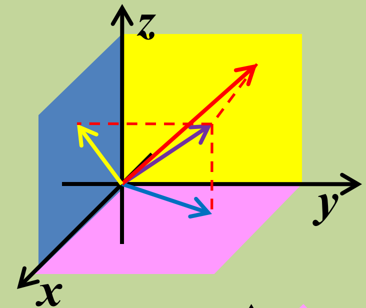
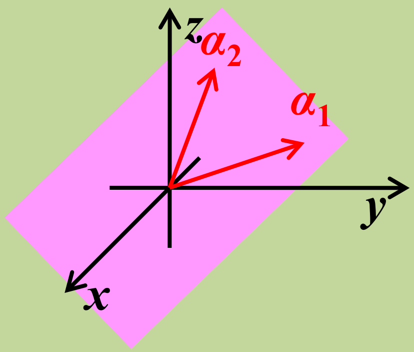
6.3 线性空间的子空间

6.3.1 子空间

三维空间中有时需要考虑坐标平面：*xy*-平面，*yz*-平面，*xz*-平面，然后考虑空间中向量在这些平面的投影 .
这些*xy*-平面，*yz*-平面，*xz*-平面就是子空间 .



三维空间还可以考虑过原点的其它平面，如两个无关向量 α_1, α_2 构成的平面，这也是子空间 .



若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是空间 V 的一组基， 由部分向量 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}$ 构成的空间 $\{ k_1\alpha_{i1}+k_2\alpha_{i2}+\dots+k_r\alpha_{ir} \mid k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbf{R} \}$ 就称为空间 V 的子空间 .

定义6.3.1 (子空间) 设 W 是数域 K 上的线性空间 V 的一个非空子集，若 W 关于 V 上的加法和数乘也构成数域 K 上的一个线性空间，则称 W 是 V 的一个线性子空间，简称子空间，记为 $W \subseteq V$，若 $W \neq V$，记为 $W \subset V$.

子空间的判定

定理6.3.1 线性空间V的一个非空子集W是V的子空间的充要条件是
(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in W$，有$\alpha + \beta \in W$，即对加法封闭；
(2) 对任意的$\alpha \in W$, $\lambda \in K$，有 $\lambda\alpha \in W$，即对数乘封闭 .

说明："<=" $0=0\alpha \in W$, $-\alpha=(-1)\alpha \in W$，其它加法和数乘的性质自然满足

定理6.3.2 线性空间V的一个非空子集W是V的子空间的充要条件是
对任意的 $\alpha, \beta \in W$, $\lambda, \mu \in K$，有$\lambda\alpha+\mu\beta \in W$.

说明："=>" $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \lambda\alpha, \mu\beta \in W \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta \in W$
"<=" 取λ,μ为1,1得$1\alpha+1\beta=\alpha+\beta \in W$，取$\lambda,\mu$为$\lambda,0$得$\lambda\alpha+0\alpha=\lambda\alpha \in W$

每个线性空间V都有两个子空间：零子空间$\{0\}$和自身V，称为平凡子空间，其余子空间称为非平凡子空间(或真子空间) .

定义6.3.2 设V是数域K上的线性空间，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in V$，由这组向量所有可能的线性组合构成的集合

$$W(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)=\{ \alpha \mid \alpha=\sum k_i \alpha_i,\ k_i \in K, i=1,2,\dots,s \}$$

是非空集合，且构成V的子空间，称为由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$生成的子空间，记作 $\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 或 $L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$
特别地，零子空间是由零向量生成的子空间 $\mathrm{span}\{0\}$.

齐次方程组 $Ax=\theta$, $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$ 的解集是R^n的一个子空间，称为解空间 .

