2.7.3 极大无关组与向量组的秩

若一个向量组是相关的，我们知道向量组中有多余的向量，我们可以不断地删除多余的向量，最后只剩下不能再删的独立的向量.

当一个向量组将多余的向量全部删除后剩下的向量组就是向量组的极大无关组.

极大无关组可以有许多，但是不同极大无关组的向量个数都是相同的，该向量个数称为向量组的秩.

定义2.7.4 (极大无关组) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是某一向量组的部分组，满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关;

(2) 在原向量组中任取向量α，向量组$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_r,\alpha$都线性相关，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_r$是原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

由定义可知，仅含有零向量的向量组没有极大无关组，而一个线性无关的向量组的极大无关组即是其本身.

例2.7.12 求向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的极大线性无关组，其中

$$\alpha_1=(1,1,0),\quad \alpha_2=(1,0,0),\quad \alpha_3=(0,1,0).$$

解 显然$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，又易见$\alpha_1$与$\alpha_2$线性无关. 故 α_1,α_2是一个极大无关组，同理可知 α_1,α_3； α_2,α_3 也都是极大无关组.

也可将$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$当成列向量来求解，即当成 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(1,0,0)^T$, $\alpha_3=(0,1,0)^T$ 来考虑问题，但涉及到具体向量用行向量.

极大无关组的简单性质：

定理2.7.7 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{ir}$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的一个极大线性无关组，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$中任一向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{ir}$线性表示，且表示法唯一.

推论2.7.8 向量组与它的任意一个极大无关组等价.

推论2.7.9 一个向量组的各个极大无关组之间是等价的.

推论2.7.10 两个向量组等价的充要条件是一组的一个极大无关组与另一组的一个极大无关组等价.

证明：显然，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{ir},\alpha_j$必线性相关，且$\alpha_j$的表示法唯一.

由定理2.7.7 容易得出推论2.7.8，推论2.7.9，推论2.7.10.

极大无关组的两种判别准则

极大无关组判别准则1：

(1) 部分向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关；

(2) 添加原向量组的任意向量α，向量组$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_r,\alpha$都线性相关.

极大无关组的判别准则2：

(1) 部分向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关；

(2) 原向量组中任一向量均可由$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性表示.

准则1：无关且加其它向量相关

准则2：无关且可表示其它向量

求向量组的一个极大无关组：

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_5=\begin{pmatrix}0\\5\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

解：$\beta_1, \beta_2, \beta_4$线性无关，且有 $\beta_3=3\beta_1-\beta_2$，$\beta_5=5\beta_2-2\beta_3$. 极大无关组为$\beta_1, \beta_2, \beta_4$.

初等行变换求向量组的极大无关组

若向量组比较复杂，如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\6\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\\-4\end{pmatrix},$$

如何求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的极大线性无关组？

用初等变换简化后再求极大无关组.

补充定理：初等行变换不改变列向量组的组合关系.
进一步，初等行变换将极大无关组仍然变为极大无关组.

证明：假设初等行变换：$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\gamma)\to(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,\eta)$

等价于：$(\beta_1,\ldots,\beta_n,\eta)=P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\gamma)=(P\alpha_1,\ldots,P\alpha_n,P\gamma)$, P可逆.

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\gamma$ 有关系：$\gamma=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n$,

两边左乘P，则有：$P\gamma=\lambda_1P\alpha_1+\ldots+\lambda_nP\alpha_n$,即$\eta=\lambda_1\beta_1+\ldots+\lambda_n\beta_n$.

因为初等行变换的逆变换也是初等行变换，故有：

$$\gamma=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n\Leftrightarrow\eta=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\ldots+\lambda_n\beta_n,$$

易知也有：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n=\theta\Leftrightarrow k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_n\beta_n=\theta$.

由于初等行变换保持无关性和可表示性，故也保持极大无关性.

