2.5 矩阵的秩

考虑方程组：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5, \\ 5x_1+x_2-4x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$$

对应矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

简化方程组：

未交换方程

两个独立方程

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_2+x_3=3. \end{cases}$$

化为行梯形矩阵：

未交换行

两个非零行

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

进一步：

这两个方程独立

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_2+x_3=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5, \\ 5x_1+x_2-4x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$$

这两行独立，
可组合出第三行

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

一般地有方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

对应矩阵：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

简化方程组：

***k*个独立方程**

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1k}x_k+\cdots+c_{1n}x_n=c_{1,n+1} \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2k}x_k+\cdots+c_{2n}x_n=c_{2,n+1} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k+\cdots+c_{kn}x_n=c_{k,n+1} \end{cases}$$

化为倒梯形状：

***k*个非零行即独立行**
称矩阵秩为*k*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1,n+1} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} & \cdots & c_{k,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

矩阵的秩可以用矩阵中最大非零子行列式的阶数来描述.

$$\text{考虑：}A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 1 & 3 & -5\\ 2 & 3 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\text{，　秩为}2.$$

A 的子行列式有:3阶 $\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 1 & 3 & -5\\ 2 & 3 & -7\end{vmatrix}=0$，　2行2列构成2 阶子行列式 $\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 1 & 3 & -5\\ 2 & 3 & -7\end{pmatrix}$ 构成 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}$

2阶子行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1$，$\begin{vmatrix}1 & -4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-1$，$\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & -5\end{vmatrix}=2$，$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1$，

$\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -7\end{vmatrix}=1$，$\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & -7\end{vmatrix}=-2$，$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3$，$\begin{vmatrix}1 & -5\\ 2 & -7\end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix}3 & -5\\ 3 & -7\end{vmatrix}=-6$，

1阶 $\det(1),\det(2),\det(-4),\det(1),\det(3),\det(-5),\det(2),\det(3),\det(-7)$

矩阵A最大非零子行列式阶为2，就是A的秩.

定义2.5.1 (矩阵的子式) 设A是一个$m\times n$矩阵，任取A的k行与k列($0<k\le\min\{m,n\}$)，位于这些行列交叉处的k^2个元素，按原来顺序排成的k阶行列式，称为矩阵的k阶子式 .

一般地，$m\times n$矩阵的k阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个 .

定义2.5.2 (矩阵的秩) 设A是一个$m\times n$矩阵，如果A中至少存在一个非零的r阶子式D，且所有$r+1$阶子式(如果存在的话)全为零，则D称为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵A的秩，记为$\mathrm{r}(A)=r$(或$\mathrm{rank}\ A=r$). 并规定零矩阵的秩等于0 .

若所有$r+1$阶子式全为零，则$r+2,r+3,\ldots$的子式(如果存在的话)也全为零.

满秩矩阵：方阵A的秩等于它的阶数，即$\mathrm{r}(A)=n$ ，也即 $|A|\neq 0$.

求秩时非零子式只要有一个就可以，如 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 秩为3

矩阵秩的简单性质：

(1) $\mathrm{r}(A)$是A的非零子式的最高阶数;

(2) $0\le \mathrm{r}(A_{m\times n})\le \min(m,n)$;

(3) $\mathrm{r}(A^T)=\mathrm{r}(A)$;

A^T的子式与A的对应子式互为转置行列式，非零性相同

(4) 对于n阶方阵A，$\mathrm{r}(A)=n$(即A为满秩矩阵)$\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$非异.

例2.5.1 求矩阵A和B的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\5&0&4\\-1&3&-2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&3&-9&3\\0&1&-3&4\\-2&-3&9&6\end{pmatrix}.$$

解 由于 $|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\5&0&4\\-1&3&-2\end{vmatrix}\overset{c_2\leftrightarrow c_3}{=}-\begin{vmatrix}2&0&0\\5&4&0\\-1&-2&3\end{vmatrix}=-24\neq 0,$

所以 r(A)=3.

由于B中最高阶子式为3阶，共有4个，全为零，所以r(B) ≤2，又有二阶子式 $\begin{vmatrix}0&1\\-2&-3\end{vmatrix}=2\neq 0,$ **因此 r(B)=2 .**

定理2.5.1 初等行、列变换不改变矩阵的秩 .

