Project-01 数值积分

刘通(Tong LIU)

2017 年 9 月 7 日

目录

第一部分 算法原理

1 用拉格朗日插值多项式来逼近被积函数

已知对于 f 和给定的节点 $\{(x_i, y_i)\}_{i\in[0,n]}$ ，我们通过用这些节点进行插值，以构造一个函数来逼近被积函数 f，可以通过构造一个 n 次多项式函数来逼近 f。

希望构造一个 n 次多项式函数：

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n$$

让其满足插值条件：$P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$ ，这个多项式函数 P_n 就是 f 的 n 次插值多项式。

对于这给定的 $n+1$ 个节点来说，构成线性方程组：

求解这个线性方程组很不方便，尤其当 n 特别大的时候，但是由于其系数矩阵的行列式是范德蒙行列式，由范德蒙行列式的性质可知，其行列式值不为零，故其系数矩阵可逆且解是唯一的。说明该插值多项式是唯一的。

所以可以通过构造插值基函数 l_i 来构造满足 $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$ 的多项式函数。

令

$$\boxed{f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)} \tag{1}$$

其中，插值基函数 l_i 满足：

$$l_i(x_k) = [$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_i}{x_i-x_j} \tag{2}$$

式(1)即为n次插值多项式。

2 构造插值求积公式

对式(1)两边积分，以构造插值求积公式：

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n}\left[\int_a^b l_i(x)dx\right] y_i = \sum_{i=0}^{n} A_k y_i} \tag{3}$$

其中，

$$A_k = \int_a^b l_i(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}dx \tag{4}$$

就是插值求积公式的系数。

3　从 Newton-Cotes 积分到 Gauss 积分

第二部分　算法构建