1.2.4 *n*元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则

考虑方程组：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (1.1)$$

定理1.1.1 对方程组 (1.1) 有如下结论：

(1) 若$\Delta \neq 0$，则方程组 (1.1) 有唯一的解：$x_1=\Delta_1/\Delta, x_2=\Delta_2/\Delta$.

(2) 若$\Delta=0$，但 Δ_1, Δ_2不全为零，则方程组 (1.1) 无解 .

(3) 若$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$，则方程组 (1.1) 有无穷多组解 .

其中：
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

证明：方程1×a_{22}减去方程2×a_{12}得到：$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$,

方程2×a_{11}减去方程1×a_{21}得到：$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$,

即：$\Delta x_1=\Delta_1$, $\Delta x_2=\Delta_2$.

(1) 唯一性. (1.1)有解得到$\Delta x_1=\Delta_1$, $\Delta x_2=\Delta_2$. 当$\Delta \neq 0$时只有一种解: $x_1=\Delta_1/\Delta, x_2=\Delta_2/\Delta$.

再验证有解：$(a_{11}\Delta_1+a_{12}\Delta_2)/\Delta=(a_{11}(b_1a_{22}-b_2a_{12})+a_{12}(a_{11}b_2-a_{21}b_1))/\Delta$

$=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})b_1/\Delta=b_1$, 同理可验证第二个方程成立.

(2) 若(1.1)有解则有$\Delta x_1=\Delta_1$, $\Delta x_2=\Delta_2$ ，即$0=\Delta_1$, $0=\Delta_2$ ，矛盾，故无解.

(3) $\Delta=0$ 表示Δ内两行成比例，故$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$表示 $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2}$,

即方程组只有一个独立方程，故有无穷多组解.

例1.1.1 解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - 3x_2 = -1. \end{cases}$

解 因系数行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0,$

故方程组有唯一的一组解：$x_1 = \dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \dfrac{-8}{-4} = 2,\quad x_2 = \dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \dfrac{-4}{-4} = 1.$

例1.1.2 解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2 = 0. \end{cases}$

解 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$

故方程组有无穷多组解。实际上，方程组只含有一个方程 $x_1+2x_2=-1$ 。
由此可知，方程的解可表为 $x_1=-(2x_2+1)$，x_2可取任意值.

例1.1.3 解方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 4, \\ 6x_1 + 10x_2 = 2. \end{cases}$

解 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0,\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 30 \neq 0,$

可见方程组无解。事实上第一个方程与第二个方程是矛盾的.

含矛盾的方程组称为不相容方程组。

再考虑方程组：
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \qquad (1.9)$$

定理1.1.2 对方程组 (1.9)，有

(1) 若$\Delta\neq 0$，则方程组 (1.9) 有唯一的解：$x_1=\Delta_1/\Delta, x_2=\Delta_2/\Delta, x_3=\Delta_3/\Delta$.

(2) 若$\Delta=0$，但 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 不全为0，则方程组 (1.9) 无解 .

(3) 若$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$，则方程组 (1.9) 可能无解也可能有无穷多组解 .

其中：
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

说明：由之前推导3元方程组用行列式表示解的过程知:

(1.9)有解x_1, x_2, x_3则满足$\Delta x_1=\Delta_1, \Delta x_2=\Delta_2, \Delta x_3=\Delta_3$ ，故有结论(1)(2).

再看方程组：
$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b, \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b, \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=c. \end{cases} \qquad (*)$$

行列式有：
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b & a_2 & a_3 \\ b & a_2 & a_3 \\ c & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & b & a_3 \\ a_1 & b & a_3 \\ a_1 & c & a_3 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b \\ a_1 & a_2 & b \\ a_1 & a_2 & c \end{vmatrix}=0.$$

方程组(*)当$c=b$时有无穷多组解，当$c\neq b$时无解，这就说明了结论(3).

例1.1.4 解三元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=-1. \end{cases}$

解 因系数行列式
$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0,$$
故方程组有唯一解：
$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-\frac{3}{4}.$$

例1.1.5 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3=2, \\ 3x_1+6x_2+3x_3=3. \end{cases}$

解 显然，4个行列式均为零，即$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$。而方程组与方程 $x_1+2x_2+x_3=1$ 同解，因此原方程组有无穷多组解，其解可表示为：
$x_1=1-2x_2-x_3$，其中x_2, x_3取任意值.

例1.1.6 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases}$

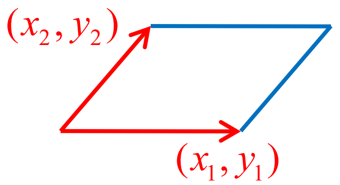
解 易知系数行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$

且 $\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$

但该方程组无解，因为方程组的三个方程是矛盾的.

