计算机组织结构

5 整数运算

任桐炜

2021年9月28日

南京大学
NANJING UNIVERSITY

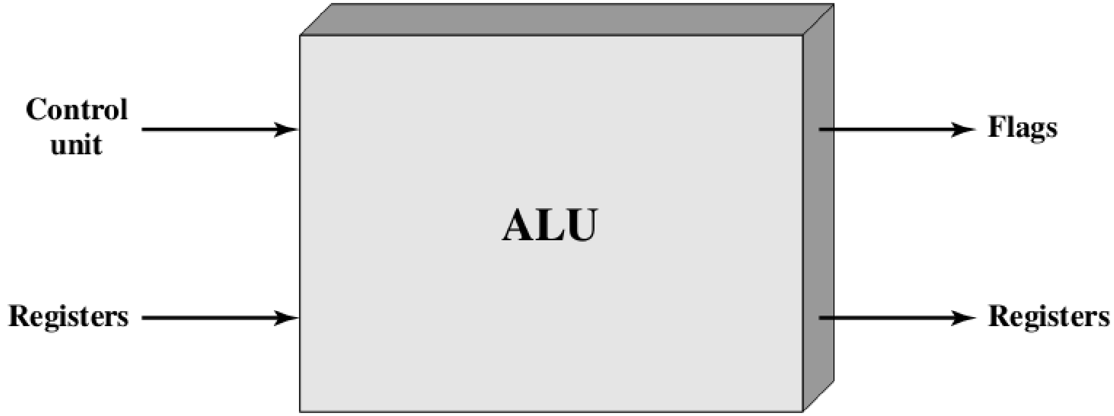
教材对应章节

第3章 运算方法和运算部件

第9章 计算机算术

算术逻辑单元 (ALU)

- 算术逻辑单元 (ALU) 是计算机实际完成数据算术逻辑运算的部件
  - 数据由寄存器 (Registers) 提交给ALU，运算结果也存于寄存器
  - ALU可能根据运算结果设置一些标志 (Flags)，标志值也保存在处理器内的寄存器中
  - 控制器 (Control unit) 提供控制ALU操作和数据传入送出ALU的信号

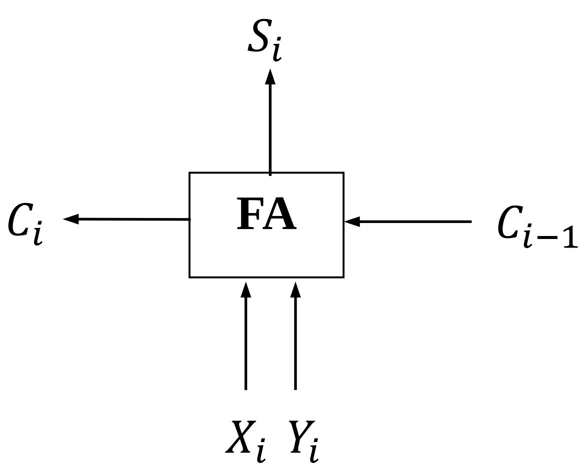


全加器

- 1位（1bit）加法：$X_i + Y_i$
- 第 i 位加法：

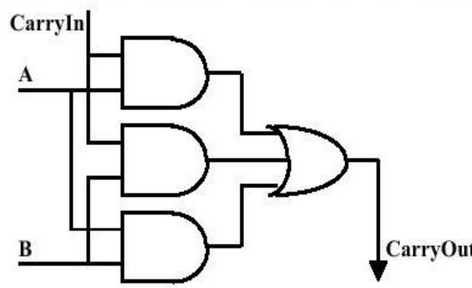
$$S_i = X_i \oplus Y_i \oplus C_{i-1}$$

$$C_i = X_i C_{i-1} + Y_i C_{i-1} + X_i Y_i$$



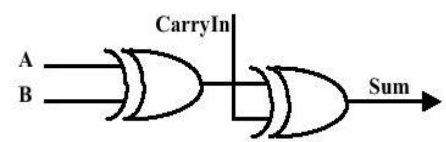
与门延迟: **1级门延迟 (1ty)**
或门延迟: **1级门延迟 (1ty)**
异或门延迟: **3级门延迟 (3ty)**

