# 南京大学大学数学试卷

考试时间 2015.1.7 任课教师__________ 考试成绩__________

**一.** (10分) 设 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}$，$|A|$ 中元素 $a_{ij}$ 的余子式记为 $M_{ij}$，计算 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

**二.** (10分) 设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $n$ 维非零向量，且 $A\alpha_i=\alpha_{i+1}, 1\le i<n, A\alpha_n=0$，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

**三.** (10分) 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶方阵，且 $A$ 和 $B$ 相似，证明 $A,B$ 有相同的特征值。反之是否成立，请说明理由.

**四.** (10分) 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶方阵，$I$ 是 $n$ 阶单位矩阵，且 $A^2=I, B^2=I, |A|+|B|=0$，证明 $A+B$ 不可逆.

**五.** (12分) 已知 $A,B$ 都是 $m\times n$ 矩阵，秩分别为 $r(A)=n-s, r(B)=n-t$，且 $s+t>n$，证明方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 有非零公共解.

**六.** (12分) 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^T, B=\beta^T\alpha$，试求解方程 $2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$.

**七.** (10分) 设 $R^3$ 中的线性变换 $T$ 把基 $\alpha=(1,0,1),\beta=(0,1,0),\gamma=(0,0,1)$ 变为基 $\alpha_1=(1,0,2),\beta_1=(-1,2,-1),\gamma_1=(1,0,0)$，设 $T$ 在基 $\alpha,\beta,\gamma$ 以及基 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 下的矩阵分别为 $A,B$，求出 $A$ 和 $B$ .

**八.** (12分) 已知三阶方阵 $A$ 和三维向量 $\xi$，使得向量组 $\xi,A\xi,A^2\xi$ 线性无关，且满足 $A^3\xi=3A\xi-2A^2\xi$，(1) 记 $P=[\xi,A\xi,A^2\xi]$，求三阶方阵 $B$ 使得 $A=PBP^{-1}$，(2) 计算行列式 $|A+I|$，其中 $I$ 是三阶单位矩阵.

**九.** (14分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2. (1) 求$a$的值；(2) 求正交变换 $x=Py$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形；(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.