2.5 矩阵的秩

考虑方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

对应矩阵:

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 5 \\
5 & 1 & -4 & -2 \\
2 & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix}$$

简化方程组:

未交换方程



化为行梯形矩阵:

未交换行



两个独立方程

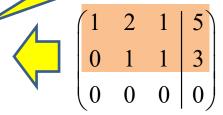
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 5 \\
5 & 1 & -4 & -2 \\
2 & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix}$$



一般地有方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

对应矩阵:

简化方程组:



化为倒梯形状:



k个非零行即独立行 称矩阵秩为k

k个独立方程

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1k}x_k + \dots + c_{1n}x_n = c_{1,n+1} \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2k}x_k + \dots + c_{2n}x_n = c_{2,n+1} \\ \dots \\ c_{kk}x_k + \dots + c_{kn}x_n = c_{k,n+1} \end{cases}$$

$$egin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1,n+1} \ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2,n+1} \ dots & dots & \ddots & dots & dots \ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} & \cdots & c_{k,n+1} \ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \ dots & dots & \ddots & dots & dots \ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \ \end{pmatrix}$$

矩阵的秩可以用矩阵中最大非零子行列式的阶数来描述.

考虑:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 , 秩为2.

A 的子行列式有:3阶
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$$
, 2行2列构成2 阶子行列式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ 构成 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ 2阶子行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -2$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$, $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -6$,

 $1 \% \det(1), \det(2), \det(-4), \det(1), \det(3), \det(-5), \det(2), \det(3), \det(-7)$

矩阵A最大非零子行列式阶为2,就是A的秩.

- 定义2.5.1 (矩阵的子式) 设A是一个 $m \times n$ 矩阵,任取A的k行与k列 $(0 < k \leq \min\{m,n\})$,位于这些行列交叉处的 k^2 个元素,按原 来顺序排成的k阶行列式, 称为矩阵的k阶子式.
 - 一般地, $m \times n$ 矩阵的k阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.
- 定义2.5.2 (矩阵的秩) 设A是一个 $m \times n$ 矩阵,如果A中至少存在一个非零 的r阶子式D,且所有r+1阶子式(如果存在的话)全为零,则D称 为矩阵A的最高阶非零子式,数r称为矩阵A的秩,记为r(A)=r(或rank A=r). 并规定零矩阵的秩等于0.

若所有r+1阶子式全为零,则r+2,r+3,...的子式(如果存在的话)也全为零.

满秩矩阵: 方阵A的秩等于它的阶数,即 $\mathbf{r}(A)=n$,也即 $|A|\neq 0$.

求秩时非零子式只要有一个就可以,如 $\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$ 株为3

矩阵秩的简单性质:

(1) r(A)是A的非零子式的最高阶数;

 A^{T} 的子式与A的对应子式互 $(2) \quad 0 \le r(A_{m \times n}) \le \min(m, n);$

- (3) $r(A^{T})=r(A);$
- (4) 对于n阶方阵A, $\mathbf{r}(A)=\mathbf{n}(\mathbb{D}A)$ 满秩矩阵) $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 非异.

例2.5.1 求矩阵A和B的秩,其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

解由于
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

所以 r(A)=3.

由于B中最高阶子式为3阶,共有4个,全为零,所以 $\mathbf{r}(B) \le 2$,又有二阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \ne 0$,因此 $\mathbf{r}(B) = 2$.

定理2.5.1 初等行、列变换不改变矩阵的秩.

证明思路: 以初等行变换为例

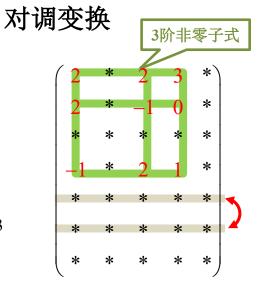
 $A \xrightarrow{r} B$ r=r(A),由于初等变换可逆,故只要证明 $r(B) \ge r$ 关键是找变换后B的非零r阶子式

