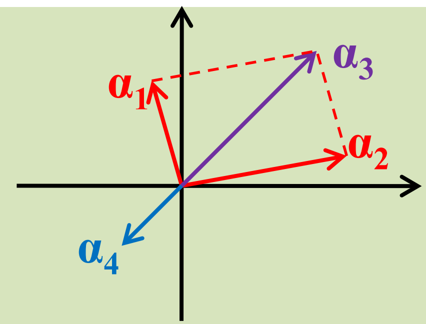
6.1 线性空间的定义

6.1.1 线性空间的概念

二维空间：

二维向量 $\alpha_1(x_1, y_1)$,$\alpha_2(x_2, y_2)$, $\alpha_3(x_3, y_3)$, $\alpha_4(x_4, y_4)$

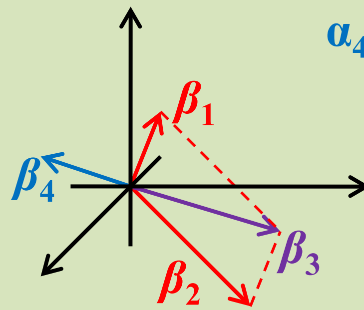
有加减有数乘：$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$, $-0.5\alpha_3=\alpha_4$



三维空间：

三维向量 $\beta_1(x_1, y_1, z_1)$, $\beta_2(x_2, y_2, z_2)$, $\beta_3(x_3, y_3, z_3)$, $\beta_4(x_4, y_4, z_4)$

有加减有数乘：$\beta_1+\beta_2=\beta_3$, $-0.5\beta_3=\beta_4$



其它集合：

学习成绩的集合：(数,理,化,语,英)，分数区间[0,100]

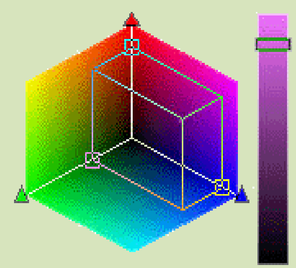
平时分α,期中分β,期末分γ,总评分$\xi=0.2\alpha+0.3\beta+0.5\gamma$

三原色构成的颜色的集合：

(红,绿,蓝)，颜色值的区间[0,1]

颜色1:α,颜色2:β,

两种颜色等比例混合的颜色$\gamma=0.5\alpha+0.5\beta$



上述集合的特点：元素可加减，可数乘 ——— 线性空间

线性空间的定义

定义6.1.1 (数环) 设R是非空数集，其中任何两个数之和、差与积仍属于R (即R关于加、减、乘法运算是封闭的)，则称R是一个数环 .

数环是对具有整数最基本性质的数集合的统称 .

如：整数集Z，偶数集，$\{0\}$.

数环的简单性质：

(1) 任何数环必含0

(2) 若 $a\in$R，则 $-a\in$R

定义6.1.2 (数域) 若K是至少含有两个互异数的数环，且其中任何两数a与b之商 ($b\neq 0$) 仍属于K，则称K是一个数域 .

数域是对具有有理数最基本性质的数集合的统称 .

如：有理数集Q，实数集R，复数集C，$\{\, a+b\sqrt{2} \mid a,b\in \mathrm{Q} \,\}$.

数域的简单性质：

(1) 数域关于加减乘除(分母不为零)四则运算是封闭的

(2) 任何数域K中必含有0与1

(3) 若$a\neq 0$，则有$1/a=a^{-1}\in K$

定义6.1.2 (线性空间) 设V是一个非空集合,K是一个数域, V满足以下两个条件:

(1) 在V中定义了一个封闭的加法运算，即当$x, y\in V$时，有唯一的$z\in V$与之对应，记为 $z=x+y\in V$，且此加法运算满足下面4条性质：

1) $x+y=y+x$ (交换律);

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (结合律);

3) 存在零元素$0\in V$，对V中任一元素x都有 $x+0=x$;

4) 存在负元素：对任一元素$x\in V$，存在一个元素$y\in V$，使得 $x+y=0$，称y为x的负元素(或相反元素)，记为$-x$，即 $x+(-x)=0$.

