

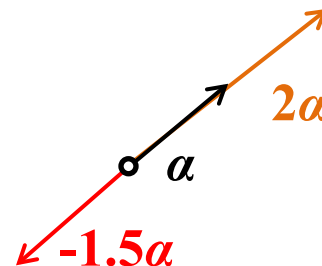
2.7 向量组的线性相关与线性无关

2.7.1 线性相关与线性无关

线性组合

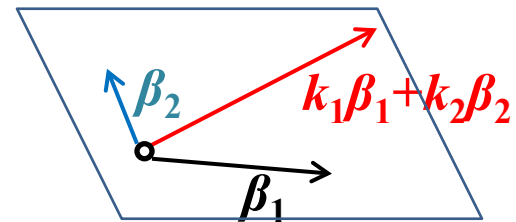
一个向量可以表示一条直线：

α 的倍数 $k\alpha$, $k \in \mathbb{R}$ 可以表示
 α 所在直线上的所有向量



两个不同方向的向量可以表示一个平面：

β_1 和 β_2 的各种倍数的和 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
可以表示 β_1 和 β_2 构成的平面上的所有向量



我们看到用几个向量可以表示一大群的向量，这简化了对一大群向量的表示。

称几个向量的各种倍数的组合为线性组合，如： $k\alpha$ ， $k_1\beta_1 + k_2\beta_2$

再来看方程组，我们也可以用向量的组合来表示关系

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 3, \\ x_3 = 1. \end{cases} \text{ 可用矩阵表示: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \quad \text{解为: } x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1$$

再换个角度：用列向量表示

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性组合

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性组合

实际表示为：

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

用列向量表示

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 = -3, \\ x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \quad \text{其中一个解为: } \mathbf{x}_1=1, \mathbf{x}_2=4, \mathbf{x}_3=2$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

用列向量表示

$$\begin{cases} x_1=2, \\ x_2=-5, \\ x_3=3, \\ x_4=0. \end{cases} \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

定义2.7.1 (向量的线性组合,线性表示) 给定 n 维向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和同维向量 β , 如果存在一组数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m,$$

则称向量 β 是向量组 A 的一个线性组合或称向量 β 可由向量组 A 线性表示.

例2.7.1 零向量是任何向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合. 因为

$$\theta = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_m.$$

例2.7.2 对于向量组 $\beta = (2, -5, 3, 0)^T$, $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)^T$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)^T$, $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)^T$. 因为

$$\beta = 2\varepsilon_1 + (-5)\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 0\varepsilon_4,$$

所以 β 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 的线性组合.

一般地, 设 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, (e_1, e_2, \dots, e_n 称为 n 维基本向量组)

那么任何 n 维向量 α 都可由 e_1, e_2, \dots, e_n 线性表示, 即

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

例2.7.3 设 $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0)^T$, $\alpha_3=(1,1,1)^T$. 试将 $\beta=(2,3,1)^T$ 表示成向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

解 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$, 即

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ 即方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 3, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

解得 $x_1=-1, x_2=2, x_3=1$, 故 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$.

例2.7.4 设 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$, $\alpha_3=(1,0,1)^T$, $\beta=(3,-3,6)^T$. 试将 β 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

解 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$, 则得线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 = -3, \\ x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 3 - x_3, \\ x_2 = 6 - x_3. \end{cases}$

最后得到方程组的解为 $x_1=3-t, x_2=6-t, x_3=t, t \in \mathbb{R}$.

取 $t=2$, 可得 $\beta = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3$.

我们将能组合出相同集合的向量组归成一类来研究，这就是**等价向量组**

定义2.7.2 (等价向量组) 设有两个向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ ，若 A 组中的每一个向量都可由向量组 B 线性表示，则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示。若两个向量组 A, B 可以相互线性表示，则称这两个向量组等价。

向量组 A :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B 线性表示 A 组向量:

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2, \alpha_2 = \beta_2 + \beta_3$$

向量组 B :

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A 线性表示 B 组向量:

$$\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = -\alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1$$



向量组之间的等价是一种等价关系，具有：(1)自反性 (2)对称性 (3)传递性。

等价行向量组与方程组的关系:

方程组 A :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 = 2, \end{cases} \text{ 矩阵为: } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix}$$

等价行向量组对应的方程组同解。

方程组 B :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \end{cases} \text{ 矩阵为: } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$$

补充例2K 两组向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 有关系:

$$\alpha_1 = \beta_2 + \beta_3, \alpha_2 = 2\beta_1 - \beta_2, \alpha_3 = -3\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3,$$

用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

解 向量组的关系可用矩阵形式表示如下:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)C.$$

两端右乘 C^{-1} 得到

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

故有:

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3, \beta_3 = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 .$$

线性相关性

考虑向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 可知: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\alpha_1 - 2\alpha_3.$

说明 α_2 可以用 α_1 与 α_3 来线性表示, 则 α_2 在向量组中是多余的.

