第 1 章

Série Entière 幂级数

Note: Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X^n : z \in \mathbb{C} \mapsto z^n$.

Definition 1.1

Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on appelle série entière $((a_nX^n))$. On s'intéresse à la fonction

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

1.1 Rayon de convergence 收敛半径

Definition 1.2

设 $((a_nX^n))$ 是一个幂级数，$((a_nX^n))$ 的收敛半径 *(RCV)* 记为 R_c，定义为：

$$R_c = sup(\{|z|, z \in \mathbb{C} \text{ et } ((a_nX^n)) \text{ converge}\}) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

(bien défini car $((a_n0^n))$ converge).

Note: 定义 $\forall r \in \mathbb{R}_+$

$$D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

$$\bar{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

$$C(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

Lemma 1 d'Abel

设 $((a_nX^n))$ 是一个幂级数，假设存在 $R > 0$ 满足数列 (a_nR^n) 是有界的，则 $\forall r \in]0,R[$, $((a_nX^n))$ 在 $\bar{D}(0,r)$ 上 CVN。

Proof:

□

Conclusions: 设 $z \in \mathbb{C}^*$ 满足 $f(z)$ 有定义并且 $((a_n z^n))$ 收敛，则 $\forall z' \in \mathbb{C}$ 满足 $|z'| < |z|$，$((a_n {z'}^n))$ 绝对收敛 (Converge absolument)。

Example:

1. 求 $((X^n))$ 的收敛半径。$R_c = 1$
2. 求 $((\frac{X^n}{n!}))$ 的收敛半径。$R_c = +\infty$ 因为 $\forall z \in \mathbb{C}$，$((\frac{X^n}{n!}))$ 收敛于 e^z。

Theorem 1.1

设 $((a_n X^n))$ 是一个幂级数，收敛半径为 R_c，对于 $z \in \mathbb{C}$,

- 若 $|z| < R_c$，则 $((a_n z^n))$ 绝对收敛。
- 若 $|z| > R_c$，则 $((a_n z^n))$ 无界。

Proof:

□

Definition 1.3

我们称收敛圆的集合为 $C(0, R_c)$。

Example:

1. $((X^n))$：对于 $z \in \mathbb{U}(|z| = 1)$，$((z^n))$ 发散。实际上，
   - 若 $z = 1$，$((1^n))$ 发散。
   - 若 $z \neq 1$，设 $N \in \mathbb{N}$，$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$，$|z^{N+1} - z^N| = |z^N||z - 1|$，其中 $|z^n| = 1, |z - 1| > 0$。所以 (z^{N+1}) 发散，$((z^n))$ 发散。
2. 求 $((\frac{X^n}{n^2}))$ 的收敛半径。设 $z \in \mathbb{C}^R$，$n \in \mathbb{N}^R$
   - 若 $|z| \leq 1$，则 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，$|\frac{z^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$。
   - 若 $|z| > 1$，$(\frac{z^n}{n^2})$ 无界。

   Conclusions: $Rc = 1$，$\forall z \in C(0, 1)$，$((\frac{z^n}{n^2}))$ 收敛。

1.1.1 求收敛半径的方法

- **如果可以找到** $z_0 \in \mathbb{C}$ **满足数列** $(a_n z_0^n)$ **是有界的，则** $R_c \geq |z_0|$。
- **如果级数** $((a_0 z_0^n))$ **发散或者数列** $(a_n z_0^n)$ **是无界的，则** $R_c \leq |z_0|$。

练习题：求以下幂级数的收敛半径。

1. $a_n = \frac{n^n}{n!}$(用两种方法)

   - 方法 1：直接使用d'Alembert 判别法。

   $$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = (1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$

   则 $((a_nX^n))$ 的收敛半径 $R_c = \frac{1}{e}$。

   - 方法 2：根据STIRLING 定理，$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$。则

   $$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$$

   则根据命题，找级数 $((\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}X^n))$ 的收敛半径。

   $$|\frac{\frac{e^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)}}}{\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}}| = |\frac{e\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$

   则收敛半径是 $\frac{1}{e}$。

2. $a_n = 1+\frac{1}{n}$

   $1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$，根据命题，$(((1+\frac{1}{n})X^n))$ 和 $((X^n))$ 相同，$R_c = 1$。

3. $a_n = \prod_{k=1}^{n}(\frac{3k+1}{k+\frac{1}{2}})$

   $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$，$R_c = \frac{1}{3}$。

4. $a_n = 2+cosn$

   若 $|z| = 1$：有级数 $((2+cosn))$ 发散，所以 $R_c \leq 1$；并且有数列 $(2+cosn)$ 是有界的，则 $R_c \geq 1$。故 $R_c = 1$。

5. $a_n = C_{2n}^n$

   $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{4n+2}{n+1}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$，故 $R_c = \frac{1}{4}$。

以上是对收敛半径的一些总结，不全面，日后补充。

接下来是对有关幂级数的运算的一些总结。

1.2 Opération sur les séries entières 幂级数的运算

这里重点是对幂级数的和函数进行求导和积分运算。在之前还有幂级数的和与积的概念。

Proposition 1.1 幂级数的和与积

设 $((a_nX^n))$ 和 $((b_nX^n))$ 是两个幂级数，定义数列：

$$(s_n) = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (p_n) = (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})_{n\in\mathbb{N}}$$

那么有两个幂级数的和为：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$

而两个幂级数的乘积定义为：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) z^n$$

接下来讨论对于幂级数的和函数进行求导和积分的运算。

在幂级数的收敛区间 $]-R_c, R_c[$ 内，幂级数的和函数定义为：

$$f : x \in]-R_c, R_c[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

对其进行逐项求导得到：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

也就是级数 $(((n+1)a_{n+1}x^n))_{n\in\mathbb{N}}$。

逐项求积分得到：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

也就是级数 $((\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$。

有结论级数 $(((n+1)a_{n+1}x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $((\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ 与级数 $((a_nx^n))$ 的收敛半径是相同的。

而且还有和函数 f 在幂级数的收敛区间 $]-R_c, R_c[$ 可导，$\forall x \in]-R_c, R_c[$，

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

f 在 0 与 x 这个区间上可积，且有：

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Example: 几何级数 $((x^n))$ 在收敛域 $(-1,1)$ 内有 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$。

对级数 $((x^n))$ 在收敛域 $(-1,1)$ 内逐项求导得到：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^{n-1} = \frac{2!}{(1-x)^3}$$

对级数 $((x^n))$ 在 $[0,x[(x<1)$ 上逐项求积分可得：

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = ln\frac{1}{1-x}$$