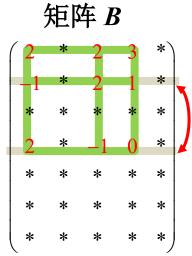
r(A)=3 3阶非零子式 2 * 2 3 * 2 * 1 0 *

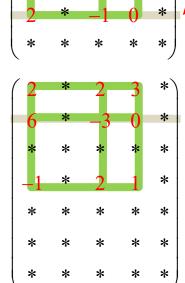
以秩为3的矩阵 4为例进行说明

矩阵A

3阶非零子式:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$





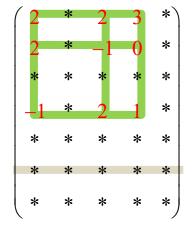


*

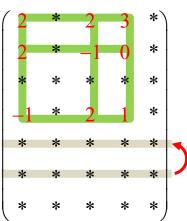
*

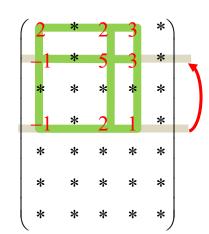
*

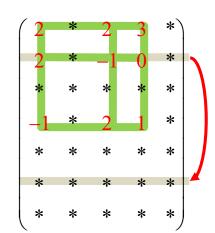
倍乘变换: k=3

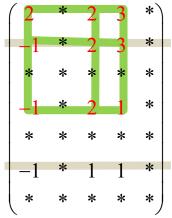


倍加变换: 3倍加

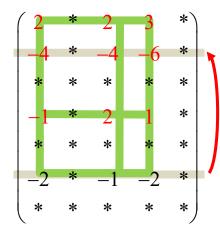








情况1:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$



情况2:0 =
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2+3(-2) & -1+3(-1) & 0+3(-2) \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
 = $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3(-2) & 3(-1) & 3(-2) \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = $D+3\times(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ = $3-3D'$, $\therefore D' \neq 0$

定理2.5.2 行梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数.

说明:若行梯形矩阵A的非零行有k行,则含零行子式为0,故矩阵秩 $\leq k$.

k个非零行的首元素所在列构成的k阶子式

注: 列梯形矩阵的秩为非零列的个数. 0 0 … $a_{k,h}$

推论2.5.3 任一满秩矩阵都可以经过若干次初等行(列)变换变为单位矩阵.

例2.5.2 求矩阵A的秩,其中
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$
.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 有二个非零行,故 $\mathbf{r}(A) = 2.$$$

例2.5.3 已知
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & 6 & \mu \end{pmatrix}$$
, 且 $\mathbf{r}(A) = 2$, 求 λ 及 μ 的值.

解 初等行变换
$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & 6 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & -6 & 6 & \mu + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 6 - 2\lambda & \mu + 2 \end{pmatrix}$$
, 已知 $\mathbf{r}(A) = 2$, 所以得 $\lambda = 3$, $\mu = -2$.

已知 r(A)=2,所以得 $\lambda=3$, $\mu=-2$.

补充例2H 求矩阵A的秩
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
.

解法一:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 故 \mathbf{r}(A) = 2.$$

解法二:转置后求秩

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ if } \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A^{\mathrm{T}}) = 2.$$

解法三:用初等列变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - 2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ id} \mathbf{r}(A) = 2.$$

定理2.6.4 (矩阵的分解) 设A为 $m \times n$ 矩阵,r(A)=r,则存在m阶可逆矩阵Q,使得 $A=P \wedge Q$,其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

证明: A 经过一系列的初等行变换等价于左乘初等矩阵 $P_s...P_2P_1A$,再经过一系列的初等列变换得 $P_s...P_2P_1AQ_1Q_2...Q_t$,最后可化为标准型A.初等矩阵可逆,故有:

$$A=P_1^{-1}P_2^{-1}...P_s^{-1}\Lambda Q_t^{-1}...Q_2^{-1}Q_1^{-1}=P\Lambda Q$$
,其中 P,Q 可逆.

注: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}$, 则有 A = BC, 其中 $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$.

因为
$$A=P \land Q=(B,B_2)$$
 $\begin{pmatrix} E_r \\ C_2 \end{pmatrix}=(B,O)$ $\begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix}=BC$.

推论2.6.5 任一n阶可逆矩阵A均可以表示成有限个n阶初等矩阵的 乘积。进一步,任一可逆矩阵可以只经过行的初等变换 化为单位阵,也可以只经过列的初等变换化为单位阵。

一系列的初等行(列)变换等价于左(右)乘可逆矩阵

定理2.6.6 设A是 $m \times n$ 矩阵,P,Q分别是m阶和n阶可逆矩阵,则 r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ).