证明思路：以初等行变换为例

$A\xrightarrow{r}B$ r=r(A)，由于初等变换可逆，故只要证明 r(B) ≥ r

关键是找变换后B的非零r阶子式

以秩为3的矩阵 A为例进行说明

r(A)=3
3阶非零子式

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

矩阵 A

3阶非零子式: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

对调变换

3阶非零子式

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

矩阵 B

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

倍乘变换：k=3

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 6 & * & -3 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

倍加变换：3倍加

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ -1 & * & 5 & 3 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ -1 & * & 2 & 3 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 1 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

情况1: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ -4 & * & -4 & -6 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ -2 & * & -1 & -2 & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

情况2: $0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2+3(-2) & -1+3(-1) & 0+3(-2) \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3(-2) & 3(-1) & 3(-2) \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = D + 3\times(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 - 3D', \therefore D' \neq 0$$

定理2.5.2 行梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数.

说明： 若行梯形矩阵A的非零行有k行，则含零行子式为0，故矩阵秩$\le k$.

k个非零行的首元素所在列构成的k阶子式 $\begin{vmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \cdots & a_{1,j_k} \\ 0 & a_{2,j_2} & \cdots & a_{2,j_k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,j_k} \end{vmatrix} = a_{1,j_2}\cdots a_{k,j_k} \neq 0,$ 故秩为 k.

注：列梯形矩阵的秩为非零列的个数.

推论2.5.3 任一满秩矩阵都可以经过若干次初等行(列)变换变为单位矩阵.

例2.5.2 求矩阵A的秩，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ 有二个非零行，故 r(A)=2.

例2.5.3 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & 6 & \mu \end{pmatrix}$，且r($A$)=2，求$\lambda$ 及μ的值 .

解 初等行变换

$$A \xrightarrow{\frac{1}{3}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & 6 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & -6 & 6 & \mu+\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 6-2\lambda & \mu+2 \end{pmatrix},$$

已知 r(A)=2，所以得 λ=3, μ=-2.

补充例2H 求矩阵A的秩 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-4&-5\\0&3&6\\-1&0&-3\end{pmatrix}$.

解法一：

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-4&-5\\0&3&6\\-1&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-3&-6\\0&3&6\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&-2\\0&3&6\\0&-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_2]{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\text{故}\ \mathrm{r}(A)=2.$$

解法二：转置后求秩

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\-1&-4&3&0\\1&-5&6&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-3&3&-1\\0&-6&6&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-3&3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\text{故}\ \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=2.$$

解法三：用初等列变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-4&-5\\0&3&6\\-1&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-c_1]{c_2+c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-3&-6\\0&3&6\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-2c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-3&0\\0&3&0\\-1&-1&0\end{pmatrix},\text{故}\mathrm{r}(A)=2.$$

定理2.6.4 (矩阵的分解) 设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=r$，则存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使得$A=P\Lambda Q$，其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

证明：A 经过一系列的初等行变换等价于左乘初等矩阵$P_s\dots P_2P_1A$，再经过一系列的初等列变换得$P_s\dots P_2P_1AQ_1Q_2\dots Q_t$，最后可化为标准型$\Lambda$.初等矩阵可逆，故有：

$A=P_1^{-1}P_2^{-1}\dots P_s^{-1}\Lambda Q_t^{-1}\dots Q_2^{-1}Q_1^{-1}=P\Lambda Q$，其中$P,Q$可逆.

注：$A\in R^{m\times n}$，$r(A)=r$，则有 $A=BC$，其中$B\in R^{m\times r}$, $C\in R^{r\times n}$.

因为 $A=P\Lambda Q=(B,B_2)\begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix}=(B,O)\begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix}=BC.$

推论2.6.5 任一n阶可逆矩阵A均可以表示成有限个n阶初等矩阵的乘积。进一步，任一可逆矩阵可以只经过行的初等变换化为单位阵，也可以只经过列的初等变换化为单位阵。

一系列的初等行(列)变换等价于左(右)乘可逆矩阵

定理2.6.6 设A是$m\times n$矩阵，P,Q分别是m阶和n阶可逆矩阵，则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ).$$

证明：由于可逆矩阵P,Q可以表示为有限个初等矩阵的乘积，而初等变换又不改变矩阵的秩，故结论成立。

例2.6.12 证明：任一秩为r的$m\times n$矩阵A总可表示为r个秩为1的矩阵的和.