我们称有多余向量的向量组是线性相关的, 即 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是线性相关的.

再考虑向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 经过分析 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都不能用其它两个向量线性表示.

说明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 哪个向量对于向量组来说都是必不可少的.

我们称没有多余向量, 各个向量都是独立向量的向量组是线性无关的, 或线性独立的, 即 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是线性无关的.

如何发现向量组中有多余向量？

因为我们不知道到底哪个向量可以用其它向量来表示，所以不能一个个测试方程

$$\alpha_i = x_1 \alpha_1 + \dots + x_{i-1} \alpha_{i-1} + x_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + x_m \alpha_m$$

是否有解？

我们干脆将各个向量等同看待，看如下方程

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_i \alpha_i + \dots + k_m \alpha_m = \theta$$

是否有非零解？

我们有如下的关系：

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_i \alpha_i + \dots + k_m \alpha_m = \theta \text{ 有非零解 (假设 } k_i \neq 0 \text{)}$$



$$\alpha_i = x_1 \alpha_1 + \dots + x_{i-1} \alpha_{i-1} + x_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + x_m \alpha_m \Leftrightarrow \text{有多余向量}$$

我们有： $k_1 \alpha_1 + \dots + k_i \alpha_i + \dots + k_m \alpha_m = \theta$ 有非零解 \Leftrightarrow 向量组 **线性相关**。

有多余向量

线性相关： $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \theta$ 有非零组合系数 k_1, k_2, \dots, k_m 。

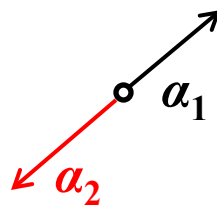
线性无关： $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \theta$ 只有 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 。

都是独立向量

线性相关的几何意义

α_1, α_2 线性相关, 表示 α_1, α_2 向量共线

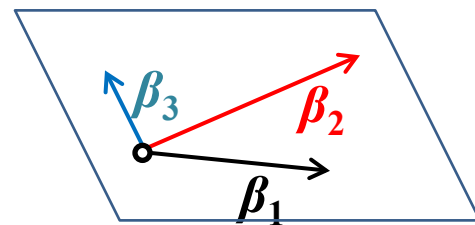
进一步, 面积 $\det(\alpha_1, \alpha_2)=0$



多余向量

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 表示 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 向量共面

进一步, 体积 $\det(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=0$



定义2.7.3 (线性相关与线性无关) 给一向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 如果存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \theta,$$

则称向量组 A 是线性相关的. 如果只有当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 时, 上述等式才成立, 则称这组向量是线性无关的.

注 由定义可知，向量组 A 或线性相关，或线性无关，两者必居其一。而向量组的线性相关与否跟这些向量的次序无关，也跟这个向量组是行向量组还是列向量组都没有关系。

线性相关、线性无关的基本性质：

(1) 一个向量线性相关的充要条件是 $\alpha = \theta$.

(2) 包含零向量的向量组必线性相关.

(3) 如果一向量组的部分向量组线性相关，则该向量组也线性相关.

(4) 如果一个向量组线性无关，则其中任一个部分向量组也线性无关.

(3) (4)相互等价

说明：(1) α 线性相关 $\Leftrightarrow k\alpha = \theta, k \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$ ，等价地 α 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq \theta$.

(2) 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \theta\}$ 有线性相关的关系

$$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_m + 1 \cdot \theta = \theta .$$

(3) 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ 中的部分向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 线性相关，则有关系： $k_1 \cdot \alpha_1 + k_2 \cdot \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = \theta$, k_1, k_2, \dots, k_r 不全为0.

于是： $k_1 \cdot \alpha_1 + k_2 \cdot \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r + 0 \cdot \alpha_{r+1} + \dots + 0 \cdot \alpha_m = \theta$, $k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \dots, 0$ 不全为0.

例2.7.5 证明： n 维基本向量组 e_1, e_2, \dots, e_n 是线性无关的. (用列向量)

证明 设有 k_1, k_2, \dots, k_n 使 $k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n = \theta$. 即

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

故有 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, 所以 e_1, e_2, \dots, e_n 线性无关.

