5.1 二次型的化简

5.1.1 二次型的定义

考虑平面二次曲线方程：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0\,.$$

和空间二次曲面方程：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\,.$$

此类方程都涉及式子 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ ，该式子称为二次型，可用矩阵来研究.

例5.1.1 二次曲线方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0\,. \tag{5.1}$$

表示或椭圆、或双曲线、或抛物线、或退化的点和直线.

解 二次曲线方程可表示成 $f(x,y)=(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0,$ 不妨设 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\neq O.$

若 $a_{12}=0$，可令 $\theta=0$，否则令θ满足：
$$\begin{cases} \sin 2\theta=\dfrac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}, \\ \cos 2\theta=\dfrac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}. \end{cases}$$

计算可得 $$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

先做旋转变换 $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$ 此时方程为 $g(x', y') = (x', y', 1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & b_{13} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

令 $d_1 = \begin{cases} -b_{13}/\lambda_1, & 若\lambda_1 \neq 0, \\ 0, & 若\lambda_1 = 0, \end{cases}$ $d_2 = \begin{cases} -b_{23}/\lambda_2, & 若\lambda_2 \neq 0, \\ 0, & 若\lambda_2 = 0. \end{cases}$ 再作平移变换 $\begin{cases} x' = x'' + d_1, \\ y' = y'' + d_2, \end{cases}$

方程可化为

$$h(x'', y'') = \begin{cases} \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 = 0, & \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \\ 2b_{13}x'' + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 = 0, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \\ \lambda_1 x''^2 + 2b_{23}y'' + \lambda_3 = 0, & \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

若 λ_1, λ_2 同号，但与 $-\lambda_3$ 异号，则方程(5.1)为矛盾方程；
若 λ_1, λ_2 同号，但 $\lambda_3=0$，则方程(5.1)退化为一个点；
若 $\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3$ 同号，则方程(5.1)表示椭圆；
若 λ_1, λ_2 异号，但 $\lambda_3=0$，则方程(5.1)退化为两条直线；
若 λ_1, λ_2 异号，但 $\lambda_3\neq0$，则方程(5.1)表示双曲线；
若 $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_2=0$，则方程(5.1)表示抛物线.

定义5.1.1 (二次型) 含有 n 个变量的在某个数域上的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \ldots\ \ldots\ \ldots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

称为二次型； 若全部 $a_{ij}\in \mathbf{R}$，则称式(5.2)中的 f 为实二次型；若有元素 $a_{ij}\in \mathbf{C}$，则称式(5.2)中的 f 为复二次型 .

* 本书主要考虑实二次型.

(5.2)式的 f 可改写为

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \; & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n \\
& + \ldots \ldots \ldots \\
& + a_{1n}x_nx_1 + a_{2n}x_nx_2 + a_{3n}x_nx_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \;.
\end{aligned}
$$

可用矩阵表示为: $f(x_1, \ldots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$,

称为二次型 f 的矩阵表示，其中 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$ ，则

f 与对称矩阵 A 一一对应.

定义5.1.2 (二次型的矩阵) 称二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$$

中的对称矩阵 A 为二次型 f 的矩阵，A 的秩称为二次型 f 的秩.

例5.1.2 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$ 的矩阵表示.

解 容易写出 $f(x_1, x_2, x_3) = x^{\mathrm{T}}Ax$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

5.1.2 二次型的标准形

对二次型

$f(x,y,z)=x^2-2xy+8xz+y^2+8yz+4z^2=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-1&4\\-1&1&4\\4&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，作变换 $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt6}x'+\frac{1}{\sqrt2}y'+\frac{1}{\sqrt3}z',\\ y=\frac{1}{\sqrt6}x'-\frac{1}{\sqrt2}y'+\frac{1}{\sqrt3}z',\\ z=\frac{2}{\sqrt6}x'-\frac{1}{\sqrt3}z',\end{cases}$

得 $f(x,y,z)=(x',y',z')\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=8x'^2+2y'^2-4z'^2=g(x',y',z').$

原二次型现在简化成了只有平方项的简单二次型(二次型的标准形)

$f(x,y,z)=g(x',y',z')=8x'^2+2y'^2-4z'^2$.

