南京大学线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2016.4.23

一.(10**分**) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 15 & 3 & 12 \\ 20 & 12 & 32 \end{vmatrix}$$

解：行列式第一第二两行成比例，故行列式为0.

二.(10**分**) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵且为严格上三角形矩阵(即 $a_{ij}=0, \forall i \ge j$)，证明 $A^n=O$.

证：设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},0,\cdots,0)^T, y=Ax=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，
则有 $y_k=a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{k,i-1}x_{i-1}+a_{ki}\dot{0}+\cdots+a_{kn}\dot{0}=a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{k,i-1}x_{i-1}$.
当 $k \ge i-1$ 时，有 $a_{k1}=a_{k2}=\cdots=a_{k,i-1}=0$，故 $y_k=0$，即 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_{i-2},0,0,\cdots,0)^T$.
我们得到结论：列向量左乘A后，列向量下面就多一位0分量.
故对于任何向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)^T$，有 $A^{n-1}x=\theta$.
将A按列分块，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则每一列的最后一个分量都是0，
故$A^n=A^{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(A^{n-1}\alpha_1,\cdots,A^{n-1}\alpha_n)=O$.

证法二：用归纳法. 当$m=1$时结论显然.
假设当$m=n$时结论成立，即n阶严格上三角形方阵A满足 $A^n=O$.
当 $m=n+1$ 时，将 $n+1$ 阶严格上三角方阵分块如下：
$A_{n+1}=\begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}$，其中 β 为n维列向量，B_n 为 n 阶方阵. 易知，B_n 为n阶严格上三角形方阵.
由归纳假设有 $B_n^n=O$，且有 $A_{n+1}^2=\begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_n & \theta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}$.
故有

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{n+1} &= \begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} B_n & \theta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_n^n & \theta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_n & \beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_n^{n+1} & B_n^n\beta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}=O. \end{aligned}$$

证毕.

三.(10**分**) 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

求该向量组的一个极大线性无关组，并用它表示其余的向量。

解：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组，且有 $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

四.(10**分**) 设 A 是 n 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 n 维列向量。已知

$$A\alpha_1=c_1\alpha_1\,, \quad A\alpha_2=c_2\alpha_1+c_1\alpha_2\,, \quad A\alpha_3=c_2\alpha_2+c_1\alpha_3\,, \quad c_2 \ne 0.$$

假设 α_1,α_2 线性无关，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

证：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$，左乘$A$得 $(c_1k_1+c_2k_2)\alpha_1+(c_1k_2+c_2k_3)\alpha_2+c_1k_3\alpha_3=\theta$，即

$$\begin{cases} k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta, \\ (c_1k_1+c_2k_2)\alpha_1+(c_1k_2+c_2k_3)\alpha_2+c_1k_3\alpha_3=\theta. \end{cases}$$

第二式减去第一式的 c_1 倍，得 $c_2k_2\alpha_1+c_2k_3\alpha_2=\theta$，由于 $c_2\neq 0$，故有 $k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=\theta$.
因为 α_1,α_2 线性无关，故 $k_2=k_3=0$，
代入 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$，得 $k_1\alpha_1=\theta$，由 α_1,α_2 线性无关，必有 $\alpha_1\neq\theta$，故 $k_1=0$.
于是 $k_1=k_2=k_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

证法二：反证法，设线性相关，则 α_3 可由 α_1,α_2 线性表示，设为 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.
两边左乘A得：$c_2\alpha_2+c_1\alpha_3=A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1c_1\alpha_1+k_2(c_2\alpha_1+c_1\alpha_2)$，整理后得 $c_2\alpha_2=k_2c_2\alpha_1$.
因为 $c_2\neq 0$，故有 $\alpha_2=k_2\alpha_1$，与 α_1,α_2 线性无关矛盾，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

五.(10**分**) 证明方程组 $AX=0$ 与方程组 $A^TAX=0$ 是同解方程组，其中 $A\in R^{m\times n}$.

证：易知若X满足$AX=0$，必有$A^TAX=A^T0=0$.
反之若X满足$A^TAX=0$，设$AX=y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$，则$y^Ty=X^TA^TAX=0$，即$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2=0$，故有$AX=y=0$. 于是两方程组同解.

