

集智因果涌现系列读书会

Reconciling emergences: An information-theoretic approach to identify causal emergence in multivariate data

Fernando E. Rosas  , Pedro A. M. Mediano  , Henrik J. Jensen, Anil K. Seth, Adam B. Barrett, Robin L. Carhart-Harris, Daniel Bor

量化涌现：信息论方法识别多元数据中的因果涌现

论文原文 (PLOS)

F.E.Rosas, PLOS, Dec., 2020.

<https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1008289>

论文代码：<https://github.com/pmediano/ReconcilingEmergences>

集智团队对该论文的中译发布

<https://swarma.org/?p=32058>

June 30, 2022



吕奥博(Washington University in St. Louis), 邓 鸥(Waseda University)



Agenda

(入题：因果涌现是什么，为什么我们在意它？)

- 因果涌现是什么
- 大背景：认识论的不同立场
- 量化因果研究的发展路径
- 这篇文章的影响力一瞥

(解题：作者提出了怎样的定量方法？效果如何？)

- 基本假设与考察目的
- 涌现的3个简单例子
- 2个变量的PID语言以及相对应的Venn图
- 量化的办法：涌现存在与否，向下因果，因果解耦的判断
- 实验介绍，以及上述3个简单例子的计算复现

(品题：因果涌现，当下的应用场景)

- 健康大数据中的量化因果

(跑题：为更好理解因果涌现，我们有哪些问题)

- 几个思考TakeHome，也是可供后续展开的素材

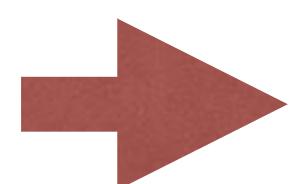
入题：因果涌现是什么？为什么我们在意它？

What is emergence it, and why it matters...

Working definition (introduced by Rosas):

“When the whole exhibit properties that can not be found in the parts.”

“当整体表现出的属性，不能在局部被发现时。”



Why it matters ?

(因) 微观态的动力机制 → (果) 宏观态的某些规律

例：康威生命游戏
(Conway's Game of Life)

1	2	3
4		5
6	7	8

世界：2维格子世界（白色区域）

生命体：黑点，不移动，存亡演化。

演化机制（例）：

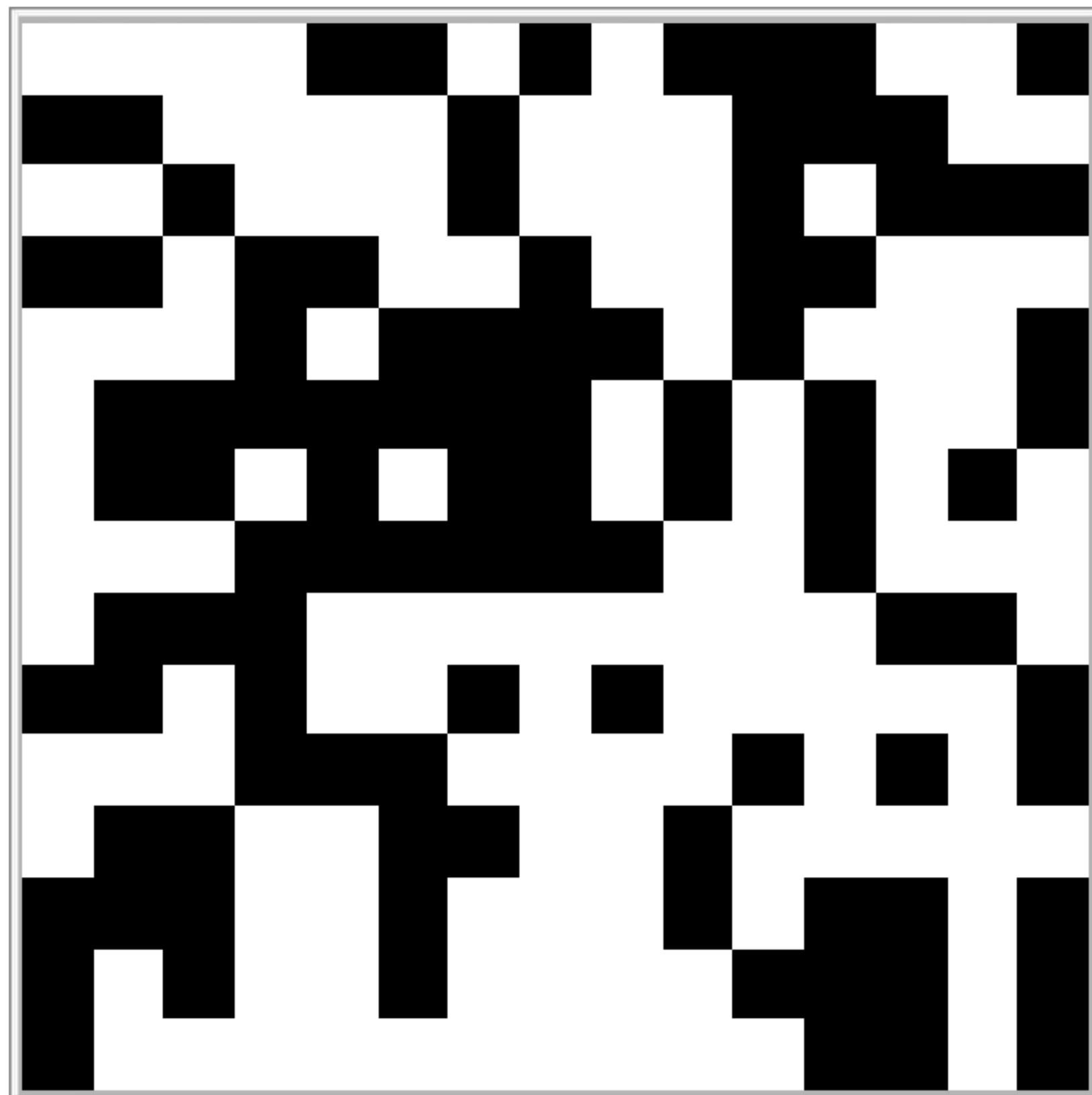
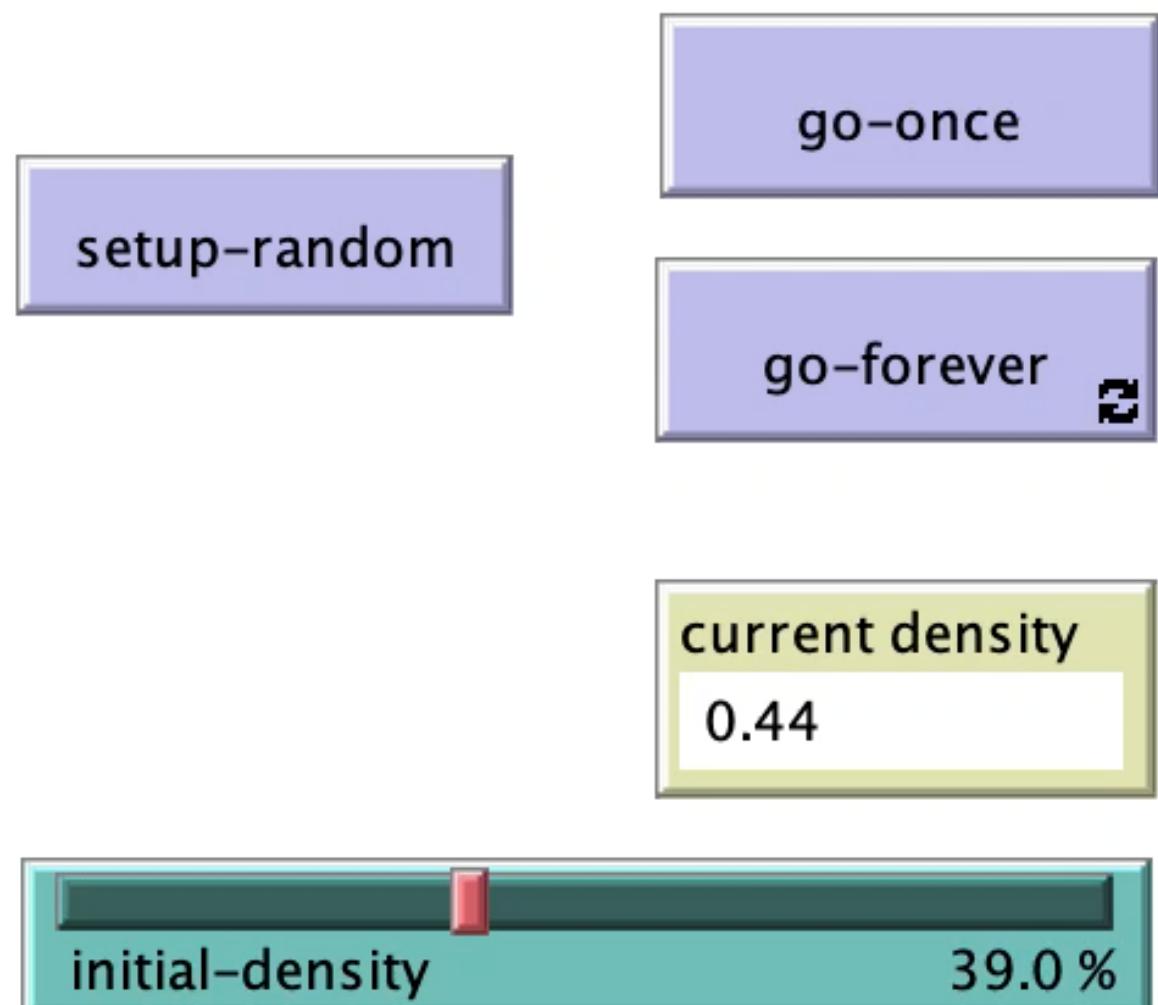
（舒适生存）相邻8格内，生命体有2-3个

（寂寞而死）相邻8格内，生命体2个以下

（拥挤而死）相邻8格内，生命体超过3个

（孕育而生）相邻8格内，有3个生命体时，若中心格无生命体，则诞生

Conway's life game for
Reconciling emergences
15 × 15 Grid

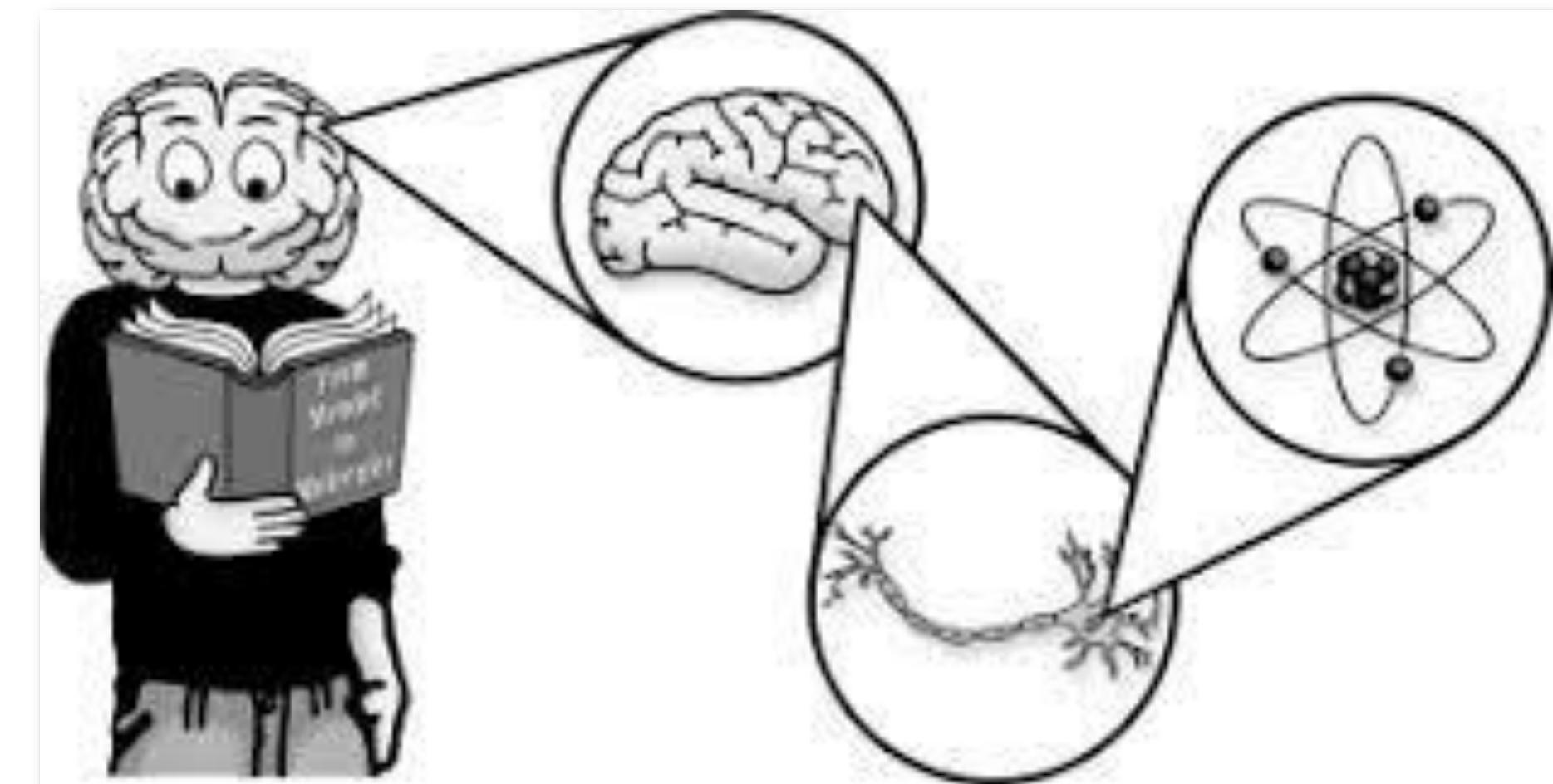


大背景：认识论的不同立场

Reductionism(还原论): there is only physics

Emergentism(涌现论): not only physics ...

- “Strong emergence”: Impossibility holds in principle
- “Weak emergence”: Impossibility holds only in practice



对强涌现的思考，与哲学的终极思考一样，既使人心驰神往，也“像黑魔法般让人不舒服(uncomfortably like magic)”

- (Rosas向Bedau(弱涌现代表算法的提出者)的致敬)

弱涌现作为强涌现的温和替代方案 → 本文的基调立场



还原论者
reductionist

涌现论者
emergentist

量化因果研究的发展路径

对本论文Introduction等的归纳



C. E. Shannon
1916-2001

- 格兰杰因果 (实质非因果, 是自相关。)

基本理念：过去和现在可能影响未来，但反之不行。

- 因果理论流派：Rubin派 (RCM, 强调分析缺失值)

\simeq Pearl派 (构造因果模型SCM, 强调贝叶斯网络)

- 因果涌现 : Hoel (2013,有效信息EI, 粗粒化等)

Seth (2010, 格兰杰涌现的条件等)

因果发展线

信息学→神经科学发展线

Trend

- 信息学：香农 (香农熵+互信息)

- 神经科学的发展 (尤其是脑电波测量实验)

- 信息动力学 (互信息, 信息流)

- 部分信息分解(PID): Williams&Beer(2010)

- 整合信息论(IIT) : Tononi(2004) 从1.0到3.0

→ΦID理论：把PID推广到多元系统

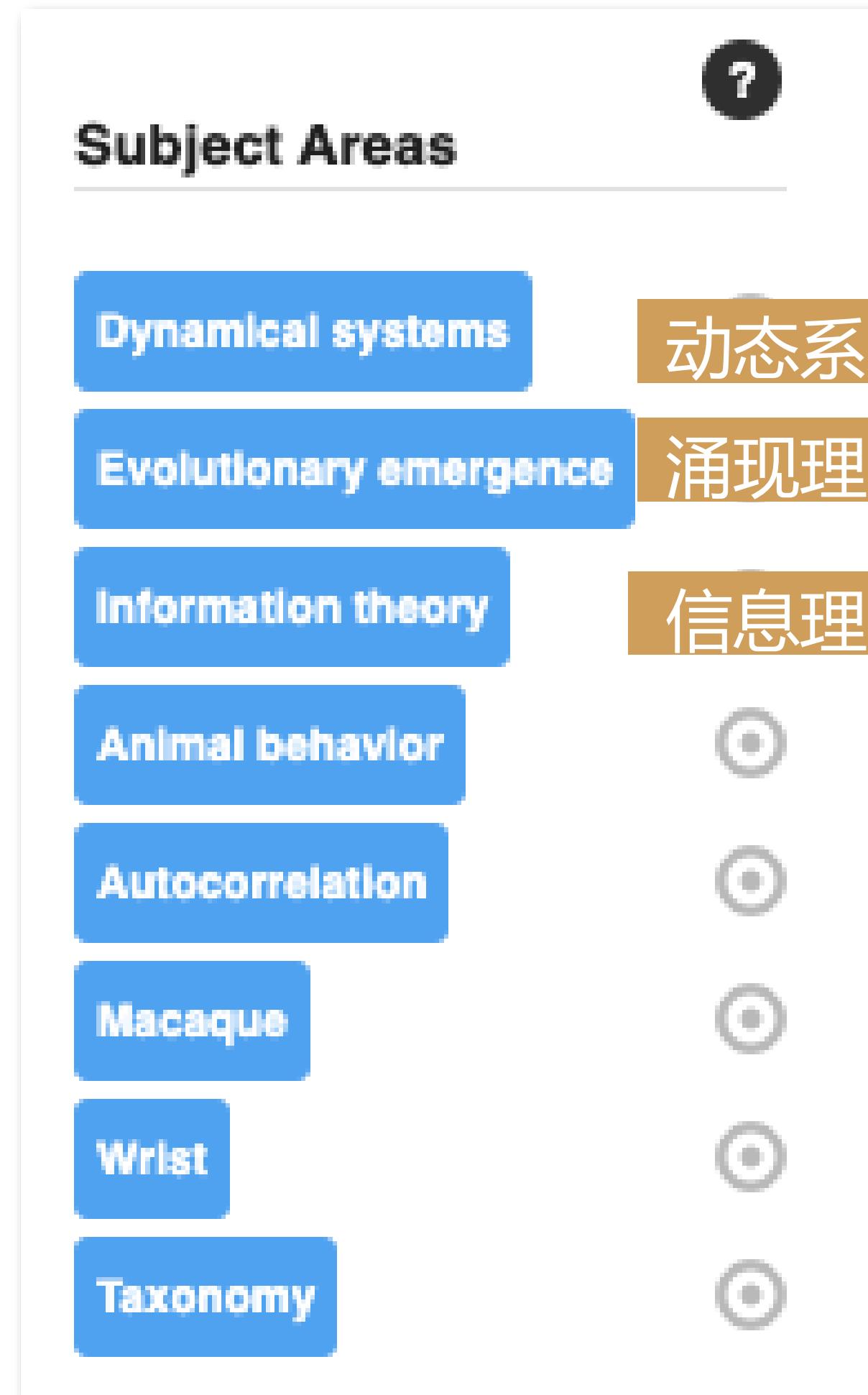
尝试量化解释意识成因的，前沿主流理论。曾被某些神经科学家赞为“唯一有前途的意识基础理论”。



- 问题认识: Pearl构造因果模型 (do运算) → 问题: 强假设。干预的高成本等
Bedau提出弱涌现的流行表述 → 问题: 过于复杂的计算
- 本文立意：基于信息流，用PID等工具，尝试接近量化实证的方法拓展

PLOS上看该论文

对此文感兴趣的人员所在领域
byPLOS Web统计



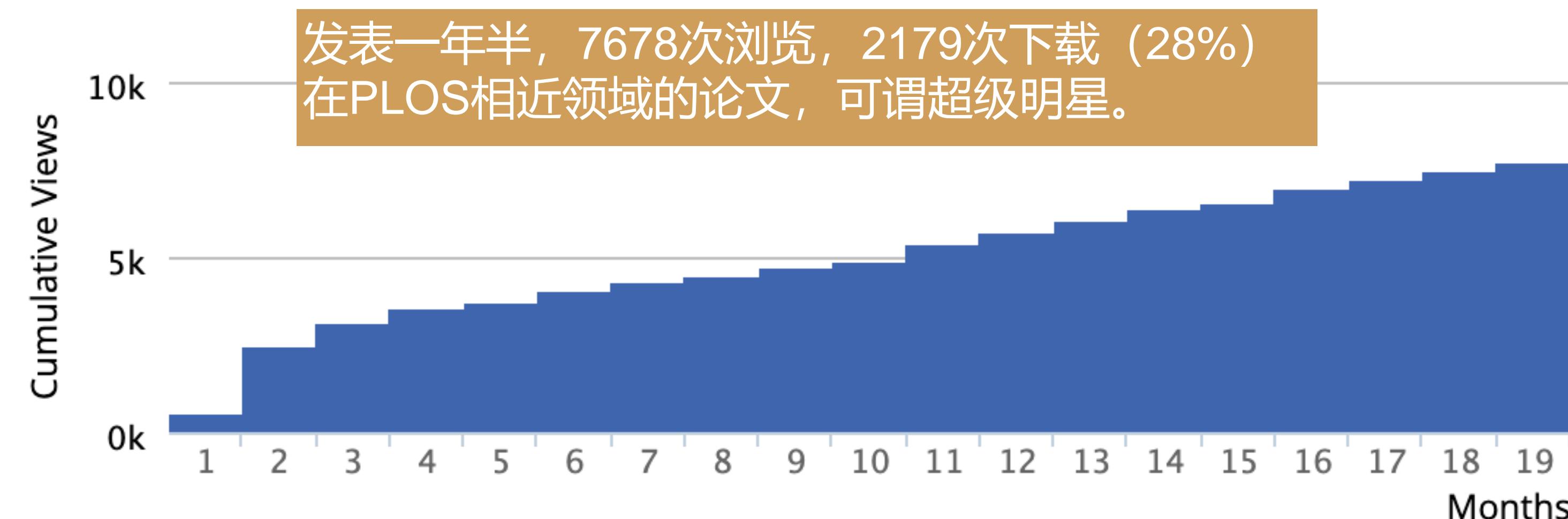
Reconciling emergences: An information-theoretic approach to identify causal emergence in multivariate data

Fernando E. Rosas , Pedro A. M. Mediano , Henrik J. Jensen, Anil K. Seth, Adam B. Barrett, Robin L. Carhart-Harris, Daniel Bor

Viewed

Total Article Views	HTML Page Views	PDF Downloads	XML Downloads	Total
7,678	5,133	2,179	366	7,678

Dec 21, 2020 (publication date)
through Jun 24, 2022 *



PLOS上看该论文

此文在学术界反响和互动不错。Rosas的推特互动。

来自美国的关注度最大。因果研究主群体？另来自日本的高关注度（论文猴脑电波实验数据来自日本研究团队）

Mentioned by

2 blogs
220 tweeters
2 Facebook pages
1 Redditor

Citations

24 Dimensions

Readers on

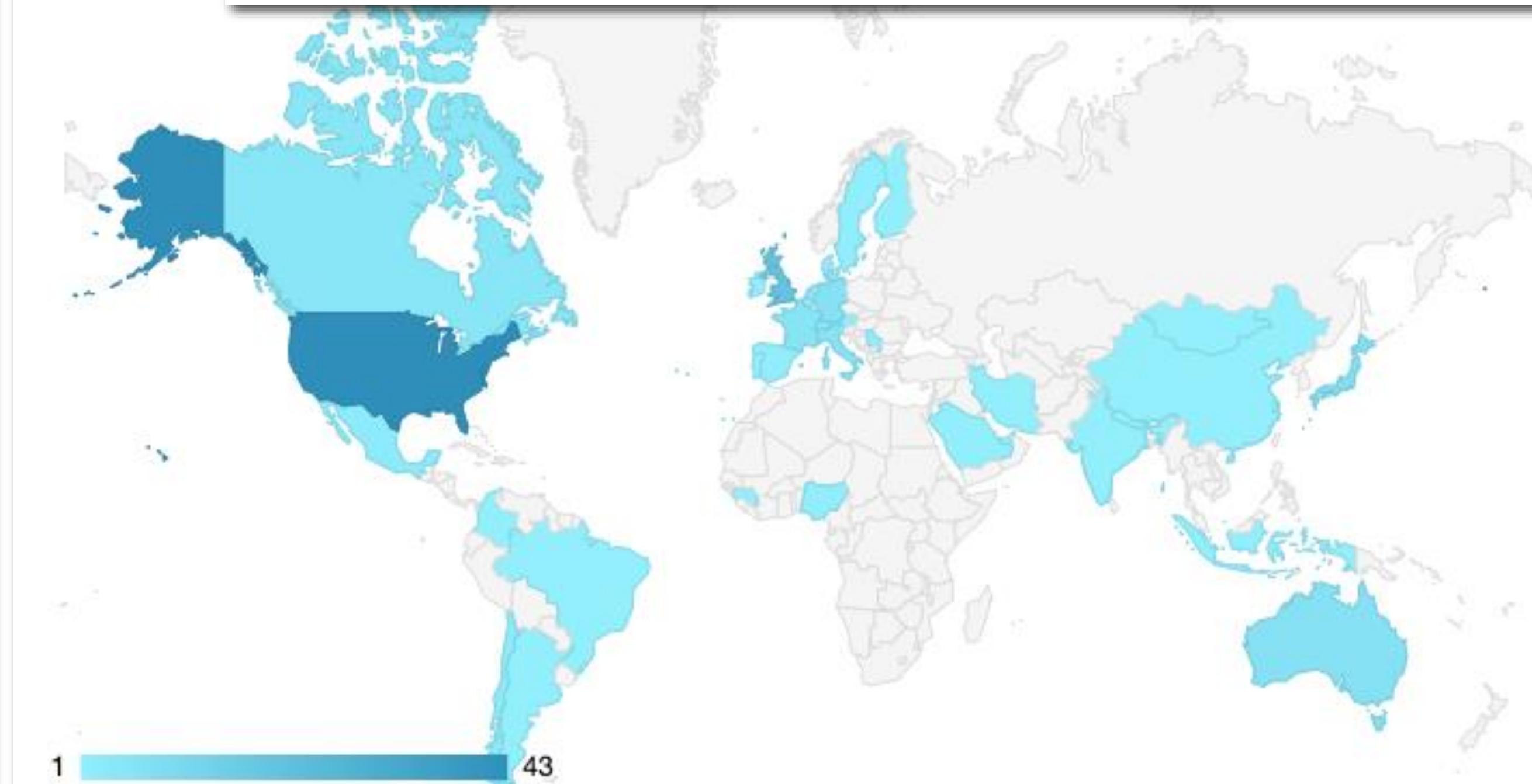
93 Mendeley

Geographical breakdown

Country	Count	As %
United States	43	20%
United Kingdom	20	9%
Japan	8	4%
Germany	7	3%
Australia	7	3%
Italy	6	3%
France	6	3%
Canada	5	2%
Switzerland	4	2%
Other	38	17%
Unknown	76	35%

Demographic breakdown

Type	Count	As %
Members of the public	126	57%
Scientists	88	40%
Science communicators (journalists, bloggers, editors)	4	2%
Practitioners (doctors, other healthcare professionals)	2	<1%



因数据主要统计自Facebook, Twitter中国未包含在内。

Abstract

作者总结 (at PLOS paper web p1)

许多科学领域表现出的现象，似乎都表现出“**总体超过了它们各部分的总和**”。例如，鸟群似乎不仅仅是个体鸟的简单集合，意识似乎不仅仅是神经元之间的电脉冲。但是，物理系统的涌现意味着什么？关于这个问题的研究文献中，包含各种相互矛盾的方法，其中许多方法无法提供定量的、可证伪的表述。因此拥有一个严格的、定量的涌现理论，可以发现让鸟群不仅仅是个体鸟的简单集合的确切条件，并能更好地理解思维如何从大脑中涌现。在这里，我们提供了一套规范化理论：关于什么构成了因果涌现，如何测量它，以及存在哪些不同“类型”的涌现。为此，我们利用了信息动力学的最新发展——研究信息如何通过动力系统并被动力系统修改。作为该框架的一部分，我们提供了**因果涌现的数学定义，以及分析经验数据的实用公式**。使用这些，我们能够从几个经典场景中确认因果涌现，这些场景包括康威生命游戏，某些鸟群模式以及猴子的大脑神经活动。

梳理作者总结，兼论文结构：

- 因果涌现的概念（总体vs局部）
- 现在的问题（难定量，难证）
- 本文打算如何解决？
 - (1) 规范的量化研究
(定义和分类涌现)
 - (2) 发展具体的实用工具
- 本文的理论基础是：
信息动力学
- 本文的方法如何验证？
一套数学框架，三个经典实验

讨论的前提与框架

- 封闭体系(nutshell); 马尔可夫因果动力(irreducible causal power);
- 多变量系统 X 的宏观态特征 V (supervenient feature)呈因果涌现条件:
宏观态中包含某些系统内微观态元素，自身都不具备的未来信息。
- 区分2种涌现：向下涌现和因果解耦。
 - 向下因果(Downward causation): 宏观态对于微观元素的因果效应
 - 因果解耦(Causal decoupling): 宏观态对其他宏观态的因果效应
- 基础理论框架：
 - 部分信息分解(PID, Partial Information Decomposition)
 - 整合信息分解(IID, Integrated Information Decomposition)

思考：“分解”，这不是还原论的思维么？
(是。如同天下势，合久必分，分久必合。也如同科学认知的螺旋式上升。)

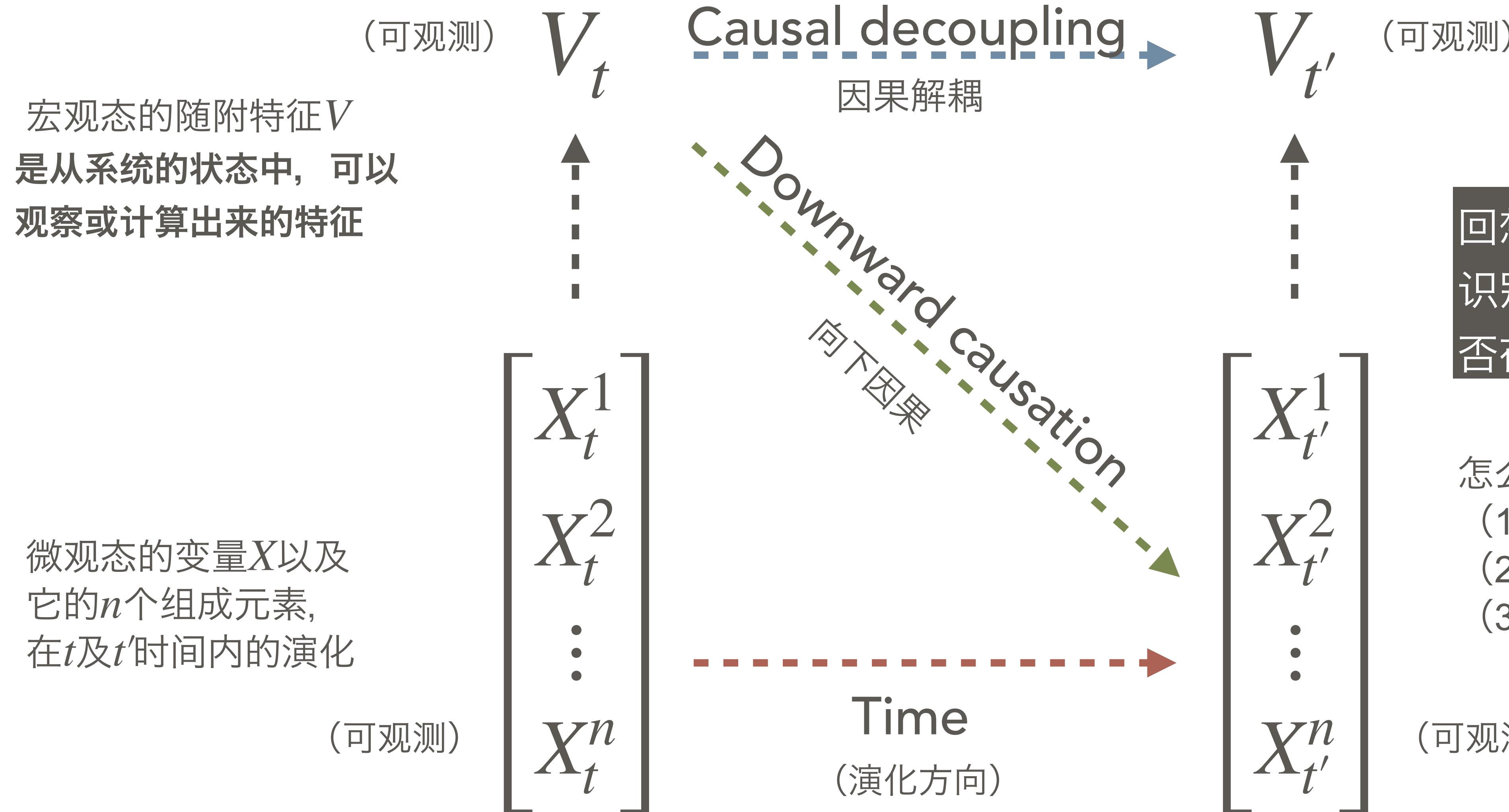
问题的界定：信息分解的难度和计算量。

“Information decomposition is in general difficult and computationally expensive.”

