行列式的性质

1. $D^T = D$ 　　行列互换值不变，如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

推论：对行成立的性质，对列也成立

2. 两行互换，值变号　　**推论：存在两行相等，D=0**

3. 某一行都乘 K，等于 K 乘 D　　**推论:某一行有公因式K,K提外面。如果有n行就提 K^n**

4. 两行对应成比例，D=0　　**推论：某一行全为零，D=0**

5. 行列式若有相加，可以拆开 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+5 & 6+7 & 8+9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$

（相加的那一行分开，但其余行保持不变）

6. 某一行乘一个数，加到另一行去，D 不变

如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+3 & 5+6 & 6+9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$（第一行×3，加到第二行）

（可以利用此性质拼凑出三角模型）

行列式按行展开

余子式：去除第 i 行第 j 列剩下的行列式，表示为 M_{ij}

代数余子式：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

按行展开：$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$　　（某行元素×对应代数余子式 之和）

按列展开：$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$　　（某列元素×对应代数余子式 之和）

异乘变零定理：（某行元素×另一行元素的代数余子式）之和为零

拉普拉斯定理：取定 k 行，（由 k 行元素组成的所有 k 阶子式×代数余子式）之和=D

回忆：拉普拉斯定理中 k 阶子式、余子式与代数余子式的概念（与前面不同）
（不太好解释和做笔记，详见宋浩老师视频 1.3 行列式按行展开　27:13——30:23）

应用举例：$$\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\\6&6&8&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+1+2}\times\begin{vmatrix}3&4&5\\1&1&1\\8&3&1\end{vmatrix}$$

行列式相乘规则：行列式①的行与行列式②的列按照顺序逐个相乘并相加**（仅限同阶行列式）**

举例：$$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}5&6\\7&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\times5+2\times7&1\times6+2\times8\\3\times5+4\times7&3\times6+4\times8\end{vmatrix}$$

行列式的计算

技巧：四阶及以上行列式一般化成三角形式，左上角尽量变成 1

巧用等价法：将余子式转化为代数余子式，同时巧用定义构造出行列式

举例：　已知$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\3&2&2&2\\0&7&0&0\\5&3&2&2\end{vmatrix}$,求$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$

解答：　$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=(-1)A_{41}+A_{42}+(-1)A_{43}+A_{44}=D_1=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\3&2&2&2\\0&7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

制造行和：

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ & & \dots & & \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$从第二列起每一项都加到第一列，得

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \dots & a \\ & & \dots & & \\ x+(n-1)a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$提出来，得

$$x+(n-1)a\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & x & a & \dots & a \\ 1 & a & x & \dots & a \\ & & \dots & & \\ 1 & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$第一行$\times(-1)$加到后面每一行，得

$$x+(n-1)a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

加边法（少用）：举例:$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&4&5&6\\0&7&8&9\end{vmatrix}$（不能改变原行列式的值）

三叉型行列式：

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\-1&a_1&0&\dots&1\\-1&0&a_2&\dots&1\\&&\dots&&\\-1&0&0&\dots&a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\frac{1}{a_n}&1&1&\dots&1\\0&a_1&1&\dots&1\\0&0&a_2&\dots&1\\&&\dots&&\\0&0&0&\dots&a_n\end{vmatrix}=(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\frac{1}{a_n})a_1a_2\dots a_n$$

范德蒙德行列式：

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\x_1&x_2&x_3&\dots&x_n\\&&\dots&&\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\dots&x_n^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

对称行列式 ：$\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}$ ①主对角线无要求 ②上下对应元素相等 $a_{ij}=a_{ji}$

反对称行列式：$\begin{vmatrix}0&-1&-2\\1&0&-3\\2&3&0\end{vmatrix}$ ①主对角线全是 0 ②上下对应元素相反 $a_{ij}=-a_{ji}$

