3.4 线性方程组解的结构

先考虑较简单的齐次方程组的解集及表示.

3.4.1 齐次方程组解的结构

考虑方程组$Ax=\theta$，它的解有如下特点 .

定理3.4.1 若α_1, α_2是方程组 $Ax=\theta$ 的解，则其线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 也是该方程组的解.

证明 直接验证：$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2=k_1\theta+k_2\theta=\theta$.

定义3.4.1 (齐次线性方程组、基础解系) 右端为零的线性方程组称为齐次线性方程组；能线性表示出齐次方程组所有解的极大无关向量组称为该齐次线性方程组的基础解系.

定义3.4.2 (方程组的特解、通解) 方程组的某一个解称为方程组的特解；方程组所有的解的集合称为方程组的通解.

注：从定理3.4.1易知齐次方程组多个解的线性组合还是齐次方程组的解 .

齐次方程组除了零解，我们更加关心它的非零解.

定理3.4.2 设 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$，若$\mathrm{r}(A)=n$，则$Ax=\theta$ 只有零解；
若$\mathrm{r}(A)<n$，则$Ax=\theta$ 有非零解.

证明 由定理3.3.1知，当 $\mathrm{r}(A)=n$时，$Ax=\theta$只有唯一解$x=\theta$，即零解.
当$\mathrm{r}(A)<n$时，$Ax=\theta$有无穷多解，故除零解外还有非零解.

例3.4.1 判别下列齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=0, \\ -x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

是否有非零解.

解 对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其秩为3，所以方程组只有零解(秩等于矩阵列数).

推论3.4.3(定理1.2.11) 方程组 $Ax=\theta$，$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$有非零解的充要条件是 $|A|=0$.

推论3.4.4 若$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$，且 $m<n$，则 $Ax=\theta$有非零解.

证明 由定理3.4.2直接可得方程组有非零解.

例3.4.2 讨论含参的3元方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解的条件.

解 计算系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda.$$

易知当$\lambda=0$时方程组有非零解，当$\lambda\neq0$时，方程组只有零解.

例3.4.3 求解下列齐次方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

解 将系数矩阵化行简化梯形矩阵

首1　　非首1的列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对应方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ **即方程组** $\begin{cases} x_1 = x_2 - x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases}$

得到解： $\begin{cases} x_1 = s - t, \\ x_2 = s, \\ x_3 = 2t, \\ x_4 = t, \end{cases} \quad s,t \in \mathrm{R}.$ **向量形式为：** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = s\alpha_1 + t\alpha_2, \quad s,t \in \mathrm{R}.$

α_1、α_2 即是基础解系

- 将行简化梯形的首1(①表示)的列对应的未知量保留在方程组左边，称为非自由变量；
- 将行简化梯形的非首1的列对应的未知量移到方程组右边,称为自由变量,可任意取值.

定理3.4.5 A经过适当的初等行变换可以化为如下形式的行简化梯形矩阵：

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}
1 & d_{12} & \cdots & 0 & d_{1i_2+1} & \cdots & 0 & d_{1i_r+1} & \cdots & d_{1n} \\
0 & 0 & \cdots & 1 & d_{2i_2+1} & \cdots & 0 & d_{2i_r+1} & \cdots & d_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{ri_r+1} & \cdots & d_{rn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & i_2 & i_2+1 & \cdots & i_r & i_r+1 & \cdots & n \end{matrix}
\end{array}, \qquad (3.6)$$

其中最后一行是矩阵所在列的列标号. 对$n\text{-}r$个自由变量$x_2,\ldots,x_{i2-1}, x_{i2+1}, \ldots, x_{ir-1}, x_{ir+1}, \ldots, x_n$分别取$n\text{-}r$组数据 $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$, … , $(0,\ldots,0,1)$，则可得$n\text{-}r$组非自由变量$x_1, x_{i2},\ldots, x_{ir}$的值，从而构成 $n\text{-}r$组方程组的解，设该$n\text{-}r$组解的解向量为：$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$，则它们就是方程组$Ax=\theta$的一个基础解系. 方程组的通解为：

$$k_1\alpha_1+ \ldots +k_{n-r}\alpha_{n-r}，\text{其中}k_1, \ldots , k_{n-r} \in \mathbf{R}\text{为任意常数}.$$

