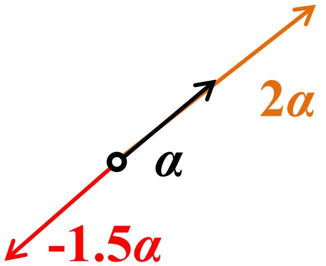
2.7 向量组的线性相关与线性无关

2.7.1 线性相关与线性无关

线性组合

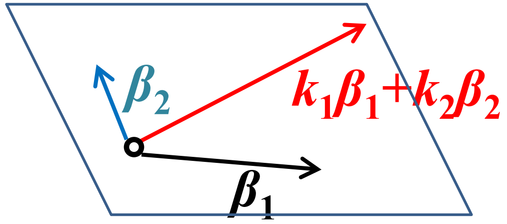
一个向量可以表示一条直线：

α 的倍数 $k\alpha$, $k\in\mathbf{R}$可以表示
α所在直线上的所有向量



两个不同方向的向量可以表示一个平面：

β_1和 β_2的各种倍数的和$k_1\beta_1+k_2\beta_2$, $k_1,k_2\in\mathbf{R}$
可以表示β_1和 β_2构成的平面上的所有向量



我们看到用几个向量可以表示一大群的向量，这简化了对一大群向量的表示.

称几个向量的各种倍数的组合为线性组合，如：$k\alpha$ ， $k_1\beta_1+k_2\beta_2$

再来看方程组，我们也可以用向量的组合来表示关系

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \quad\;\; x_2 + x_3 = 3, \\ \qquad\quad\;\; x_3 = 1. \end{cases}$$ 可用矩阵表示：$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

解为：

$\boldsymbol{x_1=-1, x_2=2, x_3=1}$

再换个角度：用列向量表示

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}，\text{即}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}，\text{即}\; x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性组合

$$\underbrace{x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{线性组合}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

实际表示为：$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性组合

用列向量表示

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 = -3, \\ x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

其中一个解为:

$\boldsymbol{x_1=1, x_2=4, x_3=2}$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}$$

用列向量表示

$$\begin{cases} x_1=2, \\ x_2=-5, \\ x_3=3, \\ x_4=0. \end{cases}$$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\0\end{pmatrix}$$

定义2.7.1 (向量的线性组合,线性表示) 给定n维向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和同维向量β，如果存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_m$， 使

$$\beta=k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m,$$

则称向量β是向量组A的一个线性组合或称向量β可由向量组A线性表示 .

例2.7.1 零向量是任何向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的线性组合 . 因为

$$\theta = 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \dots + 0\cdot\alpha_m \ .$$

例2.7.2 对于向量组 $\beta=(2,-5,3,0)^T$, $\varepsilon_1=(1,0,0,0)^T$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)^T$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)^T$, $\varepsilon_4=(0,0,0,1)^T$. 因为

$$\beta = 2\varepsilon_1 + (-5)\,\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 0\varepsilon_4 \ ,$$

所以β 是$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 的线性组合.

一般地，设 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, ($e_1, e_2, \dots, e_n$称为$n$维基本向量组)

那么任何n维向量 α都可由$e_1, e_2, \dots, e_n$线性表示，即

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n.$$

例2.7.3 设$\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0)^T$, $\alpha_3=(1,1,1)^T$. 试将 $\beta=(2,3,1)^T$表示成向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合 .

解 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即

$$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\x_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3\\x_3\end{pmatrix},\ \text{即方程组}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\ x_2+x_3=3,\\ x_3=1.\end{cases}$$

解得 $x_1=-1, x_2=2, x_3=1$，故 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

例2.7.4 设$\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$, $\alpha_3=(1,0,1)^T$, $\beta=(3,-3,6)^T$. 试将 β表示成$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合 .

解 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，则得线性方程组$\begin{cases}x_1+x_3=3,\\ x_1-x_2=-3,\\ x_2+x_3=6.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=3-x_3,\\ x_2=6-x_3.\end{cases}$

最后得到方程组的解为 $x_1=3-t, x_2=6-t, x_3=t$，$t\in\mathbf{R}$.