解题：作者提出了怎样的定量方法？效果如何？

基本假设与考察目的

在完全可观测的时序演化中，多变量封闭系统



回想标题里“identify”：
识别蓝色及绿色箭头是否存在。

怎么识别？分3步走：
(1) 蓝+绿的是否存在
(2) 蓝是否存在
(3) 绿是否存在

涌现的3个简单：例1 因果解耦

思考：为什么起名“解耦”？指谁和谁的关系脱钩了？

因果解耦：

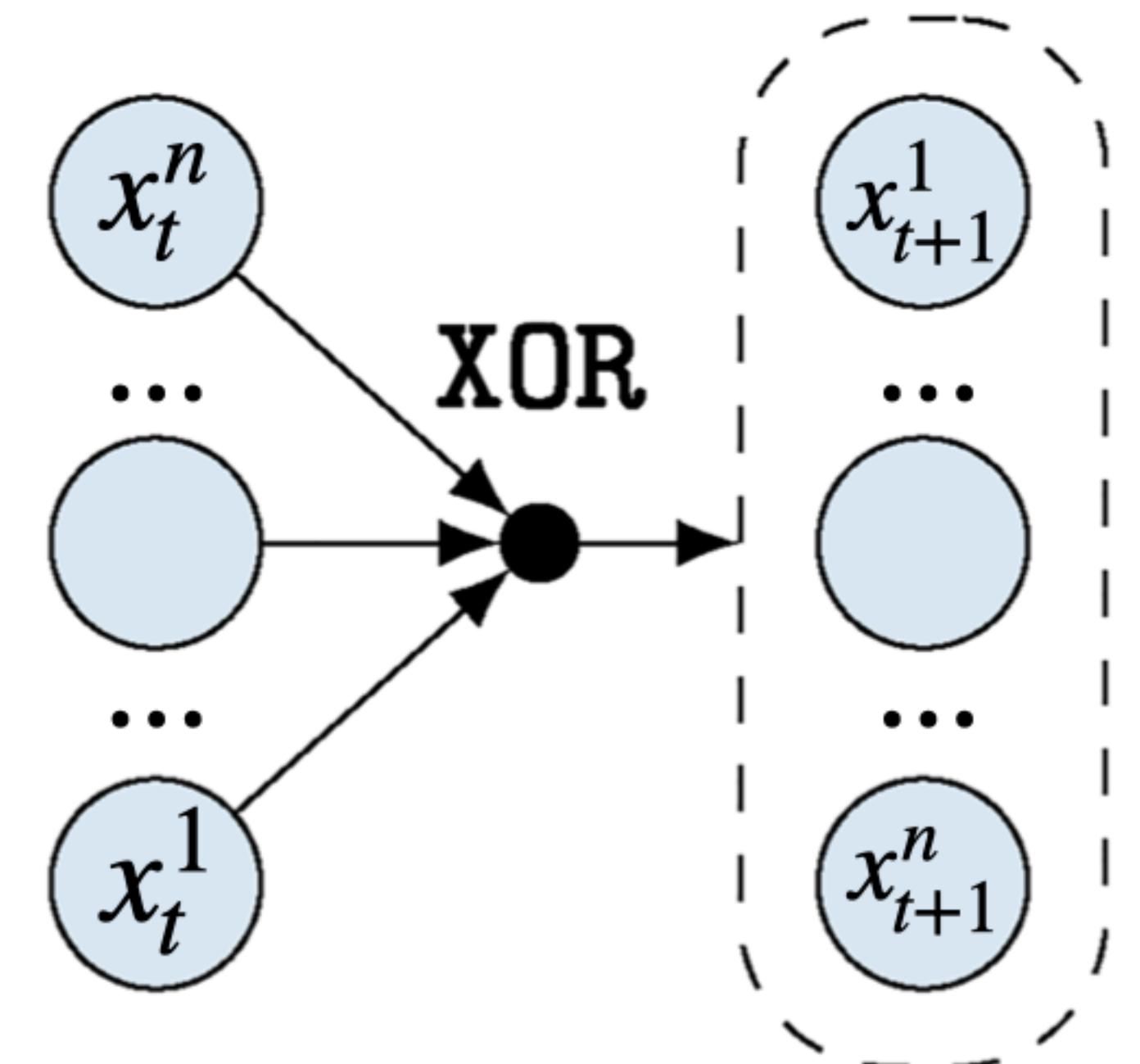
系统能预测自己的未来，但系统（包括系统子集）不能预测任何个别元素的未来。

$$p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1} | x_t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2^{n-1}} & \text{if } \oplus_{j=1}^n x_{t+1}^j = \oplus_{j=1}^n x_t^j \\ \frac{1-\gamma}{2^{n-1}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

规则：

- 有 γ 的概率，前后时刻整体奇偶性相同；
- n 个硬币随机（比如，正面=0，反面=1）。

Causal decoupling



X_t

X_{t+1}

涌现的3个简单：例2 向下因果

向下因果：

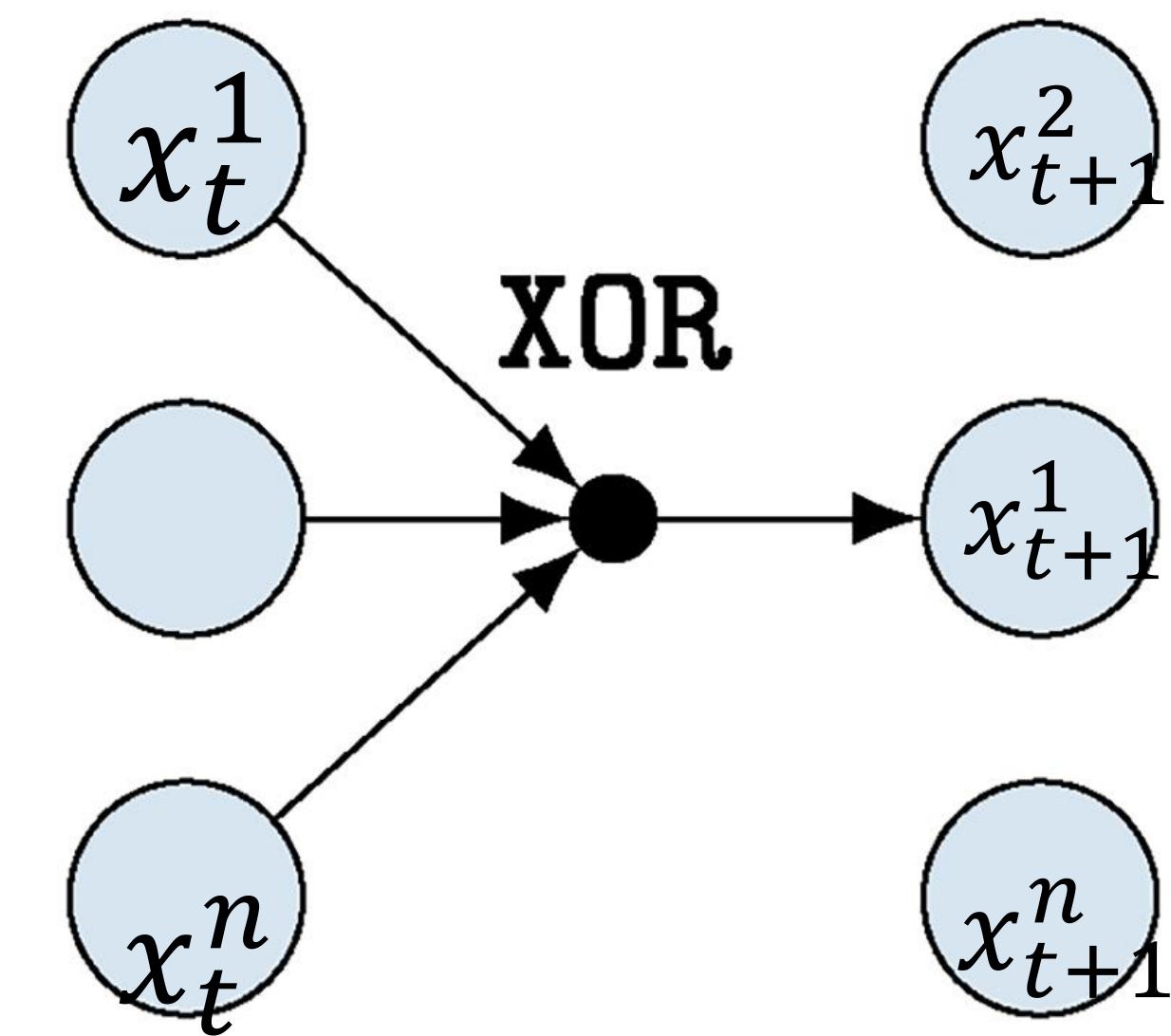
系统不能预测自己的未来，但系统能预测个别元素的未来。

$$x_{t+1}^1 = \bigoplus_{j=1}^n x_t^j$$

规则：

- X_{t+1}^1 与上一时刻整体奇偶性相同；
- 其余硬币随机（比如，正面=0，反面=1）。

Downward causation



X_t

X_{t+1}

注：为图示美观， x_{t+1}^1 画中间而已

涌现的3个简单：例3 因果涌现

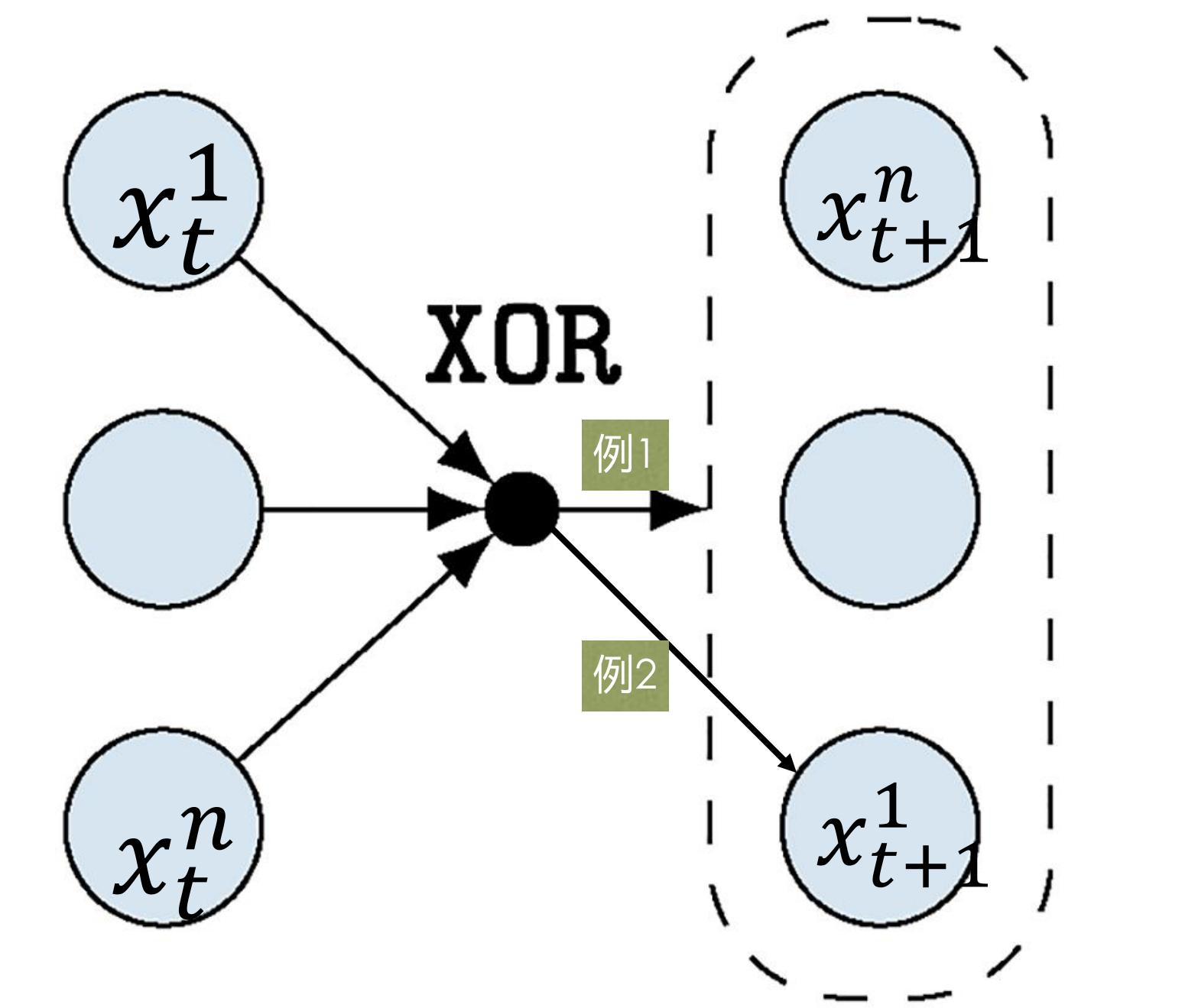
因果涌现：
因果解耦 and/or 向下因果

$$p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1} | x_t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{t+1}^1 \neq \oplus_{j=1}^n x_t^j \quad \text{例2不出现是不可能的} \\ \frac{\gamma}{2^{n-1}} & \text{if } x_{t+1}^1 = \oplus_{j=1}^n x_t^j \quad \text{and} \quad \oplus_{j=1}^n x_{t+1}^j = \oplus_{j=1}^n x_t^j \quad \text{例1} \\ \frac{1-\gamma}{2^{n-1}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

规则：

- X_{t+1}^1 与上一时刻整体奇偶性相同；
- 且有 γ 的概率，上下时刻整体奇偶性相同；
- 其余硬币随机（比如，正面=0，反面=1）。

Causal emergence



X_t

X_{t+1}

注：为图示美观， x_{t+1}^1 画底下而已

至此我们了解了：

(1) 关于认知的大背景：还原论与涌现论

(2) 涌现论的基础（因果+信息学）

→神经科学领域的先行探索（最在乎“意识”和量化的那群研究者）

(3) 基本方向：“整体大于部分之和”的基本理念

→信息动力学（协同信息）有类似特性

接下来：

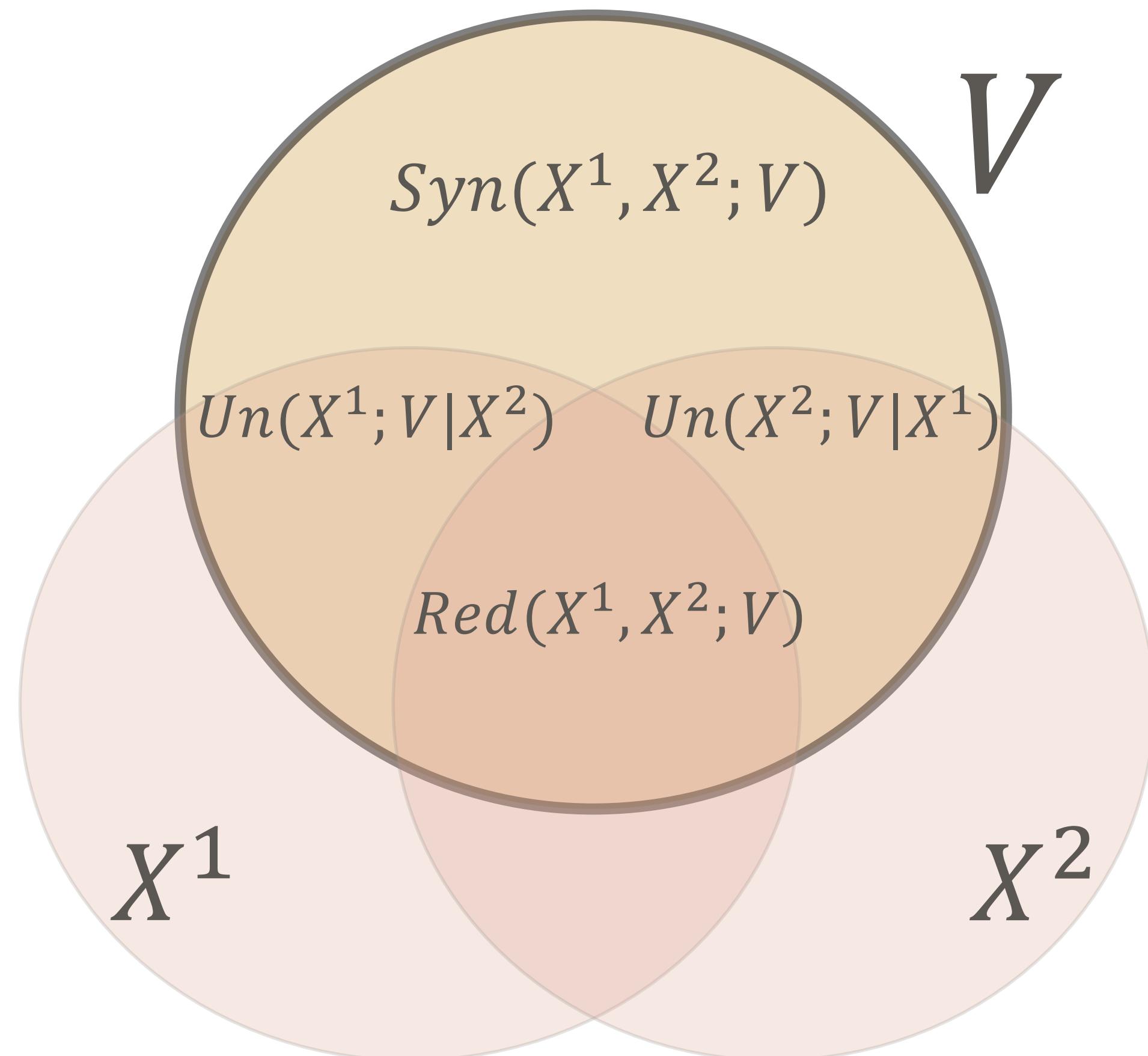
PID理论登场，开始解决如何算 → 面对复杂计算，考虑如何简单点算

Preliminaries: Partial Information Decomposition (PID)

PID for two source variables:

$$I(X^1, X^2; V) = Red(X^1, X^2; V) + Un(X^1; V|X^2) + Un(X^2; V|X^1) + Syn(X^1, X^2; V)$$

(联合)互信息 兀余信息 特有信息 特有信息 协同信息



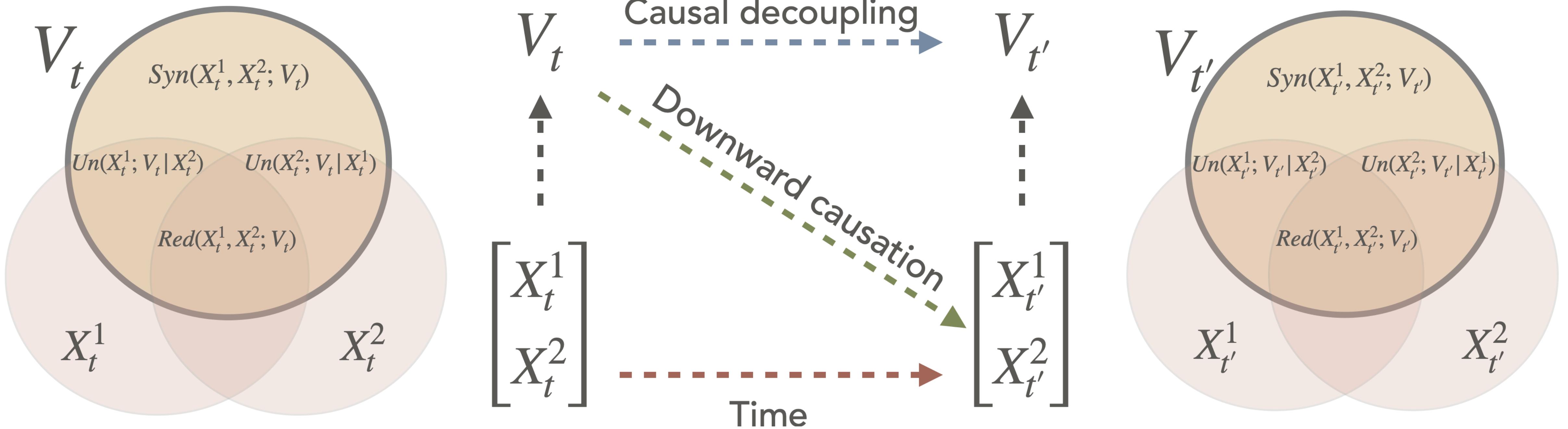
X 是变量的集合; V 是 X 的宏观态 (随附特征)

* 互信息 = 特有信息 + 兀余信息

当知道所有 X 时, 也就知道了 Syn ,
即知道了整个系统

理想情况下, V 里只包括最大的 $Syn(X^1, X^2; V)$,
即 V 只包括 X 提供的协同信息。

帮助理解：因果涌现与Venn图的简要对应



因果涌现的定义

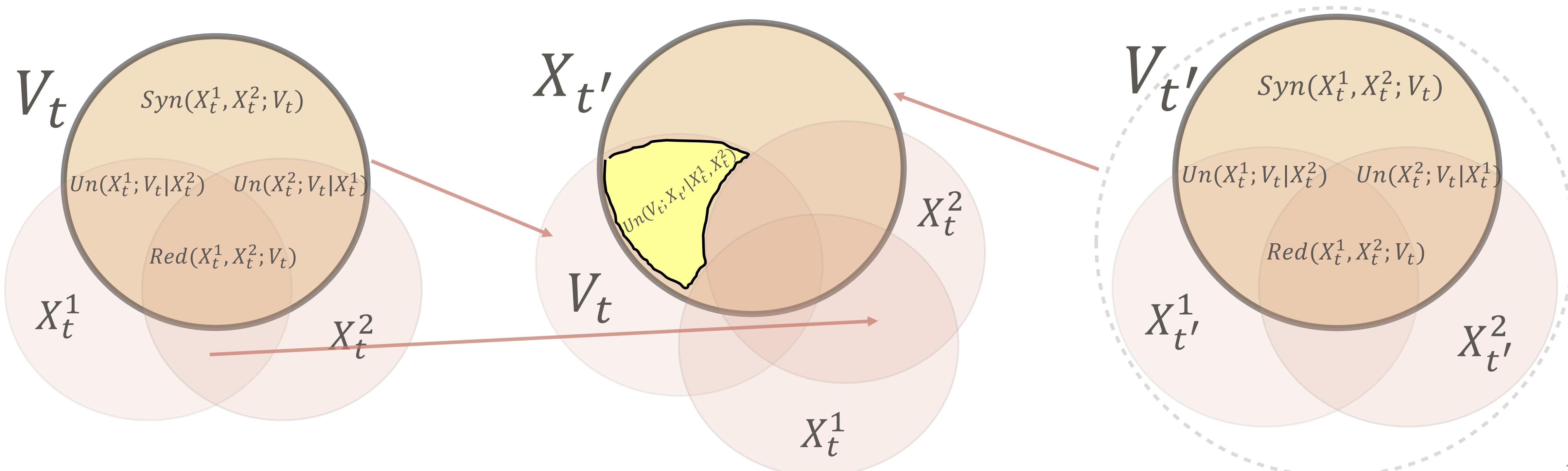
Definition (causal emergence):

A supervenient feature $V_t^D \subseteq F(X_t)$ exhibits causal emergence, if

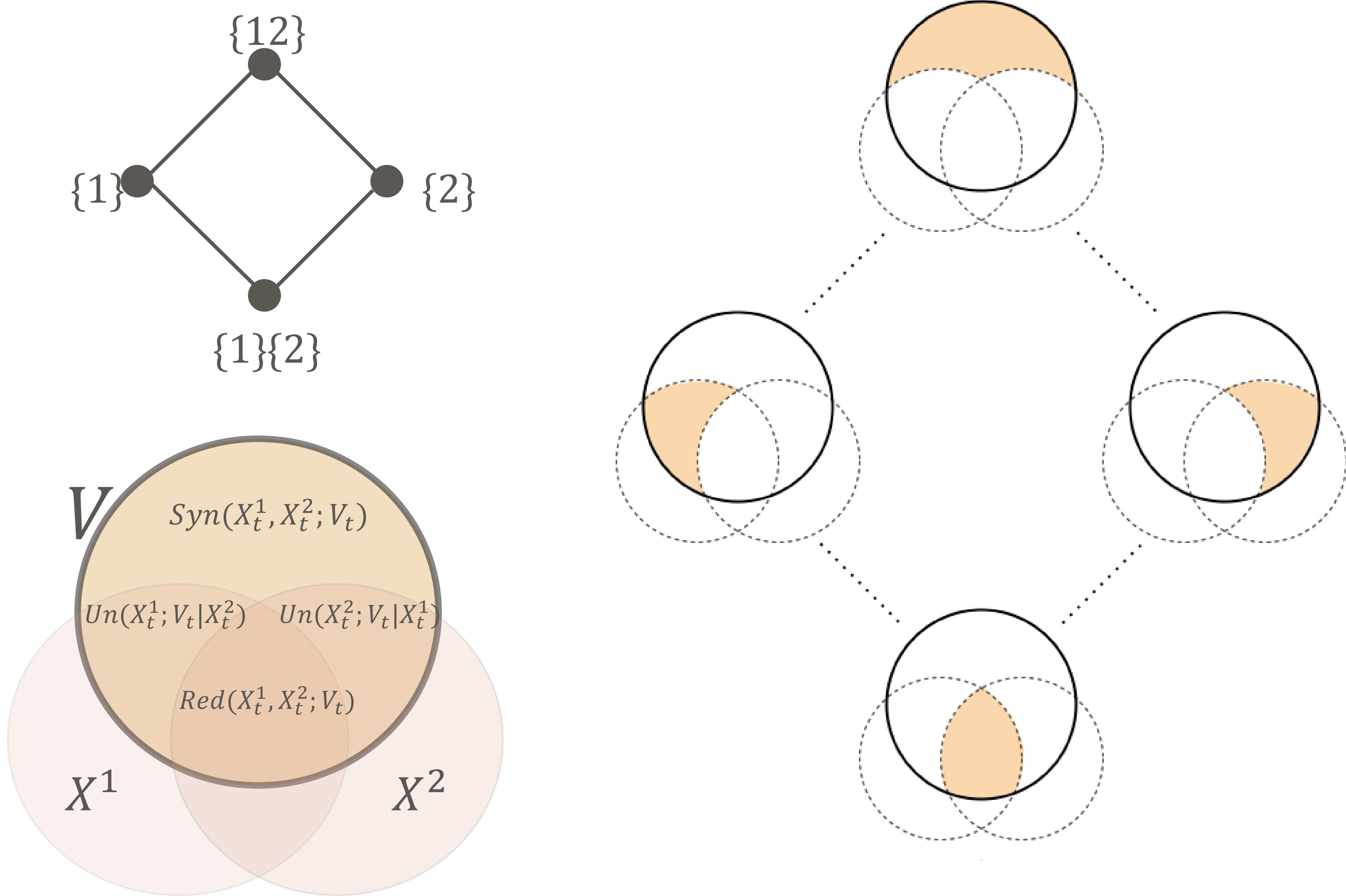
$Un(V_t; X_{t'} | X_t^1, \dots, X_t^n) > 0$

$\begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Time}} \begin{bmatrix} X_{t'}^1 \\ X_{t'}^2 \end{bmatrix}$

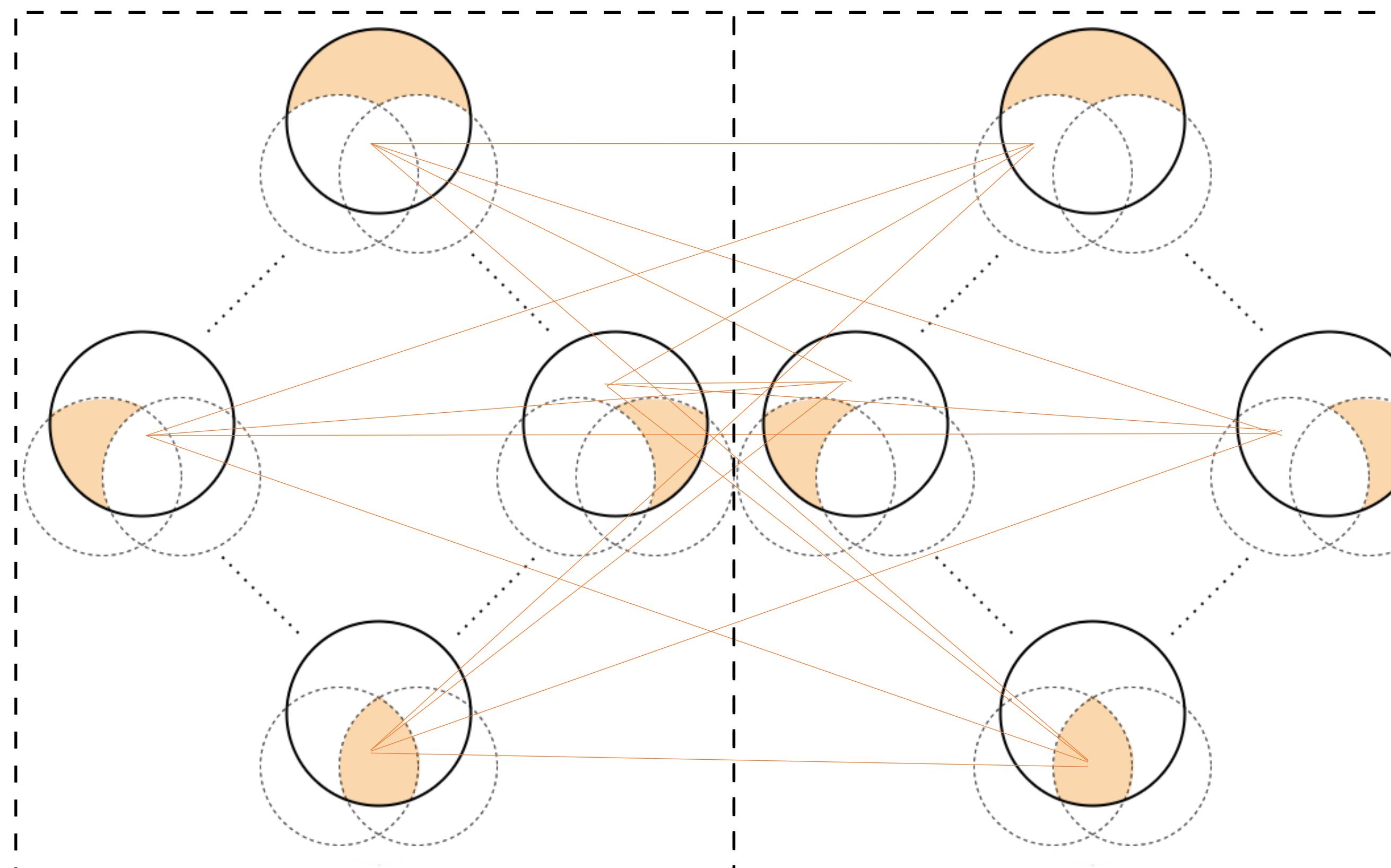
V_t^D 与向下因果
选择的不同，会造成结果的差异。



信息分解



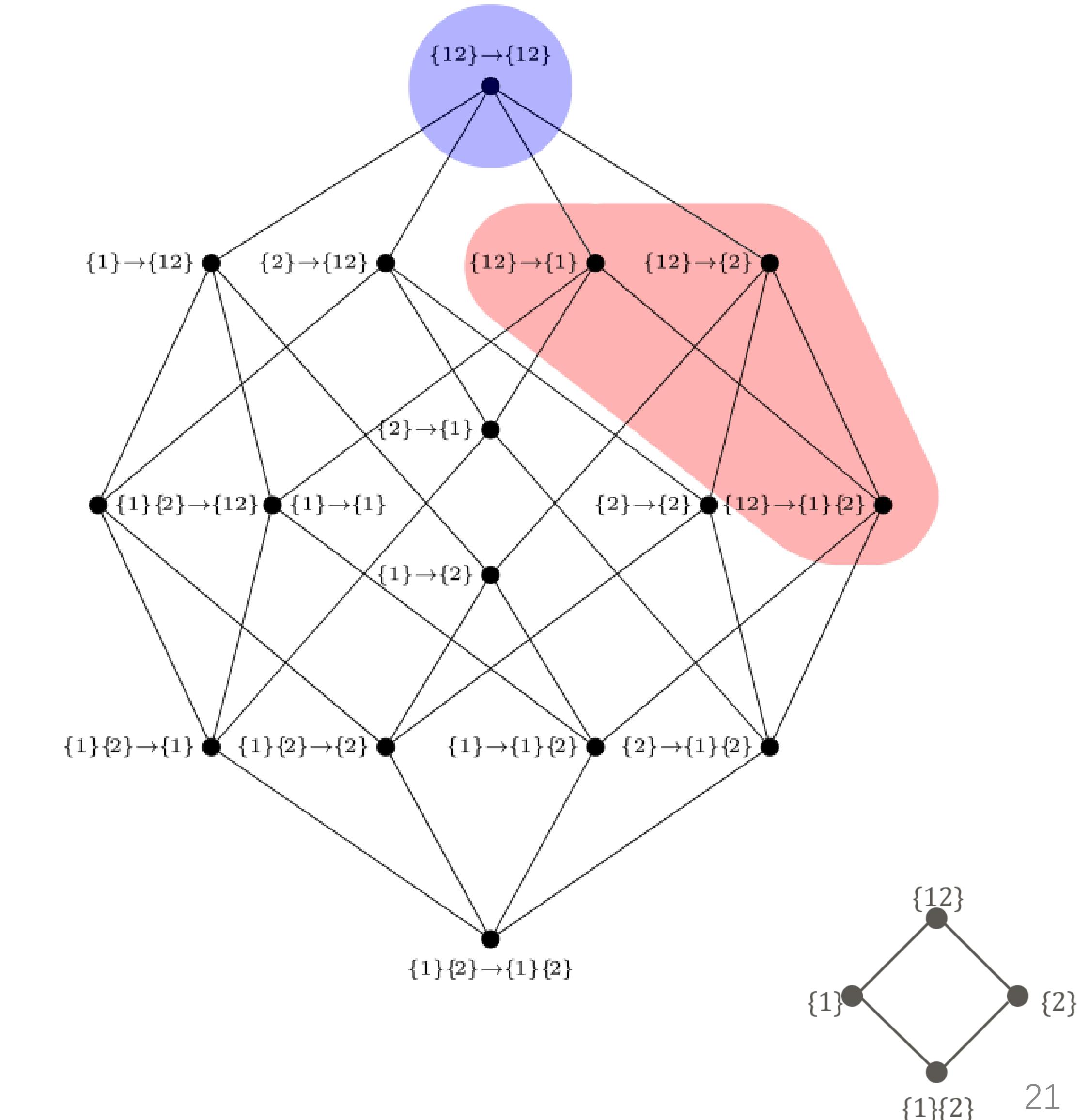
理想化手段 (充要条件)



V_t

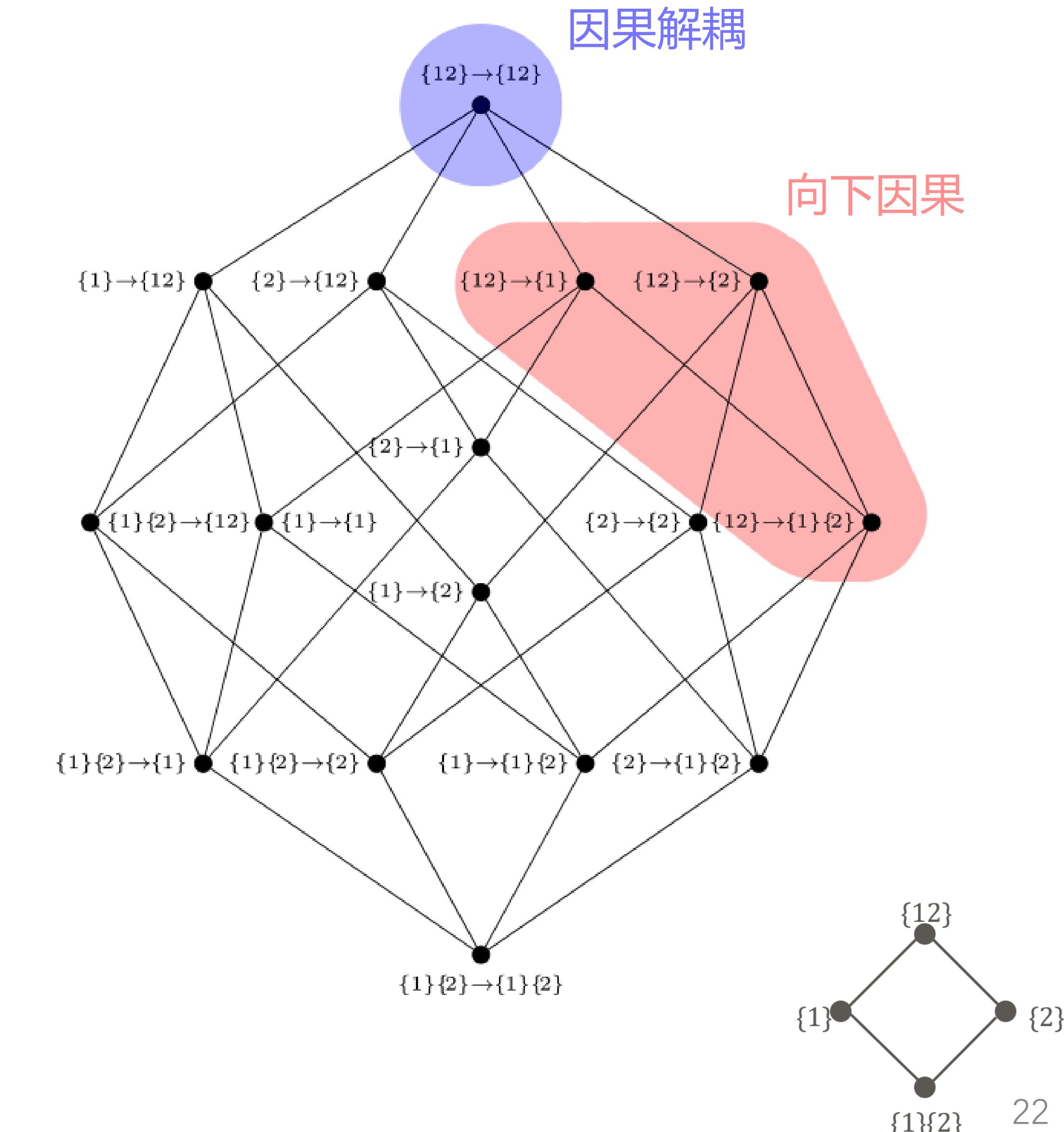
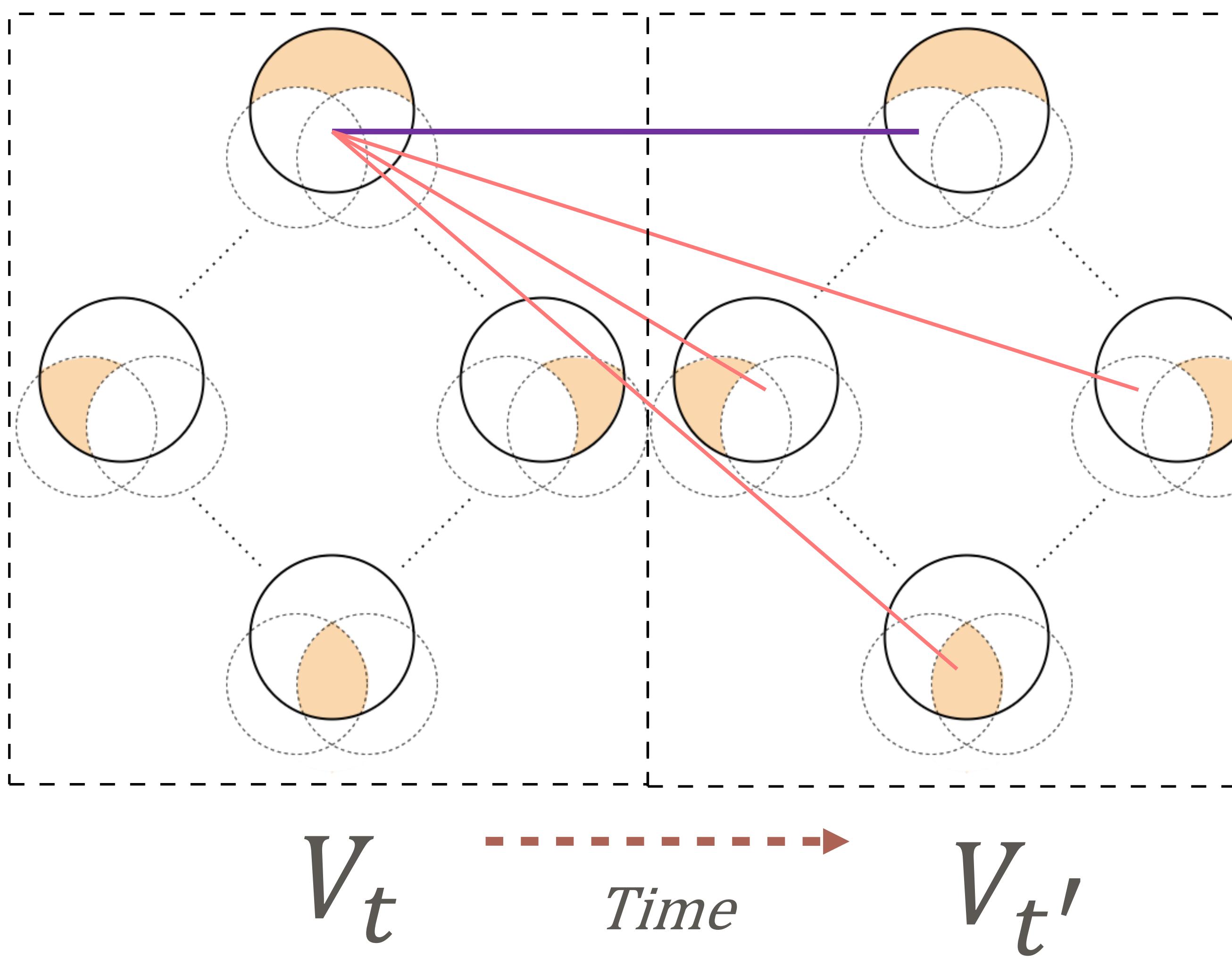
Time