证明思路: (3.6)对应于方程组

$$\begin{cases}
x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1i_2+1}x_{i_2+1} + \cdots + d_{1i_r+1}x_{i_r+1} + \cdots + d_{1n}x_n = 0, \\
\qquad x_{i_2} + d_{2i_2+1}x_{i_2+1} + \cdots + d_{2i_r+1}x_{i_r+1} + \cdots + d_{2n}x_n = 0, \\
\qquad x_{i_3} + d_{3i_3+1}x_{i_3+1} + \cdots + d_{3i_r+1}x_{i_r+1} + \cdots + d_{3n}x_n = 0, \\
\qquad \cdots\cdots \\
\qquad\qquad x_{i_r} + d_{ri_r+1}x_{i_r+1} + \cdots + d_{rn}x_n = 0.
\end{cases}$$

进一步，将自由变量移到方程组的右边，得到$Ax=\theta$ 的同解方程组.

$$
\begin{cases}
x_1 = -d_{12}x_2 - \cdots - d_{1i_2+1}x_{i_2+1} - \cdots - d_{1i_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - d_{1n}x_n, \\
x_{i_2} = -d_{2i_2+1}x_{i_2+1} - \cdots - d_{2i_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - d_{2n}x_n, \\
x_{i_3} = -d_{3i_3+1}x_{i_3+1} - \cdots - d_{3i_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - d_{3n}x_n, \\
\cdots\cdots \\
x_{i_r} = -d_{ri_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - d_{rn}x_n.
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

下面只要找 (3.7)的基础解系，即为同解方程组$Ax=\theta$的基础解系.

对n-r个自由变量$x_2,\ldots, x_{i2-1}, x_{i2+1}, \ldots , x_{ir-1}, x_{ir+1}, \ldots , x_n$分别取$n$-$r$组数据(1,0,…,0) , (0,1,0,…,0) , … , (0,…,0,1)代入(3.7)，可得n-r组非自由变量x_1, $x_{i2},\ldots, x_{ir}$的值，从而构成n-r组方程组的解，其解向量为： $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$.

下面证明$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$ 为一个基础解系.

即证明：

(1) $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$线性无关.

(2) 方程组的任意解β都是$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$的线性组合.

黑色为自由变量;
红色为非自由变量

$$\text{设} x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{i_2} \\ x_{i_2+1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \\ x_{i_r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{则} \alpha_1=\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_{i_2-1}=\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_{n-r}=\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \ \text{有} k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix} * \\ k_1 \\ \vdots \\ * \\ k_{i_2-1} \\ \vdots \\ * \\ k_{i_r+1-r} \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

即 $k_1=k_2=\ldots=k_{n-r}=0$，于是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ 线性无关 .

$$\text{设}x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{i_2}\\x_{i_2+1}\\\vdots\\x_{i_r}\\x_{i_r+1}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\text{若有一解向量}\beta=\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_{i_2}\\s_{i_2+1}\\\vdots\\s_{i_r}\\s_{i_r+1}\\\vdots\\s_n\end{pmatrix},\text{因为}\alpha_1=\begin{pmatrix}*\\1\\\vdots\\*\\0\\\vdots\\*\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_{i_2-1}=\begin{pmatrix}*\\0\\\vdots\\*\\1\\\vdots\\*\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix}*\\0\\\vdots\\*\\0\\\vdots\\*\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

$$\text{令}\gamma=s_2\alpha_1+\cdots+s_{i_2+1}\alpha_{i_2-1}+\cdots+s_n\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix}t_1\\s_2\\\vdots\\t_{i_2}\\s_{i_2+1}\\\vdots\\t_{i_r}\\s_{i_r+1}\\\vdots\\s_n\end{pmatrix},\qquad\text{则 }\beta\text{-}\gamma=\begin{pmatrix}s_1-t_1\\0\\\vdots\\s_{i_2}-t_{i_2}\\0\\\vdots\\s_{i_r}-t_{i_r}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

显然β-γ 满足方程组(3.7)，而且(3.7)右边的值为0，于是左边非自由变量的值t_i-s_i都为0，于是β-γ=θ，即β=γ= $s_2\alpha_1+\ldots+s_{i2+1}\alpha_{i2-1}+\ldots+s_n\alpha_{n-r}$.