取 $t=2$，可得 $\beta=\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3$.

我们将能组合出相同集合的向量组归成一类来研究，这就是等价向量组

定义2.7.2 (等价向量组) 设有两个向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及B: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$，若$A$组中的每一个向量都可由向量组$B$线性表示，则称向量组$A$可由向量组$B$线性表示 . 若两个向量组$A$, B可以相互线性表示，则称这两个向量组等价 .

向量组A：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

等价

向量组B：

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

B线性表示A组向量：

$$\alpha_1=\beta_1+\beta_2,\alpha_2=\beta_2+\beta_3$$

A线性表示B组向量：

$$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1$$

向量组之间的等价是一种等价关系，具有： (1)自反性 (2)对称性 (3)传递性.

等价行向量组与方程组的关系：

方程组A：

$$\begin{cases}x_1+2x_2=1,\\x_1+3x_2=2,\end{cases}\text{矩阵为:}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\1&3&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\\\alpha_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}$$

方程组B：

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2=1,\\x_1+2x_2=1,\end{cases}\text{矩阵为:}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\\beta_2^{\mathrm T}\\\beta_3^{\mathrm T}\end{pmatrix}$$

等价行向量组对应的方程组同解.

补充例2K 两组向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 有关系：

$$\alpha_1=\beta_2+\beta_3,\ \alpha_2=2\beta_1-\beta_2,\ \alpha_3=-3\beta_1+2\beta_2+\beta_3,$$

用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示 β_1,β_2,β_3 .

解 向量组的关系可用矩阵形式表示如下：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&2&-3\\1&-1&2\\1&0&1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)C.$$

两端右乘 C^{-1} 得到

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-3&3\\-1&-2&2\end{pmatrix}.$$

故有：

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\ \beta_2=2\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3,\ \beta_3=-\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3\ .$$

线性相关性

考虑向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\3\end{pmatrix},$ 可知：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}=3\alpha_1-2\alpha_3.$

说明α_2可以用α_1与α_3来线性表示，则α_2在向量组中是多余的.
我们称有多余向量的向量组是线性相关的，即$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$是线性相关的.

再考虑向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\3\\4\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\4\end{pmatrix},$ 经过分析$\beta_1, \beta_2, \beta_3$都不能用其它两个向量线性表示.

说明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$哪个向量对于向量组来说都是必不可少的.
我们称没有多余向量，各个向量都是独立向量的向量组是线性无关的，或线性独立的，即$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$是线性无关的.

如何发现向量组中有多余向量？

因为我们不知道到底哪个向量可以用其它向量来表示，所以不能一个个测试方程

$$\alpha_i=x_1\alpha_1+\ldots+x_{i-1}\alpha_{i-1}+x_{i+1}\alpha_{i+1}+\ldots+x_m\alpha_m$$

是否有解？

我们干脆将各个向量等同看待，看如下方程

$$k_1\alpha_1+\ldots+k_i\alpha_i+\ldots+k_m\alpha_m=\theta$$

是否有非零解？

我们有如下的关系：

$k_1\alpha_1+\ldots+k_i\alpha_i+\ldots+k_m\alpha_m=\theta$有非零解 (假设$k_i\neq 0$)

$\Updownarrow$

$\alpha_i=x_1\alpha_1+\ldots+x_{i-1}\alpha_{i-1}+x_{i+1}\alpha_{i+1}+\ldots+x_m\alpha_m \Leftrightarrow$ 有多余向量

我们有：$k_1\alpha_1+\ldots+k_i\alpha_i+\ldots+k_m\alpha_m=\theta$有非零解 $\Leftrightarrow$向量组线性相关.

有多余向量

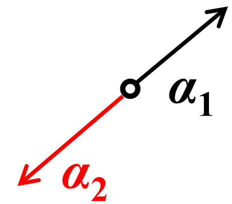
线性相关：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=\theta$ 有非零组合系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$.

