*defi

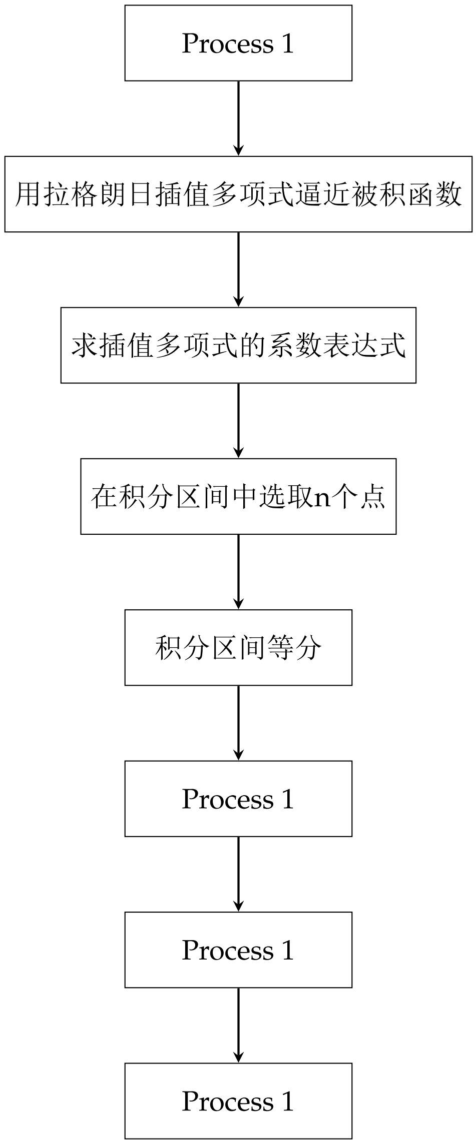
Project-01 数值积分

刘通(Tong LIU)

2017 年 9 月 7 日

目录

第一部分　算法原理



1　用拉格朗日插值多项式来逼近被积函数

已知对于 f 和给定的节点 $\{(x_i, y_i)\}_{i\in[0,n]}$ ，我们通过用这些节点进行插值，以构造一个函数来逼近被积函数 f 。可以通过构造一个 n 次多项式函数来逼近 f。

希望构造一个 n 次多项式函数：

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

让其满足插值条件：$P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$ 。这个多项式函数 P_n 就是 f 的 n 次插值多项式。

对于这 $n+1$ 个给定的节点来说，构成线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

求解这个线性方程组很不方便，尤其当 n 特别大的时候。但是由于其系数矩阵的行列式是范德蒙行列式，由范德蒙行列式的性质可知，其行列式值不为零，故其系数矩阵可逆且解是唯一的。说明该插值多项式是唯一的。

所以可以通过构造插值基函数 l_i 来构造满足 $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$ 的多项式函数。

令

$$\boxed{f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)} \tag{1}$$

其中，插值基函数 l_i 满足

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 0, & i = k \\ 1, & i \neq k \end{cases}$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{2}$$

式(1)即为 n 次插值多项式。

2 构造插值求积公式

对式 (1) 两边积分，以构造求积公式：

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b l_i(x)dx\right] y_i = \sum_{i=0}^{n} A_k y_i} \tag{3}$$

其中，

$$A_k = \int_a^b l_i(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}dx \tag{4}$$

就是插值求积公式的系数。

3 从 $Newton - Cotes$ 积分到 $Gauss$ 积分

由前面的介绍可以看出，插值积分公式最后的求积结果只和积分区间上节点的选取有关，那么如何选取这些节点可以达到最好的效果呢？ 若求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 对于一切不高于

m 次的多项式 P 都取严格等号，即余项为 0；而对于某个 $m+1$ 次多项式等号不成立，则称此求积公式的代数精度为 m。

定理. 设节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$，则求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的代数精度最高为 $2n+1$ 次。

3.1 Newton-Cotes 积分

如果对于上述插值求积公式，在选取 $\{(x_i, y_i)\}_{i\in[0,n]}$ 这 $n+1$ 个点的时候，在区间 $[a,b]$ 上是等分的，就称之为 *Newton-Cotes* 求积公式。

将区间 $[a,b]$ n 等分，取分点 $x_i = a + ih$ $(h = \dfrac{b-a}{n}, i = 0, 1, \cdots, n)$，并且令 $x = a + th$，则对 A_k 的表达式 (3)做变量替换有：

$$A_k = h\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)}{i!(-1)^{n-i}(n-i)!}dt \tag{5}$$

这就是*Newton-Cotes* 求积公式的系数。

截断误差 拉格朗日插值多项式的截断误差为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{6}$$

其中，$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \xi \in [a,b]$。

故*Newton-Cotes* 求积公式的截断误差为：

$$\int_a^b R_n(x)dx = \int_a^b \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx \tag{7}$$

$$= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{n+1}(\xi)\left[\prod_{j=0}^{n}(t-j)\right]dt \tag{8}$$

代数精度 当 n 是奇数时，代数精度是 n。当 n 是偶数时，代数精度是 $n+1$。

3.2 高斯积分

3.2.1 高斯-勒让德求积公式

勒让德多项式的性质

- 构造函数：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{9}$$

- 罗德里格斯表示：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \tag{10}$$

- 递归定义：

$$P_0(x) = 1 \tag{11}$$

$$P_1(x) = x \tag{12}$$

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \tag{13}$$

- 正交性：

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \qquad , \qquad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{14}$$

第二部分　算法构建

Appendices

ooo