可用矩阵表示变换：

$$f(x,y,z)=(x',y',z')P^{\mathrm T}\begin{pmatrix}1&-1&4\\-1&1&4\\4&4&4\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=8x'^2+2y'^2-4z'^2,\text{其中}P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$

若变换为 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$， 其中$Q=\begin{pmatrix}1&-3&-7\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，

则二次型简化成如下标准形 $f(x,y,z)=(x'',y'',z'')Q^{\mathrm T}\begin{pmatrix}1&-1&4\\-1&1&4\\4&4&4\end{pmatrix}Q\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}=x''^2+4y''^2-16z''^2=h(x'',y'',z'').$

二次型可以简化成不同的标准形：

$f(x,y,z)=8x'^2+2y'^2-4z'^2=g(x',y',z')=x''^2+4y''^2-16z''^2=h(x'',y'',z'')$.

定义5.1.3 (线性变换、非退化线性变换) 称如下的变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

为由 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的一个线性变换.

若线性变换的系数行列式

$$|P| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则称该线性变换为非异线性变换或非退化线性变换.

若 $|P|=0$，则称该线性变换为奇异线性变换或退化线性变换.

若 P 为正交矩阵，则称该线性变换为正交变换.

定义5.1.4 (合同、合同变换) 设A和B是两个同阶方阵，若存在一个可逆矩阵P，使得有$B=P^{\mathrm{T}}AP$，则称A合同于B. 称B为A的合同矩阵，而称P为A到B的合同变换矩阵.

矩阵的合同关系是一个等价关系，满足： (1) 自反性(2) 对称性(3) 传递性.

二次型的简化

定义5.1.5 (二次型的标准形) 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经过非退化线性变换后得到一个只包含变量平方项的二次型 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\dots+d_ny_n^2$，称为原二次型的标准形.

定理5.1.1 存在非退化的线性变换将实二次型化为标准形，且平方项系数可按任意次序排列；存在可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为实对角矩阵，且对角元素可以任意次序排列.

证明　由于实二次型的非退化线性变换与实对称矩阵的合同变换等价，故我们只证明第二个结论：存在可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为实对角矩阵.

设对称阵$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，则由定理4.5.4 可知存在正交阵$P$，使得

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

即P将A合同变换为实对角矩阵.

再令 $D=(e_{i1},e_{i2}, \dots ,e_{in})$，其中$(i_1,i_2,\dots,i_n)$为$(1,2,\dots,n)$的一个排列，则有

$$\begin{aligned}(PD)^{\mathrm{T}}A(PD)&=D^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)D\\&=(e_{i1},e_{i2}, \dots ,e_{in})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(e_{i1},e_{i2}, \dots ,e_{in})\\&=(e_{i1},e_{i2}, \dots ,e_{in})^{\mathrm{T}}(\lambda_{i1}e_{i1}, \lambda_{i2}e_{i2}, \dots, \lambda_{in}e_{in})=\mathrm{diag}(\lambda_{i1},\lambda_{i2}, \dots ,\lambda_{in}),\end{aligned}$$

故对角元素可任意排列.

化标准形——正交变换法

（即实对称矩阵的正交对角化）

实二次型：$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x^{\mathrm{T}}Ax$

正交变换法化实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为标准形的步骤：

(1) 求解矩阵A的特征方程 $|\lambda E-A|=0$，解得特征值 $\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$；

(2) 对每一个特征值 $\lambda=\lambda_i$ (s_i重)，求出齐次线性方程组

$$(\lambda_i E-A)\,x=\theta$$

的基础解系(即特征向量的极大无关组) $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{isi}$，并标准正交化为 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{isi}$；

(3) 将标准正交化的特征向量作为列构成正交矩阵

$$P=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),$$

则非退化线性变换 $x=Py$ 将实二次型 $f(x)$ 化为标准形

$$f(x)=g(y)=y^{\mathrm{T}}\Lambda y,$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r)$。

例5.1.3 用正交变换将实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2$$

化为标准形，并给出相应的线性变换.

解 该实二次型的矩阵形式为

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax,\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\-1&1&4\\4&4&-4\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

求A的特征值和标准正交的特征向量. 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-4\\1&\lambda-1&-4\\-4&-4&\lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+8)=0.$$

解得特征值为 $\lambda=2,4,-8$.

对 $\lambda=2$，可求得单位特征向量 $\eta_1=\sqrt{2}^{\ -1}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=4$，可求得单位特征向量 $\eta_2=\sqrt{3}^{\ -1}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-8$，可求得单位特征向量 $\eta_3=\sqrt{6}^{\ -1}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\0&1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\end{pmatrix},$$

则有 $P^{\mathrm{T}}P=E$, $P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(2,4,-8)$. 故在线性变换

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3,\\x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3,\\x_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2+\dfrac{2}{\sqrt{6}}y_3,\end{cases}$$

下，原实二次型化成的标准形为：$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+4y_2^2-8y_3^2$.

