什么是线性代数

线性代数 是研究有限维向量空间中向量运算、线性变换以及线性方程组求解的一门数学分支.

线性代数研究的对象：

- **向量**：如二维向量 (3 , 4.5) , (-1 , 0)　三维向量 (1,-2, 0.5) , (x , y , z)

  多维向量

  行向量 (1,0,0,0) , [0 1 0 0] ,　列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$

- **线性变换**：

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4, \\ y_2 = 5x_1 + 7x_2 + x_4, \\ y_3 = 3x_1 + x_3 + 3x_4, \\ y_4 = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4, \end{cases}$$

简写为 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 称为矩阵

- **线性方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -14, \end{cases}$$

也可简写为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 8 & -14 \end{pmatrix}$

向量也属于矩阵

线性代数应用

1、解线性方程组：

(1) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -14, \end{cases}$$ 解为：$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

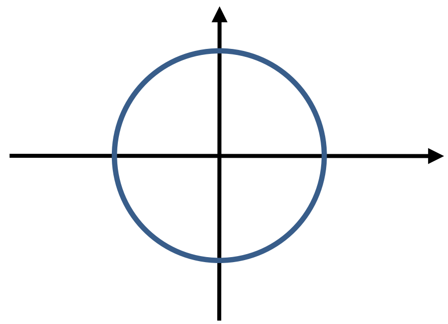
(2) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$ 解为：$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_4, \\ x_2 = 1 - x_4, \\ x_3 = 1 - x_4. \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 10, \end{cases}$$ 方程组无解.

(4) 求出线性方程组解的公式（用行列式）

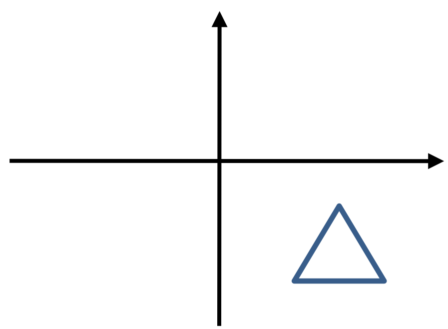
2、表示线性变换：

(1) 图形缩放



变换 $\begin{cases} x' = 1.5x, \\ y' = 0.5y, \end{cases}$ 矩阵表示为：$\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

(2) 图形旋转



变换 $\begin{cases} x' = x\cos 100^\circ - y\sin 100^\circ, \\ y' = x\sin 100^\circ + y\cos 100^\circ, \end{cases}$ 矩阵表示为：$\begin{pmatrix} \cos 100^\circ & -\sin 100^\circ \\ \sin 100^\circ & \cos 100^\circ \end{pmatrix}$

3、二次曲线分类：

确定二次曲线方程：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

是椭圆，还是双曲线，或者抛物线，或者是退化的直线和点？

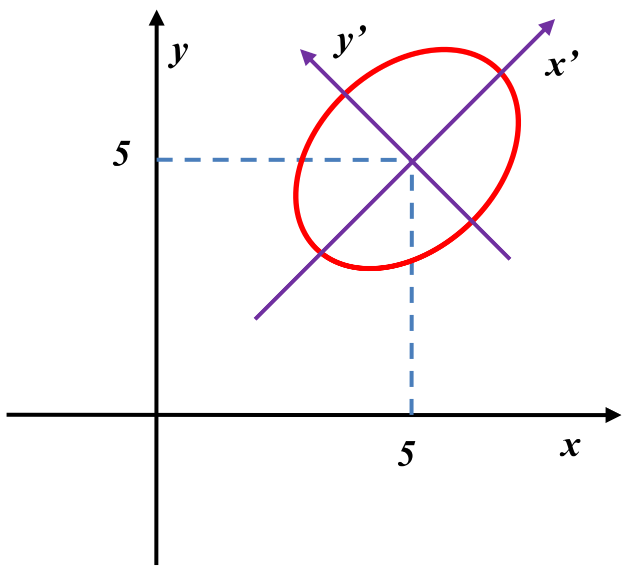
二次曲线方程： $41x^2-18xy+41y^2-320x-320y+800=0,$

经过坐标系变换：
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+5, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+5, \end{cases}$$

得到新坐标系下的椭圆方程：

$$\frac{(x')^2}{25}+\frac{(y')^2}{16}=1,$$

是半长轴为5，半短轴为4的椭圆.



4、推广了表示的范围：

斐波那契数列：

13世纪意大利数学家莱昂纳多.斐波那契在他的《算盘书》中提出这样一个问题：

有人想知道一年内一对小兔子可繁殖成多少对，便筑了一道围墙把一对小兔子关在里面。已知一对兔子每一个月可以生一对小兔子，而一对兔子出生后第三个月就开始生小兔子。假如一年内没有发生死亡，则一对兔子一年内能繁殖成多少对？

经过分析，可以得到每个月的兔子的对数：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144， …

可以用递推公式描述：$F_1=F_2=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $n \geqslant 3$.

显然，$F_n \neq qF_{n-1}$，即斐波那契数列不是等比数列.

