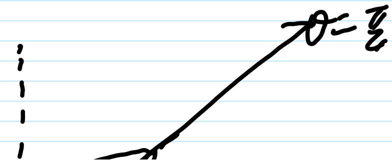
$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left[(2a-\rho)-\frac{\rho^2}{a}\right]\rho\,d\rho=\cdots$$

例 由 $(x^2+y^2)^2=xy$ 所围成图形面积.

解. $S=\iint_D 1\,d\sigma.$

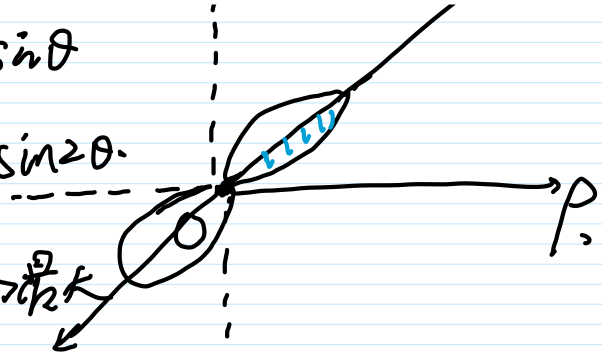
$(x,y)\to(-x,-y)$ $\Longrightarrow$ 曲线关于原点对称, $y=x$对称.

$(x,y)\to(y,x)$



极坐标: $(\rho^2)^2=\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta$

极坐标： $(\rho^2)^2=\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta$



$\rho^2=\cos\theta\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta.$

$\theta: 0\to\frac{\pi}{4}.$ $\rho: 0\to$ 最大

$\theta: \frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$ $\rho:$ 最大 $\to 0.$

$\theta: \frac{\pi}{2}\to\pi$ $2\theta: \pi\to2\pi$ $\sin2\theta<0.$

$\theta: \pi\to\frac{5}{4}\pi.$

$\theta: \frac{5}{4}\pi\to\frac{3}{2}\pi$

$$\int=4S_1=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta}}1\quad\underset{\triangle}{\rho d\rho}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{2}\quad d\theta.=\cdots$$

*. 换元公式。

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$$

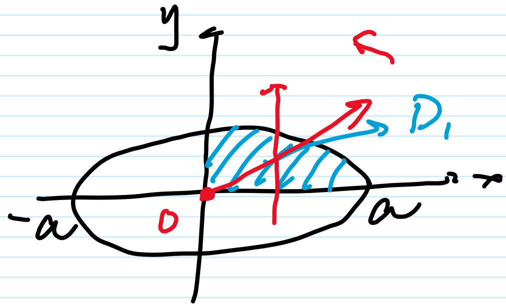
面积元素.

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'}f(x(u,v),y(u,v))\cdot\boxed{\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\text{绝对值}}dudv.}$$

特别. $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta&-\rho\sin\theta\\\sin\theta&\rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$

$$d\sigma=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|\cdot d\rho d\theta=\rho\,d\rho d\theta.$$

例 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积 (a>0、b>0)



解: $S=\pi ab$

$S=4S_1$

①法: 定积分

$$S_1=\int_0^a\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})\cdot b^2}\,dx$$

$\underline{\underline{x=a\cdot\cos t}}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\sin^2 t\cdot b^2}\cdot -a\cdot\sin t\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cdot\sin^2 t\cdot a\,dt=\frac{\pi ab}{4}$$

②法:

$$S_1=\iint_{D_1}1\,d\sigma=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})b^2}}1\,dy=\cdots$$

③法: 极坐标

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\boxed{\quad}}1\,\rho\,d\rho$$

计算复杂

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\xrightarrow{\text{换}}\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}=1.$$

④法: 换元公式

广义极坐标 $\begin{cases}x=\rho a\cdot\cos\theta\\ y=\rho b\cdot\sin\theta\end{cases}$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=ab\rho$

$d\sigma=ab\,\rho\,d\rho\,d\theta$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\xrightarrow{\text{换元法}}\rho=1$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{换元法}} \rho=1.$

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 1\ a\cdot b\cdot\rho d\rho.$$