例5.1.4 用正交变换将实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形，并给出相应的线性变换.

解 该实二次型的矩阵形式为

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax,\qquad A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

求A的特征值和标准正交的特征向量. 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\\lambda-1&\lambda&1\\0&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0.$$

解得特征值为 $\lambda=1$(二重),-2 .

对 $\lambda=1$，可求得相互正交的单位特征向量 $\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$

对 $\lambda=-2$，可求得单位特征向量 $\eta_3=\sqrt{3}^{\,-1}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

则有 $P^{\mathrm{T}}P=E$, $P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(1,1,-2)$.

故在线性变换 $x=Py$下，其中$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，

原实二次型的标准形为：$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

化标准形——配方法（利用配方依次消去交叉项）

配方法化实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为标准形的步骤：

反复对可能出现的以下两种情况进行处理：

情况1 式中有非零平方项，例如若非零平方项为 $a_{11}x_1^2$，则将式中所有含 x_1 的项配成一个平方项 $a_{11}\left(x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$，并令非退化线性变换为

$$\begin{cases} y_1=x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ y_2=x_2, \\ \cdots\cdots \\ y_n=x_n, \end{cases}$$

则可将原式化为不含 y_1 的交叉项的式子。

情况2 式中无非零平方项，这时我们可以用一个线性变换配出平方项。例如，若有非零交叉项为 $2a_{12}x_1x_2$，则作如右边的非退化线性变换就可将原式化为含有 y_1, y_2 的平方项的式子，再按情况1进行处理。

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \\ \cdots\cdots \\ x_n=y_n, \end{cases}$$

每配成一个平方项，就必须消去一个元素如 x_1 相关的所有项（包括平方项和交叉项），直到一系列的变换将所有的交叉项均消去即成标准形。

例5.1.5 用配方法将例5.1.3中的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2$$

化为标准形并指出所用的线性变换.

解 逐次对一个平方项及与该平方项有关的交叉项进行配方

$$f(x_1, x_2, x_3) =x_1^2-2x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2$$

$$=(x_1-x_2+4x_3)^2+16x_2x_3-20x_3^2 =(x_1-x_2+4x_3)^2-20(x_3-0.4x_2)^2+3.2x_2^2 .$$

从而立即得到原二次型的标准形为：

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-20y_2^2+3.2y_3^2$. 所用线性变换为 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 4x_3, \\ y_2 = x_3 - \dfrac{2}{5}x_2, \\ y_3 = x_2. \end{cases}$

例5.1.6 用配方法将例5.1.4中的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形并指出所用的线性变换.

解 该二次型不含平方项，先做一个非退化线性变换从交叉项中产生平方项. 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$

则 $f(x_1, x_2, x_3) =2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

$$=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-2(y_1-y_2)y_3$$

$$=2y_1^2-2(y_2-y_3)^2+2y_3^2 .$$

从而求得原二次型的标准形为：

$g(z_1,z_2,z_3)=2z_1^2-2z_2^2+2z_3^2$. 所用线性变换为 $\begin{cases} z_1 = y_1 = 0.5x_1 + 0.5x_2, \\ z_2 = y_2 - y_3 = 0.5x_1 - 0.5x_2 - x_3, \\ z_3 = y_3 = x_3. \end{cases}$

注1：配方过程中所用的线性变换都必须是非退化的 .

例子可见 习题五的 2(4)

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$ ，

不能直接用变换：$y_1=x_1+x_2, y_2=x_2+x_3, y_3=x_3+x_4, y_4=x_4+x_1$，因为变换$y=Px$

是退化线性变换，变换矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ 是不可逆的，即 $|P|=0$.

应该先展开式子，再进行配方消交叉项：

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_4+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2+2x_3x_4+2x_4^2$,

$=2(x_1+0.5x_2+0.5x_4)^2+1.5(x_2+(2/3)x_3-(1/3)x_4)^2+(4/3)(x_3+x_4)^2$

$=2y_1^2+1.5y_2^2+(4/3)y_3^2$,

其中：$y_1=x_1+0.5x_2+0.5x_4, y_2=x_2+(2/3)x_3-(1/3)x_4, y_3=x_3+x_4, y_4=x_4$.

