计算机组织结构

3 数据的机器级表示

任桐炜

2021年9月14日

南京大学
NANJING UNIVERSITY

教材对应章节

第2章 数据的机器级表示

第9章 计算机算术

信息的二进制编码

- 在冯·诺依曼结构中，所有信息（代码和数据）都采用二进制编码
  - 编码：用少量简单的基本符号对复杂多样的信息进行一定规律的组合
  - 采用二进制的原因
    - 多种物理器件可以表示两种稳定的状态，用于表示0和1
    - 二进制的编码和运算规则简单
    - 1和0可以对应逻辑命题中的“真”和“假”
  - K位的二进制编码至多表示2^k个不同的值

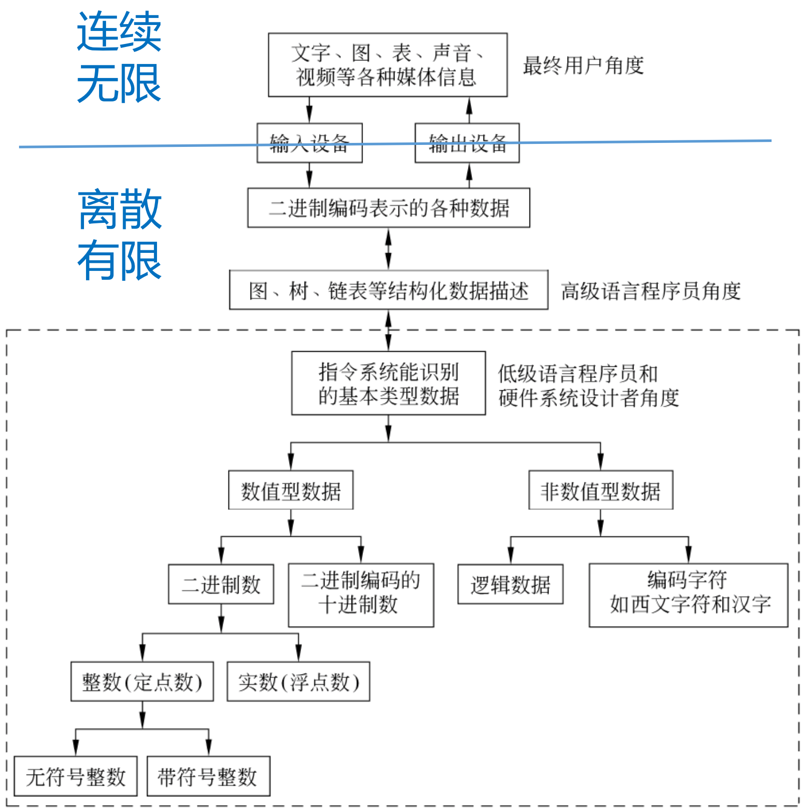


图 2.1 计算机外部信息与内部数据的转换

回顾：整数的二进制数表示

整数的二进制数表示

- 无符号整数
- 有符号整数：原码，反码，移码，补码
  - 原码、反码、移码在进行加法运算时都会造成不必要的硬件需求，因此目前计算机中普遍使用补码
  - 二进制补码的运算
  - 二进制-十进制转换

