

## 2.5 矩阵的秩

考虑方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

对应矩阵:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

简化方程组:

未交换方程

两个独立方程

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

这两个方程独立

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

化为行梯形矩阵:

未交换行

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

两个非零行

进一步:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

这两行独立,  
可组合出第三行

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

一般地有方程组:

[illegible]

对应矩阵:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

### 简化方程组:

## $k$ 个独立方程

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1k}x_k + \dots + c_{1n}x_n = c_{1,n+1} \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2k}x_k + \dots + c_{2n}x_n = c_{2,n+1} \\ \dots\dots\dots \\ c_{kk}x_k + \dots + c_{kn}x_n = c_{k,n+1} \end{array} \right.$$

化为倒梯形状:

**$k$ 个非零行即独立行  
称矩阵秩为 $k$**

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1,n+1} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} & \cdots & c_{k,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的秩可以用矩阵中最大非零子行列式的阶数来描述。

考虑:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  , 秩为2.

$A$  的子行列式有: 3阶  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$  , 2行2列构成2阶子行列式  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$  构成  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

2阶子行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$  ,  $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1$  ,  $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2$  ,  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$  ,

$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 1$  ,  $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -2$  ,  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$  ,  $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 3$  ,  $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -6$  ,

1阶  $\det(1), \det(2), \det(-4), \det(1), \det(3), \det(-5), \det(2), \det(3), \det(-7)$

矩阵 $A$ 最大非零子行列式阶为2, 就是 $A$ 的秩.

**定义2.5.1 (矩阵的子式)** 设 $A$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 任取 $A$ 的 $k$ 行与 $k$ 列 ( $0 < k \leq \min\{m, n\}$ ), 位于这些行列交叉处的 $k^2$ 个元素, 按原来顺序排成的 $k$ 阶行列式, 称为矩阵的 $k$ 阶子式.

一般地,  $m \times n$ 矩阵的 $k$ 阶子式共有  $C_m^k C_n^k$  个.

**定义2.5.2 (矩阵的秩)** 设 $A$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 如果 $A$ 中至少存在一个非零的 $r$ 阶子式 $D$ , 且所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全为零, 则 $D$ 称为矩阵 $A$ 的最高阶非零子式, 数 $r$ 称为矩阵 $A$ 的秩, 记为 $\mathbf{r}(A)=r$  (或 $\text{rank } A=r$ ). 并规定零矩阵的秩等于0.

若所有 $r+1$ 阶子式全为零, 则 $r+2, r+3, \dots$ 的子式(如果存在的话)也全为零.

**满秩矩阵:** 方阵 $A$ 的秩等于它的阶数, 即 $\mathbf{r}(A)=n$ , 也即  $|A| \neq 0$ .

求秩时非零子式只要有一个就可以, 如  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  秩为3

矩阵秩的简单性质:

(1)  $\mathbf{r}(A)$ 是 $A$ 的非零子式的最高阶数;

(2)  $0 \leq \mathbf{r}(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$ ;

(3)  $\mathbf{r}(A^T) = \mathbf{r}(A)$ ;

(4) 对于 $n$ 阶方阵 $A$ ,  $\mathbf{r}(A)=n$ (即 $A$ 为满秩矩阵) $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 非异.

$A^T$ 的子式与 $A$ 的对应子式互为转置行列式, 非零性相同

例2.5.1 求矩阵 $A$ 和 $B$ 的秩，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

解 由于  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$

所以  $r(A)=3$ .

由于 $B$ 中最高阶子式为3阶，共有4个，全为零，所以 $r(B) \leq 2$ ，又有二阶子式  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ ，因此  $r(B)=2$  .

定理2.5.1 初等行、列变换不改变矩阵的秩 .