注1 若系数矩阵简化后的行简化梯形矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{1,r+1} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_{2,r+1} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{r,r+1} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{则} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} -d_{1,r+1} \\ \vdots \\ -d_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -d_{1,r+2} \\ \vdots \\ -d_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_{n-r} = \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

是齐次方程组的一个基础解系.

注2 若齐次方程组有非零解，则该方程组的基础解系并不唯一. 事实上，若齐次方程组 $Ax=\theta$ 有基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$，则 $2\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, 2\alpha_{n-r}$ 和 $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-r}$ 均为原齐次方程组的基础解系 .

推论3.4.6 若 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$，则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(N(A))=n$，其中 $N(A)$ 表示 $Ax=\theta$ 的基础解系为列构成的矩阵.

证明: 由定理3.4.5的结论，若 $\mathrm{r}(A)=r$，则其基础解系含 $n-r$ 个向量，即 $\mathrm{r}(N(A))=n-r$.

例3.4.4 求齐次方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2=0, \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ **的基础解系及通解.**

解 初等行变换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

得一个基础解系为 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **于是所求通解为** $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\alpha}$, $k\in\mathbf{R}$.

例3.4.5 求齐次方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+6x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+7x_3-4x_4=0 \end{cases}$ **的基础解系.**

解 初等行变换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

可得一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,3/2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

例3.4.6 求齐次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2 \ +2x_3+7x_4=0, \\ 3x_1-6x_2 \ +4x_3+4x_4=0, \\ 4x_1-8x_2 \ +4x_3+15x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系.

解 初等行变换 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & -6.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

取自由变量 x_2 为1，解得基础解系为 $\alpha=(2,1,0,0)^T$.

解法二 初等行变换

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & -6.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{调整列}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{matrix} \end{array}$$

调整后基础解系为 $(x_1,x_3,x_4,x_2)=(2,0,0,1)^T$，原方程组基础解系为 $\alpha=(2,1,0,0)^T$.

齐次方程组基础解系的进一步讨论

行简化梯形对应的解答阵：

行简化梯形去掉0行；添加非首1对应列的行(第i列添加第i行$-e_i^T$)

具体例子：

行简化：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 解答阵：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

行简化：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 解答阵：$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

解答阵用于解齐次线性方程组：

草稿纸：解答阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

-1对应列即基础解系，最好取负.

例3.4.5 求齐次方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$
的基础解系.

解
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
故基础解系为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

草稿纸：解答阵 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例3.4.6 求齐次方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系.

解 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & -6.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系为 $\alpha=(2,1,0,0)^T$.

原理： 以例3.4.6为例进行说明：

对应于行简化梯形 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的是原方程组的同解方程组：$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases}$

自由变量(红色)右移得：$\begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases}$ 向量形式：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 或 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

自由变量不右移即为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$. 对应矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例3.4.7 证明：若 $A\in R^{n\times n}$，则

$$r(A^*)=\begin{cases} n，若\ r(A)=n, \\ 1，若\ r(A)=n-1, \\ 0，若\ r(A)\le n-2\ . \end{cases}$$

证明　当$r(A)\le n-2$时，有$A^*=O$，故$r(A^*)=0$.

当 $r(A)=n$时，有 $|A|\neq 0$，再由 $AA^*=|A|E$可得$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，从而有$r(A^*)=n$.

当$r(A)=n-1$时，有$|A|=0$，$A^*\neq O$，且$Ax=\theta$的基础解系向量个数为1.

由 $A^*\neq O$得到 $r(A^*)\ge 1$，再由$AA^*=|A|E=O$可知 A^* 的列是$Ax=\theta$的解，

故A^*的列秩即 $r(A^*)\le 1$，从而 $r(A^*)=1$.

♦ $r(A^*)\le 1$，也可由秩的关系式：$0=r(O)=r(AA^*)\ge r(A)+r(A^*)-n=r(A^*)-1$得到.

例3.4.8 已知向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}^n$ 线性无关，且α_1, α_2为方程组$A^{\mathrm{T}}x=\theta$的基础解系，α_2, α_3为方程$B^{\mathrm{T}}x=\theta$的基础解系，其中$A \in \mathbf{R}^{n\times m}$，$B \in \mathbf{R}^{n\times p}$，求$\mathrm{r}((A,B))$.

