A、B 班 9-26,27,29 作业分析

9-26 作业：习题二：27,28,29,31,32,34

27 很多同学将式子化成 $(2E-A^*)BA=8E$，先求 A^*，再求$(2E-A^*)^{-1}$，再求 A^{-1} 解出 B，也可以如下：

解：易知 $|A|=-2$，A 可逆且有 $AA^*=|A|E=-2E$. 对 $A^*BA=2BA-8E$ 左乘 A，右乘 A^{-1} 得

$AA^*BAA^{-1}=2ABAA^{-1}-8AA^{-1}$，即$-2B=2AB-8E$，进一步有$(A+E)B=4E$，

于是 $$B=(A+E)^{-1}4E=4(A+E)^{-1}=4\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

28(1) 有些同学使用了 A^{-1} 得到$(A-E)BA^{-1}=E$，从而有$(A-E)^{-1}=BA^{-1}$，有错，如 $A=B=O$ 时没有 A^{-1}，可如下证明：

解：(1) 由 $A+B=AB$ 得到 $(A-E)(B-E)=E$，故 $A-E$ 可逆，逆矩阵为 $B-E$.

(2) 由(1)可得 $A-E=(B-E)^{-1}$，故

$$A=E+(B-E)^{-1}=E+\begin{pmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=E+\begin{pmatrix}0&1/2&0\\-1/3&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\-1/3&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

也可用：$A(B-E)=B$，故 $A=B(B-E)^{-1}$ 计算 A，计算要复杂一些.

29 有些同学先算出 $(4E-A)^{\mathrm{T}}(4E-A)=\begin{pmatrix}11&6&-1\\6&20&-4\\-1&-4&1\end{pmatrix}$，再计算行列式得到 36，计算复杂了，可如下解：

解：$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\-1&2&0&0&1&0\\1&4&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1/2&1/2&0\\0&0&3&-1&-2/3&1/3\end{array}\right)$$，故 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/2&0\\-1&-2/3&1/3\end{pmatrix}.$$

由 $A^*=|A|A^{-1}$，故 $$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{6}A=\begin{pmatrix}1/6&0&0\\-1/6&1/3&0\\1/6&2/3&1/2\end{pmatrix}.$$

最后有：$$\left|(4E-A)^{\mathrm{T}}(4E-A)\right|=\left|(4E-A)^{\mathrm{T}}\right|\times|4E-A|=|4E-A|^2=\begin{vmatrix}3&0&0\\1&2&0\\-1&-4&1\end{vmatrix}^2=6^2=36.$$

34 有很多同学先求 $B=A^{-1}CA^{-1}$，再求 B^{-1}，再求 B^*，可更简单地计算，如下：

解：由 $ABA=C$ 可得 $|A|\,|B|\,|A|=|C|=1$，而 $|A|=-4$，故 $|B|=1/16$，且 $B=A^{-1}CA^{-1}$，

故 $$B^{-1}=AC^{-1}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&1\\1&0&4\end{pmatrix}$$，则 $$B^*=|B|B^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&1\\1&0&4\end{pmatrix}$$

其余一些作业：

31(1)(2)用行变换$(A,E)\to(E,A^{-1})$求得 A^{-1} .

32(1)用行变换$(A,B)\to(E,A^{-1}B)$求得 $X=A^{-1}B$，或行变换求 A^{-1} 再求 $X=A^{-1}B$.

(2)用列变换$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}$求得 $X=BA^{-1}$，或行变换解 $A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$ 求 X^{T} 得到 X，或行变换求 A^{-1} 再求 $X=BA^{-1}$.

9-27 作业：习题二：45,46,47,48,50,51,52

45 该题有两种解法，如下：

解(常规)：设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，对应方程组 $\begin{cases}x_1=2,\\ 2x_1+2x_2=2,\\ 3x_1+3x_2+3x_3=6.\end{cases}$，解得：$x_1=2, x_2=-1, x_3=1$，故 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

解法二：易知 $\beta=(2,2,6)=2(1,0,0)+(0,2,0)+2(0,0,3)=2(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+2\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

46 该题有 3 种解法，如下：

解：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关$\Leftrightarrow$ $|A|=\left|\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5\neq0$. 故 $t=5$ 线性相关，$t\neq5$ 线性无关.

