2.1 矩阵和n维向量的概念

定义2.1.1(矩阵) 由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$排成$m$行$n$列数表，外加括号，写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

叫做m行n列矩阵，简称$m\times n$矩阵. 这里用A表示定义中的矩阵. 这$m\times n$个数叫做矩阵A的元素，a_{ij}是矩阵A的第i行第j列元素.

元素都是实数的矩阵叫做实矩阵，元素存在复数的矩阵叫做复矩阵.

用符号$R^{m\times n}$或$M_{m\times n}(R)$表示全体$m\times n$实矩阵的集合.

当$m=n$时，$m\times n$矩阵A称为n阶方阵. $m\times n$矩阵和n阶方阵可表示为$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$， 也可记为$A_{m\times n}$，A_n等.

定义2.1.2 (n维向量) n个数$a_1, a_2, \ldots, a_n$组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称为n维向量，前者称为行向量，后者称为列向量，a_i ($i=1,2,\ldots,n$) 称为第i个分量或坐标，分量都是实数的向量称为实向量，实向量的全体用$\mathbf{R}^n$表示；分量存在复数的向量称为复向量，复向量的全体用$\mathbf{C}^n$表示.

向量是只有一行或一列的矩阵

矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$的第i行的元素所成的行向量$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$称为它的第$i$个行向量.

同样，第j列元素所成的列向量 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 称为它的第j个列向量.

常用粗体英文字母A, B, C等表示矩阵，用小写粗体希腊字母α, β, γ等表示向量.

零矩阵：所有元素为零的矩阵，m行n列的零矩阵记为$O_{m\times n}$或O .

零向量：所有分量为零的向量称为零向量，用希腊字母θ表示，有时也记为0.

对角矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=0, i\neq j$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\text{常写成}\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

可记为 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$ ，

若对角矩阵A中的$a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=k$，则称$A$为**数量矩阵**，当$k=1$时，称为**单位矩阵**，记为$E$或$I$ ，数量矩阵记为 kE .

例如
$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},\qquad E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上三角矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=0, i>j$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{常写成} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下三角矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=0, i<j$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{常写成} \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

对称矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=a_{ji}$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

反对称矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=-a_{ji}$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\text{是对称矩阵,} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -7 \\ \frac{1}{2} & 7 & 0 \end{pmatrix}\text{是反对称矩阵.}$$

矩阵相等：矩阵A和B的行数和列数分别相等，并且对应的元素也都相等.

向量相等：向量α 与β同为行向量或列向量，分量个数相等，且对应分量也相等. 或者两个向量作为矩阵来看相等.

定义2.1.3 (转置矩阵) 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的行与列互换后得到的矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 称为A的转置矩阵，记为 A^{T} (或A').

例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

对称矩阵：$A^{\mathrm{T}}=A$　　反对称矩阵：$A^{\mathrm{T}}=-A$

定义2.1.4 (方阵的行列式) 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

称为方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式，记为 $|A|$. 如果 $|A|\neq 0$，则称矩阵A是非异矩阵，如果 $|A|=0$，则称矩阵A是奇异矩阵或退化矩阵.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$记号为 O 或 O_3，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$记号为 O 或 $O_{2\times4}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$记号为 O 或 $O_{3\times2}$ **零矩阵**

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$记号为 θ 或 0，$(0,0,0,0)$记号为 θ 或 θ^{T} 或 0 **零向量**

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & -2 \end{pmatrix}$ **上三角矩阵**

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 2 & \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **下三角矩阵**

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 5 & & & \\ & -2 & & \\ & & -1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$，或 $\mathrm{diag}(5,-2,-1,2)$ **对角矩阵**

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$常写成 $-3E$ 或 $-3E_3$ **数量矩阵**

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$常写成 E 或 E_3 **单位矩阵**

2. 2 矩阵运算

矩阵的处理可以分成两类

矩阵的第1类处理：

相对于解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 = -1, & (2) \end{cases}$$

进行行处理

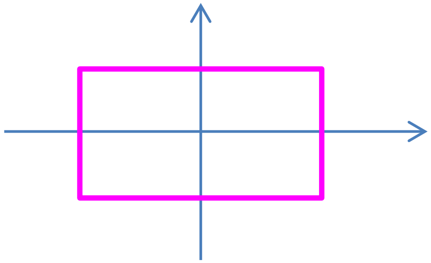
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

