Project-01 数值积分

刘通(Tong LIU)

2017 年 9 月 7 日

目录

第一部分 算法原理

1 用拉格朗日插值多项式来逼近被积函数

已知对于 f 和给定的节点 $\{(x_i, y_i)\}_{i\in[0,n]}$ ，我们通过用这些节点进行插值，以构造一个函数来逼近被积函数 f，可以通过构造一个 n 次多项式函数来逼近 f。

希望构造一个 n 次多项式函数：

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n$$

让其满足插值条件：$P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$ ，这个多项式函数 P_n 就是 f 的 n 次插值多项式。

对于这给定的 $n+1$ 个节点来说，构成线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + & \cdots & + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + & \cdots & + a_n x_1^n = y_1 \\ & \cdots & \\ a_0 + a_1 x_n + & \cdots & + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

求解这个线性方程组很不方便，尤其当 n 特别大的时候，但是由于其系数矩阵的行列式是范德蒙行列式，由范德蒙行列式的性质可知，其行列式值不为零，故其系数矩阵可逆且解是唯一的。说明该插值多项式是唯一的。

所以可以通过构造插值基函数 l_i 来构造满足 $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$ 的多项式函数。

令

$$\boxed{f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)} \tag{1}$$

其中，插值基函数 l_i 满足：

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 0, & i = k \\ 1, & i \neq k \end{cases}$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_i}{x_i-x_j} \tag{2}$$

式(1)即为n次插值多项式。

2 构造插值求积公式

对式(1)两边积分，以构造插值求积公式：

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b l_i(x)dx\right] y_i = \sum_{i=0}^n A_k y_i} \tag{3}$$

其中，

$$A_k = \int_a^b l_i(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}dx \tag{4}$$

就是插值求积公式的系数。

3 从 *Newton-Cotes* 积分到 *Gauss* 积分

由前面的介绍可以看出，插值积分公式最后的求积结果只和积分区间上节点的选取有关，那么如何选取这些节点可以达到最好的效果呢？

定义 若求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 对一切不高于 m 次的多项式 P 都取严格等号，即余项为0；而对于某个 $m+1$ 次多项式等号不成立，则称此求积公式的代数精度为 m。

定理 设节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$，则求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

的代数精度最高为 $2n+1$ 次。

3.1 *Newton-Cotes* 积分

如果对于上述求积公式，在选取 $\{(x_i, y_i)\}_{i\in[0,n]}$ 这 $n+1$ 个点的时候，在区间 $[a,b]$ 上是等分的，就称之为 *Newton-Cotes* 求积公式。

将区间 $[a,b]n$ 等分，取分点 $x_i = a+ih(h=\dfrac{b-a}{n}, i=0,1,\cdots,n)$，并且令 $x=a+th$，则对 A_k 的表达式 (4) 做变量替换有：

$$A_k = h\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)}{i!(-1)^{n-i}(n-i)!}dt \tag{5}$$

这就是 *Newton-Cotes* 求积公式的系数。

Newton-Cotes 积分的代数精度为：n，若 n 为奇数；$n+1$，若 n 为偶数。

3.2 *Guass* 积分

为了达到理论最高代数精度 $2n+1$，需要适当选择节点，以此构造出的求积公式称为*Guass*求积公式。

定义 使求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 达到最高代数精度 $2n+1$ 的求积公式称为 Guass 求积公式。

3.2.1 用待定系数法构造 *Guass* 求积公式

3.2.2 用正交多项式构造 *Guass* 求积公式

Guass-Legendre **公式**

Guass-Chebyshev **公式**

Guass-Laguerre **公式**

Guass-Hermite **公式**

第二部分　算法构建