$t=5$ 时设 $\alpha_3=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，解对应方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_1+2x_2=3,\\ x_1+3x_2=5.\end{cases}$ 得 $x_1=-1, x_2=2$，即有组合关系 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

解法二(用到向量组相关性与矩阵秩的关系)：$A=(\alpha_1^{\mathrm T},\alpha_2^{\mathrm T},\alpha_3^{\mathrm T})=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&t-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{pmatrix}$.

故 $t=5$ 时 $r(A)=2<3$，$\alpha_1^{\mathrm T},\alpha_2^{\mathrm T},\alpha_3^{\mathrm T}$ 线性相关，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$t\neq5$ 时 $r(A)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.
从上可知 $t=5$ 时，$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

解法三：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$，对应方程组 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\ k_1+2k_2+3k_3=0,\\ k_1+3k_2+tk_3=0,\end{cases}$ 化简后得 $\begin{cases}k_1=k_3,\\ k_2=-2k_3,\\ 5k_3=tk_3,\end{cases}$

当 $t\neq5$ 时，有 $k_1=k_2=k_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.
当 $t=5$ 时，有非零解，取 $k_3=1$，得 $k_1=1,k_2=-2,k_3=1$，于是 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=\theta$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且有 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

47 有同学将 α_i、β_i 看成 3 维列向量后用行列式$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3||P|$判断，向量不一定是 3 维的，这样有错，可如下：

解：$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\theta$，即 $k_1(p\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_1+t\alpha_2+2t\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\theta$，

重新整理得 $(pk_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+tk_2+k_3)\alpha_2+(k_1+2tk_2+k_3)\alpha_3=\theta$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故系数全为零，即 $\begin{cases}pk_1+k_2+k_3=0,\\ k_1+tk_2+k_3=0,\\ k_1+2tx_2+k_3=0.\end{cases}$

故 β_1,β_2,β_3 线性相关$\Leftrightarrow$方程组有非零解$\Leftrightarrow$系数矩阵 $\begin{vmatrix}p&1&1\\1&t&1\\1&2t&1\end{vmatrix}=-t(p-1)=0$.

于是当 $t=0$ 或 $p=1$ 时，β_1,β_2,β_3 线性相关；当 $t\neq0$ 且 $p\neq1$ 时，β_1,β_2,β_3 线性无关.

解法二：不妨考虑列向量，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}p&1&1\\1&t&1\\1&2t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\theta.$

考虑方程组 $\begin{pmatrix}p&1&1\\1&t&1\\1&2t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\theta.$ 当系数行列式 $D=\begin{vmatrix}p&1&1\\1&t&1\\1&2t&1\end{vmatrix}=-t(p-1)=0$ 时方程组有非零解，β_1,β_2,β_3 线性相关；

当 $D=-t(p-1)\neq0$ 时，方程组只有零解，β_1,β_2,β_3 线性无关.

解法三：设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\theta$，代入 $\beta_1=p\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \beta_2=\alpha_1+t\alpha_2+2t\alpha_3, \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

经整理得 $(pk_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+tk_2+k_3)\alpha_2+(k_1+2tk_2+k_3)\alpha_3=\theta$，

对应方程组 $\begin{cases}pk_1+k_2+k_3=0,\\ k_1+tk_2+k_3=0,\\ k_1+2tk_2+k_3=0,\end{cases}$ 化简后得 $\begin{cases}(p-1)tk_1=0\\ k_2=-(p-1)k_1,\\ k_3=-k_1.\end{cases}$

当$(p-1)t\neq0$ 时，有 $k_1=k_2=k_3=0$，β_1,β_2,β_3 线性无关.
当$(p-1)t=0$ 时，有非零解，取 $k_1=1$，得 $k_1=1,k_2=1-p,k_3=-1$，于是 $\beta_1+(1-p)\beta_2-\beta_3=\theta$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关 .

