线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2013.11.16

一. 简答题(本题共4小题,每小题10分,共40分)

1.将矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}$ 用行初等变换化为行简化梯形矩阵。

解：$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-5&-7\\0&-3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. 设 A,B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，E_n 为 n 阶单位阵，若 $m>n$，判断矩阵 $\begin{pmatrix}A&O\\E&B\end{pmatrix}$ 是否可逆，并说明理由。

解：不可逆。由 $\begin{pmatrix}E_m&-A\\O&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&O\\E_n&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&-B\\O&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&-AB\\E_n&O\end{pmatrix}$ 知 $r\begin{pmatrix}A&O\\E_n&B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}O&-AB\\E_n&O\end{pmatrix}=n+r(AB)\le n+r(A)\le n+n<n+m$. 所以矩阵 $\begin{pmatrix}A&O\\E_n&B\end{pmatrix}$ 不可逆。

解法二：不可逆。由 $B\in R^{n\times m},m>n$，知 $Bx=\theta$ 有非零解，设为 x_0.
令 $y=\begin{pmatrix}\theta_n\\x_0\end{pmatrix}$，则 $y\ne\theta$，且 $\begin{pmatrix}A&O\\E_n&B\end{pmatrix}y=\theta$. 故 $\begin{vmatrix}A&O\\E_n&B\end{vmatrix}\ne 0$，即 $\begin{pmatrix}A&O\\E_n&B\end{pmatrix}$ 不可逆.

3. 设 $n\ge 2$，A 是 n 阶实方阵。如果 $AX=\theta$ 的基础解系为向量 $\alpha=(1,1,...,1)'$，求 $A^*X=\theta$ 的基础解系.

解：因为 $A\in R^{n\times n}$，且 $Ax=\theta$ 的基础解系为 α，故 $r(A)=n-1$。
故$r(A^*)\ge 1$，且$AA^*=A^*A=|A|E=O$。从而$r(A^*)=1$且A的$n-1$个线性无关的列就是A^*的基础解系。

4. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 及 $\beta=(b_1,b_2,b_3)'\ne\theta$. 令 $B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta'&0\end{pmatrix}$. 如果 $r(A)=r(B)$，试判断非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 是否有解，并给出理由。

解：有解。由 $r(A)=r(B)\ge r(A,\beta)\ge r(A)$ 知 $r(A)=r(A,\beta)$，从而非齐次线性方程组$AX=\beta$有解。

二.(20分) 计算下列行列式

$$\text{(i) } D_n=\begin{vmatrix}n&n-1&n-2&\cdots&3&2&1\\-1&x&0&\cdots&0&0&0\\0&-1&x&\cdots&0&0&0\\&&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&&&&\\0&0&0&\cdots&-1&x&0\\0&0&0&\cdots&0&-1&x\end{vmatrix}\qquad\text{(ii) } D_n=\begin{vmatrix}x_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&x_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&x_n\end{vmatrix}.$$

解：(i) 从第二列开始，依次将前一列乘以x加到最后一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}n&nx+(n-1)&nx^2+(n-1)x+(n-2)&\cdots&\sum_{i=0}^{n-3}(n-i)x^{n-3-i}&\sum_{i=0}^{n-2}(n-i)x^{n-2-i}&\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)x^{n-1-i}\\-1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&-1&0&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\cdots&\\0&0&0&\cdots&-1&0&0\\0&0&0&\cdots&0&-1&0\end{vmatrix}.$$

沿最后一列展开，得 $D_n=(-1)^{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)x^{n-1-i}(-1)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)x^{n-1-i}$.

(ii) $$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_{n-1} & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$=a_nb_n\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 1 \end{vmatrix}+(x_n-a_nb_n)D_{n-1}$$

$=a_nb_n(x_1-a_1b_1)\cdots(x_{n-1}-a_{n-1}b_{n-1})+(x_n-a_nb_n)D_{n-1}$

$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_ib_i)+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i[\prod_{k\neq i}(x_k-a_kb_k)]$.

三.(10分) 求下列带参数的齐次线性方程组的基础解系

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+7x_4 &= 0, \\ 4x_1+3x_2+\lambda x_3+6x_4 &= 0, \\ x_1+x_2 \qquad\qquad +2x_4 &= 0. \end{cases}$$

解：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & \lambda & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_1=1$ 时，$A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$x_3$ 取1可得基础解系为：$(-1,1,1,0)^T$，

当 $\lambda_1\neq 1$ 时，基础解系为：$(\frac{\lambda}{\lambda-1},-\frac{3\lambda-2}{\lambda-1},-\frac{1}{\lambda-1},1)^T$.

解法二：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & \lambda & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix},$$

自由变量 x_3 取1可得基础解系为：$(-\lambda,3\lambda-2,1,1-\lambda)^T$.

四. (10分) 求一个非齐次线性方程组，使得其通解为

$$X=(1,-1,3)'+k_1(-1,3,2)'+k_2(2,1,1)',$$

其中 k_1,k_2 为任意常数。

解：令$B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，解方程组$BX=\theta$的基础解系 $\alpha=(1,5,-7)'$.
令$A=\alpha'=(1,5,-7)$及$b=A(1,-1,3)'=-25$. 则非齐次线性方程组$AX=b$的通解为

$$X=(1,-1,3)'+k_1(-1,3,2)'+k_2(2,1,1)',$$

其中 k_1,k_2 为任意常数。

五.(10分) 设有4个三维向量 $\alpha_1=(-2-3,-4)^T,\alpha_2=(4,6,8)^T,\beta_1=(2,4,4)^T,\beta_2=(7,4,15)^T$. 考虑以下两个向量集合

$S_1=\{\ v\in R^3\mid v=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\ k_1,k_2\in R\ \}$ 和 $S_2=\{\ v\in R^3\mid v=l_1\beta_1+l_2\beta_2,\ l_1,l_2\in R\ \}$. 求向量集合 $S_1\cap S_2$.

解：由 $\alpha_2=-2\alpha_1$ 知 $S_1=\{\ v\in R^3\mid v=k\alpha_1,\ k\in R\ \}$.
设 $\alpha\in S_1\cap S_2$，则 $\alpha=x_1\alpha_1=x_2\beta_1+x_3\beta_2$，所以

$$x_1(-\alpha_1)+x_2\beta_1+x_3\beta_2=\theta. \qquad (1)$$

又 $|-\alpha_1,\beta_1,\beta_2|=2\neq 0$，所以方程组(1)只有零解，从而 $\alpha=\theta$，因此 $S_1\cap S_2=\{\theta\}$.

六.(10**分**) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&a&4\\0&2&0\\1&b&0\end{pmatrix}$ 可以对角化，求出a,b和与之相似的对角矩阵D及相似变换矩阵P.

解：(1) $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+2)$，因此$A$的特征值是 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=2$.
所以A可对角化的充分必要条件是 $3-r(2E-A)=2$，即 $r(2E-A)=1$. 这等价于参数 a,b 满足 $a+2b=0$.
(2) 对于特征值 $\lambda=-2$，解方程组 $(-2E-A)X=\theta$ 得基础解系 $\vec{p_1}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，
对于特征值 $\lambda=2$，解方程组 $(2E-A)X=\theta$ 的基础解系 $\vec{p_2}=\begin{pmatrix}-b\\1\\0\end{pmatrix},\vec{p_3}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.
令 $P=\begin{pmatrix}-2&-b&2\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 P 可逆且有 $P^{-1}AP=D=\mathrm{diag}\{-2,2,2\}$.