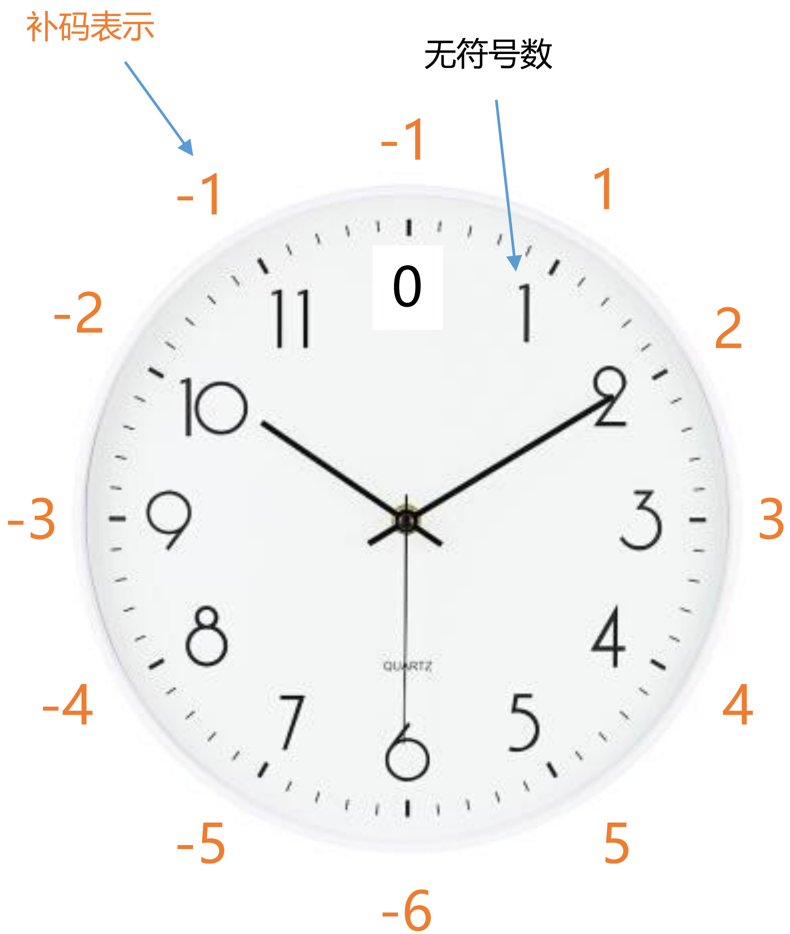
补码表示法的优势

- 补码表示法 vs. 原码表示法

	补码表示法		原码表示法	
9	0000 1001		0000 1001	
+ 8	+ 0000 1000		+ 0000 1000	
17	0001 0001	17	0001 0001	17
9	0000 1001		0000 1001	
+ -8	+ 1111 1000		+ 1000 1000	
1	10000 0001	1	1001 0001	-17

无论同号还是异号都可以直接相加

补码表示



- 类比：时钟
  - 表示范围：0 ~ 11 ➔ -6 ~ 5
  - 6 ~ 11 ➔ -6 ~-1 （变化：减12）
- 补码（相对于无符号数）
  - 000…000 ~ 011…111：表示的值不变
  - 100…000 ~ 111…111：表示的值由2^(k-1)~2^k-1变为-2^(k-1)~-1
    - 真值为原来的无符号数对应的真值减去2^k（取反加1的由来）

补码的真值

- 补码的真值

$$[X]_C = X_n X_{n-1} \dots X_2 X_1$$

$$X = -X_n \times 2^{n-1} + \cdots + X_2 \times 2^1 + X_1 \times 2^0$$

（这个式子的由来需要分情况Xn为正和为负讨论）

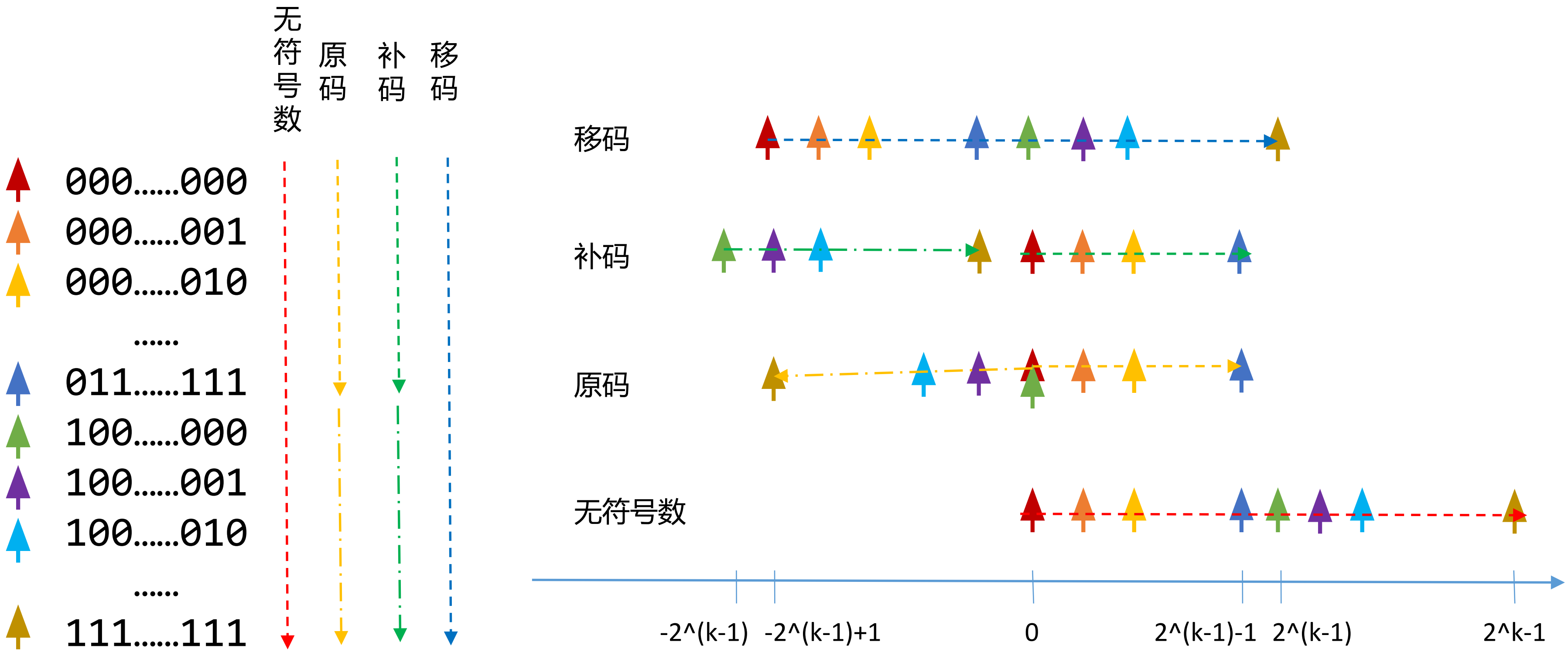
−128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	0	0	0	1	1