例2.7.6 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 试证向量组
 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

证明 设有 k_1, k_2, k_3 使 $k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3 = \theta$, 即

$$k_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + k_2 (\alpha_2 + \alpha_3) + k_3 (\alpha_3 + \alpha_1) = \theta,$$

从而 $(k_1 + k_3) \alpha_1 + (k_1 + k_2) \alpha_2 + (k_2 + k_3) \alpha_3 = \theta$.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故关系式

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \end{cases}$$

成立, 解之得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例2.7.7 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 又设

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3,$$

证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

证明 设有 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = \theta$, 即

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + \alpha_3) = \theta,$$

从而 $(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_1 - k_2)\alpha_2 + (2k_1 + k_3)\alpha_3 = \theta$.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故有关系式

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 = 0, \\ 2k_1 + k_3 = 0, \end{cases}$$

解之, 有无穷多非零解, 取 $k_1=1, k_2=1, k_3=-2$, 故有 $1\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_2 - 2\cdot\beta_3 = \theta$. 故向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

*例2.7.6、例2.7.7 的进一步说明

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的组合系数 k_1, k_2, k_3 有关系

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta, \text{即求 } Ck = \theta.$$

例2.7.6 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 只有零解.

例2.7.7 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 有非零解 $k_1=1, k_2=1, k_3=-2$.

线性表示线性相关与方程组的关系

方程组的三种形式

公式形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

矩阵形式: $Ax=b$, 其中: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

向量形式: $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = b$, 其中: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

非齐次方程组与列向量的线性表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{有解} \quad \longleftrightarrow \quad \text{等价于} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{可由向量组 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{线性表示}$$

齐次方程组与列向量组线性相关性

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{有非零解} \quad \longleftrightarrow \quad \text{等价于} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

线性相关无关的重要性质

定理2.7.1 向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m \geq 2$) 线性相关的充要条件是, 向量组 A 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

说明 必要性:

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关

$$\Rightarrow k_1 \alpha_1 + \dots + k_i \alpha_i + \dots + k_m \alpha_m = \theta, \quad (k_i \neq 0)$$

$$\Rightarrow \alpha_i = -\frac{k_1}{k_i} \alpha_1 - \dots - \frac{k_{i-1}}{k_i} \alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \alpha_{i+1} - \dots - \frac{k_m}{k_i} \alpha_m.$$

充分性:

$$\alpha_i = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_{i-1} \alpha_{i-1} + \lambda_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + \lambda_m \alpha_m$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_{i-1} \alpha_{i-1} + (-1) \alpha_i + \lambda_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + \lambda_m \alpha_m = \theta$$

$$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ 线性相关.}$$

注 α_1, α_2 相关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 成比例(其中一个如 α_2 是另一个的倍数 $\alpha_2 = k\alpha_1$)

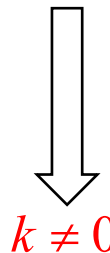
相关向量组内可能有向量是独立的, 但一定有多余的, 如 $\{e_1, e_2, -e_2\}$

定理2.7.2 设向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 而向量组B: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关, 则向量 β 必可由向量组A线性表示, 并且表示式是唯一的.

说明 线性表示的存在性:

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关

$$\Rightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + k\beta = \theta \quad (k_1, k_2, \dots, k_r, k \text{ 不全为 } 0)$$



$k \neq 0$

若 $k=0$, 则 k_1, k_2, \dots, k_r 不全为0
有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = -k\beta = \theta$
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 矛盾

$$\Rightarrow \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \dots - \frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

线性表示的唯一性:

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_r\alpha_r = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \dots + \mu_r\alpha_r.$$

$$\text{移项得 } (\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\alpha_2 + \dots + (\lambda_r - \mu_r)\alpha_r = \theta.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关 $\Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r)$, 即 $\lambda_i = \mu_i$, 唯一.

例2.7.8 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性无关的充分必要条件是 β 不可能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则有

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示,

此即: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性无关 $\Leftrightarrow \beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

例2.7.9 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ ($m \geq 2$) 线性相关, 而 $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$ 线性无关, 则

(1) α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示.

(2) α_m 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示.

证明 (1) 因为 $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$ 线性无关, 所以部分向量组 $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 也线性无关. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性相关, 所以 α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示.

(2) 假设 α_m 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 由(1)的结果, α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 于是得到 α_m 能由 $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 与假设矛盾. 从而结论成立.

