线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2014.11.22

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1.计算n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解：$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$,故$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1 = 1$，
$D_n = D_{n-1} + 1 = \cdots = D_1 + n - 1 = n + 1$.

2. 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} e^t & \cos t & \sin t \\ e^t & -\sin t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$。

解：分$\sin t \neq 0$ 和$\sin t = 0$,均有

$$(A, E) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} e^t & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sin t & -\cos t & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cos t & \sin t & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{e^{-t}}{2} & 0 & \frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sin t + \cos t}{2} & -\sin t & \frac{\sin t - \cos t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sin t - \cos t}{2} & \cos t & -\frac{\sin t + \cos t}{2} \end{array}\right),\text{可得}A^{-1}.$$

解法二：$|A| = 2e^t$，$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ e^t(\sin t + \cos t) & -2e^t \sin t & e^t(\sin t - \cos t) \\ e^t(\sin t - \cos t) & 2e^t \cos t & -e^t(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$,可得A^{-1}.

3. 已知一个矩阵A的伴随矩阵为$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$且$|A| > 0$，求$A^{-1}$。

解：计算可以得到$|A^*| = 9$，那么由于此时$|A|^2 = |A^*|$ 和条件$|A| > 0$，得到$|A| = 3$。则$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^* = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$。

4. 若A为n阶可逆矩阵，u, v为n维列向量，若矩阵$A + uv^T$有形式为$A^{-1} + t(A^{-1}uv^TA^{-1})$的逆矩阵，其中$t$为实数，则$t$为何值？

解：$(A + uv^T)(A^{-1} + t(A^{-1}uv^TA^{-1})) = E + uv^TA^{-1} + tuv^TA^{-1} + t(uv^TA^{-1}uv^TA^{-1}) = E$，
故$uv^TA^{-1} + tuv^TA^{-1} + tuv^TA^{-1}uv^TA^{-1} = O$，两边右乘$A$得
$uv^T + tuv^T + tuv^TA^{-1}uv^T = u(1 + t + tv^TA^{-1}u)v^T = O$，
$\therefore u, v$ 不全为零时，有 $t = -1/(1 + v^TA^{-1}u)$；$u = \theta$ 或 $v = \theta$ 时，有 t 为任意实数。

5. 设n阶方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵$A$的特征值及其重数。

解：$|\lambda E - A| = (\lambda - n)\lambda^{n-1} = 0$，故$A$ 的特征值为：$\lambda = n$，$\lambda = 0(n-1\text{重})$。

二.(15分) 解线性方程组

$$\begin{cases} mx_1+nx_2+nx_3=n, \\ nx_1+mx_2+nx_3=n, \\ nx_1+nx_2+mx_3=n, \end{cases}$$

其中参数 m,n不全为0。

解：方程组的增广矩阵$B=\left(\begin{array}{ccc|c} m & n & n & n \\ n & m & n & n \\ n & n & m & n \end{array}\right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} m+2n & m+2n & m+2n & 3n \\ n & m & n & n \\ n & n & m & n \end{array}\right)$.

当$m+2n\neq 0$ 时，$B\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3n/(m+2n) \\ 0 & m-n & 0 & (m-n)n/(m+2n) \\ 0 & 0 & m-n & (m-n)n/(m+2n) \end{array}\right)$,

故当$m+2n\neq 0$且$m\neq n$ 时，$B\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & n/(m+2n) \\ 0 & 1 & 0 & n/(m+2n) \\ 0 & 0 & 1 & n/(m+2n) \end{array}\right)$,得唯一解$\begin{pmatrix} n/(m+2n) \\ n/(m+2n) \\ n/(m+2n) \end{pmatrix}$.

当$m+2n\neq 0$且$m=n$ 时，$B\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,得通解为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当$m+2n=0$ 时，$B\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} n & m & n & n \\ n & n & m & n \\ 0 & 0 & 0 & 3n \end{array}\right)$，若$n=0$，则$m=0$，与$m,n$ 不全为0矛盾，故$n\neq 0$，矩阵最后一行得矛盾方程，故无解。

三.(10分) 设A是一个$m\times n$的矩阵，B是一个$m\times k$的矩阵。证明：存在一个$n\times k$的矩阵C使得$AC=B$的充分必要条件是 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,B)$.

证：首先说明$AC=B$ 等价于B 的列向量组可以由A 的列向量组线性表示。那么A 的一个极大无关组也是(A,B) 的极大无关组。所以$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,B)$。反过来推导类似。

四. (15分) 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1)求可逆矩阵P使得PA为行简化梯形阵。
(2)求A的秩。
(3)设A的列分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，即$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组，并用此极大无关组线性表示其余向量。

解：(1) 对(A,E) 做初等行变换

$$(A,E)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 & -1/2 & -2 & 1 \end{array}\right)=(B,P),$$

故$P=\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) A经初等行变换后的行简化梯形B 有3个非零行，故$r(A)=3$。
(3) 由行简化梯形B 可知，A 的列中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组，最后列$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

五.(10分) 设n阶矩阵$C=(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})$，其中$e_j=(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)^T$(第$j$个分量为1，其余为0),$j=1,2,\cdots,n$，而$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$为$(1,2,\cdots,n)$的一个排列，证明：(1) $C^{-1}=C^T$，
(2) $C^{-1}\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)C=\mathrm{diag}(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_n})$.

证：(1) $C^TC=\begin{pmatrix} e_{i_1}^T \\ e_{i_2}^T \\ \vdots \\ e_{i_n}^T \end{pmatrix}(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})=(a_{kj})_{n\times n}=(e_{i_k}^T e_{i_j})_{n\times n}=E$,故$C^{-1}=C^T$.

(2) $\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})=(d_{i_1}e_{i_1},d_{i_2}e_{i_2},\cdots,d_{i_n}e_{i_n})$,
故$C^{-1}\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)C=C^T(d_{i_1}e_{i_1},d_{i_2}e_{i_2},\cdots,d_{i_n}e_{i_n})=\mathrm{diag}(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_n})$.

六.(10分) 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & x \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$

设矩阵A相似于B，(1)求常数x,y，(2)求A的特征值和特征向量。

解：B 的特征值为$2,2,y$，A 的特征方程为$|\lambda E-A|=(\lambda-2)[\lambda^2-(x+3)\lambda+3(x-1)]=0$，$A$相似于$B$，它们有相同的特征值。

将$\lambda=2$ 代入上式第二个括号，得$x=5$，故$\lambda^2-8\lambda+12=0$，得$\lambda=2,6$，从而$y=6$。

当$\lambda=2$时，特征向量为$\alpha_1=(-1,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，当$\lambda=6$ 时，特征向量为$\alpha_3=(1,-2,3)^T$。

解法二：(1) 因为矩阵A相似于B，故有 $tr(A)=tr(B),|A|=|B|$，即 $\begin{cases}5+x=4+y,\\6(x-1)=4y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=6.\end{cases}$

(2) 因为相似，故 A 的特征值等于 B 的特征值，为 $2,2,6$.
对 $\lambda=2$，解得 A 的两个无关特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$.
对 $\lambda=6$，解得 A 的特征向量为 $\alpha_3=(1,-2,3)^T$.