解 显然 $A^{\mathrm{T}}x=\theta$ 的通解为 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，而 $B^{\mathrm{T}}x=\theta$ 的通解为 $x=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$，其中$k_1,k_2,t_1,t_2$为任意实数.

现在考虑方程组

$$\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} x = \theta. \qquad (1)$$

则该方程组的通解是方程组$A^{\mathrm{T}}x=\theta$ 的通解和方程组 $B^{\mathrm{T}}x=\theta$ 的通解的交集. 即满足

$$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$$

的所有的组合. 改写上述式子如下

$$k_1\alpha_1+(k_2-t_1)\,\alpha_2-t_2\alpha_3=\theta,$$

则由向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性无关性，必有 $k_1=t_2=0$，$k_2=t_1$， 故方程组(1)的通解为 $k_2\alpha_2$，基础解系为α_2，由推论3.4.6可知方程组(1)的系数矩阵秩为 n-1 .

现在我们有

$$r((A,B)) = r((A,B)^T) = r\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} = n-1.$$

补充例3C 已知$A,B\in \mathrm{R}^{m\times n}$，$B=AC$，且$Ax=\theta$的一个基础解系是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$，求方程组 $(A,B)y=\theta$的一个基础解系.

解：易知 $\mathrm{r}(A)=n-r$，且 $\mathrm{r}(A)\le \mathrm{r}(A,B)=\mathrm{r}(A,AC)=\mathrm{r}(A(E,C))\le \mathrm{r}(A)$，
故$\mathrm{r}(A,B)=\mathrm{r}(A)=n-r$，于是$(A,B)y=\theta$的基础解系含$n+r$个向量.
将$C\in \mathrm{R}^{n\times n}$按列分块 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$，考虑向量：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\gamma_1\\-e_1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}\gamma_2\\-e_2\end{pmatrix},\cdots,\eta_n=\begin{pmatrix}\gamma_n\\-e_n\end{pmatrix},\eta_{n+1}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\theta\end{pmatrix},\eta_{n+2}=\begin{pmatrix}\alpha_2\\\theta\end{pmatrix},\cdots,\eta_{n+r}=\begin{pmatrix}\alpha_r\\\theta\end{pmatrix},$$

由 $B=AC$可得 $(A,B)\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right)=(A,B)\begin{pmatrix}C\\-E\end{pmatrix}=\theta$.

易知 $(A,B)\eta_{n+j}=A\alpha_j=\theta, j=1,\ldots,r$ ，故$\eta_1, \eta_2,\ldots, \eta_{n+r}$为$(A,B)y=\theta$的非零解.

因为 $k_1\eta_1+k_2\eta_1+\cdots+k_{n+r}\eta_{n+r}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\gamma_i+\sum\limits_{j=1}^{r}k_{n+j}\alpha_j\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta\\\theta\end{pmatrix}$,其中$\beta=\begin{pmatrix}-k_1\\\vdots\\-k_r\end{pmatrix}$

则$k_1=k_2=\ldots=k_n=0$，又由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$是基础解系可得 $k_{n+1}=k_{n+2}=\ldots=k_{n+r}=0$.
故 $\eta_1, \eta_2,\ldots, \eta_{n+r}$为$(A,B)y=\theta$ 的一个基础解系.

补充例3D 已知$Ax=\theta$的一个基础解系是$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$，$C\in\mathbf{R}^{r\times r}$，$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)C$，证明$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$也是一个基础解系的充要条件是$C$可逆.

证明：因为 $A(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)=A(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)C=OC=O$，故$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$为$Ax=\theta$的解.

又有 $\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)=\mathrm{r}((\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)C)\le\mathrm{r}(C)$.

"=>"：$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$也是一个基础解系，故有 $r=\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)\le\mathrm{r}(C)\le r$，

于是 $\mathrm{r}(C)=r$，C为满秩矩阵，即C可逆.

"<="：C可逆，则有$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)C^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$，于是

$r=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=\mathrm{r}((\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)C^{-1})\le\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)\le r$，即$\mathrm{r}(\beta_1,\ldots,\beta_r)=r$，

故r个解向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$线性无关，也是$Ax=\theta$的基础解系.

