# 一、选择题

根据定义：$X^2 \sim [t(n)]^2 = F(1, n)$

1.设随机变量$X \sim t(n)$, $n>1$, $Y = \dfrac{1}{X^2}$,则(　　)

(A) $Y \sim \chi^2(n)$　　(B) $Y \sim \chi^2(n-1)$

(C) $Y \sim F(1,n)$　　(D) $Y \sim F(n,1)$

2. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 $u_\alpha$满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$，若 $P\{|X| < x\} = \alpha$，则 $x$ 等于____。

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　(D) $u_{1-\alpha}$

根据$\alpha$分位点的定义 (P50)：求$P\{X>x\}=(1-\alpha)/2$

3. 设$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$，则$D(S^2)$=(　　)

(A) $\dfrac{\sigma^4}{n}$　(B) $\dfrac{2\sigma^4}{n}$　(C) $\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$　(D) $\dfrac{\sigma^4}{n-1}$

$\because \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1), \therefore D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1);\ \because D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2),$

$\therefore \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1), D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

4. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体$X$的样本, $E(X)=\mu$,

$D(X)=\sigma^2$, $\overline{X}$为样本均值, $S^2$为样本方差, 则(　　)

(A) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　(B) $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$ 要求n充分大

(C) $S^2$与$\overline{X}$ 相互独立　(D) $S^2$是$\sigma^2$的无偏估计量

参考教材P158

X的分布未知，所以不选A C P143

5.设随机变量$X$和$Y$独立且都服从正态分布，则

(A) $X+Y$服从正态分布 (B)$X^2+Y^2$服从分布$\chi^2$

(C) $X^2$和$Y^2$服从分布 $\chi^2$ (D) $\dfrac{X^2}{Y^2}$服从正态分布

$X$ $Y$ 或为非标准正态分布，所以B和C都不对。答案A, 可参考P76。

6.设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自标准正态总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 $S^2$分别是样本均值和样本方差，则（ ）应为 $\bar{X}\sim N(0,\dfrac{1}{n})$ 应为 $n\bar{X}\sim N(0,n)$

(A) $\bar{X} = N(0,1)$ (B) $n\bar{X}\sim N(0,1)$

(C) $\bar{X}/S$服从$t$分布 (D) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$服从分布$\chi^2$

$\bar{X}\sim\left(0,\frac{1}{n}\right), S^2\sim\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2(n-1)$ 分子和分母需做正则化

7.设随机变量 $X\sim N(0,1)$ 和 $Y\sim N(0,2)$,并相互独立, 则（　）

(A) $\frac{1}{3}X^2+\frac{2}{3}Y^2$ 服从分布 $\chi^2$

(B) $\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2$ 服从分布 $\chi^2$

(C) $\frac{1}{3}(X+Y)^2$ 服从分布 $\chi^2$　　$X+Y\sim N(0,3)$

(D) $\frac{1}{2}(X+Y)^2$ 服从分布 $\chi^2$

**8.** $X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体的简单随机样本,$v = n-1$，$\overline{X}$ 和 $S^2$分别是样本均值和样本方差，则（　）

(A) $\bar{X}$ 服从自由度为$v$的分布 $\chi^2$

$\bar{X} \sim \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(B) $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ 服从自由度为$n$的分布 $\chi^2$

(C) $\frac{S^2}{\sigma^2}$ 服从自由度为$n$的分布 $\chi^2$

**(D)** $\frac{vS^2}{\sigma^2}$服从自由度为$v$的分布 $\chi^2$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

P136 样本方差$S^2$的定义
P143 1°（3.21）

9.设总体$X$服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)$，

$X_1, X_2, \dots, X_{10}$是来自$X$的简单随机样本，

统计量 $Y=\dfrac{4\left(X_1^2+\cdots+X_i^2\right)}{X_{i+1}^2+\cdots+X_{10}^2}$（ $1<i<10$ ）

服从$F$分布，则 $i$ 等于（　　　）

（A）4　（B）2　(C) 3　(D) 5

参考$F$分布定义，P141.

$$Y=\frac{4\cdot\chi^2(i)}{\chi^2(10-i)}\sim F=\frac{\chi^2(i)/i}{\chi^2(10-i)/(10-i)}$$

10.对于正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中$\sigma^2$已知,样本容量$n$和置信水平$1-\alpha$均不变. 则对于不同的样本观察值, 总体均值$\mu$的置信区间最小长度 (　　　)

(A) 变短　(B) 变长　(C) 不变　(D) 不能确定

区间为$\left(\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$,

长度为$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$与方差及样本容量有关,

样本观察值只影响$\bar{X}$。

11.在区间估计中，$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1-\alpha$ 的正确含义是(　　　)

(A) $\theta$ 以1-$\alpha$的概率落在区间$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$内

(B) $\theta$ 落在区间$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$以外的概率为$\alpha$

(C) $\theta$ 不落在区间$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$内的概率为$\alpha$

(D) 随机区间$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$包含$\theta$的概率为$1-\alpha$

## 关于置信区间，注意：

被估计的参数$\theta$虽然未知,但它是一个常数,没有随机性, 而区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$是随机的.

