A、B 班 10-25,27 作业分析

10-25 作业：习题四：4,6,7,8,9,10,11,12

4 有些同学知道特征向量并不相同，但在给出反例时特征向量计算错. 可如下：

解：因为有 $|\lambda E-A^{\mathrm{T}}|=|(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}|=|\lambda E-A|$，则 A 与 A^{T} 有相同的特征多项式，故有相同的特征值.

对应的特征向量不一定相同，反例：

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq 0\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

6 有些同学用了式子 $\begin{vmatrix}\lambda_0E&-A\\-A^{\mathrm{T}}&\lambda_0E\end{vmatrix}=\left|\lambda_0E\lambda_0E-A^{\mathrm{T}}A\right|=\left|\lambda_0{}^2E-A^{\mathrm{T}}A\right|$，这样做没有根据，行列式计算除了块三角行列式可以降阶计算，其余不能用分块计算，该式子需要证明.

另外还有一些同学证明到了 $A^{\mathrm{T}}A\beta=\lambda_0{}^2\beta$，没有说明 $\beta\neq\theta$，当 $\beta=\theta$ 时 $\lambda_0{}^2$ 不一定是特征值，故要证明 $\beta\neq\theta$. 可如下：

证：设 $\begin{pmatrix}O&A\\A^{\mathrm{T}}&O\end{pmatrix}$ 属于 λ_0 的特征向量为 $\xi=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$，则，即 $\begin{cases}A\beta=\lambda_0\alpha\\A^{\mathrm{T}}\alpha=\lambda_0\beta\end{cases}$，于是有 $A^{\mathrm{T}}A\beta=A^{\mathrm{T}}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0(A^{\mathrm{T}}\alpha)=\lambda_0{}^2\beta$，而且 $\beta\neq\theta$.

因为若 $\beta=\theta$，则有 $\lambda_0\alpha=A\beta=\theta$，而 $\lambda_0\neq0$，故得 $\alpha=\theta$，于是 $\xi=\theta$，与 ξ 是特征向量矛盾，

故 $\beta\neq\theta$ 为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征向量，$\lambda_0{}^2$ 为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值.

证法二：因为 $B=\begin{pmatrix}O&A\\A^{\mathrm{T}}&O\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_0\neq0$，故由 $\begin{pmatrix}\lambda_0E&-A\\-A^{\mathrm{T}}&\lambda_0E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0{}^{-1}E&A\\O&\lambda_0E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\-\lambda_0{}^{-1}A^{\mathrm{T}}&\lambda_0{}^2E-A^{\mathrm{T}}A\end{pmatrix}$，

两边取行列式得 $\lambda_0{}^{n-m}\left|\lambda_0E-B\right|=\begin{vmatrix}\lambda_0E&-A\\-A^{\mathrm{T}}&\lambda_0E\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_0{}^{-1}E&A\\O&\lambda_0E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E&O\\-\lambda_0{}^{-1}A^{\mathrm{T}}&\lambda_0{}^2E-A^{\mathrm{T}}A\end{vmatrix}=\left|\lambda_0{}^2E-A^{\mathrm{T}}A\right|$，

即 $|\lambda_0{}^2E-A^{\mathrm{T}}A|=\lambda_0{}^{n-m}|\lambda_0E-B|=0$，故 $\lambda_0{}^2$ 为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值.

8 该题有 3 种解法，见如下：

解：因为 3 阶矩阵 A 有特征值-1,-2,-3，且是全部特征值，故 $\mathrm{tr}(A)=-4+a+(-2)=-1-2-3=-6$，$|A|=5a-17b+28=(-1)(-2)(-3)$，解得：$a=0,b=2$.

解法二：$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda+4&-2&1\\-1&\lambda-a&4\\3&-b&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3+(6-a)\lambda^2+(3+4b-6a)\lambda+(17b-5a-28)$，代入-1,-2,-3 得 0，

可得 $-26+13b=0,-18+3a+9b=0,-10+4a+5b=0$，从而 $a=0,b=2$.

解法三：因为 A 有特征值-1,-2,-3，故 $|-E-A|=\begin{vmatrix}3&-2&1\\-1&-1-a&4\\3&-b&1\end{vmatrix}=0,|-2E-A|=\begin{vmatrix}2&-2&1\\-1&-2-a&4\\3&-b&0\end{vmatrix}=0,|-3E-A|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-1&-3-a&4\\3&-b&-1\end{vmatrix}=0,$

即 $13b-26=0,3a+9b-18=0,4a+5b-10=0$，解得：$a=0,b=2$.