补充例3E 已知 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$A$的上面$n$-1行线性无关，且可表示$A$的最后一行，证明：$(M_{n1},-M_{n2},\ldots,(-1)^{n-1}M_{nn})^{\mathrm{T}}$为$Ax=\theta$的一个基础解系.

解：因为 A的上面n-1行线性无关，且可表示A的最后一行，故有 $\mathrm{r}(A)=n-1$，$|A|=0$,且有 $M_{n1},M_{n2},\ldots,M_{nn}$不全为0.令$\beta=(M_{n1},-M_{n2},\ldots,(-1)^{n-1}M_{nn})^{\mathrm{T}}$,则$\beta\neq\theta$.

由于 $a_{i1}A_{n1}+a_{i2}A_{n2}+\ldots+a_{in}A_{nn}=|A|\delta_{in}=0$, $i=1,2,\ldots,n$.

又 $a_{i1}A_{n1}+a_{i2}A_{n2}+\ldots+a_{in}A_{nn}=(-1)^{n+1}(a_{i1}M_{n1}-a_{i2}M_{n2}+\ldots+(-1)^{n-1}a_{in}M_{nn})$，

故$a_{i1}M_{n1}-a_{i2}M_{n2}+\ldots+(-1)^{n-1}a_{in}M_{nn}=0$, $i=1,2,\ldots,n$，此即$A\beta=\theta$.

又$\mathrm{r}(A)=n-1$，故 β为$Ax=\theta$的一个基础解系.

补充例3F 求一个矩阵A，使得$Ax=\theta$的一个基础解系是$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\in\mathbf{R}^n$, $r<n$.

解：设矩阵 $B^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbf{R}^{n\times r}$，考虑方程组 $By=\theta$.

因为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$是基础解系，故 B^{T}为列满秩，于是 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B^{\mathrm{T}})=r$ ，

且有 $B\in\mathbf{R}^{r\times n}$, $y\in\mathbf{R}^n$. 故 $By=\theta$的基础解系含$n-r$个向量，设一个基础解系为 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-r}$，再设矩阵$C=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-r})$，则有 $BC=O$，

于是 $C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=O$，即$r$个无关向量为$C^{\mathrm{T}}x=\theta$的解，

且 $\mathrm{r}(C^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(C)=\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-r})=n-r$. 取$A=C^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-r})^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{r}(A)=n-r$，

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$为$C^{\mathrm{T}}x=\theta$也即$Ax=\theta$的一个基础解系.

补充例3G 已知3阶矩阵A的第一行是(a,b,c)，a,b,c不全为零，

矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$为常数), 且$AB=O$，求线性方程组$Ax=\theta$的通解.

解 因为a,b,c不全为零，故$A\neq O$，$r(A)\geq 1$. 又$AB=O$，故$Ax=\theta$有非零解.
$r(A)<3$，可得 $r(A)=1$或 $r(A)=2$.
(1)当$r(A)=1$时，不妨设$a\neq 0$，则有

$$A\to\begin{pmatrix}1&b/a&c/a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是基础解系为：$\beta_1=(-b/a,1,0)^T$，$\beta_2=(-c/a,0,1)^T$，
通解为 $x=C_1\beta_1+C_2\beta_2$，C_1,C_2为任意常数.

(2)当$r(A)=2$时，由$AB=O$知方程组基础解系为$\alpha=(1,2,3)^T$，
通解为 $x=C\alpha$，C为任意常数.

补充例3H 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩为2，有如下关系

$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+5\alpha_5=0,$$
$$2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_4+2\alpha_5=0,$$
$$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5=0,$$

求一个极大无关组.

解：系数矩阵化简到行简化梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 有关系：$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_5=0, \\ \alpha_3+\alpha_5=0, \\ \alpha_4+\alpha_5=0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \alpha_1=\alpha_2-2\alpha_5, \\ \alpha_3=-\alpha_5, \\ \alpha_4=-\alpha_5, \end{cases} \quad (*)$

由于初等行变换是可逆的，故(*)与题设关系式是等价的，于是从(*)知$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$可由$\alpha_2,\alpha_5$表示，于是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$与向量组$\alpha_2,\alpha_5$等价，故 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=r\{\alpha_2,\alpha_5\}=2$，可知$\alpha_2,\alpha_5$是一个极大无关组.

