Note de Mathématiques

数学笔记

Année 2 Semestre 2

Science 崇尚科学
Innovation 勇于创新
Aviation 热爱航空
Excellence 追求卓越

生命之中最快乐的是拼搏，而非成功；生命之中最痛苦的是懒散，而非失败

整理：刘通 (LIU Tong) Ethan
整理时间：February 23, 2017
Email: 1142595791@qq.com

Version: 1.00

目　录

第 1 章

规范格式示例

1.1 编译方式

本模板基于 book 文类，所以 book 的选项对于本模板也是有效的。但是，只支持 XeLaTeX，编码为 UTF-8，推荐使用 TeXlive 编译。作者编写环境为 Win8(64bit)+TeXlive 2013。

1.2 文档缺陷

1. 定理类的环境在我们这个模板中不能浮动，也不能跨页。

2. 某些环境不足，比如例子、假设、性质、结论等环境，在 1.00 版本中已经增加了这几个环境。

1.3 插图示例

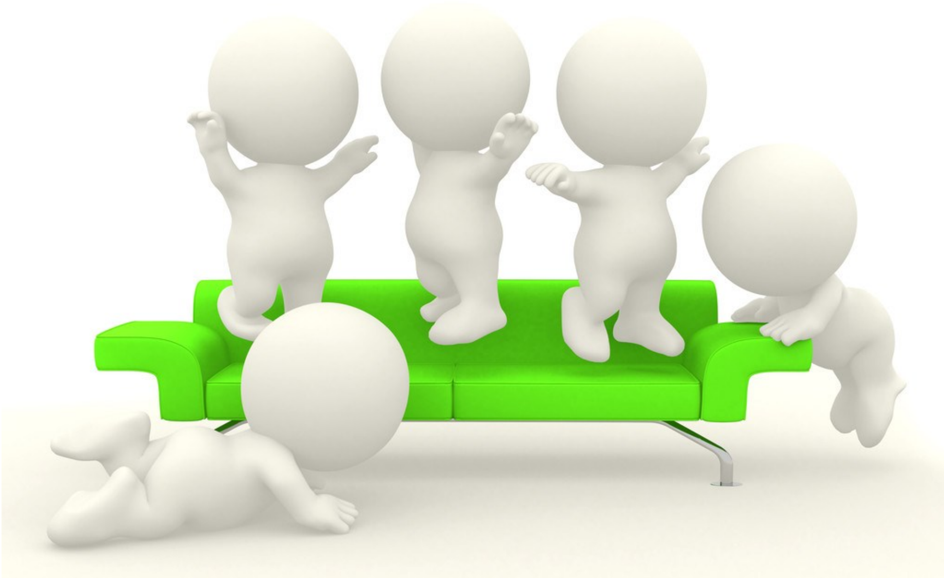

图 1.1: Happiness,We have it!

1.4 字体颜色

这章还有这么大空间，忍不住插个图!

1.5 关于字体

本文主要使用的字体如下

- Adobe Garamond Pro
- Minion Pro & Myriad Pro
- 方正字体
- 华文中宋

Note: 需要特别注意的是，如果笔记需要使用到抄录环境的，请重新修改字体，此版本并未为抄录环境设置合适字体，本 *note* 环境的字体即为抄录环境使用到的字体。

1.6 选项设置

本文特殊选项设置共有 2 类，分为颜色和数学字体。

第一类为颜色主题设置，内置 3 组颜色主题，分别为 green(default)，cyan，blue。默认为 green 颜色主题。需要改变颜色的话请自行到 elegantnote.cls 文件内对颜色的 RGB 值进行修改。

第二类为数学字体设置，有两个可选项，分别是 computer modern 和 mtpro2 字体，默认使用 cm 字体，无需在类文件前加选项，调用 mtpro2 字体的方法为\documentclass[mtpro]{elegantnote}

	green	cyan	blue	主要使用的环境
main				newdef
seco				newthem newlemma newcorol
thid				newprop

表 1.1: Elegant note 模板中的三套颜色主题

1.7 数学环境简介

一般的数学环境:

考虑如下的随机动态规划问题

$$
\begin{aligned}
&\max(\min) \quad \mathbb{E}\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)\,dt \\
&\text{s.t.} \quad dx = g(t,x,u)dt + \sigma(t,x,u)dz \\
&\qquad\quad k(0) = k_0 \text{ given}
\end{aligned}
$$

在我们这个模板中，定义了三大类环境

1. 定理类环境，包含标题和内容两部分。根据格式的不同分为 3 种
   - newdef 环境，含有一个可选项，编号以章节为单位；

Definition 1.1 Wiener Process

If z is wiener process, then for any partition $t_0, t_1, t_2, \ldots$ of time interval, the random variables $z(t_1) - z(t_0), z(t_2) - z(t_1), \ldots$ are independently and normally distributed with zero means and variance $t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots$