6.3.2 子空间的交与和

定义6.3.3 (子空间的交与和) 设W_1与W_2是数域K上线性空间V的两个子空间，定义W_1与W_2的交为

$$W_1 \cap W_2 = \{ \alpha \mid \alpha \in W_1, \alpha \in W_2 \},$$

W_1与W_2的和为

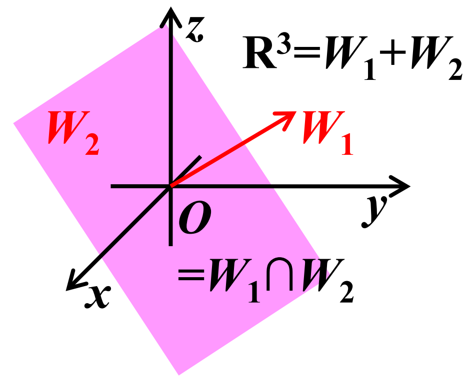
$$W_1 + W_2 = \{ \gamma \mid \gamma = \alpha + \beta，对所有\alpha \in W_1，\beta \in W_2 \}.$$

定理6.3.3 数域K上线性空间V的两个子空间W_1与W_2的交与和仍是V的子空间.

说明：$\alpha, \beta \in W_1, W_2 \Rightarrow \lambda\alpha + \mu\beta \in W_1, W_2$；

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2 \Rightarrow \lambda\alpha + \mu\beta = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2) \in W_1 + W_2$

例6.3.1 R^3中子空间W_1直线，W_2垂直平面，则 $W_1\cap W_2=\{0\}$, $W_1+W_2=\mathrm{R}^3$.



子空间的交与和满足交换律和结合律：子空间$W_1, W_2, W_3\subseteq V$

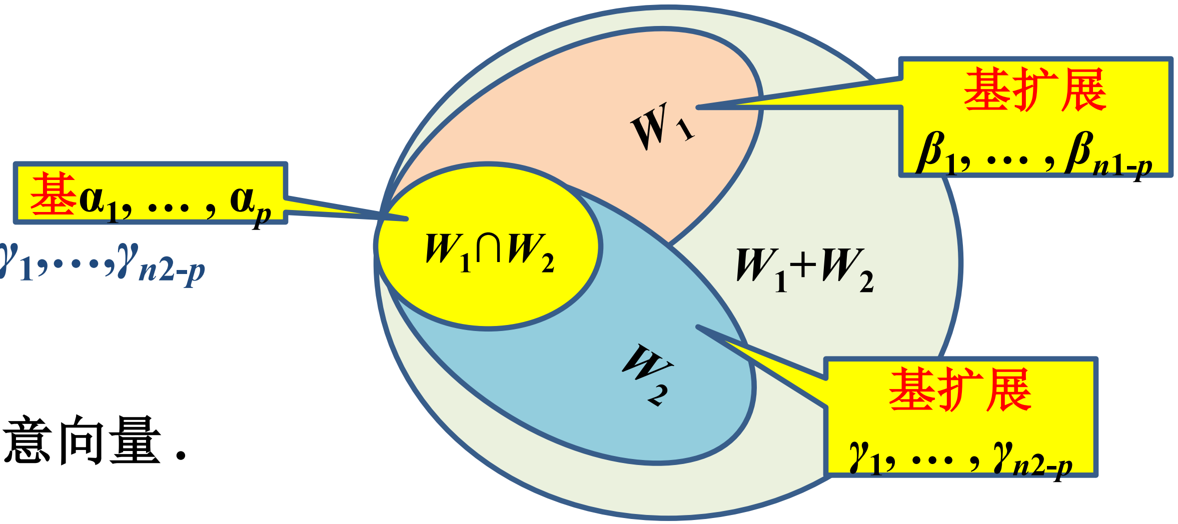
$$W_1+W_2=W_2+W_1\ ,$$
$$(W_1+W_2)+W_3=W_1+(W_2+W_3)\ ,$$
$$W_1\cap W_2=W_2\cap W_1\ ,$$
$$(W_1\cap W_2)\cap W_3=W_1\cap(W_2\cap W_3)\ .$$

多个子空间的交与和：子空间$W_1, W_2, \dots, W_m\subseteq V$

$$W_1\cap W_2\cap\dots\cap W_m=(W_1\cap W_2\cap\dots\cap W_{m-1})\cap W_m\ ,$$
$$W_1+W_2+\dots+W_m=(W_1+W_2+\dots+W_{m-1})+W_m\ .$$

定理6.3.4 若W_1, W_2是线性空间V的两个有限维子空间，则

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2).$$



证明思路：

证A: $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, $\beta_1,\dots,\beta_{n1-p}$, $\gamma_1,\dots,\gamma_{n2-p}$ 是W_1+W_2的一组基.