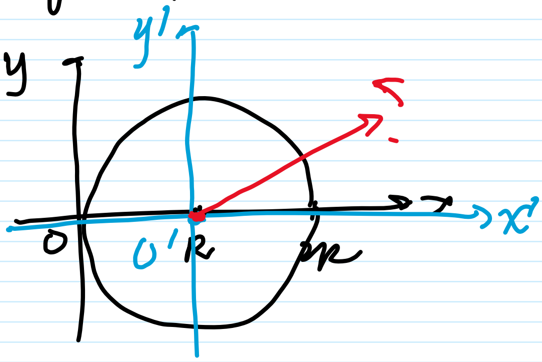
$$=\frac{\pi}{2}\cdot ab\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi ab}{4}$$

例. $I=\iint 1\,d\sigma.$ $D: x^2+y^2\le 2Rx$

①法：极坐标

解：$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}1\ \rho d\rho$

$=\cdots$



②法：换元公式

$(x-R)^2+y^2=R^2.$

$$\begin{cases}x=R+\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

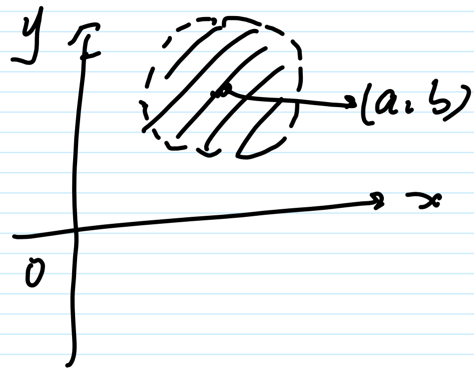
$\rho=R.$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\rho$

$d\sigma=\rho d\rho d\theta.$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R 1.\ \rho d\rho=\cdots$$

例：$D: (x-a)^2+(y-b)^2\le R^2.$



解：①法 $I=\int_{a-R}^{a+R}dx\int_{b-\sqrt{\ }}^{b+\sqrt{\ }}f(x,y)dy$

②法：$\{\ x=a+\rho\cos\theta$ $\quad\frac{\partial(x,y)}{\ }=\rho$

③法: $\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta \\ y = b + \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho.$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R f(a+\rho\cos\theta,\ b+\rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho$$

第三节 三重积分

定义: $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上有界

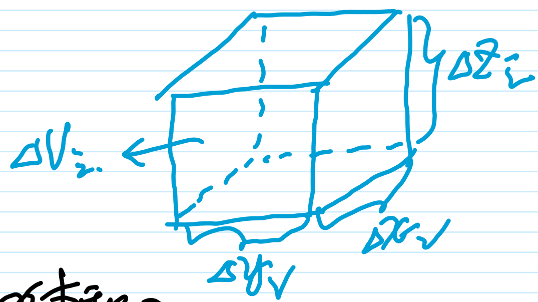
(1) 任意分割. Δv_i.

(2) 任意取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$.

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 存在, 则称为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分. 记为 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dv$ 体积元素

$$\Delta v_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$$

$$\boxed{dv = dx\,dy\,dz.}$$



当 $f(x,y,z)=1$ 时 $\iiint\limits_{\Omega} 1\, dv = V$ (Ω 的体积)

性质: 中值定理. $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dv = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V.$

对称性：

(i) Ω 关于 xoy 面对称，且 Ω_1：Ω 的上半部分

$$\Longrightarrow \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dv, & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,y,-z) \end{cases}$$

(ii) Ω 具有轮换对称性，

$$\Longrightarrow \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \iiint_{\Omega} f(y,z,x)\,dv = \iiint_{\Omega} f(z,x,y)\,dv.$$

例：Ω：$x^2+y^2+z^2\le R^2$ 具有轮换对称性。

$$\iiint_{\Omega} x^2\,dv = \iiint_{\Omega} y^2\,dv = \iiint_{\Omega} z^2\,dv = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv.$$

例. $I=\iiint_{\Omega}(x+2y-3z)^2\,dv$，$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\le R$.

