南京大学线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2016.4.23

一.(10分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 15 & 3 & 12 \\ 20 & 12 & 32 \end{vmatrix}$$

二.(10分) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵且为严格上三角形矩阵(即 $a_{ij}=0, \forall i \geq j$)，证明 $A^n = O$.

三.(10分) 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求该向量组的一个极大线性无关组，并用它表示其余的向量。

四.(10分) 设 A 是 n 阶方阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 n 维列向量。已知

$$A\alpha_1 = c_1\alpha_1\ , \quad A\alpha_2 = c_2\alpha_1 + c_1\alpha_2\ , \quad A\alpha_3 = c_2\alpha_2 + c_1\alpha_3\ , \quad c_2 \neq 0.$$

假设 α_1, α_2 线性无关，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

五.(10分) 证明方程组 $AX=0$ 与方程组 $A^TAX=0$ 是同解方程组，其中 $A \in R^{m\times n}$.

六.(10分) 设 $AX=0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$， $BX=0$ 的基础解系为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 A, B 为4阶方阵，求

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

的基础解系。

七.(10分) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，其行简化梯形矩阵为 B. 若 B 的第1列为标准列向量e_1，第2列为标准列向量e_2，...，第r列为标准列向量e_r $(r \leq m)$,

(1) 证明 A 的第1列，第2列，...，第r列是线性无关列向量。

(2) 若进一步有A的秩等于r，则A的第1列，第2列，...，第r列是A的一个极大线性无关组。

八.(15分) 设 A, B 为3阶方阵，已知 $BA = A + 2B$.

(1) 证明 A, B 可交换（即 $AB = BA$ ）；

(2) 若

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

求矩阵 B.

九.(15分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ a+1 & 2 \end{pmatrix}$ ，试问当 a 取何值时，矩阵方程 $AX=B$ 无解；有唯一解；有无穷多解？当矩阵方程有解时请求出其解。