南京大学大学数学试卷

考试时间 2016.1.6　任课教师____________　考试成绩______________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 已知$\alpha=(1,1,-1)^T$是矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$的一个特征向量，(1) 求$a$、$b$和特征向量$\alpha$所对应的特征值；(2) 判断矩阵$A$是否相似于对角矩阵.

3. 设矩阵X满足$AXA+BXB=AXB+BXA+I$，其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵$X$.

4. 求二次型$f=x_1x_2+x_2x_3$的秩和正负惯性指数.

二、 (本题12分) 设 A 为任一 n 阶实矩阵，证明 $r(A^n)=r(A^{n+1})$.

三. (本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$，其中$0<a,b<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

四. (本题12分) 设 A 是 n 阶对称阵，P 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 α 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量，(1) 证明 λ 是矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 的一个特征值；(2) 求矩阵 $(P^{-1}AP)^T$对应于特征值 λ 的特征向量.

五. (本题12分) 取向量空间F^4的基底 $\alpha_1=(-1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,-1,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,-1,1)^T,\alpha_4=(1,1,1,-1)^T$，已知向量$\alpha$的坐标是$(-2,0,1,2)^T$，求在基底$\beta_1=(3,1,1,1)^T,\beta_2=(1,3,1,1)^T,\beta_3=(1,1,3,1)^T,\beta_4=(1,1,1,3)^T$之下向量$\alpha$的坐标以及从基底$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 到基底 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 的过渡矩阵.

六. (本题12分) 设矩阵 A 与 B 相似，且 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$，(1) 求$a,b$的值；(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

七. (本题12分) $P_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 是空间中四点，矩阵 $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix}$，$r(A)=r$，求证：(1) $r=3$ 时，此四点共面；(2) $r=2$ 时，此四点共线；(3) $r=1$ 时，此四点重合(共点).