

$$\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \end{aligned}$$

例: $I = \iint_{\Sigma} (x + z) dS = \underbrace{\iint_{\Sigma} x dS}_{\text{对称性}} + \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{\Sigma} z dS$

其中 $\Sigma: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Σ 关于 yz 面和 xz 面对称

解: $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$. $(x, y, z) \leftrightarrow (-x, y, z)$

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

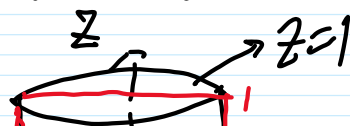
$$I = \iint_{D_{xy}} (x + \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy + \pi \cdot 1^2 = 0 + \pi = \pi.$$

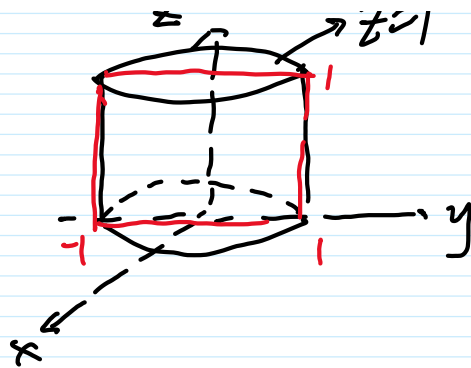
例: $I = \iint_{\Sigma} (x + z) dS$

其中 $\Sigma: x^2 + y^2 = 1$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分



解: Σ 关于 yoz 面与 zox 面对称

$$I = \iint_{\Sigma} z \, dS \quad \text{对称性} \quad 2 \iint_{\Sigma_{\text{前}}} z \, dS$$



Σ 投影在 yoz 面: $D_{yz}: -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

$$\Sigma = \Sigma_{\text{前}} + \Sigma_{\text{后}}$$

$$\Sigma_{\text{前}}: x = \sqrt{1-y^2}$$

$$x_y = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$x_z = 0$$

$$\Sigma_{\text{后}}: x = -\sqrt{1-y^2}$$

$$x_y = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$x_z = 0$$

$$I = I_{\Sigma_{\text{前}}} + I_{\Sigma_{\text{后}}} = \iint_{D_{yz}} z \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2} + 0^2} \, dy \, dz + \iint_{D_{yz}} z \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2} + 0^2} \, dy \, dz$$

$$= 2 \iint_{D_{yz}} z \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy \, dz = 2 \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy \right) \left(\int_0^1 z \, dz \right) = \dots$$

例: $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, dS$

其中 ① $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

② $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z$.

解: ① Σ 轮换对称性. $I = \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS = \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} 1 \, dS$
 $= \frac{2}{3} \cdot 4\pi \cdot 1^2 = \frac{8}{3}\pi$.

② Σ 具有轮换对称性

$$I = \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} (2x + 2y + 2z) dS$$

$$= \frac{4}{3} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{4}{3} \cdot 3 \iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma} x dS$$

$$= 4 \cdot \bar{x} \cdot S = 4 \times 1 \times 4\pi 1^2$$

形心公式:

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\iint_{\sigma} 1 d\sigma} = \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\sigma}$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x dv}{V}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Sigma} x ds}{S}$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x dS}{S}$$

第五节 对坐标的曲面积分

定义: 双侧曲面.