$V_{t'}$



理想化手段 (充要条件)

因为涌现的定义是协同预测，所以只关注左侧的{12}

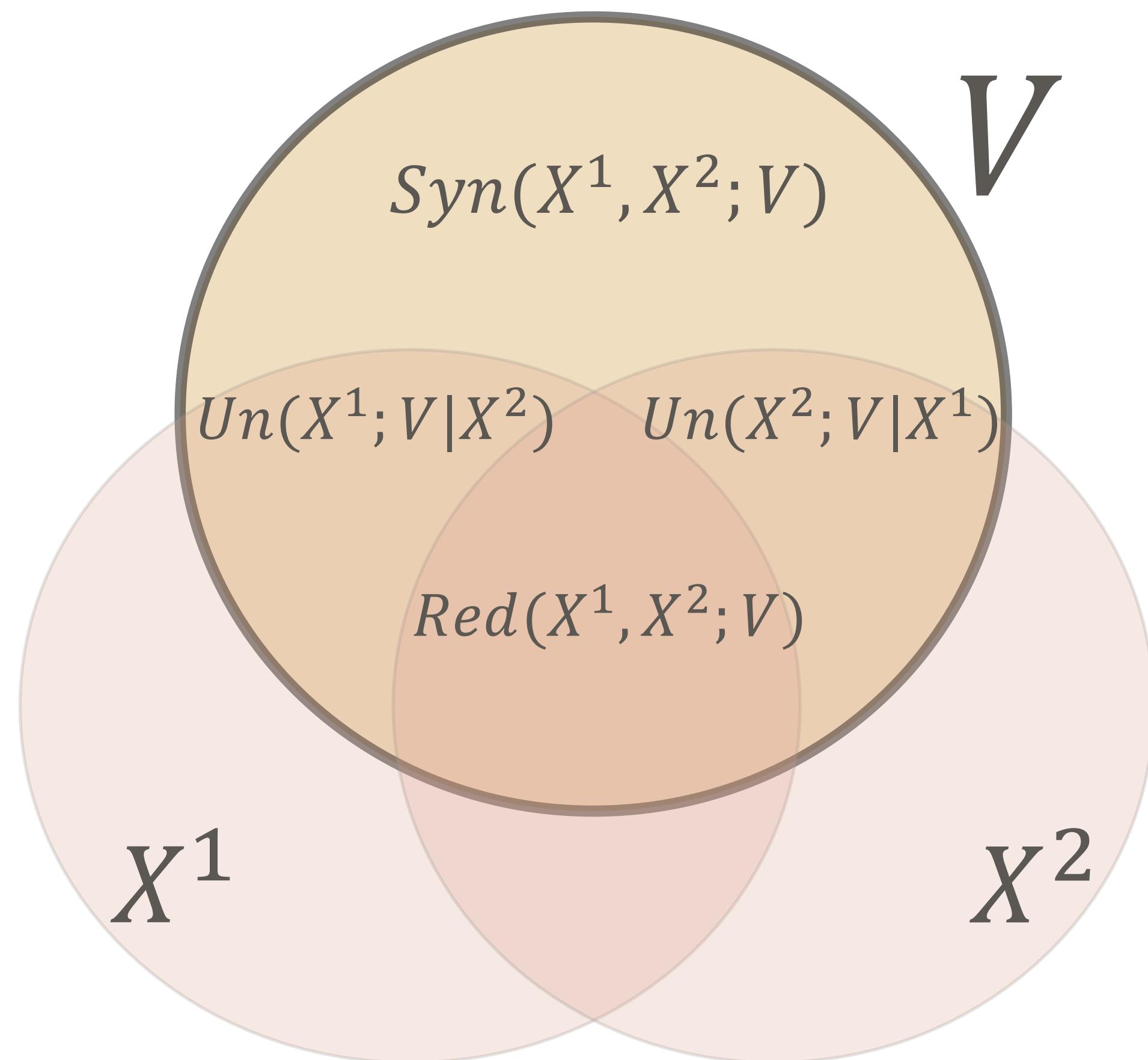


Preliminaries: Partial Information Decomposition (PID)

PID for two source variables:

$$I(X^1, X^2; V) = Red(X^1, X^2; V) + Un(X^1; V|X^2) + Un(X^2; V|X^1) + Syn(X^1, X^2; V)$$

(联合)互信息 兀余信息 特有信息 特有信息 协同信息



X 是变量的集合; V 是 X 的宏观态 (随附特征)

* 互信息 = 特有信息 + 兀余信息

当知道所有 X 时, 也就知道了 Syn ,
既即知道了整个系统

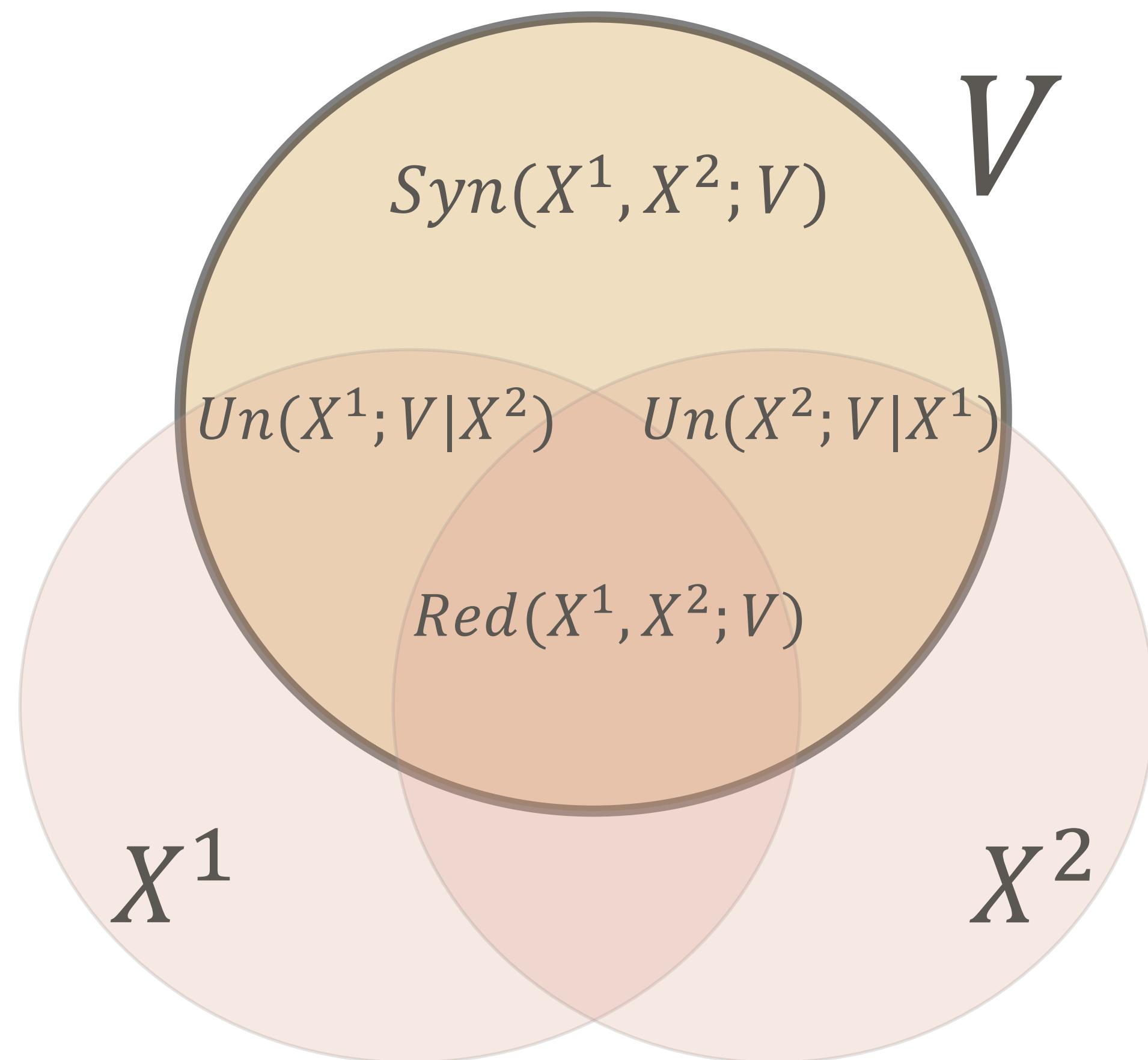
理想情况下, V 里只包括最大的 $Syn(X^1, X^2; V)$,
即 V 只包括 X 提供的协同信息。

Preliminaries: Partial Information Decomposition (PID)

PID for two source variables:

$$I(X^1, X^2; V) = Red(X^1, X^2; V) + Un(X^1; V|X^2) + Un(X^2; V|X^1) + Syn(X^1, X^2; V)$$

(联合)互信息 兀余信息 特有信息 特有信息 协同信息



X 是变量的集合; V 是 X 的宏观态 (随附特征)

* 互信息 = 特有信息 + 兀余信息

当知道所有 X 时, 也就知道了 Syn ,
既即知道了整个系统

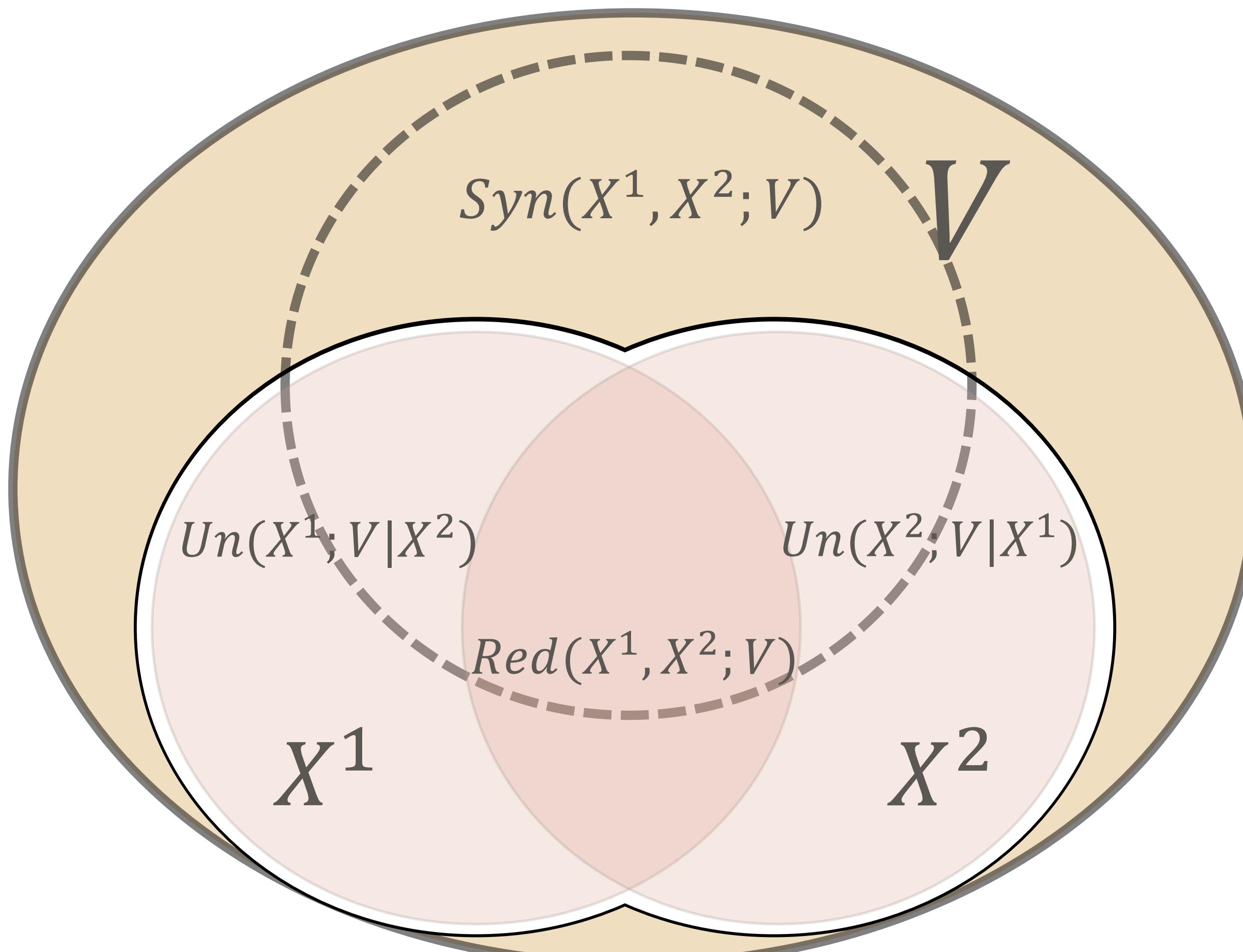
理想情况下, V 里只包括最大的 $Syn(X^1, X^2; V)$,
即 V 只包括 X 提供的协同信息。

Preliminaries: Partial Information Decomposition (PID)

PID for two source variables:

$$I(X^1, X^2; V) = Red(X^1, X^2; V) + Un(X^1; V|X^2) + Un(X^2; V|X^1) + Syn(X^1, X^2; V)$$

(联合)互信息 兀余信息 特有信息 特有信息 协同信息



X 是变量的集合；

V 是 X 的宏观态 (随附特征)

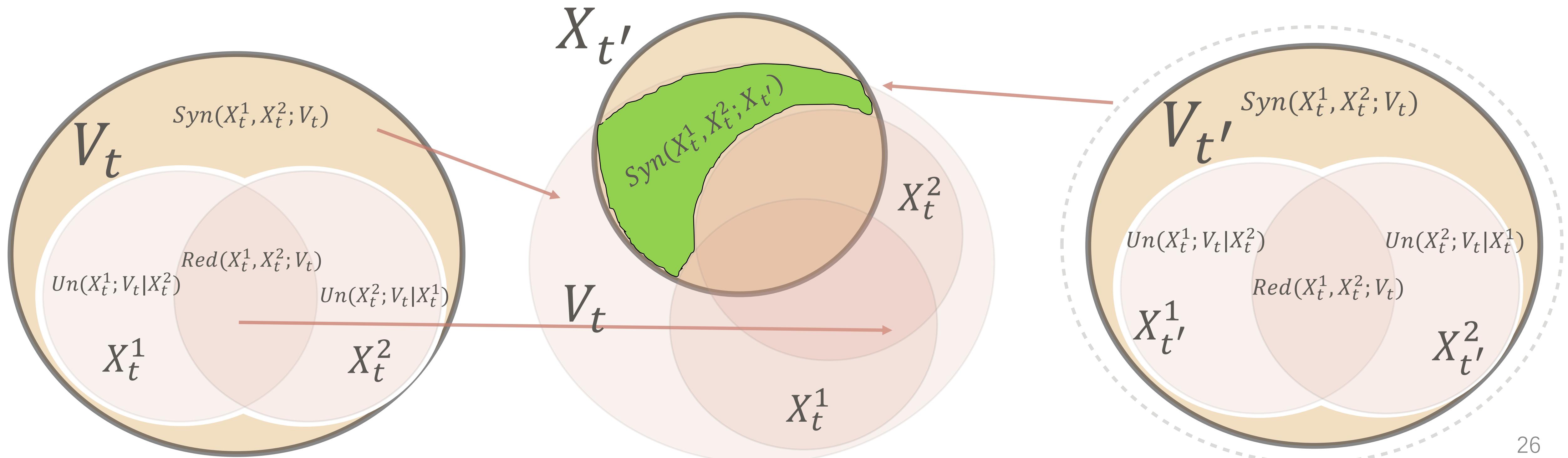
当知道所有 X 时，也就知道了 Syn ，
既即知道了整个系统

Un 的理论上界

Definition(causal emergence):

A system X has a causally emergent feature if and only if:

$$Syn(X_t^1, \dots, X_t^n; X_{t'}^1, \dots, X_{t'}^n) > 0$$

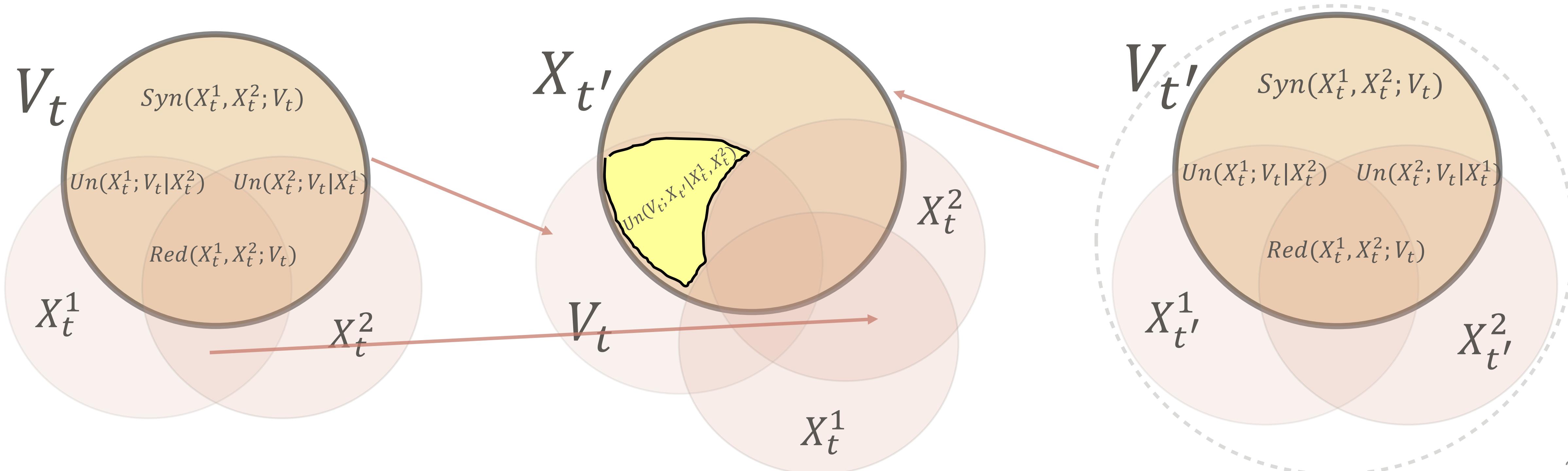


Un 的理论上界

Definition(causal emergence):

A supervenient feature $V_t = F(X_t)$ exhibits causal emergence, if

$$Un(V_t; X_{t'} | X_t^1, \dots, X_t^n) > 0$$

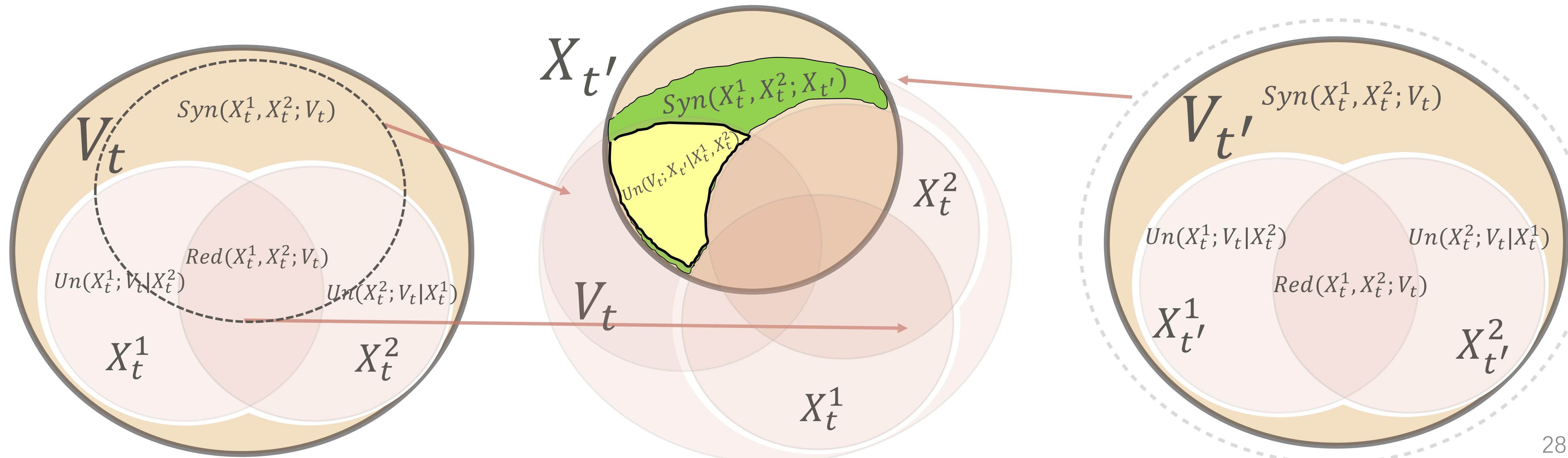


Un 的理论上界

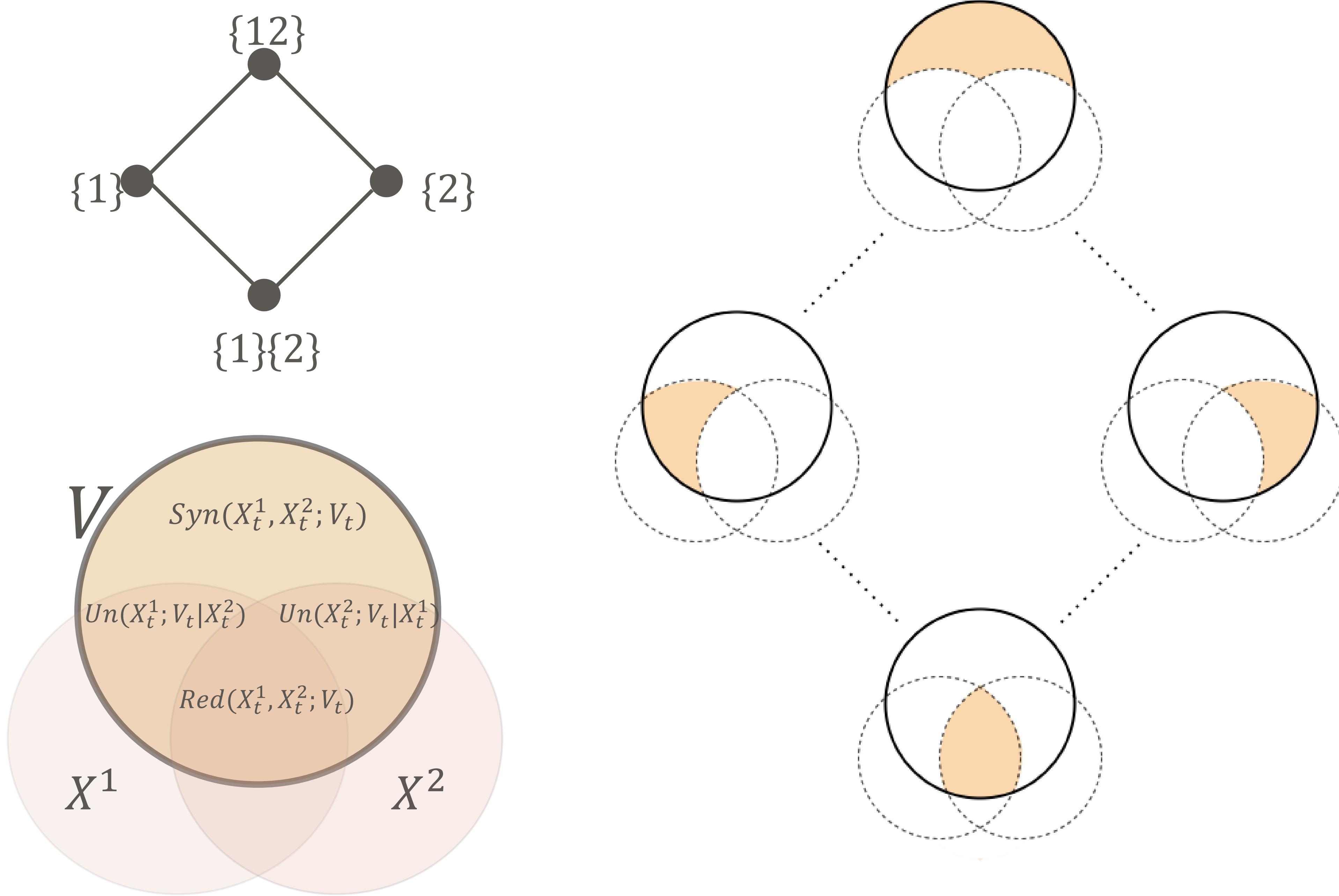
$$Un(V_t; X_{t'} | X_t) \leq Syn(X_t^1, \dots, X_t^n; X_{t'})$$

说明:

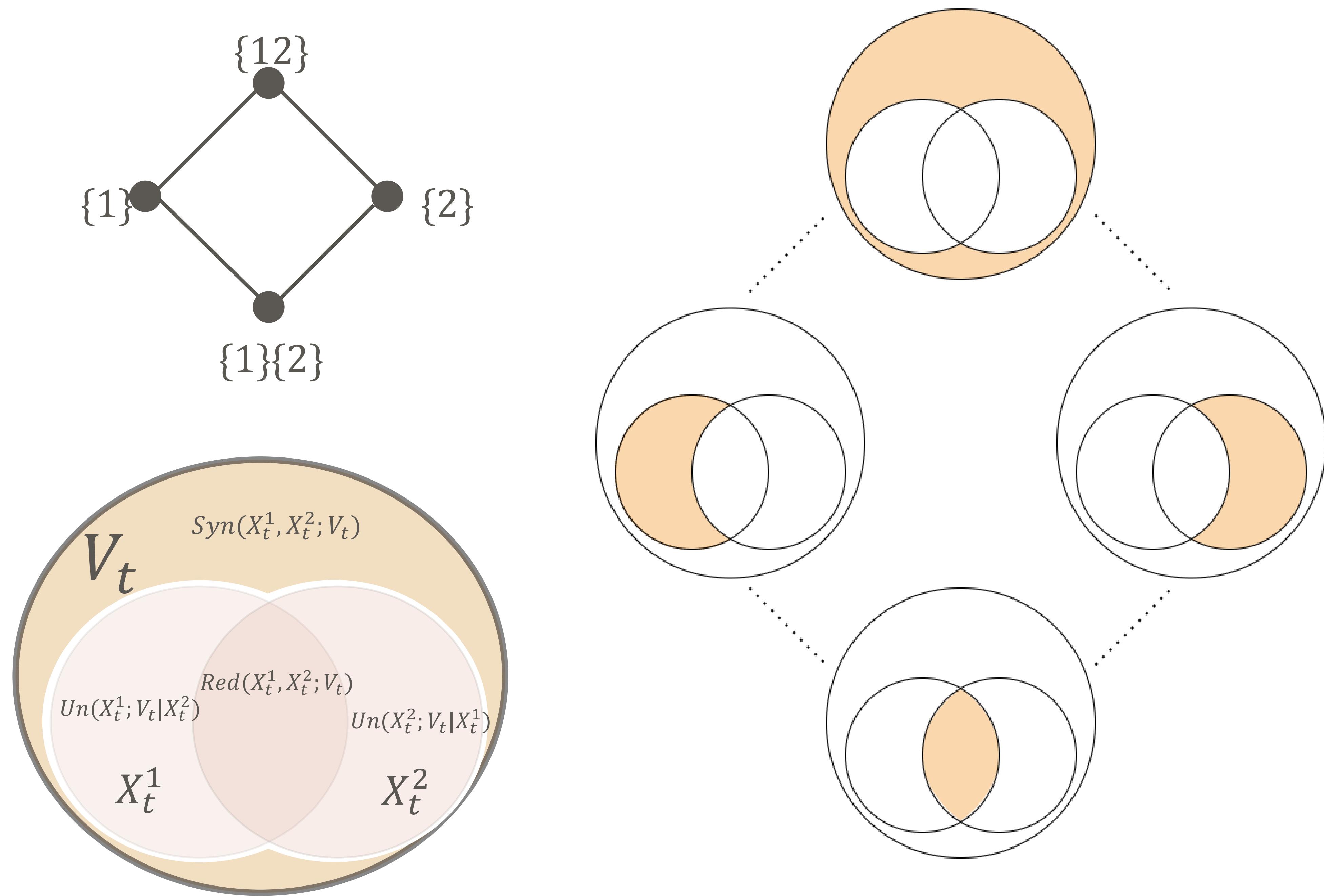
- Un 的理论上界 Syn 和 V 的选择无关。
- V 应当如何选择的问题暂时没有解决。
- V 选择的不同，会导致不同的 Un 。