③奇数阶反对称行列式，D=0

克莱姆法则：①适用范围：方程=未知数　　系数行列式：D

②$D \neq 0$　$x_j = \frac{D_j}{D}$（D_j是常数项替换列得到的，不好做笔记）

③齐次方程组（常数项都是 0），且$D \neq 0$，$x_i = 0$（仅有 x 全等于 0 的解）

④齐次方程组有非零解$\Leftrightarrow D = 0$

⑤这个垃圾定理我们一般不用

矩阵概念

矩阵：$A_{m\times\mathrm{n}}$，用( )或[ ]表示，矩阵中0省略不写

①其它是零，对角线是 1 的矩阵是称为单位阵，记作 E

②矩阵相等的前提是同型矩阵（行列相等）

矩阵运算

数乘：$k\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 2k & 3k\\4k & 5k & 6k\\7k & 8k & 9k\end{pmatrix}$

矩阵相乘特点（宋氏七字）：中间相等取两头
（可相乘条件：下标中间相等　相乘后矩阵类型：取两头）

特殊的相乘：

①矩阵与零矩阵相乘等于零矩阵，与原矩阵同型
②矩阵与 E 相乘等于原矩阵

矩阵相乘和数字相乘的区别：

①AB 不一定等于 BA，AB 有意义，BA 不一定有意义（若 AB=BA，则称 AB 可交换）

②AB=0，无法推出 A=0 或 B=0

③AB=AC，且 A≠0，无法推出 B=C

④$(AB)^k$ 不一定等于 $A^k B^k$

⑤$(A+B)^2$ 不一定等于 A^2+B^2+2AB

矩阵的转置

①$(A^T)^T=A$

②$(A+B)^T=A^T+B^T$

③$(kA)^T=kA^T$

※④$(AB)^T=B^T A^T$ (注意顺序)　推广结论：$(A_1A_2\ldots A_n)^T=A_n{}^T A_{n-1}{}^T\ldots A_1{}^T$

特殊矩阵

数量矩阵

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & a \end{pmatrix}=\mathrm{aE}$$

对角型矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}=\mathrm{d}iag(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$$

三角矩阵

参考行列式的各种三角

对称矩阵（定义参考行列式）

① $A = A^T$

② AB对称 $\Leftrightarrow$ AB可交换

反对称矩阵（定义参考行列式）

参考行列式

逆矩阵

方阵的行列式 $|A|$

性质①：$|A^T| = |A|$

性质②：$|kA| = k^n|A|$

性质③：$|AB| = |A| \times |B|$

伴随矩阵 A^*（只有方阵才有伴随矩阵）

按**行**求的**代数余子式**，按**列**放置形成矩阵

定理①：$AA^* = A^*A = |A|E$

定理②：$|A^*| = |A|^{n-1}$

逆矩阵的定义

有方阵 A ，存在同阶方阵 B，使得 AB＝BA=E，即 AB 互为逆矩阵，记作 $A^{-1} = B$

推论：只要 AB＝E 或 BA=E 即可判断，不需要两个都验证

矩阵注意事项

①不是所有矩阵都可逆

②若矩阵可逆，逆矩阵唯一

③若$|A| \neq 0$，则称$|A|$为满秩矩阵（或非奇异矩阵，或非退化矩阵）

反之，则称$|A|$为降秩矩阵（或奇异矩阵，或退化矩阵）

求逆矩阵的方法

①伴随矩阵法 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$ **（基本不用）**

②初等变换法

矩阵计算巨大的坑

①注意左乘还是右乘

②矩阵不能减一个数，提公因式的时候记得加个 E

③不要把矩阵放分母上

④先判断是否可逆，再写逆矩阵

逆矩阵的性质

① A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

② $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$（类似转置）

④ $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

⑤ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

⑥ $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$

⑦ $\left(A^*\right)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

A^* 的奇妙运算

① $\left(A^*\right)^* = |A|^{n-2}A$

② $\left(\left(A^*\right)^*\right)^* = |A|^{(n-1)(n-2)+1}A^{-1} = |A|^{n^3-3n+3}A^{-1}$