- newthem、newlemma、newcorol 环境，三者颜色一致，但是定理环境编号以章节为单位，引理和推论为全文编号；

Theorem 1.1 勾股定理

勾股定理的数学表达为

$$a^2 + b^2 = c^2$$

其中 a, b 为直角三角形的两条直角边长，c 为直角三角形斜边长。

Theorem 1.2 勾股定理

勾股定理的数学表达为

$$a^2 + b^2 = c^2$$

其中 a, b 为直角三角形的两条直角边长，c 为直角三角形斜边长。

Lemma 1

假设 $V(\cdot,\cdot)$ 为值函数，则跟据最大值原理，有如下推论

$$V(k,z) = \max\Big\{u\big(zf(k) - y\big) + \beta\mathbb{E}V(y,z')\Big\}$$

Lemma 2

假设 $V(\cdot,\cdot)$ 为值函数，则跟据最大值原理，有如下推论

$$V(k,z) = \max\Big\{u\big(zf(k) - y\big) + \beta\mathbb{E}V(y,z')\Big\}$$

Lemma 3

假设 $V(\cdot,\cdot)$ 为值函数，则跟据最大值原理，有如下推论

$$V(k,z) = \max\Big\{u\big(zf(k) - y\big) + \beta\mathbb{E}V(y,z')\Big\}$$

Corollary 1

假设 $V(\cdot,\cdot)$ 为值函数，则跟据最大值原理，有如下推论

$$V(k,z)=\max\Big\{u\big(zf(k)-y\big)+\beta\mathbb{E}V(y,z')\Big\}$$

- newprop 环境，含有可选项，编号以章节为单位。

Proposition 1.1 最优性原理

如果 u^* 在 $[s,T]$ 上为最优解，则 u^* 在 $[s,T]$ 任意子区间都是最优解，假设区间为 $[t_0,t_1]$ 的最优解为 u^*，则 $u(t_0)=u^*(t_0)$，即初始条件必须还是在 u^* 上。

2. 证明类环境，有newproof、note 环境，特点是，有引导符和引导词，并且证明环境有结束标志。

Proof: 因为 $y^*=\alpha\beta zk^\alpha$，$V(k,z)=\alpha/1-\alpha\beta\ln k_0+1/1-\alpha\beta\ln z_0+\Delta$。

$$\begin{aligned}
\text{右边}&=\Big\{u\big(zf(k)-y\big)+\beta\mathbb{E}V(y,z')\Big\}\\
&=\ln(zk^\alpha-\alpha\beta zk^\alpha)+\beta\mathbb{E}\Big[\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln y+\frac{1}{1-\alpha\beta}\ln z'+\Delta\Big]\\
&=\ln(1-\alpha\beta)zk^\alpha+\beta\Big\{\mathbb{E}\big[\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln\alpha\beta zk^\alpha\big]+\frac{1}{1-\alpha\beta}\mathbb{E}[\ln z']+\Delta\Big\}
\end{aligned}$$

利用 $\mathbb{E}[\ln z']=0$，并将对数展开得

$$\begin{aligned}
\text{右边}&=\ln(1-\alpha\beta)+\ln z+\alpha\ln k+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\big[\ln\alpha\beta+\ln z+\alpha\ln k\big]+\frac{\beta}{1-\alpha\beta}\mu+\beta\Delta\\
&=\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k+\frac{1}{1-\alpha\beta}\ln z+\Delta
\end{aligned}$$

所以 左边 $=$ 右边，证毕。 $\square$

Note: *需要特别注意的是，如果笔记需要使用到抄录环境的，请重新修改字体，此版本并未为抄录环境设置合适字体，本 note 环境的字体即为抄录环境使用到的字体。*

3. 示例环境，有example、assumption、conclusion 环境，三者均以粗体的引导词为开头，字体以灰色，和普通段落格式一致。

Example: 今天看到一则小幽默，是这样说的：别人都关心你飞的有多高，只有我关心你的翅膀好不好吃！ 说多了都是泪啊！

Assumptions: 今天看到一则小幽默，是这样说的：别人都关心你飞的有多高，只有我关心你的翅膀好不好吃！ 说多了都是泪啊！

Conclusions: 今天看到一则小幽默，是这样说的：别人都关心你飞的有多高，只有我关心你的翅膀好不好吃！ 说多了都是泪啊！

Conclusions: 今天看到一则小幽默，是这样说的：别人都关心你飞的有多高，只有我关心你的翅膀好不好吃！ 说多了都是泪啊！

1.8 可编辑的字段

在模板中，可以编辑的字段分别为作者\author、\email、\zhtitle、\entitle、\version。并且，可以根据自己的喜好把封面水印效果的cover.pdf 替换掉，以及封面中用到的 logo.pdf。

第 2 章

Série Entière 幂级数

Note: *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $X^n : z \in \mathbb{C} \mapsto z^n$.