推论2.7.4 向量的个数 m 大于其维数 n , 则向量组线性相关.

说明:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \theta \quad \text{其中 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \quad (m > n)$$

$$\text{即} \begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m = 0, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m = 0, \\ \mathbf{0}k_1 + \mathbf{0}k_2 + \cdots + \mathbf{0}k_m = 0, \text{ (} \mathbf{n+1} \text{行)} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \mathbf{0}k_1 + \mathbf{0}k_2 + \cdots + \mathbf{0}k_m = 0, \text{ (} \mathbf{m} \text{行)} \end{cases} \quad (*)$$

(*)的系数行列式为0, 故有非零解 k_1, k_2, \dots, k_m , 即相关.

推论2.7.5 n 个 n 维向量线性无关的充要条件是其行列式不为零.

说明:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \text{线性无关} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \text{只有零解} \Leftrightarrow \text{系数行列式非零.}$$

♥ 上述推论适合列向量, 也适合行向量. 若是行向量, 可转置为列向量考虑.

例2.7.10 设 n 维列向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, B 为 n 阶方阵. 试证向量组 $B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 B 为可逆矩阵.

证明 必要性. 令矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 设 $B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$ 线性无关, 则 $|B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n| \neq 0$, 而 $(B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n) = B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = BA$, 因此有 $|BA| = |B||A| \neq 0$, 从而 $|B| \neq 0$, 即 B 可逆.

充分性. 设 B 是可逆矩阵. 令 $k_1 B\alpha_1 + k_2 B\alpha_2 + \dots + k_n B\alpha_n = \theta$,
用 B^{-1} 左乘两端, 得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = \theta$.

由线性无关知: $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. 故 $B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$ 线性无关.

例2.7.10拓展思考 设 n 维列向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, B 为 n 阶方阵.

(1) $B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_m$ 线性无关 $\Rightarrow B$ 可逆?

(2) B 可逆 $\Rightarrow B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_m$ 线性无关?

答案: (1) B 不一定可逆, 反例: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $k_1 B\alpha_1 + \dots + k_m B\alpha_m = \theta$, 左乘 $B^{-1} \Rightarrow k_1 \alpha_1 + \dots + k_m \alpha_m = \theta \Rightarrow k_1 = \dots = k_m = 0$

补充例2L 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关, 向量 $\gamma \neq \theta$,
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma$ 和 $\beta_1, \dots, \beta_m, \gamma$ 都线性相关, 证明 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ 线性相关.

证明 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma$ 线性相关, 故非零向量 γ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 即

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n, \quad k_1, k_2, \dots, k_n \text{ 不全为 } 0.$$

同理有 $\gamma = t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \dots + t_m\beta_m, \quad t_1, t_2, \dots, t_m \text{ 不全为 } 0.$

两式相减有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n - t_1\beta_1 - t_2\beta_2 - \dots - t_m\beta_m = \theta,$

$k_1, k_2, \dots, k_n, t_1, t_2, \dots, t_m$ 不全为0, 故 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ 线性相关.

补充例2M 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \neq \theta, i=1, 2, \dots, n$, 且有 $A\alpha_i = \alpha_{i+1}, 1 \leq i < n$,
 $A\alpha_n = \theta$, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

证明 显然 $\alpha_i = A^{i-1}\alpha_1, i=1, 2, \dots, n, \quad A^n\alpha_1 = \theta,$

故有 $A^i\alpha_1 \neq \theta, i=0, 1, \dots, n-1, \quad A^i\alpha_1 = \theta, i=n, n+1, \dots$

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = \theta$. 即

$$k_1\alpha_1 + k_2A\alpha_1 + k_3A^2\alpha_1 + \dots + k_nA^{n-1}\alpha_1 = \theta. \quad (*)$$

(*) 左乘 A^{n-1} 得到

$$k_1A^{n-1}\alpha_1 + k_2A^n\alpha_1 + k_3A^{n+1}\alpha_1 + \dots + k_nA^{2n-2}\alpha_1 = k_1\alpha_n = \theta, \quad \text{由 } \alpha_n \neq \theta, \text{ 可得 } k_1 = 0.$$

(*) 左乘 A^{n-2} 得到

$$0A^{n-2}\alpha_1 + k_2A^{n-1}\alpha_1 + k_3A^n\alpha_1 + \dots + k_nA^{2n-3}\alpha_1 = k_2\alpha_n = \theta, \quad \text{由 } \alpha_n \neq \theta, \text{ 可得 } k_2 = 0.$$

依次下去可得到 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.