A、B 班 9-18,22 作业分析

9-18 作业：习题二：17,18,20

*有相当一部分同学初等变换用=或=>或~，应该使用→

**有同学没有仔细看题，17 题化矩阵为行简化梯形矩阵，18 题化矩阵为行梯形矩阵

20 该题有两种解法，如下：

解：(1) $(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|cc}-5&3&1&1&0\\2&-1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+3r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&4&1&3\\2&-1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&4&1&3\\0&-1&-7&-2&-5\end{array}\right)\xrightarrow{-r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&4&1&3\\0&1&7&2&5\end{array}\right)=(B,P).$

故 $P=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$，$B=PA=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&7\end{pmatrix}$.

(2) $(A^{\mathrm{T}},E)=\left(\begin{array}{cc|ccc}-5&2&1&0&0\\3&-1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&2&0\\4&0&0&1&1\\1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-4r_1}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&2&0\\0&0&-4&-7&1\\0&1&-1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&2&0\\0&1&-1&-2&1\\0&0&-4&-7&1\end{array}\right)=(B,Q).$

故 $Q=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&1\\-4&-7&1\end{pmatrix}$，$B=QA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

解法二：(1) $A=\begin{pmatrix}-5&3&1\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&4\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&-1&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&7\end{pmatrix}$，行初等变换对应的初等矩阵为：

$P_1=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，故变换矩阵 $P=P_3P_2P_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$.

(2) $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\\1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0\\4&0\\1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，行初等变换对应的初等矩阵为：$Q_1=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$Q_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},Q_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},Q_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},Q_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，故变换矩阵 $Q=Q_5Q_4Q_3Q_2Q_1=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&1\\-4&-7&1\end{pmatrix}$.

注：20(2)的变换矩阵 Q 并不唯一，因为

$QA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&c\end{pmatrix}QA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，故 $Q_2=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&1\\-4&-7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4a&2-7a&a\\-1-4a&-2-7b&1+b\\-4c&-7c&c\end{pmatrix}, c\neq 0$ 也是所求的矩阵.

9-22 作业：习题二：21,39,44

21 有同学用矩阵秩的定义求秩，计算量较大，应该用行或列的变换化行(列)梯形求秩，可如下：

解 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\1&2&3&14&32\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_1-2r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $\mathrm{r}(A)=3$.

$B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\2&1&3&1\\a&b&a+b&a-b\\c&d&c+d&c-d\end{pmatrix}\xrightarrow[c_4-c_1+c_2]{c_3-c_1-c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&1&0&0\\a&b&0&0\\c&d&0&0\end{pmatrix}$，故 $\mathrm{r}(B)=2$.

$C=\begin{pmatrix}x&y&y&y\\y&x&y&y\\y&y&x&y\\y&y&y&x\end{pmatrix}\xrightarrow[r_i-r_1,i=2,3,4]{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{pmatrix}x+3y&y&y&y\\0&x-y&0&0\\0&0&x-y&0\\0&0&0&x-y\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_1\div4\\c_i-c_1,i=2,3,4}]{\substack{4r_1\\r_1+r_2+r_3+r_4}}\begin{pmatrix}x+3y&0&0&0\\0&x-y&0&0\\0&0&x-y&0\\0&0&0&x-y\end{pmatrix}$.

易知：$x+3y\neq0, x-y\neq0$ 时，$\mathrm{r}(C)=4$；$x+3y\neq0, x-y=0$ 时，$\mathrm{r}(C)=1$；
$x+3y=0, x-y\neq0$ 时，$\mathrm{r}(C)=3$；$x+3y=x-y=0$ 时(即 $x=y=0$)，$\mathrm{r}(C)=0$.

39 该题有三种证法，如下：

证：$m=\mathrm{r}(E_m)=\mathrm{r}(AB)\leqslant\mathrm{r}(A)\leqslant A$ 的列数 n，同理 $n\leqslant m$，故 $m=n$，于是 $B=A^{-1}$.

证法二：假设 $m\neq n$，不妨 $m>n$，将 A、B 分块为 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}, B=(B_1,B_2)$，$A_1,B_1\in R^{n\times n}, A_2\in \mathrm{R}^{(m-n)\times n}, B_2\in\mathrm{R}^{n\times(m-n)}$，

则 $AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}(B_1,B_2)=\begin{pmatrix}A_1B_1&A_1B_2\\A_2B_1&A_2B_2\end{pmatrix}=E_m=\begin{pmatrix}E_n&O\\O&E_{m-n}\end{pmatrix}$，得到 $A_1B_1=E_n$，$A_1B_2=O, A_2B_1=O, A_2B_2=E_{m-n}$.

由于 A_1, B_1 是方阵，故 A_1, B_1 可逆，于是由 $A_1B_2=O$ 左乘 A_1^{-1} 得 $B_2=O$，于是 $A_2B_2=O\neq E_{m-n}$，矛盾，故 $m=n$，于是 $B=A^{-1}$.

证法三：假设 $m\neq n$，不妨 $m>n$，将 A、B 扩展为正方阵为 $A_0=(A,O_{(m-n)\times m}), B_0=\begin{pmatrix}B\\O_{(m-n)\times m}\end{pmatrix}$，

则 $A_0B_0=(A,O_{(m-n)\times m})\begin{pmatrix}B\\O_{(m-n)\times m}\end{pmatrix}=AB=E_m$，取行列式得 $1=|E_m|=|A_0||B_0|=|(A,O)||B_0|=0\times|B_0|=0$，矛盾，

故 $m=n$，于是 $B=A^{-1}$.

44 有同学使用 P^{-1} 和 Q^{-1}，P 和 Q 不是方阵，不能有逆矩阵，可如下证明：

证：必要性：$\mathrm{r}(A)=r$ 可知存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C_1}, \boldsymbol{C_2}$，

使得 $A=C_1\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}C_2$，将 $\boldsymbol{C_1}, \boldsymbol{C_2}$ 分块为 $C_1=(P_{m\times r},\tilde{P}_{m\times(m-r)}), C_2=\begin{pmatrix}Q_{r\times n}\\\tilde{Q}_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}$，则有

$A=C_1\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}C_2=(P_{m\times r},O)\begin{pmatrix}Q_{r\times n}\\\tilde{Q}_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}=P_{m\times r}Q_{r\times n}$，且 $\boldsymbol{r}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{P_{m\times r}})\leqslant\boldsymbol{r}$，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P_{m\times r}})=\boldsymbol{r}$，同理 $\mathrm{r}(\boldsymbol{Q_{r\times n}})=\boldsymbol{r}$.

充分性：$r(P_{m\times r})=r$ 可知存在一系列的行初等变换使得 $P_{m\times r}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}=C_1P_{m\times r}$，

同理 $Q_{r\times n}\xrightarrow{c}(E_r,O)=Q_{r\times n}C_2$. 其中 C_1, C_2 可逆，故

$r(A)=r(C_1AC_2)=r(C_1P_{m\times r}Q_{r\times n}C_2)=r(\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix})=r$

*44 题必要性证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P_{m\times r}})=\boldsymbol{r}$ 步骤也可用：$\mathrm{r}(P_{m\times r})=\mathrm{r}(C_1\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}=r$.