4.6* 若尔当(Jordan)标准形和奇异值分解

定理4.6.1 复数域上任意方阵A均可相似于一个若尔当标准形

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i=1,2,\cdots,s,$$

称为若尔当块.

定理4.6.2 若n阶方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (可能有相同的特征值)，则A的矩阵多项式 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$，其中 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$.

定理4.6.3 (奇异值分解SVD) 任意$m\times n$ 阶实矩阵A均可分解成$U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ 的形式，其中U , V 为m阶和n阶正交矩阵，$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)_{m\times n}$，$r$为矩阵的秩，且可保证 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge \dots \ge\sigma_r>0$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 称为奇异值.

定理4.6.3也可表示为：

$$U^{\mathrm{T}}AV=\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad \sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r>0 \ ,$$

其中 U , V 为m阶和n阶正交矩阵.

4.7* 应用于解常系数线性齐次微分方程组

定义4.7.1 (常系数线性齐次微分方程组) 称

$$\begin{cases} y_1'(x)=a_{11}y_1(x)+\cdots+a_{1n}y_n(x),\\ y_2'(x)=a_{21}y_1(x)+\cdots+a_{2n}y_n(x),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n'(x)=a_{n1}y_1(x)+\cdots+a_{nn}y_n(x) \end{cases}$$

为常系数线性齐次微分方程组.

例4.7.1 解一阶常系数线性微分方程组 $\begin{cases} y_1'=3y_1,\\ y_2'=-2y_2,\\ y_3'=4y_3. \end{cases}$

解　对方程组的各个方程 $y_1'=3y_1, y_2'=-2y_2, y_3'=4y_3$ 分别求解，可得

$$y_1=C_1e^{3x},\ y_2=C_2e^{-2x},\ y_3=C_3e^{4x},$$

故方程组的通解为

$$y=\begin{pmatrix} C_1e^{3x}\\ C_2e^{-2x}\\ C_3e^{4x} \end{pmatrix}=C_1e^{3x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-2x}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{4x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=C_1e^{3x}e_1+C_2e^{-2x}e_2+C_3e^{4x}e_3.$$

定理4.7.1 常系数线性齐次微分方程组 $y'=Ay$ (A为实对称矩阵)有如下通解：

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} p_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} p_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} p_n,$$

其中 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 为任意常数，$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $P=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

例4.7.2 解一阶常系数线性微分方程组 $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3, \\ y_3' = 2y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$

解 令 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

在例4.5.1中已求得特征值为 $\lambda_1=5, \lambda_2=2, \lambda_3=0$，对应的特征向量分别为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故方程组的通解为

$$y = C_1 e^{5x} p_1 + C_2 e^{2x} p_2 + C_3 p_3 = C_1 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$