3.4.2 非齐次方程组解的结构

解非齐次方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+x_2+9x_3=-6, \\ x_1+5x_2=6. \end{cases}$

化行简化梯形

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -6 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\text{ 对应方程组}\begin{cases} x_1+5x_3=-4, \\ x_2-x_3=2. \end{cases}$$

得方程组的解 $\begin{cases} x_1=-4-5s, \\ x_2=2+s, \quad s\in\mathrm{R}. \\ x_3=s, \end{cases}$ 向量形式为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s\in\mathrm{R}.$

可以看出：

非齐次方程组的通解为：一个特解+相应齐次方程组的通解.

例3.4.9 找出方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ \ + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 \ \ + 9x_3 = -6, \\ x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}$$

的两个特解并讨论它们的差的性质.

解 容易验证 $\boldsymbol{\eta}_1$=(1,1,-1)$^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$=(-4,2,0)$^{\mathrm{T}}$ 是原方程组的两个特解，两特解的差为 $\boldsymbol{\eta}$=(5,-1,-1)$^{\mathrm{T}}$，也容易验证它是对应齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ \ + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 \ \ + 9x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

的解.

定理3.4.7 若$A\eta=b$ ($b\neq\theta$)，则$Ax=b$ 的通解可以表示为

$$\eta+\alpha,$$

其中α为 $Ax=\theta$的解. 若$Ax=\theta$ 的基础解系为$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$，则 $Ax=b$ 的通解为：$\eta+k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r$，其中$k_1,\ldots,k_r\in\mathbf{R}$为任意实数 .

证明 由$A(\eta+\alpha)=A\eta+A\alpha=b+\theta=b$，故$\eta+\alpha$为$Ax=b$的解.

设β为$Ax=b$的任意一个解，则$A(\beta-\eta)=A\beta-A\eta=b-b=\theta$，即$\beta-\eta$为$Ax=\theta$的一个解，设为$\alpha$，则有$\alpha=\beta-\eta$，即$\beta=\eta+\alpha$.

综合上述，通解为：$\eta+\alpha=\eta+k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r$.

例3.4.10 求右边非齐次方程组的通解
$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=6, \\ 2x_1+2x_2+x_3=6, \\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4=12, \\ 4x_1+6x_2-x_3+2x_4=18. \end{cases}$$

解 对增广矩阵做初等行变换
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -4 & 3 & 12 \\ 4 & 6 & -1 & 2 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

令$x_3=x_4=0$，得方程组的一个特解：$\eta=(0,3,0,0)^T$. 对应齐次方程组的一个基础解系为 $\alpha_1=(-2,3/2,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,-1,0,1)^T$.

于是所求通解为：$x=\eta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

补充例3I (利用解答阵) 例：求非齐次方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=6, \\ 2x_1+4x_2+x_3-x_4=3, \\ x_1+2x_2-3x_3+3x_4=12, \\ 4x_1+8x_2-2x_3+2x_4=18. \end{cases}$ 的通解.

解 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 3 & 12 \\ 4 & 8 & -2 & 2 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$

草稿纸：解答阵 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

可得方程组的一个特解：$\eta=(3,0,-3,0)^T$. 对应齐次方程组的一个基础解系为 $\alpha_1=(-2,1,0,0)^T$ ，$\alpha_2=(0,0,1,1)^T$.

于是所求通解为：$x=\eta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

原理：

以上述补充例3I为例：对应于 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, 是同解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ x_3-x_4=-3. \end{cases}$

补上自由变量对应的方程：$x_2-x_2=0$, $x_4-x_4=0$，

得 $\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ x_2-x_2=0, \\ x_3-x_4=-3, \\ x_4-x_4=0. \end{cases}$ 对应矩阵为 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 & 0 \end{array}\right).$

例3.4.11 将向量β表示为向量组 { α_1 , α_2 , α_3 } 的线性组合，其中

$$\beta=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\\mu\\2\end{pmatrix}.$$

解 此即求解

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\,\alpha_3,$$

或者等价地求解方程组
$$\begin{cases}\lambda x_1-2x_2+x_3=2,\\ 2x_1+3x_2+\mu x_3=0,\\ x_1+x_2+2x_3=-1.\end{cases}$$

对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&-2&1&2\\2&3&\mu&0\\1&1&2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\2&3&\mu&0\\\lambda&-2&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\0&1&\mu-4&2\\0&-2-\lambda&1-2\lambda&2+\lambda\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+(\lambda+2)r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&6-\mu&-3\\0&1&\mu-4&2\\0&0&(\mu-6)(\lambda+2)+5&3(\lambda+2)\end{array}\right)=B_1.$$

当 $(\mu-6)(\lambda+2)+5=0$ 时, 显然有$\lambda\neq-2$, 故有$2=r(A)<r(A,b)=3$，所以此时无解.

