

一、简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维列向量, 记三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$, 若 $|A| = -3$, 计算 $|B|$.

解: 由 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, 所以, $|B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (-3) \times 2 = -6$.

解法二: $|B| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_2 + 8\alpha_3| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_3| = 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = -6$.

2. 设三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 三维列向量 $\alpha = (\lambda, 1, 1)^T$, 若 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 求常数 λ .

解: $A\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda + 3 \\ 3\lambda + 4 \end{pmatrix}$, 由 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 得 $\frac{\lambda}{\lambda} = \frac{2\lambda + 3}{1} = \frac{3\lambda + 4}{1}$, 解得: $\lambda = -1$.

解法二: $(A\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 2\lambda + 3 & 1 \\ 3\lambda + 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 由 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 得 $\lambda + 1 = 0$, 即 $\lambda = -1$.

3. λ 取何值时, 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$ 是正定的.

解: 二次型 f 对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 二次型正定的充要条件是 A 的所有顺序主子式:

$$\Delta_1 = \det(1) = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5\lambda^2 - 4\lambda > 0,$$

解得: $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$.

解法二: 合同变换: $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & \lambda + 2 \\ 0 & \lambda + 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(5\lambda^2 + 4\lambda)/4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

A 正定, 则合同对角阵对角元均为正: $-(5\lambda^2 + 4\lambda)/4 > 0$, 解得: $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$.

4. 设 A 为二阶方阵, α_1, α_2 是线性无关的二维列向量, 且 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 求 A 的所有特征值.

解: 由 α_1, α_2 线性无关, 所以 $\alpha_1 \neq 0, 2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 由 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$, 则 $\lambda_1 = 0$ 是一个特征值;

又有 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 0 + A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 故 $\lambda_2 = 1$ 是另一个特征值, 则 A 的所有特征值为 $0, 1$.

解法二: 易知 $A(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2)B$, 由 α_1, α_2 线性无关,

得 $P = (\alpha_1, \alpha_2)$ 可逆, 于是 $P^{-1}AP = B$, 即 $A \sim B$, 故 A 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 有相同的特征值: $0, 1$.

二、(本题12分) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 & +\lambda x_2 & +\mu x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & =0 \\ 3x_1 & +(2+\lambda)x_2 & +(4+\mu)x_3 & +4x_4 & =1 \end{cases}$,

若 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解, 求: (1) 方程组的通解; (2) 方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

解: 将 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组, 得 $\lambda = \mu$.

已知 $\gamma = (1, -1, 1, -1)^T$ 是方程组的一个特解. 对齐次方程组 $Ax = 0$ 进行行初等变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda \neq 1/2$ 时, $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, $Ax = 0$ 的基础解系的秩为 1,

故可求得方程组的通解为: $\xi = (1, -1, 1, -1)^T + k(-1, 1/2, -1/2, 1)^T, k \in \mathbf{R}$;

当 $\lambda = 1/2$ 时, $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Ax = 0$ 的基础解系的秩为 2,

故可求得方程组的通解为: $\xi = (1, -1, 1, -1)^T + k_1(1, -3, 1, 0)^T + k_2(-1/2, -1, 0, 1)^T, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

(2) 若 $x_2 = x_3$, 当 $\lambda \neq 1/2$ 时, 由 $-1 + k/2 = 1 - k/2$, 解得 $k = 2$,

此时方程组的通解为: $\xi = (1, -1, 1, -1)^T + 2(-1, 1/2, -1/2, 1)^T = (-1, 0, 0, 1)^T$;

当 $\lambda = 1/2$ 时, 由 $-1 - 3k_1 - k_2 = 1 + k_1$, 解得 $k_2 = -2 - 4k_1$,

此时方程组的通解为: $\xi = (2, 1, 1, -3)^T + k(3, 1, 1, -4)^T$.

解法二: 将 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组, 得 $\lambda = \mu$.