(x,y,z) $\updownarrow$ xoy 面 $(x,y,-z)$

解. $I \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega}(x^2+4y^2+9z^2)\,dv = 2\iiint_{\Omega_1}(x^2+4y^2+9z^2)\,dv.$

$\xlongequal{\text{轮换对称性}} \frac{14}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv.$

$$\iiint_{\Omega} xy\,dv=0 \qquad \iiint_{\Omega} xz\,dv=0 \qquad \iiint_{\Omega} yz\,dv=0$$

$\times$? Ω 关于 xoy 面对称 (x,y,z) $\updownarrow$ xoy 面 $(x,y,-z)$

xz yz $-xz$

$(x, y, -z)$ $\to$ $-xz$, $\to$ $-yz$.

Ω关于yoz面对称： $(x, y, z) \to xy$

$\updownarrow$ yoz面

$(-x, y, z) \to -xy$

例： $I = \iiint\limits_{\Omega'} (x+2y-z)^2 dv$， Ω': $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 且 $z \ge 0$

解： Ω'关于yoz面，zox面对称，不具有轮换对称性

$$I \overset{\text{对称性}}{=\!=} \iiint\limits_{\Omega'} (x^2+4y^2+9z^2) dv.$$

$(x, y, z) \to xy$, $\to xz$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \iiint\limits_{\Omega'} xy\,dv = 0 \\ \iiint\limits_{\Omega'} xz\,dv = 0. \end{cases}$

$\updownarrow$ yoz面

$(-x, y, z) \to -xy$, $\to -xz$.

$(x, y, z) \to yz$

$\updownarrow$ zox面 $\Longrightarrow \iiint\limits_{\Omega'} yz\,dv = 0.$

$(x, -y, z) \to -yz$

$$I = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\Omega} (x^2+4y^2+9z^2) dv.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} \iiint (x^2+y^2+z^2) dv = \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv = \cdots$$

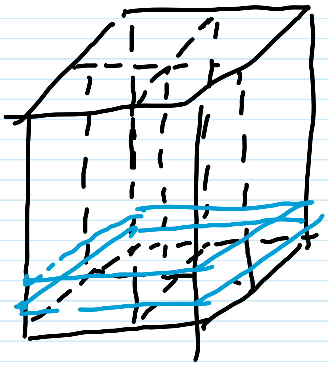
1. 直角坐标系下的计算

引例：空间物体的质量. $\rho = f(x,y,z)$

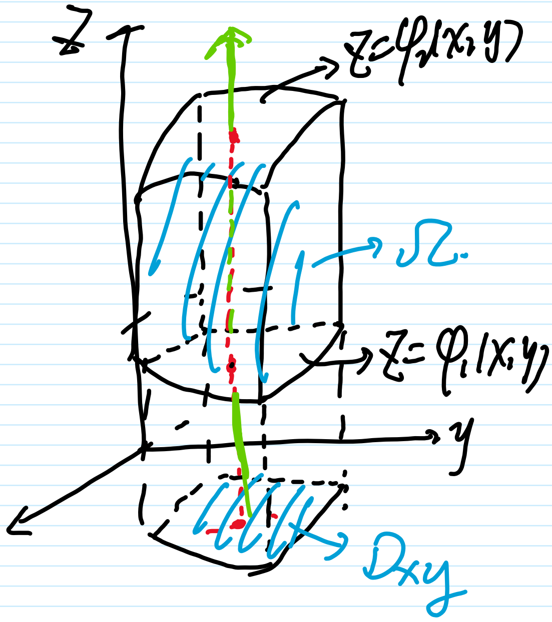
$$M = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv.$$

投影法 $\overset{定积分}{=}$ 细棒质量之和 △二重积分

截面法 $\overset{二重积分}{=}$ 平面薄片质量之和 △定积分



☆(1). 投影法：(先一后二) —穿线法.

