A、B 班 9-15 作业分析(含 9-13 作业)

9-15 作业：习题二：6,7,9,14,22,25,30,35,37,38,40,42,43 (其中 6,7,9,14,38 为 9-13 合并过来的作业)

本次作业，40，42 两题问题较多

另外有一些普遍的问题：

* 矩阵与行列式括号混乱，如 22 题写成 $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$，应该写成 $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，

务必不要将矩阵和行列式搞混淆.

** 数乘习惯上写成 kA，倍数 k 在左边，或 $s^{-1}A$，不要写成其它形式如 k 在矩阵右边，或 s 在矩阵下方分母位置，如 25 题写成 $(A+E)^{-1}=\frac{A}{6}$，应该写成$(A+E)^{-1}=\frac{1}{6}A$或$(A+E)^{-1}=6^{-1}A$， 42 题写成$(A^*)^{-1}=A|A|^{-1}$或$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$，应该写成$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A$. **数乘要写成左边数右边矩阵的形式.**

例外：40 题(2) $A\alpha=\alpha-\alpha\alpha^T\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^T\alpha)$，此时应该将倍数($\alpha^T\alpha$)提出到左边，即 $A\alpha=\alpha-\alpha\alpha^T\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^T\alpha)=\alpha-(\alpha^T\alpha)\alpha=\theta$.

*** 习惯上矩阵用大写英语字母表示如 A，向量用小写希腊字母表示如 α，数用小写英语字母表示如 a. 如 14 题(2) 矩阵分成 2×2 的 2 阶块，写成 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$，应该写成 $A=\begin{pmatrix}A_1 & O \\ A_2 & A_3\end{pmatrix}$，最好写成 $A=\begin{pmatrix}aE_2 & O_2 \\ E_2 & bE_2\end{pmatrix}$.

大写英文字母表示矩阵，小写希腊字母表示向量，小写英语字母表示数，避免使用 O、E、A' 等表示其它矩阵.

6 有同学直接看规律写出 A^n，没有证明，应该用数学归纳法证明一下. 或者用 $A^n=(E+D)^n=E+nD+0.5n(n-1)D^2$.

7 有多种解法，如下：

解：
$$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right|=|A|\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=|A|\times 4=8.$$

解法二：$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|\overset{c_1+c_4-c_3}{=}|2\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=4|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4|=4|A|=8.$

解法三：$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1|=|\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1|+|\alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1|$

$=|\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3+\alpha_4,\alpha_4|+|\alpha_3, 2\alpha_2,\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1|=|\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3,\alpha_4|+|\alpha_3, 2\alpha_2,\alpha_4, \alpha_1|=2|A|+2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\alpha_4|=8.$

14(1) 有各种分块方法都可以，分块主要是为了简化计算，无法简化就没必要分类，这里提供一种分块法，如下：

解：(1) $$\left(\begin{array}{c|cc}1&-2&0\\0&1&1\\1&0&2\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}0&1\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(0,1)+\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\\0&3\end{pmatrix}.$$

(2) $$\left(\begin{array}{cc|cc}a&0&0&0\\0&a&0&0\\\hline 1&0&b&0\\0&1&0&b\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&c&0\\0&1&0&c\\\hline 0&0&d&0\\0&0&0&d\end{array}\right)=\begin{pmatrix}aE&O\\E&bE\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&cE\\O&dE\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aE&acE\\E&(c+bd)E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&ac&0\\0&a&0&ac\\1&0&c+bd&0\\0&1&0&c+bd\end{pmatrix}.$$

25 有同学仿照例 2.6.2 中 A^2-3A-10E=O 求 A 和 A-4E 的逆，给出 $AB=BA=E$ 形式的式子，然后 $A^{-1}=B$. 可以更简单一些，由推论 2.6.3，只要 $AB=E$ 或 $BA=E$ 一个成立就可以得到 $A^{-1}=B$. 该题只要用一侧公式即可.