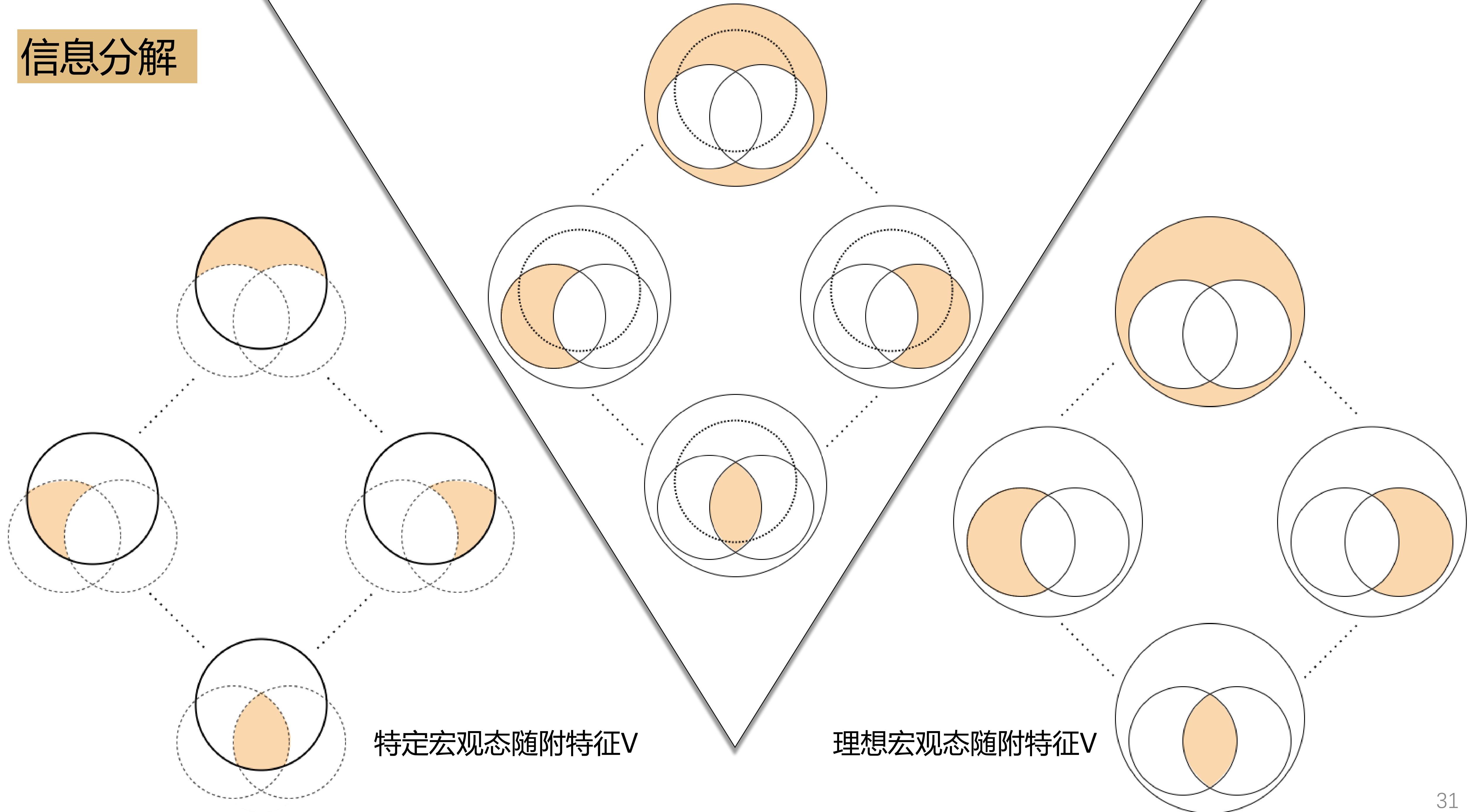
信息分解



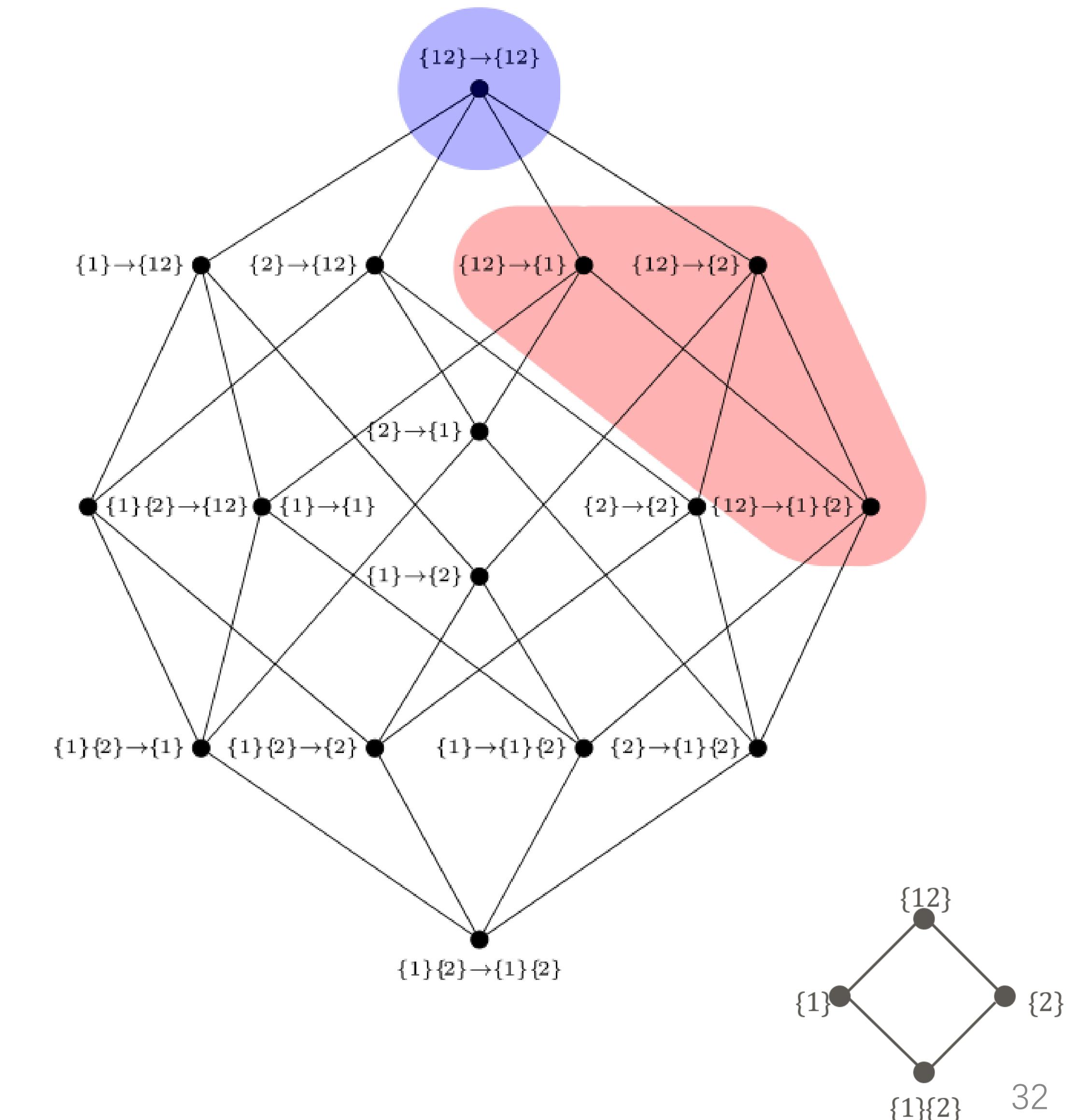
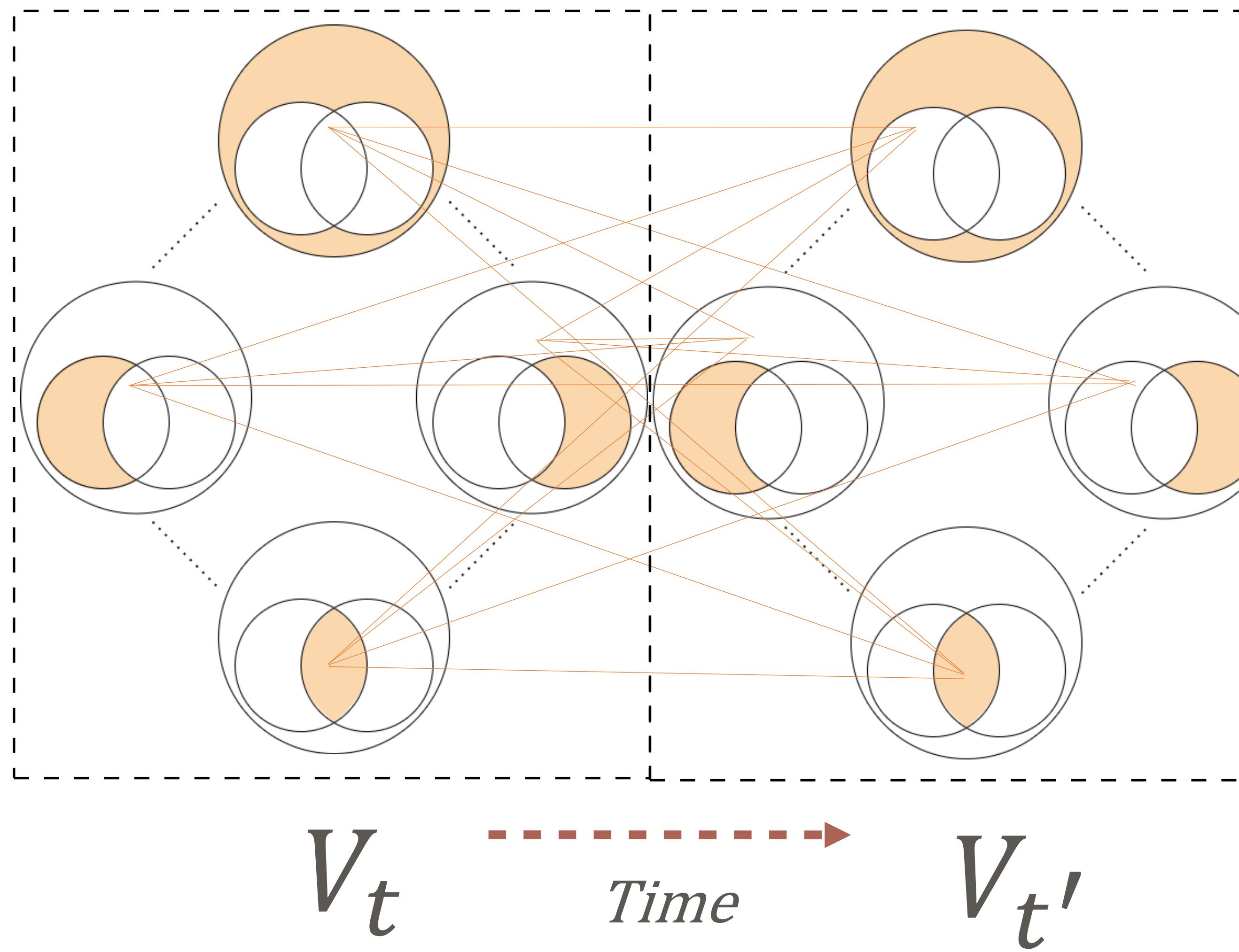
信息分解



信息分解

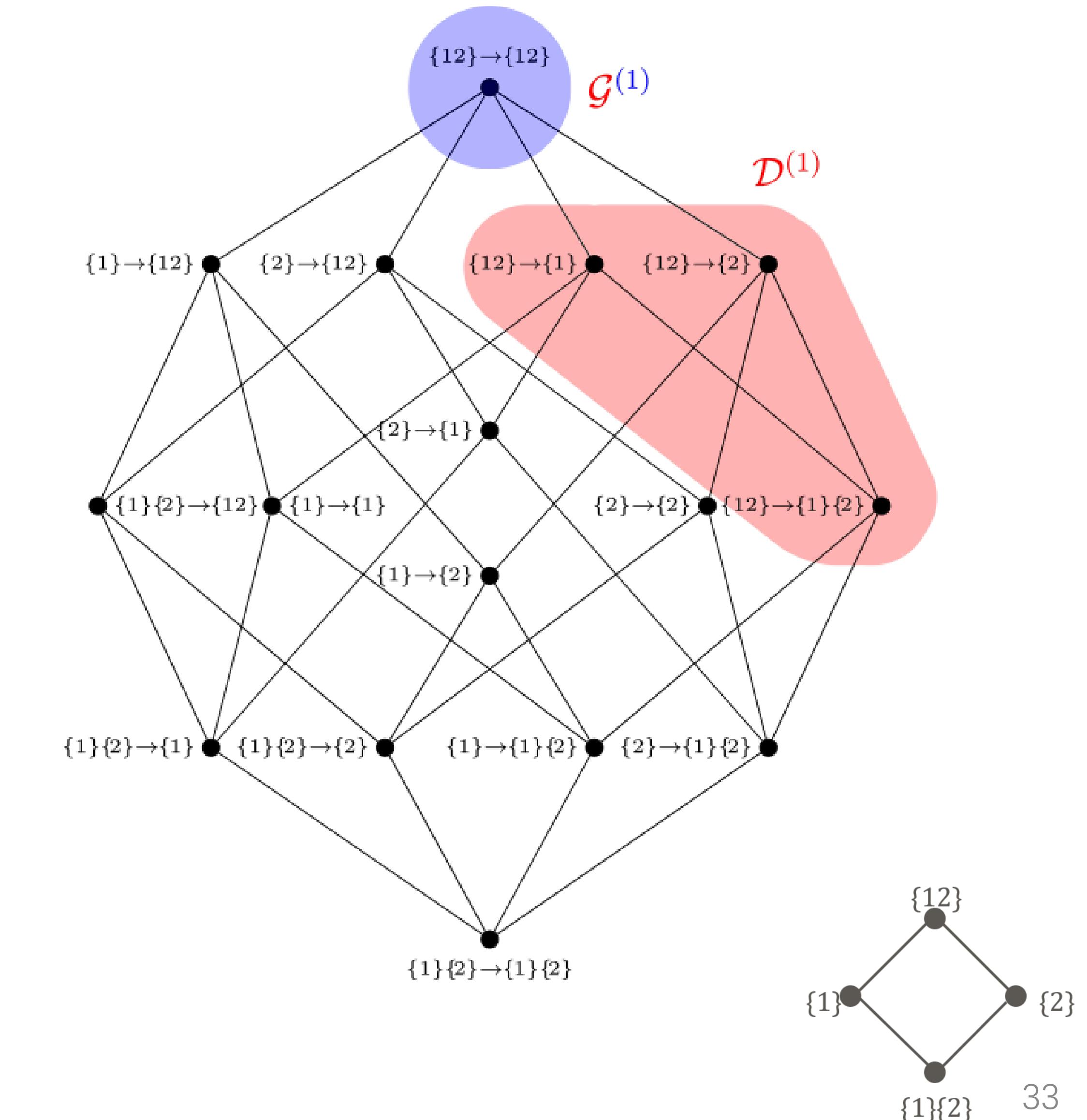
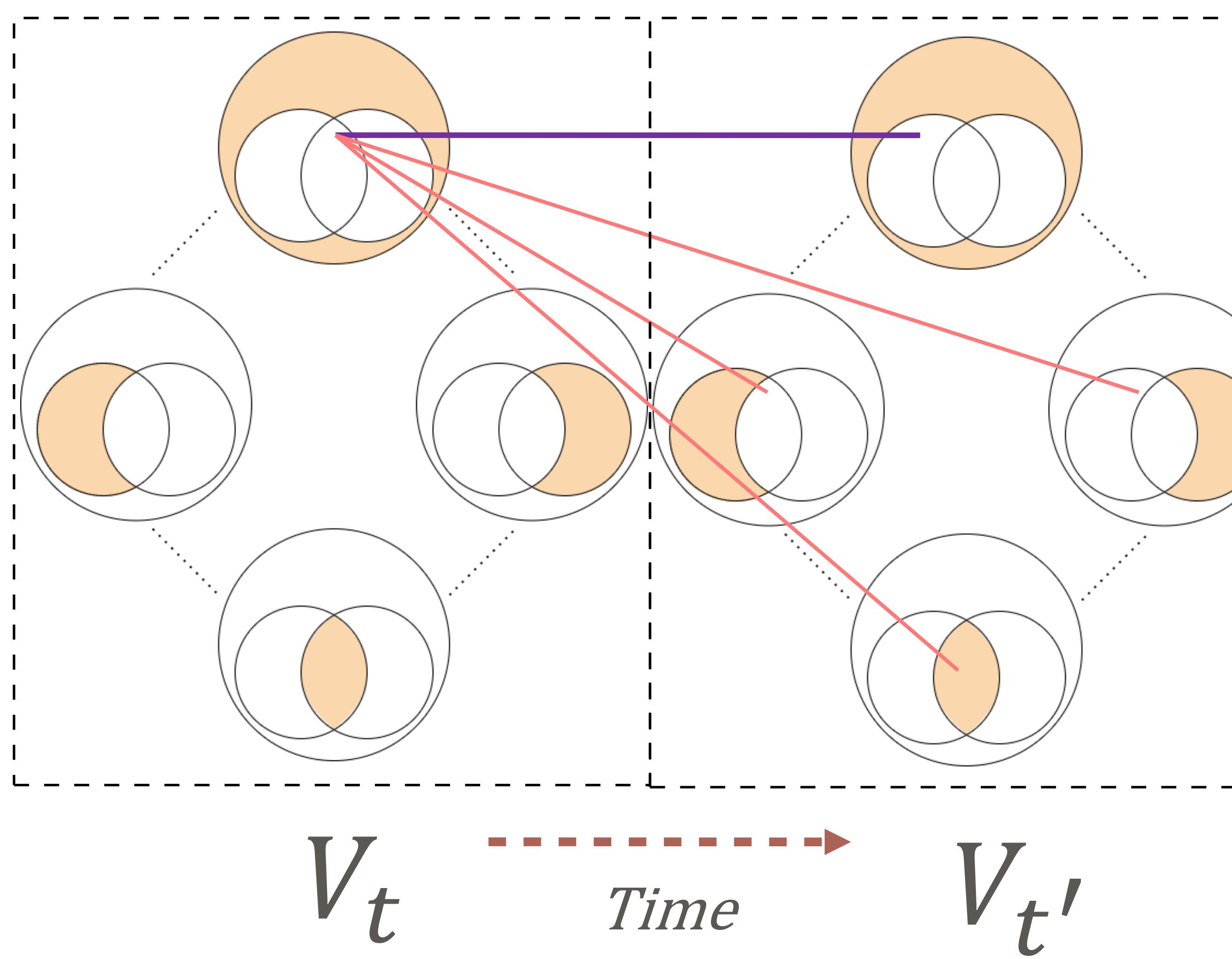


理想化手段 (充要条件)



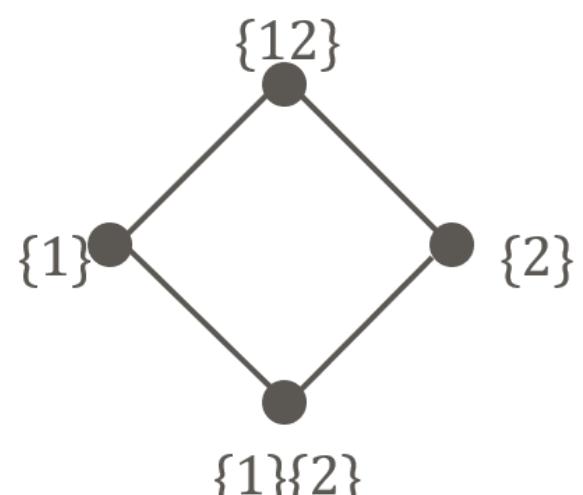
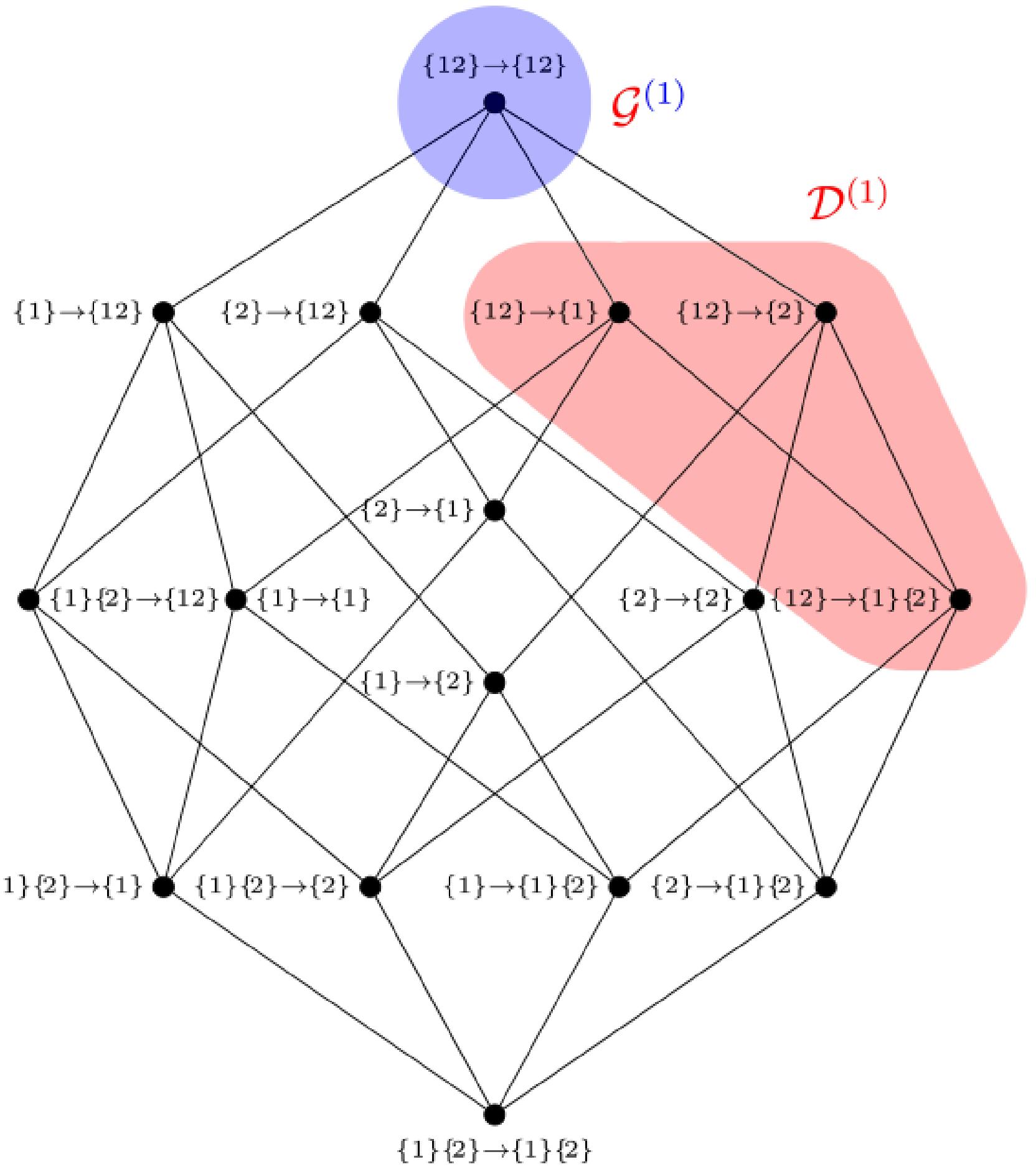
理想化手段 (充要条件)

因为涌现的定义是协同预测，所以只关注左侧的{12}



D, G 的定义

PID atoms can be further decomposed using ΦID .



$$\begin{aligned}
 Syn(X_t^1, X_t^2; X_{t'}) &= \sum_{\alpha \in A_1, \beta \in A} I_\partial^{\alpha \rightarrow \beta} \\
 &= \sum_{\alpha \in A_1, \beta \in A \setminus A_1} I_\partial^{\alpha \rightarrow \beta} + \sum_{\alpha \in A_1, \beta \in A_1} I_\partial^{\alpha \rightarrow \beta} \\
 &= D(X_t; X_{t'}) + G(X_t; X_{t'})
 \end{aligned}$$

Downward causation Causal decoupling

$$D(X_t; X_{t'}) := \sum_{\alpha \in A_1, \beta \in A \setminus A_1} I_\partial^{\alpha \rightarrow \beta}(X_t; X_{t'})$$

$$G(X_t; X_{t'}) := \sum_{\alpha \in A_1, \beta \in A_1} I_\partial^{\alpha \rightarrow \beta}(X_t; X_{t'})$$

至此，问题似乎解决了：

可以通过 PID 算法计算出特定宏观 \mathcal{V} 下的因果解耦及向下因果的大小。

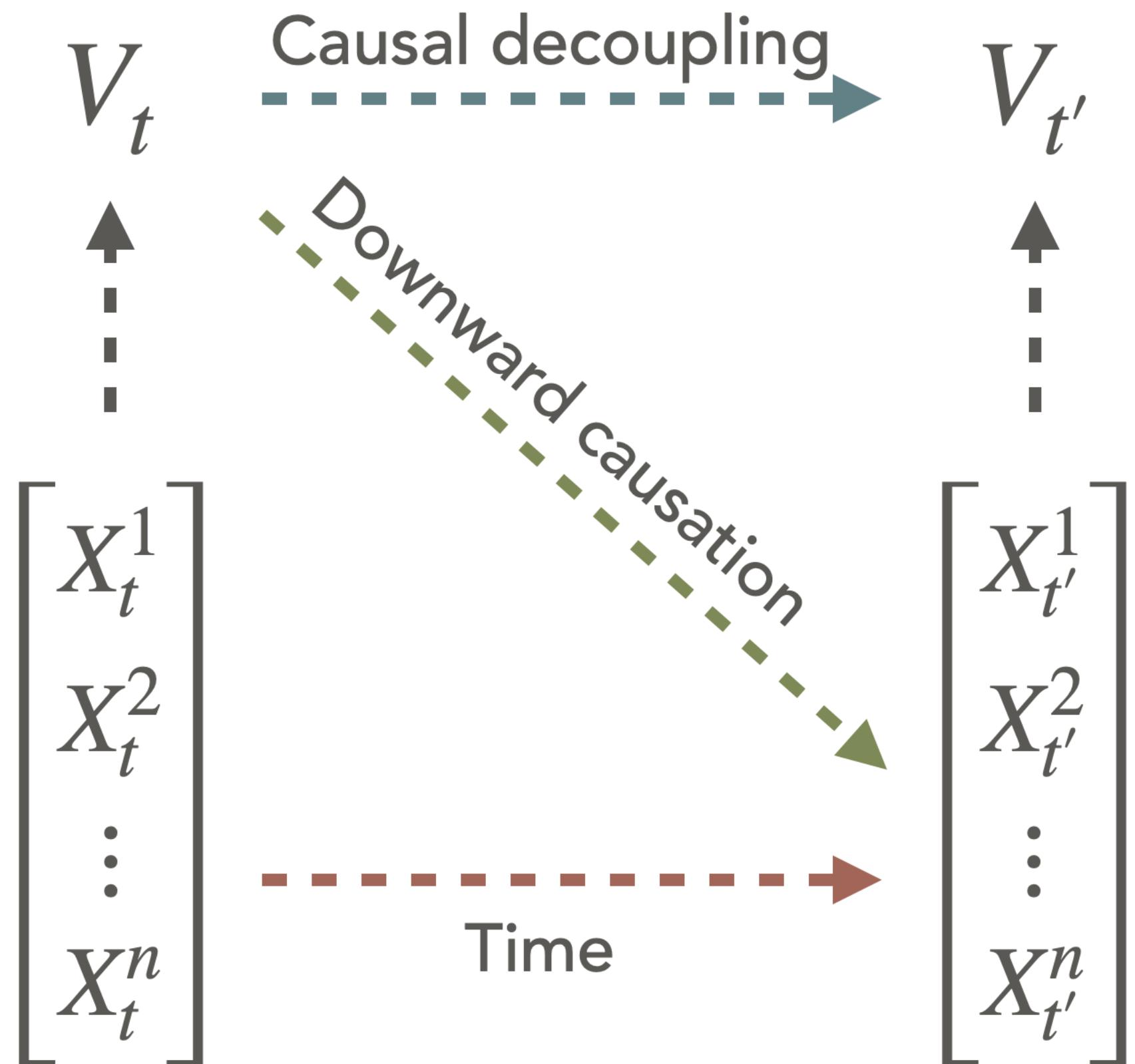
提出了一个系统内存在因果解耦及向下因果的理论定义。

但是：

PID 算法有很多，但在计算冗余信息时都存在一定问题。（假负值）

理想的宏观 \mathcal{V} 在现实中不一定能找到。

结论：量化因果的判定



$\Psi_{t,t'}(V) :$ $\Delta_{t,t'}(V) :$ $\Gamma_{t,t'}(V) :$

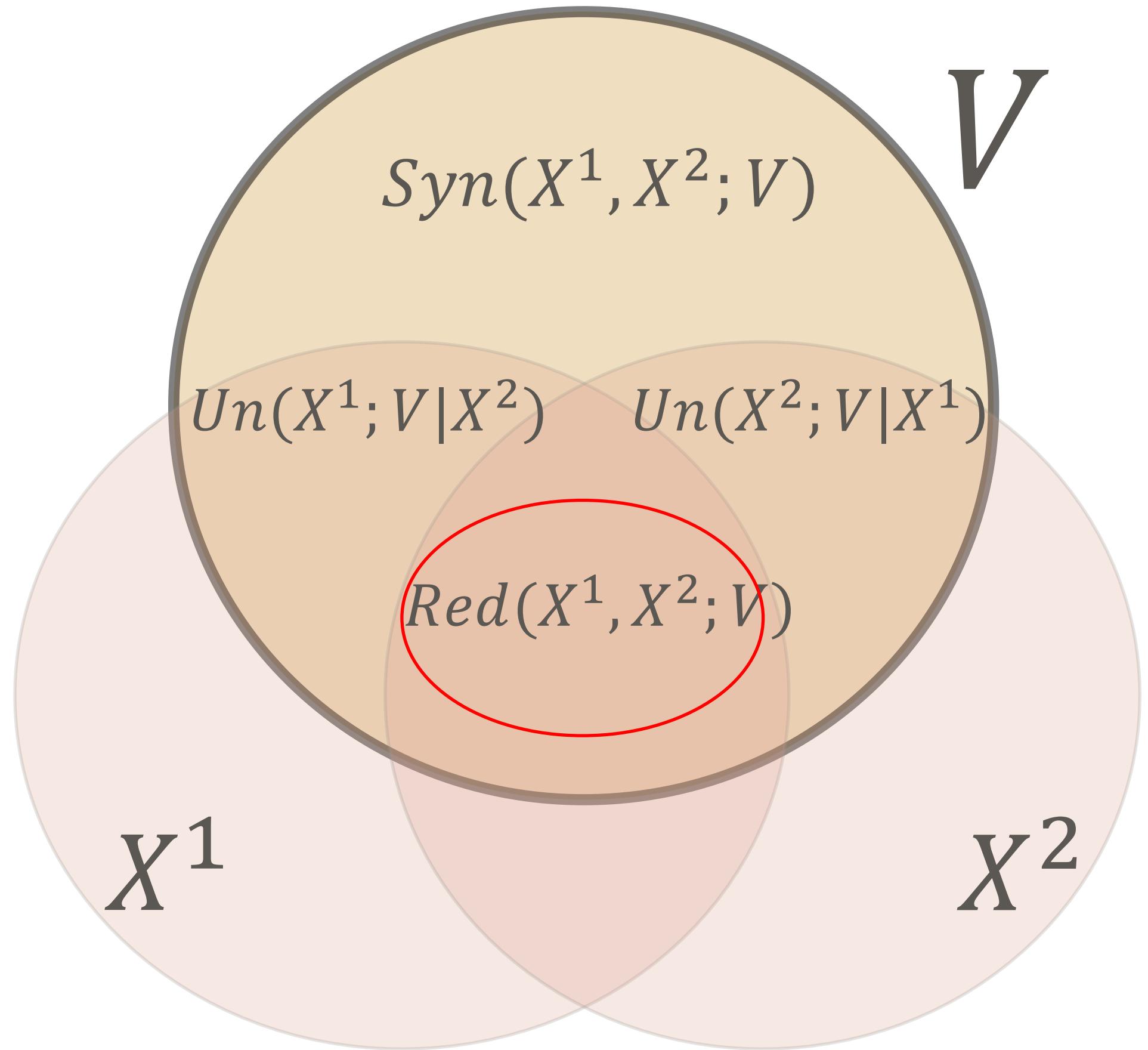
当 $\Psi > 0$ 时, V 可称之为涌现 ;

当 $\Delta > 0$ 时, V 呈向下因果(Downward causation) ;

当 $\Psi > 0$ and $\Gamma = 0$ 时, V 呈因果解耦(Causal decoupling)。

$$I(X^1, X^2; V) = Red(X^1, X^2; V) + Un(X^1; V|X^2) + Un(X^2; V|X^1) + Syn(X^1, X^2; V)$$

(联合)互信息 冗余信息 特有信息 特有信息 协同信息



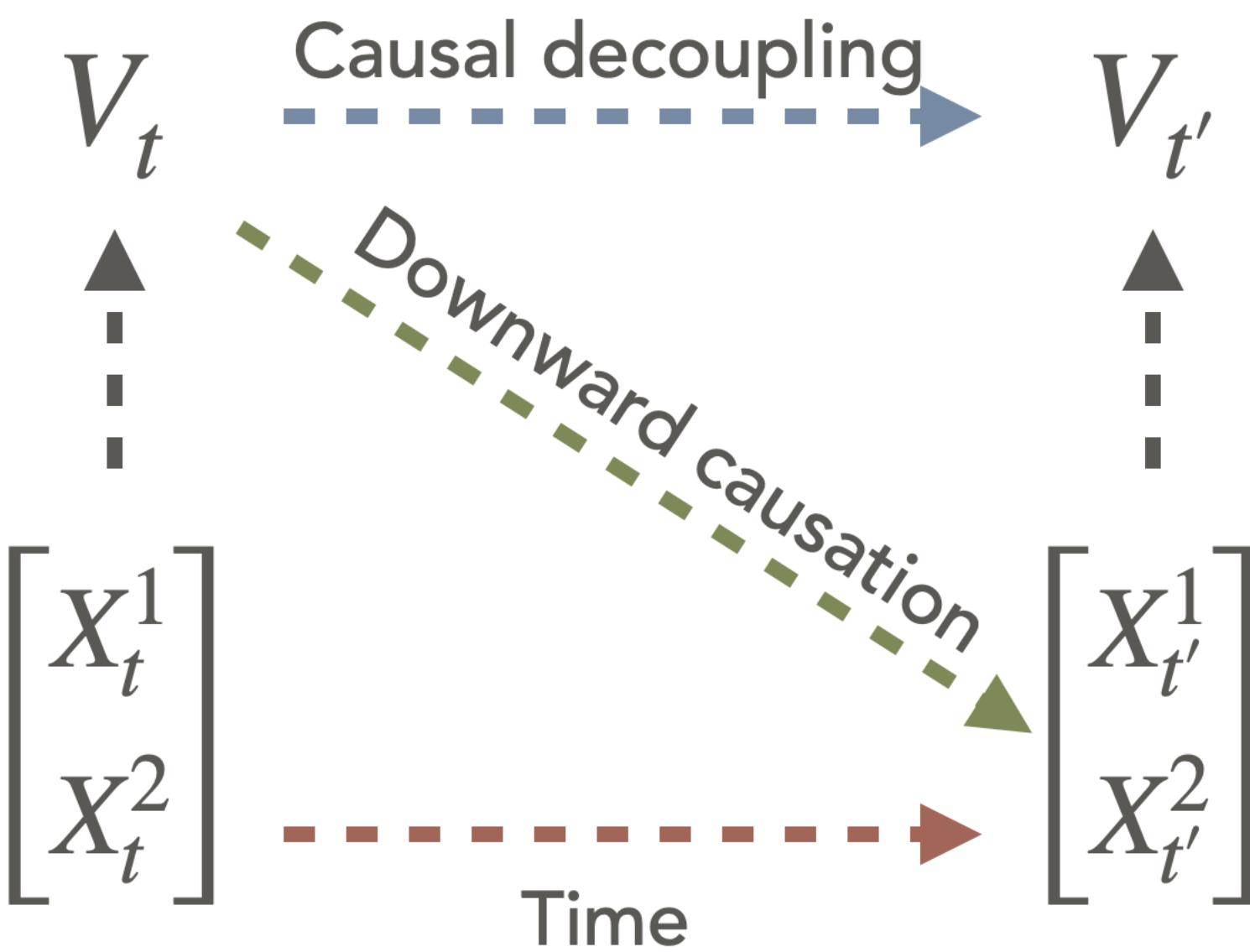
既然 Red 算不准，那就不算了

* 互信息 = 特有信息 + 冗余信息

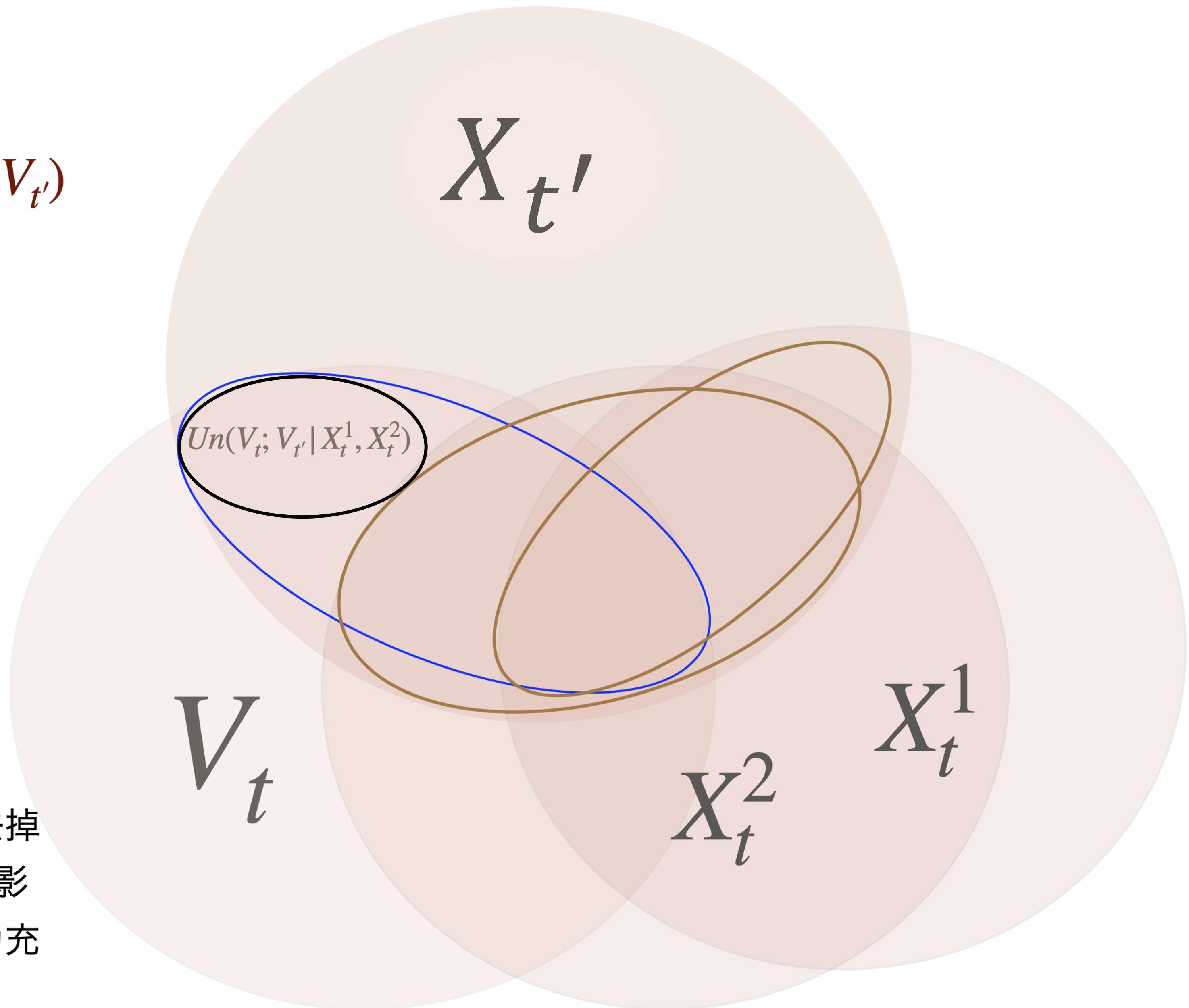
$$\begin{aligned}
 Syn(X^1, X^2; V) \\
 &= I(X^1, X^2; V) - Red(X^1, X^2; V) \\
 &\quad - Un(X^1; V|X^2) - Un(X^2; V|X^1) \\
 &\geq I(X^1, X^2; V) - I(X^1; V) - I(X^2; V)
 \end{aligned}$$

指标 Ψ (读作: Psi)