(2) 在V中定义一个封闭的数乘运算，即当$x\in V, \lambda\in K$时，有唯一的$z\in V$与之对应，记为 $z=\lambda x$，且此数乘运算满足下面4条性质：

1) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ (分配律);

2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (数因子分配律);

3) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ (结合律);

4) $1\cdot x=x$ 。

其中x, y, z是V中任意元素,λ , μ是数域K中任意数，1是数域K中的单位数 . 我们称V是数域K上的线性空间，也称向量空间，记为$V(K)$. 当K是实数域R时, 称V为实线性空间；当K是复数域C时, 称V为复线性空间. 元素也称向量 .

例6.1.1 由数域K中的数构成$m\times n$矩阵的全体，对通常意义下的矩阵加法和数乘运算，构成K上的线性空间, 记为$K^{m\times n}$或$M_{m\times n}(K)$.

例6.1.2 在实数域R上，次数不超过 n 的一元多项式全体 (包括 0)：

$$P_n[x]=\{ a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 : a_n, a_{n-1}, \ldots , a_0\in \mathrm{R} \}$$

按多项式相加和数乘的规则，容易验证满足线性空间的所有要求.

例6.1.3 数域 K 按其自身的加法与乘法构成 K 上的线性空间.

例6.1.4 设 $V=\mathrm{R}_+$ 为正实数集, 其加法和数乘运算定义为

$$a\oplus b=ab,\ a,b\in \mathrm{R}_+ \quad , \quad \lambda\circ a=a^{\lambda}, \lambda\in \mathrm{R}, a\in \mathrm{R}_+ .$$

对任意$a,b\in \mathrm{R}_+, \lambda, \mu\in \mathrm{R}$，可以验证$V=\mathrm{R}_+$ 对这两种运算满足线性空间的10条要求:

(1) 对加法封闭：$a\oplus b=ab\in \mathrm{R}_+$;

(2) 对数乘封闭：$\lambda\circ a=a^{\lambda}\in \mathrm{R}_+$;

(3) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$;

(4) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=abc=a(bc)=a\oplus(b\oplus c)$;

(5) $a\oplus 1=a\cdot 1=a$，即$1\in \mathrm{R}_+$是$V=\mathrm{R}_+$的零元素;

(6) $a\oplus (1/a)=a\cdot(1/a)=1$，即$\mathrm{R}_+$中任一元素$a$有负元$1/a$;

(7) $\lambda\circ(a\oplus b)=\lambda\circ (ab)=(ab)^{\lambda}= a^{\lambda} b^{\lambda}=(\lambda\circ a)\oplus(\lambda\circ b)$;

(8) $(\lambda+\mu)\circ a=a^{\lambda+\mu}=a^{\lambda}a^{\mu}=(\lambda\circ a)\oplus(\mu\circ a)$;

(9) $\lambda\circ(\mu\circ a)=\lambda\circ a^{\mu} =(a^{\mu})^{\lambda}= a^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)\circ a$;

(10) 对R中的1，有$1\cdot a=a^1=a$.

因此，$V=\mathrm{R}_+$ 是实线性空间 .

例6.1.5 设P为平面上全体向量组成的集合，在P上定义通常意义下的向量加法和如下的数乘：

$$\lambda \circ a=0,\ \lambda \in K,\ a \in P\ .$$

虽然P对两种运算封闭，但对于$a\neq 0$有 $1\circ a=0\neq a$ ，故P不是线性空间.

* 线性空间也称为向量空间，线性空间中的每个元素也称为向量 .

* 对同一个集合，若定义不同的线性运算（即线性空间上的加法与数乘运算），就构成不同的线性空间. 线性运算是线性空间的本质属性，它反应了线性空间中元素之间的代数结构.

相同的集合不同的线性运算

(1) V_1：R^2中通常定义的加法和数乘：

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2);\ k(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2)\ .$$

(2) V_2：R^2中如下定义的加法和数乘：

$$(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2+a_1b_1);\ k\circ(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2+(k(k-1)/2)a_1^2)\ .$$

6.1.2 线性空间的性质

性质1 线性空间的零元素是唯一的 .

说明：$0_1=0_1+0_2=0_2+0_1=0_2$

性质2 线性空间中任一元素的负元是唯一的 .