得到解 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$

矩阵的初等变换

矩阵的第2类处理：

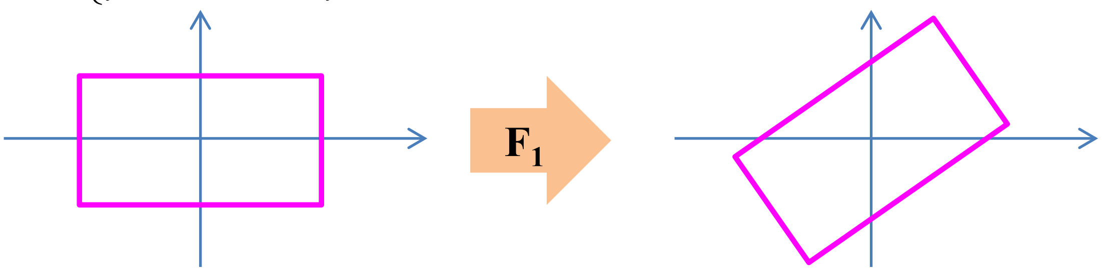
平面中的物体受到力的作用产生移动或变形



在F_1作用下产生旋转：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

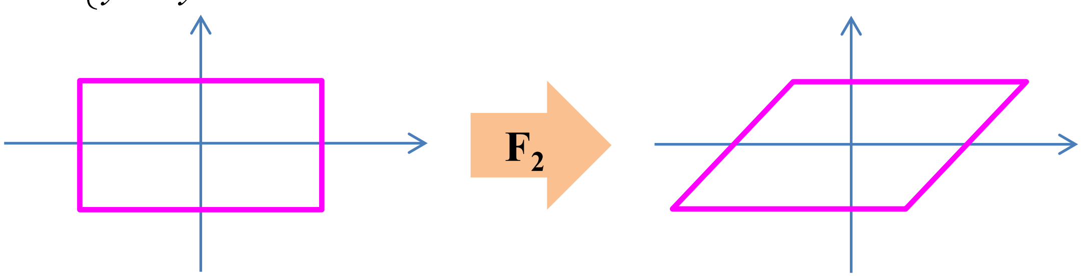
矩阵表示：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



在F_2作用下产生错切：

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y. \end{cases}$$

矩阵表示：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

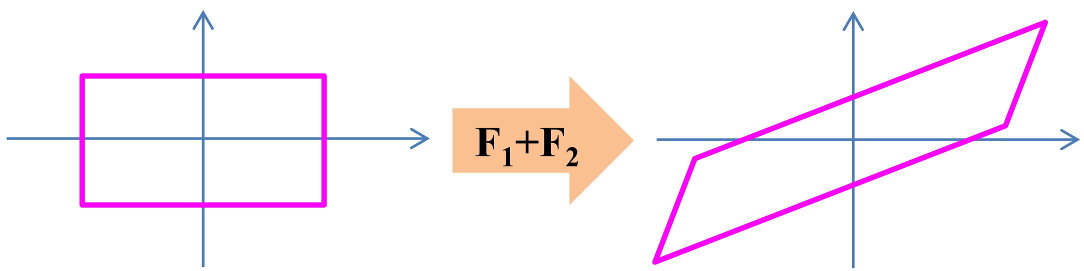


当物体受到F_1和F_2的
作用下的综合效果：

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta x - \sin\theta y)x + (x+y) = (\cos\theta + 1)x + (-\sin\theta + 1)y, \\ y' = (\sin\theta x + \cos\theta y) + y = \sin\theta x + (\cos\theta + 1)y. \end{cases}$$

矩阵加法

矩阵表示： $\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & -\sin\theta + 1 \\ \sin\theta & \cos\theta + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



当物体先后发生变形和移动

变形1：

$$T_1:\begin{cases} x'=b_{11}x+b_{12}y \\ y'=b_{21}x+b_{22}y \end{cases}$$

矩阵表示：$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

变形2：

$$T_2:\begin{cases} x''=a_{11}x'+a_{12}y' \\ y''=a_{21}x'+a_{22}y' \end{cases}$$

矩阵表示：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

先变形1，再变形2的综合效果：

$$T:\begin{cases} x''=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y \\ y''=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y \end{cases}$$

矩阵表示：

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=AB$$

矩阵乘法

矩阵的算术运算

矩阵乘法的进一步说明：

$f(x,y)=b_1x+b_2y=(b_1,b_2)\cdot(x,y)$ 向量内积看成矩阵乘积：$f(x,y)=(b_1,b_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

变形1： $T_1:\begin{cases}x'=b_{11}x+b_{12}y\\y'=b_{21}x+b_{22}y\end{cases}$ **矩阵乘法表示：** $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

变形2： $T_2:\begin{cases}x''=a_{11}x'+a_{12}y'\\y''=a_{21}x'+a_{22}y'\end{cases}$ **矩阵乘法表示：** $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