对方程组 $Ax = b$ 的增广矩阵进行行初等变换:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 + \lambda & 4 + \lambda & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & 1 - \lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda - 1) & 2\lambda - 1 & 2\lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda \neq 1/2$ 时, $(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,

$r(A, b) = r(A) = 3 < 4, 4 - 3 = 1$, 故方程组由无穷多组解, 且其基础解系的秩为 1,

故可求得方程组的通解为: $\xi = (0, -1/2, 1/2, 0)^T + k(-2, 1, -1, 2)^T, k \in \mathbf{R}$;

当 $\lambda = 1/2$ 时, $(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$r(A, b) = r(A) = 2 < 4, 4 - 2 = 2$, 故方程组由无穷多组解, 且其基础解系的秩为 2,

故可求得方程组的通解为: $\xi = (-1/2, 1, 0, 0)^T + k_1(1, -3, 1, 0)^T + k_2(-1, -2, 0, 2)^T, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

(2) 若 $x_2 = x_3$, 当 $\lambda \neq 1/2$ 时, 由 $-1/2 + k = 1/2 - k$, 解得 $k = 1/2$,

此时方程组的通解为: $\xi = (0, -1/2, 1/2, 0)^T + 0.5(-2, 1, -1, 2)^T = (-1, 0, 0, 1)^T$;

当 $\lambda = 1/2$ 时, 由 $1 - 3k_1 - 2k_2 = k_1$, 解得 $k_1 = 1/4 - k_2/2$,

此时方程组的通解为: $\xi = (-1/4, 1/4, 1/4, 0)^T + k(-3/2, -1/2, -1/2, 2)^T$.

三. (本题12分) 确定常数 k , 使得向量组 $\alpha_1 = (1, 1, k)^T, \alpha_2 = (1, k, 1)^T, \alpha_3 = (k, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, k)^T, \beta_2 = (-2, k, 4)^T, \beta_3 = (-2, k, k)^T$ 线性表出, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

解: 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若 $r(A) = 3$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 就是一个极大无关组,

与题意不合, 故 $r(A) < 3$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ 或 } k = -2$.

当 $k = 1$ 时, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 即 $r(A) = 1$,

$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 即 $r(B) = 3$,

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

当 $k = -2$ 时, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, 即 $r(A) = 2$,

$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, 即 $r(B) = 2$, 此时, $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = -2\alpha_1$,

对于 $C = (\beta_1, \alpha_2, \beta_3)$, 由于 $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, 即 α_2 不能被 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出,

故符合题意的解是 $k = 1$.

解法二: 行列初等变换:

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & 1 & 1 & k & k \\ k & 1 & 1 & k & 4 & k \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 1-k & 0 & k+2 & k+2 \\ k & 1-k & 1-k^2 & 0 & 2k+4 & 3k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

秩为 3, 故 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 的极大无关组的向量个数为 3.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为极大无关组,

$$\text{于是 } |\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & k \\ k & 4 & k \end{vmatrix} = (k+2)(k-4) \neq 0.$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不是极大无关组, 线性相关,

$$\text{于是 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(k+2)(k-1)^2 = 0, \text{ 解得 } k = 1.$$

$$\text{解法三: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & k & 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & 1 & 1 & k & k \\ k & 1 & 1 & k & 4 & k \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & k & 1 & -2 & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 0 & 2k+4 & 3k \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & k & 1 & -2 & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & 0 & 3(1-k) & -(1-k)^2 \end{array} \right),$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能表示 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 故行梯形前 3 列有零行而后 3 列对应非零行, 即必须 $k = 1$ 或 $k = -2$.

$$\text{又有: } (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & k \\ 0 & k+2 & k+2 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & k-4 & 0 & 3(1-k) & -(1-k)^3 \end{array} \right),$$

因为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以表示 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 故行梯形不能出现前 3 列有零行而后 3 列对应非零行, 即必须 $k \neq 4$ 或 $k \neq -2$. 综合起来有 $k = 1$.