第1个矩阵的i行与第2个矩阵j列对应相乘相加，得新矩阵(i,j)元素

利用矩阵表示有等比关系：

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} & F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix},$$

只不过比例是一个矩阵，进一步有：

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n .$$

线性代数主要内容简介

1、行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0.7 \end{vmatrix}$$

1×0.7-(-1)×2 =2.7

$$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix}$$

$(x+1)(x-1)-x^2=-1$

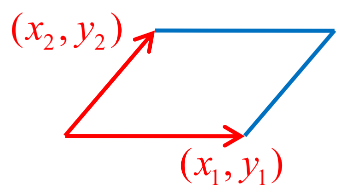
$$\begin{vmatrix} 3 & 1.5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1.5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1.5 \\ -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{matrix}$$

3×0×4+1.5×2×4
+2×(-1)×(-3)
-2×0×4 - 3×2×(-3)
-1.5×(-1)×4
=42

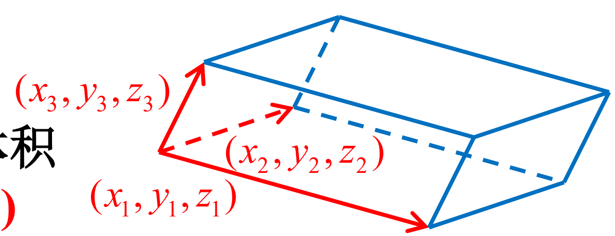
行列式的几何意义：

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 表示平行四边形面积



逆时针面积为正

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 表示平行六面体体积 **(3个向量的混合积)**



右手向体积为正

*行列式最主要的意义是作为线性方程组解的表达式

线性方程组解的表达式：

一元方程：**3*x*=5**　解为：$x=\frac{5}{3}$

二元方程组：$\begin{cases} 3x_1-5x_2=-1, \\ 2x_1-x_2=4. \end{cases}$

解为：$$(x_1,x_2)=\left(\frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}\right)=\left(\frac{21}{7},\frac{14}{7}\right)$$

三元方程组：$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-5, \\ 3x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 4x_1+3x_2+8x_3=-14. \end{cases}$

解为：$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -14 & 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -14 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}}\right)=\left(\frac{3}{3},\frac{6}{3},\frac{-9}{3}\right)$$

2、矩阵运算

(1) 矩阵加减

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 矩阵数乘

$$2 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) 矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times3+2\times1 & 1\times1+2\times(-1) \\ 2\times3+1\times1 & 2\times1+1\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

再看斐波那契数列表达式 $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$

3、解线性方程组

解如下方程组: **矩阵表示**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 = -1, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

(2)+(1)×2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ 7x_1 \qquad = 7, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

(2) ÷ 7:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ x_1 \qquad = 1, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1) ↔ (2):

$$\begin{cases} x_1 \qquad = 1, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 4, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

(2) - (1)×2:

$$\begin{cases} x_1 = 1, & (1) \\ x_2 = 2, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

解:$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$, 故 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$

4、特征值问题

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}5/4 & 3/4\\ 3/4 & 5/4\end{pmatrix}$，求$\lambda$和 $\xi=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，满足

$$\begin{pmatrix}5/4 & 3/4\\ 3/4 & 5/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{cases}\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y=\lambda x,\\ \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y=\lambda y.\end{cases}$$
(含参数λ的方程组)

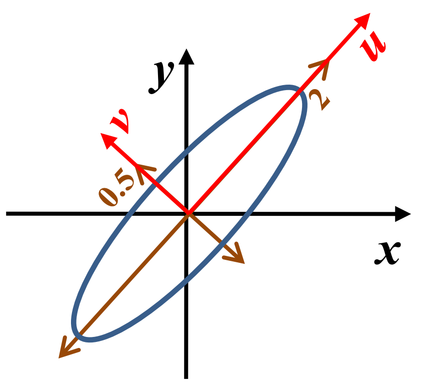
可以求得两组解：

$\boldsymbol{\lambda=2\,,\,x=k\,,\,y=k}$; $\boldsymbol{\lambda=0.5\,,\,x=k\,,\,y=-k}$ **(其中k为参数)**

几何意义

用 $A=\begin{pmatrix}5/4 & 3/4\\ 3/4 & 5/4\end{pmatrix}$ 表示图形几何变换 $\begin{cases}x'=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y,\\ y'=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y.\end{cases}$

则效果为 u,v方向上的拉伸.



其中方向 $u=\begin{pmatrix}k\\ k\end{pmatrix}$，伸长2倍；方向$v=\begin{pmatrix}k\\ -k\end{pmatrix}$，压缩到0.5倍.

5、二次型简化

二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

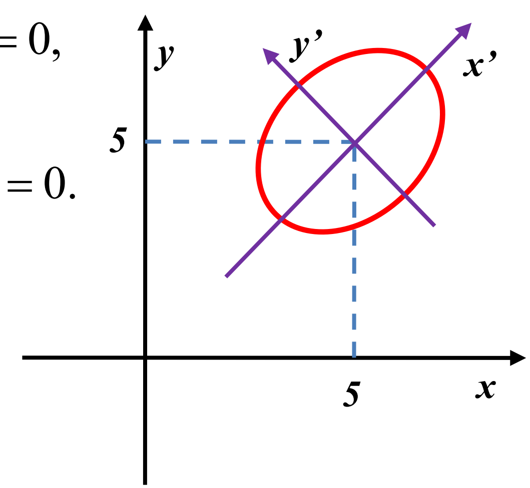
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_3^2 + a_{33}x_3^2.$$

求 $\begin{cases} x_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + p_{13}y_3, \\ x_2 = p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + p_{23}y_3, \\ x_3 = p_{31}y_1 + p_{32}y_2 + p_{33}y_3. \end{cases}$ **将$f(x_1, x_2, x_3)$简化成 $g(y_1, y_2, y_3)=b_{11}y_1^2+b_{22}y_2^2+b_{33}y_3^2$.**

几何意义

二次曲线方程：$41x^2 - 18xy + 41y^2 - 320x - 320y + 800 = 0,$

或 $(x, y, 1)\begin{pmatrix} 41 & -9 & -160 \\ -9 & 41 & -160 \\ -160 & -160 & 800 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$



经过坐标系变换：$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + 5, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + 5, \end{cases}$

可以简化成 $16x'^2+25y'^2-400=0$，即椭圆方程： $\dfrac{(x')^2}{25} + \dfrac{(y')^2}{16} = 1$.