CarryOut = B & CarryIn | A & CarryIn | A & B



2ty

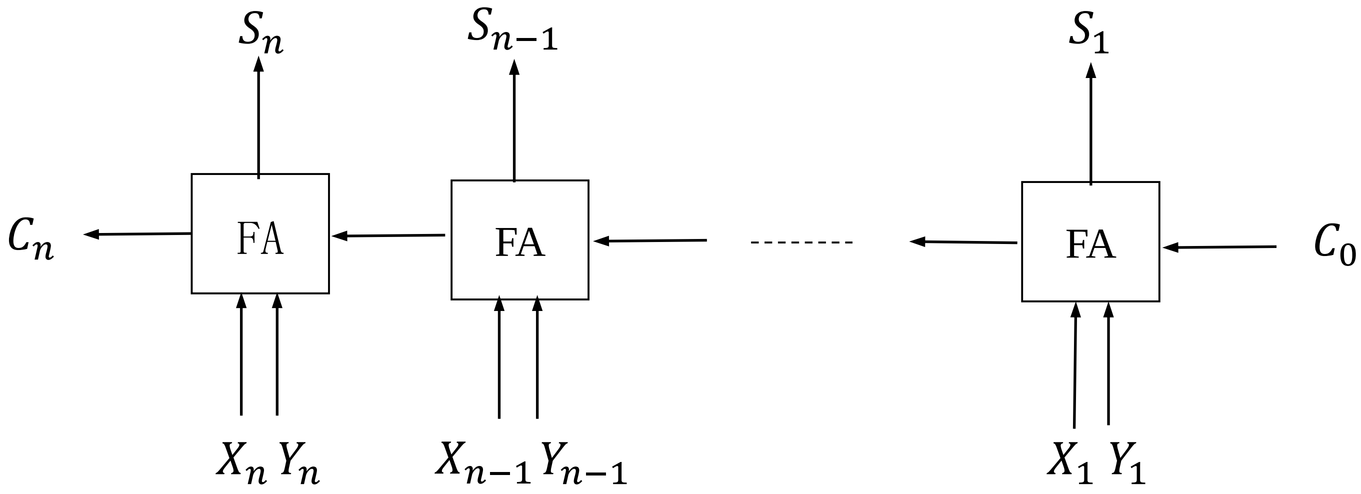
Sum = A XOR B XOR CarryIn



6ty

串行进位加法器

- 延迟
  - *Cn*: 2n ty
  - *Sn*: (2n+1) ty
- 缺点：慢



全先行进位加法器

- 超前进位

$$C_i = X_i C_{i-1} + Y_i C_{i-1} + X_i Y_i$$

$$C_1 = X_1 Y_1 + (X_1 + Y_1) C_0$$

$$C_2 = X_2 Y_2 + (X_2 + Y_2) X_1 Y_1 + (X_2 + Y_2)(X_1 + Y_1) C_0$$

$$\begin{aligned} C_3 = {} & X_3 Y_3 + (X_3 + Y_3) X_2 Y_2 + (X_3 + Y_3)(X_2 + Y_2) X_1 Y_1 \\ & + (X_3 + Y_3)(X_2 + Y_2)(X_1 + Y_1) C_0 \end{aligned}$$

$$C_4 = \ldots\ldots$$

定义两个辅助函数： $P_i = X_i + Y_i \qquad G_i = X_i Y_i$

$$C_1 = G_1 + P_1 C_0$$

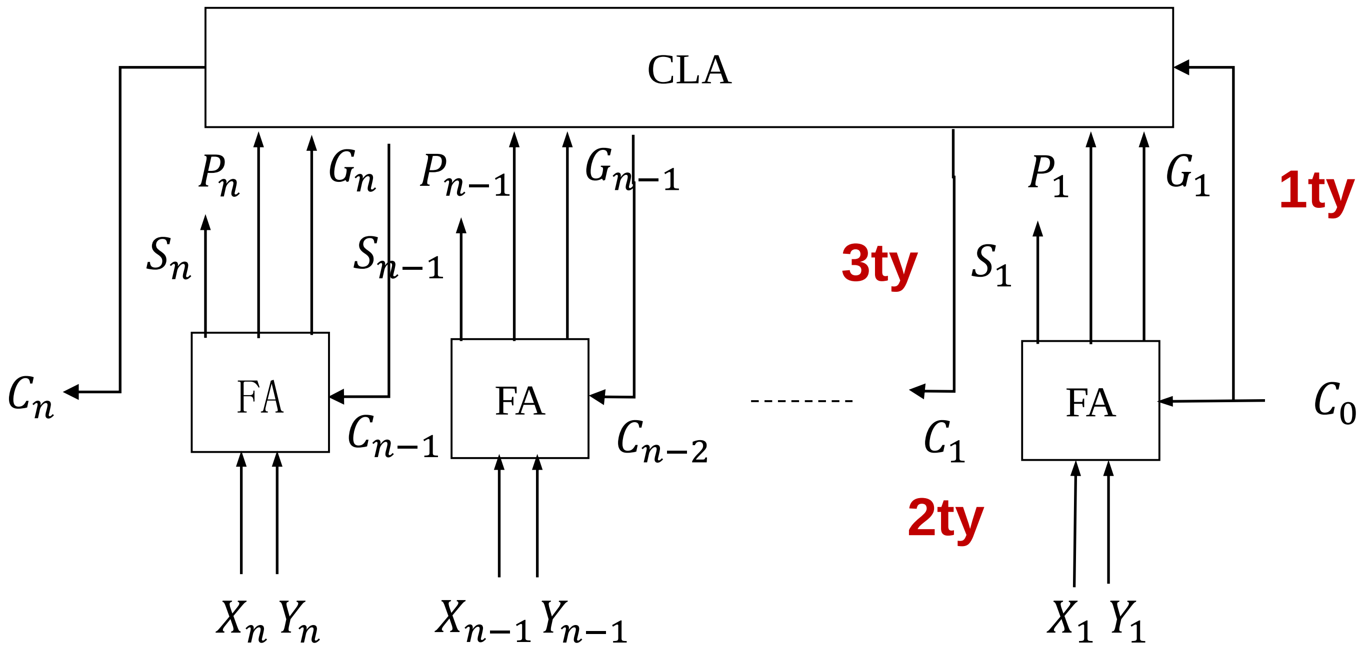
$$C_2 = G_2 + P_2 G_1 + P_2 P_1 C_0$$

$$C_3 = G_3 + P_3 G_2 + P_3 P_2 G_1 + P_3 P_2 P_1 C_0$$

$$C_4 = \ldots\ldots$$

全先行进位加法器 (续)

