# 南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2016.6.20 任课教师__________ 考试成绩__________

## 一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，$E$为3阶单位阵，求 $|aE-A^n|$，其中$a$为常数，$n$为正整数.

解：由于$\alpha^T\alpha=2$，所以有$A^2=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=2\alpha\alpha^T=2A$，由归纳法可得$A^n=2^{n-1}A$，

故 $|aE-A^n|=|aE-2^{n-1}\alpha\alpha^T|=\begin{vmatrix}a-2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & a & 0\\ 2^{n-1} & 0 & a-2^{n-1}\end{vmatrix}=a((a-2^{n-1})^2-(2^{n-1})^2)=a^2(a-2^n).$

2. 设 $A$为3阶可逆矩阵，且$A^{-1}$的特征值为1、2、3，求$|A|$的代数余子式$A_{11}+A_{22}+A_{33}$的值.

解：因为$A_{11}+A_{22}+A_{33}$为$A^*$的主对角线上的3元素之和，它就等于该矩阵$A^*$的3个特征值之和.
又因为$A^{-1}$的特征值为1、2、3，所以 $A$的特征值为1、1/2、1/3，故$|A|=1\times(1/2)\times(1/3)=1/6$，
从而$A^*$的特征值分别为$|A|/\lambda_1=(1/6)\times 1, |A|/\lambda_2=(1/6)\times 2=1/3, |A|/\lambda_3=(1/6)\times 3=1/2$，
故$A_{11}+A_{22}+A_{33}=1/6+1/3+1/2=1$.

3. 设矩阵$B$满足：$2ABA^{-1}=AB+10E$，其中$E$为单位阵，且$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-3&0\end{pmatrix}$，求矩阵$B$.

解：$2ABA^{-1}=AB+10E\Rightarrow AB(2E-A)=10A\Rightarrow B(2E-A)=10E\Rightarrow B=10(2E-A)^{-1}$，

$$B=10E(2E-A)^{-1}=10\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}10&0&0&0\\0&-10&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-3&2\end{pmatrix}.$$

4. 已知三个平面$x=\gamma y+\beta z, y=\alpha z+\gamma x, z=\beta x+\alpha y$，求证：它们至少相交于一条直线的充要条件为$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=1$.

证明：显然三个平面均过原点$(0,0,0)$，要三个平面至少相交于一直线$\Leftrightarrow$三个平面至少相交于另一点

$\Leftrightarrow$以下齐次线性方程组有非零解 $\begin{cases}-x+\gamma y+\beta z=0\\ \gamma x-y+\alpha z=0\\ \beta x+\alpha y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-1&\gamma&\beta\\ \gamma&-1&\alpha\\ \beta&\alpha&-1\end{vmatrix}=0$，即$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=1.$

## 二、 (本题12分) 可逆矩阵中每行元素之和都等于常数$d$，(1) 证明：$d\neq 0$；(2) 求 $A^{-1}$ 中每行元素之和.

解：(1) 设可逆矩阵$A$中每行元素之和都等于常数$d$，令$p=(1,1,\cdots,1)^T$，容易验证 $Ap=dp$，
即$d$是$A$的一个特征值，且$p$为对应的特征向量.
反证法证明 $d\neq 0$. 假设 $d=0$，则 $|dE-A|=0$即$|A|=0\Rightarrow A$不可逆，与假设矛盾，所以 $d\neq 0$.
(2) 因为$A$可逆且$d\neq 0$，所以在 $Ap=dp$ 的两边同时左乘 $A^{-1}$，可得：$p=dA^{-1}p$，即：$A^{-1}p=d^{-1}p$.
又因为 $p=(1,1,\cdots,1)^T$，所以$A^{-1}$中每行元素之和都等于 $d^{-1}$.

## 三. (本题12分) 求以 $\alpha_1=(1,-1,1,0),\alpha_2=(1,1,0,1),\alpha_3=(2,0,1,1)$ 为解向量的齐次线性方程组.

解：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2$，作矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$，
解 $Bx=0$ 得到基础解系为 $\beta_1=(1,0,-1,-1)^T,\beta_2=(0,1,1,-1)^T$，
令 $A=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$，则 $Ax=0$ 即为所求.
(注：由 $Bx=0$ 的任一基础解系都可以得到相应的满足题设条件的 $Ax=0$)