化标准形——合同变换法

（对称进行行列初等变换化对角阵）

合同变换法化实二次型 $f(x)=x^{T}Ax$ 为标准形的原理：

设 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

作一次如下的对称性的变换：

(1) 假设 $a_{11}\neq 0$，进行列变换：将第2列减去第1列的 a_{12}/a_{11} 倍，则第一行的 a_{12} 消为0，再进行相应的行变换（第2行减去第1行的 a_{12}/a_{11} 倍），则第一列的 a_{12} 也消为0。依次进行消第一行和第一列的 a_{13} 项, a_{14} 项，… ，直到第一行和第一列的非对角元全部消为0 .

(2) 若 $a_{11}=0$，则将某个非零对角元通过行交换和列交换移到左上角的位置。如 $a_{kk}\neq 0$，交换1行和 k 行，再交换1列和 k 列即可 .

(3) 若对角元都是0，但是有非对角元非零，则将该非对角元加到对角元，利用列加到列，对称地再行加到行. 如 $a_{ij}\neq 0$，将 j 列加到 i 列，j 行加到 i 行，再将 i 行 i 列现在的非零元 $2a_{ij}$ 用(2)的方法移到左上角位置即可 .

合同变换法化实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为标准形：

对矩阵 $B=\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$

对k=1,2,…,n，做一系列初等列变换，消去k行的所有非零元素。再对称地消去k列的所有非零元素，最后得到矩阵

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^{\mathrm{T}} & \\ & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} P^{\mathrm{T}}AP \\ P \end{pmatrix}$$

其中 Λ 为对角矩阵，而 P 为非退化线性变换矩阵，变换为 $x=Py$.
原二次型化为标准形：

$$f(x)=g(y)=y^{\mathrm{T}}\Lambda y\ .$$

例5.1.7 用合同变换法将例5.1.3中的二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2$$

化为标准形并指出所用的线性变换.

解 该实二次型的矩阵形式为

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

做如下合同变换：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-4c_1]{c_2+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & -20 \\ \hline 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -20 \\ \hline 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -12 & -20 \\ \hline 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -12 & -20 \\ \hline 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -12 & 16 \\ \hline 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \\ \hline 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

则在线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_2 + 5y_3, \\ x_2 = y_2 - 3y_3, \\ x_3 = y_2 - 2y_3, \end{cases}$

下，原二次型化成的标准形为：$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-4y_2^2+16y_3^2$.

注2：合同变换法还可以将一个复对称矩阵化为复对角矩阵，从而复二次型可以经合同变换化为标准形。

5.1.3 二次型的规范形

标准形中找最简单且唯一的形式——规范形

实二次型：$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=x^{\mathrm{T}}Ax$的标准形

$$g(y_1,y_2,\dots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\dots+d_ny_n^2$$

最简形式为：$\pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm \dots \pm y_r^2$　　其中：r为二次型的秩

若是复二次型：最简形式可最终化为　$y_1^2+y_2^2+\dots+y_r^2$

若是实二次型：最简形式只能化为　$y_1^2+\dots+y_p^2-y_{p+1}^2-\dots-y_r^2$

定义5.1.6 (实(复)二次型的规范形) 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$经过非退化的实线性变换得到如下形式的二次型

$$z_1^2+\dots+z_p^2-z_{p+1}^2-\dots-z_r^2\ ,\quad r\leqslant n,$$

称为原二次型的实规范形，r称为该二次型的秩；

复二次型经过非退化的复线性变换得到如下形式的二次型

$$z_1^2+z_2^2+\dots+z_r^2\ ,\quad r\leqslant n,$$

称为原二次型的复规范形，r称为该二次型的秩．

二次型的规范形存在定理

定理5.1.2 存在非退化的复线性变换将复二次型化为复规范形

$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_r^2\ ;$$

存在复可逆矩阵将复对称矩阵合同变换为 diag(E_r , O_{n-r})，其中 r为二次型矩阵的秩.

证明思路：

两个结论等价，只要证其中的一个，我们证矩阵合同变换的结论.

分2步将复对称矩阵A合同变换为 $\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{r} & \\ & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}\end{pmatrix}$，其中$r$=r($A$) .

(1) 合同变换为对角矩阵：

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} b_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

，其中 $b_{ii}\neq 0$

(2) 合同变换为规范形：

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{b_{11}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sqrt{b_{rr}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{b_{11}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sqrt{b_{rr}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

定理5.1.3 (惯性定理) 存在非退化的实线性变换将实二次型化为实规范形

$$z_1^2+\dots+z_p^2-z_{p+1}^2\dots-z_r^2\ ;$$

存在实可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为 diag(E_p , -E_{r-p} , O_{n-r})，其中 r为二次型矩阵的秩，p是唯一确定的 .