xoy 面, yoz 面, zox 面

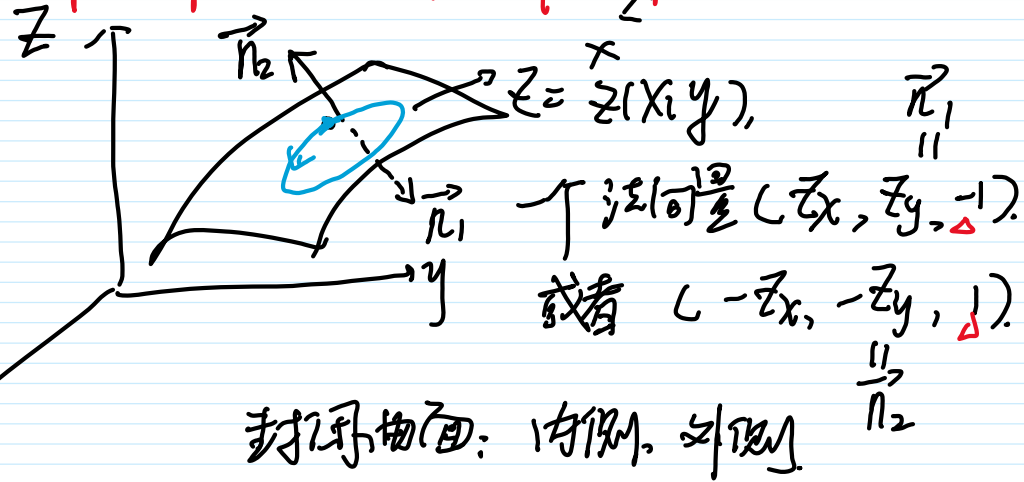


法向量 \vec{n}

方向余弦

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$= \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n}$$

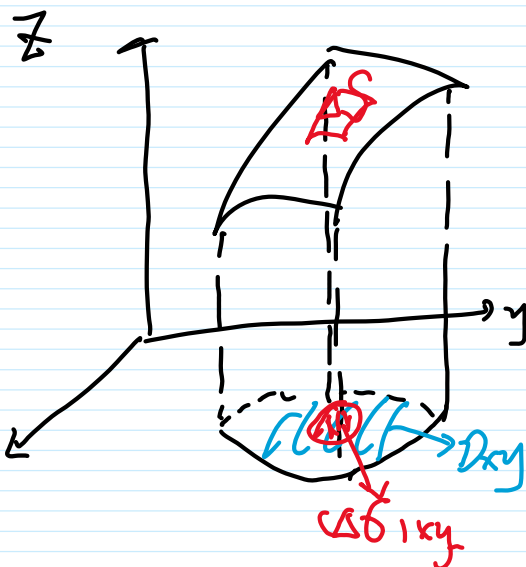


定义: 单侧曲面.

定义: 有向曲面的投影 — 实数 z

有向 ΔS 在 π_{xy} 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$

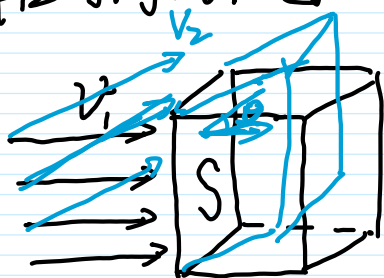
$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} +(\Delta S)_{xy} & , \cos \gamma > 0 \\ 0 & , \cos \gamma = 0 \\ -(\Delta S)_{xy} & , \cos \gamma < 0 \end{cases}$$



引例. 不可压缩流体 ($\rho = \text{常数}$)

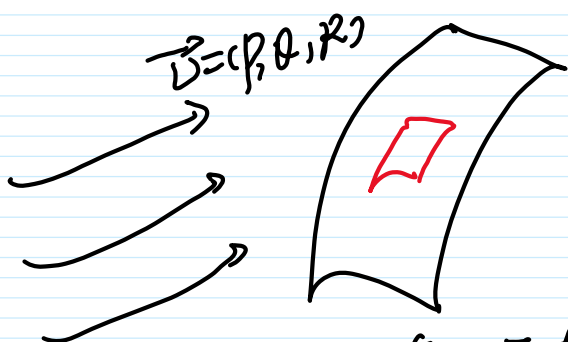
$$\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

单位时间内经过一个有向曲面 Σ 的体积 (流量)



$$V_1 = v_1 \cdot l \times S$$

$$V_2 = v_2 \cdot l \cdot \cos \theta \times S = |\vec{v}| |\vec{n}| \cos \theta \cdot S \\ = \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot S$$



定义: 若 P, Q, R 在有向 Σ 有界, 由任意分割 \Rightarrow 任意取点.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (P_i, Q_i, R_i) \cdot (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i) \cdot \Delta S_i$ 存在

上式称为: 有向曲面的面积分 (面积分)

若 $\vec{x} \rightarrow 0$ 则 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$

则称为 $\vec{A} = (P, Q, R)$ 在有向 Σ 上对坐标的曲面积分 (II型).

