3、利用算法求逆矩阵—用初等变换

求逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$

利用逆矩阵公式计算：$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}=\dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{vmatrix}.$

可以计算得到：**|*A*|=1,** $A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1,$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,$

$A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$

故有：$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$

可以有更加简单的方法计算逆矩阵，
即用初等变换方法来求逆矩阵.

通过解方程组求逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$ 对应的变换为：$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\y_2=x_1+2x_2+x_3,\\y_3=x_1+x_2+2x_3.\end{cases}$$

解方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=y_1, & (1)\\x_1+2x_2+x_3=y_2, & (2)\\x_1+x_2+2x_3=y_3. & (3)\end{cases}$$

对应矩阵：$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

(2)-(1),(3)-(1)：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=y_1\quad, & (1)\\x_2=y_2-y_1, & (2)\\x_3=y_3-y_1. & (3)\end{cases}$$

r_2-r_1,r_3-r_1： 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

(1)-(2)-(3)：

$$\begin{cases}x_1=3y_1-y_2-y_3, & (1)\\x_2=y_2-y_1\quad, & (2)\\x_3=y_3-y_1\quad. & (3)\end{cases}$$

$r_1-r_2-r_3$： 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

即同步解一系列的方程组：

$Ax_i=e_i, i=1,2,3$

或 $A(x_1,x_2,x_3)=(e_1,e_2,e_3)$

$A^{-1}=(x_1,x_2,x_3)$

求得逆变换：$$\begin{cases}x_1=3y_1-y_2-y_3,\\x_2=y_2-y_1,\\x_3=y_3-y_1.\end{cases}$$

对应逆矩阵：$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

解方程组的同解变换对应于矩阵的初等行变换：

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

求得矩阵A的逆矩阵：$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

进一步解矩阵方程：$AX=B$，其中A可逆，则 $X=A^{-1}B$.

(1) 通过上述求A的逆矩阵A^{-1}，再计算解 $X=A^{-1}B$.

(2) 通过解方程组：$Ax=By$，可求得 $x=A^{-1}By$，得到矩阵$X=A^{-1}B$.

解矩阵方程：*AX*=*B*，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$

***AX*=*B* 的解为：*X*=*A*$^{-1}$*B* .**

考虑关系式：*Ax*=*By*，则有 *x* =*A*$^{-1}$*By* =*Xy* .

***Ax*=*By* 即** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=y_1+y_2\quad , & (1)\\ x_1+2x_2+x_3=\quad y_2+y_3, & (2)\\ x_1+x_2+2x_3=y_1\quad +y_3. & (3)\end{cases}$ **对应矩阵** $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&0\\1&2&1&0&1&1\\1&1&2&1&0&1\end{array}\right)$ **即(*A*,*B*)**

解方程组 $\Downarrow$ 　　　　　　　　行变换 $\Downarrow$

$\begin{cases} x_1\quad\quad =2y_1+2y_2-2y_3, & (1)\\ \quad x_2\quad =-y_1\quad +y_3, & (2)\\ \quad\quad x_3=\quad -y_2+y_3. & (3)\end{cases}$ **对应矩阵** $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&2&-2\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$

初等行变换解矩阵方程*AX*=*B*：

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&0\\1&2&1&0&1&1\\1&1&2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&2&-2\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

得解 $X=\begin{pmatrix}2&2&-2\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

初等变换法解矩阵方程

解矩阵方程：$AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}10&1\\5&-1\end{pmatrix}.$

初等行变换

$$(A,B)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&4&10&1\\2&3&5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&5&2\\2&3&5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&5&2\\0&1&-5&-5\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&10&7\\0&1&-5&-5\end{array}\right).$$

得到$AX=B$的解：$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10&7\\-5&-5\end{pmatrix}.$

*解矩阵方程 $XA=B$ 不同于解矩阵方程$AX=B$，不能直接用行变换.

解矩阵方程：$XA=B$，矩阵A，B同上

可以转置再用行变换求解：$A^TX^T=B^T$，得$X^T=(A^T)^{-1}B^T=(BA^{-1})^T$

$$(A^T,B^T)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&2&10&5\\4&3&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-1&-1&9&6\\4&3&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[(-1)r_1,\ (-1)r_2]{r_2+4r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&-9&-6\\0&1&-37&-23\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&28&17\\0&1&-37&-23\end{array}\right).$$

得到$XA=B$的解：$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}28&17\\-37&-23\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}28&-37\\17&-23\end{pmatrix}.$

上列求解对应于初等列变换：

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc}3&4\\2&3\\\hline 10&1\\5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1-c_2}\left(\begin{array}{cc}-1&4\\-1&3\\\hline 9&1\\6&-1\end{array}\right)\xrightarrow[-c_1,\ -c_2]{c_2+4c_4}\left(\begin{array}{cc}1&0\\1&1\\\hline -9&-37\\-6&-23\end{array}\right)\xrightarrow{c_1-c_2}\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline 28&-37\\17&-23\end{array}\right).$$

得到$XA=B$的解：$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}28&-37\\17&-23\end{pmatrix}.$

初等变换法求逆矩阵的原理

A可逆，考虑初等行变换化为单位阵E

$$A \xrightarrow{P_1} A_1 \xrightarrow{P_2} A_2 \xrightarrow{P_3} \cdots \xrightarrow{P_k} A_k = E, \qquad P_i\text{为初等矩阵,}$$

变换等价于左乘初等矩阵 $\quad P_k \cdots P_2 P_1 A = E.$

由此可知： $\quad P_k \cdots P_2 P_1 = A^{-1}.$

同样的变换作用于 (A,E) $\quad (A,E) \xrightarrow{P_1} (A_1, S_1) \xrightarrow{P_2} = \cdots \xrightarrow{P_k} (A_k, S_k) = (E, S_k).$

等价于 $\quad P_k \cdots P_2 P_1 (A,E) = (P_k \cdots P_2 P_1 A, P_k \cdots P_2 P_1) = (E, A^{-1}) = (E, S_k).$

一系列初等行变换也等价于左乘可逆矩阵

$(A,E) \xrightarrow{r} (E,P)$ 等价于 $P(A,E) = (PA, P) = (E, A^{-1})$， $\because PA = E$

$$\boxed{(A,E) \xrightarrow{r} (E, A^{-1})} = A^{-1}(A,E)$$

同样道理，初等列变换化A为单位阵E也可得A^{-1}

$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} E \\ Q \end{pmatrix}$ 等价于 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} AQ \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$， $\because AQ = E$

$$\boxed{\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} A^{-1}$$

推广到解矩阵方程：

$$(A,E)\xrightarrow{r}(E,A^{-1})$$ 推广到解方程 ***AX*=*B***：

$$(A,B)\xrightarrow{r}(E,A^{-1}B) \quad \text{即} \quad A^{-1}(A,B)=(E,A^{-1}B)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$ 推广到解方程 ***XA*=*B***：

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

进一步推广到***A***行变换成行简化梯形矩阵***B***：矩阵***P***使得***PA*=*B***.

$$(A,E)\xrightarrow{r}(B,P) \quad \text{即} \quad P(A,E)=(PA,P)=(B,P)$$

例2.6.10 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$

解 $$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1+r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3]{r_2/(-2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right).\qquad \text{所以 } A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

例2.6.11 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，且满足 $AX=A+2X$，求矩阵X.

解 将方程变形为：$(A-2E)X=A$，进一步用初等行变换

$$(A-2E,A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2+r_3\\-r_2}]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right).$$

于是 $$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$