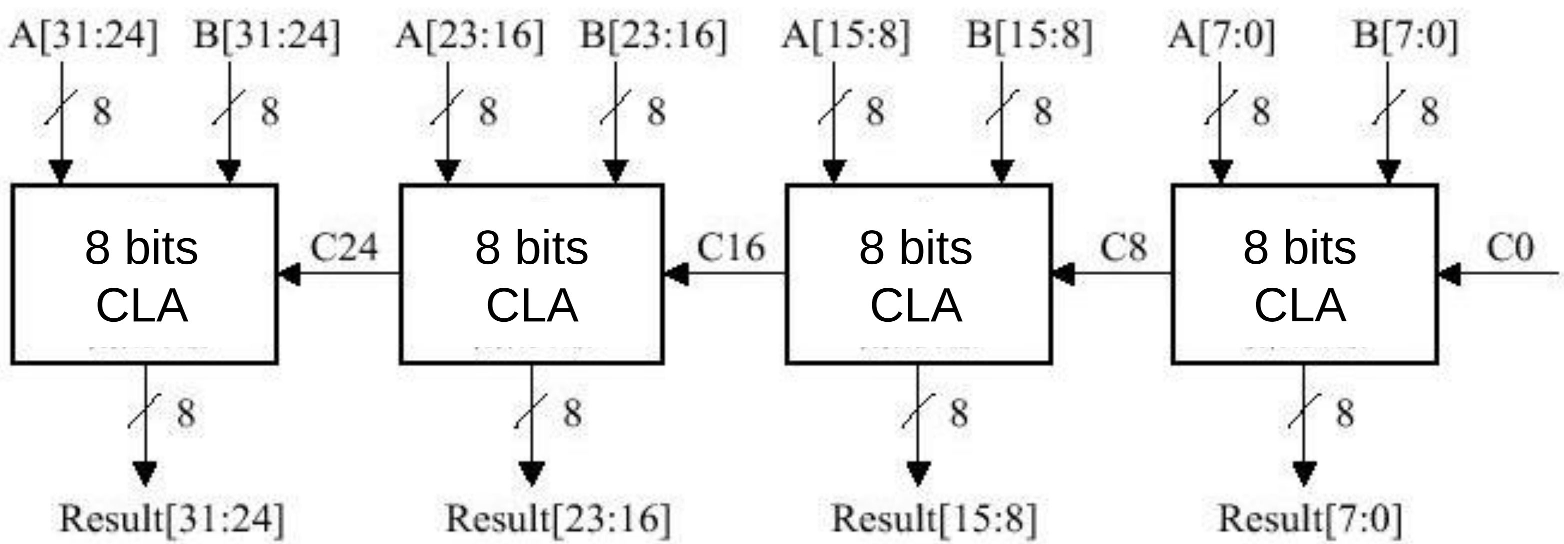
- 缺点：复杂



延迟：1ty + 2ty + 3ty = 6ty

部分先行进位加法器

- 思路
  - 采用多个CLA并将其串联，取得计算时间和硬件复杂度之间的权衡
- 例子



延迟： **3ty + 2ty + 2ty + 5ty = 12ty**

加法

- [X+Y]c = [X]c + [Y]c（MOD 2^n）
- 溢出:

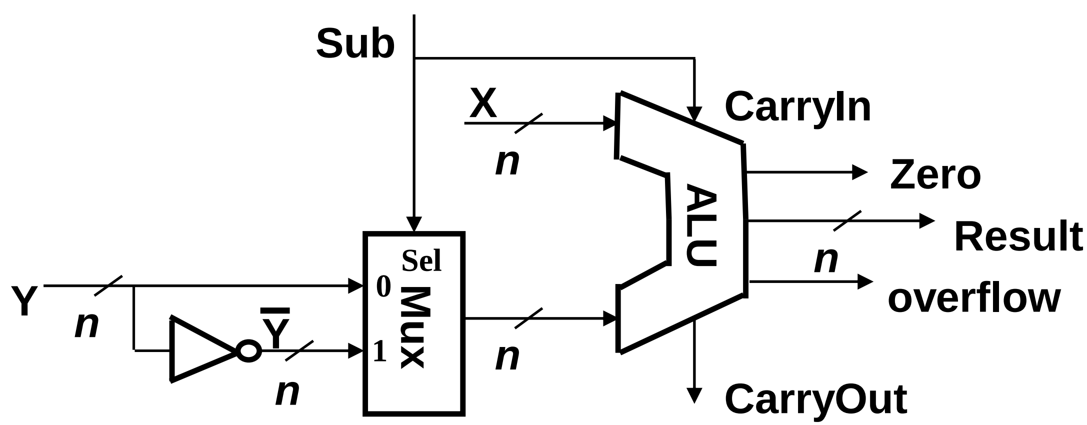
-7	1001		7	0111	
+ -6	+ 1010		+ 6	+ 0110	
-13	10011	3	13	1101	-3

- $X_n = Y_n$且$S_n \neq X_n, Y_n$: $overflow = X_n Y_n \overline{S_n} + \overline{X_n}\ \overline{Y_n} S_n$
- $C_n \neq C_{n-1}$: $overflow = C_n \oplus C_{n-1}$

减法

- $[X–Y]_c = [X]_c + [–Y]_c$ （$MOD\ 2^n$）
- 溢出：与加法相同

-7	1001	
- 6	+ 1010	
-13	10011	3



乘法

- 手工演算乘法
  - 若 $Y_i = 0$，部分积为 0；否则，部分积为 X
  - 每一步的部分积相比之前左移一位
  - 对所有部分积求和

```
    7
×   6
-----
   42
```

```
      0111
×     0110
----------
      0000
     0111
    0111
   0000
----------
   0101010
```

