6.5 线性变换的特征值和特征向量

6.5.1 线性变换的特征值和特征向量

线性变换的特征值特征向量是矩阵的特征值与特征向量的推广

定义6.5.1 设V是数域K上线性空间，T是V上的一个线性变换，若对K中的一个数λ，存在V的一个非零向量ξ，使得

$$T\xi=\lambda\xi,$$

则称λ是线性变换T的一个**特征值**，ξ是T的属于λ的**特征向量**.

定义6.5.2 称$V_\lambda=\{\,\xi\in V:\ T\xi=\lambda\xi\,\}$为线性变换$T$对应于特征值$\lambda$的**特征子空间**.

利用数域K上的线性空间V与K^n的对应关系

基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下

线性空间	V	$\longleftrightarrow$	K^n
线性变换	T	$\longleftrightarrow$	A
向量	ξ	$\longleftrightarrow$	x
	$T\xi$	$\longleftrightarrow$	Ax
特征值关系：	$T\xi=\lambda\xi$	$\longleftrightarrow$	$Ax=\lambda x$

求T的特征值特征向量步骤

1. 取一组基，求T的矩阵A
2. 在数域K中计算特征多项式 $p(\lambda)=|\lambda E-A|$
3. 求 $p(\lambda)=0$ 的含于数域K的根（T的特征值）$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
4. 解方程组 $(\lambda_i E-A)x=\theta$，求基础解系
5. 用基础解系做坐标求V的一个向量组，即$V_{\lambda i}$的一组基

例6.5.1 设数域$K=R$，线性变换T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 求$T$的特征值和特征向量．

解 A的特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-3),$

A的全部特征值： $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1, \lambda_3=3$，都是实数，所以是线性变换$T$的全部特征值.

对应于特征值 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1$，求得齐次线性方程组

$(\lambda_i E-A)x=\theta, i=1,2$ 的一个基础解系为 $(-1,1,0)^T, (0,0,1)^T$．

T属于特征值 -1 的两个线性无关的特征向量为：$\xi_1=\varepsilon_2-\varepsilon_1, \xi_2=\varepsilon_3$．

对应于 $\lambda_3=3$，求得齐次线性方程组 $(\lambda_3 E-A)x=\theta$ 的一个基础解系为 $(1,1,0)^T$．

T属于特征值 3 的一个特征向量为 $\xi_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2$．

例6.5.2 平面上的全体向量构成了实数域上的一个二维线性空间$\mathbf{R}^2$，在直角坐标系下取单位向量e_1,e_2作为一组基. 设转角为θ的旋转变换T_θ:$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$为:

$$T_\theta(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta).$$

则T_θ是$\mathbf{R}^2$上的线性变换 . T_θ在基e_1,e_2下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$

A的特征多项式

$$p(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1.$$

如果 $\theta\neq n\pi$，该二次方程仅有复数根. 因$\mathbf{R}^2$是实数域上的线性空间，故T_θ没有特征值，也没有特征向量 .

V取不同的基后，变换和向量所对应的矩阵和列向量:

		基$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$	基 $(\omega_1,\ldots,\omega_n)=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)P$
	T	A	$B=P^{-1}AP$
	ξ	x	$y=P^{-1}x$
特征值	λ	λ	λ 与基底无关
关系	$T\xi=\lambda\xi$	$Ax=\lambda x$	$By=\lambda y$ ($P^{-1}APP^{-1}x=\lambda P^{-1}x$)

- 线性变换的特征值和特征多项式与基底无关
- 属于不同特征值的特征向量无关 .

6.5.2 线性变换的最简表示

定义6.5.3(线性变换的最简表示).
设T是n维线性空间V上的一个线性变换，若T在某组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$下的矩阵为对角矩阵，则称$T$有最简表示 .

T有最简表示 $\longleftrightarrow$ T的某个基下的矩阵可对角化

- T有最简表示$\Leftrightarrow$$T$有$n$个无关特征向量
- T有n个互异的特征值=>T有最简表示
- 每个特征值有一批无关特征向量，这些特征向量合在一起仍然线性无关
- T的特征值λ_0的子空间维数$\leq\lambda_0$的重数
- T有最简表示 $\Leftrightarrow$ T的每个s_i重特征值λ_i ,对应特征矩阵$\lambda_i E-A$的秩为$n-s_i$

例6.5.3 设V上线性变换T在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

分别把V看作实线性空间和复线性空间，T是否有最简表示?
若有，则求其最简表示 .

解 若V是实线性空间，$p(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda-(1+i))(\lambda-(1-i)).$

因此在实数域上A没有特征值，故没有特征向量，从而T也没有特征值和特征向量，所以没有最简表示 .

若V是复线性空间，A有特征值$1+i$和$1-i$，这也是T的特征值，且都是单特征值，故T有最简表示 .

对应于 $\lambda_1=1+i$ ，解方程组 $(\lambda_1 E-A)x=\theta$ ，得到一个基础解系，$\xi_1=(i,1)^{\mathrm{T}}$.

对应于 $\lambda_2=1-i$ ，解方程组 $(\lambda_2 E-A)x=\theta$ ，得到一个基础解系 $\xi_2=(-i,1)^{\mathrm{T}}$.

A有两个线性无关的特征向量 ξ_1,ξ_2，所以A可以对角化 . 令 $P=\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,
则

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 1\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}.$$

A是T在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$下的矩阵，令 $(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)P$，则$T$的最简表示为

$$(T\eta_1,T\eta_2)=(\eta_1,\eta_2)\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}.$$

补充例6I 已知R^3的上的线性变换为：$T(x,y,z)=(2x-3y+z,-2x+y-2z,2x+4y+3z)$，问$T$是否有最简表示，若有则求最简表示.