显然A可表示W_1+W_2的任意向量.

下面证A无关性：

$k_1\alpha_1+\dots+k_p\alpha_p+s_1\beta_1+\dots+s_{n1-p}\beta_{n1-p}+t_1\gamma_1+\dots+t_{n2-p}\gamma_{n2-p}=\theta$

即 $\xi=k_1\alpha_1+\dots+k_p\alpha_p+s_1\beta_1+\dots+s_{n1-p}\beta_{n1-p}\in W_1$

$=-t_1\gamma_1-\dots-t_{n2-p}\gamma_{n2-p}\in W_2$

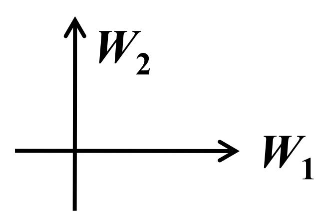
$=c_1\alpha_1+\dots+c_p\alpha_p\in W_1\cap W_2$

故 $c_1\alpha_1+\dots+c_p\alpha_p+t_1\gamma_1+\dots+t_{n2-p}\gamma_{n2-p}=\theta$，$W_2$的基向量无关

得到 $c_1=\dots=c_p=t_1=\dots=t_{n2-p}=0$，进一步：$k_1\alpha_1+\dots+k_p\alpha_p+s_1\beta_1+\dots+s_{n1-p}\beta_{n1-p}=\theta$

得到 $k_1=\dots=k_p=s_1=\dots=s_{n1-p}=0$

注意：$W_1\cup W_2$通常不是子空间(W_1,W_2包含除外)



定义6.3.4 (直和) 若W_1+W_2中任一向量只能唯一地表示为子空间W_1的一个向量与子空间W_2的一个向量的和，则称W_1+W_2是直和(或直接和)，记为$W_1 \oplus W_2$或$W_1 \dot{+} W_2$．若$W=W_1 \oplus W_2$，则称在W内W_1是W_2的补空间，或W_2是W_1的补空间．

定理6.3.5 W_1+W_2是直和的充要条件是 $W_1 \cap W_2=\{0\}$．

证明思路：若$W_1 \cap W_2=\{0\}$，$\gamma=\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$，$\xi=\alpha_1-\alpha_2=\beta_2-\beta_1 \in W_1 \cap W_2=\{0\}$

若W_1+W_2是直和, $\alpha \in W_1 \cap W_2$,则 $-\alpha \in W_1 \cap W_2$, $\alpha+(-\alpha)=0=0+0$, $\alpha=0$

推论6.3.6 W_1+W_2是直和的充要条件是 $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$．

证明：W_1+W_2是直和$\Leftrightarrow W_1 \cap W_2=\{0\} \Leftrightarrow \dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$

W_1+W_2是直和表示子空间W_1和W_2没有非零重叠部分.

定义6.3.5 设$W_1, W_2, \ldots, W_m$是线性空间V的子空间，若

(1) $W_1+W_2+\ldots+W_m=V$；

(2) $W_1 \cap W_2=\{0\}$, $(W_1+W_2) \cap W_3=\{0\}$, …, $(W_1+W_2+\ldots+W_{m-1}) \cap W_m=\{0\}$,

则称V是$W_1, W_2, \ldots, W_m$的直和，记作

$$V=W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_m.$$

例6.3.2 设F^n是数域F上的n维列向量空间，A是F上的n阶方阵，令

$$V_1=\{ Ax : 任给x\in F^n \}, \quad V_2=\{ x : Ax=0 , x\in F^n \},$$

试证: (1) V_1,V_2是F^n的子空间; (2) 若A是幂等矩阵, 即$A^2=A$, 则$F^n=V_1\oplus V_2$.

证明 (1) 易见V_1,V_2都是F^n的非空子集，对任意$k,l\in F$和任意$x, y\in F^n$, 因

$$kAx+lAy=A(kx+ly)\in V_1 ,$$

故V_1是F^n的子空间;

任给$\xi, \eta\in V_2$，有$A\xi=0$, $A\eta=0$，且对任意$k,l\in F$，有

$$A(k\xi+l\eta)=kA\xi+lA\eta=0 ,$$

故$k\xi+l\eta\in V_2$，即V_2是F^n的子空间.