解 (1) 由 $A^2+A-6E=O$ 可得 $A(A+E)=6E$，再由 $A(6^{-1}(A+E))=E$ 可得 $A^{-1}=6^{-1}(A+E)$，由 $6^{-1}A(A+E)=E$ 可得$(A+E)^{-1}=6^{-1}A$ ；

(2) 由 $A^2+A-6E=O$ 可得$(A+4E)(A-3E)=-6E$，由$(A+4E)(-6^{-1}(A-3E))=E$ 可得 $(A+4E)^{-1}=-6^{-1}(A-3E)$.

30 有同学用 $Z^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}O&A\\B&C\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}C&-A\\-B&O\end{pmatrix}$公式，这是错误的，逆矩阵公式不能用于分块矩阵. 很多同学求 Z^1 时没有过程，而 Z^1 并非一眼可以看出来的，可如下求解：

解 易知 $X^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$. 设 $Y^{-1}=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}\\M_{21}&M_{22}\end{pmatrix}$，则由 $YY^{-1}=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}\\M_{21}&M_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AM_{21}&AM_{22}\\BM_{11}&BM_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix}$，

可得 $\begin{cases}AM_{21}=BM_{12}=E,\\AM_{22}=BM_{11}=O.\end{cases}$，解得 $M_{21}=A^{-1}$，$M_{12}=B^{-1}$，$M_{11}=M_{22}=O$，即 $Y^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.同理可得 $Z^{-1}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.

设 G=diag(G_{11},G_{22})，其中 $G_{11}=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}, G_{22}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix}$.

又 $G_{11}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3/2\\0&1/2\end{pmatrix}, G_{22}^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-3\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2\\1/3&1/6\end{pmatrix}$，故 $G^{-1}=\begin{pmatrix}G_{11}^{-1}&O\\O&G_{22}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3/2&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&0&1/2\\0&0&1/3&1/6\end{pmatrix}$.

解法二 易知 $X^{-1}=\mathrm{diag}(A^{-1},B^{-1})$,

$Y=\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&E\\E&\end{pmatrix}$,可得 $Y^{-1}=\begin{pmatrix}&E\\E&\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&E\\E&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}$,

$Z=\begin{pmatrix}E&O\\CA^{-1}&E\end{pmatrix}Y$,可得 $Z^{-1}=Y^{-1}\begin{pmatrix}E&O\\CA^{-1}&E\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&O\\-CA^{-1}&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.

因为 $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3/2\\0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2\\1/3&1/6\end{pmatrix}$，故 $G^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3/2&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&0&1/2\\0&0&1/3&1/6\end{pmatrix}$.

35 有同学这样书写：$A^*=A^{-1}|A|$，或 $A^*=\frac{A^{-1}}{|A|}$，应该将数乘的倍数写在矩阵的左边如：$A^*=|A|A^{-1}$，且事先证明 A 可逆.

另外很多同学过程中得到 $|A|^2=|A|^3$，就直接得出 $|A|=1$，这需要证明，否则只能得出 $|A|=1$ 或 0，可如下解：

解 $AA^{\mathrm{T}}=AA^*=|A|E$, 取行列式 $|A|^2=|A|^3$，得 $|A|=1$ 或 0 .

又因为 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2>0$，故 $|A|\neq0$，于是 $|A|=1=3a_{11}^2$, 得 $a_{11}=1/\sqrt{3}$.

38 有同学这样展开 $\begin{vmatrix}BB^{\mathrm{T}}&BC^{\mathrm{T}}\\CB^{\mathrm{T}}&CC^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\left|BB^{\mathrm{T}}CC^{\mathrm{T}}-CB^{\mathrm{T}}BC^{\mathrm{T}}\right|$ 或 $\begin{vmatrix}BB^{\mathrm{T}}&BC^{\mathrm{T}}\\CB^{\mathrm{T}}&CC^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\left|BB^{\mathrm{T}}CC^{\mathrm{T}}\right|-\left|CB^{\mathrm{T}}BC^{\mathrm{T}}\right|$，这样的块公式是错误的，也

有同学跳过了关键步，直接写成 $\begin{vmatrix}BB^{\mathrm{T}}&BC^{\mathrm{T}}\\CB^{\mathrm{T}}&CC^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\left|BB^{\mathrm{T}}\right|\cdot\left|CC^{\mathrm{T}}\right|$，可如下：

证：$\left|AA^{\mathrm{T}}\right|=\left|\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}(B^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}})\right|=\begin{vmatrix}BB^{\mathrm{T}}&BC^{\mathrm{T}}\\CB^{\mathrm{T}}&CC^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}BB^{\mathrm{T}}&O\\CB^{\mathrm{T}}&CC^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\left|BB^{\mathrm{T}}\right|\cdot\left|CC^{\mathrm{T}}\right|$.