因此定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

的本质是：

随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$以$1-\alpha$的概率包含着参数$\theta$的真值,而不能说参数$\theta$以$1-\alpha$的概率落入随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$.

# 二、填空题

1.设总体$X$具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}|x|, & -1<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$X_1,X_2,\ldots,X_{50}$为取自$X$的样本, $\overline{X}$ 是样本均值,$S^2$为样本方差,则$E(\overline{X})$=__0__. $D(\overline{X})$ =__1/100__. $E(S^2)$=__1/2__.

P142
(3.19)-(3.20)

$$E(\overline{X})=\mu,\ D(\overline{X})=\sigma^2/n,\ E\left(S^2\right)=\sigma^2$$

$$\sigma^2=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\int_{-1}^{1}x^2|x|\,dx-0$$

$$=\int_0^1 x^3\,dx-\int_{-1}^{0}x^3\,dx=1/2$$

2. 设$X_1,X_2,\ldots,X_6$为来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的随机样本,

而$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$ , 试确定常数$c$=__$1/(3\sigma^2)$__,

使得随机变量 $cY\sim\chi^2$.

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\sim N(0,1)$$

3. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为 $n$ 个独立同分布的随机变量,且 $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=8$ $(i=1,2,\ldots,n)$ . 对于 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,用切比雪夫不等式估计 $P\{\mu-4<\overline{X}<\mu+4\}\geq$ $\underline{1-(1/2n)}$.

$$E(\overline{X})=\mu, D(\overline{X})=8/n,$$
$$P\{|\overline{X}-\mu|<4\}\ \geq\ 1-D(\overline{X})/4^2$$

4. 设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_{1000}$ 独立同分布,且 $X_i\sim b(0\text{-}1)$, 参数 $p=0.1$, 则由中心极限定理有

$$P\{110<\sum_{i=1}^{1000}X_i<130\}\approx \underline{\quad 0.1461 \quad}.$$

教材P123-124: 拉普拉斯中心极限定理

$$P\left\{\frac{110-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{\sum_{i=1}^{1000}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{130-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$=\mathrm{P}\left\{1.05\leq\frac{\sum_{i=1}^{1000}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq 3.16\right\}$$

查表算得区间概率：$\Phi(3.16)-\Phi(1.05)=0.9992-0.8531=0.1461$

与$S^2$对比，少了$(n-1)$这个系数 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$

的样本，则 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 / \sigma^2 \sim$ $\underline{\chi^2(n-1)}$

6. 设总体$X \sim N(0, 2^2)$ ,$X_1, X_2, X_3, X_4$

为来自$X$的一个样本, 设

$Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$, 则当$a = \underline{1/20}$,

$N(0,20)$ $N(0,100)$

b= $\underline{1/100}$ 时Y 服从 $\chi^2$ 分布，其自由度为$\underline{2}$

**7. 设由来自正态总体$X \sim N(\mu, 0.9^2)$,容量$n=9$的随机样本计算得 $\overline{x}=5$ ,则未知参数$\mu$的置信度为 0.95的置信区间为 (4.412 , 5.588) .**

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right) = \left(5 \pm \frac{0.9}{3} \cdot 1.96\right)$$

**8.** 设$X_1,X_2,\dots,X_{16}$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，$S^2$是样本方差.若 $P(\overline{X} \ge \mu + as) = 0.05$,则$a$=__0.4383__.

当$c$=__1/30__时，$c\sum_{i=1}^{15}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是$\sigma^2$的无偏估计量.

$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S/4} \ge 4a\right) = 0.05,\ \frac{\overline{X}-\mu}{S/4} \sim t(15),\ 4a = 1.7531$ (P385)

设 $X = (X_{i+1} - X_i) \sim N(0, 2\sigma^2), i = 1, 2, \dots, 15$

要满足无偏估计量条件，有

$$E\left[c\sum_{i=1}^{15}(X_{i+1}-X_i)^2\right] = E\left(c\sum_{i=1}^{15}X^2\right) = c\sum_{i=1}^{15}E(X^2)$$

$$= 15c \cdot E(X^2) = 15c[D(X) + E(X)^2] = 15c[2\sigma^2 + 0] = \sigma^2$$

解得 $c = \frac{1}{30}$

9.设总体$X$服从参数为$\lambda$的泊松分布, $\lambda>0$为未知参数, $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为总体$X$中抽出的一个样本.则参数$\lambda$的矩估计量$\hat{\lambda}=$ $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

常见分布律中参数的矩估计量

# 三、解答题

1. 设总体$X$的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

其中$\theta>0$是未知参数. $X_1, X_2,\ldots,X_n$ 是来自$X$的样本.

