线性代数问题分类1

一、行列式问题

(1) 常规计算

例：计算 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 0 & 2 \\ 3 & x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 5 & 4 & 2 & x \end{vmatrix}$ 的x^3项的系数.

(2) 利用行列式展开式

例：已知行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ ，求$M_{41}+M_{42}+M_{43}$.

例：设四阶行列式D中第1行元素为1,2,0,-4，第3行元素的余子式为6,x,19,2，求x .

(3) 利用递推式、分裂式、行列递加递减、行列全加

例：计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$

(4) 利用矩阵乘积关系式

例：A, B为同阶正交矩阵，$|A|+|B|=0$，证明 $|A+B|=0$.

例：设方阵$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B=(\alpha_3-2\alpha_1, 3\alpha_2, \alpha_1)$，且$|B|=6$，求 $|A+B|$.

(5) 利用特征值、相似变换

例：$A\in R^{3\times 3}$ 使 $\xi, A\xi, A^2\xi$无关，$A^3\xi=3A\xi-2A^2\xi$，计算 $|A+E|$.

(6) 利用A^*

例：已知行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$，求$|A|$的所有余子式之和.

(7) 利用块三角行列式简化

例：设$A,B\in R^{m\times n}$，且$m>n$，证明$\begin{vmatrix} A & O \\ E_n & B^T \end{vmatrix}=0$.

二、向量和矩阵问题

(1) 常规方法

例：若 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求$X$，满足$AX=A+2X$.

例：求一个极大无关组，并正交化，其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\5\end{pmatrix}$.

(2) 利用矩阵、向量关系

$$\begin{cases}AA^{-1}=A^{-1}A=E;\ AA^*=A^*A=|A|E;\ (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1};\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\\(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)A^{-1}\\y^{\mathrm{T}}y=0\Leftrightarrow y=0\end{cases}$$

例：设 $A^*=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，求$A$.

例：证明 $Ax=0$与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 同解.

(3) 利用特殊值

例：设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，对任意$\xi\in\mathbf{R}^n$，有$\xi^{\mathrm{T}}A\xi=0$，证明$A$是反对称矩阵.

(4) 利用吸收作用和消去作用

例：若 $A^2=A, B^2=B, (A+B)^2=A+B$，证明 $AB=BA=O$.

(5) 利用秩的关系

$$\begin{cases} 0\le r(A)\le \min\{m,n\}\text{；}\ r(A^{T})=r(-A)=r(kA)=r(A) \\ r(A+B)\le r(A)+r(B)\text{；}\ r(A)+r(B)-n(A\text{的列数})\le r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\} \\ \max\{r(A),r(B)\}\le r(A,B)\le r\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B) \\ r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(\mathrm{diag}(E_{r(A)},O))\ \ (P\text{、}Q\text{非奇异}) \\ \text{行秩=列秩=矩阵秩；} \\ |A|\ne 0 \Leftrightarrow A\text{满秩；}\ A\text{列满秩}\Leftrightarrow A\text{列线性无关}\Leftrightarrow Ax=0\text{只有零解} \end{cases}$$

例：设$A\in R^{n\times n}$， $A^2=-A$，证明 $r(A)+r(E+A)=n$.

例：设$A=MN^{T}$, 其中$M,N\in R^{n\times r}$ $(r<n)$, $|N^{T}M|\ne 0$，证明 $r(A^2)=r(A)$.

(6) 利用矩阵乘积关系式

例：若$BA=A+2B$，证明 $AB=BA$.

例：设A、$B\in R^{m\times n}$， 证明 $r(AA^{T}+BB^{T})=r(A,B)$.

(7) 矩阵块数量化

例：设$A, B, C, D\in R^{n\times n}$，$A$可逆且有$AC=CA$，证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$.

(8) 向量组相关、等价问题

例：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\beta_1, \beta_2$是两个线性无关的向量组，且两组向量的内积$(\alpha_i, \beta_j)=0,(i=1,2,3, j=1,2)$，证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$线性无关.

例：$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}^n$, $\alpha_i \neq 0$, $i=1,2,\ldots,n$ ，且有$A\alpha_i= \alpha_{i+1}$,$1\leq i<n$, $A\alpha_n=0$，证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots,\alpha_n$线性无关.

例：设$\alpha_1=(2,4,3,1)^T$, $\alpha_2=(4,8,6,2)^T$, $\alpha_3=(1,3,1,2)^T$, $\beta_1=(1,1,2,-1)^T$, $\beta_2=(2,-3,-5,2)^T$, $\beta_3=(-3,7,12,-5)^T$ ，请找一个向量γ使得向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma\}$与$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma\}$等价.

(9) 利用多项式公式

例：设$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，有$A^k=O$ $(k\geq 1)$，证明 $E-A$可逆.

(10) 计算A^n

例：设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3,2,1\end{pmatrix}$ ，计算 A^n, B^n $(n\geq 3)$.

例：计算 $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{99}$.

例：设 $A=\begin{pmatrix}1-a&a\\b&1-b\end{pmatrix}, 0<a,b<1$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

三、方程组问题

(1) 常规方法(初等变换)

例：解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3, \\ 3x_1-x_2-a\,x_3+15x_4=3, \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b. \end{cases}$

(2) 利用关系式

$\begin{cases} |A|=0\text{时，}AA^*=A^*A=O & \text{用于找}Ax=0\text{的非零解} \\ \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(N(A))=n & \text{用于求 }\mathrm{r}(A)\text{或基础解系} \end{cases}$

例：设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $|A|=0$, $A^*\neq O$, 求$Ax=0$的通解.

例：设 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$\mathrm{r}(A)<n$，$N$为 $Ax=0$ 的基础解系向量构成的矩阵，证明 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.

(3) 利用解的组合

例：4元方程组$Ax=b, b\neq 0$有解η_1,η_2,η_3. $\eta_1+2\eta_2=(2,3,4,5)^T$, $\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T$, 且$r(A)=3$，求方程组的通解.

(4) 利用等价问题

例：若A、$B\in R^{m\times n}$，$r(A)=n-s$, $r(B)=n-t$, $s+t>n$，证明$Ax=0$和$Bx=0$有非零公共解.

例：设 $A\in R^{m\times n}, B\in R^{m\times k}$，证明存在$C\in R^{n\times k}$使得$AC=B \Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$.

例：求以$\alpha_1=(1,-1,1,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0,1)^T$, $\alpha_3=(2,0,1,1)^T$为解向量的齐次方程组.

(5) 反证法

例：设$A\in R^{n\times n}$，且有 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j=1\sim n, j\neq i}|a_{ij}|, i=1,2,\ldots,n$，证明$A$可逆.

例：设$A\in R^{n\times n}$，证明$r(A^n)=r(A^{n+1})$.