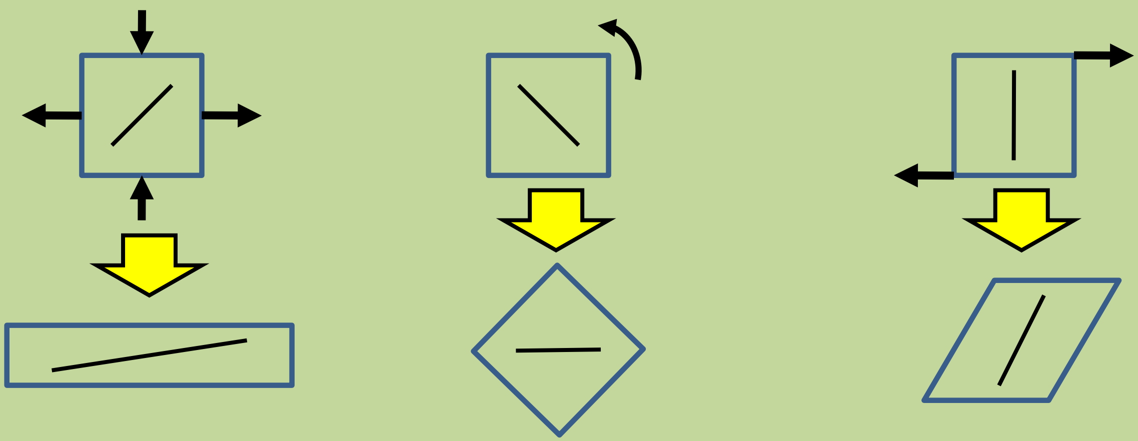
6.4 线性变换

6.4.1 线性变换的概念

考虑几何变换：　　拉伸　　　　　　旋转　　　　　　错切



这些变换的特点是图形没有扭曲（直线段变换后仍是直线段）称线性变换

线性变换保证直线段：$x(t)=(1-t)\ \alpha+t\beta$ 变换后仍然是直线段，变换用T表示，则

$$x(0)=\alpha \quad\rightarrow\quad T(x(0))=T\alpha,$$

$$x(1)=\beta \quad\rightarrow\quad T(x(1))=T\beta,$$

$$x(t)=(1-t)\ \alpha+t\beta \quad\rightarrow\quad T(x(t))=(1-t)T\alpha+tT\beta,$$

最本质特点是：

$$T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta\ , \qquad\qquad T(\lambda\alpha)=\lambda T\alpha$$

线性变换的定义

定义6.4.1 (线性变换) 设V_1, V_2都是数域K上线性空间，根据某一规则T，对V_1中的任一元素α，有V_2中的唯一元素α′与之对应，即 $T\alpha=\alpha'$，则称T为V_1到V_2的映射．

如果V_1到V_2的映射T还满足

$$T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta\ ,\quad T(\lambda\alpha)=\lambda T\alpha$$

其中$\alpha,\beta\in V_1$，$\lambda\in K$，则称T为V_1到V_2的线性映射．在 $V_1=V_2=V$ 时，称这个T为V上的线性变换．

* 线性映射条件可综合为：$T(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda T\alpha+\mu T\beta$

例6.4.1 对$P_n[x]$中的多项式求导，记为$D[p(x)]=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$,不难验证$D$是$P_n[x]$上的线性变换．

显然：$D[p_1(x)+p_2(x)]=D[p_1(x)]+D[p_2(x)]$，$D[\lambda p(x)]=\lambda D[p(x)]$

例6.4.2 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in \mathbf{R}^{m\times n}$，对 $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^{\mathrm{T}}\in \mathbf{R}^n$，令

$$Ax=y\ ,$$

其中 $y=(y_1, y_2,\ldots, y_m)^{\mathrm{T}}\in \mathbf{R}^m$, $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,(i=1,2,\cdots,m)$,

则容易验证，$A(\lambda x+\mu y)=\lambda(Ax)+\mu(Ay)$，故$A$是$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^m$的线性变换．