例2.7.13 (改动)设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\\-1\end{pmatrix},$$

求向量组 α_1 , α_2 , α_3 , α_4, α_5 的一个极大无关组，并用此极大无关组表示其余向量 。

解：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&5\\0&1&0&-1&2\\0&0&1&-1&-3\\2&-1&3&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&5\\0&1&0&-1&2\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 (α_1 , α_2 , α_3) 为一个极大无关组，并有

$$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\ ,\quad \alpha_5=5\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3\ .$$

补充例2N 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\6\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\\-4\end{pmatrix},$$

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组, 并用此极大无关组表示其余向量.

解:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&2&1&4&2\\2&2&4&6&-2\\-1&1&-4&1&3\\1&0&3&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&0\\0&1&-1&0&5\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$ 为一个极大无关组，并有

$$\alpha_3=3\alpha_1-\alpha_2\ ,\quad \alpha_5=5\alpha_2-2\alpha_4\ .$$

***若不需要用极大无关组表示其它向量，则行变换只要变换到行梯形即可.**

如上例:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&2&1&4&2\\2&2&4&6&-2\\-1&1&-4&1&3\\1&0&3&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4&2\\0&-2&2&-2&-6\\0&0&0&2&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ **故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大无关组.**

若向量组中的向量是行向量，如何处理？可转置成列向量处理.

补充例2N (改成行向量) 设$\alpha_1=(1,2,-1,1)$, $\alpha_2=(2,2,1,0)$, $\alpha_3=(1,4,-4,3)$, $\alpha_4=(4,6,1,2)$, $\alpha_5=(2,-2,3,-4)$, 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组, 并用此极大无关组表示其余向量.

解:

$$A=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}},\alpha_4^{\mathrm{T}},\alpha_5^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&2&1&4&2\\2&2&4&6&-2\\-1&1&-4&1&3\\1&0&3&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&0\\0&1&-1&0&5\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_4^{\mathrm{T}})$，从而$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$为一个极大无关组，并有

$\alpha_3=3\alpha_1-\alpha_2$ ， $\alpha_5=5\alpha_2-2\alpha_4$.

定理2.7.11 一个向量组的各个极大无关组所含向量的个数相同.

说明： 假设有两个极大无关组

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 个数不同，不妨 $r>s$.

则有 $$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}$$ ($\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$表示$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$)

则 $$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_r \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_r \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\theta$$ ($\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关)

即有 $$l_1\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{s1} \end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{s2} \end{pmatrix}+\cdots+l_r\begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{sr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_r \end{pmatrix}=\theta$$ 有非零解

因为r个$s(s<r)$维向量线性相关

$l_1,l_2,\dots,l_r$ 不全为0使得 $l_1\alpha_1+\dots+l_r\alpha_r=\theta \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性相关，矛盾

定义2.7.5 (向量组的秩) 向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个极大无关组所含向量的个数定义为该向量组的秩，记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$. 规定仅含零向量的向量组的秩为 0 .

注：向量组秩为r，则向量组任意r个无关向量都是一个极大无关组.

定理2.7.12 设A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; B: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是两个同维数的向量组，若向量组A可以由向量组B线性表示，则必有

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \le r\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}.$$

进一步有：等价的向量组必有相同的秩 .

证明：设B的极大无关组为$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$，$B$可以表示$A$，故$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$也为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$的极大无关组，故

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \le r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n\} = s = r\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}.$$

例2.7.14 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ b \\ 4 \end{pmatrix},$$

按a,b的不同取值，指出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组以及秩 r.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}.$$

行梯形首元素对应的列就是一个极大无关组

1) $a \ne 1, b \ne 2$时，极大无关组为该向量组本身，r=4 .

2) $a \ne 1, b = 2$时，一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，$r$=3 .

3) $a = 1, b \ne 2$时，一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$，$r$=3 .

4) $a = 1$且$b = 2$时，一个极大无关组为 α_1, α_2，r=2 .

矩阵的行秩、列秩和矩阵的秩

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的列向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$的秩称为矩阵$A$的列秩；$A$的行向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 的秩称为矩阵A的行秩 .

定理2.7.13 任一矩阵的秩与其列秩、行秩均相等.

