A、B 班 10-11,13 作业分析

10-11 作业：习题三：2,3,4,5,6,8

2,6 有些同学在证明充要条件时只证明了必要性，充分性也需要证明.

2 有同学向量数乘这样写 $b\,(k_1+k_2+\ldots+k_s)$ 不太规范，应该写成$(k_1+k_2+\ldots+k_s)b$，该题证明如下：

证：由 $A\alpha_i=b$, $i=1,2,\ldots,s$，则 $A\beta=A(k_1\alpha_1+\ldots+k_s\alpha_s)=k_1A\alpha_1+\ldots+k_sA\alpha_s=(k_1+k_2+\ldots+k_s)b$，

$b\neq\theta$，则有 $A\beta=(k_1+k_2+\ldots+k_s)b=\theta\Leftrightarrow k_1+k_2+\ldots+k_s=0$

3 有同学只证明了 $Ax=\theta$ 的解也是 $A^TAx=\theta$ 的解，没有证明 $A^TAx=\theta$ 的解也是 $Ax=\theta$ 的解，这只能得到 $Ax=\theta$ 的解集包含在 $A^TAx=\theta$ 的解集内，而同解需解集相互包含.可如下：

证：易知若 $x$ 满足 $Ax=\theta$，必有 $A^TAx=A^T\theta=\theta$. 反之若 $x$ 满足 $A^TAx=\theta$，则有 $x^TA^TAx=0$.

设 $Ax=y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)^T$，则 $y^Ty=x^TA^TAx=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_m^2=0$，故 $y=\theta$，即 $Ax=\theta$，故同解

6 有同学没有证明 $r(A)=n-1$，有零行只能得到 $r(A)\leqslant n-1$，可如下：

证：“=>” $\sum_{i=1}^{n} b_i=(x_1-2x_2+x_3)+\cdots+(-2x_1+x_2+x_n)=0$

“<=”
$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&&&b_1\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\1&&&1&-2&b_{n-1}\\-2&1&&&1&b_n\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&&&b_1\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\1&&&1&-2&b_{n-1}\\0&0&&&0&\sum_{i=1}^{n}b_i\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&&&b_1\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\1&&&1&-2&b_{n-1}\\0&0&&&0&0\end{array}\right),$$

而 $\begin{vmatrix}-2&1&&\\1&-2&1&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&&1&-2\end{vmatrix}\neq0$，可得 $r(A)=n-1$，故 $r(A)=r((A,b))$，方程组有解

证法二：$(A,b)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&&&b_1\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\1&&&1&-2&b_{n-1}\\-2&1&&&1&b_n\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&&&b_1\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\1&&&1&-2&b_{n-1}\\0&0&&&0&\sum_{i=1}^{n}b_i\end{array}\right)$，且 $\begin{vmatrix}-2&1&&\\1&-2&1&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&&1&-2\end{vmatrix}_{n-1}\neq0$，故有 $r(A)=n-1$，

于是有：方程组有解$\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)=n-1\Leftrightarrow\Sigma b_i=0$ .

8 该题有 3 种证明方法，可如下证明：

证：设系数矩阵为 $A$，右端为 $b$，则由$|(A,b)|\neq0$ 知 $r(A,b)=n+1$，而 $r(A)\leq A$ 的列数 $n<n+1=r(A,b)$，故方程组无解.

证法二：若$\begin{cases}a_{01}x_1+\cdots+a_{0n}x_n=b_0,\\ \quad\vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$有解$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，则$\begin{cases}a_{01}y_1+\cdots+a_{0n}y_n+b_0y_{n+1}=0,\\ \quad\vdots\\ a_{n1}y_1+\cdots+a_{nn}y_n+b_ny_{n+1}=0\end{cases}$有非零解$\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\\-1\end{pmatrix}$，系数行列式为 0，矛盾.

证法三：行列式非零，则 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{01}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{0n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_0\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$线性无关，故 $\beta$ 不能表示为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的组合，即方程组无解.

其余一些作业：

4(1)(2)(4)(6)(7) 用行变换化行简化梯形，求出解或由 $r(A)<r(A,b)$(只要化到行梯形)判断出无解

5(1) 行变换化为尽可能简单的行梯形$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1/2&5/2\\0&1&-1&-1\\0&0&\lambda+1/2&\lambda+11/2\end{array}\right)$，讨论参数的取值：$\lambda=-1/2, r(A)=2<r(A,b)=3$ 无解，

$\lambda\neq-1/2, r(A)=r(A,b)=3$,唯一解 $x=2-5/(2\lambda+1), y=10/(2\lambda+1), z=1+10/(2\lambda+1)$ .