分块矩阵

标准型：左上角不间断一坨 1，接下来是 0，**可以不是方的，也可以没有 1 或 0。**

分块矩阵的运算

①加法运算：直接加

②k 乘：直接乘

③乘法运算：参考行列式和矩阵的乘法

特殊矩阵的逆矩阵：

① $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -AC^{-1}B^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} A & \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ -AC^{-1}B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$

矩阵的初等变换

任何矩阵都可以经过初等变换变成标准型（从左上角开始）

初等方阵：对单位矩阵 E 进行一次初等变换得到的

① E(i, j) → 交换 i，j 两行得到

② E(i(k)) → 第 i 行乘 k 得到

③ E(i, j(k)) → 第 j 行乘 k 加到第 i 行得到

初等方阵的几个小结论

①初等方阵均可逆

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$$

$$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$$

②初等方阵的逆矩阵也是初等方阵

③初等方阵的转置也是初等方阵

④用初等方阵**左乘** A，相当于对 A 实施了同种**行**变换

⑤用初等方阵**右乘** A，相当于对 A 实施了同种**列**变换

两个充要条件

① $A\cong B\Leftrightarrow$ 存在两个初等方阵 P、Q，使得 PAQ=B

②A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 的标准型为 E $\Leftrightarrow$ 存在若干个初等方阵 P_n，使得 A= $P_1P_2\dots P_n$

初等变换法求逆矩阵

$$(A,E)\xrightarrow{\text{做同等的变换}}(E,A^{-1})$$

矩阵的秩

秩，rank，r(A)=r——非零子式的最高阶数

矩阵的秩的一些结论（对于矩阵 $A_{m\times n}$）

① $0<r(A)\le\min\{m,n\}$

②若 $r(A)=\min\{m,n\}$，则称 $A_{m\times n}$ 满秩，反之则为降秩

③若 A 为方阵（即 m=n）：A满秩 $\Leftrightarrow A$可逆 $\Leftrightarrow |A|\ne 0$

r(A)=n $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶子式不为 0，所有的 n+1 阶子式都为 0

※阶梯型矩阵

①若有全是 0 的行，都在最下面

②左起首个非零元个数随行数增加而严格增加

判断：宋氏阶梯折线法（竖线一次只能跨一列，横线随意）

r(A)=非零行行数

行简化阶梯型

①是阶梯性矩阵

②非零行的首非零元都是 1

③首非零元所在**列**的其他元素的是 0

判断三步走：①宋氏折线　②圈出首非零元　③按列画虚线

求矩阵的秩

①化成标准型（基本不用）

②只用行变换化为阶梯型

几个重要性质

① $r(A)=r(A^T)$

②矩阵乘可逆矩阵，秩不变

推论： 对于 $A_{m\times n}$ ，P 为 m 阶可逆方阵，Q 为 n 阶可逆方阵, r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)

向量间的线性关系

$\beta,\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ 是同维向量，若存在 $k_1,k_2\ldots k_n$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n$

则称 β 为 α 向量组的**线性组合**，k 成为**组合系数**（k 可以全取 0）

α 和 β 是同维向量组，任取从一个向量组里一个向量，都可以用另外一个向量组表示

则称**向量组** α 和 β **等价**

$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ 是 n 个同维向量，若存在一组**不全为 0** $k_1,k_2\ldots k_n$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n=0$

则称 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ **线性相关**

线性无关的向量组，增加分量依然线性无关
线性相关的向量组，减少分量依然线性无关

对于 n 个 n 维向量（**个数等于维数**）：$D=0\Leftrightarrow$ 线性相关

一些定理：

①$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以用其余向量表示

②$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ 唯一表示

替换定理：

$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_s$ 线性无关，都可由 $\beta_1,\beta_2\ldots\beta_t$ 线性表示，则 $s\le t$

推论①：当 m＞n 时，m 个 n 维向量**一定**线性相关
推论②：**等价**的线性**无关**向量组，向量个数**相同**

向量组的秩

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ 中，存在**线性无关**的 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_m(m\le n)$，可表示向量组中的所有向量