Definition 2.1

Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*, on appelle série entière* $((a_nX^n))$*. On s'intéresse à la fonction*

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

2.1 Rayon de convergence 收敛半径

Definition 2.2

设 $((a_nX^n))$ 是一个幂级数，$((a_nX^n))$ 的收敛半径 *(RCV)* 记为 R_c，定义为：

$$R_c = sup(\{|z|, z \in \mathbb{C} \text{ et } ((a_nX^n)) \text{ converge}\}) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

(bien défini car $((a_n0^n))$ *converge).*

Note: 定义 $\forall r \in \mathbb{R}_+$

$$D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$
$$\bar{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$
$$C(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

Lemma 1 d'Abel

设 $((a_nX^n))$ 是一个幂级数，假设存在 $R > 0$ 满足数列 (a_nR^n) 是有界的，则 $\forall r \in]0, R[$, $((a_nX^n))$ 在 $\bar{D}(0,r)$ 上 CVN。

☞ **Proof:**

□

Conclusions: 设 $z \in \mathbb{C}^*$ 满足 $f(z)$ 有定义并且 $((a_n z^n))$ 收敛，则 $\forall z' \in \mathbb{C}$ 满足 $|z'| < |z|$，$((a_n z'^n))$ 绝对收敛 (Converge absolument)。

Example:

1. 求 $((X^n))$ 的收敛半径。$R_c = 1$
2. 求 $((\frac{X^n}{n!}))$ 的收敛半径。$R_c = +\infty$ 因为 $\forall z \in \mathbb{C}$，$((\frac{X^n}{n!}))$ 收敛于 e^z。

Theorem 2.1

设 $((a_n X^n))$ 是一个幂级数，收敛半径为 R_c，对于 $z \in \mathbb{C}$,

- 若 $|z| < R_c$，则 $((a_n z^n))$ 绝对收敛。
- 若 $|z| > R_c$，则 $((a_n z^n))$ 无界。

☞ **Proof:**

□

Definition 2.3

我们称收敛圆的集合为 $C(0, R_c)$。

Example:

1. $((X^n))$：对于 $z \in \mathbb{U}(|z| = 1)$，$((z^n))$ 发散。实际上，
   - 若 $z = 1$，$((1^n))$ 发散。
   - 若 $z \neq 1$，设 $N \in \mathbb{N}$，$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$，$|z^{N+1} - z^N| = |z^N||z - 1|$，其中 $|z^n| = 1, |z - 1| > 0$。所以 (z^{N+1}) 发散，$((z^n))$ 发散。
2. 求 $((\frac{X^n}{n^2}))$ 的收敛半径。设 $z \in \mathbb{C}^R$，$n \in \mathbb{N}^R$
   - 若 $|z| \leq 1$，则 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，$|\frac{z^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$。
   - 若 $|z| > 1$，$(\frac{z^n}{n^2})$ 无界。

   Conclusions: $Rc = 1$，$\forall z \in C(0, 1)$，$((\frac{z^n}{n^2}))$ 收敛。

2.1.1 求收敛半径的方法

- 如果可以找到 $z_0 \in \mathbb{C}$ 满足数列 $(a_n z_0^n)$ 是有界的，则 $R_c \geq |z_0|$。
- 如果级数 $((a_0 z_0^n))$ 发散或者数列 $(a_n z_0^n)$ 是无界的，则 $R_c \leq |z_0|$。

练习题：求以下幂级数的收敛半径。

1. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$(用两种方法)

   - 方法 1：直接使用d'Alembert 判别法。

   $$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = (1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\to} e$$

   则 $((a_n X^n))$ 的收敛半径 $R_c = \dfrac{1}{e}$。

   - 方法 2：根据STIRLING 定理，$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}(\dfrac{n}{e})^n$。则

   $$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$$

   则根据命题，找级数 $((\dfrac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} X^n))$ 的收敛半径。

   $$|\frac{\frac{e^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)}}}{\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}}| = |\frac{e\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}| \underset{n\to+\infty}{\to} e$$

   则收敛半径是 $\dfrac{1}{e}$。

2. $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

   $1+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$，根据命题，$(((1+\dfrac{1}{n})X^n))$ 和 $((X^n))$ 相同，$R_c = 1$。

3. $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\frac{3k+1}{k+\frac{1}{2}})$

   $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| \underset{n\to+\infty}{\to} 3$，$R_c = \dfrac{1}{3}$。

4. $a_n = 2 + cosn$

   若 $|z| = 1$：有级数 $((2+cosn))$ 发散，所以 $R_c \leq 1$；并且有数列 $(2+cosn)$ 是有界的，则 $R_c \geq 1$。故 $R_c = 1$。

5. $a_n = C_{2n}^n$

   $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = |\dfrac{4n+2}{n+1}| \underset{n\to+\infty}{\to} 4$，故 $R_c = \dfrac{1}{4}$。