- 计算机乘法的改进
  - 每一步都计算部分积求和结果
  - 右移部分积代替左移部分积
  - 若 $Y_i = 0$，只执行移位操作

乘法 (续)

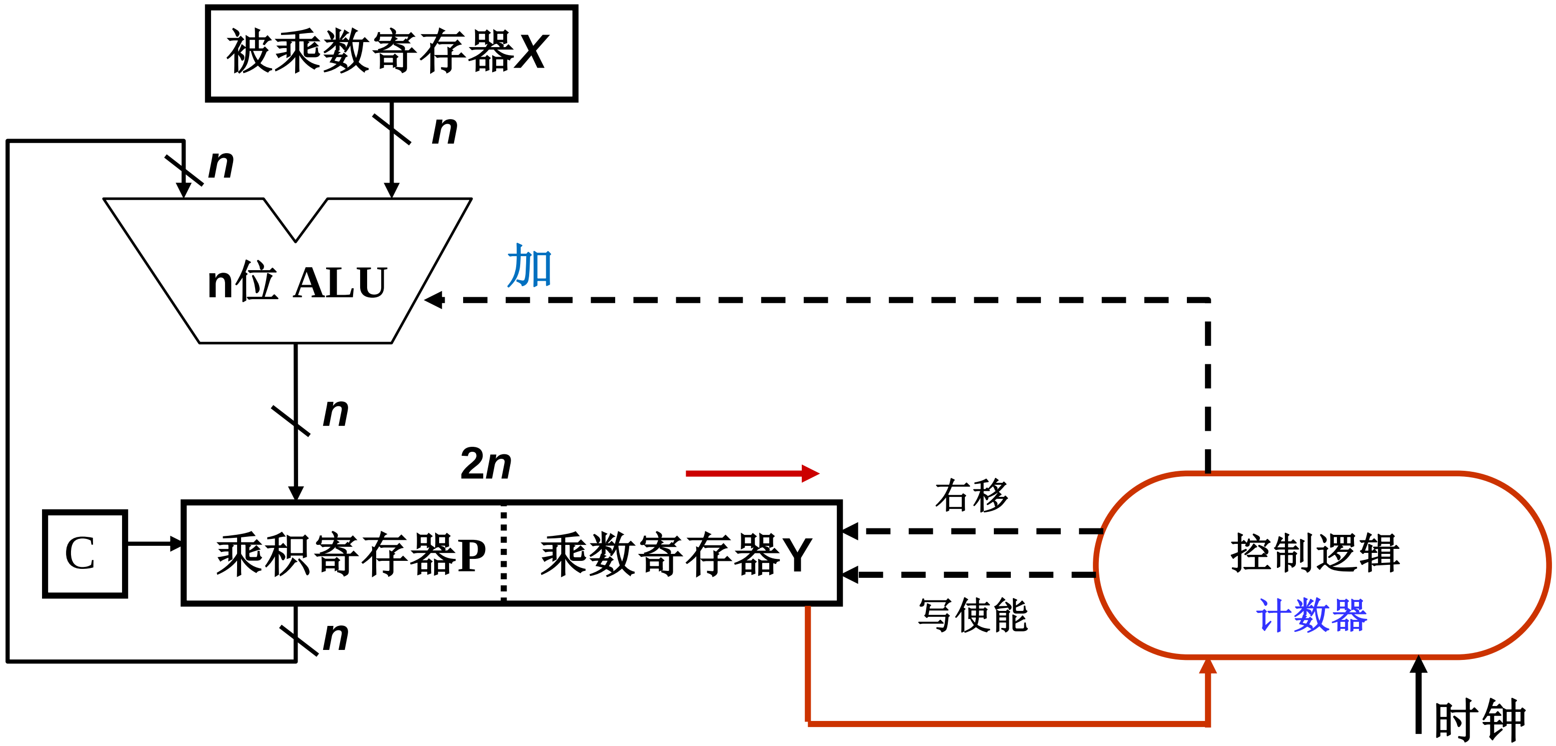
- 例子

```
      7          0111
  ×   6        × 0110
  -----        ------
     42          0000
                0111
               0111
              0000
             -------
             0101010
```

		部分积	
initial		0000	
0	->	00000	
1	+	01110	
	->	001110	
1	+	101010	
	->	0101010	
0	->	00101010	42

乘法 (续)

- 实现



乘法 (续)

- 实现 (续)

```
     7
×    6
------
    42
```

```
      0111
×     0110
----------
      0000
     0111
    0111
   0000
----------
   0101010
```

		结果	Y
初始化		0000	0110
0	->	0000	0011
1	+	0111	0011
	->	0011	1001
1	+	1010	1001
	->	0101	0100
0	->	0010	1010

乘法 (续)

- 问题： [X x Y]c ≠ [X]c x [Y]c

7	0111		-7	1001	
× 6	× 0110		× -6	× 1010	
42	0101010	**42**	42	1011010	**-38**

- 大致思路：
  - 将被乘数和乘数由补码表示改为原码表示
  - 将乘积结果由原码表示改为补码表示

乘法 (续)