说明：$x_1+x=x+x_1=0$, $x_2+x=x+x_2=0$,

则 $x_2=x_2+0=0+x_2=(x_1+x)+x_2=x_1+(x+x_2)=x_1+0=x_1$

- $x+0=0+x=x$；$x+(-x)=(-x)+x=0$，
- 对某个数x有$x+y=x$或$y+x=x$，则$y=0$ (因为$t+y=t+(y+x+(-x))=t+0=t$)

性质3 设 $0, 1, -1, \lambda\in K$, $x, -x, 0\in V$，则有

(1) $0x=0$;

(2) $(-1)x=-x$;

(3) $\lambda 0=0$;

(4) 若 $\lambda x=0$，则 $\lambda=0$ 或 $x=0$.

说明： (1) $0x+x=(0+1)x=1x=x$, 故$0x=0$

(2) $(-1)x+x=((-1)+1)x=0x=0$，故由唯一性有 $(-1)x=-x$

(3) $\lambda 0=\lambda(0x)=(\lambda 0)x= 0x=0$

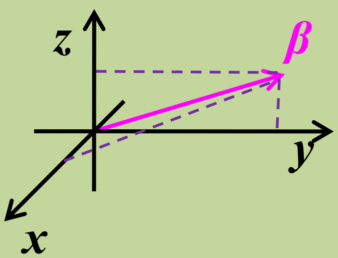
(4) 假设 $\lambda\neq 0$，则 $x=1x=((1/\lambda)\lambda)x=(1/\lambda)(\lambda x)=(1/\lambda)0=0$

只含一个元素的线性空间称为零空间，即只含零元素 $\{0\}$.

6.2 线性空间的基、维数与坐标

线性空间向量的数量化

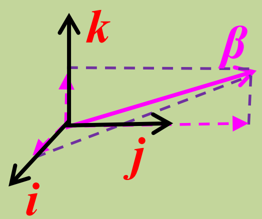
为了表示三维空间中的向量，需要建立空间坐标系，于是空间中的向量可以用有序三元数组(x,y,z)来表示



为了表示各种抽象线性空间中的向量，也需建立某种坐标系，在此坐标系下，各种向量可以用有序的多元数组$(x_1, x_2, \dots , x_n)$来表示 .

分析三维空间利用坐标系来将向量如β与三元数组如(x_1, y_1, z_1)对应的特点，x_1, y_1, z_1本质是向量在三个坐标轴上的分量，

即x轴方向的x_1倍大小, y轴方向的y_1倍大小, z轴方向的z_1倍大小,



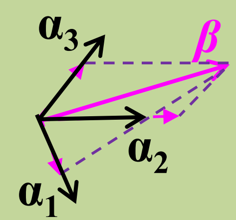
换种说法，若x,y, z轴方向的单位向量为 i , j , k,

则β向量为 i 的x_1倍，j 的y_1倍，k 的z_1倍的总和,

即 $\beta = x_1 i + y_1 j + z_1 k$

我们也可以不用直角坐标系，改为建立仿射坐标系，于是向量的表示仍然利用坐标向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

即 $\beta = x_1'\alpha_1 + y_1'\alpha_2 + z_1'\alpha_3$ ，然后用(x_1', y_1', z_1')表示向量β



建立坐标系，本质上是在向量集合中(线性空间)寻找一组极大无关的向量组

6.2.1 基与坐标

定义6.2.1 (线性相关与线性无关) 已知$V(K)$是线性空间， $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是$V(K)$的一组向量，如果存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使得$\sum k_i \alpha_i = 0$，则称该向量组线性相关，否则称为线性无关 .

易知：参见Ch2（ P_{59}~P_{60}基本结论(1)~(4)，P_{61}定理2.7.1）

(1) 由一个非零向量组成的向量组是线性无关的；

(2) 若一个向量组中含有零元，则此向量组必线性相关；

(3) 当$m \geqslant 2$时，向量组线性相关的充要条件是，其中至少有一个向量可以由该向量组中其余的向量线性表出；

(4) 若某向量组线性无关,则它的任意一部分组成的向量组(叫子向量组)也线性无关；若某向量组中有一个子向量组线性相关,则该向量组也线性相关 .