证明思路：行简化梯形矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & & & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & * \\ & & 1 & * & \cdots & * \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 有B的列秩=r(B).

行变换：$A_0=(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}) \to B_0=(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ir})=PA_0$， P可逆.

$k_1\alpha_{i1}+\dots+k_{ir}\alpha_r=\theta \Leftrightarrow P(k_1\alpha_{i1}+\dots+k_{ir}\alpha_r)=\theta$ 即 $k_1\beta_{i1}+\dots+k_{ir}\beta_r=\theta$，

故A_0的列的相关性与B_0的列相同.

$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \to B=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

A的极大无关组变换成B的极大无关组，故有：A的列秩=B的列秩

A的列秩=B的列秩=r(B)=r(A)=r(A^T)=A的行秩

注：由于矩阵的行秩、列秩、秩相等，故对于$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$下列记号表示相同含义：

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = r(A)=r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

定理2.7.3 n维列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性相关的充要条件是 $r(A)<r$，其中矩阵$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$.
换言之，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关的充要条件是$r(A)=r$.

说明： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性相关$\Leftrightarrow r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}=r(A)<r$.

注： 定理2.7.3也可用于行向量组，此时 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$.

推论2.7.6改 设$A=(a_{ij})_{n\times m}$的某r列(行)所组成的矩阵含有不等于零的r阶子式，则此r个列(行) 向量线性无关.

证明：不妨设A的前r列$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$所成的矩阵含有非零的$r$阶子式，则

矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}$

的秩为r，等于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$所含向量的个数. 由定理2.7.3知这个向量组线性无关.

例2.7.11 判断下列向量组：

(1) $\alpha_1=(1,-1,-1,1)$, $\alpha_2=(1,-1,1,-3)$, $\alpha_3=(1,-1,-2,3)$;

(2) $\alpha_1=(1,2,3,4)$, $\alpha_2=(0,2,3,4)$, $\alpha_3=(0,0,3,4)$

各自的线性相关性 .

解 (1) 作矩阵A并进行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

得$r(A)=2<3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

(2) 法一：作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

易知，$r(A)=3$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

法二：因为 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\neq 0,$ 故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

更好的解法是转置成列向量组再求解，如下：

例2.7.11 判断下列向量组：

(1) $\alpha_1=(1,-1,-1,1)$, $\alpha_2=(1,-1,1,-3)$, $\alpha_3=(1,-1,-2,3)$;

(2) $\alpha_1=(1,2,3,4)$, $\alpha_2=(0,2,3,4)$, $\alpha_3=(0,0,3,4)$

各自的线性相关性 .

解 (1)

$$A=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\-1&1&-2\\1&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&2&-1\\0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_4+2r_3\\ r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得$r(A)=2<3$，故 $\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}}$线性相关，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(2)

$$A=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\\4&4&4\end{pmatrix}.$$列梯形有3个非零列，故$r(A)=3$，

于是$\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}}$线性无关，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

例2.7.15 设n个n维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关，

$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_n\alpha_n$， $k_1,k_2,\dots,k_n$ 全不为零.

证明：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$中任意$n$个向量都线性无关.

证法一思路：用定义 $l_1\alpha_1+\dots+l_{i-1}\alpha_{i-1}+l_{i+1}\alpha_{i+1}+\dots+l_n\alpha_n+l_{n+1}\alpha_{n+1}=\theta$，

将 α_{n+1}代换掉得

$(l_1+l_{n+1}k_1)\alpha_1+\dots+(l_{i-1}+l_{n+1}k_{i-1})\alpha_{i-1}+l_{n+1}k_i\alpha_i+(l_{i+1}+l_{n+1}k_{i+1})\alpha_{i+1}+\dots(l_n+l_{n+1}k_n)\alpha_n=\theta$，

再由系数为零，得出l_i全为0。

证法二思路：用行列式

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_{n+1})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & k_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_i \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & k_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & k_n \end{pmatrix}=A_0B,$$

$$|A|=|A_0B|=|A_0||B|=(-1)^{i+n}k_i\,|A_0|\neq 0,\ A\text{列向量无关}.$$

证法三思路：用等价向量组等秩A:$\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{n+1}$；$B$:$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$，

$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_n\alpha_n$ 可知B能表示A，

$\alpha_i=k_i^{-1}(\alpha_{n+1}-k_1\alpha_1-\dots-k_{i-1}\alpha_{i-1}-k_{i+1}\alpha_{i+1}-\dots-k_n\alpha_n)$ 可知A能表示B.