- 布斯算法

$$
\begin{aligned}
X \times Y &= X \times Y_n Y_{n-1} \ldots Y_2 Y_1 \\
&= X \times (-Y_n \times 2^{n-1} + Y_{n-1} \times 2^{n-2} + \cdots + Y_2 \times 2^1 + Y_1 \times 2^0) \\
&= X \times \begin{pmatrix} -Y_n \times 2^{n-1} + Y_{n-1} \times (2^{n-1} - 2^{n-2}) + \cdots \\ +Y_2 \times (2^2 - 2^1) + Y_1 \times (2^1 - 2^0) \end{pmatrix} \\
&= X \times \begin{pmatrix} (Y_{n-1} - Y_n) \times 2^{n-1} + (Y_{n-2} - Y_{n-1}) \times 2^{n-2} + \cdots \\ +(Y_1 - Y_2) \times 2^1 + (Y_0 - Y_1) \times 2^0 \end{pmatrix} \\
&= 2^n \times \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \left(X \times (Y_i - Y_{i+1}) \times 2^{-(n-i)} \right)}
\end{aligned}
$$

$Y_0 = 0$

$$P_{i+1} = 2^{-1} \times \left(P_i + X \times \boxed{(Y_i - Y_{i+1})} \right)$$

乘法 (续)

- 布斯算法 (续)
  1. 增加 $Y_0 = 0$
  2. 根据 $Y_{i+1}Y_i$，决定是否增加 $+X$, $-X$, $+0$
  3. 右移部分积
  4. 重复步骤 2和步骤 3共 n 次，得到最终结果

乘法 (续)

- 布斯算法 (续)

$$\begin{array}{r} -7 \\ \times\ -6 \\ \hline 42 \end{array}$$

$[X]_c = 1001$

$[-X]_c = 0111$

$[Y]_c = 1010$

		结果	Y	
初始化		0000	10100	
$Y_0-Y_1 = 0$	->	0000	01010	
$Y_1-Y_2 = -1$	-X	0111	01010	
	->	0011	10101	
$Y_2-Y_3 = 1$	+X	1100	10101	
	->	0110	01010	
$Y_3-Y_4 = -1$	-X	1101	01010	
	->	0110	10101	106

?

乘法 (续)

- 布斯算法 (续)

$$\begin{array}{r} -7 \\ \times\ -6 \\ \hline 42 \end{array}$$

$[X]_c = 1001$

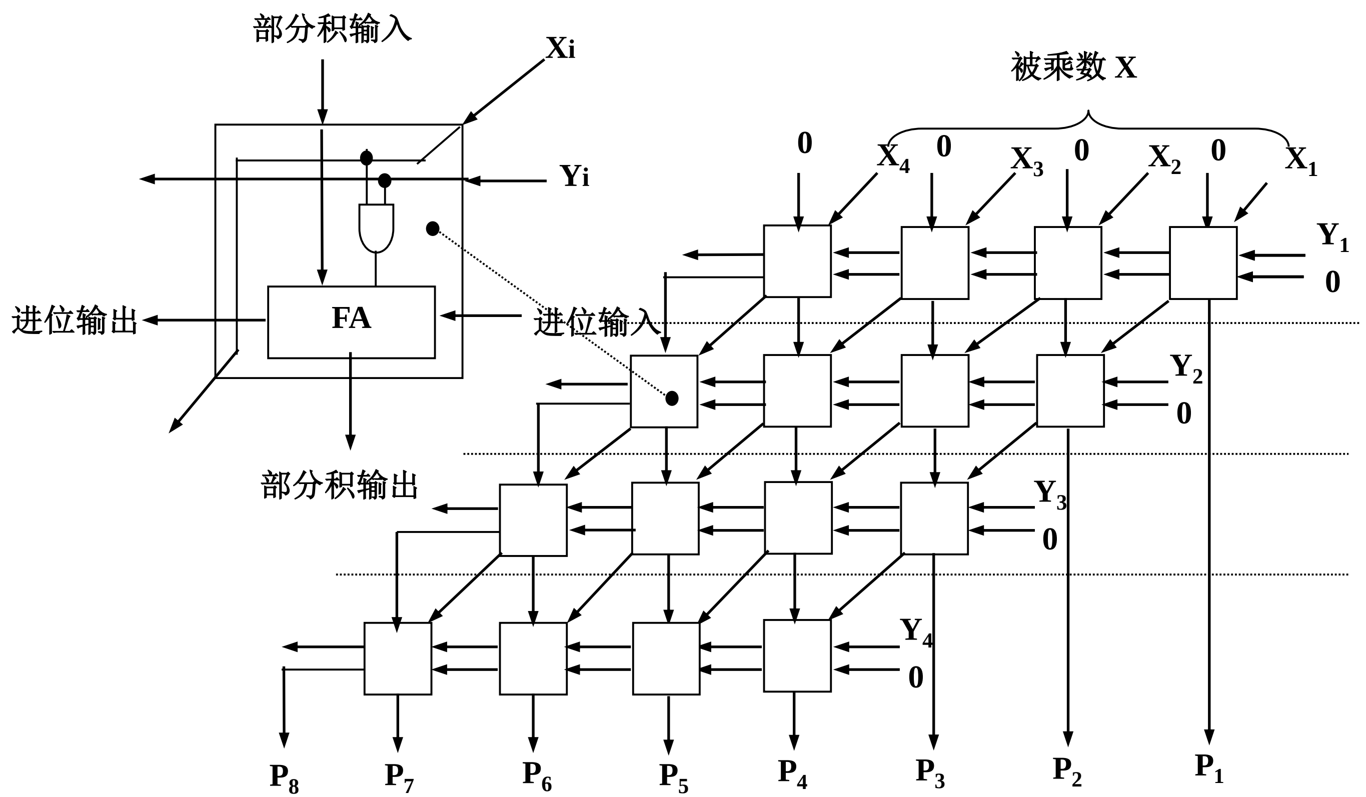
$[-X]_c = 0111$

$[Y]_c = 1010$

		结果	Y	
初始化		0000	10100	
$Y_0 - Y_1 = 0$	->	0000	01010	
$Y_1 - Y_2 = -1$	-X	0111	01010	
	->	0011	10101	
$Y_2 - Y_3 = 1$	+X	1100	10101	
	->	1110	01010	
$Y_3 - Y_4 = -1$	-X	0101	01010	
	->	0010	10101	42