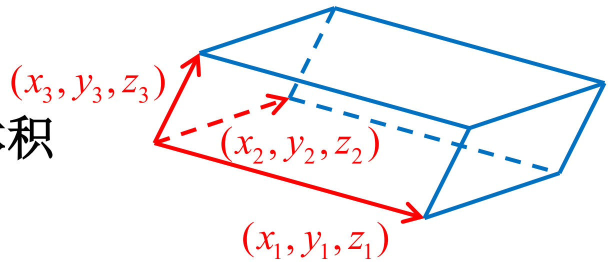
行列式的几何意义：

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 表示平行四边形面积



逆时针面积为正

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 表示平行六面体体积

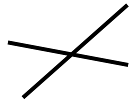


右手向体积为正

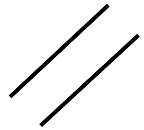
定理的几何解释：

定理1.1.1： $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$

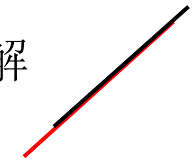
$\Delta \neq 0$时有唯一解



$\Delta = 0$,但Δ_1或$\Delta_2 \neq 0$时无解

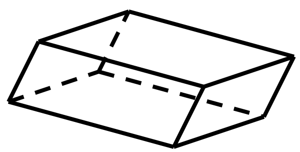


$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$时有无穷多组解

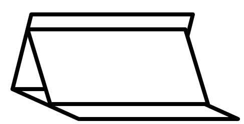


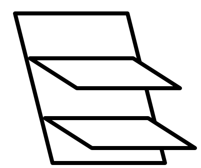
定理1.1.2： $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$

$\Delta \neq 0$时有唯一解



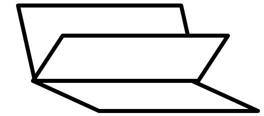
$\Delta = 0$,但有$\Delta_i \neq 0$时无解



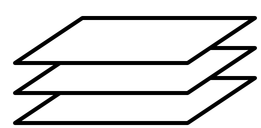


$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

无穷多组解



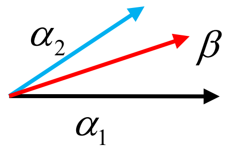
无解



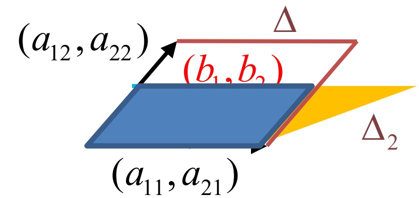
定理的向量解释：

定理1.1.1： $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases}$ 即为 $x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$,即$x\alpha_1+y\alpha_2=\beta.$

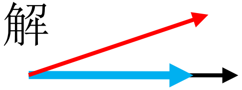
$\Delta\neq 0$时有唯一解



$$\begin{cases} x=\Delta_1/\Delta, \\ y=\Delta_2/\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{cases}$$



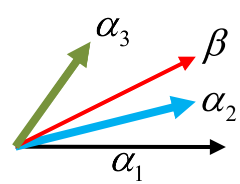
$\Delta=0$,但Δ_1或$\Delta_2\neq 0$时无解



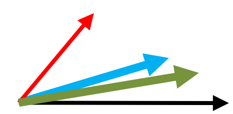
$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$时有无穷多组解

定理1.1.2： $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$ 即$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,也即$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta.$

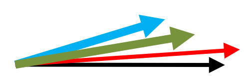
$\Delta\neq 0$时有唯一解($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不共面)



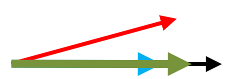
$\Delta=0$,但有$\Delta_i\neq 0$时无解($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$共面,与$\beta$不共面)



$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ ⇒ 无穷多组解



⇒ 无解



克莱姆(Cramer)法则

定理1.2.10. 对于n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则原方程组有解，且解是唯一的，这个解可用公式表示为：

$$x_j=\frac{D_j}{D}, \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中D_j (j=1,2, …,n)为：

$$D_j=\begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & & \phantom{a_{1,j-1}} & \text{第}j\text{列} & \phantom{a_{1,j+1}} & & \phantom{a_{1n}} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \neq 0.$$

证明思路： $D \neq 0$

D_{1j}为a_{1j}的代数余子式

先证明解的唯一性

各行乘以一个数 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, & \times D_{1j} \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2j}x_j+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, & \times D_{2j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nj}x_j+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, & \times D_{nj} \end{cases}$

方程组即为

$$(+)\begin{cases} a_{11}D_{1j}x_1+\cdots+a_{1j}D_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}D_{1j}x_n=b_1D_{1j}, \\ a_{21}D_{2j}x_1+\cdots+a_{2j}D_{2j}x_j+\cdots+a_{2n}D_{2j}x_n=b_2D_{2j}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}D_{nj}x_1+\cdots+a_{nj}D_{nj}x_j+\cdots+a_{nn}D_{nj}x_n=b_nD_{nj}, \end{cases}$$

各行对应项相加 $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}D_{ij}}_{0}x_1+\cdots+\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}D_{ij}}_{D}x_j+\cdots+\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{in}D_{ij}}_{0}x_n=\underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_iD_{ij}}_{D_j}$

$Dx_j=D_j$ 　即 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$

再证明解的存在性

将 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ 代入第i个方程得：$a_{i1}\dfrac{D_1}{D}+a_{i2}\dfrac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\dfrac{D_n}{D}=\dfrac{1}{D}(a_{i1}D_1+a_{i2}D_2+\cdots+a_{in}D_n)$