定义6.2.2 (维数) 设V是数域K上的线性空间，

(1)如果在V中可以找到任意多个线性无关的向量,则称V是无限维线性空间；

(2)如果存在有限多个向量$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$，$n \geqslant 1$满足：

1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性无关

2) V中任一向量都可由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性表出 .

则称V是有限维线性空间，称$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$是$V$的一组基(或基底)，$\alpha_i$叫第$i$个基向量，基向量的个数$n$称为线性空间$V$的维数，记为$\dim(V)=n$，并称$V$是$n$维线性空间 .

♥ 线性空间V中的不同基所含的向量个数相同.

说明 V中两组基：$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$，假设$m>n$，

则有
$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{n1}\alpha_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_m = c_{1m}\alpha_1 + c_{2m}\alpha_2 + \cdots + c_{nm}\alpha_n. \end{cases}$$

考虑：$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dots+k_m\beta_m=\theta$，代入关系得 $s_1\alpha_1+s_2\alpha_2+\dots+s_n\alpha_n=\theta$，故有

$$\begin{cases} s_1 = c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + \cdots + c_{1m}k_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n = c_{n1}k_1 + c_{n2}k_2 + \cdots + c_{nm}k_m = 0, \end{cases} \qquad \text{其中} m > n.$$

有非零解 $k_1,\dots,k_m$，与基$\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$线性无关矛盾, $n>m$亦然, 故$m=n$.

♥ n维线性空间V中的$n+1$个向量必线性相关，故n个线性无关向量可构成V的一组基.

例6.2.1 设$K^{m\times n}$是例6.1.1给出的线性空间，由于$K^{m\times n}$ 中任一矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 都可表示为

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij},$$

其中 E_{ij} 表示在第 i 行, 第 j 列交叉处的元素为1，其余元素均为 0的$m\times n$的矩阵(称矩阵单位)，容易证得 $\{ E_{ij} : i=1,2, \dots ,m; j=1,2, \dots ,n \}$ 是线性无关的, 所以$K^{m\times n}$是 $m\cdot n$ 维的 .

例6.2.2 设有例6.1.2中的线性空间 $P_n[x]$，注意到向量组$1, x, x^2, \dots , x^n$ 是线性无关的(易证)，且 $P_n[x]$ 中任一向量都可以表示为

$$p(x)=a_0\cdot 1+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+ \dots + a_n\cdot x^n \ .$$

因此， $P_n[x]$ 是 $n+1$ 维的 .

例6.2.3 易见：齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系是其解空间的一组基.

例6.2.4 设C是复数域，若将其看做复线性空间，那么它是1 维的；若将其看做实线性空间, 则它是2维的, 因为 $\{1, i \}$ 是一组基 .

例6.2.5 用 $C_{[a, b]}$表示闭区间$[a,b]$上所有连续函数的集合，因无法找到有限个连续函数作为它的基, 所以它是无限维的线性空间 .

定理6.2.1 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是n维线性空间V的一组基，对任意的$\alpha \in V$，α可以唯一地由这一组基线性表出 .

证明：设
$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n ,$$
$$\alpha=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\ldots+y_n\alpha_n .$$
两式相减
$$(x_1-y_1)\alpha_1+(x_2-y_2)\alpha_2+\ldots+(x_n-y_n)\alpha_n=0 .$$
由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的线性无关性可知系数为0，即得
$$x_1=y_1 , x_2=y_2 , \ldots , x_n=y_n ,$$ 即系数唯一 .

通过式子：$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n$,
向量 α 与有序数组 $(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ 一一对应，于是向量可用数组表示 .

定义6.2.3 (坐标) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，对任意的$\alpha \in V$，若有一组有序数 $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$使得α可表示为
$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n ,$$
这组有序数就称为向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标，记为
$$x=(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) \quad 或 \quad x=(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)^T .$$

基与坐标的关系可以简洁地用矩阵形式表示：
$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

例6.2.6 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, 则每个基向量可表示为 $\alpha_i=0\alpha_1+\dots+0\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\cdot\alpha_{i+1}+\dots+0\alpha_n$ ， 即 α_i 的坐标为 $(0,\dots, 0,1,0,\dots,0)$.由此我们可知，线性空间定义 (定义6.1.3) 中最后一条性质的必要性.