51 有同学直接由条件得到 γ 可由 $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta$ 唯一线性表示，缺少步骤，可如下证明：

证：$\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性无关且 β 不能由 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 表示，故 $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta$ 线性无关，又因为 $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 线性相关，
故 γ 可由 $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta$ 唯一线性表示. 同理 β 可由 $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\gamma$ 唯一线性表示. 两向量组可相互表示，故等价

52 有些同学证明有错，可如下证明：

证：若有一个向量α_j可由$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$线性表示，即

$\alpha_j = k\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{j-1}\alpha_{j-1}$，则$k \neq 0$，否则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j$线性相关，

从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，矛盾. 故有

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{j-1}}{k}\alpha_{j-1} + \frac{1}{k}\alpha_j = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_j\alpha_j, \lambda_j = \frac{1}{k} \neq 0. \quad (1)\cdot$$

假设 α_r可由$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表示，$r>j$，则有

$$\beta = \mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_j\alpha_j + \cdots + \mu_r\alpha_r, \mu_r \neq 0. \quad (2)$$ ，

(2)-(1)得到

$$(\mu_1 - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + (\mu_j - \lambda_j)\alpha_j + \cdots + \mu_r\alpha_r, \mu_r \neq 0.$$

于是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，矛盾. 故最多有一个向量可由其前面的向量表示

其余一些作业：

48 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，则有 $D=|A^TA|=|A|^2\neq 0 \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 列 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关.

50 添加β后向量个数>维数，故相关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，故β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 唯一表示.

9-29 作业：习题二：49,53(3),54,55,56,57,58,59,60

49 该题有两种证法，如下：

证：$A\in\mathbf{R}^{n\times m}, B\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$AB=E$，故有 $n=\mathrm{r}(E)=\mathrm{r}(AB)\leq \mathrm{r}(B)\leq n$，即 $\mathrm{r}(B)=n$，等于 B 的列数，于是 B 的列向量无关.

证法二：设 $B=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$，则 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_n\beta_n=B\xi=\theta$，其中 $\xi=(k_1,k_2,\ldots,k_n)^T$.

$B\xi=\theta$ 两边左乘 A 得 $\xi=E\xi=AB\xi=\theta$，即 $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$，于是 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 线性无关，即 B 的列向量线性无关

53(3) 有同学用初等列变换来做，能得到秩，但是很难求极大无关组，应该用行变换，如下：

解：$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&3&5&2\\3&5&7&2\\-1&-3&-5&-2\\2&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&-4&-8&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ 故 $\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=2$, α_1,α_2 为一个极大无关组.

54 有同学只化简 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$到行梯形，那样无法得到其余向量的线性表达式，要化到行简化梯形，可如下：

解：$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-2&2&-6&2\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$\{\alpha_1,\alpha_2\}$为一个极大无关组，且有 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$，$\alpha_5=-2\alpha_1-\alpha_2$.

55 一般同学求解步骤是计算$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$的秩为 2，再计算$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的秩等于 2 得到 $a=3b$，再利用 β_3 可被表示求出 a、b. 其中的第 1 步和第 3 步可以合并，见如下：

解：$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1/2\\0&1&2&3/2\\0&0&0&b-5\end{array}\right),$$ β_3 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，故 $b=5$, 且 $\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2$.

又 $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&1\\0&0&5-a/3\end{pmatrix},$$ 且 $\mathrm{r}\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2$，故 $a=15$.

56 该题有两种解法，如下：

解：$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{vmatrix}=a+1$，$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=6\neq 0.$

(1) 当 $a\neq-1$ 时，$r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=r\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=3$=维数，可相互表示，故等价

(2) 当 $a=-1$ 时， $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}<3=r\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，秩不同，不等价.

解法二：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{array}\right).$

(1) 当 $a=-1$ 时，从行梯形阵可知 β_1 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示，故 A, B 不等价.

