3.1 高斯消元法与矩阵的行变换

一般的线性方程组表示为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

方程组(3.1)的向量形式：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b, \tag{3.2}$$

其中向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

方程组(3.1)的矩阵形式：

$$Ax = b, \tag{3.4}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

称A为方程组(3.1)的系数矩阵，x为未知向量，b为右端向量.
使方程组(3.4)成立的已知向量称为该方程组的解向量.
系数矩阵与右端向量构成$B=(A,b)$称为该方程组的增广矩阵.
$(s_1,\ldots,s_n)$代替$(x_1,\ldots,x_n)$后方程组成立，称$x_1=s_1,\ldots,x_n=s_n$为方程组的一个解.
方程组的所有解所成的集合称为方程组的解集.

定义3.1.1 (同解方程组) 具有相同解集的两个方程组称为同解方程组.

解方程组可用增广矩阵初等行变换，见下面例子：

例3.1.1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-5, \\ 3x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 4x_1+3x_2+8x_3=-14. \end{cases}$

解 此方程组的系数矩阵、未知向量、右端向量分别为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

对增广矩阵作初等行变换

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 8 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3\div(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right),$$

最后得到方程组 $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=-3. \end{cases}$

即得方程组的解为 x_1=1 , x_2=2 , x_3=-3 .

例3.1.2 解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=0. \end{cases}$

解 对方程组*Ax*=*b*的增广矩阵作初等行变换

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\div(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2\div(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

最后得到方程组 $\begin{cases} x_1+x_4=2, \\ x_2+x_4=1, \\ x_3+x_4=1. \end{cases}$ **即** $\begin{cases} x_1=2-x_4, \\ x_2=1-x_4, \\ x_3=1-x_4. \end{cases}$

最后得到方程组的解为 $\boldsymbol{x_1=2-t\,,\ x_2=1-t\,,\ x_3=1-t\,,\ x_4=t\ (t\in \mathrm{R})}$ **.**

例3.1.3 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8, \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7, \\ x_1+8x_2-7x_3=10. \end{cases}$

解 对增广矩阵作初等行变换

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & -7 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 10 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\div(-7)]{r_4-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4+11r_2]{\substack{r_1-8r_2 \\ r_3+2r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4+5r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

最后得到方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=2, \\ x_2-x_3=1, \\ x_3=1, \\ 0=4. \end{cases}$ **此为矛盾方程组，故该方程组无解．**

以后解方程组时初等行变换书写时可以省略变换符号如r_2-$2r_1$等

3.2* 高斯消元法的矩阵表示

我们看利用矩阵分解来解方程组(计算机通用的解方程组的方法)

例 3.2.2 解下列方程组
$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-2, \\ 4x_1+6x_2+8x_3=0. \end{cases}$$

解 考虑系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & * & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & * & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & -1 \\ & & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & -1 \\ & & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & -1 \\ & & 4 \end{pmatrix},$$

所以有

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=LU.$$

易知：$Ax=b$，即为 $LUx=b$.

令 $y=Ux$，则得到两个方程组 $Ly=b$ 和 $Ux=y$，

易解 $Ly=b$ 得 y，也易解 $Ux=y$ 得 x，最后得到方程组的解 x .

下面分两步求解方程组：

第一步：代入法解方程组 $Ly=b$，即

$$\begin{cases} y_1 & = 3, \\ y_1 + y_2 & = -2, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 & = 0. \end{cases}$$

易得解为：$y_1=3$, $y_2= -5$, $y_3= 4$.

第二步：代入法解方程组 $Ux=y$，即

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = 3, \\ \qquad 2x_2 - x_3 & = -5, \\ \qquad\qquad 4x_3 & = 4. \end{cases}$$

易得解为：$x_1=1$, $x_2= -2$, $x_3=1$. 此即为原方程组的解.

