5.2 正定二次型

特殊二次型：

$$f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}8&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=8x^2+3y^2+2z^2>0,\text{当}x,y,z\text{不全为}0.$$

$$g(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}8&-8&8\\-8&11&-11\\8&-11&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad\left(\text{变换为}\begin{cases}x=x'+y',\\y=y'+z',\\z=z',\end{cases}\text{即}\begin{cases}x'=x-y+z,\\y'=y-z,\\z'=z\end{cases}\right)$$

$$=8x'^2+3y'^2+2z'^2>0,\text{当}x,y,z\text{不全为}0.$$

称有这种性质的 $f(x,y,z)$ 和 $g(x,y,z)$ 为正定二次型．

称正定二次型矩阵

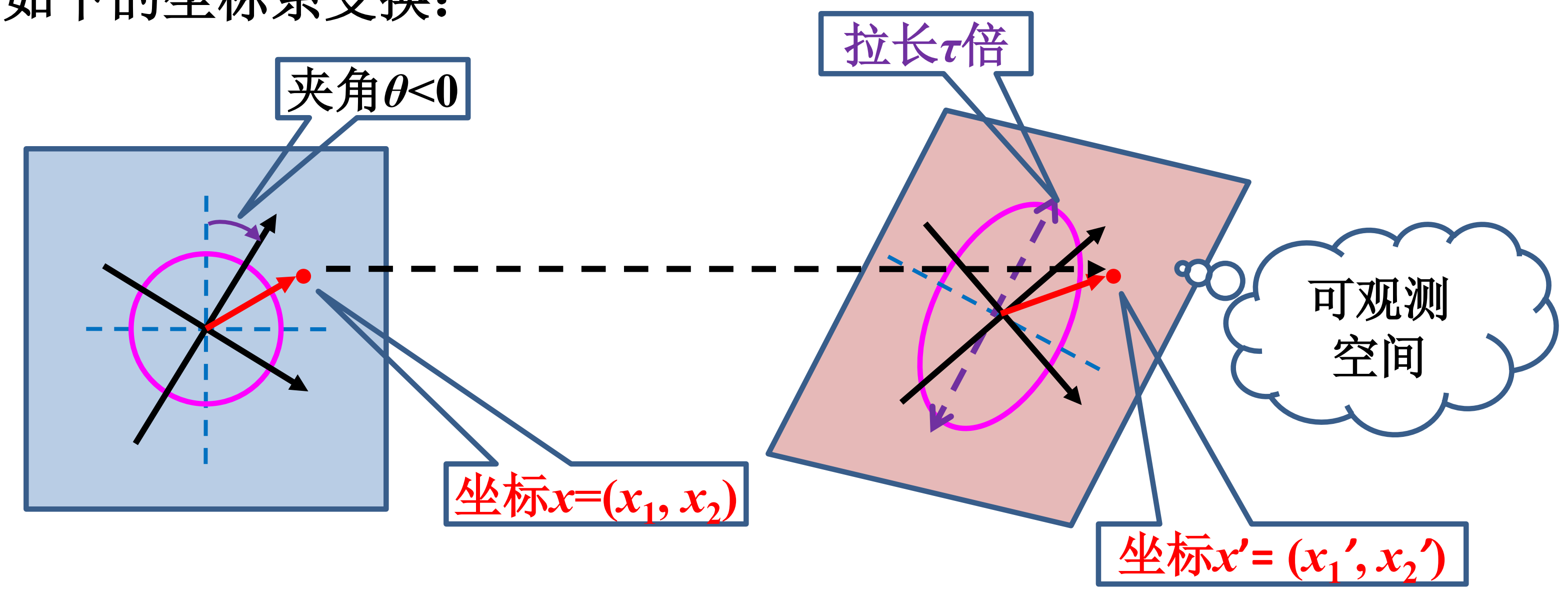
$$\begin{pmatrix}8&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}8&-8&8\\-8&11&-11\\8&-11&13\end{pmatrix}$$

为正定矩阵．

正定矩阵的正惯性指数为阶数．

变换后的内积形式及正定矩阵

考虑如下的坐标系变换：



坐标变换如下：

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \tau\sin^2\theta & (\tau-1)\sin\theta\cos\theta \\ (\tau-1)\sin\theta\cos\theta & \tau\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} x$$

上式可看成向量 x 到 x' 的变换。

向量 x' 到 x 的变换为：

$$x=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta/\tau & (1/\tau-1)\sin\theta\cos\theta \\ (1/\tau-1)\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta/\tau\end{pmatrix}x'=Dx', |D|=1/\tau$$

