南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2014.1.2 任课教师____________ 考试成绩______________

一. (24分) 填空题

1. 已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&5\\0&0&6\end{pmatrix}$ 则 A 的伴随矩阵 $A^*=$ $\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&5\\0&0&6\end{pmatrix}$

2. 函数 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&0&2\\3&x&1&1\\2&1&x&0\\5&4&2&x\end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数是 -3

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为二阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$ 2

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1&2\\2&a+1&2a&3a+1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$ 且存在3阶非零方阵 B，使$BA=0$，则$a=$ 1

5. 三阶方阵 A,B 满足 $I+B=AB$，其中 I 是单位矩阵，A 有特征值 3,-3,0，则 B 的特征值为 $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-1$

6. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ 是合同矩阵，即存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$，其中 $C=$ $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有多种答案，如$\begin{pmatrix}0&0&1\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\\cos\alpha&\sin\alpha&0\end{pmatrix}$

二. (24分) 选择题

1. 已知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则下列向量组也是 $Ax=0$ 的基础解系是（ A ）
A. $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ B. $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$
C. ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等价的向量组 D. ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等秩的向量组

2. 设有3阶非零实的方阵 $A=(a_{ij})$，$|A|$ 的每个元素 a_{ij} 都等于它自己的代数余子式，则 A 的秩为（ D ）
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均是 n 维$(n\geq 2)$ 向量，则（ D ）
A. α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 线性无关，必有 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 线性无关；
B. α_1,α_2 线性相关，β_1,β_2 线性相关，必有 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 线性相关；
C. α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 线性相关，必有 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 线性无关；
D. α_1,α_2 线性相关，β_1,β_2 线性无关，必有 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 可能线性无关，也可能线性相关。

4. 已知 A 是四阶矩阵，秩 $r(3I-A)=2$，其中 I 是单位矩阵，则 $\lambda=3$ 是 A 的（ C ）
A. 一重特征值 B. 二重特征值 C. 至少是二重特征值 D. 至多是二重特征值

5. 设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，$r(M)$ 表示矩阵 M 的秩，则 $ABx=0$ 和 $Bx=0$ 是同解方程组的一个充分条件是（ C ）
A. $r(B)=s$ B. $r(B)=n$ C. $r(A)=s$ D. $r(A)=m$

6. 设 A,B 都是 n 阶实对称可逆矩阵，则（ B ）
A. 存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$ B. 存在可逆矩阵P,Q，使得$PAQ=B$
C. 存在可逆矩阵P，使得$P^TAP=B$ B. $AB-BA$ 有可能等于单位矩阵

三. (10分) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b \end{cases}$ ，问 a,b 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解时求出通解。

解：对增广矩阵作初等行变换：

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -a & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{array}\right).$$

当 $a \neq 2$ 时，$r(A)=r(A,b)=4$，有唯一解。

当 $a=2$ 时，$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right).$

此时当 $b \neq 1$ 时，$r(A,b)=4>r(A)=3$，方程组无解。

当 $b=1$ 时，$r(A)=r(A,b)=3<4$，方程组有无穷多组解，易知通解为 $(-8,3,0,2)^T+k(0,-2,1,0)^T, k\in R$.

四. (10分) 设 A 是 n 阶方阵，证明：(1) 若对任意的 n 维向量 ξ，有 $\xi^T A\xi=0$，则 A 是反对称矩阵，即 $A=-A^T$；(2) 若 A 是奇数阶反对称矩阵，求出其行列式 $|A|$ 的值。

解：(1) 取 $\xi=e_i$，有 $e_i^T Ae_i=a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$.
再取 $\xi=e_i+e_j$，有 $\xi^T A\xi=e_i^T Ae_i+e_i^T Ae_j+e_j^T Ae_i+e_j^T Ae_j=a_{ij}+a_{ji}=0, i,j=1,2,\cdots,n$.
故有 $a_{ij}=-a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$，即 $A=-A^T$.

(2) 当 A 的阶数 n 为奇数时，$|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$，故有 $|A|=0$.

五. (12) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2ax_2x_3\ (a>0)$ 通过正交变换 $x=Uy$ 可化为标准形 $2y_1^2+by_2^2+2y_3^2$. (1) 求参数 a,b 及正交变换 U；(2) 二次型是否正定（给出一个理由）。

解：记变换前后二次型的矩阵分别为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & a \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，

于是 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax=y^T(U^T AU)y=y^T By$，
即 $U^T AU=U^{-1}AU=B$，故矩阵 A,B 相似（合同），
从而有 $|A|=|B|, trA=trB$. 即 $-(a+10)(a-2)=4b, -3=4+b$，
解得 $b=-7, a=4$（其中$a=-12<0$ 不合题意，舍去）.

所以 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，显然 A 的特征值为 $\lambda=2$(二重),-7.

解方程组 $(2E-A)x=\theta$ 得无关特征向量 $\alpha_1=(-2,1,0)^T, \alpha_2=(2,0,1)^T$，标准正交化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T, \gamma_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2$

解方程组 $(-7E-A)x=\theta$ 得单位特征向量 $\gamma_3=\frac{1}{3}(-1,-2,2)^T$.

令 $U=(\gamma_1,\gamma_3,\gamma_2)$，则 U 是正交矩阵，且 $U^T AU=U^{-1}AU=B$.

(2) 二次型不是正定的，理由可任意选择以下一个：

(1) 特征值不全大于0；(2) 正惯性指数为 $2<3$；
(3) 二阶顺序主子式<0；(4) $f(0,1,0)=-2<0$ 等.

六. (10分) 设有实系数线性方程组：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots,n$，其中 $|a_{ii}|>|a_{i1}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|, i=1,2,\cdots,n$，证明此方程组有唯一解。

证：只要证明系数矩阵 A 的行列式不等于 0 即可。用反证法。

假设 $|A|=0$,则 $Ax=\theta$ 有非零解 $x=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$. 令 $|t_i|=\max\{\ |t_1|,|t_2|,\cdots,|t_n|\ \}$，则 $|t_i|>0$.

考虑第 i 个方程 $a_{i1}t_1+\cdots+a_{in}t_n=0$ 可得 $a_{ii}t_i=-\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij}t_j$，

于是有 $|a_{ii}||t_i|=|\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij}t_j|\leq \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}||t_j|\leq \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}||t_i|$.

因 $|t_i|>0$，故 $|a_{ii}|\leq |a_{i1}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|$，与题设矛盾。故系数行列式不为 0，方程组有唯一解。

七. (10**分**) 设线性变换 A 在自然基 $e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, e_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ (1) 求 A 在基 $\alpha_1=2e_1+3e_2+e_3, \alpha_2=3e_1+4e_2+e_3, \alpha_3=e_1+2e_2+2e_3$ 下的矩阵 B (2) 设向量 $x=e1+6e_2-e_3$，求 Ax 在基 e_1,e_2,e_3 下的坐标。

解：(1) 设基 e_1,e_2,e_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为 T，则 $T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，可以求得 $T^{-1}=\begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

则 $B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) x 在基 e_1,e_2,e_3 下的坐标是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$，故 Ax 在基 e_1,e_2,e_3 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -56 \\ -78 \\ -40 \end{pmatrix}.$$