例6.2.7 设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，则$n$个向量

$$\begin{aligned}\beta_1&=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\dots+a_{n1}\alpha_n ,\\ \beta_2&=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\dots+a_{n2}\alpha_n , \qquad (6.1)\\ &\cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\\ \beta_n&=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\dots+a_{nn}\alpha_n\end{aligned}$$

是V的一组基的充要条件是，由它们的系数组成的行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}\neq 0$.

证明 由题意可知，只需证$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$线性无关即可. 设有一组常数$k_1, k_2, \dots, k_n$使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dots+k_n\beta_n=0 . \qquad (6.2)$$

将式 (6.1) 代入 (6.2) 得

$$(k_1a_{11}+\dots+k_na_{1n})\alpha_1+(k_1a_{21}+\dots+k_na_{2n})\alpha_2+\dots+(k_1a_{n1}+\dots+k_na_{nn})\alpha_n=0 .$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$的线性无关性，上式中$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$的系数都为零，即

$$\begin{cases} k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_1a_{n1}+k_2a_{n2}+\cdots+k_na_{nn}=0.\end{cases}$$

而该方程组有唯一零解的充要条件是系数行列式$D=|a_{ij}|_{n\times n}\neq 0$.

用基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 表示基向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$

$$\beta_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \beta_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \beta_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix},$$

两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的关系可用矩阵表示：

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P$$

P称为从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵.

例6.2.7证法二：用矩阵形式

$$\beta_1,\dots,\beta_n\text{为基} \Leftrightarrow \begin{cases} (\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)D, \\ (\beta_1,\dots,\beta_n)B=(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \end{cases} \Leftrightarrow DB=E \Leftrightarrow |D|\neq 0$$

例6.2.7实际上给出了从一个已知基构造另外基的方法：

新的基

$$(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P,\ (P\text{可逆})$$

例6.2.8 在线性空间 $P_n[x]$ 中，多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

在基 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 下的坐标是 $(a_0, a_1, \dots, a_n)$，若取另一组基

$$1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n,$$

则多项式$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ 按泰勒公式展开为

$$p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

因此，$p(x)$ 在新的一组基 $1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n$ 下的坐标是

$$(p(a), p'(a), \frac{p''(a)}{2!}, \cdots, \frac{p^{(n)}(a)}{n!}).$$

补充例6A 已知R^3的两组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$和$\omega_1, \omega_2, \omega_3$，有关系：

$2\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\omega_2+\omega_3=\theta$，$2\varepsilon_2+3\varepsilon_3-\omega_1+\omega_2=\theta$，$\varepsilon_1+\varepsilon_3-\omega_1+\omega_2+\omega_3=\theta$，

求 由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到$\omega_1,\omega_2,\omega_3$的过渡矩阵 .

解：重写关系：$2\omega_2+\omega_3=-2\varepsilon_1+2\varepsilon_2$, $\omega_1-\omega_2=2\varepsilon_2+3\varepsilon_3$, $\omega_1-\omega_2-\omega_3=\varepsilon_1+\varepsilon_3$, 则有

$(\omega_1, \omega_2,\omega_3)A=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)B$,其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

故有$(\omega_1, \omega_2,\omega_3)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)BA^{-1}$，即过渡矩阵$P=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-0.5 & -0.5 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$

6.2.2 基变换与坐标变换

若有两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$,有关系：

$$(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)P\ ,$$

向量α用两组基表示为：

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n\ ,\ \alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\ldots+y_n\beta_n\ ,$$

则有关系：

$$\alpha=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

于是不同基下的坐标的关系为：$P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$,或者$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

重要式子：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

定理6.2.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 是n维线性空间V的两组基，并且

$$(\beta_1, \ldots, \beta_n)=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) P ,$$

基底变换公式

若V中任意元素α在这两组基下的坐标分别是 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{或者} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

坐标变换公式

证明思路：由

$$\alpha = (\beta_1, \cdots, \beta_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

利用坐标的唯一性可得

$$P\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{或者} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

基底变换公式：$(\beta_1, \ldots, \beta_n)=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) P$ ，$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =(\beta_1, \ldots, \beta_n)P^{-1}$

从基底$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 到基底 $\beta_1, \ldots, \beta_n$的过渡矩阵：P

坐标变换公式：$y=P^{-1}x$ ， $x=P y$

空间$\mathbf{R}^n$上的自然基：

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

例6.2.9 设$\mathbf{R}^4$中的向量α在基底$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$, $\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$, $\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$, $\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$，求α在另一组基 $\beta_1=(2,1,0,1)^T$, $\beta_2=(0,1,2,2)^T$, $\beta_3=(-2,1,1,2)^T$, $\beta_4=(1,3,1,2)^T$下的坐标 .