用新的向量 x' 表示原来向量 x 的内积为：

$$(x,y)=x^{\mathrm{T}}y=x'^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}Dy'=x'^{\mathrm{T}}Ay', A=D^{\mathrm{T}}D, |D|\neq 0$$

相应地新的向量表示原来向量的长度和夹角的公式为：

$$\|x\|=\sqrt{x'^{\mathrm{T}}Ax'}, \alpha=\arccos\frac{x'^{\mathrm{T}}Ay'}{\sqrt{x'^{\mathrm{T}}Ax'}\times\sqrt{y'^{\mathrm{T}}Ay'}}$$

其中的矩阵A有个基本特点：

$$x'^{\mathrm{T}}Ax'=x^{\mathrm{T}}x>0, x'\neq 0$$

A 就是正定矩阵，$x'^{\mathrm{T}}Ax'$ 就是正定二次型，正惯性指数为n

定义5.2.1 (正定二次型、正定矩阵) 设 $f(x)=x^{T}Ax$ 为实二次型，若当实向量 $x\neq\theta$ 时都有 $x^{T}Ax>0$，则称 f 为正定二次型，称 A 为正定矩阵；
当 $x\neq\theta$ 时都有 $x^{T}Ax<0$，则称 f 为负定二次型，称 A 为负定矩阵；
当 $x\neq\theta$ 时都有 $x^{T}Ax\geq 0$，则称 f 为半正定二次型，称 A 为半正定矩阵；
当 $x\neq\theta$ 时都有 $x^{T}Ax\leq 0$，则称 f 为半负定二次型，称 A 为半负定矩阵．

注 有时为了强调正定矩阵的对称性，也称对称正定矩阵．

例5.2.1 说明 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 为非正定矩阵．

解 因为当 $(x_1, x_2)^{T}\neq\theta$ 时，有

$$(x_1,x_2)A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2=2(x_1+0.5x_2)^2+1.5x_2^2>0,$$

故 A 正定．因为 $(1,1)B\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=6>0,(1,-1)B\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=-2<0,$ 故 B 非正定．

例5.2.2 若 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 为非零矩阵，矩阵 $B=\begin{pmatrix}O & A\\ A^{T} & O\end{pmatrix}$, 则必存在两个 $m+n$ 维的向量 α, β 使得 $\alpha^{T}B\alpha>0$, $\beta^{T}B\beta<0$.

解 因为 A 非零，故有向量 $\xi\in\mathbf{R}^{n}$ 使得 $A\xi\neq\theta$，再令 $\eta=A\xi$，则有 $\eta^{T}A\xi=\xi^{T}A^{T}\eta=\eta^{T}\eta>0$． 现在令 $\alpha=\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}\eta\\ -\xi\end{pmatrix},$

则有 $\alpha^{T}B\alpha=2\eta^{T}\eta>0$ ，$\beta^{T}B\beta=-2\eta^{T}\eta<0$.

定义5.2.2 (矩阵的顺序主子式和主子式) 矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的左上角 i 行 i 列 $(1\le i\le n)$ 构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

称为矩阵A的 i 阶顺序主子式.

矩阵A的$i_1,i_2,\ldots,i_k$ 行和$i_1,i_2,\ldots,i_k$ 列 $(1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n)$ 的元素构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

称为矩阵A的k阶主子式 .

正定矩阵的判定

定理5.2.1 若A为n阶的实对称矩阵，则下列条件互为等价：

(1) A为正定矩阵；

(2) A 的特征值均为正；

(3) A的正惯性指数为n；

(4) A的各阶顺序主子式均为正 .

证明思路：

先证明(1)、(2)、(3)等价

(1) A为正定矩阵

$0<\xi^{\mathrm{T}}A\xi=\lambda\xi^{\mathrm{T}}\xi$

(2) A 的特征值均为正

推论5.1.5

(3) A的正惯性指数为n

$P^{\mathrm{T}}AP=E,\ A=P^{-\mathrm{T}}P^{-1}$

$x^{\mathrm{T}}Ax=x^{\mathrm{T}}P^{-\mathrm{T}}P^{-1}x=y^{\mathrm{T}}y>0$

证明(1)、(4)等价　(1) A为正定矩阵 ⇔ (4) A的各阶顺序主子式均为正

(1) => (4) 注意到A的左上块A_i是正定矩阵

$$0 < x^{\mathrm{T}} A x = (y_1, \cdots, y_i, 0, \cdots, 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = (y_1, \cdots, y_i)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \end{pmatrix} = y^{\mathrm{T}} A_i y$$