** 线性映射T中V_2不一定是T的值域，如例6.4.2，这样可考虑多个映射.

线性映射T的基本性质：

(1) $T0=0$；

(2) 对任意的$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V_1$，有

$$T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_m\alpha_m)=k_1T\alpha_1+k_2T\alpha_2+\dots+k_mT\alpha_m\ ;$$

(3) 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性相关，则$T\alpha_1, T\alpha_2, \dots, T\alpha_m$也线性相关；反之不成立．

说明： (1) 用$T(\lambda\alpha)=\lambda T\alpha$，取$\lambda=0$

(2) 反复用$T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1T\alpha_1+k_2T\alpha_2$

(3) 用(2)的结论，反之设$T\alpha_1=T\alpha_2=\dots=T\alpha_m=0$

几个特殊的线性变换

(1) 数乘变换：设k是数域K内的一个常数，对任意的 $\alpha\in V$，令$T_k\alpha=k\alpha$．

(2) 恒等变换：设$T\alpha=\alpha$，即T把V中的任意元素α变成自身，则称T为恒等变换或单位变换，记为 I 或 E，即 $I\alpha=\alpha$．

(3) 零变换：设$T\alpha=0$，即T把V中的任意元素α变成零元素，则称T为零变换，记为 T_0，即 $T_0\alpha=0$．

像空间与核空间

定义6.4.2 (像空间与核空间) (1) 若V_1, V_2都是数域 K上线性空间，设线性映射T：$V_1 \to V_2$，则称 V_1 中所有元素的像的集合$\{T\alpha \mid \alpha \in V_1\}$为像空间，记作 $\mathcal{R}(T)$ 或 $\mathrm{Im}(T)$，简记为 $\mathcal{R}$.

(2) 对于V_1到V_2的线性映射T，称集合

$$N=N(T)=\{\ \alpha \mid T\alpha= 0' ,\ \alpha\in V_1\ \}$$

为T 的核空间，也记作 $\ker(T)$，其中 $0'$是 V_2的零元 .

定理6.4.1 线性映射的像空间与核空间是线性空间 .

证明思路：T：$V_1 \to V_2$

(1) $\lambda\alpha'+\mu\beta' =\lambda T\alpha+\mu T\beta=T(\lambda\alpha+\mu\beta) \in \mathrm{Im}(T)$;

(2) $T(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda T\alpha+\mu T\beta=\lambda\, 0' + \mu\, 0'=0'$.

例6.4.3 设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in \mathrm{R}^{m\times n}$是一个实数域上的$m\times n$ 矩阵，则$T(x)=Ax$定义了线性空间R^n 到线性空间R^m 的一个线性映射T .

而齐次线性方程组 $Ax= \theta$ 的解空间就是线性映射T 的核空间 $\ker(T)$，它是R^n 的一个子空间.

而 $A=(\alpha_1,\alpha_2, \ldots ,\alpha_n)$的列向量组生成的线性空间就是$T$的像空间 $\mathrm{Im}(T)$，即$\mathrm{Im}(T)=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2, \ldots ,\alpha_n \}$，它是$\mathrm{R}^m$ 的一个子空间.

如果$\mathrm{r(A)}=r$，则还有 $\dim(\ker(T))=n-r$, $\dim(\mathrm{Im}(T))=r$.

6.4.2 线性变换的矩阵表示

线性变换的数量化

线性变换反映了向量的变化关系，所以线性变换的数量化，首先向量要数量化，即在线性空间中建立基底，再利用向量的坐标关系确定线性变换的数量形式．即

(1) V上取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$；

(2) 求出 $T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \ldots, T\varepsilon_n$的坐标

$$(T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \cdots, T\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

求出任意向量 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\ldots+x_n\varepsilon_n$ 的像的坐标，即

T数量化后的矩阵

$$\beta = T\alpha = T(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots x_n\varepsilon_n) = x_1 T\varepsilon_1 + x_2 T\varepsilon_2 + \cdots x_n T\varepsilon_n$$

$$= (T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \cdots, T\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

*显然n个向量$T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \ldots, T\varepsilon_n$就能表示整个的变换$T$

线性变换的矩阵表示

设 T：$V \to V$， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$是$V$的一组基 .