思考：该题是否可推广到m维？是否可再推广到A_0相关，A秩不变？

答案：可推广到m维(用法一或法三)；可推广到A_0相关，A秩不变(用法三)

矩阵和、积的秩的关系

定理2.7.14 (1) $\mathrm{r}(A+B) \leqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

(2) $\mathrm{r}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$;

(3) 若A , B均为n阶方阵，则$\mathrm{r}(AB) \geqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n$.

前已证明，其中的(1)、(2) 还可以用极大无关组和向量组的秩证明

(1) 设A , $B \in \mathrm{R}^{m\times n}$， $\mathrm{r}(A)=r_1,\mathrm{r}(B)=r_2$， A , B按列分块如下
$A=(\alpha_1,\ \dots,\alpha_n)$， $B=(\beta_1,\dots,\beta_n)$， 则 $A+B=(\alpha_1+\beta_1,\ \dots,\alpha_n+\beta_n)$.
不妨设A和B的列向量组的极大无关组分别是$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{r1}$和 β_1 , $\beta_2,\dots,\beta_{r2}$， 则 $A+B$ 的列向量组可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{r1},\beta_1$, $\beta_2,\dots,\beta_{r2}$ 线性表示，由定理2.7.12，有
$\mathrm{r}(A+B)\leqslant \mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{r1},\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{r2}\}\leqslant r_1+r_2=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

(2) 设$A\in \mathrm{R}^{m\times n}$, $B\in \mathrm{R}^{n\times s}$， A按列分块，则 $AB=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$.

所以，AB的列向量组可由A的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$线性表示. 从而
$\mathrm{r}(AB)=(AB)$的列秩$\leqslant \mathrm{r}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}=\mathrm{r}(A)$. 而B按行分块可得$\mathrm{r}(AB)\leqslant \mathrm{r}(B)$.
综合上述证得 $\mathrm{r}(AB)\leqslant \min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$.

(3) $\mathrm{r}(AB) \ge \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n$ 中A , B可以不是方阵，其中n为A的列数 .

矩阵秩的关系

$0 \leqslant r(A_{m\times n}) \leqslant \min\{m,n\}$；

$r(A^T)=r(A)$；$r(kA)=r(A), k\neq 0$

$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$；

$r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant \min\{ r(A), r(B) \}$；（ n为A的列数 ）

$\max\{ r(A), r(B) \}\leqslant r((A, B))\leqslant r\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B)$；

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$．（ P, Q非奇异 ）

补充例2O 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 秩为3, 且 $4\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0$，求一个极大无关组.

解：由条件得 $\alpha_1=-1/2\alpha_2-3/4\alpha_3$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$表示，于是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$等价，可得 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=r\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=3$，可知$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是一个极大无关组

补充例2P 设n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关，$r<n$，证明存在$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-r}$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-r}$ 线性无关.

证明 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$, $E_n=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$, 则 $n=r(E_n)\le r(A,E_n)\le n$, (A,E_n)行满秩.

考虑向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$，添加$e_1$，添加后的向量组线性相关，则$e_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性表示，去掉$e_1$；否则$e_1$作为第一个添加成功的向量记为$\beta_1$，依次添加$e_2,e_3,\ldots,e_n$，原向量组成功地添加了向量$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$，且最后的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$线性无关，且从添加过程可知$e_1,e_2,\ldots,e_n$不管是否添加成功，都能由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$线性表示，

故$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$是一个极大无关组，又因为

$r(A,E_n)=r\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,e_1,e_2,\ldots,e_n\}=n$，故$k=n-r$,

即$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-r}$ 线性无关.