故 $|A_i| = \prod \lambda(A_i) > 0$

(4) => (1) 利用归纳法：$n=m+1$

将 $A = \begin{pmatrix} A_m & u \\ u^{\mathrm{T}} & s \end{pmatrix}$ 合同变换到对角矩阵，再看对角元是否都 >0

$$\begin{pmatrix} P^{\mathrm{T}} & \theta \\ -u^{\mathrm{T}} A_m^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_m & u \\ u^{\mathrm{T}} & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & -A_m^{-1} u \\ \theta^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{\mathrm{T}} A_m P & \theta \\ \theta^{\mathrm{T}} & s - u^{\mathrm{T}} A_m^{-1} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \theta \\ \theta^{\mathrm{T}} & d \end{pmatrix}$$

其中$P^{\mathrm{T}}P=E$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$，$|A|=(\prod \lambda_i)d>0$，得到$d>0$，
正惯性指数为 $m+1$

半正定矩阵的判定

定理5.2.2 若A为n阶的实对称矩阵，则下列条件互为等价：
(1) A为半正定矩阵；
(2) A 的特征值大于等于零；
(3) A的正惯性指数为 $r(A)$；
(4) A的各阶主子式非负 .

证明思路：
先证明(1)、(2)、(3)等价

$P^{T}AP=\mathrm{diag}(E_r,O)$,
$A=P^{-T}\mathrm{diag}(E_r,O)P^{-1}=P^{-T}\Lambda P^{-1}$
$x^{T}Ax=x^{T}P^{-T}\Lambda P^{-1}x=y^{T}\Lambda y\geqslant 0$

(1) A为半正定矩阵

$0\leqslant \xi^{T}A\xi=\lambda\xi^{T}\xi$

(2) A 的特征值大于等于零

(3) A的正惯性指数为 $r(A)$

推论5.1.5

证明(1)、(4)等价　　**(1) A为半正定矩阵 ⇔ (4) A的各阶主子式非负**

(1) => (4) 注意到A的行列均为$i_1, i_2, \ldots, i_k$ 的子式构成的矩阵A_k是半正定矩阵

$$0 \le x^{\mathrm T} A x = (y_{i_1}, 0, \cdots, y_{i_2}, \cdots, y_{i_k}, \cdots)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{i_1} \\ \vdots \\ y_{i_2} \\ \vdots \\ y_{i_k} \\ \vdots \end{pmatrix} = (y_{i_1}, \cdots, y_{i_k})\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{i_1} \\ \vdots \\ y_{i_k} \end{pmatrix} = y^{\mathrm T} A_k y$$

故 $|A_k| = \prod \lambda(A_k) \geqslant 0$

(4) => (1) 利用归纳法：$n=m+1$

反证法证明 A是半正定的，或者等价地，A的特征值非负。

(i)　假设 A有特征值 $\lambda_1<0$，特征向量为 x，则有 $x^{\mathrm T}Ax=\lambda_1 x^{\mathrm T}x<0$，则$x$不含0分量，否则与下列式子矛盾 (不妨设最后一个分量为0)

$$0 > x^{\mathrm T} A x = (x_1, \cdots, x_m, 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1, \cdots, x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \ge 0$$

(ii)　因为 $|A| \geqslant 0$，所以A还有另一个特征值$\lambda_2 \leqslant 0$，对应与x正交的特征向量$y \neq \theta$。构造向量 $z=x+ty$，使得z含0分量，且有 $z^{\mathrm T}Az=x^{\mathrm T}Ax+y^{\mathrm T}Ayt^2=\lambda_1 x^{\mathrm T}x+\lambda_2 t^2 y^{\mathrm T}y \leqslant \lambda_1 x^{\mathrm T}x<0$，与上面式子矛盾。

例5.2.3 用顺序主子式判定A是否正定，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$.

解 显然，A为实对称矩阵．又

$$\det(1)=|(1)_{1\times1}|=1>0,\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2>0,\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=4>0,$$

各阶顺序主子式均>0，故A为正定矩阵．

例5.2.4 用特征值判定A是否正定，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$.

解 显然，A为实对称矩阵．又

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-3&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-3&\lambda-2\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda-4&0\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+2),$$

特征值为：$\lambda=2,\dfrac{5+\sqrt{17}}{2},\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$，均>0，故$A$为正定矩阵．

例5.2.5 用标准形判定A是否正定，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$.