(2) 当A是幂等矩阵时，将F^n中任一向量表示成：$x=Ax+(x-Ax)$，注意到$Ax\in V_1$，以及因$A(x-Ax)=Ax-A^2x=0$，得$x-Ax\in V_2$，所以$F^n\subseteq V_1+V_2$，从而$F^n=V_1+V_2$.

设ξ是$V_1\cap V_2$中的任一向量，因$\xi\in V_1$，所以存在$\eta\in F^n$使得$\xi=A\eta$. 又因$\xi\in V_2$，所以$A\xi=0$，于是$\xi=A\eta=A^2\eta=A(A\eta)=A\xi=0$，即$V_1\cap V_2=\{0\}$，所以$F^n=V_1\oplus V_2$.

补充例6C 设有4个三维向量

$\alpha_1=(-2,-3,-4)^T$, $\alpha_2=(4,6,8)^T$, $\beta_1=(2,4,4)^T$, $\beta_2=(7,4,15)^T$. 考虑以下两个子空间

$$S_1=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2\},\quad S_2=\text{span}\{\beta_1,\beta_2\}.$$

求子空间的交$S_1\cap S_2$与和S_1+S_2 .

解：求交：$S_1\cap S_2$中取$\xi=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2=t_3\beta_1+t_4\beta_2$, 移项得 $t_1\alpha_1+t_2\alpha_2-t_3\beta_1-t_4\beta_2=0$.

即方程组 $$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & 4 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_3 \\ -t_4 \end{pmatrix}=\theta.$$

求解方程组 $$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & 4 & 15 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ ，解得 $$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_3 \\ -t_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

即 $S_1\cap S_2=\{t_3\beta_1+t_4\beta_2\}=\{\theta\}$.

求和：$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$中找极大无关组，即为 和 S_1+S_2的基 . 由前面解方程组时的 初等行变换后的行简化梯形矩阵知，$\{\alpha_1,\beta_1,\beta_2\}$为和$S_1+S_2$的一个基.

补充例6D 已知$P_3[x]$中

$p_1(x)=3x^3-11x^2+x$, $p_2(x)=2x^3-4x^2+x+1$,

$p_3(x)=7x^3+x^2+5x+8$, $p_4(x)=x^3-x^2-x-1$,

$W_1=\mathrm{span}\{p_1(x),p_2(x),p_3(x)\}, W_2=\mathrm{span}\{p_4(x)\}, W=W_1+W_2$.

(1) $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$是否线性无关;

(2) 求 W 的基; (3) W_1+W_2是否是直和?

解：多项式 $p_1(x)= 3x^3-11x^2+x$, $p_2(x)= 2x^3-4x^2+x+1$, $p_3(x)= 7x^3+x^2+5x+8$, $p_4(x)=x^3-x^2-x-1$ 在基 x^3 , x^2 , x , 1下的坐标为

$\beta_1=(3,-11,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\beta_2=(2,-4,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\beta_3=(7,1,5,8)^{\mathrm{T}}$, $\beta_4=(1,-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1)
$$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{pmatrix}3&2&7&1\\-11&-4&1&-1\\1&1&5&-1\\0&1&8&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&8&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (*)$$

因为 $\mathrm{r}(B)=3<4$，则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 相关，故$p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$相关.

(2) 易知$W=\mathrm{span}\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$， W的基对应$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$的一个极大无关组，由上述(*)式可知$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$有一个极大无关 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$，故$W$的一组基为： $p_1(x), p_2(x), p_4(x)$.

(3) 求空间$W_1\cap W_2$，即求 $\xi=t_1p_1(x)+t_2p_2(x)+t_3p_3(x)=t_4p_4(x)$，对应地要求 $t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3=t_4\beta_4$，即解方程组$t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3-t_4\beta_4=0$，
由 (*)式解得 $(t_1, t_2, t_3,- t_4)=k(3,-8,1,0)$,故 $W_1\cap W_2=\{t_4p_4(x)\}=\{0\}$,故是直和.