# 南京大学大学数学试卷

考试时间____2014.1.2____ 任课教师__________ 考试成绩__________

## 一. (24分) 填空题

1. 已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&5\\0&0&6\end{pmatrix}$ 则 $A$ 的伴随矩阵 $A^*=$____________

2. 函数 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&0&2\\3&x&1&1\\2&1&x&0\\5&4&2&x\end{vmatrix}$ 中 $x^3$ 的系数是____________

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为二阶单位矩阵，矩阵 $B$ 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$____________

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1&2\\2&a+1&2a&3a+1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$ 且存在3阶非零方阵 $B$，使$BA=0$，则$a=$____________

5. 三阶方阵 $A,B$ 满足 $I+B=AB$，其中 $I$ 是单位矩阵，$A$ 有特征值 3,-3,0，则 $B$ 的特征值为________

6. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ 是合同矩阵，即存在可逆矩阵 $C$，使得 $C^TAC=B$，

其中 $C=$____________

## 二. (24分) 选择题

1. 已知 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则下列向量组也是 $Ax=0$ 的基础解系是（　　）
A. $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$　　B. $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$
C. $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 的一个等价的向量组　　D. $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 的一个等秩的向量组

2. 设有3阶非零实的方阵 $A=(a_{ij})$，$|A|$ 的每个元素 $a_{ij}$ 都等于它自己的代数余子式，则 $A$ 的秩为（　　）
A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均是 $n$ 维$(n\geq 2)$ 向量，则（　　）
A. $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2$ 线性无关，必有 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 线性无关；
B. $\alpha_1,\alpha_2$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2$ 线性相关，必有 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 线性相关；
C. $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2$ 线性相关，必有 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 线性无关；
D. $\alpha_1,\alpha_2$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2$ 线性无关，必有 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 可能线性无关，也可能线性相关。

4. 已知 $A$ 是四阶矩阵，秩 $r(3I-A)=2$，其中 $I$ 是单位矩阵，则 $\lambda=3$ 是 $A$ 的（　　）
A. 一重特征值　　B. 二重特征值　　C. 至少是二重特征值 D. 至多是二重特征值

5. 设 $A$ 为 $m\times s$ 矩阵，$B$ 为 $s\times n$ 矩阵，$r(M)$ 表示矩阵 $M$ 的秩，则 $ABx=0$ 和 $Bx=0$ 是同解方程组的一个充分条件是　（　　）
A. $r(B)=s$　　B. $r(B)=n$　　C. $r(A)=s$　　D. $r(A)=m$

6. 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶实对称可逆矩阵，则（　　）
A. 存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$　　B. 存在可逆矩阵$P,Q$，使得$PAQ=B$
C. 存在可逆矩阵$P$，使得$P^TAP=B$　　B. $AB-BA$ 有可能等于单位矩阵

三. (10分) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b \end{cases}$，问 $a,b$ 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解时求出通解。

四. (10分) 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵，证明：(1) 若对任意的 $n$ 维向量 $\xi$，有 $\xi^T A\xi=0$，则 $A$ 是反对称矩阵，即 $A=-A^T$；(2) 若 $A$ 是奇数阶反对称矩阵，求出其行列式 $|A|$ 的值。

五. (12) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2ax_2x_3\ (a>0)$ 通过正交变换 $x=Uy$ 可化为标准形 $2y_1^2+by_2^2+2y_3^2$. (1) 求参数 $a,b$ 及正交变换 $U$；(2) 二次型是否正定（给出一个理由）。

六. (10分) 设有实系数线性方程组：$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots,n$，其中 $|a_{ii}|>|a_{i1}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|, i=1,2,\cdots,n$，证明此方程组有唯一解。

七. (10分) 设线性变换 $A$ 在自然基 $e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, e_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ (1) 求 $A$ 在基 $\alpha_1=2e_1+3e_2+e_3, \alpha_2=3e_1+4e_2+e_3, \alpha_3=e_1+2e_2+2e_3$ 下的矩阵 $B$ (2) 设向量 $x=e1+6e_2-e_3$，求 $Ax$ 在基 $e_1,e_2,e_3$ 下的坐标。