解 显然，A为实对称矩阵．用合同变换法化成标准形

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_1]{c_2-c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

对角元素都 >0，得正惯性指数为3，故A为正定．

用二次型的解法:

A为实对称矩阵，对应的二次型为:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+3x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$$
$$= (x_1+x_2-x_3)^2+2x_2^2+2x_3^2 \geq 0.$$

当 $f(x_1, x_2, x_3) =0$时，可得 $x_1+x_2-x_3=x_2=x_3=0$，即$x_1=x_2=x_3=0$.

故当x_1, x_2, x_3不全为0时有$f(x_1, x_2, x_3)>0$，故二次型正定，从而A正定．

例5.2.6 t取何值时，二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+tx_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$$ 是正定二次型？

解 二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & t & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

用顺序主子式判别法：$\det(2)=2>0, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=2t-1>0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & t & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & t-0.5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2t-9>0.$

解两个关于t的不等式得到解集：$t>4.5$，故当$t\in(4.5,+\infty)$时，该二次型为正定二次型 .

解法二 二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & t & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{合同变换}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & t-0.5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{合同变换}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & t-4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

易知当$t>4.5$时，该二次型为正定二次型 .

解法三 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+tx_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$ 是

$=2(x_1+0.5x_2+x_3)^2+(t-4.5)x_2^2+(2x_2-x_3)^2=2y_1^2+(t-4.5)y_2^2+y_3^2$，

易知当$t>4.5$时，正惯性指数为变量个数，故二次型正定 .

例5.2.7 证明：A为正定矩阵当且仅当A有分解 $A=D^TD$ (D可逆) .

思路： A正定$\Leftrightarrow P^TAP=E\Leftrightarrow A=(P^T)^{-1}P^{-1}=D^TD$

证明 易知A为n阶实对称矩阵，由定理5.2.1可知A为正定矩阵当且仅当A的正惯性指数为n. 即存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP=E$.

令 $D=P^{-1}$，则D可逆，且有

$$D^TD=(P^{-1})^TP^{-1}=(P^T)^{-1}EP^{-1}=(P^T)^{-1}P^TAPP^{-1}=A .$$

例5.2.8 证明：若实对称矩阵A满足关系式 $(A-E)(A-2E)=O$，则A正定.

证明 展开关系式得

$$A^2-3A+2E=O .$$

设λ是A的特征值，ξ是属于λ的特征向量，则有

$$(A^2-3A+2E)\xi=(\lambda^2-3\lambda+2)\xi=\theta .$$

得 $$\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0 .$$

此即A的特征值或是1或是2，均大于零，由定理5.2.1可知A是正定矩阵.

例5.2.9 若 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 对称正定，证明：$(\alpha^{\mathrm T}A\beta)^2\le(\alpha^{\mathrm T}A\alpha)(\beta^{\mathrm T}A\beta)$，其中$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$为任意列向量 .

$(\alpha^{\mathrm T}A\beta)^2\le(\alpha^{\mathrm T}A\alpha)(\beta^{\mathrm T}A\beta)$的说明：

若 $A=E$，则不等式即为：

$(\alpha^{\mathrm T}\beta)^2\le(\alpha^{\mathrm T}\alpha)(\beta^{\mathrm T}\beta)$，其中$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$， Cauchy-Schwartz不等式

分量形式：$(\Sigma a_ib_i)^2\le(\Sigma a_i^2)(\Sigma b_i^2)$，其中 $\alpha=(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm T},\beta=(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm T}$.

若$A\neq E$，令$A=D^{\mathrm T}D$，D可逆，$\tilde\alpha=D\alpha$，$\tilde\beta=D\beta$，则$(\alpha^{\mathrm T}A\beta)^2\le(\alpha^{\mathrm T}A\alpha)(\beta^{\mathrm T}A\beta)$

即为$(\tilde\alpha^{\mathrm T}\tilde\beta)^2\le(\tilde\alpha^{\mathrm T}\tilde\alpha)(\tilde\beta^{\mathrm T}\tilde\beta)$.

证明 当$\alpha=\theta$ 时，结论显然 .