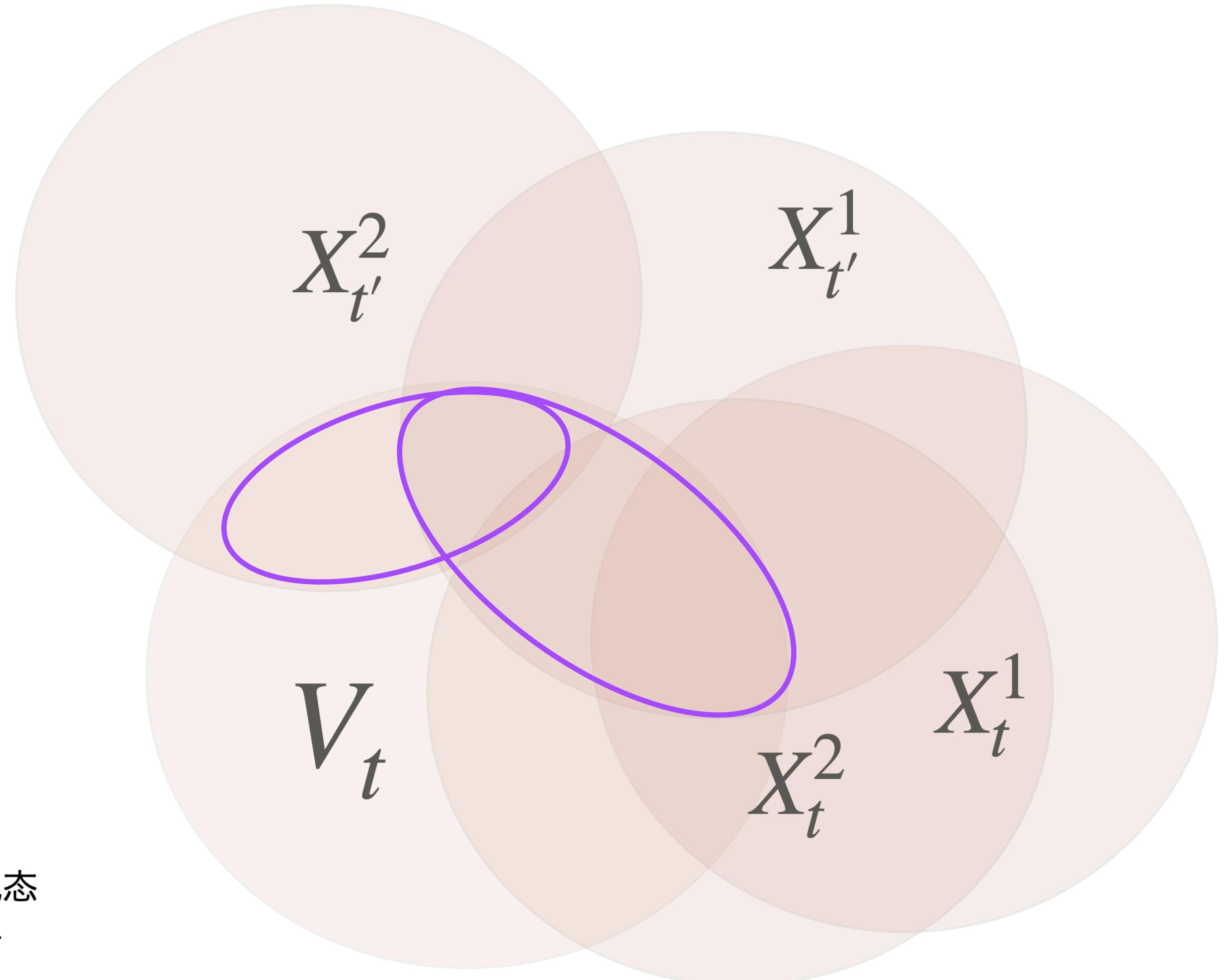
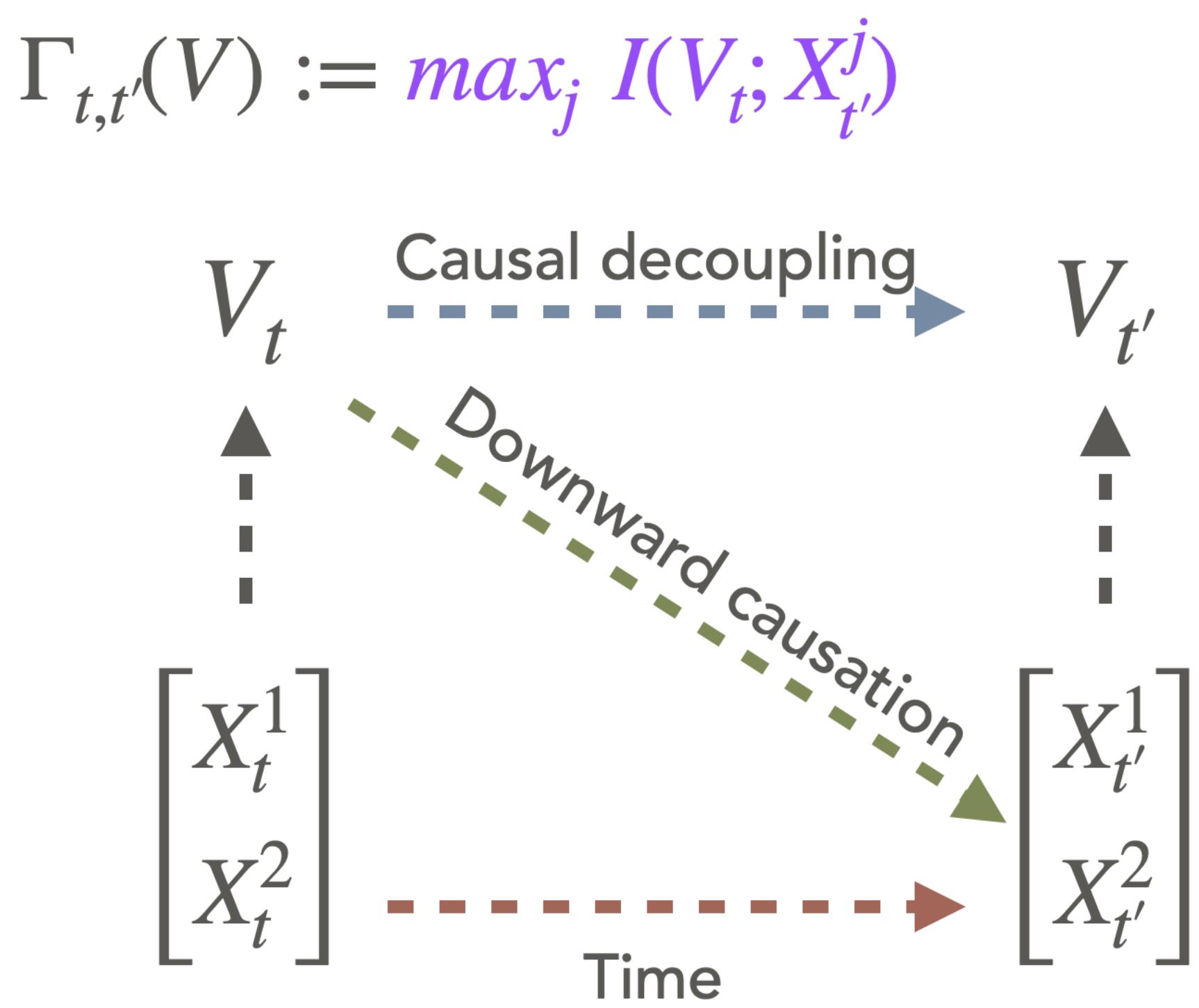
$$\Psi_{t,t'}(V) := I(V_t; V_{t'}) - \sum_{j=1,2} I(X_t^j; V_{t'})$$



说明: 当前宏观态对下一刻宏观态的预测去掉受“当前微观态对下一时刻宏观态的预测”的影响。但多去掉了多处冗余信息, 导致其成为充分条件而非充要条件。



指标 Γ and Δ

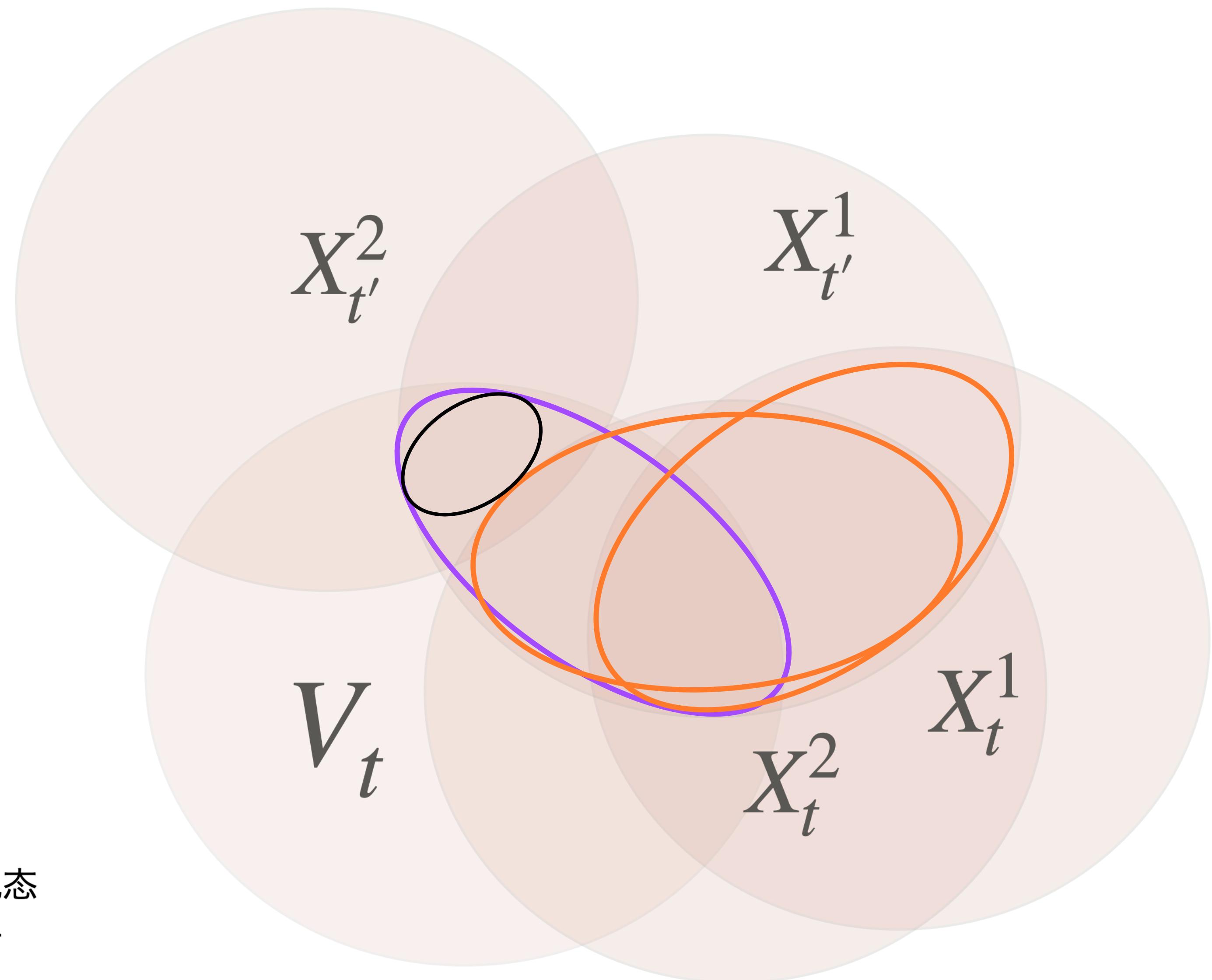
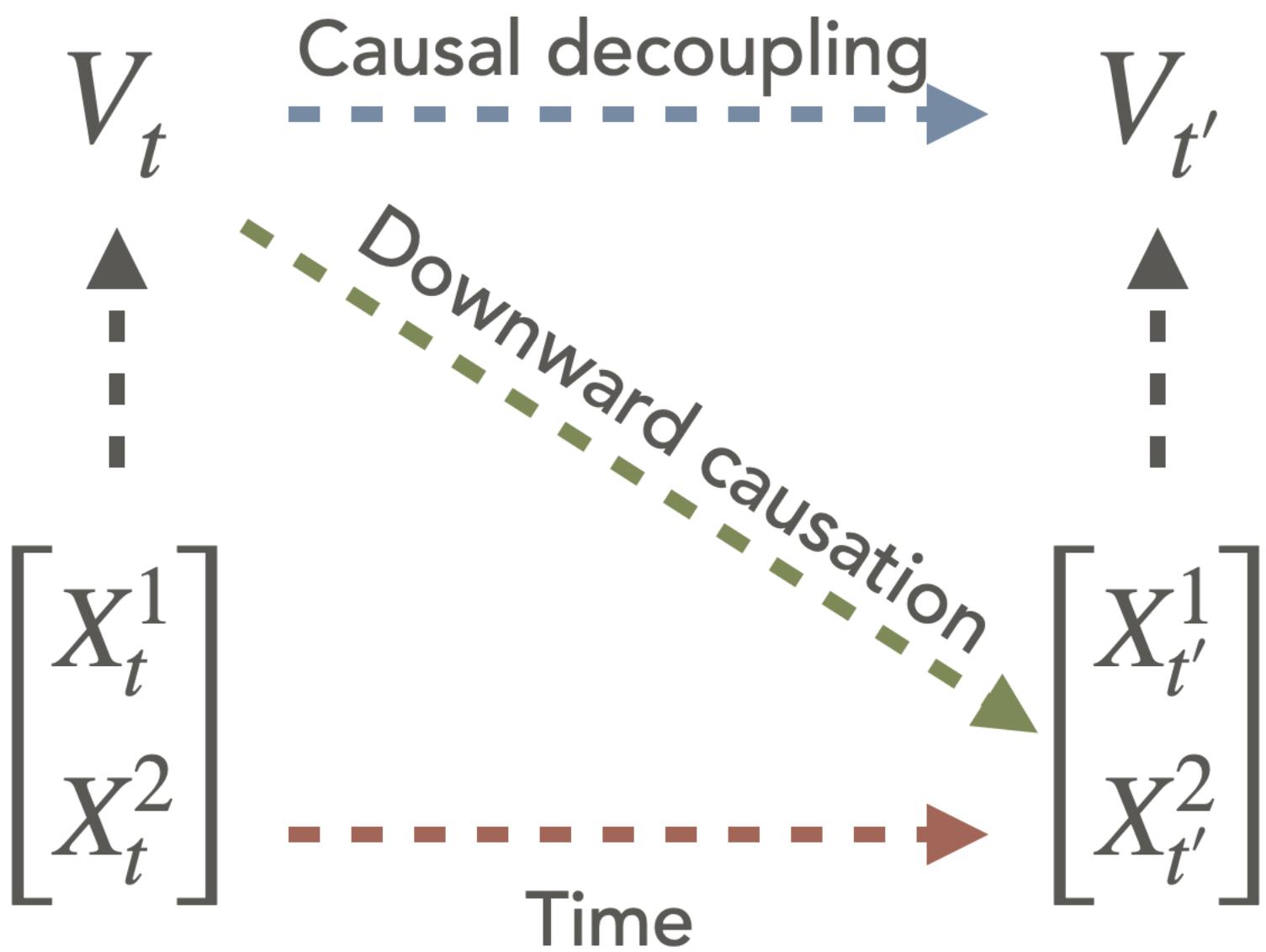


说明：当前宏观态对下一刻微观态的预测去掉受“当前微观态对下一时刻微观态的预测”的影响。但多去掉了多处冗余信息，导致其成为充分条件而非充要条件。

指标 Γ and Δ

$$\Delta_{t,t'}(V) := \max_j \left(I(V_t; X_{t'}^j) - \sum_i I(X_t^i; X_{t'}^j) \right)$$

$$\Gamma_{t,t'}(V) := \max_j I(V_t; X_{t'}^j)$$

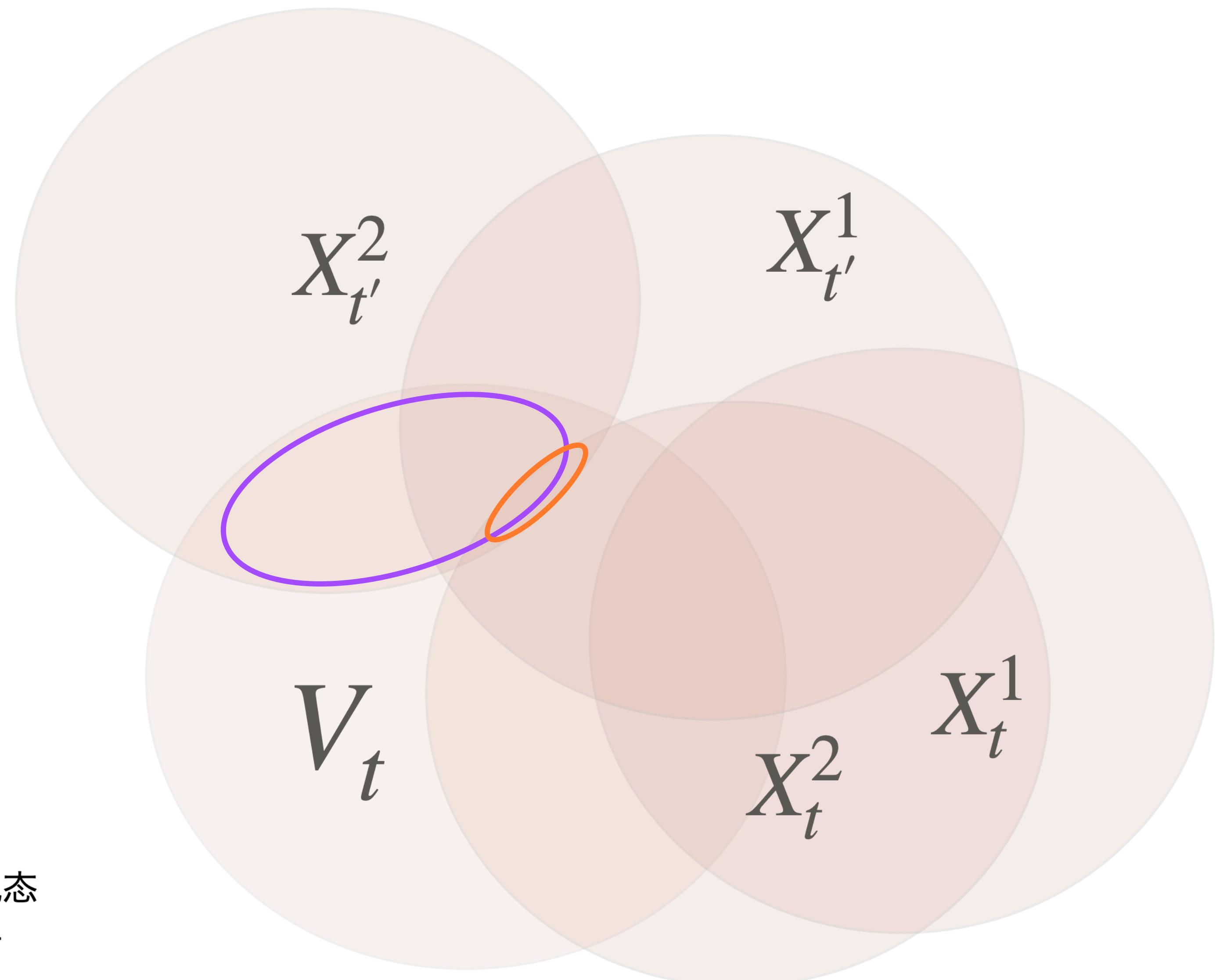
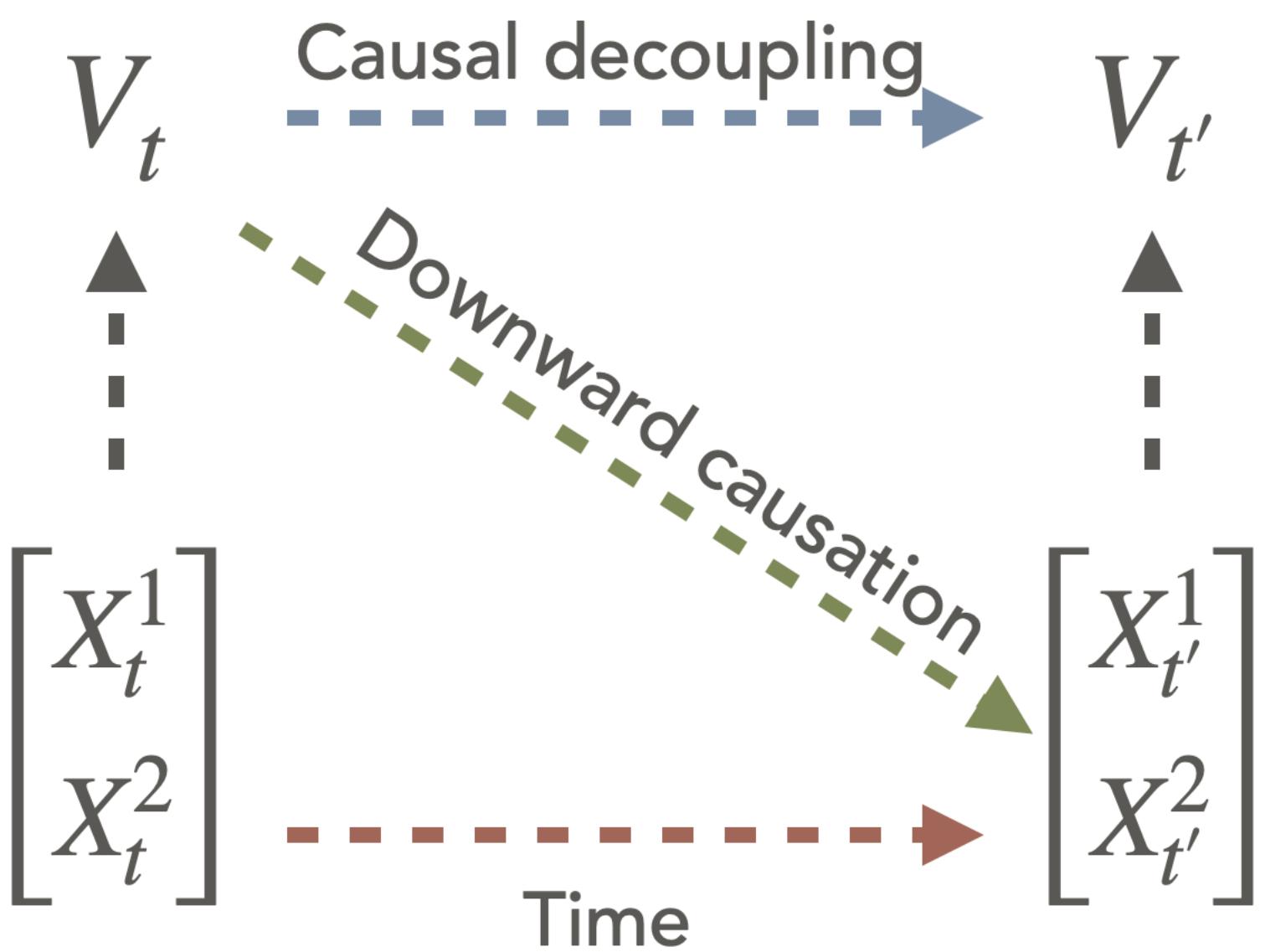


说明：当前宏观态对下一刻微观态的预测去掉受“当前微观态对下一时刻微观态的预测”的影响。但多去掉了多处冗余信息，导致其成为充分条件而非充要条件。

指标 Γ and Δ

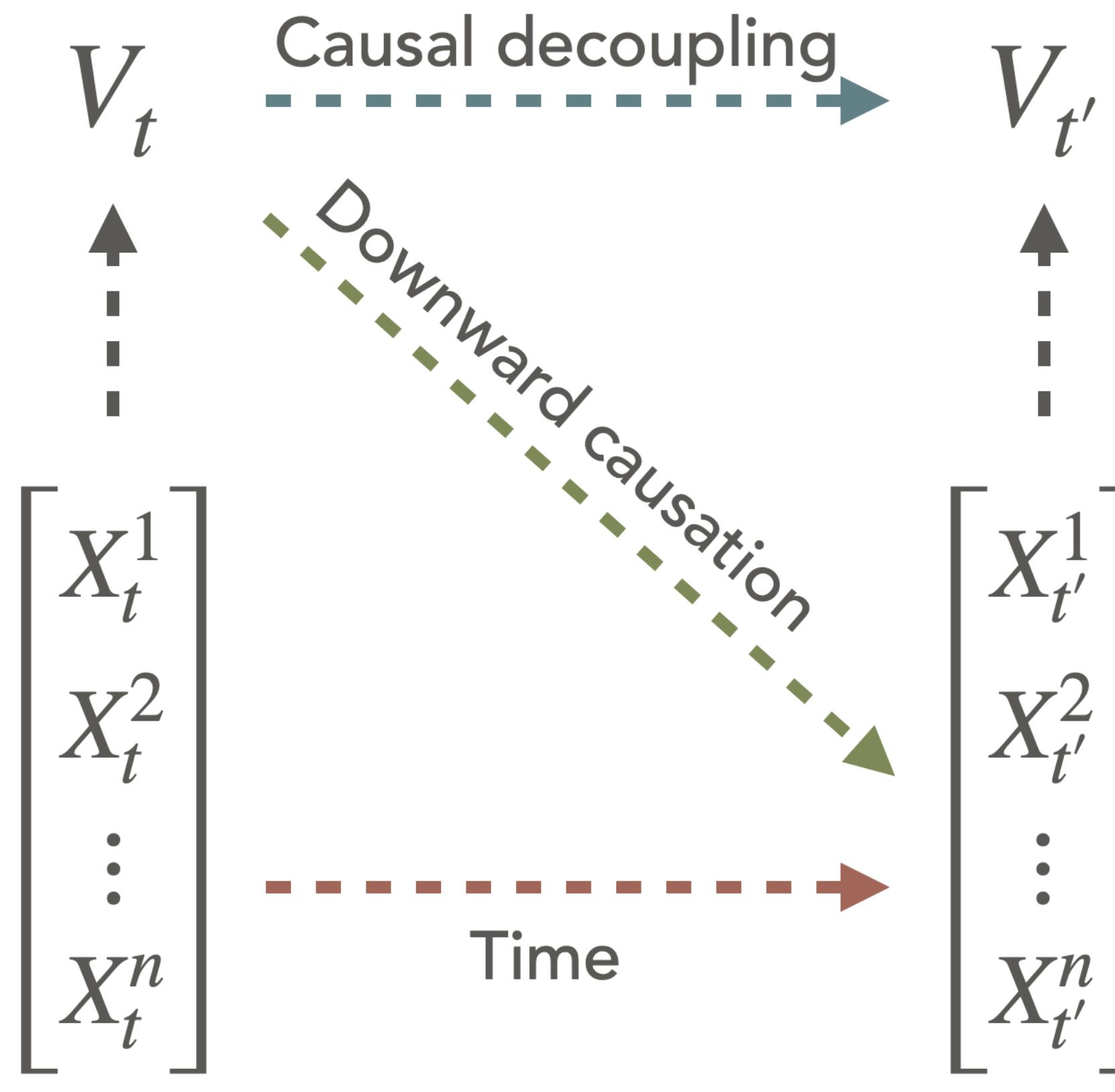
$$\Delta_{t,t'}(V) := \max_j \left(I(V_t; X_{t'}^j) - \sum_i I(X_t^i; X_{t'}^j) \right)$$

$$\Gamma_{t,t'}(V) := \max_j I(V_t; X_{t'}^j)$$



说明：当前宏观态对下一刻微观态的预测去掉受“当前微观态对下一时刻微观态的预测”的影响。但多去掉了多处冗余信息，导致其成为充分条件而非充要条件。

结论：量化因果的判定



Measuring emergence

在宏观态 V 已知时，用互信息定义(Ψ , Δ and Γ)，作为指标来判断涌现。因计算复杂度，目前只有涌现的充分条件，甚至较大的数据集。必要条件的判定，目前仍是Open课题。

$$\Psi_{t,t'}(V) := I(V_t; V_{t'}) - \sum_j I(X_t^j; V_{t'})$$

当 $\Psi > 0$ 时， V 可称之为涌现；

另，当 $\Psi < 0$ 时，不能否认 V 不出现涌现(Section III)

$$\Delta_{t,t'}(V) := \max_j \left(I(V_t; X_{t'}^j) - \sum_i I(X_t^i; X_{t'}^j) \right)$$

当 $\Delta > 0$ 时， V 呈向下因果(Downward causation)；

$$\Gamma_{t,t'}(V) := \max_j I(V_t; X_{t'}^j)$$

当 $\Psi > 0$ and $\Gamma = 0$ 时， V 呈因果解耦(Causal decoupling)。

实验复现 (开场的那3个简单例子)

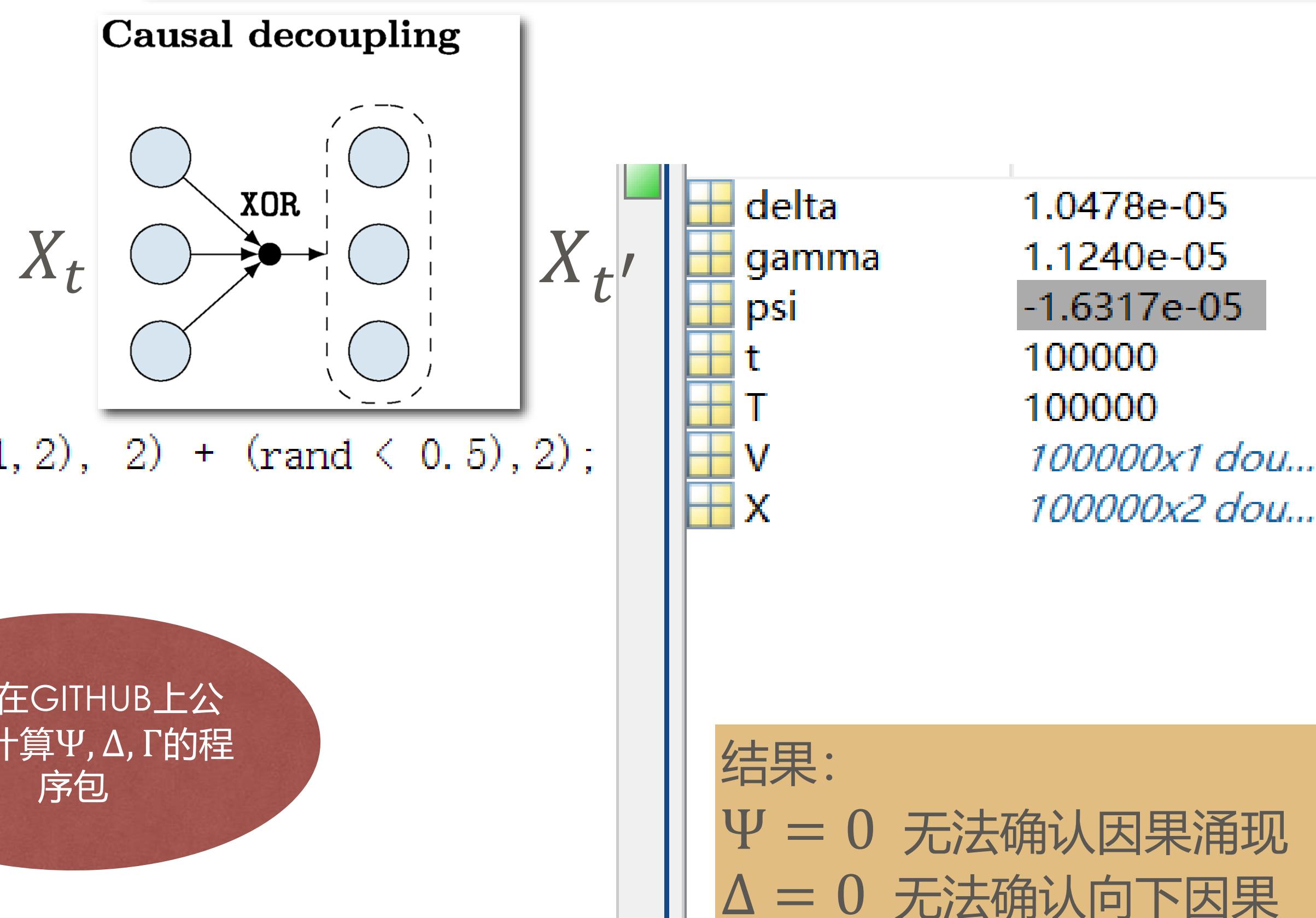
例1 规则:

- 有 γ 的概率，上下时刻整体奇偶性相同；
- n 个硬币随机（比如，正面=0，反面=1）。

$$p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1} | x_t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2^{n-1}} & \text{if } \oplus_{j=1}^n x_{t+1}^j = \oplus_{j=1}^n x_t^j \\ \frac{1-\gamma}{2^{n-1}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
T = 100000;
X = zeros([T, 2]);
for t=2:T
    X(t, 1) = rand < 0.5;
    X(t, 2) = rem(X(t, 1) + rem(X(t-1, 1) + X(t-1, 2), 2) + (rand < 0.5), 2);
end
```

```
V = rem (X(:, 1) + X(:, 2), 2);
psi = EmergencePsi(X, V);
delta = EmergenceDelta(X, V);
gamma = EmergenceGamma(X, V);
```



结果：
 $\Psi = 0$ 无法确认因果涌现
 $\Delta = 0$ 无法确认向下因果
 $\Gamma = 0$ 无法确认因果解耦

实验复现

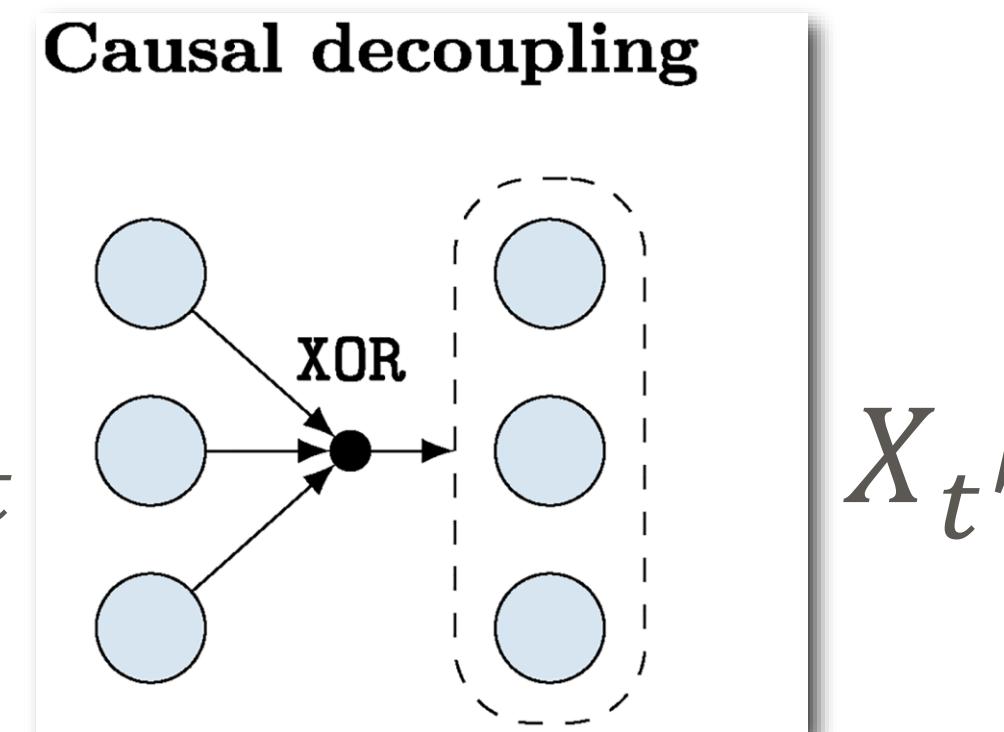
例1 规则：

- 有 γ 的概率，上下时刻整体奇偶性相同；
- n 个硬币随机（比如，正面=0，反面=1）。

$$p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1} | x_t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2^{n-1}} & \text{if } \oplus_{j=1}^n x_{t+1}^j = \oplus_{j=1}^n x_t^j \\ \frac{1-\gamma}{2^{n-1}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
T = 100000;
X = zeros([T, 2]);
for t=2:T
    X(t, 1) = rand < 0.5;
    X(t, 2) = rem(X(t, 1) + rem(X(t-1, 1) + X(t-1, 2), 2) + (rand < 0.95), 2);
end

V = rem (X(:, 1) + X(:, 2), 2);
psi = EmergencePsi(X, V);
delta = EmergenceDelta(X, V);
gamma = EmergenceGamma(X, V);
```



delta	-7.0028e-06
gamma	1.0973e-07
psi	0.7122
t	100000
T	100000
V	100000x1 dou...
X	100000x2 dou...