(2) 当 $a\neq-1$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$的一个极大无关组，而 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3|=6\neq0$，故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也为向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$的一个极大无关组，故 A, B 等价

57 该题有 4 种证法，可如下：

证：由题目条件知 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示，并且有 $\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2-\beta_1$，…，$\alpha_n=\beta_n-\beta_{n-1}$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 可相互表示，两组向量等价，从而有相同的秩.

证法二：不妨考虑列向量.令 $P=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\&1&\cdots&1\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{pmatrix}$,则有 $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P$, 而 $|P|=1\neq0$, 故 P 可逆，两边右乘 P^{-1} 得：

$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n) P^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 可相互表示，两组向量等价，从而有相同的秩.

证法三：不妨考虑列向量. 令 $P=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\&1&\cdots&1\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{pmatrix}$，$B=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，则有 $B=AP$.

因为 $|P|=1\neq0$，故 P 可逆，故 $r(B)=r(AP)=r(A)$，即 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}=r\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$.

证法四：不妨考虑列向量. $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\xrightarrow{c_i-c_{i-1},i=n,n-1,\cdots,2}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，列变换不改变矩阵的秩，故 $r(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，即 $r\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$.

58 有同学由秩相等直接得到 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 表示，缺少步骤，可如下：

证：不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 的极大无关组，

因为 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta\}=k$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 也是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta$ 的极大无关组，

故 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 线性表示，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta$ 可相互表示，于是两向量组等价.

证法二：不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 的极大无关组，

因为 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta\}=k$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 也是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta$ 的极大无关组，

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta$ 都等价，故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta$ 等价.

59 该题有两种证法，可如下：

证：$\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_t$ 可表示 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$，故 $r_1=r\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}\leq r\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_t\}=r_3$,同理 $r_2\leq r_3$，于是 $\max\{r_1,r_2\}\leq r_3$.设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{r1}$ 和 $\beta_1,\ldots\beta_{r2}$ 分别为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 的极大无关组，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{r1},\beta_1,\ldots,\beta_{r2}$ 可表示 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_t$，故 $r_3=r\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_t\}\leq r\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{r1},\beta_1,\ldots,\beta_{r2}\}\leq$向量个数 r_1+r_2 .

证法二：不妨考虑列向量. 设 $A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s),B=(\beta_1,\ldots,\beta_t),(A,B)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_t)$,则 $r(A)=r_1,r(B)=r_2,r(A,B)=r_3$.

显然 A 的列秩$\leq(A,B)$的列秩，故 $r_1=r(A)\leq r(A,B)=r_3$.同理 $r_2\leq r_3$，故 $\max\{r_1,r_2\}\leq r_3$.

同样地行秩有 $r(A,B)\leq r\begin{pmatrix}A&B\\O&B\end{pmatrix}$,故 $r_3=r(A,B)\leq r\begin{pmatrix}A&B\\O&B\end{pmatrix}=r(\begin{pmatrix}E&E\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix})=r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)=r_1+r_2$.

60 有同学证明过程有错，也有同学没有做，可如下：

证：因为 A 组能由 B 组线性表示，故 B 的极大无关组也是$\{A,B\}$的极大无关组，于是 $r(A,B)=r(B)$.

又 $r(A)=r(B)=r(A,B)$，故 A 组的极大无关组也是$\{A,B\}$的极大无关组，故 B 组也能由 A 组表示，于是 A 与 B 等价.

证法二：不妨设向量为列向量. 因为向量组 A 与向量组 B 的秩相等，设为 r，并设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 为 A 组的一个极大无关组，$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ 为 B 组的一个极大无关组.

又因为 A 组能由 B 组线性表示，故 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ 可表示 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$，于是有 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)P$，其中 P 为 r 阶矩阵，且有 $r=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=r((\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)P)\leqslant r(P)\leqslant r$，故 $r(P)=r$，即 P 满秩，于是 P 可逆，有 $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)P^{-1}$. 即两个极大无关组可相互表示，则等价，于是 A 组和 B 组等价.