10-13 作业：习题三：7,9,10,11,12,13,14,16,17

7 有同学在作业上写上解答阵，很不妥，解答阵应该只写在草稿纸上

9 不少同学有这样的推导：$\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} x=\theta, Ax=\theta$ 同解⇔ $\mathrm{r}(\begin{pmatrix} A \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix})=\mathrm{r}(A)$，反向需证明，可如下证明：

证："=>"：$\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} x=\theta, Ax=\theta$ 同解=> $\mathrm{r}(N\begin{pmatrix} A \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix})=\mathrm{r}(N(A))$ => $\mathrm{r}(\begin{pmatrix} A \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix})=\mathrm{r}(A)$ =>$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},b)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$ =>$A^{\mathrm{T}}y=b$ 有解.

"<="：$A^{\mathrm{T}}y=b$ 有解=>$Ax=\theta$ 的解满足 $\begin{pmatrix} A \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} A \\ y^{\mathrm{T}}A \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} E \\ y^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} Ax=\theta$，显然 $\begin{pmatrix} A \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} Ax \\ b^{\mathrm{T}}x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解满足 $Ax=\theta$，

即 $\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} x=\theta, Ax=\theta$ 同解.

10 有些同学分块矩阵计算有错，即 $(A,A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(Ax,Ay)$，应该是 $(A,A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=Ax+Ay=A(x+y)$.

另外还有不少同学没有说明所得向量组线性无关就说是基础解系，判定基础解系必须线性无关，可如下：

解：因为 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 阶矩阵，$Ax=\theta$ 的基础解系为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$，则有 $\mathrm{r}(A)=n-r$，

于是 $\mathrm{r}(A,A)=\mathrm{r}(A,O)=\mathrm{r}(A)$，故 $(A,A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\theta$ 的基础解系向量个数为 $n+r$ .

考虑向量组 $\eta_1=\begin{pmatrix} e_1 \\ -e_1 \end{pmatrix},\cdots,\eta_n=\begin{pmatrix} e_n \\ -e_n \end{pmatrix},\eta_{n+1}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \theta \end{pmatrix},\cdots,\eta_{n+r}=\begin{pmatrix} \alpha_r \\ \theta \end{pmatrix}$

有 $(A,A)\begin{pmatrix} e_i \\ -e_i \end{pmatrix}=\theta,(A,A)\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \theta \end{pmatrix}=A\alpha_j=\theta$，另外

$k_1\eta_1+\cdots+k_{n+r}\eta_{n+r}=\begin{pmatrix} \beta+k_{n+1}\alpha_1+\cdots+k_{n+r}\alpha_{n+r} \\ -\beta \end{pmatrix}=\theta$，其中 $\beta=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$，

可得 $\beta=\theta$，$k_{n+1}\alpha_{n+1}+\ldots+k_{n+r}\alpha_{n+r}=\theta$，故 $k_i=0,i=1,\ldots,n+r$，于是 $\eta_1,\ldots,\eta_{n+r}$ 线性无关，

为 $(A,A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\theta$ 的解的极大无关组，即基础解系.

11 有些同学证明中没有说明$(A_{11},\ldots,A_{1n})^{\mathrm{T}}$是非零解，基础解系必须非零解，可如下证明：

证：$A_{11}\neq0,|A|=0$ 得 $\mathrm{r}(A)=n-1,\xi=(A_{11},\ldots,A_{1n})^{\mathrm{T}}\neq\theta$，并且 $Ax=\theta$ 基础解系含一个向量.

由 $a_{i1}A_{11}+\ldots+a_{in}A_{1n}=0\ (i\neq1)$, $a_{11}A_{11}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=|A|=0$，故 $A\xi=\theta$，$\xi$ 为非零解，故 $\xi$ 为基础解系.

证法二：$A_{11}\neq0,|A|=0$ 得 $\mathrm{r}(A)=n-1$，且 $AA^*=|A|E=O$，故 $A^*$的第一列 $\xi=(A_{11},\ldots,A_{1n})^{\mathrm{T}}\neq\theta$，为 $Ax=\theta$ 的非零解.又由 $\mathrm{r}(A)=n-1$ 得 $Ax=\theta$ 的基础解系含一个向量，故 $\xi$ 为基础解系.

13 有些同学由 $Ax=\theta$ 的解一定是 $Bx=\theta$ 的解就推出 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 后，中间缺少步骤，可如下证明：

证：易知 $Ax=\theta,\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x=\theta$ 同解，于是 $\mathrm{r}(N(A))=\mathrm{r}(N\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix})\Rightarrow\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\Rightarrow\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},B^{\mathrm{T}})$，

令 $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$，则有 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})\leq\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},b_i^{\mathrm{T}})\leq\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},B^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$，故 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},b_i^{\mathrm{T}})$，即 $b_i^{\mathrm{T}}$ 可由 $A^{\mathrm{T}}$ 的列向量表示，

此即 $B$ 的所有行向量都可表示成 $A$ 的行向量的线性组合.