乘法 (续)

- 阵列乘法器



部分积输入
Xi
Yi
FA
进位输出
进位输入
部分积输出
被乘数 X
0
X4
0
X3
0
X2
0
X1
Y1
0
Y2
0
Y3
0
Y4
0
P8
P7
P6
P5
P4
P3
P2
P1

除法

- 不同情形的处理
  - 若被除数为0，除数不为0：商为0
  - 若被除数不为0，除数为0：发生“除数为0”异常
  - 若被除数、除数均为0：发生“除法错”异常
  - 若被除数、除数均不为0：进行进一步除法运算

除法 (续)

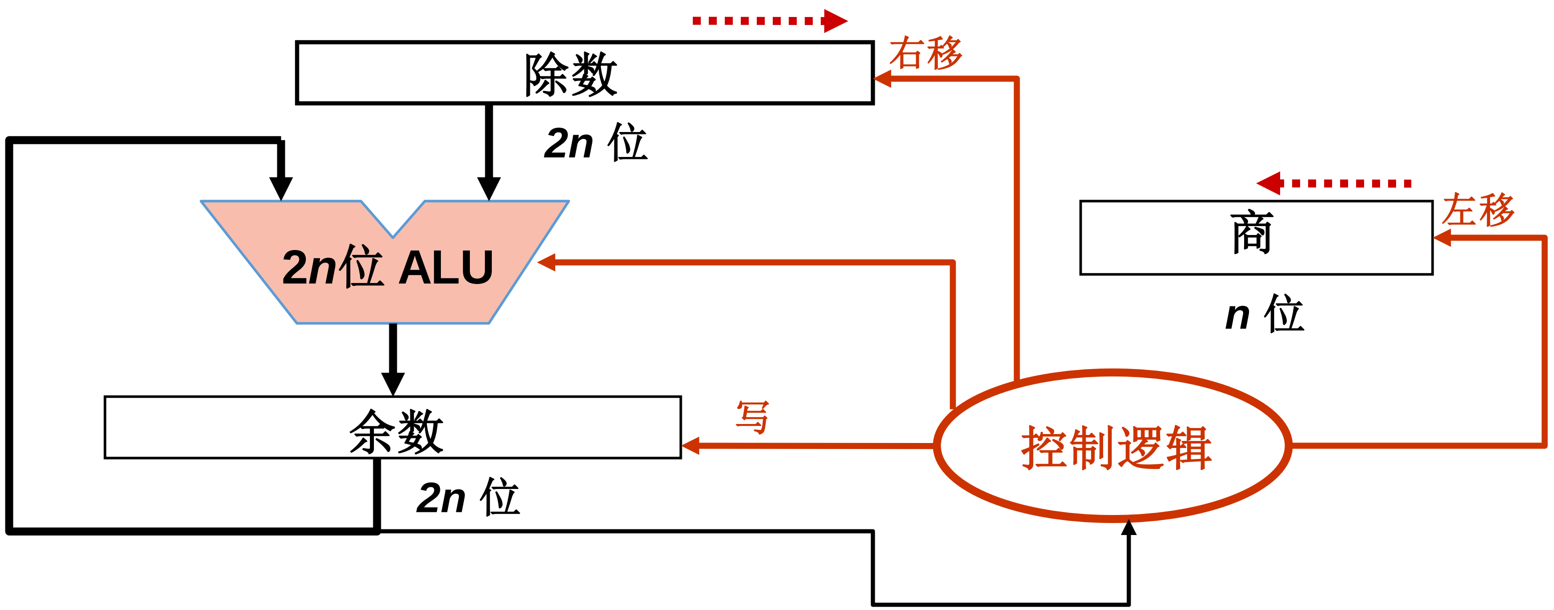
- 手工演算除法
  - 在被除数的左侧补充符号位，将除数的最高位与被除数的次高位对齐
  - 从被除数中减去除数，若够减，则上商为1；若不够减，则上商为0
  - 右移除数，重复上述步骤

```
    2
   ___
3 / 7
    6
   ___
    1
```

```
            0010
      __________
0011 / 00000111
       0000
       ____
        0001
        0000
        ____
         0011
         0011
         ____
          0001
          0000
          ____
          0001
```

除法 (续)

- 实现



除法 (续)