9 有些同学由 $f(A)=A^{-1}+A$ 得特征向量 $f(\lambda)=\lambda^{-1}+\lambda$，没有理论根据，此式只在 $f(x)$是多项式时才成立. 另外有些同学直接由 A 特征值 1,2,-3，得 A^{-1} 特征值 1,1/2,-1/3，从而 $A^{-1}+A$ 特征值为 2,5/2,-10/3，不够严谨，可如下：

解：$A\xi=\lambda_i\xi_i,\lambda_i=1,2,-3$，则 $A^{-1}\xi_i=\lambda_i^{-1}\xi_i$，故有 $(A^{-1}+A)\xi_i=(\lambda_i^{-1}+\lambda_i)\xi_i$，于是 $A^{-1}+A$ 特征值为：2,5/2,-10/3 .

解法二：3 阶矩阵 A 有特征值 1,2,-3，没有重特征值，故可对角化，即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,-3)$，

于是 $P^{-1}A^{-1}P=(P^{-1}AP)^{-1}=(\mathrm{diag}(1,2,-3))^{-1}=\mathrm{diag}(1,1/2,-1/3)$，

故 $P^{-1}(A^{-1}+A)P=P^{-1}A^{-1}P+P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,1/2,-1/3)+\mathrm{diag}(1,2,-3)=\mathrm{diag}(2,5/2,-10/3)$，

故 $A^{-1}+A$ 特征值为：2,5/2,-10/3 .

11 有些同学将 A 设成未知元素构成的矩阵，再利用特征值特征向量的关系求出未知元素，有些麻烦，可如下：

解：$A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1,3\xi_2,-3\xi_3)$，故 $A=(2\xi_1,3\xi_2,-3\xi_3)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{-1}=\begin{pmatrix}2&6&-3\\2&0&6\\4&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-2\\2&1&-3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&-25&16\\10&32&-20\\14&40&-25\end{pmatrix}$.

解法二：$AP=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix},P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-2\\2&1&-3\end{pmatrix}$，故 $A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-5&-25&16\\10&32&-20\\14&40&-25\end{pmatrix}$.

12 有些同学证明了 AB 的特征值 λ 也是 BA 的特征值，这样有可能 AB 特征值 1,1,2，而 BA 为 1,2,2.

另外也有同学将 B 当成可逆矩阵证明 $B^{-1}(BA)B=AB$ 得 $AB\sim BA$ 有相同的特征值，但 B 可能不可逆. 可如下证：

证：易知：$\begin{pmatrix}E&-A\\0&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AB&O\\B&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&O\\B&BA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-A\\0&E\end{pmatrix}$,即 $\begin{pmatrix}E&-A\\0&E\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}O&O\\B&BA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-A\\0&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB&O\\B&O\end{pmatrix}$.

故$\left|\lambda E-\begin{pmatrix}AB & O\\ B & O\end{pmatrix}\right|=\left|\lambda E-\begin{pmatrix}O & O\\ B & BA\end{pmatrix}\right|$，从而有 $\lambda^n|\lambda E-AB|=\lambda^n|\lambda E-BA|$，即 $\lambda^n(|\lambda E-AB|-|\lambda E-BA|)=0$，

故$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$，即 AB 和 BA 有相同的特征值.

证法二：先证 n 阶矩阵 $A=\mathrm{diag}(E_r,O)$时，AB 和 BA 有相同的特征值.

将 B 与 $A=\mathrm{diag}(E_r,O)$同型分块，则 $A=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$，于是有 $AB=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ O & O\end{pmatrix},BA=\begin{pmatrix}B_{11} & O\\ B_{21} & O\end{pmatrix}$，

故有$|\lambda E-AB|=\begin{vmatrix}\lambda E_r-B_{11} & -B_{12}\\ O & \lambda E_{n-r}\end{vmatrix}=\lambda^{n-r}|\lambda E_r-B_{11}|=\begin{vmatrix}\lambda E_r-B_{11} & O\\ -B_{21} & \lambda E_{n-r}\end{vmatrix}=|\lambda E-BA|$，即 AB 和 BA 有相同的特征值.

现在考虑一般的矩阵 A，则有分解 $A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$，其中 P、Q 可逆.

易知 $AB=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}QB\sim P^{-1}(P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}QB)P=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}QBP, BA\sim QBP\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$，相似矩阵有相同的特征值，

而由前面证明可知$\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}(QBP),(QBP)\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$有相同的特征值，故 AB 和 BA 有相同的特征值.

其余一些作业：

7　直接验证：$A\xi=\lambda_1\xi$，$B\xi=\lambda_2\xi$，则 $(A+B)\xi=A\xi+B\xi=(\lambda_1+\lambda_2)\xi$，$AB\xi=A(\lambda_2\xi)=\lambda_2A\xi=\lambda_1\lambda_2\xi$ ，$\xi\neq\theta$.

10 $(B-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\xi_i=(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)(\lambda_i-\lambda_3)\xi_i=\theta$，则 $B\xi_i=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\xi_i$，故 $B(k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3(k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3)$.