证明思路：只证矩阵合同变换的结论. 实对称矩阵 A , r(A)=r .

存在性分2步：

(1) 合同变换为对角矩阵：

$$P^{\mathrm T}AP=\begin{pmatrix} b_{11} &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && b_{pp} &&&&& \\ &&& b_{p+1,p+1} &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& b_{rr} && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_1^2 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && s_p^2 &&&&& \\ &&& -s_{p+1}^2 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -s_r^2 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}=B\ ,$$

其中 $b_{11}>0,\dots,b_{pp}>0$，而 $b_{p+1,p+1}<0,\dots,b_{rr}<0$.

(2) 合同变换为规范形：

$$\begin{pmatrix} 1/s_1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && 1/s_r && \\ &&& 1 & \\ &&&& \ddots \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_1^2 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && s_p^2 &&&&& \\ &&& -s_{p+1}^2 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -s_r^2 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/s_1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && 1/s_r && \\ &&& 1 & \\ &&&& \ddots \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

唯一性：反证法

(1) 转化问题：

E_{p2}

设 $D_1^{\mathrm{T}}AD_1=\begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{r-p_1} & \\ & & O \end{pmatrix}, D_2^{\mathrm{T}}AD_2=\begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix},$

E_{p1}

则 $\begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{r-p_1} & \\ & & O \end{pmatrix}=D_1^{\mathrm{T}}AD_1=D_1^{\mathrm{T}}(D_2^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix}D_2^{-1})D_1=(D_2^{-1}D_1)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix}(D_2^{-1}D_1)=B^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix}B.$

(2) 证明$p_1\neq p_2$时将出现矛盾： 不妨设 $p_1>p_2$，且有可逆矩阵 B 使得

$$\begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{r-p_1} & \\ & & O \end{pmatrix}=B^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix}B.$$

利用二次型的值来导出矛盾：

E_{p2}

E_{p1}

$$x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{r-p_1} & \\ & & O \end{pmatrix}x=x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix}Bx=y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix}y.$$

希望有：

$x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots+x_{p1}{}^2\geq 0$

$$(x_1,\ldots,x_{p_1},0,\ldots,0,0,\ldots,0)\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&-1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&-1&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_{p_1}\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

p_1个1

$p_1>p_2$

$-y_{p2+1}{}^2-\ldots-y_r{}^2\leq 0$

$$=(0,\ldots,0,y_{p_2+1},\ldots,y_r,y_{r+1},\ldots,y_n)\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&-1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&-1&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\y_{p_2+1}\\\vdots\\y_r\\y_{r+1}\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

p_2个1

其中 $y=Bx$ 的前p_2个方程为：

$$\begin{cases}b_{11}x_1+\cdots+b_{1p_1}x_{p_1}=0,\\ \quad\vdots\\ b_{p_21}x_1+\cdots+b_{p_2p_1}x_{p_1}=0,\end{cases}\qquad p_2<p_1$$

$x_1,\ldots,x_{p1}$有非零解 .

定义5.1.7 (正惯性指数、负惯性指数) 若实二次型的实规范形为

$$z_1^2+\ldots+z_p^2-z_{p+1}^2-\ldots-z_r^2\ ,\quad r\leqslant n,$$

则称p为原二次型的**正惯性指数**；称r-p为原二次型的**负惯性指数**．

推论5.1.4 若实二次型矩阵 A 合同于对角矩阵 B=diag$(b_{11},\ldots,b_{nn})$，则正对角元个数为实二次型的正惯性指数，负对角元个数为实二次型的负惯性指数，非零对角元个数为二次型的秩．

证明思路： 若$b_{i1i1},\ldots,b_{ipip}$都>0，$b_{ip+1,ip+1},\ldots,b_{irir}$都<0，其余对角元为0，

则有 $B_2=C^{\mathrm{T}}BC=\mathrm{diag}(b_{i1i1},\ldots,b_{ipip},b_{ip+1,ip+1},\ldots,b_{irir}\ 0,\ldots,0)$

$=\mathrm{diag}(s_1^2,\ldots,s_p^2,-s_{p+1}^2,\ldots,-s_r^2,0,\ldots,0)$，其中 $C=(e_{i1},e_{i2},\ldots,e_{in})$.

进一步有

$\Lambda^{\mathrm{T}}B_2\Lambda=\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1,0,\ldots,0)$,其中$\Lambda=\mathrm{diag}(1/s_1,\ldots,1/s_r,1,\ldots,1)$.

