线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间__2014.11.22

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1.计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

2. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} e^t & \cos t & \sin t \\ e^t & -\sin t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$。

3. 已知一个矩阵A的伴随矩阵为$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$且$|A|>0$，求$A^{-1}$。

4. 若A为n阶可逆矩阵，u,v为n维列向量，若矩阵$A+uv^T$有形式为$A^{-1}+t(A^{-1}uv^TA^{-1})$的逆矩阵，其中$t$为实数，则$t$为何值？

5. 设n阶方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵$A$的特征值及其重数。

二.(15分) 解线性方程组

$$\begin{cases} mx_1+nx_2+nx_3=n, \\ nx_1+mx_2+nx_3=n, \\ nx_1+nx_2+mx_3=n, \end{cases}$$

其中参数 m,n不全为0。

三.(10分) 设A是一个$m\times n$的矩阵，B是一个$m\times k$的矩阵。证明：存在一个$n\times k$的矩阵C使得$AC=B$的充分必要条件是 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,B)$.

四. (15分) 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1)求可逆矩阵P使得PA为行简化梯形阵。
(2)求A的秩。
(3)设A的列分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，即$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组，并用此极大无关组线性表示其余向量。

五.(10分) 设n阶矩阵$C=(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})$，其中$e_j=(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)^T$(第$j$个分量为1，其余为0),$j=1,2,\cdots,n$，而$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$为$(1,2,\cdots,n)$的一个排列，证明：(1) $C^{-1}=C^T$,
(2) $C^{-1}\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)C=\mathrm{diag}(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_n})$.

六.(10分) 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & x \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$

设矩阵A相似于B，(1)求常数x,y，(2)求A的特征值和特征向量。