四. (本题 12 分) 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是解, 即 $A\beta \neq 0$,

证明: 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_n$ 线性无关.

证明: 设有一组数 k, k_1, k_2, \dots, k_n , 使得 $k\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \dots + k_n(\beta + \alpha_n) = 0$,

$$\text{即 } (k + \sum_{i=1}^n k_i)\beta = -\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i, \text{ 两边同乘矩阵 } A, \text{ 由 } A\alpha_i = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{得: } (k + \sum_{i=1}^n k_i)A\beta = -\sum_{i=1}^n k_iA\alpha_i = 0, \text{ 因 } A\beta \neq 0, \text{ 故 } k + \sum_{i=1}^n k_i = 0, \text{ 由于 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 是基础解系,}$$

故线性无关, 即 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, 则推得 $k = 0$, 所以向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_n$ 线性无关.

五. (本题 12 分) 设 A, C 为 n 阶正定矩阵, 若 B 是关于 Z 的矩阵方程 $AZ + ZA = C$ 的唯一解,

证明: B 是正定矩阵.

证明: 由题意, $AB + BA = C$, 因 A, C 为正定矩阵, 故对称, 则两边转置得,

$$C = C^T = (AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = B^T A + AB^T = AB^T + B^T A,$$

即 B^T 也是矩阵方程 $AZ + ZA = C$ 的解, 由题设(解的唯一性), 得 $B^T = B$, 故 B 是对称矩阵.

设 λ 是 B 的任一特征值, x 是属于 λ 的一个特征向量, 则:

$$x^T C x = x^T (AB + BA) x = x^T A B x + x^T B A x = x^T A \lambda x + (Bx)^T A x = \lambda x^T A x + \lambda x^T A x = 2\lambda x^T A x.$$

由于 A, C 都为正定矩阵, 故 $x^T C x > 0, x^T A x > 0$, 于是 $\lambda > 0$, 即 B 的任意特征值都大于 0, 所以 B 为正定矩阵.

六. (本题 12 分) 设线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

(1) 求 T 在基 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$ 下的矩阵;

(2) 若向量 $x = \alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3, y = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3$, 求 Tx, Ty 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

解: 设从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的过渡矩阵为 P , 由题意,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 可求得 } P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 设 T 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵为 B , 则

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

(2) 设 Tx, Ty 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标分别为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 因 x 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$\text{故 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 \\ -78 \\ -40 \end{pmatrix}, \text{ 由于 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{于是 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2)的解法二: (2) 设 Tx, Ty 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标分别为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$$\text{因 } x \text{ 在基 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 下的坐标为 } \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 故 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 \\ -78 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

$$\text{因 } y \text{ 在基 } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 下的坐标为 } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 故 } Ty \text{ 在基 } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 下的坐标为 } B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } Ty \text{ 在基 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 下的坐标为 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

七. (本题12分) 设 A 为三阶方阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量,

且 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$.

(1) 求矩阵 B , 使得 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$;

(2) 求矩阵 A 的特征值;

(3) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解: (1) 由题设,

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 即 } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

(2) 因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故矩阵 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 则 $C^{-1}AC = B$, 即 A 与 B 相似,

$$\text{于是它们有相同的特征值. } |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0.$$

解得: B (即 A) 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$;

(3) 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由 $(E - B)x = 0$ 解得基础解系为: $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T, \xi_2 = (-2, 0, 1)^T$,

当 $\lambda_3 = 4$ 时, 由 $(4E - B)x = 0$ 解得基础解系为: $\xi_3 = (0, 1, 1)^T$.

$$\text{令 } Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 由 } Q^{-1}BQ = Q^{-1}C^{-1}ACQ,$$

$$\text{记矩阵 } P = CQ = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3), P \text{ 即为所求的可逆矩阵.}$$