求$\theta$的矩估计量及最大似然估计量, 并判断它们是否为 $\theta$ 的无偏估计量.

解：$E(X)=\int_\theta^\infty x\cdot 2e^{-2(x-\theta)}dx=2e^{2\theta}\int_\theta^\infty x\cdot e^{-2(x-\theta)}dx$

$$=2e^{2\theta}\left[\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right]\Bigg|_\theta^\infty=\theta+0.5$$

令 $E(X)=\bar{X}$，得$\theta$的矩估计$\hat{\theta}=\bar{X}-0.5$

而 $E(\hat{\theta})=E(\bar{X}-0.5)=E(X)-0.5=\theta+0.5-0.5=\theta$

所以$\theta$的矩估计量是$\theta$的无偏估计.

# 三、解答题

1. 设总体$X$的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

其中$\theta>0$是未知参数. $X_1, X_2,\ldots,X_n$ 是来自$X$的样本.

求$\theta$的矩估计量及最大似然估计量, 并判断它们是否

为$\theta$ 的无偏估计量.

解：似然函数

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} 2e^{-2(x_i-\theta)}=2^n\cdot e^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{2n\theta}$， $\theta<x_1,x_2,\ldots,x_n$

要寻找$\theta$使似然函数取得最大值，即

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta<x_1,x_2,\ldots,x_n} 2^n\cdot e^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{2n\theta}$$

由 $\theta$ 的定义域得 $\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2e(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases},$$ 其分布函数为 $$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2e(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

则对于最大似然估计量$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\dots,x_n)$，其分布函数为

$$F(\hat{\theta})=F\big(\min(x_1,x_2,\dots,x_n)\big)=1-[1-F(x)]^n=1-e^{-2n(\hat{\theta}-\theta)},x>\theta$$

$$f(\hat{\theta})=F'(\hat{\theta})=\begin{cases}2n\cdot e^{-2n(\hat{\theta}-\theta)}, & \hat{\theta}>\theta\\ 0, & \hat{\theta}\le\theta\end{cases}$$

$$E(\hat{\theta})=\int_{\theta}^{\infty}\hat{\theta}\cdot 2n\cdot e^{-2n(\hat{\theta}-\theta)}d\hat{\theta}=2ne^{2n\theta}\int_{\theta}^{\infty}\hat{\theta}e^{-2n\hat{\theta}}d\hat{\theta}$$

$$=2ne^{2n\theta}\cdot\left[\frac{\hat{\theta}}{-2n}-\frac{1}{4n^2}\right]e^{-2n\hat{\theta}}\Bigg|_{\theta}^{\infty}=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta$$

所以$\theta$的最大似然估计量不是$\theta$的无偏估计.

2. 设总体$X$的概率分布为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $\theta^2$ | $1-2\theta$ |

其中 $\theta(0<\theta<1/2)$是未知参数，利用总体$X$的样本值

3，1，3，0，3，1，2，3

求$\theta$的矩估计值及最大似然估计量值.

$$E(X)=0\cdot\theta^2+1\cdot 2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3\cdot(1-2\theta)=3-4\theta$$

$$\mu_1=\bar{x}=\frac{3+1+3+0+3+1+2+3}{8}=2$$

$$E(X)=\mu_1=\bar{x},\ 3-4\theta=2,\ \theta=\frac{1}{4}$$

2. 设总体$X$的概率分布为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $\theta^2$ | $1-2\theta$ |

其中 $\theta$ ($0<\theta<1/2$)是未知参数，利用总体$X$的样本值

3，1，3，0，3，1，2，3

求$\theta$的矩估计值及最大似然估计量值.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)=\left[(1-2\theta)\right]^4\left[2\theta(1-\theta)\right]^2\theta^2\theta^2 \;=4\theta^6(1-2\theta)^4(1-\theta)^2$$

$$\ln[L(\theta)]=4+6\ln\theta+4\ln(1-2\theta)+2\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln[L(\theta)]}{\partial\theta}=0+\frac{6}{\theta}-\frac{8}{1-2\theta}-\frac{2}{1-\theta}=0 \qquad \hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$$