结果：

$\Psi > 0$ 存在因果涌现

$\Delta < 0$ 无法确定向下因果

$\Gamma = 0$ 存在因果解耦

实验复现

案例	T	γ	$\Psi_{t,t'}(V)$	$\Delta_{t,t'}(V)$	$\Gamma_{t,t'}(V)$
1	1000	0.95	0.691	0.000	0.001
1	1000	0.95	0.718	-0.004	0.001
1	1000	0.95	0.719	0.001	0.002
1	1000	0.95	0.697	0.002	0.003
1	100000	0.95	0.717	0.000	0.000
1	100000	0.95	0.713	0.000	0.000
1	100000	0.95	0.712	-0.000	0.000
1	100000	0.95	0.712	0.000	0.000

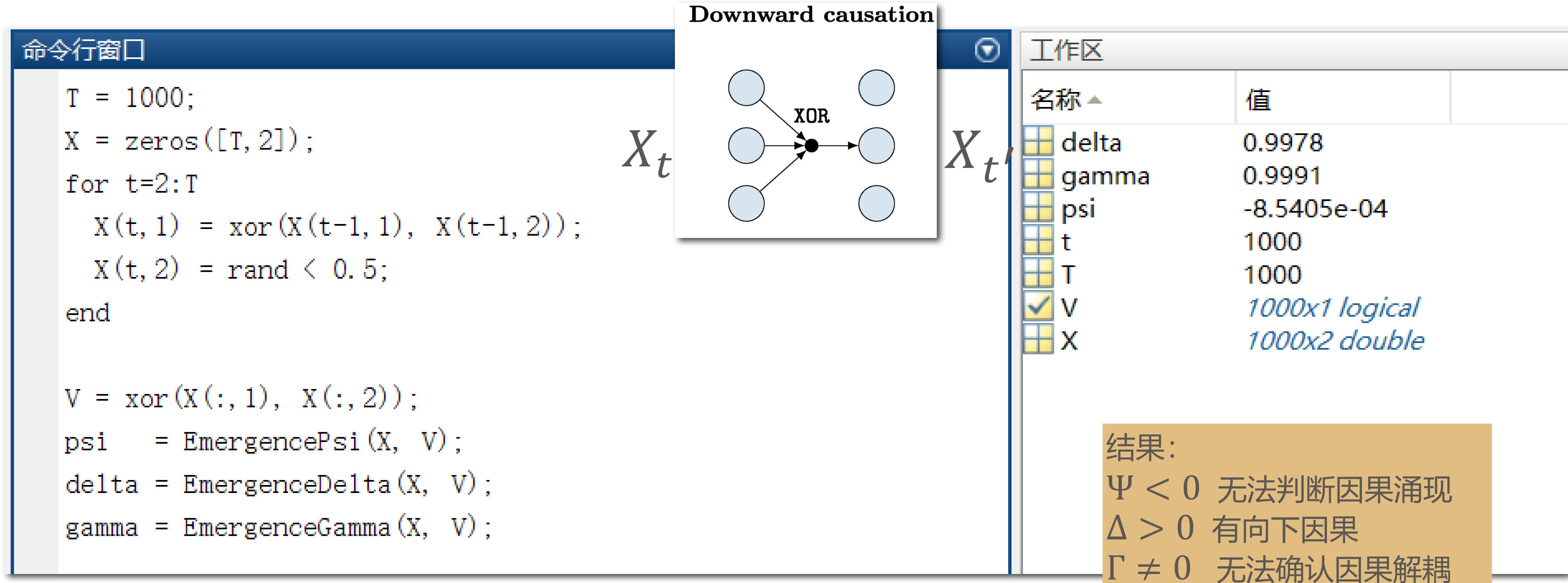
实验复现

例2 规则：

X_{t+1}^1 与上一时刻整体奇偶性相同；

其余硬币随机（比如，正面=0，反面=1）。

$$x_{t+1}^1 = \bigoplus_{j=1}^n x_t^j$$



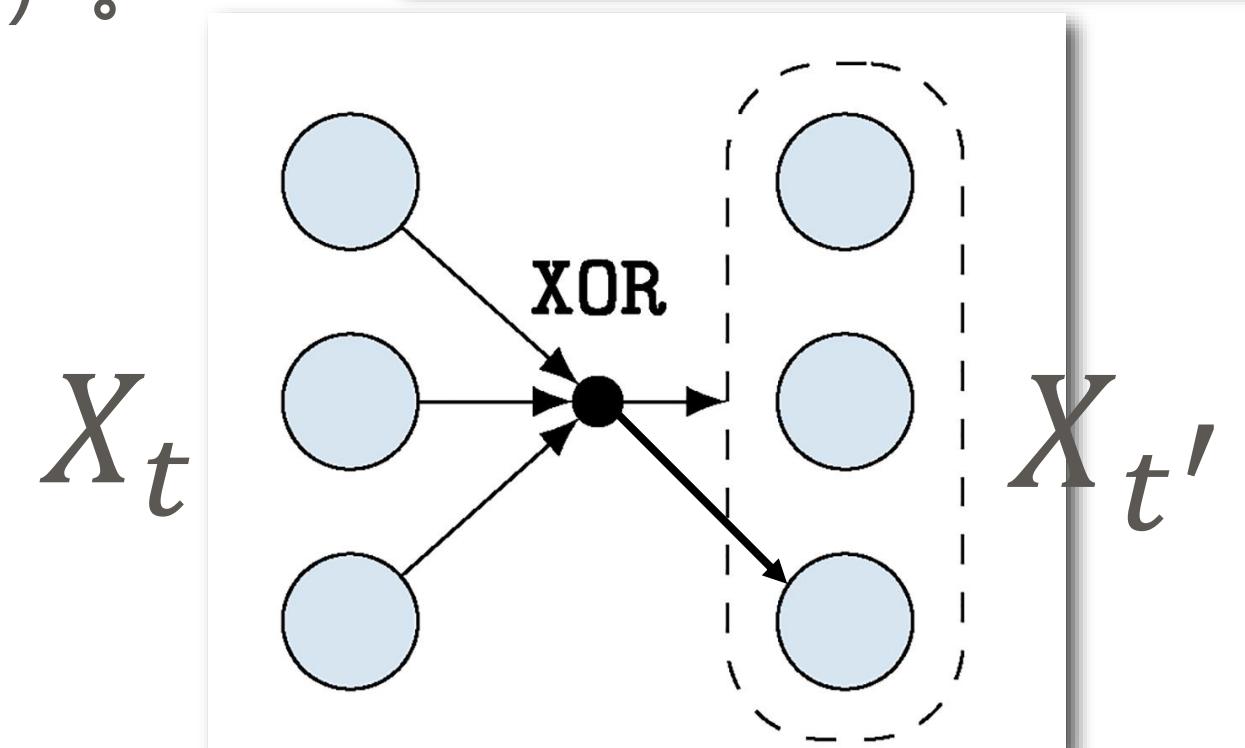
实验复现

例3 规则：

X_{t+1}^1 与上一时刻整体奇偶性相同；

且有 γ 的概率，上下时刻整体奇偶性相同；
其余硬币随机（比如，正面=0，反面=1）。

$$p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1} | x_t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{t+1}^1 \neq \oplus_{j=1}^n x_t^j \\ \frac{\gamma}{2^{n-1}} & \text{if } x_{t+1}^1 = \oplus_{j=1}^n x_t^j \text{ and } \oplus_{j=1}^n x_{t+1}^j = \oplus_{j=1}^n x_t^j \\ \frac{1-\gamma}{2^{n-1}} & \text{otherwise} \end{cases}$$



```
T = 100000;
X = zeros([T, 2]);
for t=2:T
    X(t, 1) = xor(X(t-1, 1), X(t-1, 2));
    X(t, 2) = rem(X(t, 1) - rem(X(t-1, 1) + X(t-1, 2), 2) + (rand < 0.5), 2);
end
```

```
V = xor(X(:, 1), X(:, 2));
psi = EmergencePsi(X, V);
delta = EmergenceDelta(X, V);
gamma = EmergenceGamma(X, V);
```

delta	0.9999
gamma	1.0000
psi	-1.3448e-05
t	100000
T	100000
<input checked="" type="checkbox"/> V	100000x1 logical
X	100000x2 double

结果：

$\Psi < 0$ 无法确认因果涌现
 $\Delta > 0$ 有向下因果
 $\Gamma \neq 0$ 无法确认因果解耦

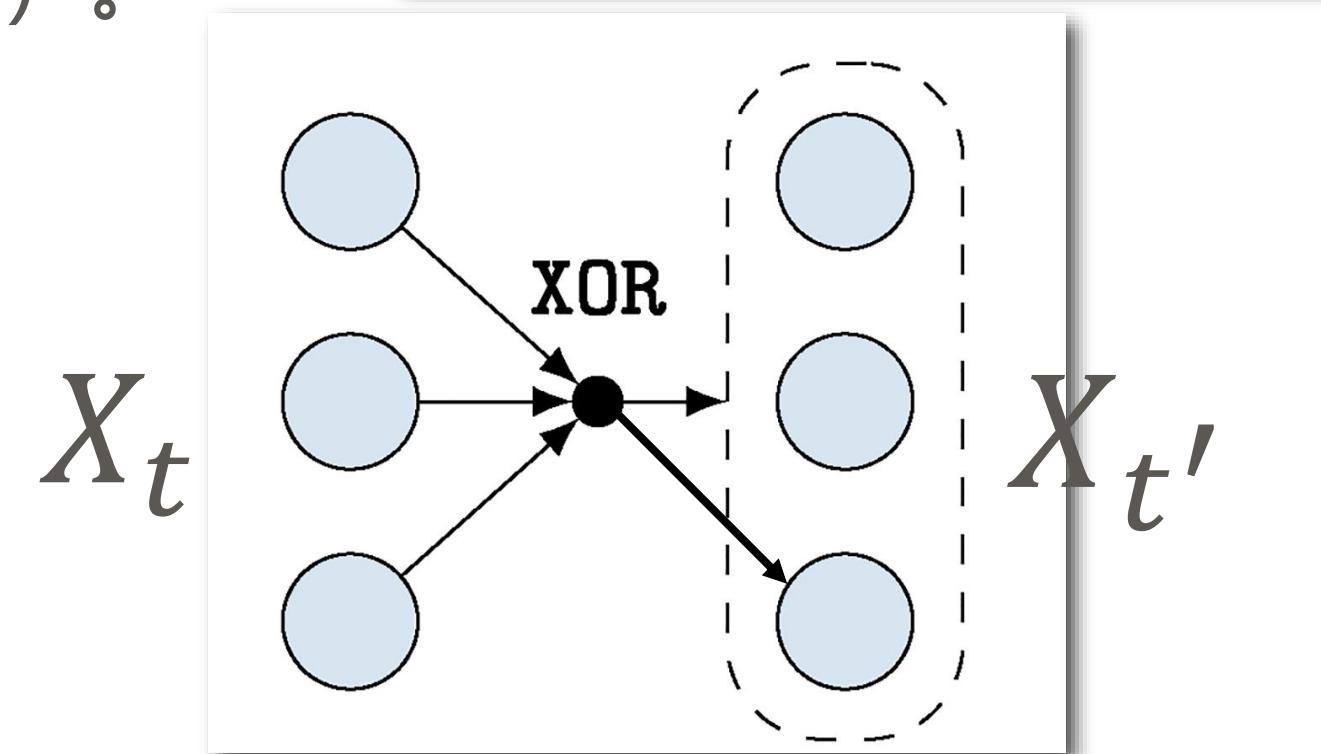
实验复现

例3 规则：

X_{t+1}^1 与上一时刻整体奇偶性相同；

且有 γ 的概率，上下时刻整体奇偶性相同；
其余硬币随机（比如，正面=0，反面=1）。

$$p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1} | x_t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{t+1}^1 \neq \oplus_{j=1}^n x_t^j \\ \frac{\gamma}{2^{n-1}} & \text{if } x_{t+1}^1 = \oplus_{j=1}^n x_t^j \text{ and } \oplus_{j=1}^n x_{t+1}^j = \oplus_{j=1}^n x_t^j \\ \frac{1-\gamma}{2^{n-1}} & \text{otherwise} \end{cases}$$



delta	0.2825
gamma	1.0000
psi	0.1646
t	100000
T	100000
V	100000x1 logi...
X	100000x2 dou...

```

T = 100000;
X = zeros([T, 2]);
for t=2:T
    X(t, 1) = xor(X(t-1, 1), X(t-1, 2));
    X(t, 2) = rem(X(t, 1) - rem(X(t-1, 1) + X(t-1, 2), 2) + (rand < 0.95), 2);
end

```

```

V = xor(X(:, 1), X(:, 2));
psi = EmergencePsi(X, V);
delta = EmergenceDelta(X, V);
gamma = EmergenceGamma(X, V);

```

结果：

$\Psi > 0$ 存在因果涌现

$\Delta > 0$ 有向下因果

$\Gamma \neq 0$ 无法确认因果解耦

实验复现

$$\Psi_{t,t'}(V) \quad \Delta_{t,t'}(V) \quad \Gamma_{t,t'}(V)$$

案例	T	Y	普赛	德塔	伽马
3	1000	0.95	0.171	0.272	1.000
3	1000	0.95	0.161	0.289	1.000
3	1000	0.95	0.148	0.233	1.000
3	1000	0.95	0.169	0.278	1.000
3	100000	0.95	0.165	0.284	1.000
3	100000	0.95	0.167	0.289	1.000
3	100000	0.95	0.167	0.286	1.000
3	100000	0.95	0.165	0.282	1.000

审稿人：一个关于因果解耦的一般性问题。...我想知道这是否会发生在物理相互作用中...直观地说，如果我考虑奇偶校验情况的物理实现，我认为我们需要一个额外的物理元素来直接存储当前状态的奇偶校验。如果确实需要，则该过程本身依赖于诸如幽灵之类的东西（即不存在，但用于计算）。换句话说，我的意思是解耦只存在于数学中，而不存在于物理学中...即在真实/模拟情况下可能很难找到解耦的示例。

作者：确实，奇偶情况的动力学...确实可以给人一种物理系统无法实现因果解耦的印象。幸运的是，情况并非如此，正如我们在生命游戏中的结果所示。具体来说，...我们的结果表明粒子表现出涌现动力学。

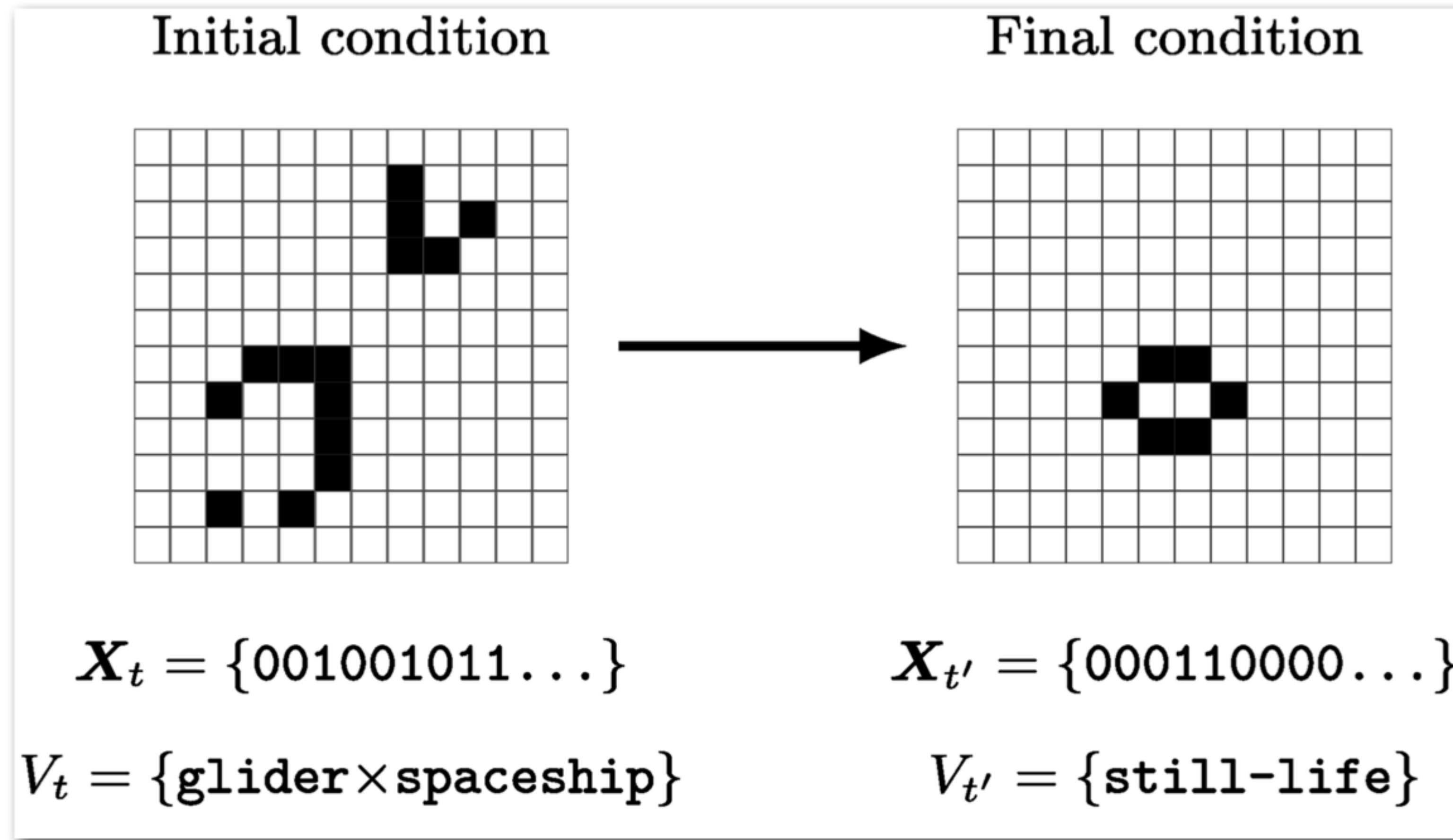
我们的修订稿包括以下关于这个问题的澄清性评论：“**重要的是，第IV节中提出的案例研究（生命游戏）表明，因果解耦不仅可以发生在简单模型中，还可以发生在不同的，实际相关场景的复杂模型中。**”

精简：

审稿人：因果解耦在真实世界很难找到，比如例1 的数学模型在现实中不存在，如何解释？

作者：例1 的数学模型确实不存在，但我们能找到符合因果解耦的现实例子，比如生命游戏。

Application: Conway's life game



15x15格的康威生命游戏。

论文的结果公布：

$$\Psi_{t,t'}(V) = 0.58 \pm 0.02$$

$$\Gamma_{t,t'}(V) = 0.009 \pm 0.0002$$

$$I(V_t; V_{t'}) = 0.99 \pm 0.02$$

结果：

$\Psi > 0$ 存在因果涌现

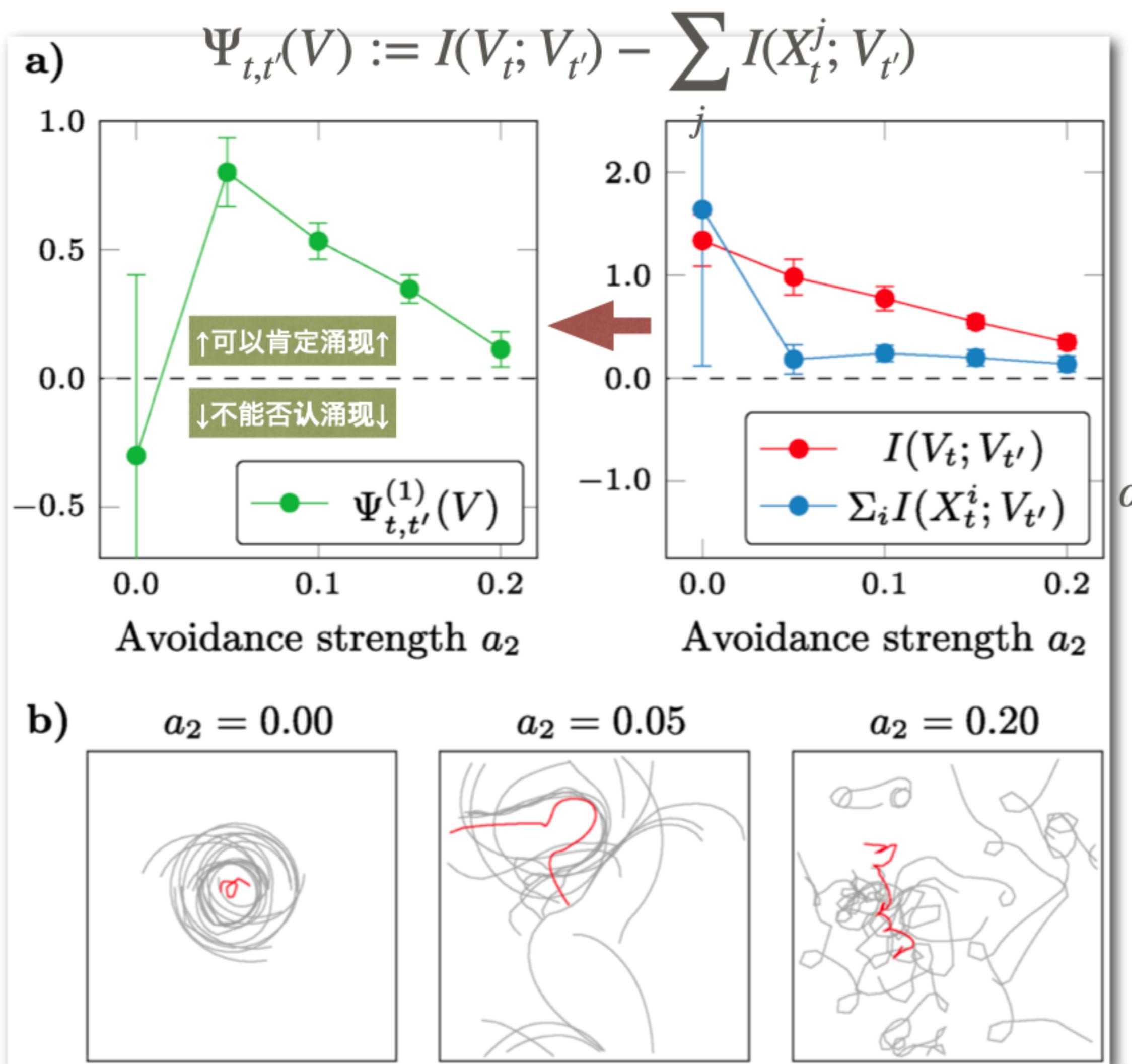
Δ 作者没提

$\Gamma = 0$ 有因果解耦

作者附录里5.Simulation details里的坦诚：
左侧用某些特定形状的随机排布为初始，演化1000步后，大多数的结果会稳定于某些静态形状。

当我们尝试复现生命游戏的因果计算时。。。。

Application: Reynolds' flocking mode



鸟群飞行规则的参数：

- 聚集 (α_1)：向鸟群中心聚集的效应强弱；
- 回避 (α_2)：避开最近邻居，以免碰撞；
- 对齐 (α_3)：与邻居们的飞行方向尽量一致。

结果（不单纯，固定 α_1 和 α_3 ，看 α_2 ）：

- α_2 太小或太大，都难识别涌现。
- 上述难识别涌现的原因不同：
 α_2 较小时，质心的自我可预测性即 $I(V_t; V_{t'})$ 大，但低于 $\sum_j I(X_t^j; V_{t'})$ ；而 α_2 较大时， $I(V_t; V_{t'})$ 较小
- $\alpha_2 = 0.00$ ，有 $\Psi < 0$ ，即不能否认涌现
- 低回避情景不是由协同作用的减少，而是由冗余（互信息的互信息）的增加所主导，这有效地增加了检测涌现所需的协同作用阈值。

“dit” python calculation pkg for Shannon-like measures

The screenshot shows the homepage of the dit Python package. It features a dark sidebar on the left with various links such as General Information, Optional Dependencies, Notation, Distributions, Operations, Finding Examples, Optimization, Information Measures, Information Profiles, Rate Distortion Theory, Information Bottleneck, APIs, Partial Information Decomposition, and References. The main content area has a blue header "General Information". Below it are sections for Documentation (link to http://docs.dit.io), Downloads (links to PyPI and Anaconda), and Dependencies. A red arrow points from the "General Information" header in the main content area to the "General Information" link in the sidebar.

General Information

Documentation:

<http://docs.dit.io>

Downloads:

<https://pypi.org/project/dit/>

<https://anaconda.org/conda-forge/dit>

Dependencies:

支持环境

- Python 2.7, 3.3, 3.4, 3.5, or 3.6
- [boltons](#)
- [contextlib2](#)
- [debtcollector](#)
- [networkx](#)
- [numpy](#)
- [prettytable](#)
- [scipy](#)
- [six](#)

Information Measures

dit supports many information measures, ranging from as standard as the Shannon entropy to as exotic as Gács-Körner common information (with even more esoteric measure coming soon!). We organize these quantities into the following groups.

We first have the Shannon-like measures. These quantities are based on sums and differences of entropies, conditional entropies, or mutual informations of random variables:

- [Basic Shannon measures](#)
 - [Entropy](#)
 - [Conditional Entropy](#)
 - [Mutual Information](#)
 - [Visualization of Information](#)
- [Multivariate](#)
 - [Total Information](#)
 - [Mutual Informations](#)
 - [Common Informations](#)
 - [Others](#)

(还有很多。 . . .)

亮点：

- 面向专业学术对象
- 说明简明扼要
- 基本是经典方法或精选论文的方法实现

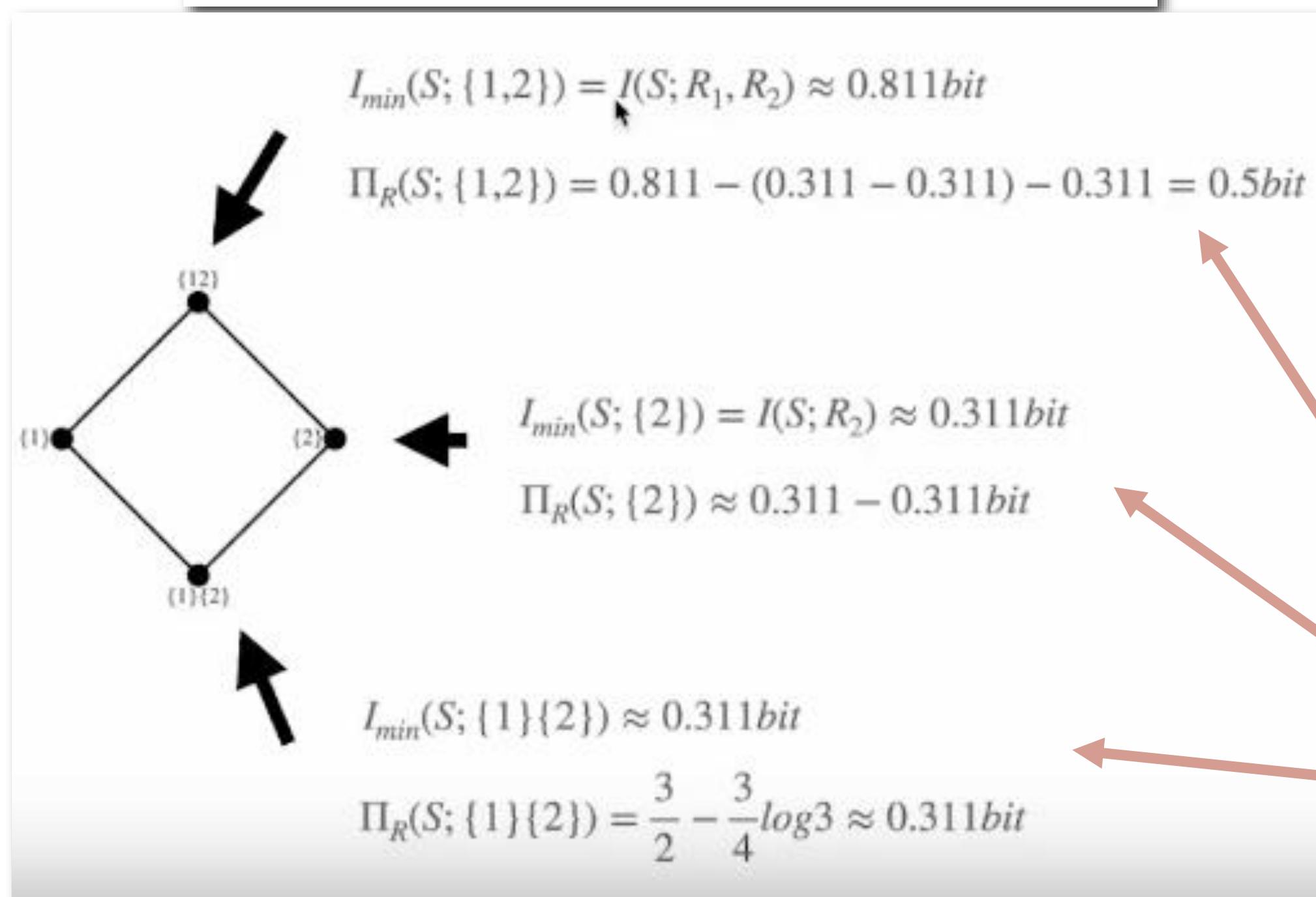
缺点：

- 使用门槛
- 更新少，Python3.x可能有小Bug。

用“dit”对前页PID介绍时张章博士所用例子的验算

- $\Pi_R(S; A_i) = I_{min}(S; A_i) - \sum_{A_j < A_i} \Pi_R(S; A_j)$

R1	R2	S	P
0	0	0	1/4
0	1	0	1/4
1	0	0	1/4
1	1	1	1/4



注意：随源变量个数增加，计算节点指数增加：

n 计算节点

2 4

3 18

4 166 (一般的忍受的极限)

• • • • •

: !pip install dit

```

import dit
from dit.pid import *

d = dit.Distribution(['000', '010', '100', '111'], [1/4]*4)
print(PID_WB(d))

```

I_min	I_r	pi
{0:1}	0.8113	0.5000
{0}	0.3113	0.0000
{1}	0.3113	0.0000
{0}{1}	0.3113	0.3113

一致的结果！

品题：因果涌现，当下的应用场景

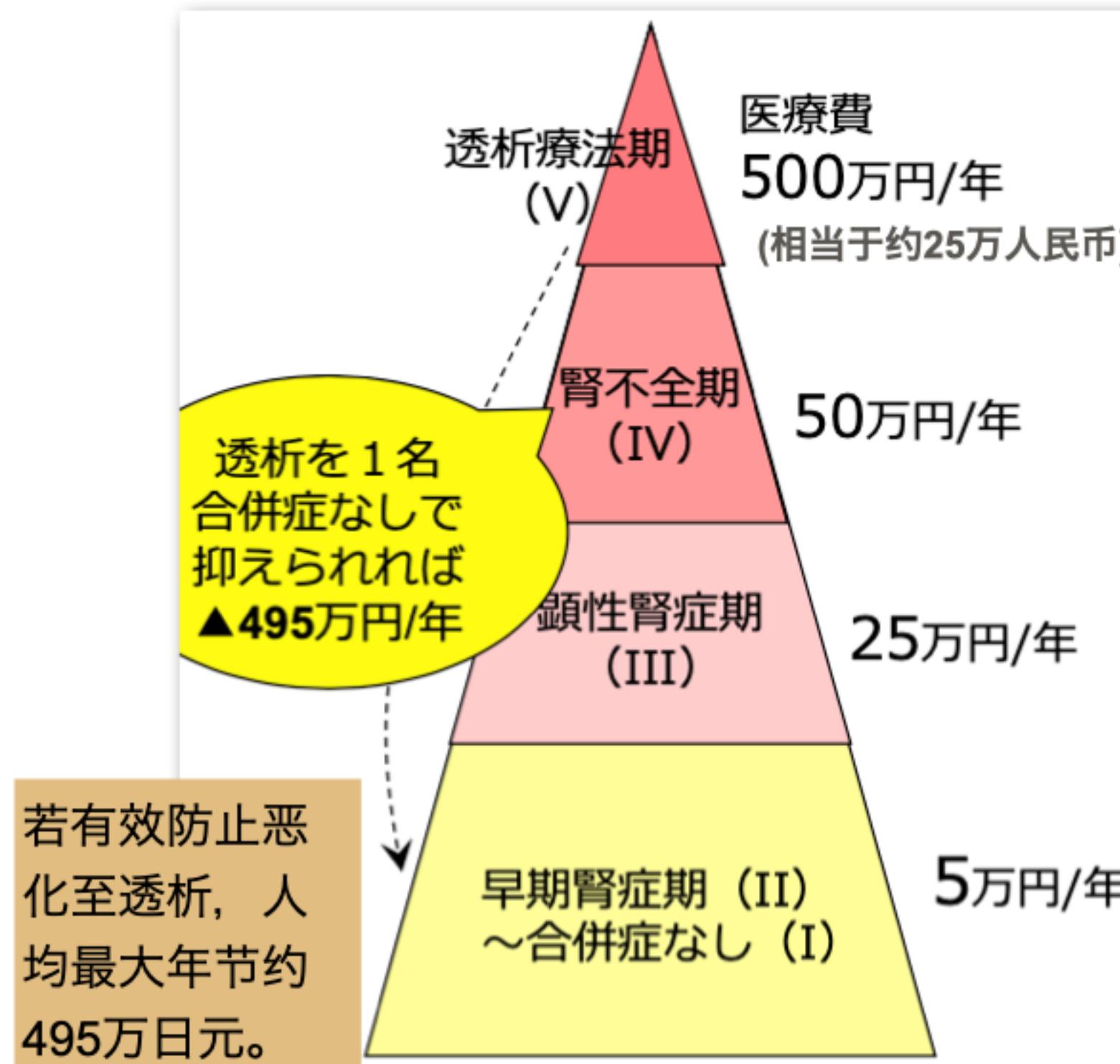
应用场景（案）：健康大数据驱动下的量化因果探索

个人层面：个人健康数据（来自于健诊或穿戴设备）→ 个人健康预报（何时？何种概率？何种健康风险）

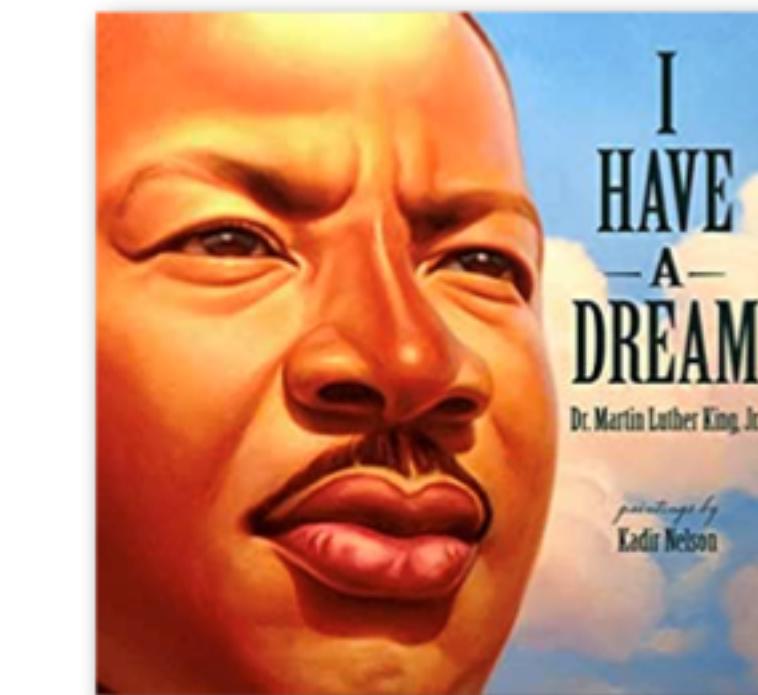
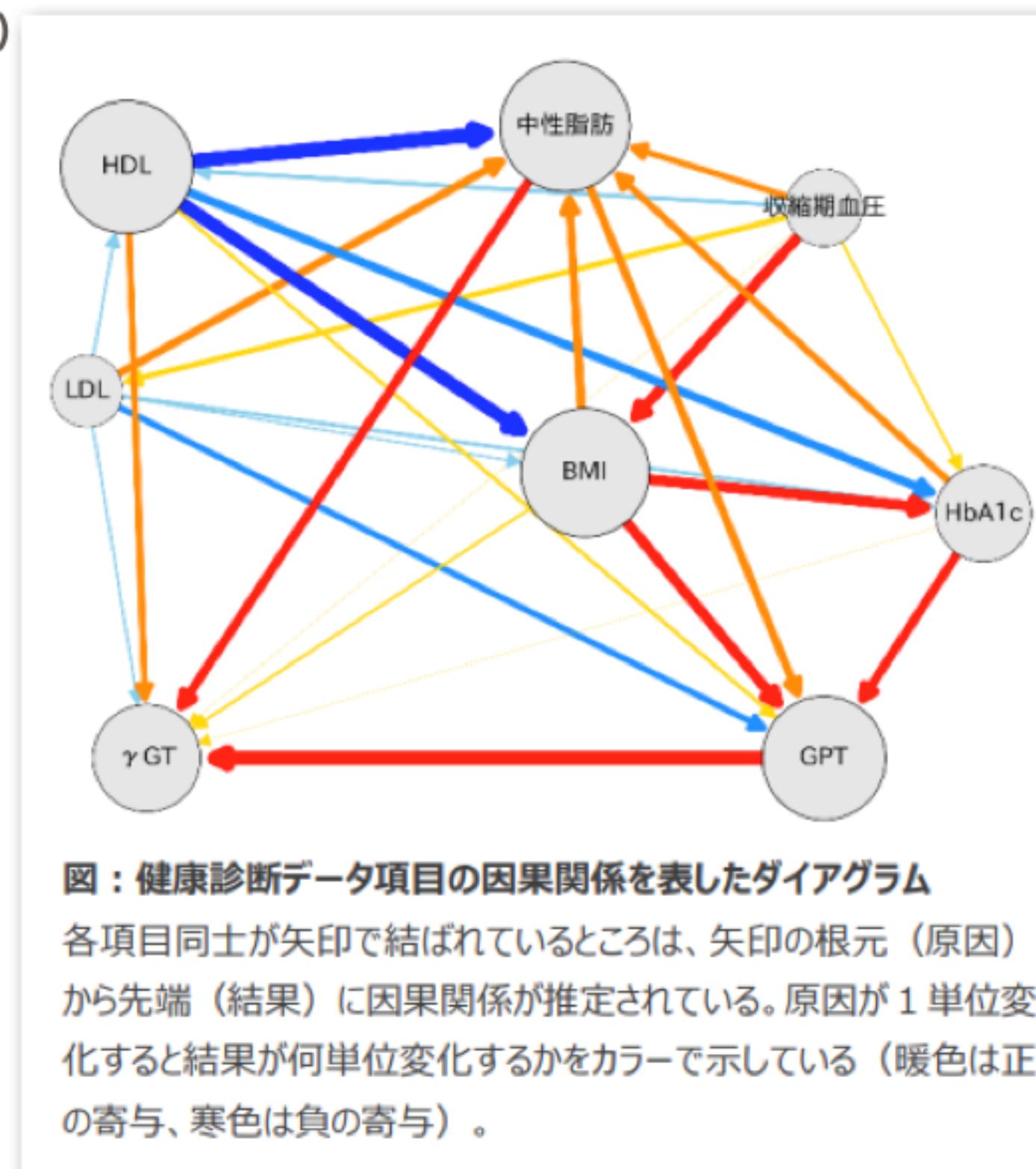
社会层面：健康大数据 → 延缓重症化（例1），减低患者及社会负担；精准预防（例2），生活习惯病等