−128 +2 +1 = −125

- 值的范围

$$-2^{n-1} \le X \le 2^{n-1} - 1$$

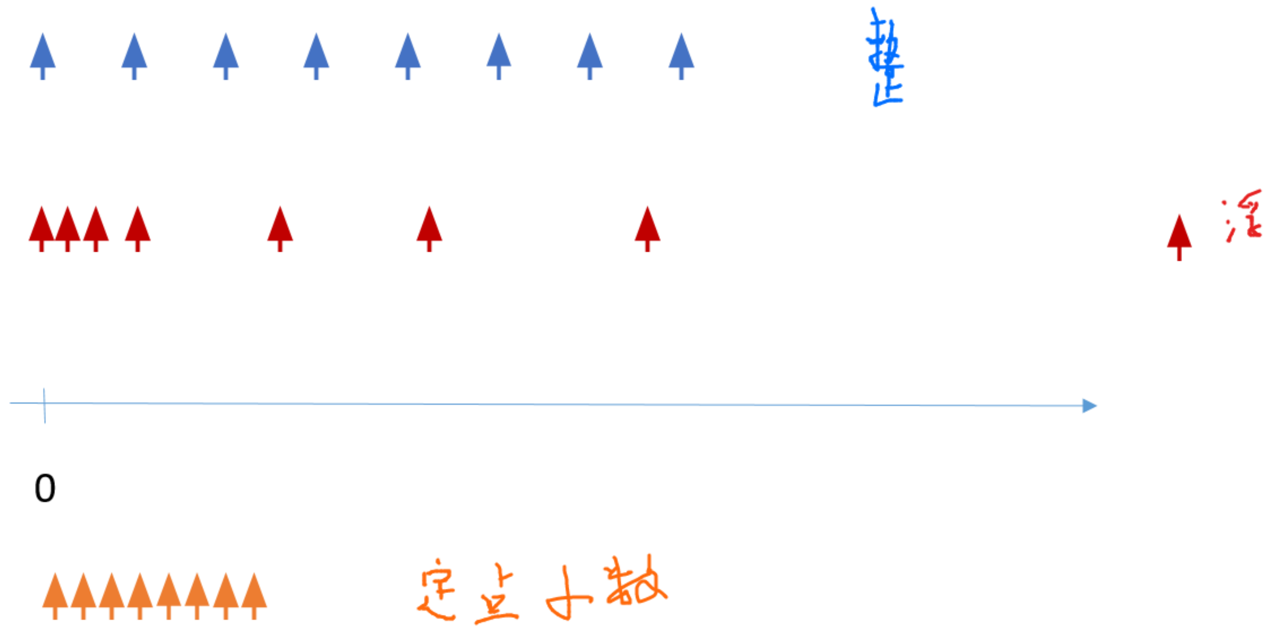
扩展：不同的整数编码



无符号数
原码
补码
移码
000……000
000……001
000……010
……
011……111
100……000
100……001
100……010
……
111……111
移码
补码
原码
无符号数
-2^(k-1)
-2^(k-1)+1
0
2^(k-1)-1
2^(k-1)
2^k-1