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3,e_4)A,(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3,e_4)B.$$

于是 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A^{-1}B$，

其中 $P=A^{-1}B$ 为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$到$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的过渡矩阵.

由坐标变换公式，α在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$下的新坐标是 $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$

计算可得 $P^{-1}=B^{-1}A=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$

故得 $x_1'=x_2-x_3+x_4$， $x_2'=-x_1+x_2$，

$x_3'=x_4$， $x_4'=x_1+x_3-x_4$.

例6.2.9 设R^4中的向量α在基底$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$, $\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$, $\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$, $\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$，求α在另一组基 $\beta_1=(2,1,0,1)^T$, $\beta_2=(0,1,2,2)^T$, $\beta_3=(-2,1,1,2)^T$, $\beta_4=(1,3,1,2)^T$下的坐标 .

解二：

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Ax,$$

$$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=Bx'.$$

可得 $Ax=Bx'$，于是

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

补充例6B 已知向量η在两组基 $\alpha_1=(1,-2,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,1)^T$,$\alpha_3=(3,2,1)^T$与$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标分别为(a_1,a_2,a_3)和(b_1,b_2,b_3)，且有坐标关系 $\begin{cases} b_1 = a_1 - a_2 - a_3, \\ b_2 = -a_1 + a_2, \\ b_3 = a_1 + 2a_3. \end{cases}$

求基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的过渡矩阵$P$， 并求基 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

解 由不同基下坐标关系，有 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, 故$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

于是有过渡矩阵 $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

故由$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$

知 $\beta_1=2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=(-1,-4,3)^T$, $\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=(-1,-3,4)^T$, $\beta_3=\alpha_1+\alpha_2=(1,-1,2)^T$.

数域上的线性空间$V(K)$与K^n的对应关系

线性空间	V	$\Leftrightarrow$	K^n
	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$	$\Leftrightarrow$	$e_1, e_2, \ldots, e_n$
向量	α	$\Leftrightarrow$	x
关系1	$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r=\theta$	$\Leftrightarrow$	$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_r\beta_r=\theta$
关系2	$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r$	$\Leftrightarrow$	$x=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_r\beta_r$
关系3	$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关	$\Leftrightarrow$	$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性无关
不同基与坐标	$(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)P$	$\Leftrightarrow$	$y=P^{-1}x$ (坐标关系)

同构

♥ 线性空间中向量关系完全可由坐标关系表示

同构：数据和作用对应相同，即可相互翻译的两种数学描述 .
同构是等价关系

定义7.3.1 (线性空间的同构) 数域K上的两个线性空间V和W称为同构，如果由V到W有一个一一映射f 满足以下两个条件：

(1) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$; 表示 $\alpha+\beta\leftrightarrow\alpha'+\beta'$

(2) $f(k\alpha)=kf(\alpha)$. 表示 $k\alpha\leftrightarrow k\alpha'$

这里$\alpha, \beta\in V, k\in K$，这样的映射$f$ 称为同构映射 .

K上n维线性空间V同构于K^n .

定理7.3.1 设V与W都是数域K上的有限维线性空间，则它们同构的充要条件是它们的维数相同 .

证明： “=>” 设V的基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$， V与W同构，则$\alpha_i\leftrightarrow\alpha_i$’为基

因为： $0=0\alpha_1\leftrightarrow0'=0\alpha_1'$； $\beta=k_1\alpha_1+\ldots+k_n\alpha_n\leftrightarrow\beta'=k_1\alpha_1'+\ldots+k_n\alpha_n'$

“<=” 设V的基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$， W的基 $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$，

作映射：$f:\sum k_i\alpha_i\rightarrow\sum k_i\alpha_i'$, 容易验证f为同构映射

推论7.3.2 数域K上的任何n维线性空间都同构于K^n .