证明　因为 $r(A)=r$，故存在m阶和n阶可逆矩阵P和Q，使得

$$A=P\Lambda Q=P(E_{11}+E_{22}+\ldots+E_{rr})Q,$$

其中，E_{ii} ($i=1,2,\ldots,r$) 是(i,i)元素为1，其它元素为0的$m\times n$矩阵.

由上式可得

$$A=PE_{11}Q+PE_{22}Q+\ldots+PE_{rr}Q.$$

再由定理2.6.6知 $r(PE_{ii}Q)=r(E_{ii})=1$，故结论成立.

进一步，令$P=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ ，$Q=\begin{pmatrix} q_1^{\mathrm{T}} \\ q_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ q_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

则有：$A=PE_{11}Q+PE_{22}Q+\ldots+PE_{rr}Q$

$$=Pe_1e_1^{\mathrm{T}}Q+Pe_2e_2^{\mathrm{T}}Q+\ldots+Pe_re_r^{\mathrm{T}}Q=p_1q_1^{\mathrm{T}}+p_2q_2^{\mathrm{T}}+\ldots+p_rq_r^{\mathrm{T}}.$$

矩阵和、积的秩的关系

定理2.7.14 (1) $r(A+B) \leqslant r(A)+r(B)$;

(2) $r(AB) \leqslant \min\{r(A),r(B)\}$;

(3) 若A , B均为n阶方阵，则$r(AB) \geqslant r(A)+r(B)-n$.

证明：(1) 由矩阵秩的定义知矩阵增加几行或增加几列，它们的秩不减. 作矩阵$(A+B,B)$，应用初等列变换可得 $(A+B,B) \to (A,B)$，于是有 $r(A+B) \leqslant r(A+B,B)=r(A,B) \leqslant r\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B)$.

(2) 设$r(A)=r_1$,$r(B)=r_2$，又设A的行梯形矩阵为A_0，B的列梯形矩阵为B_0，则存在可逆矩阵P和Q使$A=PA_0$, $B=B_0Q$，因为$AB=PA_0B_0Q$，所以$r(AB)=r(A_0B_0)$. 由于A_0只有r_1个非零行，B_0只有r_2个非零列，所以A_0B_0至多有r_1个非零行和r_2个非零列，故

$r(A_0B_0) \leqslant \min\{ r_1,r_2 \}=\min\{ r(A),r(B) \}$.

即得 $r(AB) \leqslant \min\{ r(A) , r(B) \}$

(3) 应用初等行变换可得 $\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} B & E \\ -AB & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$,于是有

$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$ （$\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix}$的最高阶非零子式在$\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$中对应的子式也非零）

$$= r\begin{pmatrix} B & E \\ -AB & O \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & E \\ AB & O \end{pmatrix} = r(AB)+n.$$

补充例2I 设矩阵 $A=MN^{\mathrm{T}}$, 其中$M,N\in\mathbf{R}^{n\times r}$ $(r\le n)$, $|N^{\mathrm{T}}M|\ne 0$, 证明$\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

证明 因为 $|N^{\mathrm{T}}M|\ne 0$，故矩阵 $(N^{\mathrm{T}}M)^3$ 可逆，于是有

$$r=\mathrm{r}((N^{\mathrm{T}}M)^3)=\mathrm{r}(N^{\mathrm{T}}A^2M)\le\mathrm{r}(A^2M)\le\mathrm{r}(A^2)\le\mathrm{r}(A)\le\mathrm{r}(M)\le r,$$

从而 $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

补充例2J 已知 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathrm{r}(A)=1$, 则有非零向量$\alpha\in\mathbf{R}^m$, $\beta\in\mathbf{R}^n$使得 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

证明 因为$\mathrm{r}(A)=1$，故有 $A=P\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}Q=Pe_1e_1^{\mathrm{T}}Q=(Pe_1)(e_1^{\mathrm{T}}Q)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$,

其中 P、Q为可逆矩阵，α , β为P和Q^{T}的第一列.

又有 $1=\mathrm{r}(A)\le\mathrm{r}(\beta^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\beta)\le 1$，故 $\mathrm{r}(\beta)=1$，同理 $\mathrm{r}(\alpha)=1$，故α , β非零 .