定理6.4.2 设对V的两个线性变换T_1和T_2，有

$$T_1\varepsilon_i = T_2\varepsilon_i \ , \ i=1,2,\dots,n \ ,$$

则 $T_1=T_2$ (这里两个线性变换相等是指它们对V的任一向量的像相等) .

证明：$T_1 x = T_1(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n) = x_1 T_1\varepsilon_1 + x_2 T_1\varepsilon_2 + \dots + x_n T_1\varepsilon_n$
$= x_1 T_2\varepsilon_1 + x_2 T_2\varepsilon_2 + \dots + x_n T_2\varepsilon_n = T_2(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n) = T_2 x$.

该定理告诉我们：线性变换T能够由基的像 $T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \dots, T\varepsilon_n$ 表示

引理6.4.1 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$是线性空间$V$的一组基，任给$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$，则一定存在唯一的线性变换$T$，使得

$$T\varepsilon_i = \alpha_i \ , \ i=1,2,\dots,n \ .$$

证明思路：(1)构造变换 $T(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$.
(2) 验证T为线性变换： $T(\alpha+\beta) = T\alpha + T\beta$, $T(\lambda\alpha) = \lambda T\alpha$,
其中 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$, $\beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \dots + b_n\varepsilon_n$.
唯一性由定理6.4.2显然 .

定理6.4.3 在线性空间V的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下，$V$上的线性变换$T$与$n$阶方阵 A 一一对应，且它们的对应关系是

$$(T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \ldots, T\varepsilon_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A .$$

即A的第i个列向量是$T\varepsilon_i$在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的坐标 .

若α和Tα的坐标为 x 和 y， 则有 $y=Ax$.

证明思路:

(1) 已知T，则 $T\varepsilon_i=a_{1i}\varepsilon_1+a_{2i}\varepsilon_2+\ldots+a_{ni}\varepsilon_n$，于是

$$(T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \ldots, T\varepsilon_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A，$$ 其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$

(2) 已知 A 如上,令 $\alpha_i=a_{1i}\varepsilon_1+\ldots+a_{ni}\varepsilon_n$,则$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A$,
由引理6.4.1存在唯一的线性变换T，使得 $T\varepsilon_i=\alpha_i$，于是有

$$(T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \ldots, T\varepsilon_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A .$$

(3) 设$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\ldots+x_n\varepsilon_n$，$T\alpha=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\ldots+y_n\varepsilon_n$，则有

$$T\alpha=T(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots x_n\varepsilon_n)=x_1T\varepsilon_1+x_2T\varepsilon_2+\cdots x_nT\varepsilon_n$$

$$=(T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\text{即}y=Ax.$$

例6.4.4 已知 $D: D[p(x)] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x)$ 是线性空间$\boldsymbol{P_n[x]}$ 上的线性变换，

求$\boldsymbol{D}$在基 **1**, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x^2}$, **…** , $\boldsymbol{x^n}$ 下的矩阵 **.**

解

$$(D(1), D(x), \cdots, D(x^n)) = (0, 1, \cdots, nx^{n-1}) = (1, x, x^2, \cdots, x^n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

即$\boldsymbol{D}$在基 **1**, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x^2}$, **…** , $\boldsymbol{x^n}$ 下的矩阵 是$\boldsymbol{n}$**+1**阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

例6.4.5 V是一个n维的线性空间，则V上的恒等变换E在任一组基下的矩阵都是单位矩阵E_n；
V上的数乘变换T_k在任一组基下的矩阵都是数量矩阵kE_n；
而零变换T_0在任一组基下的矩阵都是零矩阵.

恒等变换E在任一组基如 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵

$$E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

数乘变换T_k在任一组基如 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵

$$T_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)=(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \ldots, k\varepsilon_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix},$$

零变换T_0在任一组基如 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵

$$T_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)=(0, 0, \ldots, 0)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

补充例6E 已知$\mathbf{R}^{2\times 2}$上的线性变换T为:$T(A)=P^{-1}AP$,求T在基$E_{11},E_{12}, E_{21},E_{22}$下的矩阵$C$，其中

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix},E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

解：求C使得 $(T(E_{11}), T(E_{12}), T(E_{21}), T(E_{22}))=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})C$，因为