例1：“糖尿病性肾病的重症化减少”，重大国家级医疗保健研究项目（2015-2017）。日本厚劳省2017年专题报告（[PDF](#)）。

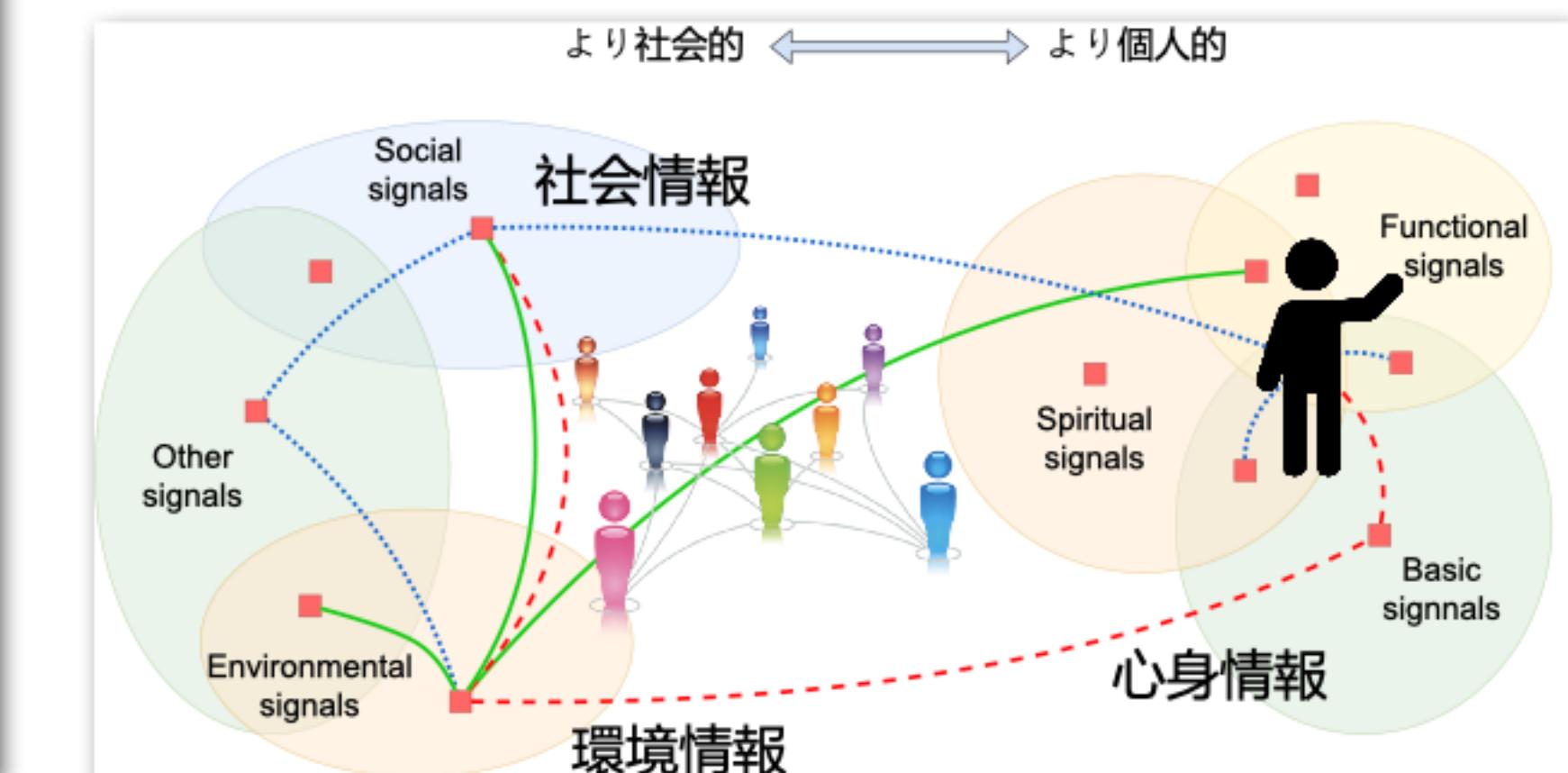
注：现在日本透析医疗年国家负担相当于800亿人民币（约32万透析患者）



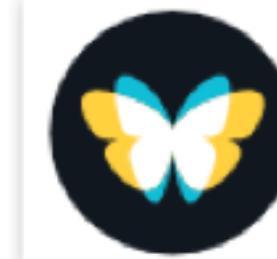
例2：大阪60万市民健诊大数据生成生活习惯病因图。大阪大学，帝京大学联合研究课题（2020）相关论文在PLOS One发表（[URL](#)）。



- “个人健康预报”
- “保健数据的AI自动分析”



因果应用的推广，离不开因果基础理论的发展



TEMPLETON WORLD
CHARITY FOUNDATION

Integrated Information as Maximally Irreducible Causation

“信息学与因果研究，这2大研究领域，正在融合。”

By Tononi



Giulio Tononi
1960年 -

INTEGRATED INFORMATION THEORY Φ

Director: Professor Giulio Tononi

Institution: University of Wisconsin-Madison

TWCF Number:

0067

Project Duration:

November 1, 2013 -
October 31, 2016

Core Funding Area:

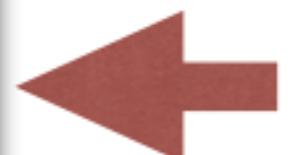
Big Questions

Region:

North America

Amount Awarded:

\$895,449



总结

- **因果涌现的定义和定量**

发现了系统承载涌现特征的能力，由其元素在未来演化中的协同程度决定。本文最重要的贡献在于，使关于涌现的讨论更接近于定量的实证科学的研究。

- **表明一个“弱”框架可以有多“强”**

本文框架包含通常与强涌现相关的方面（例如向下因果）且使它们量化。“本文框架不符合弱涌现的传统定义（例如Bedau意义上的弱涌现），但与更普遍的弱涌现概念兼容（例如Seth提出的概念），是调和这些方法的一种尝试。”

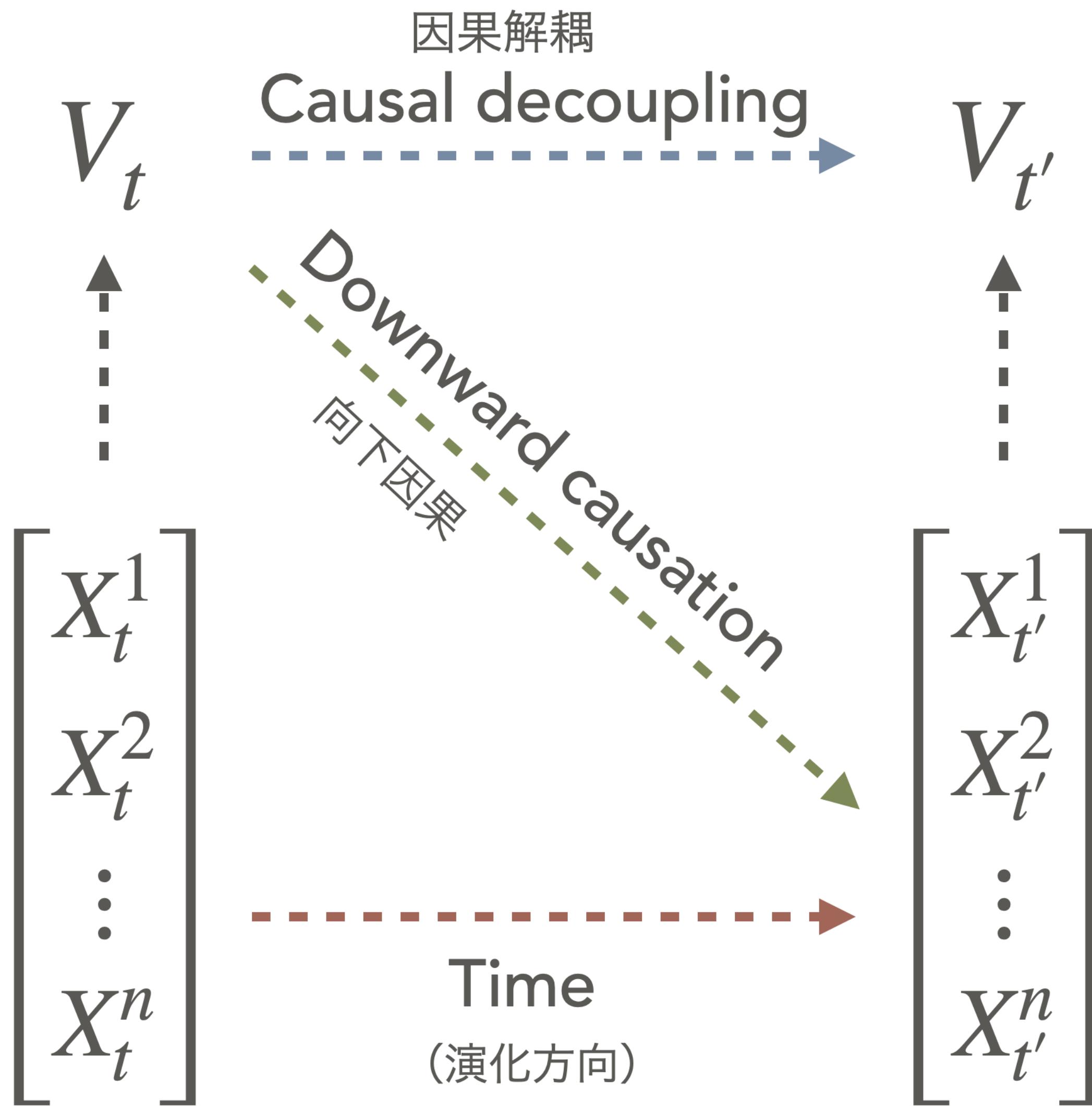
- **涌现的充分而非必要条件**

“一个有趣的特点”：尽管它取决于PID和ΦID的选择，但它的实际应用结果却显示与这些选择无关。“然而，由于对微观冗余的高估，它们导致的代价是检测涌现的灵敏度有限。

- 本论文的局限性：“本文提出的框架主要关注具有马尔可夫动力的完全可观察系统的特征。然而，这些假设在处理实验数据——特别是生物和社会系统中的实验数据时往往不成立。作为一个重要扩展，未来的工作应该研究未观测变量对我们的度量的影响。”

跑题：为更深入理解因果涌现，我们还有一些问题

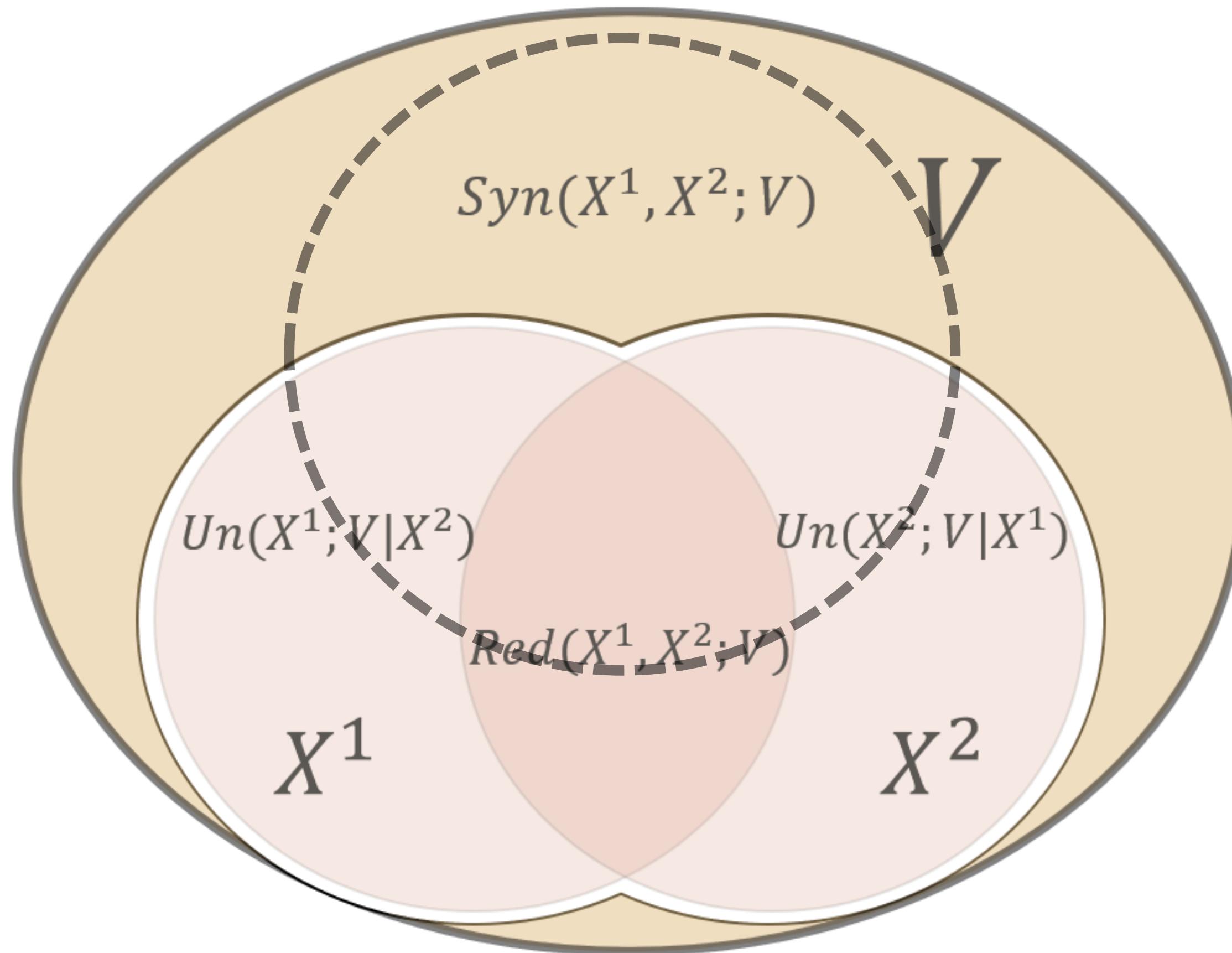
问题



非马尔可夫条件下（红线互信息为0时），
根据因果涌现及因果解耦的定义，两者互信息取值为零，
那么此时的涌现如何度量？

相比于系统两时刻间关系的定量（蓝绿红线），
粗粒化函数（微观到宏观的黑线）如何定量？

问题



理想的宏观态（随附特征 V ）真的与 x 不相交吗？

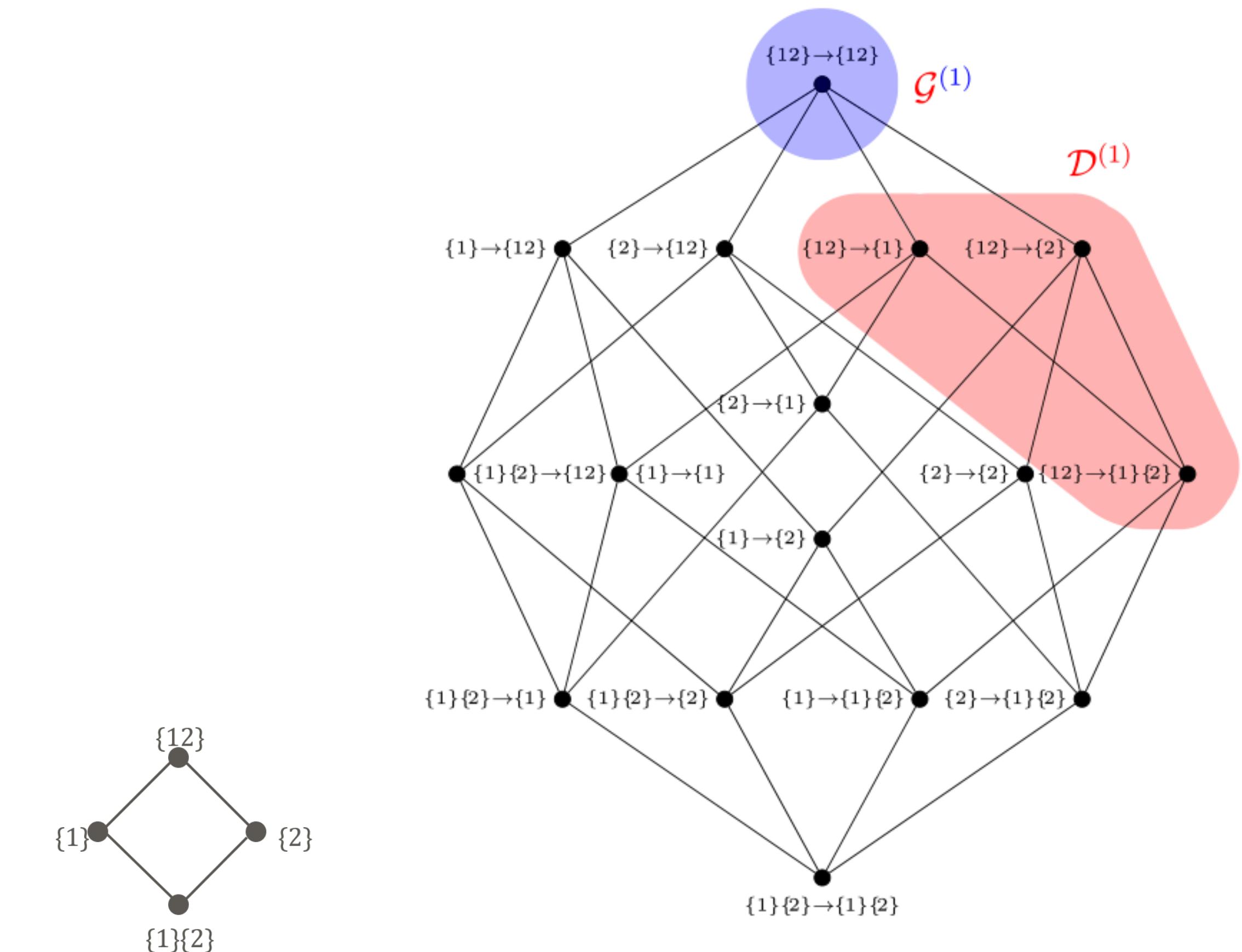
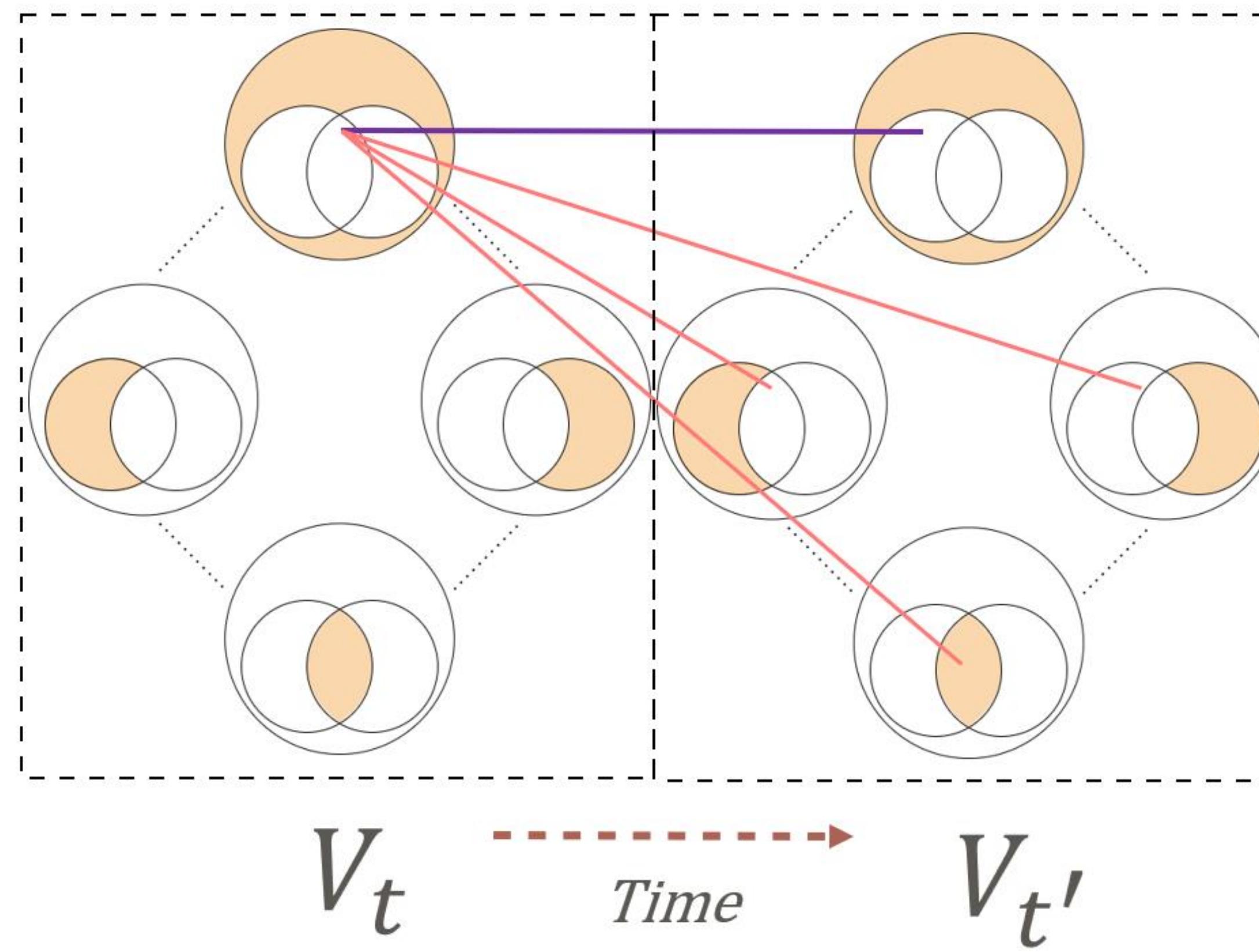
Syn最大是多少？

问题

不同时刻宏观态间的相互预测是因果解耦吗？

如果不是

因果解耦的现实意义是什么？



问题

$$\Psi_{t,t'}(V) : \quad \Delta_{t,t'}(V) : \quad \Gamma_{t,t'}(V) :$$

除了系统满足马尔可夫条件外，

当 $\Psi > 0$ 时， V 可称之为涌现；

这三个指标的应用还需要什么条件？

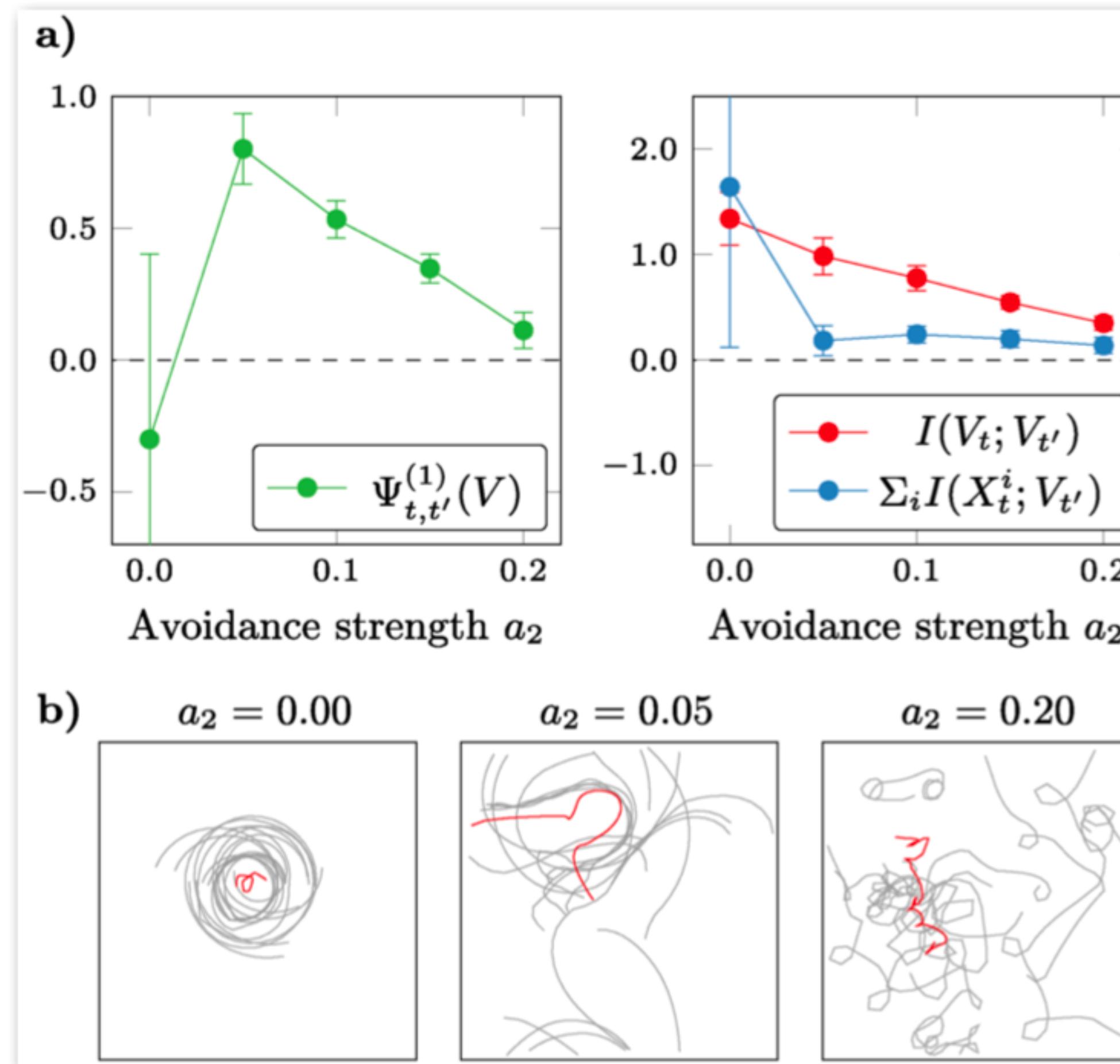
当 $\Delta > 0$ 时， V 呈向下因果(Downward causation)；

当 $\Psi > 0$ and $\Gamma = 0$ 时， V 呈因果解耦(Causal decoupling)。

当这些条件满足时，有更好的方法吗？

问题

问： $\alpha_2 = 0.00$ 是涌现吗？



说明：

作者论文中， $\alpha_2 = 0.00$ 时，计算得 $\Psi < 0$ ，结论是“不能否认涌现”，而非“肯定涌现”。看图，这个涌现是很明显的，为什么作者做这么一个弱结论呢？

问题

问：宏观态的随附特征 V 是主观的，还是客观的？

我们斗胆先答，抛砖引玉：

类似于光的波粒二象性，随附特征既是主观的，也是客观的。更准确点说，它是**对客观存在的主观认知**。这个灵魂追问，实际上，直指另一个更深的问题：意识（精神）和物理基础（物质），到底有没有关系？如果没有，如何证明（限于数理逻辑语言框架的表达）？如果有，那么是哪类关系？何种客观规律在支配？

你的看法呢？

问题

问：能否用量化因果，帮到黎曼猜想？

黎曼猜想的最简表述： ζ 函数的所有非平凡零点的实部都是 $1/2$.

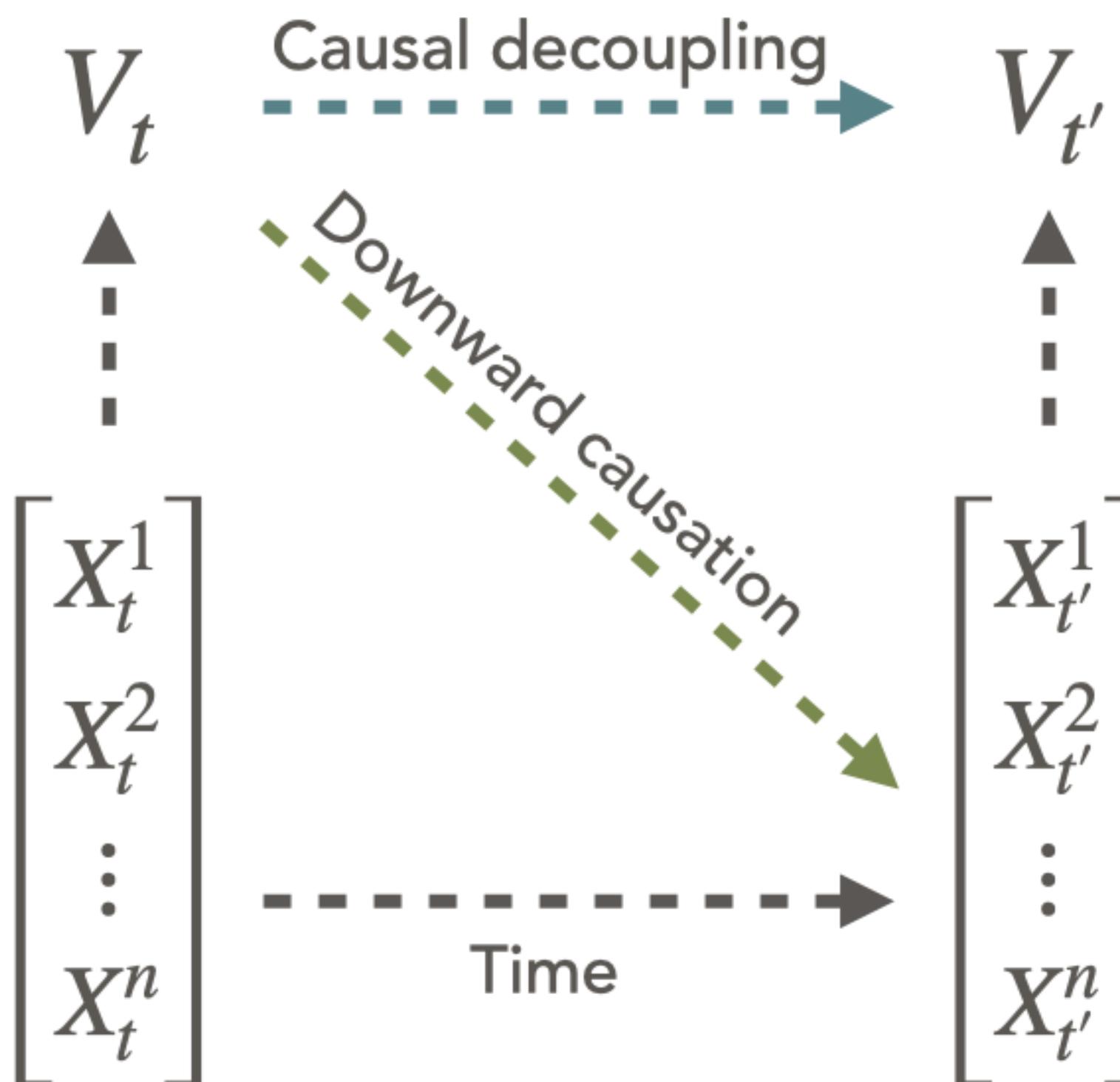
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

对黎曼猜想的猜想：黎曼猜想等价于，随附特征 $V_{t'}$ （实部都是 $1/2$ ）的存在。



Bernhard Riemann
1826-1866

随附特征：
实部都是 $1/2$



随附特征：
实部都是 $1/2$ 吗？

质数相互是不可约的。
黎曼的直觉：质数分布的随附特征

未知的 ζ 函数的
非平凡零点 X

注：仅做开脑洞加深(Ψ, Δ, Γ)印象用，不是学术想法提出。

以上问题的尝试回答与讨论，敬请期待信息分解下半场夜谈

Thank you !



