A、B 班 10-18,20 作业分析

10-18 作业：习题三：18,19,20

18 有同学增广矩阵只化简到行梯形，这样是得不到特解和对应齐次方程组的基础解系的.

19 有一些同学将增广矩阵直接化简到行简化梯形，过程中要除以 λ-1 和 5λ+4，然后再讨论 λ=1 和 λ=-4/5 的情况，次序搞颠倒了，在讨论 λ=1 和 λ=-4/5 之前不能除以 λ-1 和 5λ+4，因为可能除以 0.

有同学只求出方程组的解，没有写出组合式，改题目是组合问题，要最后给出线性组合.

还有些同学漏了一些讨论情况，可如下：

解：此即求解 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即解方程组 $\begin{cases}-x_1+\lambda x_2+2x_3=1,\\ x_1-x_2+\lambda x_3=2,\\ -5x_1+5x_2+4x_3=-1.\end{cases}$

初等行变换 $(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&\lambda&2&1\\1&-1&\lambda&2\\-5&5&4&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&\lambda&2\\0&\lambda-1&\lambda+2&3\\0&0&5\lambda+4&9\end{array}\right)=B_1$，

当 $\lambda\neq1,\lambda\neq-4/5$ 时，$B_1\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&(\lambda+14)/(5\lambda+4)\\0&1&0&6/(5\lambda+4)\\0&0&1&9/(5\lambda+4)\end{array}\right)$，得唯一解 $\begin{cases}x_1=(\lambda+14)/(5\lambda+4),\\ x_2=6/(5\lambda+4),\\ x_3=9/(5\lambda+4),\end{cases}$ 此时 $\beta=\dfrac{\lambda+14}{5\lambda+4}\alpha_1+\dfrac{6}{5\lambda+4}\alpha_2+\dfrac{9}{5\lambda+4}\alpha_3$.

当 λ=1 时，$B_1\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，有无穷多组解 $\begin{cases}x_1=1+k,\\ x_2=k,\\ x_3=1,\end{cases}$ $k\in\mathbf{R}$，此时 $\beta=(1+k)\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3$，$k\in\mathbf{R}$.

当 λ=-4/5 时，则 $r(A,\beta)=3>r(A)=2$，无解，即 β 不能表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

20 有些同学证明有错，可如下：

证：(1) $k_0\beta_0+k_1\beta_1+\ldots+k_r\beta_r=(k_0+k_1+\ldots+k_r)\eta+k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=\theta$，左乘 A 得 $(k_0+k_1+\ldots+k_r)b=\theta$，

由 $b\neq\theta$ 可得 $k_0+k_1+\ldots+k_r=0$，从而有 $k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=\theta$，因 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 为基础解系，故无关，从而 $k_1=\ldots=k_r=0$，进而有 $k_0=0$，故 $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_r$ 线性无关.

(2) β 为 $Ax=b$ 的任意解，则 $\beta=\eta+k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=(1-k_1-\ldots-k_r)\eta+k_1\beta_1+\ldots+k_r\beta_r=k_0\beta_0+k_1\beta_1+\ldots+k_r\beta_r$，

其中 $k_0=1-k_1-\ldots-k_r$，即 $k_0+k_1+\ldots+k_r=1$.

其余一些作业：

18(1)(2) 增广矩阵化行简化梯形，求得一个特解和齐次基础解系，合成通解

10-20 作业：习题四：1,2,3

* 特征值计算基本正确，但有些同学在计算特征向量时算错，特别是有同学计算出的基础解系为零向量. 基础解系一定不是零向量，计算特征向量时也一定有基础解系存在，即一定有无关特征向量存在.

** 有个别同学在计算特征向量时用了初等列变换，计算基础解系只能用行变换.

2(1) 有同学在计算 $\lambda=n$-1 的特征向量时出错，可如下：

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{\underset{r_i-r_1,i=2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-(n-1)&-1&\cdots&-1\\0&\lambda+1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-(n-1))(\lambda+1)^{n-1}.$ 故特征值为 $\lambda=n-1,-1$(n-1 重).

$\lambda=n$-1 时，$((n-1)E-A)=\begin{pmatrix}n-1&-1&\cdots&-1\\-1&n-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&n-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i-r_n,i=1,\cdots,n-1}\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0&-n\\0&n&\cdots&0&-n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n&-n\\-1&-1&\cdots&-1&n-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_n+r_1+\cdots+r_{n-1}]{r_i\div n,i=1,\cdots,n-1}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$，

解得特征向量为 $k_1\alpha_1$，其中 $\alpha_1=(1,1,\ldots,1,)^T$，$k_1\neq0$.