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix},$$

$$T(E_{11})=P^{-1}E_{11}P=\begin{pmatrix}3&3\\-2&-2\end{pmatrix}=3E_{11}+3E_{12}-2E_{21}-2E_{22},$$

$$T(E_{12})=P^{-1}E_{12}P=\begin{pmatrix}6&9\\-4&-6\end{pmatrix}=6E_{11}+9E_{12}-4E_{21}-6E_{22},$$

$$T(E_{21})=P^{-1}E_{21}P=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}=-E_{11}-E_{12}+E_{21}+E_{22},$$

$$T(E_{22})=P^{-1}E_{22}P=\begin{pmatrix}-2&-3\\2&3\end{pmatrix}=-2E_{11}-3E_{12}+2E_{21}+3E_{22}.$$

故$(T(E_{11}),T(E_{12}),T(E_{21}),T(E_{22}))=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})C$，其中$C=\begin{pmatrix}3&6&-1&-2\\3&9&-1&-3\\-2&-4&1&2\\-2&-6&1&3\end{pmatrix}.$

例6.4.6 设T是R^3到R^3的线性变换： $T: T(xi+yj+zk)=xi+yj$.

这其实是把空间向量投影到xOy面上的线性变换 .

(1) 求T在基底 i, j, k 下的矩阵；

(2) 求T在基底 $\alpha=i$, $\beta=j$, $\gamma=i+j+k$ 下的矩阵 .

解 (1) 由T的定义可知 $T(i)=i$, $T(j)=j$, $T(k)=0$,

即

$$T(i,j,k)=(i,j,k)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故T在基底 i, j, k 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

(2) 由题设 $T(\alpha)=i=\alpha$, $T(\beta)=j=\beta$, $T(\gamma)=i+j=\alpha+\beta$,

即

$$T(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故T在基底 $\alpha=i$, $\beta=j$, $\gamma=i+j+k$ 下的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$

下面的定理使上例的(2)有更好的方法处理：

$B=P^{-1}AP$, 其中 $(\alpha, \beta, \gamma)=(i, j, k)P$.

定理6.4.4 在n维线性空间V中取定两组基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$与$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$，设由基底$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$到$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$的过渡矩阵为 P (P可逆)，即$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)P$，并设$V$上的线性变换$T$在这两组基底下的矩阵分别是$A$和$B$，则

$$B=P^{-1}AP,$$

即A相似于B（$A\sim B$）.

说明：

(1) 罗列已知条件：

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)P,$$
$$(T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \ldots, T\varepsilon_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A,$$
$$(T\omega_1, T\omega_2, \ldots, T\omega_n)=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)B,$$

(2) 用$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$表示$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$,

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) P^{-1},$$
$$(T\omega_1, T\omega_2, \ldots, T\omega_n)=T(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$
$$=T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)P=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) AP$$
$$= (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) P^{-1}AP=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)B,$$

故 $B=P^{-1}AP$.

进一步说明：$T(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+ \ldots +x_n\varepsilon_n)= x_1T\varepsilon_1+x_2T\varepsilon_2+ \ldots +x_nT\varepsilon_n$，即

$T((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)x)=(T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \ldots, T\varepsilon_n)x=(T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n))x$

故 $T((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)P)=(T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n))P$.

定理6.4.5 设A, B都是n 阶方阵，则 $A\sim B$ 的充要条件是：它们是n 维的线性空间V上的某个线性变换T在不同基底下的矩阵 .

说明：

(1) “<=”：定理6.4.4的结论

(2) “=>”：$A\sim B$，则有关系： $B=P^{-1}AP$ ，

V上取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$，则$A$对应线性变换$T$.

V上再取另一组基$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$， 有关系：

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)P,$$

则T在基$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$下的矩阵为：$P^{-1}AP=B$.

基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ $\qquad A$

$\Big\downarrow$ 过渡矩阵P $\qquad$ 线性变换 T

基$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ $\qquad P^{-1}AP=B$

例6.4.7 设线性变换T在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&8\\5&7&0&1\\3&0&1&3\\1&1&2&2\end{pmatrix}.$$

试求T在基$\omega_1=\varepsilon_1$，$\omega_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\omega_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $\omega_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$下的矩阵 .