40 有同学由 $A^2=A$ 得出 $A=O$ 或 $A=E$，这是错的，如 $A=\mathrm{diag}(1,0)$. 也有同学由 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，然后左乘 α^{-1}，右乘$(\alpha^{\mathrm{T}})^{-1}$，得 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=1$，错误，因为逆矩阵只有方阵才会有，向量 α 是没有逆矩阵的. 另外还有同学由 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$ 得$|\alpha^{\mathrm{T}}|\times|\alpha|=|\alpha|^2=1$，也是错的，因为行列式只有方阵才会有，向量 α 是没有行列式的. 此题可如下证明：

证 (1) $A^2-A=E-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha^{\mathrm{T}}-(E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}})=(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha-1)\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$,

又 $\alpha\neq\theta$，故 $A^2-A=O\Leftrightarrow\alpha^{\mathrm{T}}\alpha-1=0$，即 $A^2=A\Leftrightarrow\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$.

(2) 因为 $A\alpha=(E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)=(1-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha=\theta$，又 $\alpha\neq\theta$，故 $Ax=\theta$ 有非零解，于是 $|A|=0$，即 A 不可逆.

或：假设 A 可逆，$A\alpha=(E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)=(1-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha=\theta$，左乘 A^{-1} 得 $\alpha=\theta$，与 $\alpha\neq\theta$ 矛盾，故 A 不可逆.

或：假设 A 可逆，由(1)的结论知 $A^2=A$，两边左乘 A^{-1} 得 $A=E$，与 $A=E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}},\alpha\neq\theta$ 矛盾，故 A 不可逆.

42 很多同学数乘写法不规范，甚至有同学将矩阵移到分母中如 $(A^{-1})^*=\frac{|A^{-1}|}{A^{-1}}$，错误，因为矩阵没有除法，可如下：

证 A 可逆则 $|A|\neq0$，且 $A^*=|A|A^{-1}$. 故 A^* 可逆且有 $(A^*)^{-1}=|A|^{-1}(A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A$，

而 $(A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A$，故 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证法二：A 可逆则 $A^*(A^{-1})^*=|A|A^{-1}(A^{-1})^*=|A|\times|A^{-1}|E=E$，$A^*$与$(A^{-1})^*$互为逆，即$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证法三：A 可逆则 $A^*(A^{-1})^*=|A|A^{-1}\times|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=|A|\,|A|^{-1}A^{-1}A=E$，故 A^*与$(A^{-1})^*$互为逆，即$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

43 该题可有两种解法，如下：

解：$AA^*=|A|E$，于是$|A|\,|A^*|=|A|^n$，A 可逆，即$|A|\neq0$，有$|A^*|=|A|^{n-1}$，

于是$|A|A^{**}=(AA^*)A^{**}=A(A^*A^{**})=|A^*|A=|A|^{n-1}A$，$A^{**}=|A|^{n-2}A$，$|A^{**}|=|\,|A|^{n-2}A\,|=|A|^{(n-2)n}\,|A|=|A|^{(n-1)^2}$.

解法二 A 可逆，$A^*=|A|A^{-1}$，$|A^*|=|\,|A|A^{-1}|=|A|^{n-1}$，$A^{**}=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(\,|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$，$|A^{**}|=|\,|A|^{n-2}A\,|=|A|^{(n-2)n}\,|A|=|A|^{(n-1)^2}$.

其余一些作业解题思路：

9 直接计算，也可先写成 $f(x)=(3x-2)x+5$，再计算 $f(A)=(3A-2E)A+5E$.

22 当行列式非零，用伴随矩阵求逆

37 $A(A^{-1}+B^{-1})B=B+A$, $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，可逆矩阵的乘积可逆，故$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$ 或用 $A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1}$