线性无关：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=\theta$只有$k_1=k_2=\ldots=k_m=0$.

都是独立向量

线性相关的几何意义

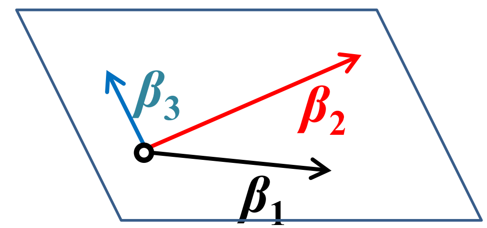
α_1 , α_2 线性相关，表示α_1 , α_2向量共线



进一步，面积 $\det(\alpha_1 , \alpha_2)=0$

多余向量

β_1 , β_2 , β_3 线性相关，表示β_1 , β_2 , β_3 向量共面



进一步，体积 $\det(\beta_1 , \beta_2 , \beta_3)=0$

定义2.7.3 (线性相关与线性无关) 给一向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_m$ ， 如果存在不全为零的数 $k_1, k_2 , \ldots , k_m$， 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m \alpha_m= \theta,$$

则称向量组A是线性相关的. 如果只有当$k_1= k_2= \ldots =k_m=0$时，上述等式才成立，则称这组向量是线性无关的 .

注　由定义可知，向量组A或线性相关，或线性无关，两者必居其一. 而向量组的线性相关与否跟这些向量的次序无关，也跟这个向量组是行向量组还是列向量组都没有关系.

线性相关、线性无关的基本性质：

(1) 一个向量线性相关的充要条件是 $\alpha=\theta$.

(2) 包含零向量的向量组必线性相关.

(3) 如果一向量组的部分向量组线性相关，则该向量组也线性相关.

(4) 如果一个向量组线性无关，则其中任一个部分向量组也线性无关.

(3) (4)相互等价

说明： (1) α线性相关$\Leftrightarrow k\alpha=\theta, k\neq 0 \Leftrightarrow \alpha=\theta$，等价地　α线性无关$\Leftrightarrow \alpha\neq\theta$.

(2) 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \theta\}$ 有线性相关的关系

$$0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\ldots+0\cdot\alpha_m+1\cdot\theta=\theta .$$

(3) 向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$中的部分向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$线性相关，则有关系：$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r=\theta$， $k_1,k_2,\ldots, k_r$不全为0.

于是：$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r+0\cdot\alpha_{r+1}+\ldots+0\cdot\alpha_m=\theta$， $k_1,k_2,\ldots, k_r,0,\ldots,0$不全为0.

例2.7.5 证明：n维基本向量组$e_1,e_2,\dots,e_n$是线性无关的. (用列向量)

证明　设有$k_1, k_2, \dots, k_n$ 使 $k_1e_1+k_2e_2+\dots+k_ne_n=\theta$. 即

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

故有 $k_1=k_2=\dots=k_n=0$，所以$e_1,e_2,\dots,e_n$线性无关 .

例2.7.6 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，试证向量组

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.

证明　设有k_1, k_2, k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\theta$ ，即

$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=\theta$,

从而　$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=\theta$.

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，故关系式

$$\begin{cases} k_1+k_3=0, \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0, \end{cases}$$

成立，解之得 $k_1=k_2=k_3=0$，故向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关 .

例2.7.7 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，又设

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1-\alpha_2,\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_3,$$

证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关．

证明 设有k_1, k_2, k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\theta$，即

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=\theta,$$

从而 $(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2+(2k_1+k_3)\alpha_3=\theta$ ．

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，故有关系式 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0, \\ k_1-k_2=0, \\ 2k_1+k_3=0, \end{cases}$

解之，有无穷多非零解，取 $k_1=1, k_2=1, k_3=-2$，故有

$1\cdot\beta_1+1\cdot\beta_2-2\cdot\beta_3=\theta$．故向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关．

***例2.7.6、例2.7.7 的进一步说明**

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的组合系数$k_1, k_2, k_3$有关系

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\theta,\text{即求}Ck=\theta.$$

例2.7.6 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,只有零解.

