

南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2015.1.7 任课教师 考试成绩

一. (10分) 设 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}$, $|A|$ 中元素 a_{ij} 的余子式记为 M_{ij} , 计算 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$.

解: 将第四行改为 $(-1 \ 1 \ -1 \ 1)$, 计算新的行列式得 -45.

二. (10分) 设 A 是 n 阶矩阵, $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 n 维非零向量, 且 $A\alpha_i = \alpha_{i+1}, 1 \leq i < n, A\alpha_n = 0$, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

证明: 由 $A\alpha_i = \alpha_{i+1}, 1 \leq i < n, A\alpha_n = 0$, 可知 $A\alpha_1 = \alpha_2, A^2\alpha_1 = A\alpha_2 = \alpha_3, \dots, A^{n-1}\alpha_1 = \alpha_n, A^n\alpha_1 = 0, \dots$, 现考察 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$,

两边左乘 A^{n-1} , 得到: $A^{n-1}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n) = k_1A^{n-1}\alpha_1 = k_1\alpha_n = 0$, 由于 $\alpha_n \neq 0$, 于是 $k_1 = 0$, 将 $k_1 = 0$ 代入再左乘 A^{n-2} , 可以得到 $k_2 = 0$, 以此类推, 得 $k_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

三. (10分) 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 A 和 B 相似, 证明 A, B 有相同的特征值. 反之是否成立, 请说明理由.

证明: 因为相似, 所以存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$,

于是 $|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}||\lambda I - A||P| = |\lambda I - A|$,

即 A, B 有相同的特征方程, 故有相同的特征值.

反之不成立: 例如: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 它们都有相同的特征值 $0, 0, 0$, 但是秩不同, 显然不可能相似.

四. (10分) 设 A, B 都是 n 阶方阵, I 是 n 阶单位矩阵, 且 $A^2 = I, B^2 = I, |A| + |B| = 0$, 证明 $A + B$ 不可逆.

证明: $A^2 = I, B^2 = I \Rightarrow A = A^{-1}, B = B^{-1}, |A|^2 = 1, |A| + |B| = 0 \Rightarrow |A| = -|B|, |A + B| = |A(I + A^{-1}B)| = |A(B^{-1} + A^{-1})B| = |A||B| = -|A|^2|A + B| = -|A + B| \Rightarrow |A + B| = 0$, 所以 $A + B$ 不可逆.

五. (12分) 已知 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 秩分别为 $r(A) = n - s, r(B) = n - t$, 且 $s + t > n$, 证明方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解.

解: 由 $r(A) = n - s$ 可知 $Ax = 0$ 的基础解系有 s 个线性无关的解向量, 设为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 同理, $Bx = 0$ 的基础解系有 t 个线性无关的解向量, 设为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 因 $s + t > n$, 故 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关, 于是存在不全为零的参数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$ 使得 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_s\alpha_s + \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + \dots + \mu_t\beta_t = 0$ 则 $\xi = \sum \lambda_i\alpha_i = -\sum \mu_j\beta_j$ 就是两方程的非零公共解.

六. (12分) 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, A = \alpha\beta^T, B = \beta^T\alpha$, 试求解方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$.

解: 由条件可知: $A = \alpha\beta^T$ 是三阶矩阵, $B = \beta^T\alpha$ 是常数,

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ \frac{1}{2} \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, B = (1 \ \frac{1}{2} \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

又: $A^2 = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2A, A^4 = 8A$,

则原方程化为 $8(A - 2I)x = \gamma$, 用初等变换将其增广矩阵化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 导出组的基础解系为 } (1, 2, 1)^T, \text{ 原方程组有特解 } (\frac{1}{2}, 1, 0)^T,$$

故所求方程通解为 $x = C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 C 为常数。

七. (10分) 设 R^3 中的线性变换 T 把基 $\alpha = (1, 0, 1), \beta = (0, 1, 0), \gamma = (0, 0, 1)$ 变为基 $\alpha_1 = (1, 0, 2), \beta_1 = (-1, 2, -1), \gamma_1 = (1, 0, 0)$, 设 T 在基 α, β, γ 以及基 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 下的矩阵分别为 A, B , 求出 A 和 B .

解: $(T\alpha, T\beta, T\gamma) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (\alpha, \beta, \gamma)A$,

所以 $A = (\alpha^T, \beta^T, \gamma^T)^{-1}(\alpha_1^T, \beta_1^T, \gamma_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 并且基 α, β, γ 到基 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 上的过渡矩阵

$P = A$, 故 $B = P^{-1}AP = A^{-1}AA = A$.

八. (12分) 已知三阶方阵 A 和三维向量 ξ , 使得向量组 $\xi, A\xi, A^2\xi$ 线性无关, 且满足 $A^3\xi = 3A\xi - 2A^2\xi$, (1) 记 $P = [\xi, A\xi, A^2\xi]$, 求三阶方阵 B 使得 $A = PBP^{-1}$, (2) 计算行列式 $|A + I|$, 其中 I 是三阶单位矩阵.

解: (1) 由题意, P 可逆, 则 $P^{-1}P = P^{-1}[\xi, A\xi, A^2\xi] = [P^{-1}\xi, P^{-1}A\xi, P^{-1}A^2\xi] = I$ 即: $P^{-1}\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1}A\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1}A^2\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 从而 $P^{-1}A^3\xi = P^{-1}[3A\xi - 2A^2\xi] = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, 于是

$B = P^{-1}AP = P^{-1}A[\xi, A\xi, A^2\xi] = [P^{-1}A\xi, P^{-1}A^2\xi, P^{-1}A^3\xi] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; (2) 由 $A \sim B \Rightarrow$

$A + I \sim B + I$, 于是 $|A + I| = |B + I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$.

九. (14分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2. (1) 求 a 的值; (2) 求正交变换 $x = Py$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形; (3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

解: (1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 由于二次型的秩为2, 所以 A 的行列式 $|A| = 2[(1-a)^2 - (1+a)^2] = -8a = 0$, 于是 $a = 0$.

(2) $a = 0$ 时, A 的特征方程 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$, 解得特征值为

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_1 I - A)x = 0$, 解得属于特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, 1)^T$,

当 $\lambda_3 = 0$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_3 I - A)x = 0$, 解得属于特征值为 $\lambda_3 = 0$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3 = (-1, 1, 0)^T$,

由于 α_1, α_2 已经正交, 它们与 α_3 必然正交, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是正交向量组, 将其标准化得到: $\beta_1 =$

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, \beta_2 = (0, 0, 1)^T, \beta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$, 记 $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 令 $x = Py$,

此即为所求之正交变换, 二次型化为标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 2y_1^2 + 2y_2^2$.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 = 0$, 可得方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, 解之得

通解: $x = k(-1, 1, 0)^T, k \in R$.