则称 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_m$ 为**极大无关组**，其不一定唯一。

推论①：向量组 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ 中任意 m+1 个向量的线性相关

推论②：任意两个极大无关组向量个数相同。

向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)$：极大无关组的向量个数

推论①：$0\le r(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)\le \min\{$向量个数，向量维数$\}$

推论②：$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$线性无关（相关）$\Leftrightarrow r=n(r<n)$

推论③：若 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2\ldots\beta_n$ 线性表示，则 $r(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)\le r(\beta_1,\beta_2\ldots\beta_n)$

矩阵的行秩（行向量组的秩）=矩阵的列秩（行列向量组的秩）=矩阵的秩

初等**行**变换不改变**列**向量之间的线性关系

※求极大无关组的步骤：

①按**列**构成矩阵

②化成行简化阶梯形**（只做行变换）**

③首非零元构成的列就是极大无关组

④按列读出答案

线性方程组

方程组系数构成系数矩阵 A，等号右边的系数再加到 A 中，构成**增广系数矩阵** $\overline{A}$

解线性方程组的本质是对 $\overline{A}$ 做初等行变换

线性方程组有解判定：

①当 $r(A)=r(\overline{A})=n$ 时，有唯一解

②当 $r(A)=r(\overline{A})<n$ 时，有无穷解

③当 $r(A)\neq r(\overline{A})$ 时，无解

判断线性方程组有解的步骤：

①画出 $\overline{A}$

②化为**阶梯型**（只做行变换）

③观察 $r(A)$ 和 $r(\overline{A})$

④若有无穷解，化为**行简化阶梯形**，非零行的首非零元 1 留左边，其余的放右边。

齐次线性方程组的一些结论：

① $r(A)=n \Leftrightarrow$ 只有零解

② $r(A)<n \Leftrightarrow$ 有非零解，且解无穷多 $\Leftrightarrow$ 方程个数<未知数个数

③方程个数=未知数个数，且有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow A$ 不可逆

若 $\eta_1,\eta_2\ldots\eta_n$ 都是齐次线性方程组的解，且 $\eta_1,\eta_2\ldots\eta_n$ 线性无关

该齐次方程组的解都能用 $\eta_1,\eta_2\ldots\eta_n$ 表示，则称 $\eta_1,\eta_2\ldots\eta_n$ 为该齐次方程组的**基础解系**

求基础解系的方法：

①求出一般解

②n 个自由未知量，就设 n 个线性无关的 n 维向量**（一个 1 其余都是 0 即可）**

③代入一般解得出 $\eta_1,\eta_2\ldots\eta_n$ 即可

$A_{m\times n}, B_{n\times s}$, 若 $AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\le n$

$Ax=0$ 称为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的导出组

一些关于非齐次线性方程组结论：

①若 α_1,α_2 是 $Ax=b$ 的解，则 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解

②若 α_1 是 $Ax=b$ 的解，η_1 是 $Ax=0$ 的解，则 $\alpha_1 \pm \eta_1$ 是 $Ax=b$ 的解

非齐次线性方程组解的结构：

$$\alpha_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\ldots+c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 α_0 是 $Ax=b$ 的**特解**，后面一串是 $Ax=0$ 的**基础解系**

求解步骤：先求 α_0，指出自由未知量，再求基础解系即可

矩阵的特征值与特征向量

对于 n 阶**方阵** A 和常数 λ，存在**非零列**向量 α，满足 $A\alpha=\lambda\alpha$
则称 λ 为**特征值（根）**，α 为**特征向量**

$|\lambda E-A|$ 称为**特征多项式**，$|\lambda E-A|=0$ 称为**特征方程**、

λ 可以对应**无穷多**个 α，α 只能对应**一个** λ，

如何解特征方程？

①**不要用定义展开！会算死！**
②尽可能把某行（列）化为只剩一个非零数，其余都是 0，然后按行（列）展开
③观察是否提取含 λ 的公因子
④观察是否有相同数，相反数，和相同的行（列），制造 0

