A、B 班 9-1 作业分析

作业：习题一：3,4,5,6

*有些同学行列式计算的过程描述有错，主要是行列搞混淆了，如 r_1-r_2 错写成 c_1-c_2 .

3(1) 有同学提取公因子过程写错，如 $\begin{vmatrix}10&2&8\\15&3&12\\20&12&32\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1\div5\\c_3\div4}}{=}\begin{vmatrix}2&2&2\\3&3&3\\4&12&8\end{vmatrix}$，应 $\begin{vmatrix}10&2&8\\15&3&12\\20&12&32\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1\div5\\c_3\div4}}{=}5\times4\times\begin{vmatrix}2&2&2\\3&3&3\\4&12&8\end{vmatrix}$.该题可：

3(1)解：$\begin{vmatrix}10&2&8\\15&3&12\\20&12&32\end{vmatrix}\overset{r_1,r_2\text{成比例}}{=}0\cdot$

3(3)、3(6)、4(4)等题的解答中行列式变换出现可能为零的分母，但没有分情况讨论，如：

$r_4-\dfrac{b}{a}r_1$，$r_3-\dfrac{x}{a}r_1$，$c_2+\dfrac{1}{\lambda}c_1$. 这些题可解答如下：

3(3)解：$\begin{vmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\0&b&a&0\\b&0&0&a\end{vmatrix}\overset{r_1\text{展开}}{=}a\begin{vmatrix}a&0&b\\b&a&0\\0&0&a\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}0&a&b\\0&b&0\\b&0&a\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{前}r_1\text{展开}\\\text{后}c_1\text{展开}}}{=}a^2\begin{vmatrix}a&0\\b&a\end{vmatrix}+b^2\begin{vmatrix}a&b\\b&0\end{vmatrix}=a^4-b^4.$

3(6)解：$\begin{vmatrix}a&0&b&0\\0&c&0&d\\x&0&y&0\\0&u&0&v\end{vmatrix}\overset{c_2\leftrightarrow c_3}{=}\begin{vmatrix}a&b&0&0\\0&0&c&d\\x&y&0&0\\0&0&u&v\end{vmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=}\begin{vmatrix}a&b&0&0\\x&y&0&0\\0&0&c&d\\0&0&u&v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\x&y\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}c&d\\u&v\end{vmatrix}=(ay-bx)(cv-du).$

4(4)解法一：$\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&\lambda+a_1\end{vmatrix}\overset{c_1+\sum_{i=2}^{n}\lambda^{i-1}c_i}{=}\begin{vmatrix}0&-1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i}&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&\lambda+a_1\end{vmatrix}\overset{c_1\text{展开}}{=}(-1)^{n+1}(\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i})\begin{vmatrix}-1&&&\\\lambda&-1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\lambda&-1\end{vmatrix}_{n-1}=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i},\text{其中}a_0=1.$

解法二：$\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&\lambda+a_1\end{vmatrix}\overset{c_{i-1}+\lambda c_i,i=n,n-1,\cdots,2}{=}\begin{vmatrix}0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-1\\f_n(\lambda)&f_{n-1}(\lambda)&f_{n-2}(\lambda)&\cdots&f_2(\lambda)&\lambda+a_1\end{vmatrix}=D_n,\text{其中}f_k(\lambda)=\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\cdots+a_k.$

$$D_n\overset{c_1\text{展开}}{=}(-1)^{n+1}f_n(\lambda)\begin{vmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&\ddots&\\&&&-1\end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{n+1}f_n(\lambda)(-1)^{n-1}=f_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_{n-1}\lambda+a_n.$$

解法三：$D_n=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&\lambda+a_1\end{vmatrix}\overset{c_1\text{展开}}{=}\lambda D_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0\\\lambda&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}_{n-1}=\lambda D_{n-1}+a_n.$

故有 $D_n=\lambda D_{n-1}+a_n=\lambda(\lambda D_{n-2}+a_{n-1})+a_n=\lambda^2D_{n-2}+a_{n-1}\lambda+a_n=\cdots=\lambda^{n-1}(\lambda+a_1)+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n.$