解 法一：由A的定义知

$$T\varepsilon_1=\varepsilon_1+5\varepsilon_2+3\varepsilon_3+\varepsilon_4,$$
$$T\varepsilon_2=3\varepsilon_1+7\varepsilon_2+\varepsilon_4,$$
$$T\varepsilon_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,$$
$$T\varepsilon_4=8\varepsilon_1+\varepsilon_2+3\varepsilon_3+2\varepsilon_4 .$$

于是

$$T\omega_1=T\varepsilon_1=\varepsilon_1+5\varepsilon_2+3\varepsilon_3+\varepsilon_4=-4\omega_1+2\omega_2+2\omega_3+\omega_4,$$
$$T\omega_2=T(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=4\varepsilon_1+12\varepsilon_2+3\varepsilon_3+2\varepsilon_4=-8\omega_1+9\omega_2+\omega_3+2\omega_4,$$
$$T\omega_3=T(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=6\varepsilon_1+12\varepsilon_2+4\varepsilon_3+4\varepsilon_4=-6\omega_1+8\omega_2+4\omega_4,$$
$$T\omega_4=T(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)=14\varepsilon_1+13\varepsilon_2+7\varepsilon_3+6\varepsilon_4=\omega_1+6\omega_2+\omega_3+6\omega_4.$$

因此T在基 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}-4&-8&-6&1\\2&9&8&6\\2&1&0&1\\1&2&4&6\end{pmatrix}.$$

例6.4.7解法二：根据定理6.4.4，利用相似原理，由于从基底$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$到$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

所以

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2&8\\5&7&0&1\\3&0&1&3\\1&1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-8&-6&1\\2&9&8&6\\2&1&0&1\\1&2&4&6\end{pmatrix}.$$

补充例6F 已知V上线性变换T在两组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$和$\omega_1, \omega_2, \omega_3$下的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}.$$

求参数a和b，并求由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到$\omega_1,\omega_2,\omega_3$的过渡矩阵 .

解：显然$A\sim B$，故 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$, $|A|=|B|$，得$5+a=4+b$,$6(a-1)=4b$，解得$a=5,b=6$.
设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到$\omega_1, \omega_2, \omega_3$的过渡矩阵为$P$, 则有 $B=P^{-1}AP$, 即 $AP=PB$，P即为A的特征向量构成的矩阵，对应特征值$\lambda=2,2,6$.
$\lambda=2$时求得无关特征向量$\xi_1=(-1,1,0)^T$, $\xi_2=(1,0,1)^T$.
$\lambda=6$时求得特征向量 $\xi_3=(1,-2,3)^T$.
则过渡矩阵 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

补充例6G已知线性空间V，V上线性变换T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}3 & -6 & 5\\ 2 & -4 & 3\\ -4 & 8 & 1\end{pmatrix}$

试求T的像空间与核空间的基，并将像空间与核空间的基分别扩展成V下的基.

解：因为$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,T\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$，故$A$列向量的极大无关组对应于像空间的基.

因为$T\xi=T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)Ax=\theta$，故$Ax=\theta$的基础解系对应于核空间的基.

由$A=\begin{pmatrix}3 & -6 & 5\\ 2 & -4 & 3\\ -4 & 8 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，故对应于$A$的1,3列$T\varepsilon_1$, $T\varepsilon_3$构成像空间的基，

同时基础解系为$(2,1,0)^T$，故$\eta=2\varepsilon_1+\varepsilon_2$为核空间的基.

因为$\begin{vmatrix}3 & 5 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0,\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$，故$T\varepsilon_1$, $T\varepsilon_3$, ε_3和η, ε_2, ε_3均为V的基.