当$\alpha\neq\theta$ 时，令 $\xi=t\alpha+\beta$，则有

$$\xi^{\mathrm T}A\xi=(t\alpha+\beta)^{\mathrm T}A(t\alpha+\beta)=\alpha^{\mathrm T}A\alpha t^2+2\alpha^{\mathrm T}A\beta t+\beta^{\mathrm T}A\beta .$$

由A的正定性，知 $\alpha^{\mathrm T}A\alpha>0$, $\xi^{\mathrm T}A\xi\ge0$，所以有

$$(\alpha^{\mathrm T}A\alpha)t^2+(2\alpha^{\mathrm T}A\beta)t+(\beta^{\mathrm T}A\beta)\ge0 .$$

再由二次方程根的判别准则得

$$\Delta=(2\alpha^{\mathrm T}A\beta)^2-4(\alpha^{\mathrm T}A\alpha)(\beta^{\mathrm T}A\beta)\le0 ,$$

即 $$(\alpha^{\mathrm T}A\beta)^2\le(\alpha^{\mathrm T}A\alpha)(\beta^{\mathrm T}A\beta) .$$

实质上：$0\le\xi^{\mathrm T}A\xi=\alpha^{\mathrm T}A\alpha t^2+2\alpha^{\mathrm T}A\beta t+\beta^{\mathrm T}A\beta$

$=\alpha^{\mathrm T}A\alpha\,(t+\alpha^{\mathrm T}A\beta/\alpha^{\mathrm T}A\alpha)^2+((\alpha^{\mathrm T}A\alpha)(\beta^{\mathrm T}A\beta)-(\alpha^{\mathrm T}A\beta)^2)/\alpha^{\mathrm T}A\alpha$. (配方)

必有 $(\alpha^{\mathrm T}A\alpha)(\beta^{\mathrm T}A\beta)-(\alpha^{\mathrm T}A\beta)^2\ge0$.

例5.2.9 若 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 对称正定，证明：$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\beta})^2\le(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\beta})$，其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n$为任意列向量 .

思路二： 将$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\beta})^2\le(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\beta})$化成等价式子：

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}\alpha\right)^{\mathrm{T}}A\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\beta\right)\right|\le 1,\text{其中}\frac{1}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}\alpha,\frac{1}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\beta\text{为单位化的向量}\alpha,\beta.$$

可令 $\xi=\frac{1}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}\alpha\pm\frac{1}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\beta$，再利用不等式 $\xi^{\mathrm{T}}A\xi\ge 0$.

证法二 当 $\alpha=\theta$ 或 $\beta=\theta$ 时，结论显然 .

当 $\alpha\ne\theta$，$\beta\ne\theta$ 时，令 $\xi=\frac{1}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}\alpha\pm\frac{1}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\beta$,

则由A的正定性有

$$\xi^{\mathrm{T}}A\xi=\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}\alpha\pm\frac{1}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\beta\right)^{\mathrm{T}}A\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}\alpha\pm\frac{1}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\beta\right)=2\pm 2\frac{\alpha^{\mathrm{T}}A\beta}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}\cdot\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\ge 0,$$

故 $2\ge\mp 2\frac{\alpha^{\mathrm{T}}A\beta}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}\cdot\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}$， 即 $1\ge\frac{\left|\alpha^{\mathrm{T}}A\beta\right|}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}\cdot\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}$,

于是 $(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\beta})^2\le(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\beta})$.

补充例5B 设有n元实二次型 $f(x_1,\dots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+\dots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$，其中$a_i$ (i=1, 2, …, n)为实数，试问，当$a_1,a_2,\dots,a_n$满足何种条件时，二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$为正定二次型.

证 显然有$f(x_1,\dots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+\dots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2\geq 0$，又因为$f$为正定二次型，故当$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$时只有$x_1=x_2=\dots=x_n=0$，即下列方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2=0, \\ x_2+a_2x_3=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0, \\ x_n+a_nx_1=0 \end{cases}$$

只有零解，故系数行列式非零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & \\ & 1 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ a_n & & & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_na_1\cdots a_{n-1}\neq 0,$$

于是$a_1,a_2,\dots,a_n$满足$a_1a_2\dots a_n\neq(-1)^n$时，二次型$f(x_1,\dots,x_n)$为正定二次型.

补充例5C 设A, B是实对称矩阵，A的特征值均大于a，B的特征值均大于b，求证：$A+B$的特征值均大于$a+b$.

证 设λ为A的特征值，则$\lambda-a$为$A-aE$的特征值，故$A-aE$的特征值均大于0，显然$A-aE$对称，故$A-aE$为正定矩阵.

同样地，$B-bE$也为正定矩阵.

任取$x\neq\theta$，

$$x^{\mathrm{T}}(A+B-(a+b)E)x= x^{\mathrm{T}}((A-aE)+(B-bE))x = x^{\mathrm{T}}(A-aE)x+x^{\mathrm{T}}(B-bE)x >0,$$

$A+B-(a+b)E$对称性显然，故$A+B-(a+b)E$正定，特征值λ均大于0，于是$A+B$特征值$\lambda+(a+b)$均大于$a+b$.