例2.7.7 $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,有非零解$k_1=1, k_2=1, k_3=-2$.

线性表示线性相关与方程组的关系

方程组的三种形式

公式形式：
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

矩阵形式：***Ax=b***，其中：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

向量形式：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n=b$，其中：$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

非齐次方程组与列向量的线性表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

有解 ⇔ **等价于**

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 可由向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ 线性表示

齐次方程组与列向量组线性相关性

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解 ⇔ **等价于**

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ 线性相关

线性相关无关的重要性质

定理2.7.1 向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ($m\geq 2$) 线性相关的充要条件是，向量组A中至少有一个向量可由其余 m-1个向量线性表示 .

说明 必要性:

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关

$\Rightarrow \quad k_1\alpha_1 + \ldots + k_i\alpha_i + \ldots + k_m\alpha_m = \theta$，($k_i \neq 0$)

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{k_m}{k_i}\alpha_m .$$

充分性:

$\alpha_i = \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_{i-1}\alpha_{i-1} + \lambda_{i+1}\alpha_{i+1} + \ldots + \lambda_m\alpha_m$

$\Rightarrow \quad \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_{i-1}\alpha_{i-1} + (-1)\alpha_i + \lambda_{i+1}\alpha_{i+1} + \ldots + \lambda_m\alpha_m = \theta$

$\Rightarrow \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关.

注 α_1, α_2相关$\Leftrightarrow$ α_1, α_2成比例(其中一个如α_2是另一个的倍数$\alpha_2 = k\alpha_1$)

相关向量组内可能有向量是独立的，但一定有多余的，如$\{e_1, e_2, -e_2\}$

定理2.7.2 设向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关，而向量组B: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$ 线性相关，则向量β必可由向量组A线性表示，并且表示式是唯一的.

说明　线性表示的存在性：

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$ 线性相关

=> $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r + k\beta = \theta$ ($k_1, k_2, \ldots, k_r, k$不全为0)

若 $k=0$，则 $k_1, k_2, \ldots, k_r$不全为0

有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = -k\beta = \theta$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性相关，矛盾

$\Downarrow$

$k \neq 0$

$$=> \quad \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

线性表示的唯一性：

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \ldots + \mu_r\alpha_r.$$

移项得　$(\lambda_1-\mu_1)\alpha_1 + (\lambda_2-\mu_2)\alpha_2 + \ldots + (\lambda_r-\mu_r)\alpha_r = \theta$.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关 => $\lambda_i-\mu_i=0$ ($i=1,2,\ldots,r$)，即 $\lambda_i=\mu_i$，唯一.

例2.7.8 设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$线性无关的充分必要条件是$\beta$不可能由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性表示.

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关，则有

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$线性相关$\Leftrightarrow$ β可由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性表示,

此即：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$线性无关$\Leftrightarrow$$\beta$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性表示.

例2.7.9 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ $(m\geq 2)$ 线性相关，而$\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$线性无关，则

(1) α_1可由$\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$线性表示 .

(2) α_m不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$线性表示 .

证明 (1) 因为$\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$线性无关，所以部分向量组$\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$也线性无关. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$线性相关，所以$\alpha_1$可由$\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$线性表示.

(2) 假设α_m能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$线性表示 ，由(1)的结果，$\alpha_1$可由$\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$线性表示，于是得到$\alpha_m$能由 $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$线性表示 ，与假设矛盾. 从而结论成立.

推论2.7.4 向量的个数m大于其维数n，则向量组线性相关.

说明：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta \quad 其中\ \alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix} \quad (m>n)$$

$$即\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_m=0,\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2m}k_m=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_m=0\end{cases} 等价于 \begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_m=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_m=0,\\0k_1\ +0k_2\ +\cdots\ +0k_m=0,(n+1行)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\0k_1\ +0k_2\ +\cdots\ +0k_m=0,(m行)\end{cases} \quad (*)$$

(*)的系数行列式 为0，故有非零解 $k_1,k_2,\ldots,k_m$，即相关.