若 A 是对角形矩阵，则 λ 为主对角线的所有数。

特征值 λ 的基本性质：

※①矩阵 T 后 λ 不变

②$\sum\left|a_{ij}\right|<,1(i=1,2...,n)$，$\sum\left|a_{ij}\right|<1,(j=1,2...,n)$，$\left|\lambda_k\right|<1$

③对于特征值 $\lambda_1,\lambda_2...\lambda_n$，满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$(对角线上元素)，且 $\prod_{1\le i\le n}\lambda_i=|A|$

④互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2...\lambda_n$，对应的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$ 线性无关

⑤性质④中的 λ 对应的 α 不唯一但线性无关，性质依然成立

⑥k 重 λ 对应的线性无关的 α 的个数≤k（多次方程造成的重根）

特征值 λ 的简单性质：

①$k\lambda$ 是 kA 的特征值

②λ^k 是 A^k 的特征值

③$\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值

④$\frac{1}{\lambda}|A|$ 是 A^* 的特征值

$tr(A)$ 称为 A 的迹，等于**主对角线元素相加**

（我猜全称是 trail）

相似矩阵、可对角化条件

对于 n 阶方阵 A、B，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$

则称 A、B **相似**，记作 $A \sim B$，若 B 是对角形矩阵（$diag / \Lambda$），则称 A **可对角化**

矩阵相似的性质：

①反身性：$A \sim A$

②对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$

③传递性：若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$

若 $A \sim B$，有如下性质：

① AB 的特征值相等

② $|A| = |B|$

③ $tr(A) = tr(B)$

④ A可逆 $\Leftrightarrow B$可逆,$A^{-1} = B^{-1}$

④ $A^m = B^m$

若 $A \sim B$，且 B 为对角形矩阵，则 A 有 n 个线性无关的特征向量

若 A 有 n 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$，则 $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

P 的求法：

①求出特征根 $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$

②求出特征向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$

③ $P(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$（用列向量表示矩阵）

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow r_i$重特征根，基础解系有$r_i$个解

向量的内积：和高中一样，对应相乘再相加，记作(α,β)

向量的模（长度/范数）：和高中的计算方式一样，记录方法不同（区别于行列式）

记作$\|\alpha\|$（四条线），$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$，若$\|\alpha\|=1$，则称$\alpha$为**单位向量**

将一个向量化为单位向量： $\dfrac{\beta}{\|\beta\|}$

柯西施瓦兹不等式（可惜湿袜子不能吃）：$|(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

三角不等式：$\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$

若$\alpha\cdot\beta=0$，则称$\alpha\beta$ 正交（垂直），记作$\alpha\perp\beta$

若向量组$\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$两两都正交，且**不含零向量**，则$\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$称为**正交向量组**

若正交向量组中的向量**模都为 1**，称为**标准正交向量组**

施密特正交化：

$\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$是**线性无关**的向量，存在与其**等价的正交向量组**$\beta_1,\beta_2...\beta_n$，可套公式：

$$\beta_1=\alpha_1 \qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

......

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\dots-\frac{(\alpha_n,\beta_n)}{(\beta_2,\beta_n)}\beta_{n-1}$$

若 n 阶方阵 A 满足 $A^T A = E$，则称 A 为正交矩阵

正交矩阵的性质（若 A 正交）：

①$|A| = 1\ or\ -1$

② $A^{-1} = A^T$，且 A^{-1}, A^T 均为正交矩阵

③若 B 也正交，则 AB 也正交

④若 α、β 为列向量，则 $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$

⑤ A 的行（列）向量组为标准正交向量组

若 $a_{ij} = A_{ij}$ 可推出 $A^* = A^T$

全是实数的对称矩阵称为实对称矩阵

实对称矩阵 A 的不同 λ 对应的 α 互相正交

对于 n 阶方阵 A、B，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = B$，则称 A、B 正交相似