先变形1，再变形2的综合效果：

$$T:\begin{cases}x''=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y\\y''=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y\end{cases}$$

矩阵乘法表示：

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A(B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=(AB)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=(\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

2.2.1 矩阵的加法运算

定义2.2.1 (加法) 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，矩阵A与B的和定义为 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，记为 $A+B$：

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}\ .$$

例2.2.1 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}, A+B=\begin{pmatrix}5&4&3\\7&8&9\end{pmatrix}, A-B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&3\end{pmatrix}.$

注意： $\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2&2\\3&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

加法最基本性质：

1. 交换律： $A+B=B+A$. 证明：比较(i,j)元素：$a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$
2. 结合律： $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. 零矩阵：对任一矩阵A，$A+O=O+A=A$（O与A是同型矩阵）.
4. 负矩阵：对任一矩阵$A=(a_{ij})$，可定义 $-A=(-a_{ij})$，称$-A$为A的负矩阵，显然有 $A+(-A)=O$.

定义矩阵的减法为： $A-B=A+(-B)$.

即： $(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

2.2.2 矩阵的数乘运算

定义2.2.2 (**矩阵的数乘**) 数k与矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 相乘的积定义为 $(ka_{ij})_{m\times n}$，记为 kA：

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n} \quad .$$

一个数乘以矩阵：该数乘以每个元素

$$2\times\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -6\\ 6 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

数乘最基本性质：

1. 结合律： $(kl)A=k(lA)=l(kA)$.
2. 分配律： $k(A+B)=kA+kB$， $(k+l)A=kA+lA$，其中k,l均为实数，A,B均为$m\times n$矩阵 .
3. $1\cdot A=A$ ； $0\cdot A=O$.
4. $(-1)A=-A$.

例2.2.2 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, 且 $3A$-$2X$=B，求矩阵X .

解 在 $3A$-$2X$=B 两端同时加上 (-$3A$) 得

$$-2X=B-3A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 3\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix},$$

两端再乘以 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 得 $X=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$.

例2.2.3 (方阵的数乘与其行列式) 已知矩阵 A 是五阶方阵，且 $|A|=2$，则 $|2A|=2^5|A|=32\times2=64$.

一般，若 A 是n阶方阵，k为任意数，则有 $|kA|=k^n|A|$.

2.2.3 矩阵的乘法运算

定义2.2.3 (矩阵的乘法) 设 $A=(a_{ij})_{m\times l}$， $B=(b_{ij})_{l\times n}$，则A与B的乘积AB定义为 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\ ,\qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

两个矩阵相乘：左边矩阵的每一行与右边矩阵每一列对应元素相乘的和构成矩阵的元素

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3+2\times1&1\times1+2\times(-1)\\2\times3+1\times1&2\times1+1\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\7&1\end{pmatrix}$$

例2.2.4 $\begin{pmatrix}2&-1\\-4&0\\3&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7&-9\\-8&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-28\\-28&36\\13&-17\end{pmatrix}$

注意： $\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$

例2.2.5 设 $A=(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n),B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，求 AB 和 BA .

解

$$AB=(a_1\ a_2\cdots\ a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n),BA=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1\ a_2\cdots\ a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix}.$$

线性方程组：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

可表示为矩阵形式：

$Ax=b$，其中：$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$

乘法最基本性质：　　矩阵乘法无交换律

1. 结合律：$(AB)C=A(BC)$.
2. 数乘结合律：$k(AB) = (kA)B = A(kB)$.
3. 分配律：$A(B+C)=AB+AC$；$(B+C)A=BA+CA$.

此外，还有 $AO=OA=O$, $AE=EA=A$, 其中O为零矩阵，E为单位矩阵.

矩阵乘法的结合律和分配率

矩阵乘法的结合律：

$$(AB)C=A(BC)\quad , \quad k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

说明：比较 (i,j) 元素，以 $(AB)C=A(BC)$ 为例

AB的 (i,k) 元素 $\sum_{s=1}^{l} a_{is}b_{sk}$　$(AB)C$的 (i,j) 元素 $\sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{l} a_{is}b_{sk})c_{kj}$

BC的 (s,j) 元素 $\sum_{k=1}^{p} b_{sk}c_{kj}$　$A(BC)$的 (i,j) 元素 $\sum_{s=1}^{l} a_{is}(\sum_{k=1}^{p} b_{sk}c_{kj})$

$$\sum_{\substack{s=1,2,\ldots,l\\ k=1,2,\ldots,p}} a_{is}b_{sk}c_{kj}$$

矩阵乘法的分配律：

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$(B+C)A=BA+CA$$

说明：比较 (i,j) 元素，以$A(B+C)=AB+AC$为例

$A(B+C)$的 (i,j) 元素 $\sum_{k=1}^{l} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$　$AB+AC$的 (i,j) 元素 $\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{l} a_{ik}c_{kj}$

例2.2.7 证明 $|AB|=|A|\,|B|$.