推论2.7.5 n个n维向量线性无关的充要条件是其行列式不为零.

说明：$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$线性无关 <=> $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$只有零解<=>系数行列式非零.

♥ 上述推论适合列向量，也适合行向量. 若是行向量，可转置为列向量考虑.

例2.7.10 设n维列向量组A:$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性无关，$B$为$n$阶方阵. 试证向量组$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是B为可逆矩阵.

证明 必要性. 令矩阵$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$， 设$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$ 线性无关，则$|B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n| \neq 0$， 而 $(B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n)=B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=BA$， 因此有 $|BA|=|B||A|\neq 0$， 从而 $|B|\neq 0$， 即B可逆.

充分性. 设B是可逆矩阵. 令 $k_1B\alpha_1+k_2B\alpha_2+\dots+k_nB\alpha_n=\theta$,

用B^{-1}左乘两端， 得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_n\alpha_n=\theta$.

由线性无关知：$k_1=k_2=\dots=k_n=0$. 故$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$线性无关 .

例2.7.10拓展思考 设n维列向量组A:$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性无关，$B$为$n$阶方阵.

(1) $B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_m$线性无关=>$B$可逆？

(2) B可逆=>$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_m$线性无关？

答案： (1) B不一定可逆，反例：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(2) $k_1B\alpha_1+\dots+k_mB\alpha_m=\theta$,左乘B^{-1} => $k_1\alpha_1+\dots+k_m\alpha_m=\theta$ => $k_1=\dots=k_m=0$

补充例2L 已知$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$线性无关，向量$\gamma\neq\theta$，$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\gamma$和$\beta_1,\ldots,\beta_m,\gamma$都线性相关，证明$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m$线性相关.

证明 因为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，但$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\gamma$线性相关，故非零向量$\gamma$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示，即

$$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n,\quad k_1,k_2,\ldots,k_n\text{不全为}0.$$

同理有 $\gamma=t_1\beta_1+t_2\beta_2+\ldots+t_m\beta_m$，$t_1,t_2,\ldots,t_m$不全为0 .

两式相减有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n-t_1\beta_1-t_2\beta_2-\ldots-t_m\beta_m=\theta$，

$k_1,k_2,\ldots,k_n,t_1,t_2,\ldots,t_m$不全为0，故$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m$线性相关.

补充例2M 设$A\in R^{n\times n}$, $\alpha_i\in R^n$, $\alpha_i\neq\theta$, $i=1,2,\ldots,n$，且有 $A\alpha_i=\alpha_{i+1}$, $1\leq i<n$, $A\alpha_n=\theta$，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关.

证明 显然 $\alpha_i=A^{i-1}\alpha_1$, $i=1,2,\ldots,n$，$A^n\alpha_1=\theta$，

故有 $A^i\alpha_1\neq\theta$, $i=0,1,\ldots,n-1$，$A^i\alpha_1=\theta$, $i=n,n+1,\ldots$

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n=\theta$. 即

$$k_1\alpha_1+k_2A\alpha_1+k_3A^2\alpha_1+\ldots+k_nA^{n-1}\alpha_1=\theta.\quad(*)$$

(*) 左乘 A^{n-1} 得到

$k_1A^{n-1}\alpha_1+k_2A^n\alpha_1+k_3A^{n+1}\alpha_1+\ldots+k_nA^{2n-2}\alpha_1=k_1\alpha_n=\theta$，由$\alpha_n\neq\theta$，可得$k_1=0$.

(*) 左乘 A^{n-2}得到

$0A^{n-2}\alpha_1+k_2A^{n-1}\alpha_1+k_3A^n\alpha_1+\ldots+k_nA^{2n-3}\alpha_1=k_2\alpha_n=\theta$，由$\alpha_n\neq\theta$，可得$k_2=0$.

依次下去可得到 $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$，即向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关.