证明:由于可逆矩阵*P*,*Q*可以表示为有限个初等矩阵的乘积,而初等变换又不改变矩阵的秩,故结论成立。

例2.6.12 证明:任一秩为r的 $m \times n$ 矩阵A总可表示为r个秩为1的矩阵的和.

证明 因为 $\mathbf{r}(A)=\mathbf{r}$, 故存在 \mathbf{m} 阶和 \mathbf{n} 阶可逆矩阵 \mathbf{p} 和 \mathbf{Q} , 使得

$$A = P \wedge Q = P(E_{11} + E_{22} + ... + E_{rr})Q$$

其中, E_{ii} (i=1,2,...,r) 是(i,i)元素为1,其它元素为0的 $m \times n$ 矩阵. 由上式可得

$$A = PE_{11}Q + PE_{22}Q + ... + PE_{rr}Q$$
.

再由定理2.6.6知 $r(PE_{ii}Q)=r(E_{ii})=1$,故结论成立.

进一步,
$$\diamondsuit P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$
 , $Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}$.

则有:
$$A=PE_{11}Q+PE_{22}Q+...+PE_{rr}Q$$

= $Pe_1e_1^TQ+Pe_2e_2^TQ+...+Pe_re_r^TQ=p_1q_1^T+p_2q_2^T+...+p_rq_r^T$.

矩阵和、积的秩的关系

定理2.7.14 (1)
$$r(A+B) \leq r(A)+r(B)$$
;

- $(2) r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\};$
- (3) 若A, B均为n阶方阵,则 $\mathbf{r}(AB) \ge \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) n$.
- 证明: (1) 由矩阵秩的定义知矩阵增加几行或增加几列,它们的秩不减. 作矩阵(A+B,B),应用初等列变换可得 (A+B,B) \rightarrow (A,B),于是有 $\mathbf{r}(A+B) \leq \mathbf{r}(A+B,B) = \mathbf{r}(A,B) \leq \mathbf{r}\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = \mathbf{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B)$.
 - (2) 设 $r(A)=r_1,r(B)=r_2$,又设A的行梯形矩阵为 A_0 ,B的列梯形矩阵为 B_0 ,则存在可逆矩阵P和Q使 $A=PA_0$, $B=B_0Q$,因为 $AB=PA_0B_0Q$,所以 $r(AB)=r(A_0B_0)$.由于 A_0 只有 r_1 个非零行, B_0 只有 r_2 个非零列,所以 A_0B_0 至多有 r_1 个非零行和 r_2 个非零列,故 $r(A_0B_0) \leq \min\{r_1,r_2\} = \min\{r(A),r(B)\}$.即得 $r(AB) \leq \min\{r(A),r(B)\}$
 - (3) 应用初等行变换可得 $\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} B & E \\ -AB & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix},$ 于是有

$$r(A) + r(B) = r \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \le r \begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \right)$$
的最高阶非零子式在 $\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$ 中对应的子式也非零)
$$= r \begin{pmatrix} B & E \\ -AB & O \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} O & E \\ AB & O \end{pmatrix} = r(AB) + n.$$

补充例2I 设矩阵 $A=MN^T$, 其中 $M,N \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ($r \le n$), $|N^TM| \ne 0$, 证明 $r(A^2)=r(A)$. 证明 因为 $|N^TM| \ne 0$,故矩阵 $(N^TM)^3$ 可逆,于是有 $r=r((N^TM)^3)=r(N^TA^2M) \le r(A^2M) \le r(A^2) \le r(A) \le r(M) \le r$ 从而 $r(A^2)=r(A)$.

补充例2J 已知 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{r}(A)=1$, 则有非零向量 $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ 使得 $A=\alpha\beta^T$.

证明 因为
$$\mathbf{r}(A)=1$$
,故有 $A=P\begin{pmatrix}1\\O\end{pmatrix}Q=Pe_1e_1^TQ=(Pe_1)(e_1^TQ)=\alpha\beta^T$,其中 P 、 Q 为可逆矩阵, α , β 为 P 和 Q^T 的第一列.
又有 $1=\mathbf{r}(A)\leq\mathbf{r}(\beta^T)=\mathbf{r}(\beta)\leq 1$,故 $\mathbf{r}(\beta)=1$,同理 $\mathbf{r}(\alpha)=1$,故 α , β 非零.