六.(10**分**) 设 $AX=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$， $BX=0$ 的基础解系为 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 A,B 为4阶方阵，求

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=0$$

的基础解系。

解：易知 $AX=0$ 的通解为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$BX=0$ 的通解为 $t_1\beta_1+t_2\beta_2$.
故 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 的解集为 $AX=0$和$BX=0$ 的通解的交集，

即满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=t_1\beta_1+t_2\beta_2$ 的所有组合，解方程 $(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\t_1\\t_2\end{pmatrix}=\theta$，

$$(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)=\begin{pmatrix}0&1&-1&-2\\0&2&1&-1\\1&0&-1&-1\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故得到解 $(k_1,k_2,t_1,t_2)^T=k(0,1,-1,1)^T$，故通解为 $k\alpha_2$，基础解系为 α_2.

七.(10**分**) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，其行简化梯形矩阵为 B. 若 B 的第1列为标准列向量e_1，第2列为标准列向量e_2，...，第r列为标准列向量e_r $(r\leq m)$，
(1)　证明 A 的第1列，第2列，...，第r列是线性无关列向量。
(2)　若进一步有A的秩等于r，则A的第1列，第2列，...，第r列是A的一个极大线性无关组。

证：(1) 将A和B按列分块，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，其中 $\beta_1=e_1,\beta_2=e_2,\cdots,\beta_r=e_r$.
对A进行一系列的初等行变换得到行简化梯形B，等价于矩阵A左乘一个可逆矩阵P，即 $B=PA$，显然 $e_1=\beta_1=P\alpha_1,e_2=\beta_2=P\alpha_2,\cdots,e_r=\beta_r=P\alpha_r$.
设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\theta$，左乘$P$得 $k_1P\alpha_1+k_2P\alpha_2+\cdots+k_rP\alpha_r=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r=\theta$，

故 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.
(2) 由(1)知A的前r列线性无关，而A的秩等于r，故A的列的极大无关向量组含r个列向量，故A的前r列是A的一个极大线性无关组.

八.(15分) 设 A,B 为3阶方阵，已知 $BA=A+2B$.
(1) 证明 A,B 可交换（即 $AB=BA$ ）；
(2) 若

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}\quad.$$

求矩阵 B.

(1) 证：$BA=A+2B$ 可得 $\frac{1}{2}(B-E)(A-2E)=E$，故 $\frac{1}{2}(B-E)$ 为 $(A-2E)^{-1}$，
于是有 $(A-2E)(\frac{1}{2}(B-E))=E$，即 $AB=A+2B=BA$.
(2) 解：易知有 $B(A-2E)=A$，转置后得到 $(A^T-2E)B^T=A^T$，求解如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&3&1&0\\0&-1&1&0&1&1\\1&0&2&1&0&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&2&1\\0&1&-1&0&-1&-1\\0&0&1&-2&-2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&4&-2\\0&1&0&-2&-3&2\\0&0&1&-2&-2&3\end{array}\right).$$

故 $B=\begin{pmatrix}5&4&-2\\-2&-3&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

九.(15分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\a+1&2\end{pmatrix}$，试问当 a 取何值时，矩阵方程 $AX=B$ 无解；有唯一解；有无穷多解？当矩阵方程有解时请求出其解。

解：

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&2&2\\2&a&-1&1&a\\1&-1&a&a+1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&2&2\\0&a+2&-3&-3&a-4\\0&0&a-1&a-1&0\end{array}\right)=C_1.$$

当 $a\neq-2$且$a\neq1$时，有唯一解.

$$C_1\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&2\\0&a+2&0&0&a-4\\0&0&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&1&0\end{array}\right).$$

故唯一解为 $X=\begin{pmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\1&0\end{pmatrix}$.

当 $a=1$ 时，有无穷多组解.

$$C_1=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&2&2\\0&3&-3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&1\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

故无穷多组解为 $X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\k_1&k_2\\k_1&k_2\end{pmatrix}$，其中 $k_1,k_2\in R$.

当 $a=-2$ 时，$C_1=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&2&2\\0&0&-3&-3&-6\\0&0&-3&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&2&2\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-6\end{array}\right)$，即$A$的列不能表示出$B$的列，故无解.