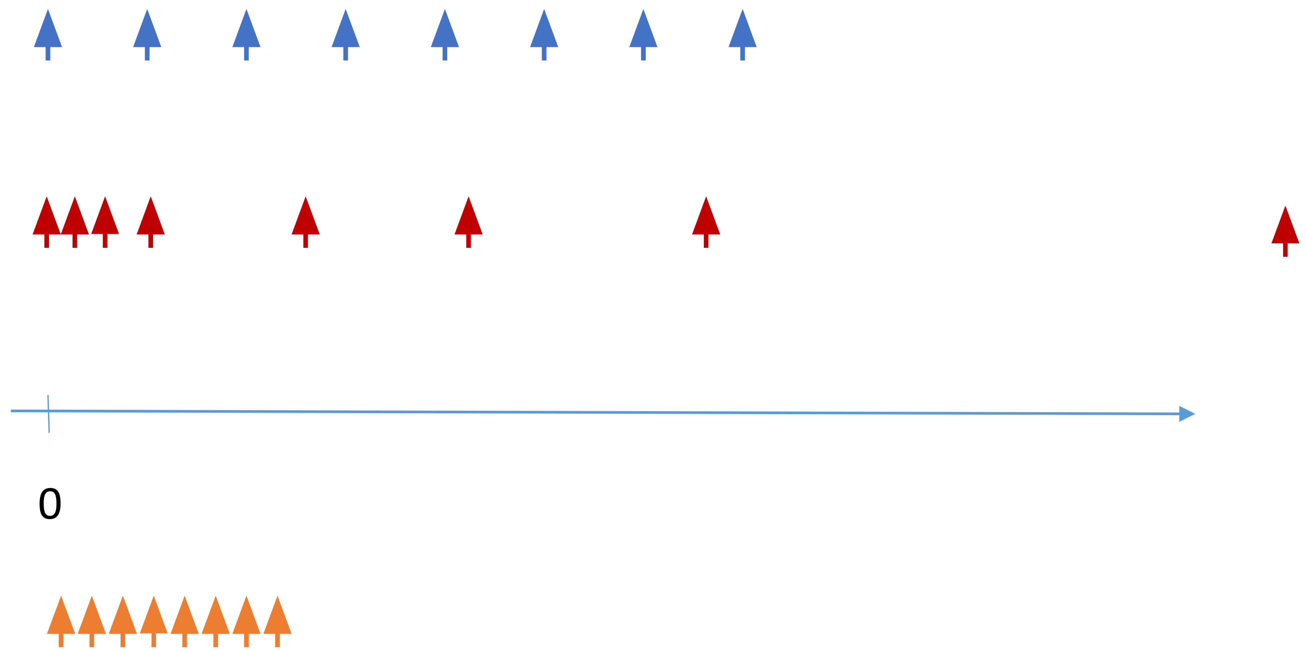
K位0/1串 ➔ 能表示的值的数量<= 2^k

000……000
000……001
000……010
……
011……111
100……000
100……001
100……010
……
11……111



K位0/1串 ➔ 能表示的值的数量<= 2^k

000……000
000……001
000……010
……
011……111
100……000
100……001
100……010
……
11……111



回顾：浮点数的二进制数表示

浮点数的二进制数表示

- 实数表示
- 定点表示法表示值的范围是有限制的
- 科学计数法

$$\pm S \times B^E$$

  - ±（符号）：正或负
  - S（尾数/有效值）
  - B（底/基）：对所有的数都是相同的，不需要存储的（隐含的）
  - E（阶码/指数）

规格化数

- 任何浮点数都能以多种样式来表示

$$0.110 \times 2^5, 110 \times 2^2, 0.0110 \times 2^6$$