证法二：$Ax=\theta$ 的解一定是 $Bx=\theta$ 的解，故 $Ax=\theta$和$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x=\theta$ 同解，

于是 $\mathrm{r}(N(A))=\mathrm{r}(N\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix})$，有 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. 将 $A$、$B$ 按行分块为 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$，

则 $\mathrm{r}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}=\mathrm{r}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_p\}$，故 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 的极大无关组也是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_p$ 的极大无关组，

从而 $B$ 的行可表示为 $A$ 的行的线性组合.

14 有些同学只证明了$\beta_1,\beta_2,\beta_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价,但没有说清楚$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也是基础解系,特别是$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关,可如下：

证：$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\alpha_1+(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\alpha_2+(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)\alpha_2=\theta$，又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为基础解系，线性无关，

可得$\begin{cases}2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0.\end{cases}$ 因为$\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=4\neq 0$，故$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，于是$\beta_1,\beta_2,\beta_3$无关，易知$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为$Ax=\theta$的解，

故与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价，故为基础解系.

证法二：由$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$

可得$\alpha_1=0.25(3\beta_1-\beta_2-\beta_3)$, $\alpha_2=0.25(-\beta_1+3\beta_2-\beta_3)$ , $\alpha_3=0.25(-\beta_1-\beta_2+3\beta_3)$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价，

于是$\mathrm{r}\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=3$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关，易知$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为$Ax=\theta$的解，故$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为基础解系.

证法三：由条件可得$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，而$|P|=4\neq0$，故$P$可逆，

两边右乘$P^{-1}$得$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，知$\beta_1,\beta_2,\beta_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可相互表示，故等价，

于是$\mathrm{r}\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=3$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关，易知$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为$Ax=\theta$的解，故$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为基础解系.

17 有同学先解第一个方程组，代入第二个方程组得到得到$a=0,b=-1$就结束了，应该验证同解，即第二个方程组基础解系向量个数为2，或者第二个方程组系数矩阵秩为2. 可如下：

解：解第一个方程组，$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-2&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}$，

方程组的基础解系是：$(1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$和$(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，代入第二个方程组，

得$\begin{cases}a=0,\\1-2a+b=0,\\1+b=0,\\-a=0.\end{cases}$解得$a=0,b=-1$，且易知第二个方程组有$\mathrm{r}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\1&0&-1&-1\end{pmatrix}=2$，故同解.

解法二：设两个同解的方程组为$Ax=\theta$和$Bx=\theta$，则$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-2&1&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&-1&a&b\\1&-a&b&-1\end{pmatrix}$.

并且$Ax=\theta$与$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta$同解，于是 $\mathrm{r}(A)=4-\mathrm{r}(N(A))=4-\mathrm{r}(N\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，易知$\mathrm{r}(A)=2$，故$\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=2$.

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-2&1&0&1\\2&-1&a&b\\1&-a&b&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-2&-1\\0&0&a&b+1\\0&0&b+1-2a&-a\end{pmatrix}$，故有 $a=b+1=b+1-2a=-a=0$，得$a=0,b=-1$，又$\mathrm{r}(B)=2$，故同解.

解法三：解第一个方程组，$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-2&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}$，

解第二个方程组，$\begin{pmatrix}2&-1&a&b\\1&-a&b&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-a&b&-1\\0&1-2a&2b-a&-2-b\end{pmatrix}=B$.

因为两个方程组同解，拥有相同的基础解系，故能简化成相同的行简化梯形，故$1-2a\neq0$，

于是$B\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{b-a^2}{1-2a}&\frac{-1-ab}{1-2a}\\0&1&\frac{2b-a}{1-2a}&\frac{-2-b}{1-2a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}$，解得$a=0,b=-1$.

其余一些作业：

7(2)(4) 化行简化梯形，得基础解系

12 $AB^{\mathrm{T}}=A(b_1,\ldots,b_{n-r})=(Ab_1,\ldots,Ab_{n-r})=O$，$\mathrm{r}(B^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(B)=n-r=n-\mathrm{r}(A)$，则$B^{\mathrm{T}}$的列为$Ax=\theta$的$n-r$个线性无关解，为基础解系.

由$AB^{\mathrm{T}}=O$得$BA^{\mathrm{T}}=O$，同理可得$A^{\mathrm{T}}$列构成$Bx=\theta$的基础解系.

16 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta$的解满足$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\beta_1+k_4\beta_2$，即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-k_3\beta_1-k_4\beta_2=\theta$，解方程组得$k_1=0,k_2=k,k_3=k,k_4=-k$，

通解为$x=k\alpha_2$(或$x=k(\beta_1-\beta_2)$)，基础解系为$\alpha_2$(或$\beta_1-\beta_2$)