记为 $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS}$ 其中 $\vec{dS} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) dS$
 $= (\cos\alpha dS, \cos\beta dS, \cos\gamma dS)$
 $= (\cos\alpha dS, \cos\beta dS, \cos\gamma dS)$
 $= \iint_{\Sigma} P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma dS$ I型曲面积分
 $= \iint_{\Sigma} P \cdot dy dz + Q dz dx + R dx dy$ II型曲面积分

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int_{\Sigma} P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma dS.$$

性质: ① 有向性

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

$$= - \iint_{\Sigma^-} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

② 不要使用对称性

II型曲面积分的计算 \longrightarrow 二重积分

1. $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ $\Sigma: z = z(x, y)$ 投影到 xoy 面 D_{xy} .

$$= \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

上侧 $\cos \gamma > 0$, 取“+”; 下侧 $\cos \gamma < 0$, 取“-”。

$$(2) \quad \iint_{\Sigma} p(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} p(x(y, z), y, z) dy dz$$

$\cos \alpha > 0$ 取“+”; $\cos \alpha < 0$ 取“-”。

$$(3) \quad \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) dz dx$$

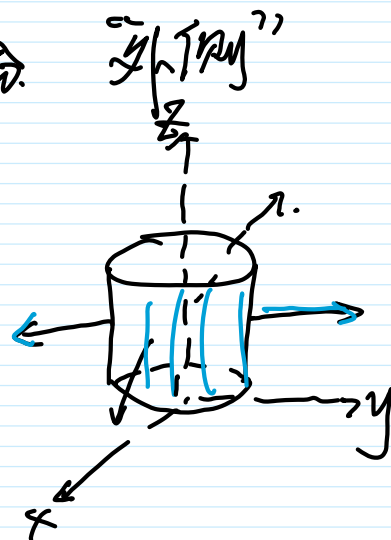
$\cos \beta > 0$ 取“+”; $\cos \beta < 0$ 取“-”。

例: $\Sigma: x^2 + y^2 \leq 1$, 在 $z=0$ 和 $z=1$ 之间部分

$\Sigma \perp xOy$ 面。

在 xOy 面上的投影 $dx dy = 0$

$$\iint_{\Sigma} p(x, y, z) dx dy = 0$$



推论: ① $\Sigma \perp xOy$ 面 $\xRightarrow{dx dy = 0} \iint_{\Sigma} p dx dy = 0$

② $\Sigma \perp yOz$ 面 $\xRightarrow{dy dz = 0} \iint_{\Sigma} p dy dz = 0$

③ $\Sigma \perp zOx$ 面 $\xRightarrow{dz dx = 0} \iint_{\Sigma} Q dz dx = 0$

例. $I = \iint_{\Sigma} 1 \, dS$ $\Sigma: x^2+y^2=\pi^2, z>0$ 和 $z=1$ 两部分

解 $I = S = 2\pi \cdot |\pi| = 2\pi \neq 0$

例. $I = \iint_{\Sigma} (x+1) \, dy \, dz + 1 \, dx \, dy$. $\Sigma: x+y+z=1$ 在第一卦限部分, "上侧"

解: $I_1 = \iint_{\Sigma} (x+1) \, dy \, dz$

$\cos \alpha > 0 \Rightarrow + \iint_{D_{yz}} (1-y-z+1) \, dy \, dz$

$I_2 = \iint_{\Sigma} 1 \, dx \, dy = + \iint_{D_{xy}} 1 \, dx \, dy$