原理：初等变换解方程组：$(A,b)\to(U,y)$，其中U为行梯形

矩阵表示：$(U,y)=P_3P_2P_1(A,b)=L^{-1}(A,b)=(U, L^{-1}b)$，

解 $Ux=y$ 需先求$U=L^{-1}A$，$y=L^{-1}b$，

等价于：分解$A=LU$和解 $Ly=b$.

故有：先分解 $A=LU$，再求y，即解 $Ly=b$，再求x，即解$Ux=y$.

3.3 线性方程组的可解性

判断方程组有解性 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = -5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = -2. \end{cases}$

解 对增广矩阵进行初等行变换

可自由取值的未知量

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{对应方程组} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = -2, \\ x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

可知(1)方程组有解 $(-2,0,-1,0)^T$，(2)方程组有无穷多组解.

判断方程组有解性 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

解 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, 对应方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 0 = 1. \end{cases}$ 可知方程组无解.

从上述例子得到:

方程组 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A,b)$

方程组 $Ax=b$ 有无穷多组解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A,b)<(A\text{的列数})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3.1)$$

即：$\boldsymbol{Ax=b}$

定理3.3.1 线性方程组(3.1)有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。且当 r(A)=r(A,b)=n时，方程组有唯一解；而当 r(A)=r(A,b)<n时，方程组有无穷多组解。

证明： 利用方程组的向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b, \text{其中：} \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

方程组有解⇔b可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表示

$\Updownarrow$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$与$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b\}$等价

$\Updownarrow$

$r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b\}$，即r($A$)=r($A$,$b$)

$r\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = r\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, b\} = n$,则$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$无关，$b$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$唯一表示

$r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} < n$ => $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关=>$\theta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n$有无穷多非零解=>$b$有$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$无穷多种表示方式，组合系数为$(x_1+k_1, \ldots, x_n+k_n)$

例3.3.1 解方程组 $\begin{cases} 3x_1+\lambda x_2+x_3=4, \\ x_1+2x_2-4x_3=\mu, \\ x_1-x_2+9x_3=19. \end{cases}$

解

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & \mu \\ 1 & -1 & 9 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & 19 \\ 1 & 2 & -4 & \mu \\ 3 & \lambda & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & 19 \\ 0 & 3 & -13 & \mu-19 \\ 0 & \lambda+3 & -26 & -53 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & 19 \\ 0 & 3 & -13 & \mu-19 \\ 0 & 0 & 13(\lambda-3) & -(\mu-19)(\lambda+3)-159 \end{array}\right)=B_1.$$

当$\lambda\neq3$时，$r(A)=r(A,b)=3$，方程组有唯一解. 进一步化简(A,b)，

$$B_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{\mu-19}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\mu-19}{13}-\frac{3}{13}\times\frac{2\mu+15}{\lambda-3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9\mu+76}{13}+\frac{14}{13}\times\frac{2\mu+15}{\lambda-3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2\mu+15}{\lambda-3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\mu-19}{13}-\frac{3}{13}\times\frac{2\mu+15}{\lambda-3} \end{array}\right),$$

得方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{9\mu+76}{13}+\frac{14}{13}\times\frac{2\mu+15}{\lambda-3}, x_2=-\frac{2\mu+15}{\lambda-3}, x_3=-\frac{\mu-19}{13}-\frac{3}{13}\times\frac{2\mu+15}{\lambda-3}.$$

当$\lambda=3$, $\mu=-15/2$时, $r(A)=r(A,b)=2$, 方程组有无穷多解. 进一步化简(A,b)，

$$B_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & 19 \\ 0 & 3 & -13 & -53/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14/3 & 61/6 \\ 0 & 1 & -13/3 & -53/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得方程组的解为：$x_1=61/6-14t$, $x_2=-53/6+13t$, $x_3=3t$, $t\in\mathrm{R}$.

当$\lambda=3$, $\mu\neq-15/2$时，$2=r(A)<r(A,b)=3$，方程组无解.