证明思路：以初等行变换为例

$A \xrightarrow{r} B \quad r=r(A)$ ，由于初等变换可逆，故只要证明  $r(B) \geq r$

关键是找变换后 $B$ 的非零 $r$ 阶子式

$r(A)=3$   
3阶非零子式

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

矩阵  $A$

3阶非零子式:  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

以秩为3的矩阵  $A$  为例进行说明

对调变换

3阶非零子式

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

矩阵  $B$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

倍乘变换:  $k=3$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 6 & * & -3 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

倍加变换：3倍加

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ -1 & * & 5 & 3 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ 2 & * & -1 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ -1 & * & 2 & 3 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 1 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

情况1:  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & * & 2 & 3 & * \\ -4 & * & -4 & -6 & * \\ * & * & * & * & * \\ -1 & * & 2 & 1 & * \\ * & * & * & * & * \\ -2 & * & -1 & -2 & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

情况2:  $0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2+3(-2) & -1+3(-1) & 0+3(-2) \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3(-1) & 3(-2) & 3(-2) \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = D + 3 \times (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 - 3D', \therefore D' \neq 0$$

**定理2.5.2** 行梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数.

**说明:** 若行梯形矩阵 $A$ 的非零行有 $k$ 行, 则含零行子式为0, 故矩阵秩 $\leq k$ .

$k$ 个非零行的首元素所在列构成的 $k$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \cdots & a_{1,j_k} \\ 0 & a_{2,j_2} & \cdots & a_{2,j_k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,j_k} \end{vmatrix} = a_{1,j_2} \cdots a_{k,j_k} \neq 0, \text{ 故秩为 } k.$$

**注:** 列梯形矩阵的秩为非零列的个数.

**推论2.5.3** 任一满秩矩阵都可以经过若干次初等行(列)变换变为单位矩阵.

**例2.5.2** 求矩阵 $A$ 的秩, 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ .

**解**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 有二个非零行, 故 } r(A)=2.$$

**例2.5.3** 已知  $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & 6 & \mu \end{pmatrix}$ , 且 $r(A)=2$ , 求 $\lambda$ 及 $\mu$ 的值.

**解** 初等行变换

$$A \xrightarrow{\frac{1}{3}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & 6 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & -6 & 6 & \mu+\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 6-2\lambda & \mu+2 \end{pmatrix},$$

已知  $r(A)=2$ , 所以得  $\lambda=3, \mu=-2$ .



补充例2H 求矩阵 $A$ 的秩  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

解法一：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_2]{r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{故 } r(A) = 2.$$

解法二：转置后求秩

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{故 } r(A) = r(A^T) = 2.$$

解法三：用初等列变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{故 } r(A) = 2.$$

**定理2.6.4 (矩阵的分解)** 设 $A$ 为 $m \times n$ 矩阵,  $r(A)=r$ , 则存在 $m$ 阶可逆矩阵 $P$ 和 $n$ 阶可逆矩阵 $Q$ , 使得 $A=P\Lambda Q$ , 其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}.$$

**证明:**  $A$  经过一系列的初等行变换等价于左乘初等矩阵 $P_s \dots P_2 P_1 A$ , 再经过一系列的初等列变换得 $P_s \dots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_t$ , 最后可化为标准型 $\Lambda$ . 初等矩阵可逆, 故有:

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_s^{-1} \Lambda Q_t^{-1} \dots Q_2^{-1} Q_1^{-1} = P \Lambda Q, \text{ 其中 } P, Q \text{ 可逆.}$$

**注:**  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $r(A)=r$ , 则有  $A=BC$ , 其中  $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ .

$$\text{因为 } A = P \Lambda Q = (B, B_2) \begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix} = (B, O) \begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix} = BC.$$