实对称矩阵一定能对角化，求 Q 和 Λ 的步骤：

①求 λ

②求 α

③对 α 进行正交化、对角化（如果 λ 是单根，那么 α 求出来已经正交了）

只对重根的 α 做施密特正交化即可，简便计算

④ α 做成列构成 Q

⑤ λ 按照顺序放置构成 Λ

二次型

每一项都是二次的多项式称为**二次型**，如 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$， x_1^2,x_2^2 称**平方项**， x_1x_2 称**交叉项**

二次型化为矩阵表达式的步骤：

①平方项的系数按顺序放在主对角线上

②交叉项的系数÷2 后按顺序放到对称位置

③左乘未知数构成的列向量 X^T，右乘未知数构成的行向量 X

④得出结果 $f(x)=X^TAX$， A 称为**二次型矩阵**，秩称为该**二次型的秩**

例：将 $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+2x_3^2-2x_1x_3$ 化为矩阵表达式

步骤①： $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

步骤②： $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$ （顺序： x_1x_2 的系数在第 1 行第 2 列和第 1 列第 2 行）

步骤③：原式= $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

二次型矩阵一定对称

若二次型只有平方项，称为**标准二次型**

$f(x)=X^TAX$ 中的 A 不一定是标准型，令 $X=CY$ 称为**线性替换**

使得 $B=C^TAC$ 为**对角形**，原式化为 $f(x)=Y^TBY$

从以 X 为变量的二次型，二次型矩阵为 A
变成了以 Y 为变量的标准二次型，二次型矩阵为 B

若 A,B 是 n 阶方阵，存在可逆矩阵 C，满足 $C^TAC=B$，则称 A,B 合同，记作 $A\backsimeq B$

若 A,B 合同，有如下性质：

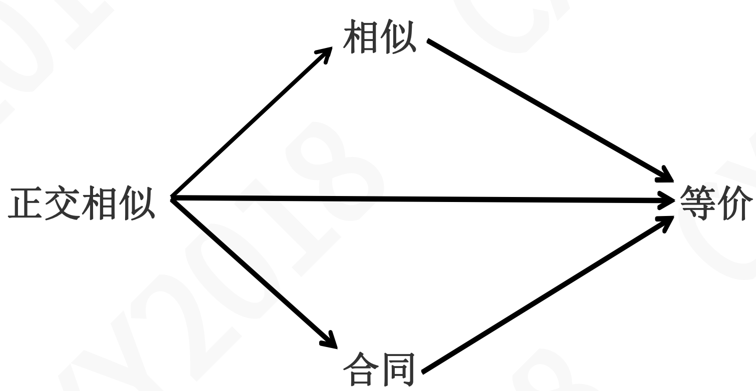
①反身性，对称性，传递性

② $r(A)=r(B)$

③ $A=A^T \Leftrightarrow B=B^T$

④若 A,B 均可逆，则 $A^{-1}\backsimeq B^{-1}$

⑤ $A^T\backsimeq B^T$



化二次型为标准型

配方法：

①先配 x_1，再配 $x_2,x_3\dots x_n$

②配完 x_1 后，剩余的式子不能再出现 x_1

③记住最终结果是 $X=CY$

若式子全是交叉项，没有平方项，则令 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_3=y_3 \\ \dots \\ x_n=y_n(n\neq 1,2) \end{cases}$ **即可**

初等变换法：

①对 A 和 E 做同样的初等**列**变换

②**只对** A 做对应的的初等**行**变换

③ A 化为**对角形**之时，E 就化为了 C

规范型：

$$f(x)=y_1^2+\dots+y_n^2-y_{n+1}^2-\dots-y_r^2=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \dots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \dots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \dots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}=A$$