数域K上的线性空间V与K^n的对应关系

基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下

线性空间 $V \longleftrightarrow K^n$

线性变换 $T \longleftrightarrow A$

向量 $\begin{cases} \xi,\eta \longleftrightarrow x,y \\ \eta = T\xi \longleftrightarrow y = Ax \end{cases}$

关系1 $T\xi = 0 \longleftrightarrow Ax = \theta$

关系2 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = \theta \longleftrightarrow k_1x_1 + \cdots + k_rx_r = \theta$

关系3 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r \longleftrightarrow y = k_1x_1 + \cdots + k_rx_r$

关系4 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$无关 $\longleftrightarrow$ $x_1,x_2,\cdots,x_r$无关

关系5 $\ker(T) \longleftrightarrow$ $Ax = \theta$ 的解集，即解空间

$\ker(T)$的基 $\longleftrightarrow$ $Ax = \theta$ 的基础解系

关系6 $\mathrm{Im}(T)=span\{T\varepsilon_1,\cdots,T\varepsilon_n\} \longleftrightarrow \{Ax \mid x \in \mathrm{R}^n\}$即$A$列所有组合

$\mathrm{Im}(T)$的基

即$\{T\varepsilon_1,\cdots,T\varepsilon_n\}$的极大无关组 $\longleftrightarrow$ A 的列的极大无关组

补充例6H 已$P_3[x]$上的线性变换D：$D(p(x))=p'(x)$ (求导数)， 取$P_3[x]$上的一组基为 Φ：$x^3, x^2, x, 1$.

(1) 求D在基 Φ上的矩阵A.

(2) 求D的像空间 $W_1=\mathrm{Im}(D)$ 与核空间 $W_2=\ker(D)$的一组基.

(3) 求像空间与核空间的交$V_1=W_1\cap W_2$，及和 $V_2=W_1+W_2$的一组基.

解： (1)

$$(D(x^3),D(x^2),D(x),D(1))=(3x^2,2x,1,0)=(x^3,x^2,x,1)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=(x^3,x^2,x,1)A,\text{故}A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) $p_1(x)=D(x^3)=3x^2, p_2(x)=D(x^2)=2x, p_3(x)=D(x)=1, p_4(x)=D(1)=0$ 对应坐标为 $\beta_1=(0,3,0,0)^T$, $\beta_2=(0,0,2,0)^T$, $\beta_3=(0,0,0,1)^T$, $\beta_4=(0,0,0,0)^T$.

$W_1=\mathrm{Im}(D)=\mathrm{span}\{D(x^3), D(x^2), D(x), D(1)\}=\mathrm{span}\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$，

W_1的基就是$p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$的极大无关组，对应$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的极大无关组.

计算极大无关组

$$A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (*)$$

由上述式子可知 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$有一个极大无关组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$，对应地 $p_1(x)$, $p_2(x), p_3(x)$为$W_1=\mathrm{Im}(D)$的一组基，$W_1=\mathrm{span}\{ p_1(x), p_2(x), p_3(x) \}$.

$W_2=\ker(D)=\{p(x)\mid Dp(x)=0\}$，而

$$Dp(x)=D(x^3,x^2,x,1)\xi=(x^3,x^2,x,1)A\xi=\theta,$$

故$A\xi=\theta$的基础解系对应于核空间的基. 由 (*) 式解得$A\xi=\theta$的基础解系为 $\gamma=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，故$q(x)=1$为$W_2=\ker(D)$的一组基，$W_2=\mathrm{span}\{q(x)\}$.

(3) 求空间$V_1=W_1\cap W_2$，即求 $\xi=t_1p_1(x)+t_2p_2(x)+t_3p_3(x)=t_4q(x)$，对应地要求 $t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3=t_4\gamma$，即解方程组$t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3-t_4\gamma=0$.

$$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (**)$$

解得 $(t_1,t_2,t_3,-t_4)^{\mathrm{T}}=k(0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$,故 $V_1=W_1\cap W_2=\{t_4q(x)\}=\{-kq(x)\}=\mathrm{span}\{q(x)\}$, $q(x)=1$为V_1的一组基.

求空间$V_2=W_1+W_2$，因为 $W_1+W_2=\mathrm{span}\{p_1(x),p_2(x),p_3(x),q(x)\}$，故求$V_2$的一组基就是求$p_1(x),p_2(x),p_3(x),q(x)$的一个极大无关组，对应地就是求$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma$的一个极大无关组.

由 (**) 式可得一个极大无关组为 β_1,β_2,β_3，对应地 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$为V_2的一组基.