南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2015.1.7 任课教师________ 考试成绩________

一. (10分) 设 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}$，$|A|$ 中元素 a_{ij} 的余子式记为 M_{ij}，计算 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

解：将第四行改为 $(-1\ \ 1\ \ -1\ \ 1)$，计算新的行列式得 -45 .

二. (10分) 设 A 是 n 阶矩阵，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 维非零向量，且 $A\alpha_i=\alpha_{i+1}, 1\le i<n, A\alpha_n=0$，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证明：由 $A\alpha_i=\alpha_{i+1}, 1\le i<n, A\alpha_n=0$，可知 $A\alpha_1=\alpha_2, A^2\alpha_1=A\alpha_2=\alpha_3,\cdots,A^{n-1}\alpha_1=\alpha_n$，
$A^{n-1}\alpha_2=0,\cdots\cdots$，现考察 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，
两边左乘 A^{n-1}，得到：$A^{n-1}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=k_1A^{n-1}\alpha_1=k_1\alpha_n=0$，由于 $\alpha_n\ne 0$，于是 $k_1=0$，将 $k_1=0$ 代入再左乘 A^{n-2}，可以得到 $k_2=0$，以此类推，得 $k_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

三. (10分) 设 A,B 都是 n 阶方阵，且 A 和 B 相似，证明 A,B 有相同的特征值。反之是否成立，请说明理由.

证明：因为相似，所以存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$，
于是 $|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$，
即 A,B 有相同的特征方程，故有相同的特征值。
反之不成立：例如：$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，它们都有相同的特征值 $0,0,0$，但是秩不相同，显然不可能相似。

四. (10分) 设 A,B 都是 n 阶方阵，I 是 n 阶单位矩阵，且 $A^2=I, B^2=I, |A|+|B|=0$，证明 $A+B$ 不可逆.

证明：$A^2=I, B^2=I\Rightarrow A=A^{-1}, B=B^{-1}, |A|^2=1, |A|+|B|=0\Rightarrow |A|=-|B|, |A+B|=|A(I+A^{-1}B)|=|A(B^{-1}+A^{-1})B|=|A||(B^{-1}+A^{-1})||B|=-|A|^2|A+B|=-|A+B|\Rightarrow|A+B|=0$，所以 $A+B$ 不可逆.

五. (12分) 已知 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，秩分别为 $r(A)=n-s, r(B)=n-t$，且 $s+t>n$，证明方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 有非零公共解.

解：由 $r(A)=n-s$ 可知 $Ax=0$ 的基础解系有 s 个线性无关的解向量，设为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，同理，$Bx=0$ 的基础解系有 t 个线性无关的解向量，设为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，因 $s+t>n$，故 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关，于是存在不全为零的参数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_t$ 使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s+\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2+\cdots+\mu_t\beta_t=0$ 则 $\xi=\sum\lambda_i\alpha_i=-\sum\mu_j\beta_j$ 就是两方程的非零公共解。

六. (12分) 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^T, B=\beta^T\alpha$，试求解方程 $2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$.

解：由条件可知：$A=\alpha\beta^T$ 是三阶矩阵，$B=\beta^T\alpha$ 是常数，

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1\ \tfrac{1}{2}\ 0)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}, B=(1\ \tfrac{1}{2}\ 0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2,$$

又：$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=2A, A^4=8A$，
则原方程化为 $8(A-2I)x=\gamma$，用初等变换将其增广矩阵化为阶梯形：
$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，导出组的基础解系为 $(1,2,1)^T$，原方程组有特解 $(\frac{1}{2},1,0)^T$，
故所求方程通解为 $x=C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 C 为常数。

七. (10**分**) 设 R^3 中的线性变换 T 把基 $\alpha=(1,0,1),\beta=(0,1,0),\gamma=(0,0,1)$ 变为基 $\alpha_1=(1,0,2),\beta_1=(-1,2,-1),\gamma_1=(1,0,0)$，设 T 在基 α,β,γ 以及基 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 下的矩阵分别为 A,B，求出 A 和 B .

解：$(T\alpha,T\beta,T\gamma)=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=(\alpha,\beta,\gamma)A$，
所以 $A=(\alpha^T,\beta^T,\gamma^T)^{-1}(\alpha_1^T,\beta_1^T,\gamma_1^T)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，并且基 α,β,γ 到基 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 上的过渡矩阵 $P=A$，故 $B=P^{-1}AP=A^{-1}AA=A.$

八. (12**分**) 已知三阶方阵 A 和三维向量 ξ，使得向量组 $\xi,A\xi,A^2\xi$ 线性无关，且满足 $A^3\xi=3A\xi-2A^2\xi$，(1) 记 $P=[\xi,A\xi,A^2\xi]$，求三阶方阵 B 使得 $A=PBP^{-1}$，(2) 计算行列式 $|A+I|$，其中 I 是三阶单位矩阵.

解：(1) 由题意，P 可逆，则 $P^{-1}P=P^{-1}[\xi,A\xi,A^2\xi]=[P^{-1}\xi,P^{-1}A\xi,P^{-1}A^2\xi]=I$ 即：$P^{-1}\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1}A\xi=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1}A^2\xi=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，从而 $P^{-1}A^3\xi=P^{-1}[3A\xi-2A^2\xi]=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$，于是 $B=P^{-1}AP=P^{-1}A[\xi,A\xi,A^2\xi]=[P^{-1}A\xi,P^{-1}A^2\xi,P^{-1}A^3\xi]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$； (2) 由 $A\sim B\Rightarrow A+I\sim B+I$，于是 $|A+I|=|B+I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4.$

九. (14**分**) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2. (1) 求a的值；(2) 求正交变换 $x=Py$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形；(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解：(1) 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，由于二次型的秩为2，所以$A$的行列式$|A|=2[(1-a)^2-(1+a)^2]=-8a=0$，于是 $a=0$.

(2) $a=0$时，A的特征方程 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$，解得特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=0$.
当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解线性齐次方程组 $(\lambda_1 I-A)x=0$，解得属于特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$，
当 $\lambda_3=0$ 时，解线性齐次方程组 $(\lambda_3 I-A)x=0$，解得属于特征值为 $\lambda_3=0$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(-1,1,0)^T$，
由于 α_1,α_2 已经正交，它们与 α_3 必然正交，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是正交向量组，将其标准化得到：$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\beta_2=(0,0,1)^T,\beta_3=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$，记 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，令 $x=Py$，
此即为所求之正交变换，二次型化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=2y_1^2+2y_2^2$.

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$，可得方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$，解之得通解：$x=k(-1,1,0)^T,k\in R.$