λ=-1 时，$(-E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&\cdots&-1\\-1&-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_i-r_1,i=2,\cdots,n}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\ldots+k_n\alpha_n$，

其中 $\alpha_2=(-1,1,0,\ldots,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,1,\ldots,0)^T$，…，$\alpha_n=(-1,0,\ldots,0,1)^T$，$k_2,k_3,\ldots,k_n$ 不全为 0.

2(2)解当 $n=2m$ 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&\lambda&-1&&\\&&-1&\lambda&&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&\lambda\end{vmatrix}\overset{r_i+r_{2m+1-i}}{\underset{i=1,\cdots,m}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-1&&&&&\lambda-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&\lambda-1&\lambda-1&&\\&&-1&\lambda&&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&\lambda\end{vmatrix}\overset{c_{2m+1-i}-c_i}{\underset{i=1,\cdots,m}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda-1&&&\\&&-1&\lambda+1&&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^m(\lambda+1)^m.$$

$\lambda=1$(m 重) ，$\lambda=-1$ (m 重)

当 λ=1 时，
$$E-A=\begin{pmatrix}1&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&-1&&\\&&-1&1&&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&-1&&\\&&0&0&&\\&\iddots&&&\ddots&\\0&&&&&0\end{pmatrix}.$$

易知特征向量 $s_1\xi_1+\ldots+s_m\xi_m$，其中 $\xi_1=\begin{pmatrix}e_m\\e_1\end{pmatrix},\cdots,\xi_m=\begin{pmatrix}e_1\\e_m\end{pmatrix}$，$s_1,\ldots,s_m$ 不全为 0，$e_j\in\mathbf{R}^m,j=1,2,\ldots,m$.

同理当 λ=-1 时,特征向量 $t_1\eta_1+\ldots+t_m\eta_m$,其中 $\eta_1=\begin{pmatrix}-e_m\\e_1\end{pmatrix},\cdots,\eta_m=\begin{pmatrix}-e_1\\e_m\end{pmatrix}$,$t_1,\ldots,t_m$ 不全为 0，$e_j\in\mathbf{R}^m,j=1,2,\ldots,m$.

当 $n=2m+1$ 时，
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&\lambda&&-1&\\&&&\lambda-1&&\\&&-1&&\lambda&\\&\iddots&&&&\ddots\\-1&&&&&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&\lambda&-1&&\\&&-1&\lambda&&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^{m+1}(\lambda+1)^m.$$

λ=1(m+1 重) ，λ=-1 (m 重)

当 λ=1 时,特征向量 $s_1\xi_1+\ldots+s_{m+1}\xi_{m+1}$,其中 $\xi_1=\begin{pmatrix}\theta\\1\\\theta\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}e_m\\0\\e_1\end{pmatrix}\cdots,\xi_{m+1}=\begin{pmatrix}e_1\\0\\e_m\end{pmatrix}$,$s_1,\ldots,s_m$ 不全为 0,$e_j\in\mathbf{R}^m,j=1,2,\ldots,m$.

同理当 λ=-1 时，特征向量 $t_1\eta_1+\ldots+t_m\eta_m$,其中 $\eta_1=\begin{pmatrix}-e_m\\0\\e_1\end{pmatrix},\cdots,\eta_m=\begin{pmatrix}-e_1\\0\\e_m\end{pmatrix}$,$t_1,\ldots,t_m$ 不全为 0,$e_j\in\mathbf{R}^m,j=1,2,\ldots,m$.

3 有同学该题只计算了 $a\neq1$、$a\neq3$ 的情况下的值，还应该计算 a=1 时，a=3 时的特征值、特征向量.

解：
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&3&1\\-4&\lambda+3&3a+1\\1&-1&\lambda-a-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-a)$$

⑴ a=1 时，特征值：λ=1 (二重), λ=3

λ=1 时，$E-A\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量 $k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

λ=3 时，$3E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

⑵ a=3 时，特征值：λ=3 (二重), λ=1

λ=3 时，$3E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量 $k_1\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$

λ=1 时，$E-A\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量 $k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

⑶ $a\neq1,a\neq3$ 时，特征值：$\lambda=1,3,a$

λ=1 时，$E-A\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量 $k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

λ=3 时，$3E-A\to\begin{pmatrix}1&0&(1-3a)/2\\0&1&(1-a)/2\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量 $k_2\begin{pmatrix}3a-1\\a-1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda=a$ 时，$aE-A\to\begin{pmatrix}1&0&-8/(a-1)\\0&1&(3a-11)/(a-1)\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量 $k_3\begin{pmatrix}8\\11-3a\\a-1\end{pmatrix}$

其余一些作业：

习题四 1 用常规方法先解$|\lambda E-A|=0$ 得特征值，再针对每个特征值((4)有复特征值)解方程组求特征向量