**第十四、五章 相对论与量子力学**

**相对论作业：**

**B-1.**

一辆高速车以 $0.8c$ 的速率运动。地上有一系列的同步钟，当经过地面上的一台钟时，驾驶员注意到它的指针在 $t=0$，他即刻把自己的钟拨到 $t'=0$。行驶了一段距离后，他自己的钟指到 6 us 时，驾驶员看地面上另一台钟。问这个钟的读数是多少？

解：$\Delta t=\dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\dfrac{6\ \mu s}{\sqrt{1-(0.8c/c)^2}}=10\,(\mu s)$

所以地面上第二个钟的读数为

$$t=t'+\Delta t=10\,(\mu s)$$

**B-2**

解： 设一个事件的时空坐标在 $K$ 系中为 $(x_1,t_1)$，在 $K'$ 系中为 $(x_1',t_1')$，另一个事件的时空坐标在 $K$ 系中为 $(x_2,t_2)$，在 $K'$ 系中为 $(x_2',t_2')$．根据洛仑兹变换公式:

$$x'=\frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\quad,\quad t'=\frac{t-\upsilon x/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

可得 $$x_2'=\frac{x_2-\upsilon t_2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\quad,\quad x_1'=\frac{x_1-\upsilon t_1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

在 $K$ 系，两事件同时发生，$t_1=t_2$，则 $$x_2'-x_1'=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

所以 $$1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}=(x_2-x_1)/(x_2'-x_1')=\frac{1}{2}$$

解得 $$\upsilon=\sqrt{3}c/2\,.$$

在 $K'$ 系上述两事件不同时发生 $t_1'=\dfrac{t_1-\upsilon x_1/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$，$t_2'=\dfrac{t_2-\upsilon x_2/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$

由此得 $$t_1'-t_2'=\frac{v(x_2-x_1)/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=5.77\times10^{-6}\ \text{s}$$

**B-3**

解：依能量守恒和动量守恒可知，两个$\pi^0$介子有相等的能量，并以等值反向的动量分开。

由题得每个$\pi^0$介子的总能量为 $E=\frac{1}{2}\times 498=249\,\text{MeV}$

由 $E^2=(pc)^2+E_0^2$

得 $$p=\frac{\sqrt{E^2-E_0^2}}{c}=\frac{\sqrt{249^2-135^2}}{c}\text{MeV}=\frac{209}{c}\text{MeV}$$

或表示为 $p=1.11\times 10^{-19}\ \text{Kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

依照 $p=mv$，得 $$v=\frac{\text{p}}{\text{m}}=\frac{\text{pc}^2}{\text{mc}^2}=\frac{209\text{c}^2}{249\text{c}}\approx 0.839\text{c}$$

或表为 $v=2.52\times 10^6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

**量子力学习题：**

**B-1.** 一束带电量与电子电量相同的粒子经 206V 电压加速后，测得其德布罗意波长为 0.002nm，试求粒子的质量。

**解：**经过电压$U$加速后,带电粒子的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2=eU \qquad ①$$

其中$e$为电子电量。又根据德布罗意公式

$$p=mv=\frac{h}{\lambda} \qquad ②$$

联立①②解得电子质量为

$$m=\frac{h^2}{2eU\lambda^2} \qquad ③$$

将已知数据带入③

$$m=\frac{h^2}{2eU\lambda^2}=\frac{(6.626\times 10^{-34})^2}{2\times 1.6\times 10^{-19}\times 206\times(0.002\times 10^{-9})^2}=1.67\times 10^{-27}(kg)$$

**B-2. 解:**(1)

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)$$

$$\lambda=\lambda_0+\Delta\lambda=1.024\times10^{-10}m$$

(2)根据能量守恒:

$$h\nu_0+m_0c^2=h\nu+mc^2$$

∴反冲电子获得动能:

$$\varepsilon_K=mc^2-m_0c^2=h\nu_0-h\nu=h\frac{c}{\lambda_0}-h\frac{c}{\lambda}=hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0+\Delta\lambda)}$$

$$=4.66\times10^{-17}J=291eV$$

**B-3.** 一维无限深势阱中粒子的定态波函数为

$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

试求粒子处于下述状态时,在 $x=0$ 和 $x=a/3$ 之间找到粒子的概率。（1）粒子处于基态；（2）粒子处于 $n=2$ 的状态。

**解：** 由已知可得一维无限深势阱中粒子的定态波函数为

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

则相应的概率密度为

$$|\psi(x)|^2=\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi}{a}x$$

在 $x=0$ 和 $x=a/3$ 之间找到粒子的概率为

$$P=\int_{x1}^{x2}|\psi(x)|^2dx=\int_0^{a/3}\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}dx$$

利用三角函数公式

$$\cos2x=1-2\sin^2x$$

可解得

$$P=\int_0^{a/3}\frac{1}{a}(1-\cos\frac{2n\pi x}{a})dx=\left[\frac{x}{a}+\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{a}\right]_0^{a/3}$$

（1） 当 n＝1 时，粒子处于基态的概率为

$$P=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

（2） 当 n＝2 时，粒子处于该态的概率为

$$P=\frac{1}{3}+\frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8\pi}$$