补充例3A 已知 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$A$可逆，$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^n$，$s\in\mathbf{R}$. 证明：

$$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^{\mathrm{T}} & \beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\beta \end{pmatrix} y=\begin{pmatrix}\gamma\\ s\end{pmatrix}$$ 有解的充要条件是 $s=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\gamma}$.

证明　因为.

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & \theta \\ -\beta^{\mathrm{T}}A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} A & \beta & \gamma \\ \beta^{\mathrm{T}} & \beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\beta & s \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} E & A^{-1}\beta & A^{-1}\gamma \\ \theta^{\mathrm{T}} & 0 & s-\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\gamma \end{array}\right),\text{且}\begin{vmatrix} A^{-1} & \theta \\ -\beta^{\mathrm{T}}A^{-1} & 1 \end{vmatrix}=\left|A^{-1}\right|\neq 0,$$

于是：方程组有解⇔

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^{\mathrm{T}} & \beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\beta \end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{array}{cc|c} A & \beta & \gamma \\ \beta^{\mathrm{T}} & \beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\beta & s \end{array}\right)\Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} E & A^{-1}\beta \\ \theta^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{array}{cc|c} E & A^{-1}\beta & A^{-1}\gamma \\ \theta^{\mathrm{T}} & 0 & s-\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\gamma \end{array}\right)=n$$

⇔ $\boldsymbol{s=\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\gamma}$.

补充例3B 设已知列向量$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}^n$, $(n>2)$，线性无关，

若 $B=\begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 \end{pmatrix}$，证明：$|B|\neq 0$.

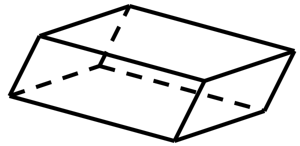
证明　设$A=(\alpha_1,\alpha_2)$，则$B=A^{\mathrm{T}}A$. 若x满足 $Bx=\theta$，则 $x^{\mathrm{T}}Bx=(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)=y^{\mathrm{T}}y=0$，故$Ax=y=\theta$. 又$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$Ax=(\alpha_1,\alpha_2)x=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\theta$，$Ax=\theta$只有唯一的零解 $x=(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=\theta$，于是 $Bx=\theta$只有零解，故有 $|B|\neq 0$.

*分析三元方程组行列式求解

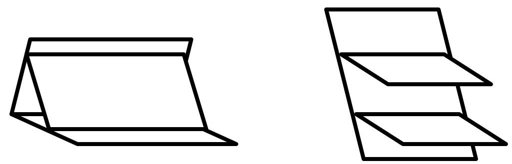
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

即：$\boldsymbol{Ax=b}$

$\Delta \neq 0$时有唯一解

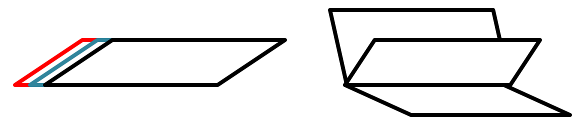


$\Delta = 0$,但有$\Delta_i \neq 0$时无解

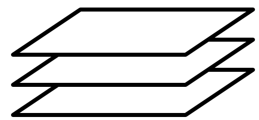


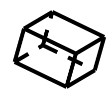
$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

无穷多组解



无解

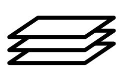


$\Delta \neq 0$表示 r(A)=3，即有3个独立方向平面( **)，有唯一解.**

Δ =0表示 r(A)=1或r(A)=2：

r(A)=1时只有1个独立方向平面：

有无穷多组解 ( **)：r(A)=r(A,b)=1,则$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$**

无解( **)：1=r(A)<r(A,b)=2，则$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$**

r(A)=2时有2个独立方向平面：

有无穷多组解( **)：r(A)=r(A,b)=2，则$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$**

无解( **)：2=r(A)<r(A,b)=3，则$\Delta = 0$,但有$\Delta_i \neq 0$**