

线性代数期中试卷

姓名_____ 学号_____ 专业_____ 考试时间 2015.11.14

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的元素 $a_{ij} = i \times j$, 计算 $|A|$ 。

2. 求 p 使得矩阵 $A = \begin{pmatrix} p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 15 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)$ 最小, 并求 $r(A)$ 。

3. 设已知矩阵 $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $A^2 - B^2$ 。

4. 已知3阶矩阵 A 有特征值6,8,9, 求矩阵 $B = A^2 - 16A + 64E$ 的特征值。

5. 若5元方程组 $Ax = b, b \neq \theta$ 有解 $\xi_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T, \xi_2 = (1, 2, 3, 4, 5)^T, \xi_3 = (1, 0, -3, -2, -3)^T$, 且 $r(A) = 3$, 求方程组的通解。

二.(12分) (1)计算: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$; (2)由(1)计算: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$ 。

三.(10分) 设3阶方阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 且 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & c \\ a & 4 & d \\ b & 2 & 6 \end{pmatrix}$, 求 a, b, c, d 的值?

四.(12分) 求过点: $(-2, 0), (-1, 1), (1, -3), (t, 1)$ 的三次多项式函数 $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 其中 t 为参数。

五.(12分) 一个方阵 A 称为幂零的, 如果存在正整数 N 使得 $A^N = O$ 。设 A 为幂零的, 证明

(1) $B = a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$ 也是幂零的;

(2) 若 $a_0 \neq 0$, 则 $C = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$ 是可逆矩阵, 并利用 B 来表示 C^{-1} 。

六.(14分) 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 则称 A 为幂等矩阵。设 A 为幂等矩阵, 证明

(1) $E - A$ 也为幂等矩阵;

(2) $r(A) + r(E - A) = n$;

(3) A 有 $r(A)$ 个属于特征值1 的线性无关的特征向量, $r(E - A)$ 个属于特征值0 的线性无关的特征向量。