其中：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b_1D_{11}+b_2D_{21}+\cdots+b_nD_{n1},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b_1D_{12}+b_2D_{22}+\cdots+b_nD_{n2},$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}=b_1D_{1n}+b_2D_{2n}+\cdots+b_nD_{nn}.$$

$$\begin{aligned}
&a_{i1}D_1+a_{i2}D_2+\cdots+a_{in}D_n \\
&=a_{i1}(b_1D_{11}+b_2D_{21}+\cdots+b_nD_{n1}) \\
&+a_{i2}(b_1D_{12}+b_2D_{22}+\cdots+b_nD_{n2}) \\
&+\cdots+a_{in}(b_1D_{1n}+b_2D_{2n}+\cdots+b_nD_{nn})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=b_1a_{i1}D_{11}+b_2a_{i1}D_{21}+\cdots+b_ia_{i1}D_{i1}+\cdots+b_na_{i1}D_{n1} \\
&+b_1a_{i2}D_{12}+b_2a_{i2}D_{22}+\cdots+b_ia_{i2}D_{i2}+\cdots+b_na_{i2}D_{n2} \\
&+\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
&+b_1a_{in}D_{1n}+b_2a_{in}D_{2n}+\cdots+b_ia_{in}D_{in}+\cdots+b_na_{in}D_{nn} \\
&=b_1\times 0+b_2\times 0+\cdots+b_i\times D+\cdots+b_n\times 0 \\
&=b_i\times D
\end{aligned}$$

故有：

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i$$

故有解： $x_j=\dfrac{D_j}{D}$

注：对于n元n个方程的方程组，若系数行列式D=0，则有如下情形：

(1)有某个$D_i \neq 0$，则方程组无解；

(2) 若$D_1=D_2=\ldots=D_n=0$, $n\geq3$，则方程组可能无解，可能有无穷多组解.

更加精细的结论见第3章线性方程组的定理3.3.1.

如同3元方程组解的结论的说明：

方程组有解，则满足：$Dx_i=D_i$, $i=1,2,\ldots,n$，故(1)成立.

方程组左边系数相同，右端相同则有无穷多解，一个右端不同则无解，故(2)成立.

除了线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

非齐次方程组

考虑右端全为0的特殊的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases}$$

齐次方程组

显然，$x_1=x_2=\ldots=x_n=0$为上述齐次方程组的解，称为零解.

齐次方程组的不全为零的解称为非零解.

定理1.2.11改 含有n个未知数n个方程的齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases}$$

有非零解的充要条件是它的系数行列式等于零.

证明思路：必要性：系数行列式非零可知方程组有唯一组解，即零解，故有非零解一定有系数行列式等于零.

充分性用数学归纳法，要证系数行列式△=0时有非零解.

n=2时，方程组为 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0, \end{cases}$

行列式$\triangle=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，易知$(a_{22},-a_{21})$或$(-a_{12},a_{11})$都是方程组的解，其中必有非零解.

假设直到n-1元方程组结论成立.

考虑n元方程组时，分两种情况：

(1) $a_{11}=\ldots=a_{n1}=0$，则有非零解$(1,0,0,\ldots,0)$.

(2) $a_{11},a_{21},\ldots,a_{n1}$不全为0，不妨设$a_{11}\neq0$，将第2个方程直到第$n$个方程减去第1个方程的某个倍数用以消去$x_1$项，得到方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \qquad a_{22}'x_2+\cdots+a_{2n}'x_n=0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{n2}'x_2+\cdots+a_{nn}'x_n=0, \end{cases} \text{(*) 且有} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & & \\ a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix} = 0,$$

因为$a_{11}\neq0$，故

$$\begin{vmatrix} a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & & \\ a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix} = 0,$$

故 $\begin{cases} a_{22}'x_2+\cdots+a_{2n}'x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}'x_2+\cdots+a_{nn}'x_n=0 \end{cases}$ **系数行列式=0，由归纳假设有非零解$(s_2,s_3,\ldots,s_n)$.**

由(*)的第1个方程得到

$$x_1=-\frac{a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n}{a_{11}},$$

设$s_1=-(a_{12}s_2+\ldots+a_{1n}s_n)/a_{11}$，则$(s_1,s_2,\ldots,s_n)$为(*)的非零解，

从而也是原方程组的非零解.

例1.2.8 解线性方程组： $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3=-1, \\ 2x_2+x_3+x_4=1, \\ 3x_1-x_2-2x_4=1. \end{cases}$

解：经简单计算得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{\underset{r_4+2r_3}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=12\ ,D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=24\ ,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-12, D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0\ ,D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=36.$$

由克莱姆法则知： $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{24}{12}=2, x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-12}{12}=-1, x_3=\dfrac{D_3}{D}=0, x_4=\dfrac{D_4}{D}=\dfrac{36}{12}=3.$

例1.2.9 问λ取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=0, \\ \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ 3x_1+\lambda x_2+x_3=0 \end{cases}$ **有非零解？**

解 由定理1.2.11知系数行列式应等于零，即 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 3 & \lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=0.$

得 λ=2或λ=-1. 故当且仅当λ=2或λ=-1时该方程组有非零解.