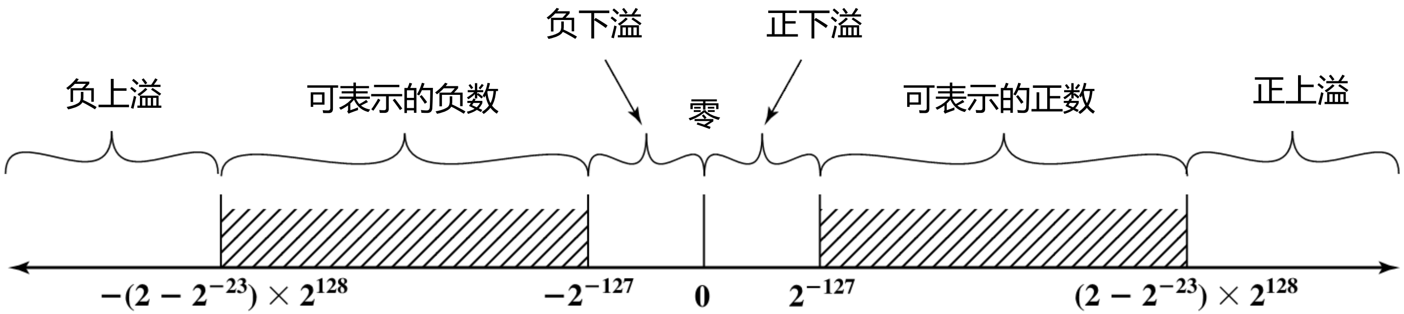
- 规格化表示

$$\pm 1.bbb \ldots b \times 2^E$$

  - 符号总是位于字的第1位
  - 尾数（S）的第1位总是1，不需要存于尾数字段中（默认省略）
  - 阶码（E）的真实值加127后，再存入阶码字段中（移码）
  - 底（B）默认为2

规格化数的值的范围

- 值的范围
  - 介于 $-(2-2^{-23})\times 2^{128}$ 和 -2^{-127} 之间的负数
  - 介于 2^{-127} 和 $(2-2^{-23})\times 2^{128}$ 之间的正数



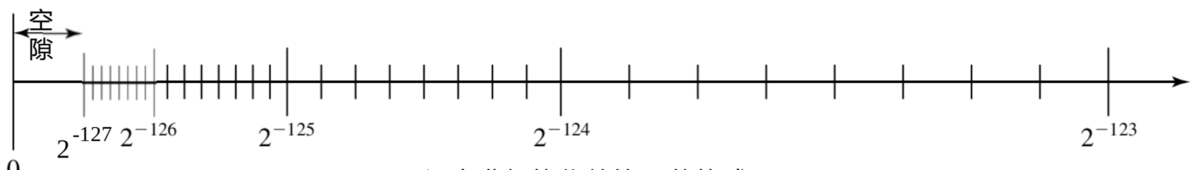
[袁睿, 131250088]

规格化数的变化

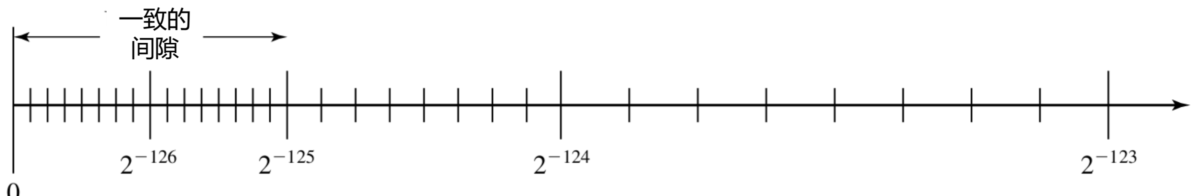
- 对于一定长度的规格化数，表示范围和精度之间存在权衡
  - 增加阶码（E）位数：扩大表示范围，降低表示精度
  - 增加尾数（S）位数：提高表示精度，减少表示范围
  - 采用更大的底（B）：实现更大的范围，降低表示精度