10-27 作业：习题四：13,14,15,16,17,18

* 个别同学仍然将矩阵行列式混淆，如矩阵$\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -5 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$写成$\begin{vmatrix}-2 & 2 & -1\\ -5 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$，务必不要混淆.

13 有些同学直接从 $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda_3\xi_1+\lambda_3\xi_2$ 或$(\lambda_1-\lambda_3)\xi_1+(\lambda_2-\lambda_3)\xi_2=\theta$ 得出 $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_2$,缺过程,需说明 ξ_1,ξ_2 线性无关,可如下：

证：设 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$, $A\xi_2=\lambda_2\xi_2$，$A(\xi_1+\xi_2)=\lambda_3(\xi_1+\xi_2)$，又 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$，故有$(\lambda_1-\lambda_3)\xi_1+(\lambda_2-\lambda_3)\xi_2=\theta$.

假设 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 ξ_1、ξ_2 线性无关，故有 $\lambda_1-\lambda_3=\lambda_2-\lambda_3=0$，即 $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_2$，矛盾．故有 $\lambda_1=\lambda_2$.

14、15、16 有同学特征向量计算错误，计算时务必小心.

14(3)(4) 有同学只判断了矩阵 A 可对角化，没有进行对角化的操作，应该算出无关特征向量构成相似变换矩阵 P，并写出 $P^{-1}AP$ 得到的对角矩阵 D.

也有同学变换阵的列与对角阵的对角元(特征向量与对应特征值)没有匹配，有错，应该要对应起来.

15 有同学计算结果矩阵时算错，有同学干脆不算出最终的矩阵，要写出结果矩阵.

17 该题有 2 种证明方法，见如下：

证：由 $A^2-3A+2E=O$ 可得$(E-A)(2E-A)=(2E-A)(E-A)=O$. 由$(E-A)(2E-A)=O$ 可知 $2E-A$ 的列是$(E-A)x=\theta$ 的解，故至少有 $\mathrm{r}(2E-A)$个 A 特征值 1 的无关特征向量. 同理至少有 $\mathrm{r}(E-A)$个 A 特征值 2 的无关特征向量，

因为 $\mathrm{r}(2E-A)+\mathrm{r}(E-A)=\mathrm{r}(2E-A)+\mathrm{r}(A-E)\geq\mathrm{r}((2E-A)+(A-E))=\mathrm{r}(E)=n$，故至少有 n 个无关特征向量，故 A 可对角化.

证法二：由 $A^2-3A+2E=O$ 可得$(E-A)(2E-A)=O$. 故 $0=\mathrm{r}(O)=\mathrm{r}((E-A)(2E-A))\geq\mathrm{r}(E-A)+\mathrm{r}(2E-A)-n$，从而有 $(n-\mathrm{r}(E-A))+(n-\mathrm{r}(2E-A))\geq n$,即 $n-\mathrm{r}(E-A)$个 A 特征值 1 的无关特征向量加上 $n-\mathrm{r}(2E-A)$个 A 特征值 2 的无关特征向量，有至少 n 个 A 的无关特征向量，故 A 可对角化.

其余一些作业：

14 计算特征值，再计算特征向量，若无关特征向量个数<特征值重数则不可对角化，否则无关特征向量构成相似变换矩阵 P，对角矩阵为次序与 P 中各特征向量一致对应的特征值.

15 将 A 对角化得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,-1,2)$，再求 A 的 n 次幂 $P\mathrm{diag}(1,(-1)^n,2^n)P^{-1}$

16 利用 $A\sim B$，$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$, $|A|=|B|$，求出 $a=-2,b=-6$. 再计算 A 的特征值(也是 B 的特征值) $\lambda=-2,2,4$.

对于 $\lambda=-2,2,4$，A 对应特征向量 $\alpha_1=(0,0,1)^T$, $\alpha_2=(1/2,-1/2,1)^T$, $\alpha_3=(-1,-1,1)^T$，B 对应特征向量 $\beta_1=(0,1,1)^T$, $\beta_2=(0,3,1)^T$, $\beta_3=(1,0,0)^T$. $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $P=P_1P_2^{-1}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，其中 $\gamma_1=(-1,-1,1)^T$, $\gamma_2=(1/4,-1/4,0)^T$, $\gamma_3=(-1/4,1/4,1)^T$.

*该题有多解，所有 $P_1DP_2^{-1}$ 的矩阵都是满足条件的相似变换矩阵，其中 D 为可逆对角矩阵.

18 考虑允许 0 重特征值，则 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(0E-A)=r_1$，故 A 特征值 0 对应的无关特征向量有 $n-r_1$ 个,同理-1 对应有 $n-r_2$ 个，-2 对应有 $n-r_3$ 个，共有$(n-r_1)+(n-r_2)+(n-r_3)=3n-(r_1+r_2+r_3)=n$ 个无关特征向量，可对角化.