吕奥博(Washington University in St. Louis), 邓 鸥(Waseda University)

帮助：一些基本概念的Cheat sheet

信息熵

还可参考张章博士第二期分享回放12:00-15:00

自信息 $self - I(X)$: 有概率为 P 的随机变量 X , 表达该变量所需要的编码位数

。信息熵 $H(X)$: 该随机变量 X 的所有可能概率的不确定程度的期望

通俗理解: 发生概率越小, 则信息量越大。例: 新闻 $P(\text{人咬狗}) < P(\text{狗咬人}) \rightarrow sI(\text{人咬狗}) > sI(\text{狗咬人}) \rightarrow H(\text{人咬狗}) > H(\text{狗咬人})$

上述概念基于概率 \rightarrow 推广到多变量情形 \rightarrow 联合概率和条件概率, 衍生出联合熵 $H(X, Y)$, 条件熵 $H(X|Y)$ 。

具体而言: 联合熵 $H(X, Y) = -E\log P(X, Y)$, 条件熵 $H(X|Y) = -E\log P(X|Y)$

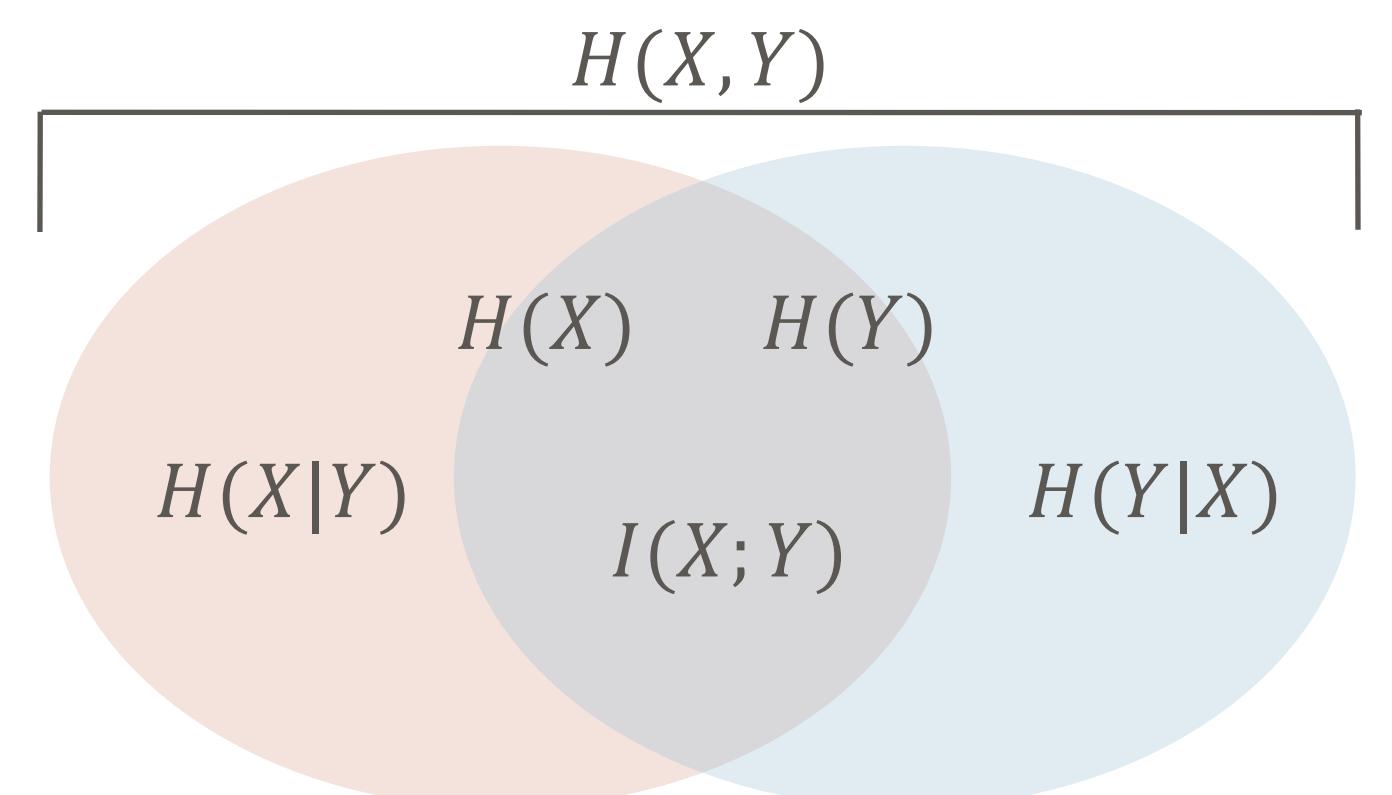
再衍生出互信息(Mutual information): 有2个相等地位的随机变量, 对它们之间随附程度的度量。

通俗理解: 一个变量能多少地减少另一个变量的不确定性。

和熵的关系: $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$

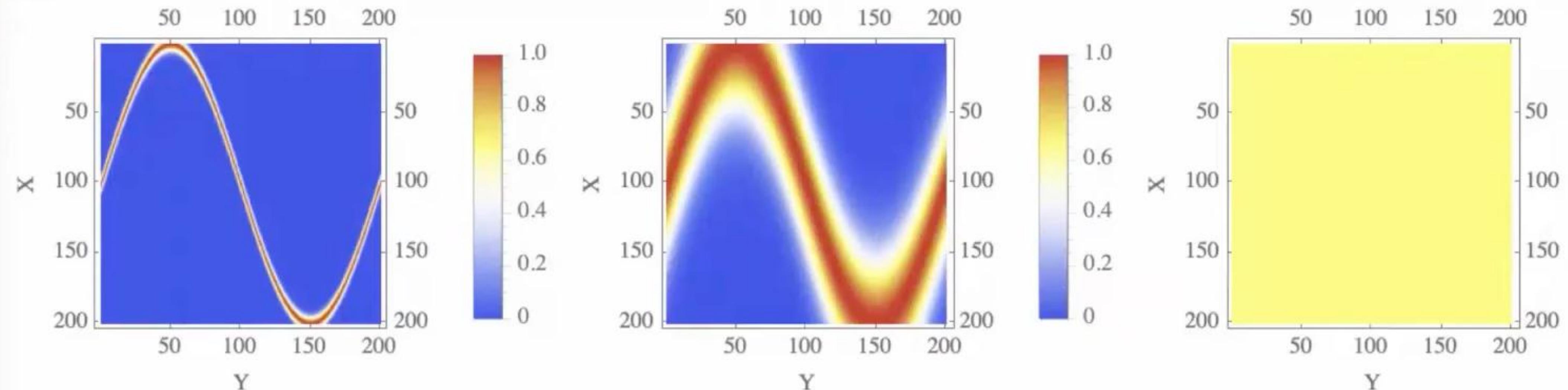
互信息有以下性质:

- (1) 对称性: $I(X; Y) = I(Y; X)$, 说明: 相互影响是对称的。
- (2) 非负性: $I(X; Y) \geq 0$ 说明: 相互独立时, 影响为0.
- (3) 极值性: $I(X; Y) \leq H(X) \text{ and } I(Y; X) \leq H(Y)$



- 两个随机变量的关联程度：相较于独立分布多出来的信息

$$I(X;Y) = D_{\text{KL}}(P_{(X,Y)} \parallel P_X \otimes P_Y)$$



从左到右，互信息逐渐降低

(小花絮：关于符号里的：和；)

PID

Redundant Lattice

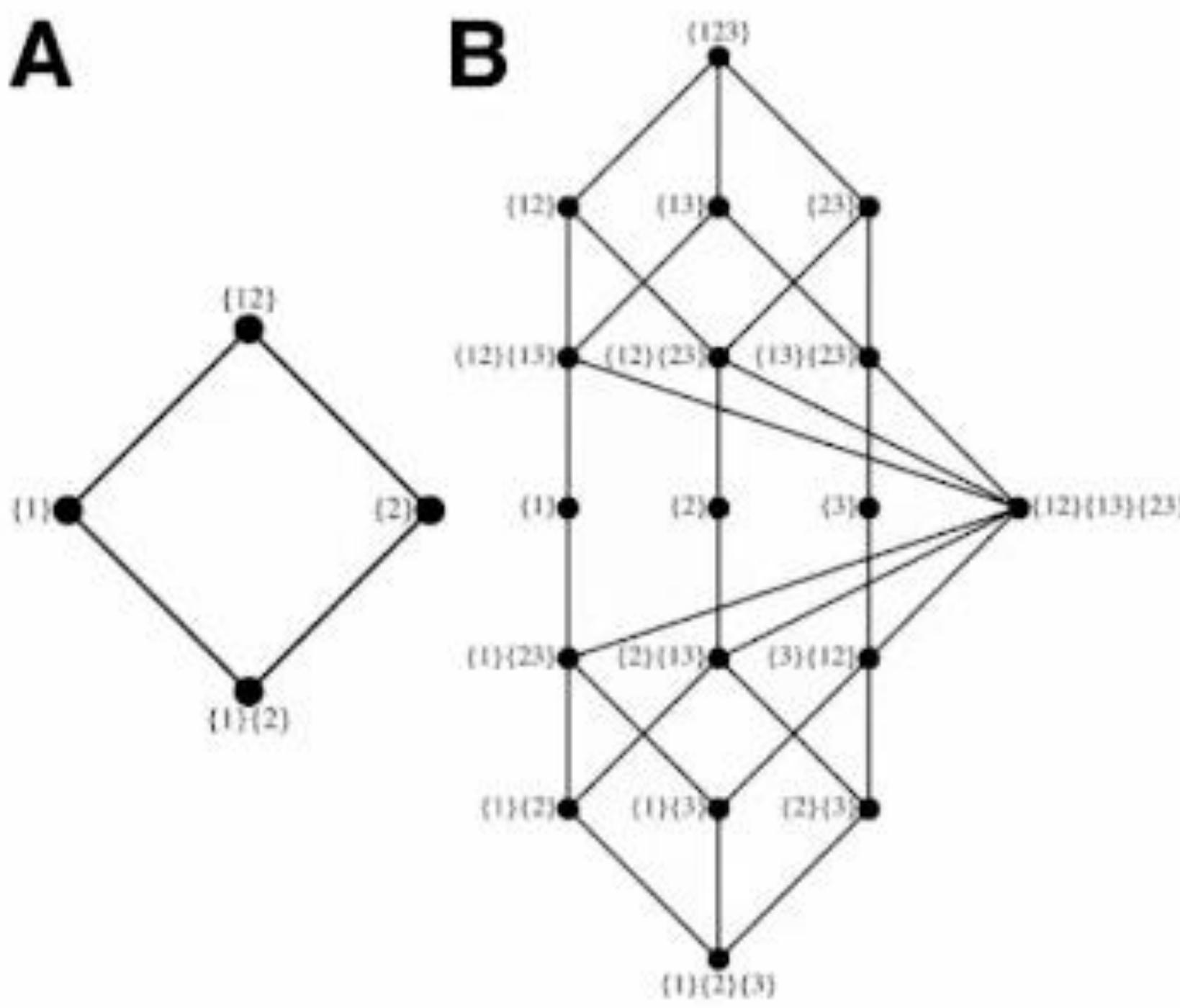


FIG. 2. Redundancy lattice for (A) 3 and (B) 4 variables.

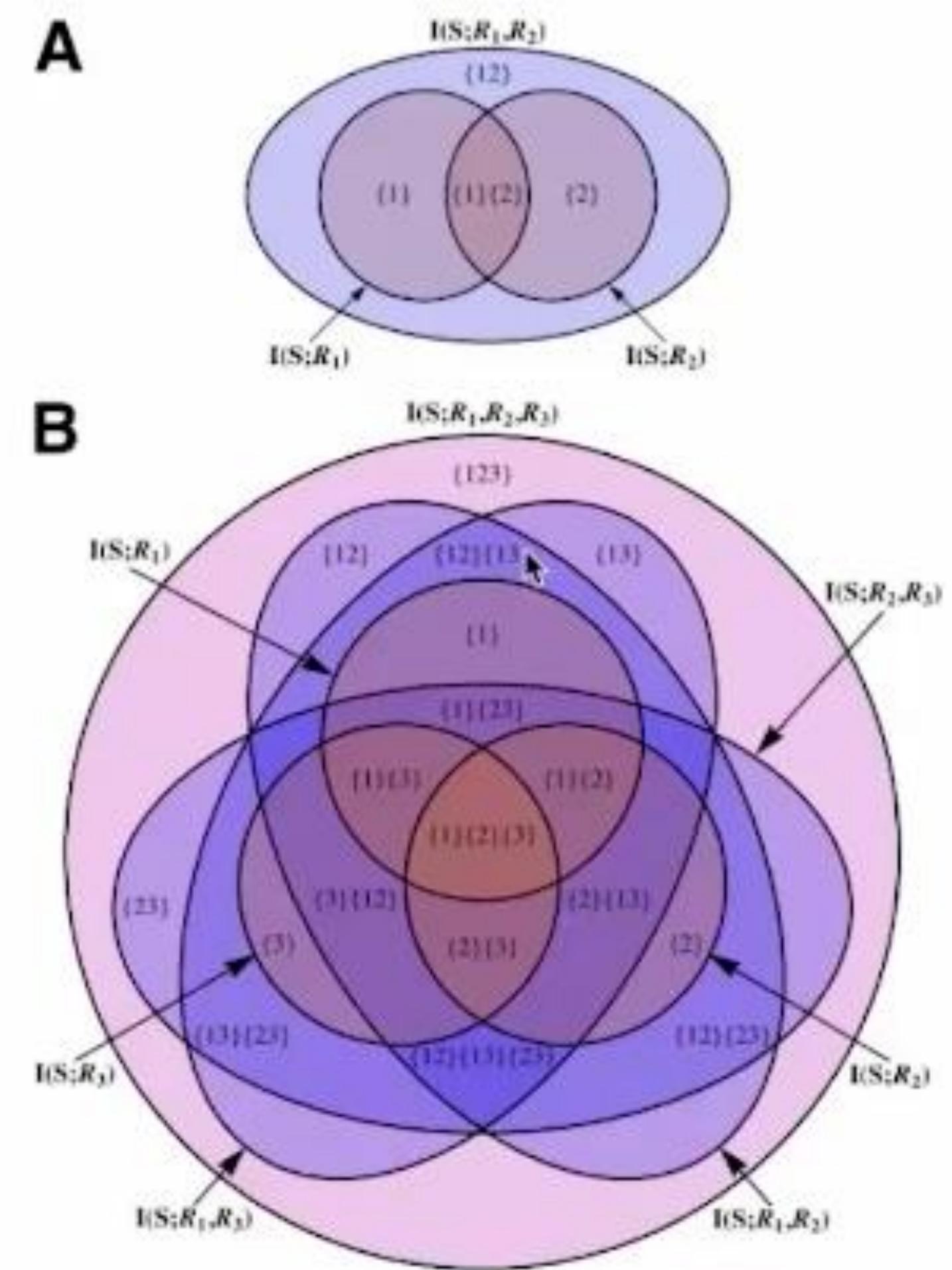


FIG. 3. Partial information diagrams for (A) 3 and (B) 4 variables.



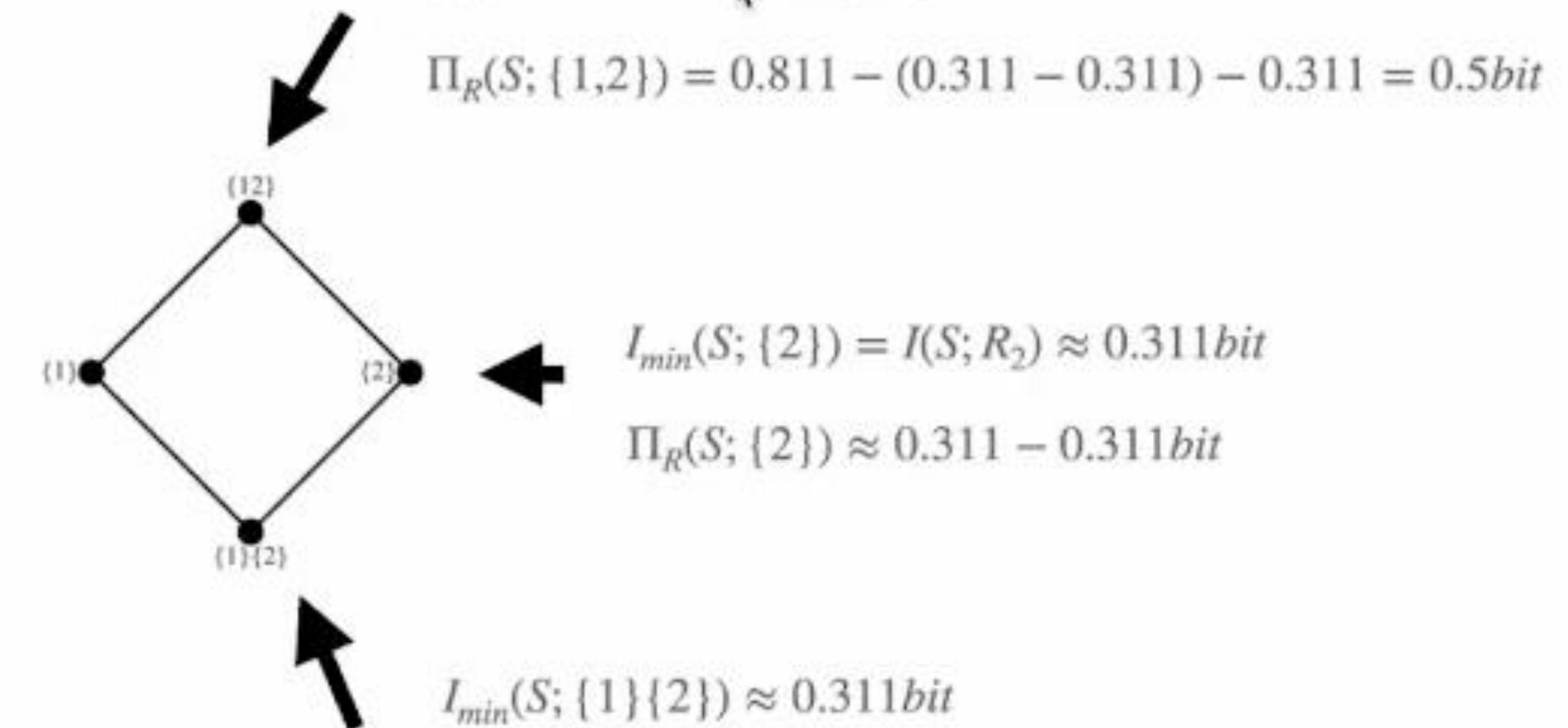
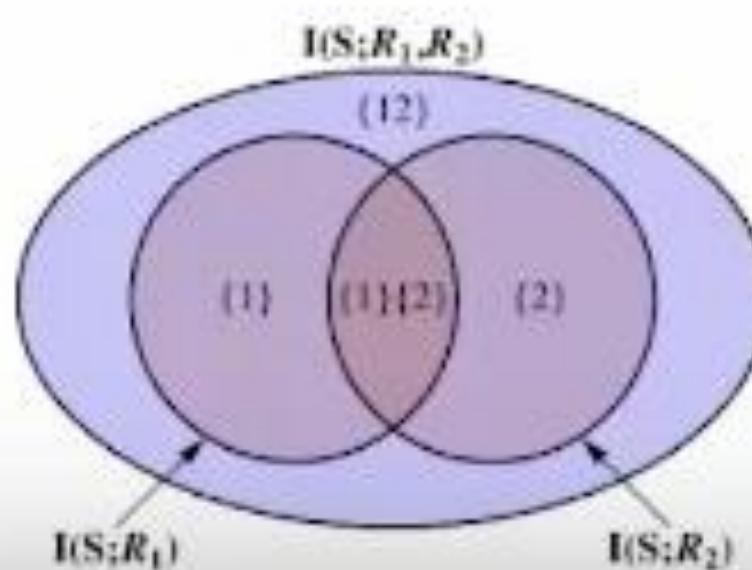


Partial Decomposition of Redundant Information

- Redundant lattice is like a cumulative information function
- we derive an inverse of I_{min} called the partial information function (PI-function).

$$\Pi_R(S; A_i) = I_{min}(S; A_i) - \sum_{A_j < A_i} \Pi_R(S; A_j)$$

R1	R2	S	P
0	0	0	1/4
0	1	0	1/4
1	0	0	1/4
1	1	1	1/4



$$\Pi_R(S; \{1\}\{2\}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \log 3 \approx 0.311bit$$

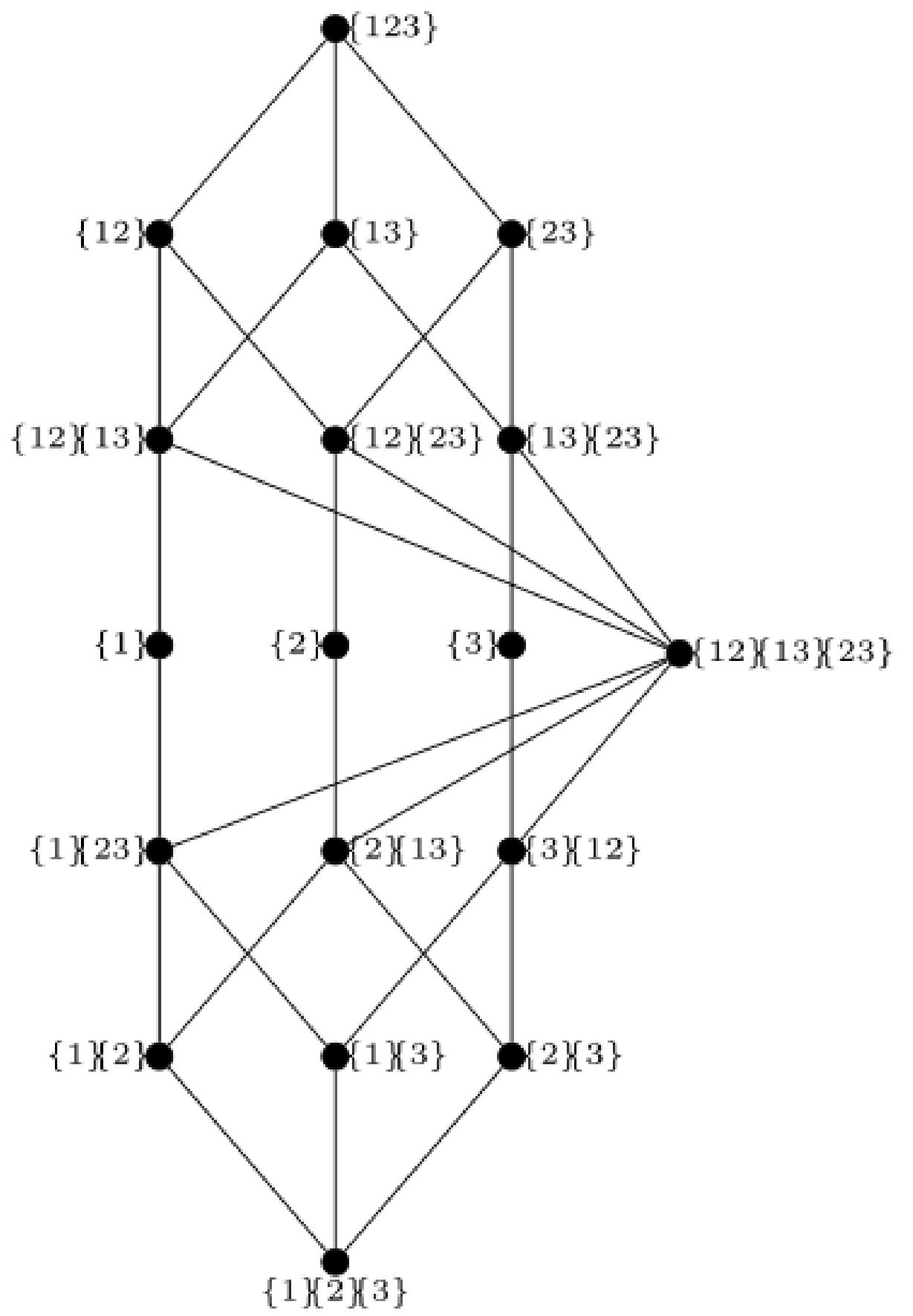
审稿人：对于实际应用，作者专注于 $k = 1$ 的情况。我知道这是一个务实的选择，但我想知道如果我们考虑 $k > 1$ 个案例，结果可能会有什么不同。我们是否需要更精确地考虑它们，或者有什么我们可能会错过和谨慎的事情？

作者：一般来说， k 的值决定了不同层次的微观相互作用，目标特征可能从中出现或不出现。例如， $k = 1$ 的因果解耦意味着与单个元素解耦，而 $k = 2$ 的解耦意味着与两个元素的所有组合的解耦；因此，满足 $k = 2$ 的因果解耦比 $k = 1$ 更具挑战性。在案例研究中，探索系统仍然表现出的 k 值可能是非常有趣的。然而，更高的 k 值需要在更高维度上估计信息论属性，这可能需要成倍增加的数据。

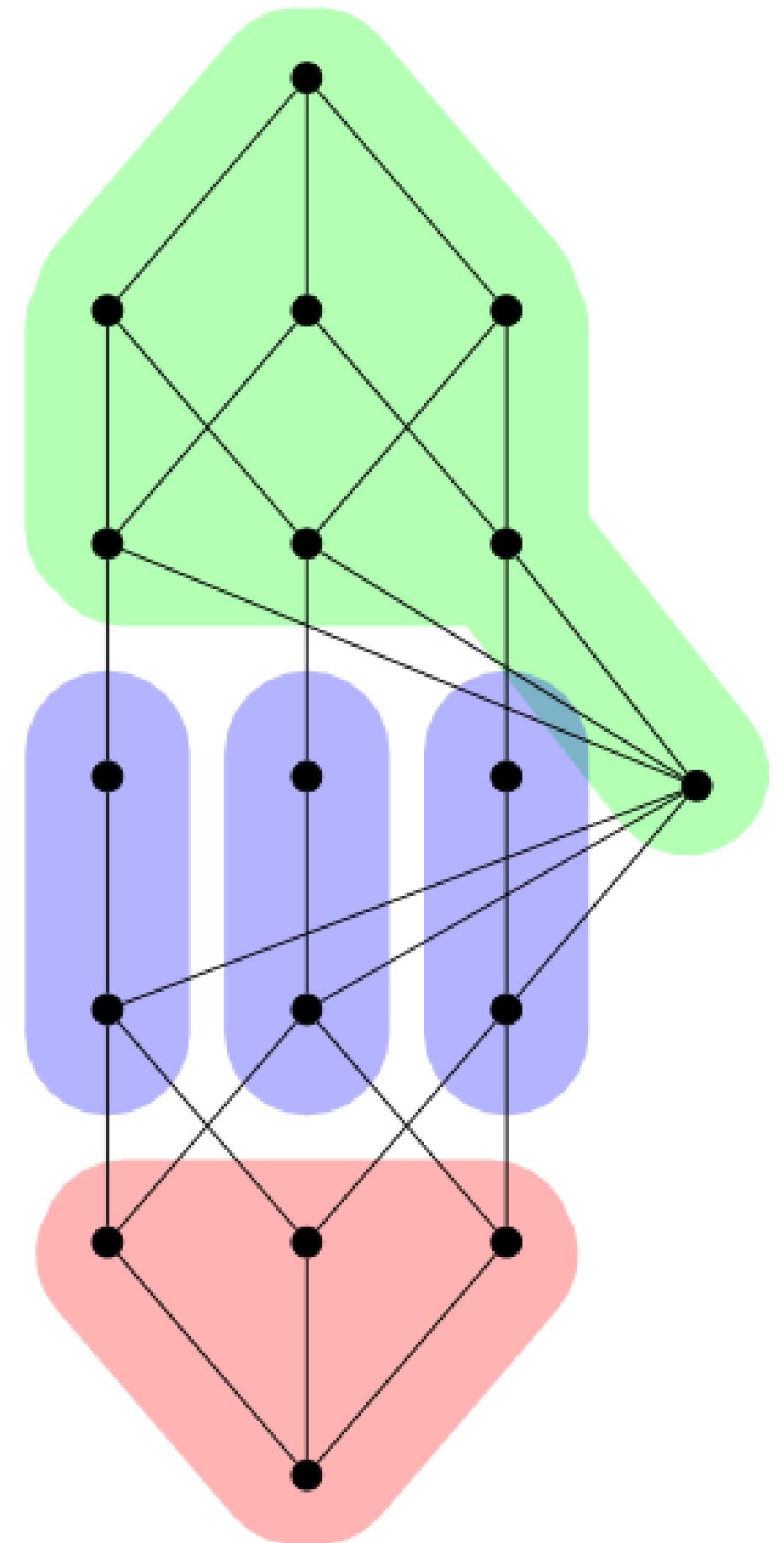
正如审稿人所说，我们决定将本文的应用重点放在更简单的情况 $k = 1$ 上，将 $k > 1$ 的探索留给未来的工作。我们添加了对这些有趣且相关问题的讨论，为方便起见，我们在此引用：

“值得注意的是，可以调整 k 的值以探索不同“尺度”的涌现。例如， $k = 1$ 对应于单个微观元素的出现，而 $k = 2$ 指的是所有耦合的涌现，即单个元素及其成对相互作用。因此，对于较大的 k 值，命题 1 中的标准通常更难满足。此外，从实际角度来看，考虑较大的 k 值需要估计高维分布中的估计信息量，这通常需要指数级的大量数据。”

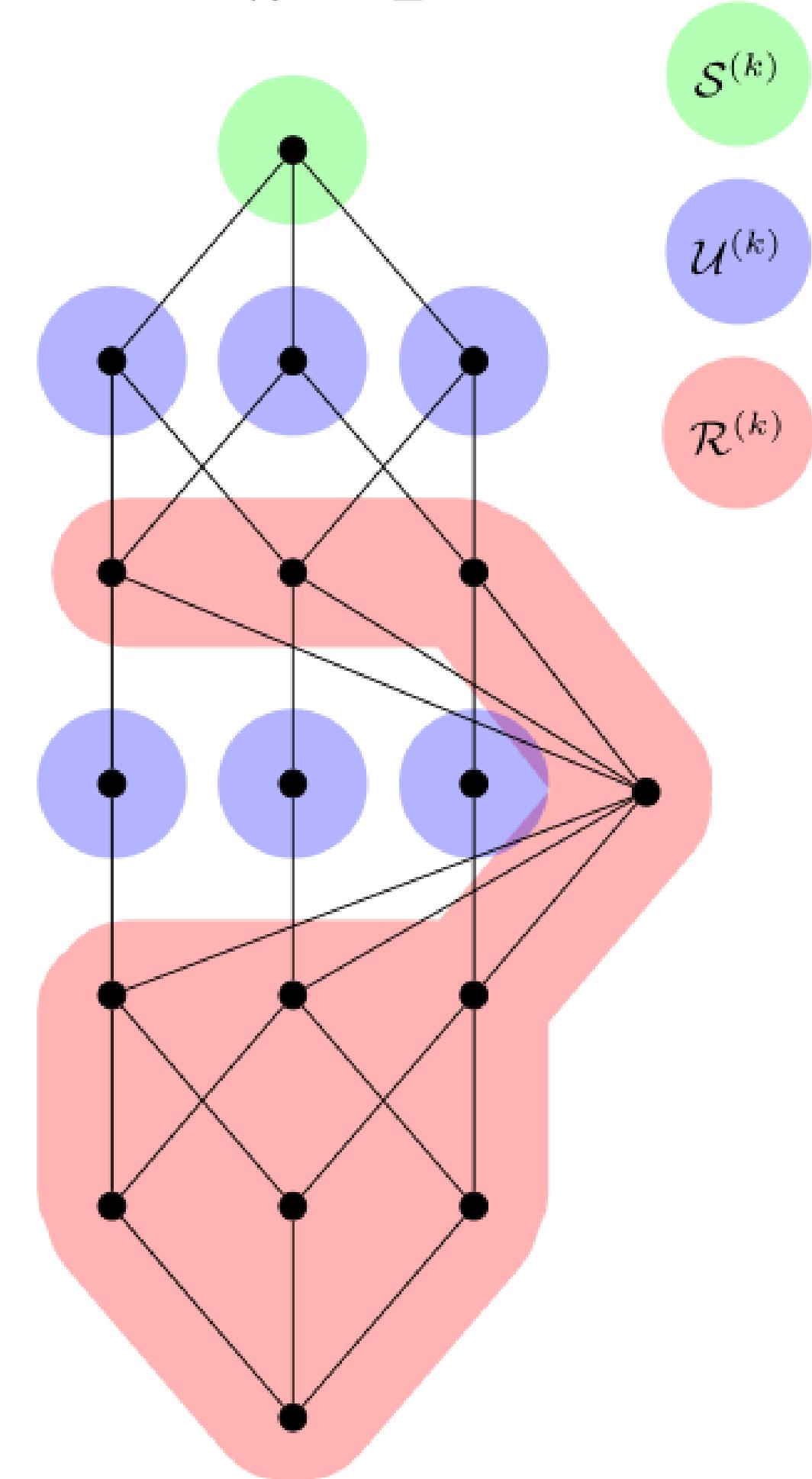
Standard PID



$k = 1$

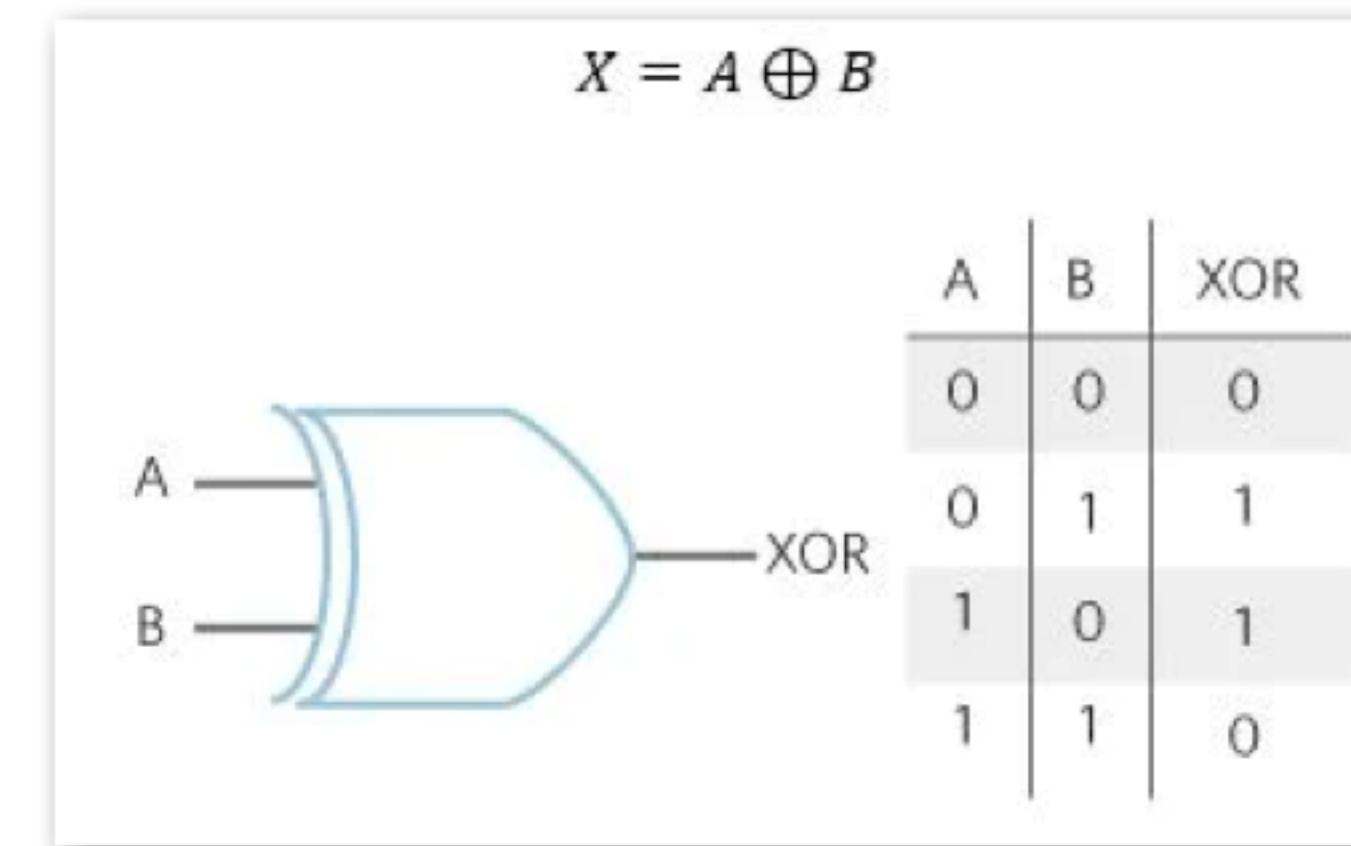


$k = 2$



问题

问：这里的因果分析模式构筑里，为什么有且仅有XOR(\oplus)，而不是其他逻辑门或其他组合？



我们斗胆先答，抛砖引玉：

(1) 逻辑基础。因为XOR具有描述信息的差异的本质，和互信息的“逻辑DNA”一致。(2) 信息交换。XOR元素数值交换理论上不需要内存，可视为系统内元素信息交换不需要引入其他外部变量。既简化模式构件，也方便实操计算。(3) 最重要的，XOR对应着协同信息最大，这在本文的计算中体现明显，也许值得反复品味。

```
A = A^B  
B = A^B  
A = A^B  
  
print(f"A={A}", f"B={B}")  
print(f"{A} XOR {B} = {A^B}")  
print()  
  
A=5 B=6  
5 XOR 6 = 3  
  
A=6 B=5  
6 XOR 5 = 3
```

AB值交换例