## 四. (本题12分) 设 $A$ 为 $m$ 阶实对称矩阵且正定，$B$ 为 $m\times n$ 阶实矩阵，证明：$B^TAB$ 为正定矩阵的充要条件是 $B$ 的秩 $r(B)=n$.

证明：必要性：设$B^TAB$为正定矩阵，则对任意非零的$n$维列向量$x$，有$x^T(B^TAB)x \geq 0$，
即 $(Bx)^TA(Bx) > 0$，由于$A$是正定矩阵，故$Bx \neq 0$，因此$Bx = 0$只有零解，故 $r(B) = n$.
充分性：因为 $(B^TAB)^T = B^TA^TB = B^TAB$，所以$B^TAB$为实对称矩阵.
设$r(B) = n$，则方程组 $Bx = 0$ 只有零解，从而对任意非零的$n$维列向量$x$，有$Bx \neq 0$.
又因为$A$是正定矩阵，所以，对于 $Bx \neq 0$，有 $(Bx)^TA(Bx) > 0$.
于是，当 $x \neq 0$ 时，$x^T(B^TAB)x > 0$，故 $B^TAB$ 为正定矩阵.

**五.** (**本题12分**) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & a & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量，并判断$A$是否能对角化？若能对角化，求出可逆矩阵$P$及相应的对角矩阵.

解：由 $|\lambda I - A| = (\lambda + a - 1)(\lambda - a)(\lambda - a - 1) = 0$ 解得$A$的特征值为：$\lambda_1 = 1 - a, \lambda_2 = a, \lambda_3 = 1 + a$.
当 $\lambda_1 = 1 - a$ 时，解得特征向量为 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$；当 $\lambda_2 = a$ 时，解得特征向量为 $\alpha_2 = (1, 1 - 2a, 1)^T$；当 $\lambda_3 = 1 + a$ 时，解得特征向量为 $\alpha_3 = (2 - a, -4a, a + 2)^T$，其中 $a \neq 0$. 事实上，由

$$\lambda_3 I - A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ -2 & 1 & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & (2+a)/(2a) & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & (2-a)/(4a) & 0 \\ 0 & (2+a)/(4a) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，即可推得$\alpha_3$.

(1) 当三个特征值不相等，即 $1 - a \neq a, 1 - a \neq 1 + a$ 时，亦即$a \neq 1/2$且$a \neq 0$时，矩阵$A$有三个不同特征值，故$A$可对角化，其中$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$.
(2) 当$a = 1/2$时，$\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$是二重特征根，仅有一个线性无关的特征向量，故$A$不能对角化.
(3) 当$a = 0$时，$\lambda_1 = \lambda_3 = 1$是二重特征根，也只有一个线性无关的特征向量，故$A$也不能对角化.
综上，仅当$a \neq 1/2$且$a \neq 0$时，$A$可以对角化.

**六.** (**本题12分**) 在多项式空间 $P_3[x]$ 中，线性变换 $T$ 规定为 $\forall f(x) \in P_3[x], T(f(x)) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + f(x)$.
试求：(1) $T$ 在基$1, x, x^2$下的矩阵；(2) 从基$1, x, x^2$到基$1, 1 + x, x + x^2$的过渡矩阵及$T$在基$1, 1 + x, x + x^2$下的矩阵.

解：(1) 由于 $T(1) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) + 1 = 0 + 1 = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$；
同理 $T(x) = 1 + x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$; $T(x^2) = 2x + x^2 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2$，
故 $T$ 在基$1, x, x^2$下的矩阵为：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(2) 因为 $(1, 1 + x, x + x^2) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，
故从基$1, x, x^2$到基$1, 1 + x, x + x^2$的过渡矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
又因为 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以$T$在基$1, 1 + x, x + x^2$下的矩阵为：$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**七.** (**本题12分**) 已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 可以经过正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$，求$a, b$的值和正交矩阵 $P$.

解：设二次型 $f=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz_2yz$，则二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$f$ 经过正交变换后化为 $f=\eta^2+4\zeta^2$，因此，$A$ 与 $\Lambda=\mathrm{diag}(0,1,4)$ 相似，得：$|A-\lambda E|=|\Lambda-\lambda E|$，

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & b & 1\\ b & a-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix},$$

有 $-\lambda^3+(2+a)\lambda^2+(1-2a+b^2)\lambda+(2b-1-b^2)=-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda$，比较两边系数，

得：$a=3,b=1$. 故 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，且 $A$ 的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=0$ 时，相应特征向量为 $\alpha_1=(-1,0,1)^T$，单位化得 $\beta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$；

当 $\lambda_2=1$ 时，相应特征向量为 $\alpha_2=(1,-1,1)^T$，单位化得 $\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$；

当 $\lambda_3=4$ 时，相应特征向量为 $\alpha_3=(1,2,1)^T$，单位化得 $\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T$.

所以正交矩阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ 即为所求.