当 **(μ-6)(λ+2)+5≠0** 时，或者**λ=-2**，或者**λ≠-2, μ≠6-5/(λ+2)**，均有

$$B_1 \xrightarrow{r_3 \div ((\lambda+2)(\mu-6)+5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6-\mu & -3 \\ 0 & 1 & \mu-4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5} \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+(4-\mu)r_3]{r_1+(\mu-6)r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{15}{(\lambda+2)(\mu-6)+5} \\ 0 & 1 & 0 & -1-\dfrac{3(2\lambda-1)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5} \end{array}\right).$$

即方程组的唯一解为
$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{15}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}, \\ x_2 = -1-\dfrac{3(2\lambda-1)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}, \\ x_3 = \dfrac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}. \end{cases}$$

故当且仅当**λ =-2**或**λ ≠-2 , μ ≠6-5/(λ+2)** 时，**β**可线性表示，且线性组合

$$\beta = -\frac{15}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}\alpha_1 - \left(1+\frac{3(2\lambda-1)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}\right)\alpha_2 + \frac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}\alpha_3$$

是唯一的 .

补充例3J 已知4阶方阵$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$均为4维列向量，其中$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$Ax=\beta$的通解.

解 因为$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，故$r(A)=3$.
又由$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 知 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=\theta$，故$Ax=\theta$的基础解系为$\gamma=(1,-2,1,0)^T$.
由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$可知 $\eta=(1,1,1,1)^T$ 为方程组$Ax=\beta$的一个特解，
故方程组的通解为$x=\eta+k\gamma$，k为任意常数.

补充例3K 设A是$n\times 3$矩阵, $r(A)=1$, 若非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$满足 $\alpha_1+2\alpha_2=(7,5,1)^T$, $\alpha_2+2\alpha_3=(7,8,0)^T$, $\alpha_3+2\alpha_1=(13,5,-10)^T$ ，试求该非齐次线性方程组的通解.

解 设$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+2\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+2\alpha_1$，因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$Ax=b$的三个解向量，
故有$A\beta_1=A\alpha_1+2A\alpha_2=3b$，$A\beta_2=3b$，$A\beta_3=3b$. 显然 $x=(1/3)\beta_1$为方程组的特解.
又因为$r(A)=1$，$A(\beta_2-\beta_1)= A\beta_2- A\beta_1=3b-3b=\theta$，$A(\beta_3-\beta_2)=\theta$，
而$\gamma_1=\beta_2-\beta_1=(0,3,-1)^T$与$\gamma_2=\beta_3-\beta_2=(6,-3,-10)^T$线性无关，
故方程组的通解为 $x=(1/3)\beta_1+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2$，$k_1,k_2$为任意常数.

3.5^* 线性最小二乘法

矛盾方程组$Ax=b$无解，此时我们在所有x的取值中找最接近方程组$Ax=b$的解，即找误差向量$r=Ax-b$长度最小的x，这就是方程组$Ax=b$的最小二乘解. 该解其实就是法方程 $A^TAx=A^Tb$ 的解.

定理3.5.1 线性方程组$Ax=b$的法方程 $A^TAx=A^Tb$ 总有解. 当A列满秩时，法方程有唯一解，否则有无穷多组解.

定理3.5.2 x是线性方程组$Ax=b$的最小二乘解的充要条件是x是法方程$A^TAx=A^Tb$的解.

例3.5.1 求右边方程组的最小二乘解

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2-x_3=12, \\ x_1-3x_2-2x_3=-6. \end{cases}$$

解 将方程组写成矩阵形式：$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

其法方程为：$A^TAx=A^Tb$. 求解法方程

$$\left(A^TA, A^Tb\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -5 & -1 & 36 \\ -5 & 15 & 8 & 12 \\ -1 & 8 & 7 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

故方程组的最小二乘解为：$x=(5,3,-1)^T$.