1 的个数称为**正惯性指数**，-1 的个数称为**负惯性指数**

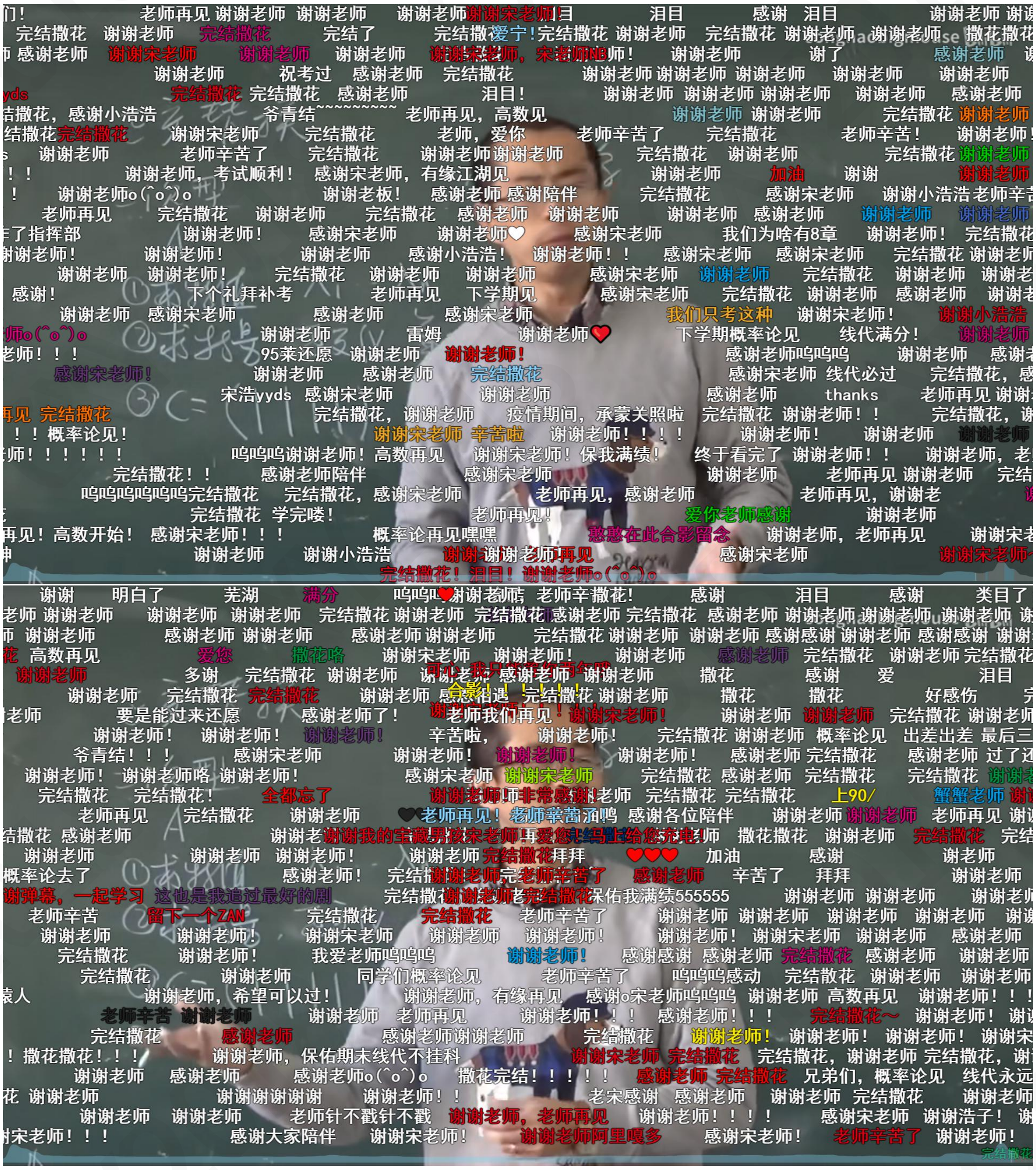
符号差=正惯性指数-负惯性指数

$r(A)$ =正惯性指数+负惯性指数

正交替换法：

和实对称矩阵求 Q 和 Λ 的步骤一样，参考笔记 P19

（如果不是变态的老师，一般不用）



完结撒花