推论5.1.5 实二次型矩阵 A 的正特征值个数为正惯性指数，负特征值个数为负惯性指数，非零特征值个数为二次型的秩．

证明思路： A实对称，存在正交矩阵P使得$P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$，再用推论5.1.4的结论．

例5.1.8 求实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$=2x_1^2-4x_1x_2-12x_1x_3+8x_1x_4+9x_2^2+18x_2x_3-10x_2x_4+23x_3^2-20x_3x_4+4x_4^2$$

的惯性指数.

解 用合同变换法求该二次型的标准形，易知二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & 4 \\ -2 & 9 & 9 & -5 \\ -6 & 9 & 23 & -10 \\ 4 & -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

对矩阵A对称地进行列和行的初等变换如下

$$A \xrightarrow[c_4-2c_1]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3+3c_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+3r_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4+\frac{1}{7}c_2]{c_3-\frac{3}{7}c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{26}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & -1 & \frac{17}{7} & -\frac{29}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+\frac{1}{7}r_2]{r_3-\frac{3}{7}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{29}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4-\frac{17}{26}c_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{149}{26} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{17}{26}r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{149}{26} \end{pmatrix}.$$

故正惯性指数为3，负惯性指数为1 .

例5.1.9 求实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

的惯性指数.

解 易知二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&2\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

我们只要求 A的特征值．由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-4&-2\\-3&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2-8\lambda+8)=0$$

解得特征值为 $\lambda=-2,4+2\sqrt{2},4-2\sqrt{2}$．故正惯性指数为2，负惯性指数为1．

解法二 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

$=(x_1+2x_2+3x_3)^2-8x_2x_3-8x_3^2$

$=(x_1+2x_2+3x_3)^2+2x_2^2-2(x_2+2x_3)^2=y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$，

故正惯性指数为2，负惯性指数为1.

补充例5A **(习题五4)证明反对称矩阵均合同于形式为** $\begin{pmatrix} &&&&&&&&-1\\ &&&&&&&\iddots&\\ &&&&&&-1&&\\ &&&&&0&&&\\ &&&&\iddots&&&&\\ &&&0&&&&&\\ &&-1&&&&&&\\ &\iddots&&&&&&&\\ -1&&&&&&&& \end{pmatrix}$ **的矩阵.**

证 用数学归纳法，设 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

当 $\boldsymbol{n}$**=1时** $\boldsymbol{A}$**=**$\boldsymbol{O}$ **;**

$\boldsymbol{n}$**=2时，**$\boldsymbol{A}$**=**$\boldsymbol{O}$**，或** $E(2(1/a_{12}))^{\mathrm{T}}AE(2(1/a_{12}))=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}$**，成立.**

假设$\boldsymbol{n}$**<**$\boldsymbol{m}$**时结论成立 .**

当 $\boldsymbol{n}$**=**$\boldsymbol{m}$**>2时，若**$\boldsymbol{A}$**=**$\boldsymbol{O}$**结论成立. 否则** $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{1m} & -a_{2m} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ **中有**$\boldsymbol{a_{ij}\neq 0, i<j}$**，**

令 $P_1=\begin{cases} E(m(1/a_{1m})), & a_{1m}\neq 0\\ E(j,m)E(1,i)E(m(1/a_{ij})), & a_{1m}=0 \end{cases}$ **则有** $P_1^{\mathrm{T}}AP_1=A_2=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \cdots & 1\\ -c_{12} & 0 & \cdots & c_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -c_{2m} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

再令 $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&-c_{12}&-c_{13}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-c_{2m}&-c_{3m}&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

则 $P_2^{\mathrm{T}}A_2P_2=A_3=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&d_{23}&\cdots&d_{2,m-1}&0\\0&-d_{23}&0&\cdots&d_{3,m-1}&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&-d_{2,m-1}&-d_{3,m-1}&\cdots&0&0\\-1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&B&0\\-1&0&0\end{pmatrix},B^{\mathrm{T}}=-B$

由归纳假设，存在可逆矩阵Q，使得 $Q^{\mathrm{T}}BQ=\begin{pmatrix}0&\cdots&1\\\vdots&\iddots&\vdots\\-1&\cdots&0\end{pmatrix}.$

令 $P=P_1P_2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&Q&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， 则有 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}0&\dots&1\\\vdots&\iddots&\vdots\\-1&\cdots&0\end{pmatrix}.$