结论可作为公式使用

证明 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times n}$， 记$2n$阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}=|A|\times|B|,$$

对D_{2n}作一系列变换：

a_{11}所在行加上 a_{11}倍b_{11}行， 再加上a_{12}倍b_{21}行， …， 加上a_{1n}倍b_{n1}行，则第1行的$a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}$消为0， 第1行后面的0变为$c_{11},c_{12},\ldots,c_{1n}$

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

进一步：消去$a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n},a_{31},a_{32},\ldots,a_{nn}$，得到如下行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

$$\overset{\substack{c_i\leftrightarrow c_{n+i}\\ i=1,2,\cdots,n}}{=} (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & -1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right| = |AB|,$$

于是 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$.

进一步可得： $|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_k|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\ldots|\boldsymbol{A}_k|$.

矩阵乘法的一些特点

矩阵与单位矩阵相乘不变：

左乘单位矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

右乘单位矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

矩阵与对角矩阵相乘：

左乘对角矩阵：行作用

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} & 7a_{14} & 7a_{15} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34} & 2a_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}$$

右乘对角矩阵：列作用

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a_{11} & 4a_{12} & -3a_{13} \\ 8a_{21} & 4a_{22} & -3a_{23} \\ 8a_{31} & 4a_{32} & -3a_{33} \\ 8a_{41} & 4a_{42} & -3a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & 4y & -3z \end{pmatrix}$$

矩阵乘法无交换律

例2.2.5中　$AB \neq BA$

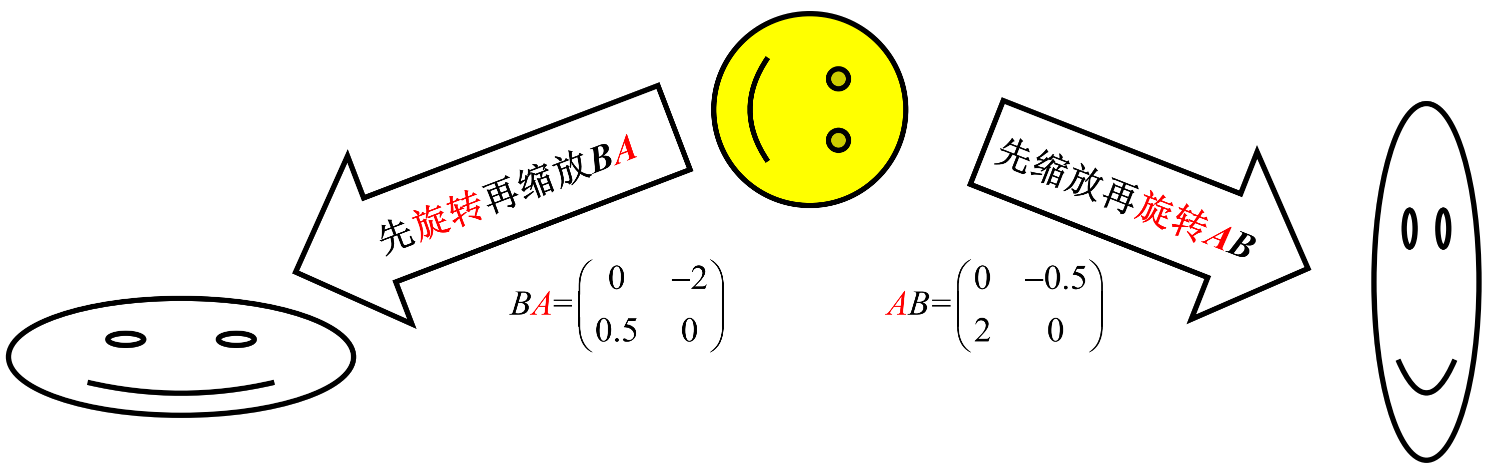
方阵乘法的例子：

$$
\left.
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\right\} \quad AB \neq BA
$$

几何说明：

$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示图形逆时针旋转90°

$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ 表示图形缩放：水平2倍，垂直0.5倍



$BA=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

矩阵乘法无消去律

矩阵乘法：

$AB=O \neq> A=O$或$B=O$　　见例子 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