解：在自然基e_1,e_2,e_3下有：

$T(e_1)=T(1,0,0)=(2,-2,2)=2e_1-2e_2+2e_3$,

$T(e_2)=(-3,1,4)=-3e_1+e_2+4e_3$, $T(e_3)=(1,-2,3)=e_1-2e_2+3e_3$,

故T在自然基e_1,e_2,e_3下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

因为 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$，故$\lambda=1,2,3$均是数域R上的数，均为$T$的特征值.

$\lambda=1$时，解 $(E-A)x=\theta$得基础解系$(-1,0,1)^T$，特征向量$\xi_1=-e_1+e_3$.

$\lambda=2$时，解 $(2E-A)x=\theta$得基础解系$(-7,2,6)^T$，特征向量$\xi_2=-7e_1+2e_2+6e_3$.

$\lambda=3$时，解 $(3E-A)x=\theta$得基础解系$(-2,1,1)^T$，特征向量$\xi_3=-2e_1+e_2+e_3$.

在新的基ξ_1,ξ_2,ξ_3下，T的矩阵为对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,2,3)$, T有最简表示.

自然基e_1,e_2,e_3到基ξ_1,ξ_2,ξ_3的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix} -1 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

第7章 内积空间 简介

线性空间中，也可以引入内积，从而可以更精细地确定向量之间的关系。

一般线性空间的向量关系：相关与无关

内积空间的向量关系： 增加了向量的夹角，度量了无关的程度，并引入了正交这种极易处理的向量关系

定义抽象的内积（内积最根本的性质）：

⑴ $(\alpha, \beta)=(\beta, \alpha)$ ； ⑵ $(\alpha_1+\alpha_2, \beta) =(\alpha_1, \beta) +(\alpha_2, \beta)$ ；

⑶ $(\lambda\alpha, \beta) =\lambda (\alpha, \beta)$ ； ⑷ $(\alpha, \alpha) \geq 0$ ，$(\alpha, \alpha) =0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ，

由此引出：

长度：$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ ； 夹角：$\theta=\arccos((\alpha, \beta) /(\|\alpha\|\cdot\|\beta\|))$

正交：$(\alpha, \beta) =0$

内积空间

定义7.1.1 (实内积与欧氏空间).

设V是实数域R上的线性空间，对V中的任意两个向量 α, β，由某种规则确定了一个实数，记为 (α, β)，并满足下列条件：

(1) 对称性：$(\alpha, \beta)=(\beta, \alpha)$；

(2) 可加性：$(\alpha_1+\alpha_2, \beta) =(\alpha_1, \beta) +(\alpha_2, \beta)$；

(3) 齐次性：$(\lambda\alpha, \beta) =\lambda(\alpha, \beta)$，对任意的$\lambda\in$ R；

(4) 非负性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$，当且仅当$\alpha=0$ 时，$(\alpha, \alpha) =0$，

则实数(α, β) 就称为向量 α, β 的实内积，有时简称内积 .

定义了实内积的实数域R上的线性空间 为实内积空间，并称有限维实内积空间为欧几里得 (Euclid) 空间，简称欧氏空间 .

- 长度、范数：称 $\|\alpha\|= \sqrt{(\alpha, \alpha)}$为向量$\alpha$的长度或范数
- 夹角：称 $\theta = \arccos \dfrac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ 为向量α, β的夹角
- 正交：若$(\alpha, \beta)=0$，则称α与β正交 (垂直)，记为 $\alpha \perp \beta$.
- 正交向量组： $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots, \alpha_n$是实内积空间中的一组非零向量，若它们两两正交，则称$\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots, \alpha_n$是一个正交向量组

- 正交向量组 线性无关 .

例7.1.1. 在R^3中定义实内积为 $(\alpha, \beta)= \alpha\cdot \beta =|\alpha|\cdot|\beta| \cos \theta=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$，
则R^3构成一个欧几里得空间 .

例7.1.2. 闭区间 $[a,b]$ $(b>a)$ 上实连续函数全体按通常意义的加法和数乘运算构成无穷维线性空间 $C_{[a,b]}$，对 $f(x), g(x) \in C_{[a,b]}$，定义内积为 $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

容易验证上述内积满足实内积定义的要求，则 $C_{[a,b]}$ 就成为实内积空间 .

内积的坐标表示

若$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n, \beta = y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n$,

$$则(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i, \sum_{i=1}^n y_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\alpha_i,\alpha_j)x_iy_j = X^TAY,$$

$$其中\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

称A为基底 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的**度量矩阵**，也称为**格拉姆（Gram）矩阵** .

- 度量矩阵是对称正定矩阵
- 欧氏空间中两组不同基底下的度量矩阵合同

标准正交基

定义7.2.1(标准正交基).

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是欧氏空间的一组基，如果在这组基下的度量矩阵是单位矩阵，则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是标准正交基．

度量矩阵为单位矩阵 E，即

$(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, $i=1,2,\ldots,n$,

$(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,n$, $i \neq j$,

这表示：基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的向量 α_i 都是单位向量，且两两正交．

- 任意基底可构造出标准正交基 (Schmidt标准正交化)
- 欧氏空间必有正交基和标准正交基．

定义7.2.2(正交变换).

设V是一个欧氏空间，T是V上的线性变换，如果对于任何向量$x,y \in V$，变换T恒能使下式成立：

$$(T(x), T(y)) = (x,y) ,$$

则称T是V上的正交变换．

- 正交变换：$(T(x), T(y)) = (x,y)$，是旋转变换的扩展，保持向量夹角不变