- 例子

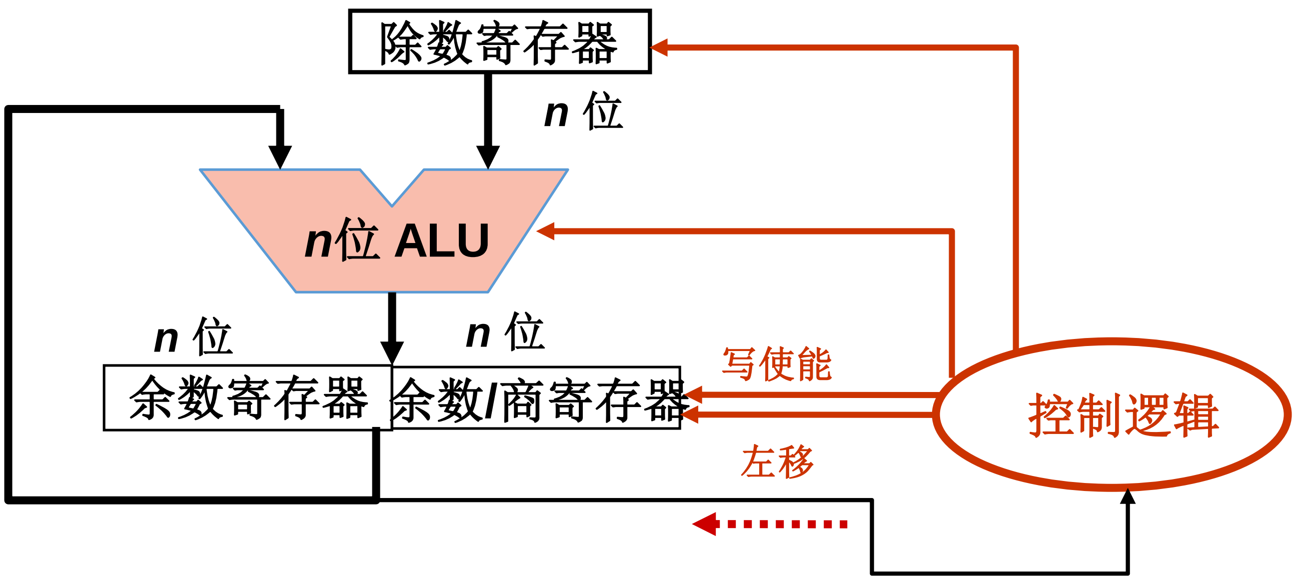
```
        0010
      ________
0011 / 00000111
       0000
      ________
        000111
        0000
      ________
         00111
         0011
      ________
          0001
          0000
      ________
          0001
```

```
      2
    ____
3  /  7
      6
    ____
      1
```

	余数		除数		商
初始化	00000111		00110000		0000
	00000111	->	00011000		0000
不够减	00000111		00011000	<-	0000
	00000111	->	00001100		0000
不够减	00000111		00001100	<-	0000
	00000111	->	00000110		0000
够减 -	00000001		00000110	<-	0001
	00000001	->	00000011		0001
不够减	00000001		00000011	<-	0010

除法 (续)

- 实现



除法 (续)

- 例子 (续)

```
            0010
       ___________
0011 / 00000111
       0000
       ___________
          000111
          0000
          ________
           00111
           0011
           _______
             0001
             0000
             _____
             0001
```

```
     2
   ____
3 / 7
    6
   ____
    1
```

		余数		商	除数
初始化		0000		0111	0011
	<-	0000	<-	111	0011
不够减		0000		1110	0011
	<-	0001	<-	110	0011
不够减		0001		1100	0011
	<-	0011	<-	100	0011
够减 -		0000		1001	0011
	<-	0001	<-	001	0011
不够减		0001		0010	0011

除法 (续)

- 如何判断“**够减**”：余数是否足够“大”
  - 如果余数和除数的符号相同：**减法**
  - 如果余数和除数的符号不同：**加法**

中间余数 R	除数 Y	减法		加法	
		0	1	0	1
0	0	够	不够	----	----
0	1	----	----	够	不够
1	0	----	----	不够	够
1	1	不够	够	----	----

除法 (续)

- 步骤过程
  - 通过在前面加n位符号扩展被除数，并存储在余数寄存器和商寄存器中
  - 将余数和商左移，判断是否“够减”
    - 如果“够”，则做减法（同号）或者加法（异号），并上商为1
    - 如果“不够，则上商为0
  - 重复以上步骤
  - 如果除数和被除数不同号，则将商替换为其相反数
  - 余数存在余数寄存器中

除法 (续)

- 例子

```
            1110
            0010
     ___________
0011 / 11111001
   +  0000
     __________
      111001
    + 0000
     _________
      11001
    + 0011
     _________
       1111
    +  0000
     _________
       1111
        ↓
       1111
```

```
     -2
   ______
3 /  -7
     -6
   ______
     -1
```

		余数		商	除数
初始化		1111		1001	0011
	<-	1111	<-	001	0011
	+	0010		001	0011
不够减（恢复）	-	1111		0010	0011
	<-	1110	<-	010	0011
	+	0001		010	0011
不够减（恢复）	-	1110		0100	0011
	<-	1100	<-	100	0011
够减	+	1111		1001	0011
	<-	1111		001	0011
	+	0010		001	0011
不够减（恢复）	-	1111		0010	0011
		↓ 1111		↓ 1110	

除法 (续)

- 问题：恢复余数成本高
- 大致思路：不恢复余数
  - 只考虑减法
    - 如果余数 R_i 足够大

$$R_{i+1} = 2R_i - Y$$

    - 如果余数 R_i 不够大

$$R_{i+1} = 2(R_i + Y) - Y = 2R_i + Y$$

除法 (续)

- 步骤过程
  - 通过在前面加n位符号扩展被除数，并存储在余数寄存器和商寄存器中
  - 如果除数和被除数符号相同，则做减法；否则，做加法
    - 如果余数和除数符号相同，则商$Q_n = 1$；否则，$Q_n = 0$
  - 如果余数和除数符号相同，$R_{i+1} = 2R_i - Y$；否则，$R_{i+1} = 2R_i + Y$
    - 如果新的余数和除数符号相同，使商为1；否则，使商为0
  - 重复以上步骤

除法 (续)

- 步骤过程 (续)
  - 左移商
    - 如果商是负的 (被除数和除数的符号不同)， 商加1
  - 余数和被除数符号不同，修正余数
    - 若被除数和除数符号相同，最后余数加除数；否则，最后余数减除数