非规格化数

- 处理规格化数中的下溢情况
- 当结果的阶值太小时，通过右移进行非规格化；每次右移阶值增，直到阶值落在可表示范围内



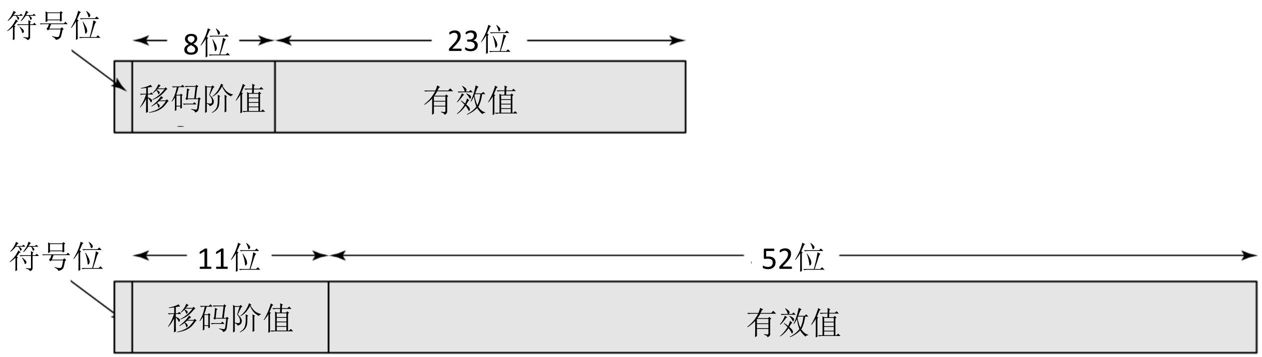
(a)没有非规格化数的32位格式



(b)有非规格化数的32位格式

IEEE 754 标准

- 定义32位的单精度和64位的双精度两种格式



- 定义两种拓展格式
  - 在阶值字段提供更多的位（拓展范围）和在有效值字段提供更多的位（拓展精度）
  - 减少过度舍入误差和计算过程中溢出的机会

IEEE 754 标准 (cont.)

- 格式参数

参数	格式			
	单精度	单精度拓展	双精度	双精度拓展
字宽（位数）	32	≥43	64	≥79
阶值位宽（位数）	8	≥11	11	≥15
阶值偏移量	127	未指定	1023	未指定
最大阶值	127	≥1023	1023	≥16383
最小阶值	−126	≤−1022	−1022	≤−16382
数的范围（底为10）	$10^{-38}, 10^{+38}$	未指定	$10^{-308}, 10^{+308}$	未指定
有效值位宽（位数）	23	≥31	52	≥63
阶值的数目	254	未指定	2046	未指定
小数的数目	2^{23}	未指定	2^{52}	未指定
值的数目	1.98×2^{31}	未指定	1.99×2^{63}	未指定

IEEE 754 标准 (cont.)

符号：0
用法：表示未初始化的值，用于捕获异常

符号：1
用法：表示未定义的算术结果，如除数等于0

	单精度（32位）				双精度（64位）			
	符号	移码阶值	小数	值	符号	移码阶值	小数	值
正零	0	0	0	0	0	0	0	0
负零	1	0	0	-0	1	0	0	-0
正无穷大	0	255 (all 1s)	0	∞	0	2047 (all 1s)	0	∞
负无穷大	1	255 (all 1s)	0	$-\infty$	1	2047 (all 1s)	0	$-\infty$
静默式非数	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN	0 or 1	2047 (all 1s)	$\neq 0$	NaN
通知式非数	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN	0 or 1	2047 (all 1s)	$\neq 0$	NaN
正的规格化非零数	0	$0 < e < 255$	f	$2^{e-127}(1.f)$	0	$0 < e < 2047$	f	$2^{e-1023}(1.f)$
负的规格化非零数	1	$0 < e < 255$	f	$-2^{e-127}(1.f)$	1	$0 < e < 2047$	f	$-2^{e-1023}(1.f)$
正的非规格化数	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-126}(0.f)$	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-1022}(0.f)$
负的非规格化数	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-126}(0.f)$	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-1022}(0.f)$

[田鸿龙，181250131]

IEEE 754 标准 (cont.)

- 例子

0.5 = 0.100…0B = (1.00..0)2×2^(-1)

0 01111110 000…00 (23)

-0.4375 = -0.01110…0B = - (1.110..0)2×2^(-2)

1 01111101 110…00 (21)

二进制编码的十进制数表示

- 浮点运算的问题
  - 精度限制
  - 转换成本高
- 应用需要
  - 长数字串的计算：会计，……
- 解决方法
  - 用4位二进制编码十进制（BCD）表示0, 1, ..., 9，直接计算

二进制编码的十进制数表示 (cont.)

- 自然BCD码 (NBCD, 8421 码)
  - 0 ~ 9: 0000 ~ 1001
  - 符号: 使用四个最高有效位
    - 正: 1100 / 0
    - 负: 1101 / 1
  - 例子
    - +2039: **1100** 0010 0000 0011 1001 / **0** 0010 0000 0011 1001
    - -1265: **1101** 0001 0010 0110 0101 / **1** 0001 0010 0110 0101
- 其他BCD码
  - 2421, 5211, 4311, …

总结

- 信息的二进制编码
- 整数的二进制表示
  - 补码表示的优势，表示方法，真值计算
  - 不同的整数二进制表示
- 浮点数的二进制表示
  - 浮点数表示方法，规格化数，非规格化数，IEEE 754标准
- 二进制编码的十进制数表示
  - NBCD码表示方法

谢谢

rentw@nju.edu.en

南京大學
NANJING UNIVERSITY