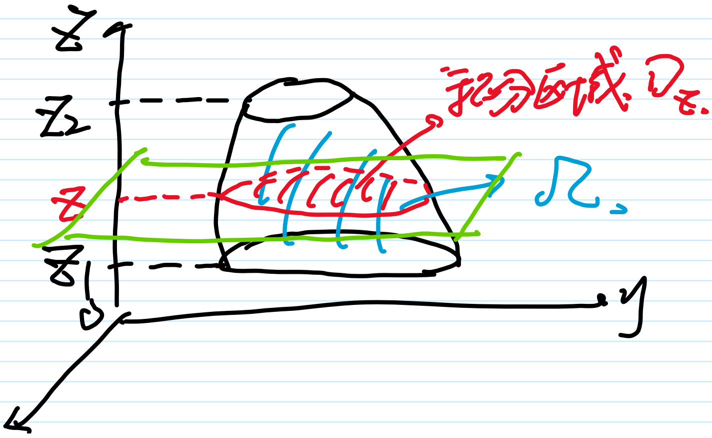


$$I = \iint_{D_{xy}}\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

其中：D_{xy}是Ω在xoy面上的投影区域.

(2) 截面法：(先二后一) —穿线法



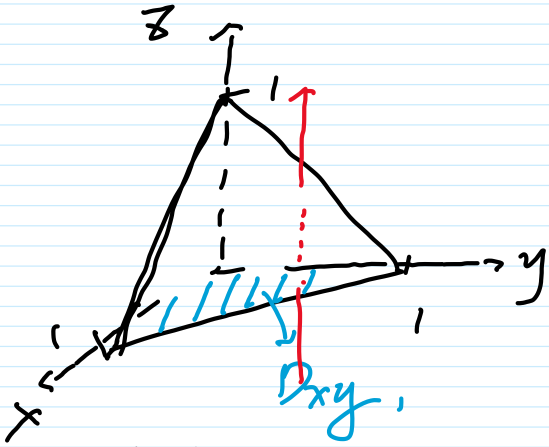
$$I = \int_{z_1}^{z_2}\left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy\right]dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \iint f(x,y,z)\,dxdy$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

其中：D_z 是截面区域

例. $I = \iiint_\Omega x\,dv$，Ω：$x+y+z=1$ 与坐标面所围成的



解：(1) 法：投影法：

Ω 在 xoy 面上的投影区域

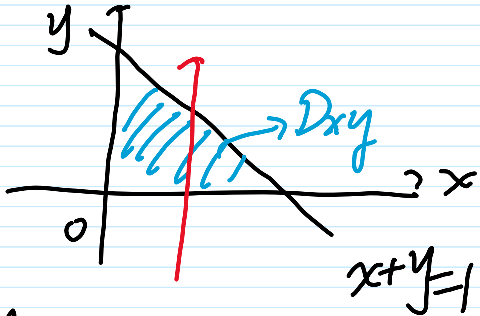
D_{xy}.

用平行于 z 轴射线穿过 Ω：

$z=0$

$\downarrow$

$z=1-x-y$



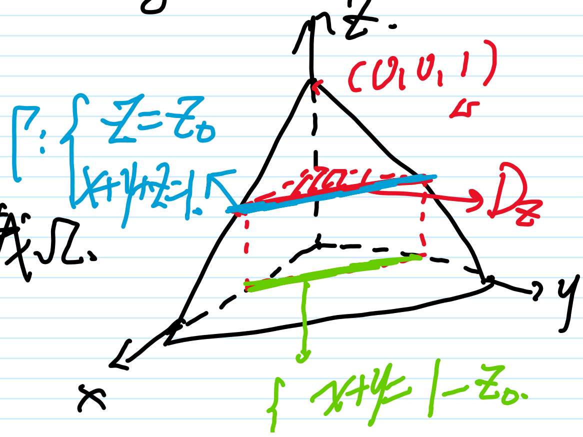
$$I = \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^{1-x-y} x\,dz\right) dxdy,$$

$$= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_0^{1-x-y} x\,dz = \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy = \cdots$$

② 截面法：

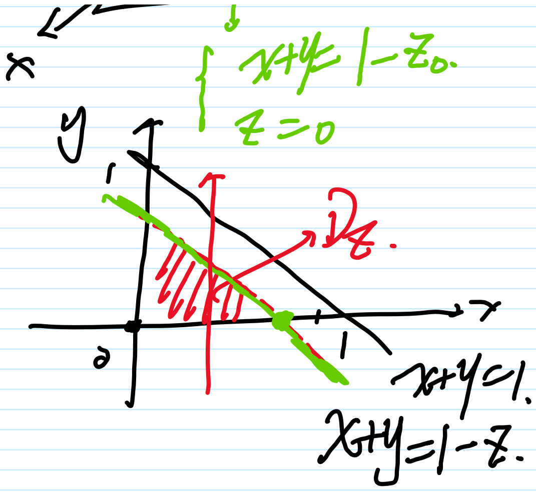
(a) 用平行于 xoy 面的平面去截 Ω.