除法 (续)

- 示例

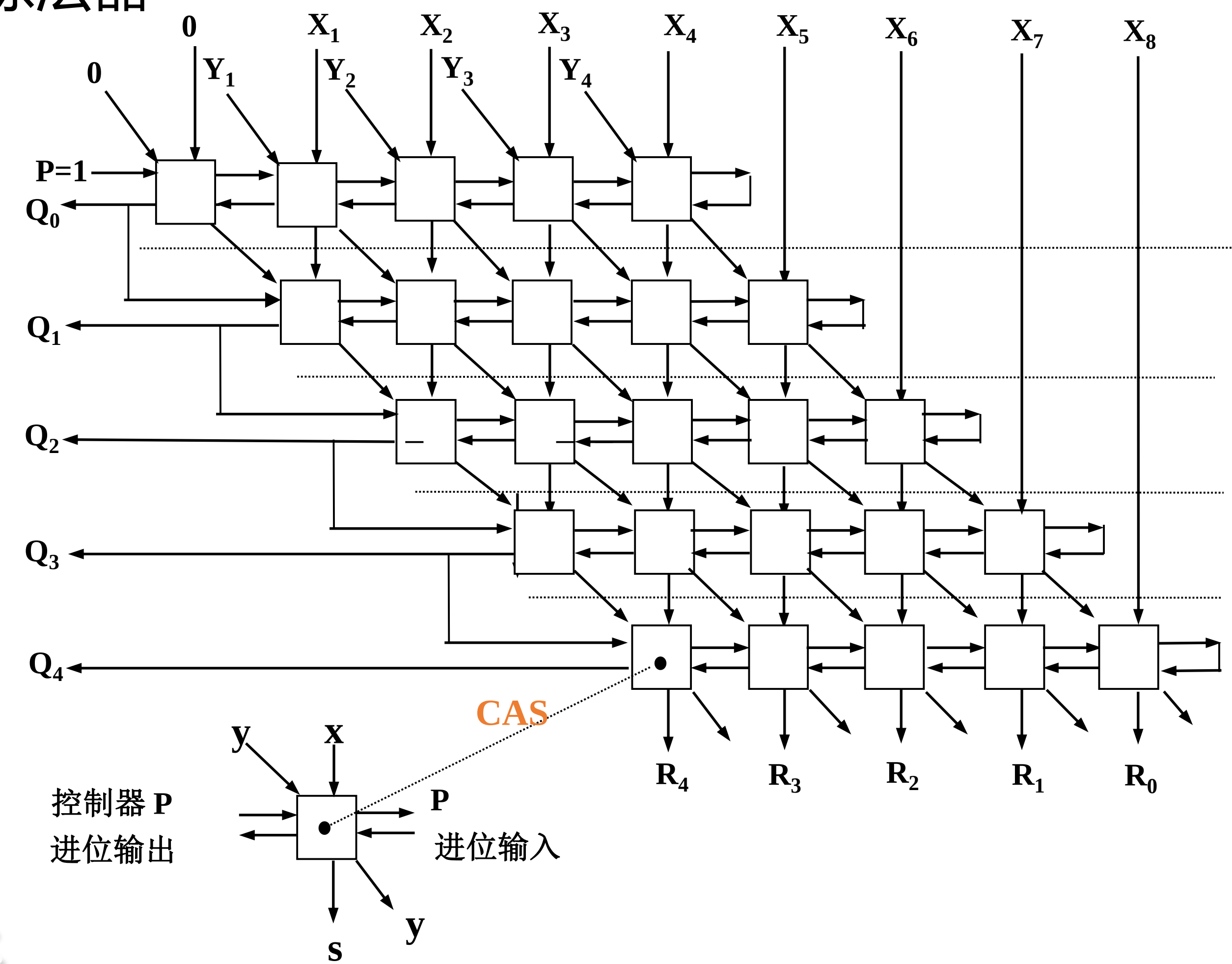
```
                 1110
                ↗
          11101
       ________
0011 / 11111001
     + 0011
       ________
       00101001
     -  0011
       ________
        0010001
      -  0011
        _______
         000101
       -  0011
         ______
          11111
        + 0011
          _____
           0010 -
                ↘ 1111

   -2
   ____
3 / -7
    -6
   ____
    -1
```

	余数		商	除数
初始化	1111		1001	0011
+	0010		1001 1	0011
<-	0101	<-	0011	0011
-	0010		0011 1	0011
<-	0100	<-	0111	0011
-	0001		0111 1	0011
<-	0010	<-	1111	0011
-	1111		1111 0	0011
<-	1111	<-	1110	0011
+	0010		1110 1	0011
	↓ -		↓ <-,+1	
	1111		1110	

除法 (续)

- 阵列除法器


0
X$_1$
X$_2$
X$_3$
X$_4$
X$_5$
X$_6$
X$_7$
X$_8$
0
Y$_1$
Y$_2$
Y$_3$
Y$_4$
P=1
Q$_0$
Q$_1$
Q$_2$
Q$_3$
Q$_4$
CAS
R$_4$
R$_3$
R$_2$
R$_1$
R$_0$
y
x
控制器 P
进位输出
P
进位输入
s
y

总结

- 算术逻辑单元（ALU）
  - 全加器
  - 串行进位加法器，全先行进位加法器，部分先行进位加法器
- 补码表示的整数运算
  - 加法
  - 减法
  - 乘法：布斯算法
  - 除法

谢谢

rentw@nju.edu.en

南京大學
NANJING UNIVERSITY