矩阵乘法不满足消去律：

例子：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

其中：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

但是：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2.2.4 转置矩阵的性质

矩阵转置：行变列，列变行

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

定义2.1.3 (转置矩阵) 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的行与列互换后得到的矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 称为A的转置矩阵，记为 A^{T} (或A')：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

转置基本性质：

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$ ； $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$ ；
2. $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$ ；
3. $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$ (k,l均是数)；
4. $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

说明：比较 (i,j) 元素，以$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 为例

$(AB)^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元素$=AB$的(j,i)元素$=\sum_{k=1}^{l} a_{jk}b_{ki}$

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$的 (i,j)元素$=B$的i列与A的j行相乘$=\sum_{k=1}^{l} b_{ki}a_{jk}$

例2.2.8 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$，求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

解　法一：$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\16&1\\28&19\end{pmatrix}$，所以 $(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&16&28\\1&11&19\end{pmatrix}$.

法二：$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&16&28\\1&11&19\end{pmatrix}$.

补充例2A 证明任意方阵都可以表示成对称矩阵和反对称矩阵的和.

证明　设A为方阵，令 $B=0.5(A+A^{\mathrm{T}})$, $C=0.5(A-A^{\mathrm{T}})$，显然 $A=B+C$.
又 $B^{\mathrm{T}}=(0.5(A+A^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}}=0.5(A^{\mathrm{T}}+A)=B$，$C^{\mathrm{T}}=0.5(A^{\mathrm{T}}-A)=-C$，
故 B 为对称矩阵而 C 为反对称矩阵，结论成立.

矩阵代数式

矩阵方阵的乘幂：方阵多次相乘 $A^{k+1}=A^kA$,并令$A^0=E, A^1=A$

方阵乘幂的性质： $A^kA^l=A^{k+l}$, $(A^k)^l=A^{kl}$

方阵的代数式： $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$,

$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$,

$(A+\lambda E)^2=A^2+2\lambda A+\lambda^2E.$

矩阵无交换律,不能象普通数的代数式那样交换和展开:

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2\neq A^2+2AB+B^2$,

$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2\neq A^2-B^2.$

补充例2B ***X*幂等是指*X*²=*X*，若*A*、*B*幂等，则*A*+*B*幂等当且仅当*AB*=*BA*=*O*.**

证明 因为$A^2=A$、$B^2=B$， 故$(A+B)^2=A+B$化简可得$AB+BA=O$. 故只要证明$AB+BA=O$充要条件为$AB=BA=O$.

充分性显然. 现证必要性. 对$AB+BA=O$两边分别左乘和右乘A，利用A、B幂等性质得到 $AB+ABA=O$, $ABA+BA=O$，从而可得$AB=-ABA=BA$，进一步有$AB+BA=2AB=O$，故$BA=AB=O$.

矩阵多项式

但是对于一元矩阵多项式，有如下交换律：（专指方阵）

$$A^k A^l = A^{k+l} = A^l A^k, \quad k,l=1,2,3,\cdots, \text{其中} A^0 = E$$

$$A^k E = EA^k, k=1,2,3,\cdots,$$

$$f(A)g(A) = g(A)f(A),$$

$$\text{其中} f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E, g(A) = b_m A^m + \cdots + b_1 A + b_0 E.$$

一元矩阵多项式可以象普通数的代数式那样交换和展开:

若有：
$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n), \end{aligned}$$

则有：
$$\begin{aligned} f(A) &= a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E \\ &= a_n (A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_n E). \end{aligned}$$

例2.2.6 由 $f(x) = 2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$,

可得 $f(A) = 2A^2 + 5A - 3E = (2A-E)(A+3E)$.

* 矩阵多项式还可用二项式公式化简，如：

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)^n=(E+A)^n=E+C_n^1A+C_n^2A^2+C_n^3O+\cdots$$

$$=E+nA+\frac{n(n-1)}{2}A^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

*矩阵乘法不可交换也有用处，如列乘以行是矩阵，但行乘以列就是一个1阶矩阵，相当于一个数，于是可以简化矩阵乘幂计算，如：

$$A=\begin{pmatrix}3&-3&1\\3&-3&1\\6&-6&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(3,-3,1),$$

$$A^n=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(3,-3,1)\right)\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(3,-3,1)\right)\cdots\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(3,-3,1)\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\left((3,-3,1)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdots\left((3,-3,1)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)(3,-3,1)$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}2\times2\times\cdots2\times(3,-3,1)=2^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(3,-3,1)=2^{n-1}\begin{pmatrix}3&-3&1\\3&-3&1\\6&-6&2\end{pmatrix}.$$