$$I=\int_0^1\left[\iint_{D_z} x\,dx\,dy\right]dz$$

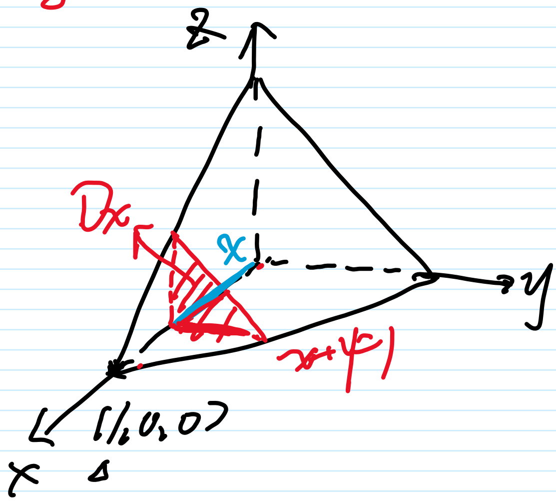
$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-z}dx\int_0^{1-x-z}x\,dy\right]dz$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dx\int_0^{1-x-z}x\,dy$$



三次积分 ($y\to x\to z$)

(b). 用平行于yoz面去截Ω.



$$I=\int_0^1\left[\iint_{D_x} x\,dy\,dz\right]dx$$

常数

$$=\int_0^1\left[x\iint_{D_x}1\,dy\,dz\right]dx$$

$$=\int_0^1 x\cdot\sigma(x)\,dx.$$

$$=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\,dx$$

常用截面法的情形:

$$\iiint_{\Omega} g(z)\,dv$$ 用z=常数去截Ω. $$\int_{z_1}^{z_2}\left(\iint_{D_z} g(z)\,dx\,dy\right)dz.$$

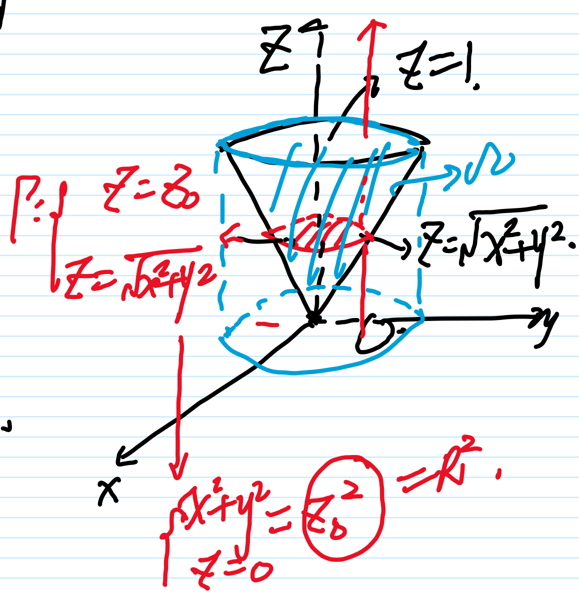
$$=\int_{z_1}^{z_2} g(z)\,\sigma(z)\,dz.$$

截面面积. (易于计算).

$= \int_{z_1} g(z)\, \sigma(z)\, dz$

截面面积.（易于计算）.

例. $I = \iiint\limits_{\Omega} z^2\, dv$. Ω: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成.



解: ①截面法:

用平行于 xoy 面的平面截 Ω.

$I = \int_0^1 z^2 \cdot \sigma(z)\, dz$.

$= \int_0^1 z^2 \cdot \pi z^2\, dz = \frac{\pi}{5}$

②投影法:

Ω 在 xoy 面上投影区域 D_{xy}: $x^2+y^2 \le 1$.

$I = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z^2\, dz \right) dx\,dy \overset{\text{极坐标}}{=} \cdots$