解法四：$D_n=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&\lambda+a_1\end{vmatrix}\overset{r_n\text{展开}}{=}(-1)^{n+1}a_nM_{n1}+(-1)^{n+2}a_{n-1}M_{n2}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{n-j+1}M_{nj}+\cdots+(-1)^{n+n}(\lambda+a_1)M_{nn},$

其中 $M_{nj}=\left|\begin{array}{cccc|cccc}\lambda&-1&&&&&&\\&\ddots&\ddots&&&&&\\&&\lambda&-1&&&&\\&&&\lambda&&&&\\\hline&&&&-1&&&\\&&&&\lambda&-1&&\\&&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&&&\lambda&-1\end{array}\right|_{(j-1)+(n-j)}=\lambda^{j-1}(-1)^{n-j},(-1)^{n+j}a_{n-j+1}M_{nj}=a_{n-j+1}\lambda^{j-1},j=1,2,\cdots,n.$

故 $D_n=a_n+a_{n-1}\lambda+\cdots+a_{n-j+1}\lambda^{j-1}+\cdots+(\lambda+a_1)\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n.$

解法五：数学归纳法，利用 $D_n=\lambda D_{n-1}+a_n$.

4(3) 很多同学利用列相减简化行列式，可简化到范德蒙行列式计算，见如下：

解：
$$\begin{vmatrix}1 & ax & a^2+x^2\\ 1 & ay & a^2+y^2\\ 1 & az & a^2+z^2\end{vmatrix} \overset{c_3-a^2c_1}{=} \begin{vmatrix}1 & ax & x^2\\ 1 & ay & y^2\\ 1 & az & z^2\end{vmatrix} \overset{\substack{c_2\div a\\ \text{转置}}}{=} a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix} \overset{\text{范德蒙}}{=} a(y-x)(z-x)(z-y)=a(x-y)(y-z)(z-x).$$

5(2) 很多同学利用所有列加到第一列提取第一个因式，后面计算复杂，可利用分块特点计算如下：

解：
$$\begin{vmatrix}x & a & b & c\\ a & x & c & b\\ b & c & x & a\\ c & b & a & x\end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+r_3\\ r_2+r_4}}{=} \begin{vmatrix}x+b & a+c & x+b & a+c\\ a+c & x+b & a+c & x+b\\ b & c & x & a\\ c & b & a & x\end{vmatrix} \overset{\substack{c_3-c_1\\ c_4-c_2}}{=} \begin{vmatrix}x+b & a+c & 0 & 0\\ a+c & x+b & 0 & 0\\ b & c & x-b & a-c\\ c & b & a-c & x-b\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}x+b & a+c\\ a+c & x+b\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-b & a-c\\ a-c & x-b\end{vmatrix}=((x+b)^2-(a+c)^2)((x-b)^2-(a-c)^2)=0,$$

故解为 $x+b=\pm(a+c), x-b=\pm(a-c)$ 即 $x=-b+a+c, x=-b-a-c, x=b+a-c, x=b-a+c$.

6(3) 计算不够简单，可如下：

解：
$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix} \overset{\substack{c_1-c_2\\ c_3-c_4}}{=} \begin{vmatrix}x & 1 & 0 & 1\\ x & 1-x & 0 & 1\\ 0 & 1 & y & 1\\ 0 & 1 & y & 1-y\end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1-x & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix} \overset{\substack{c_2-c_1\\ c_4-c_1-c_3}}{=} xy\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -y\end{vmatrix} = x^2y^2.$$

其余一些作业解题思路：

4(1) c_1-2c_2+c_3，c_1 展开；(2) $c_1+c_2+c_3, r_2-r_1, r_3-r_1$；(5) 参照补充例 1B

5(1) $c_1+c_2+c_3, r_2-r_1, r_3-r_1$；(3) 范德蒙展开，或参照补充例 1C

6(2) $c_1-xc_2-yc_3-zc_4$