**推论2.6.5** 任一 $n$ 阶可逆矩阵 $A$ 均可以表示成有限个 $n$ 阶初等矩阵的乘积。进一步, 任一可逆矩阵可以只经过行的初等变换化为单位阵, 也可以只经过列的初等变换化为单位阵。

一系列的初等行(列)变换等价于左(右)乘可逆矩阵

**定理2.6.6** 设 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵,  $P, Q$ 分别是 $m$ 阶和 $n$ 阶可逆矩阵, 则  

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ).$$

**证明:** 由于可逆矩阵 $P, Q$ 可以表示为有限个初等矩阵的乘积, 而初等变换又不改变矩阵的秩, 故结论成立。

**例2.6.12** 证明: 任一秩为 $r$ 的 $m \times n$ 矩阵 $A$ 总可表示为 $r$ 个秩为1的矩阵的和。

**证明** 因为  $r(A)=r$ , 故存在 $m$ 阶和 $n$ 阶可逆矩阵 $P$ 和 $Q$ , 使得

$$A=PAQ=P(E_{11}+E_{22}+\dots+E_{rr})Q,$$

其中,  $E_{ii}$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ) 是 $(i, i)$ 元素为1, 其它元素为0的 $m \times n$ 矩阵.  
 由上式可得

$$A=PE_{11}Q+PE_{22}Q+\dots+PE_{rr}Q.$$

再由定理2.6.6知  $r(PE_{ii}Q)=r(E_{ii})=1$ , 故结论成立.

进一步, 令  $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ ,  $Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}$ .

则有: 
$$\begin{aligned} A &= PE_{11}Q + PE_{22}Q + \dots + PE_{rr}Q \\ &= Pe_1e_1^TQ + Pe_2e_2^TQ + \dots + Pe_re_r^TQ = p_1q_1^T + p_2q_2^T + \dots + p_rq_r^T. \end{aligned}$$

## 矩阵和、积的秩的关系

定理2.7.14 (1)  $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$ ;

(2)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ ;

(3) 若 $A, B$ 均为 $n$ 阶方阵, 则 $r(AB) \geq r(A)+r(B)-n$ .

**证明:** (1) 由矩阵秩的定义知矩阵增加几行或增加几列, 它们的秩不减. 作矩阵 $(A+B, B)$ , 应用初等列变换可得  $(A+B, B) \rightarrow (A, B)$ , 于是有  $r(A+B) \leq r(A+B, B) = r(A, B) \leq r\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$ .

(2) 设 $r(A)=r_1, r(B)=r_2$ , 又设 $A$ 的行梯形矩阵为 $A_0$ ,  $B$ 的列梯形矩阵为 $B_0$ , 则存在可逆矩阵 $P$ 和 $Q$ 使 $A=PA_0, B=B_0Q$ , 因为 $AB=PA_0B_0Q$ , 所以  $r(AB)=r(A_0B_0)$ . 由于 $A_0$ 只有 $r_1$ 个非零行,  $B_0$ 只有 $r_2$ 个非零列, 所以  $A_0B_0$ 至多有 $r_1$ 个非零行和 $r_2$ 个非零列, 故  $r(A_0B_0) \leq \min\{r_1, r_2\} = \min\{r(A), r(B)\}$ . 即得  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ .

(3) 应用初等行变换可得  $\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} B & E \\ -AB & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$ , 于是有  $r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$  ( $\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix}$ 的最高阶非零子式在 $\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$ 中对应的子式也非零) 
$$= r\begin{pmatrix} B & E \\ -AB & O \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & E \\ AB & O \end{pmatrix} = r(AB) + n.$$

**补充例2I** 设矩阵  $A=MN^T$ , 其中  $M, N \in \mathbb{R}^{n \times r}$  ( $r \leq n$ ),  $|N^T M| \neq 0$ , 证明  $r(A^2)=r(A)$ .

证明 因为  $|N^T M| \neq 0$ , 故矩阵  $(N^T M)^3$  可逆, 于是有

$$r=r((N^T M)^3)=r(N^T A^2 M) \leq r(A^2 M) \leq r(A^2) \leq r(A) \leq r(M) \leq r,$$

从而  $r(A^2)=r(A)$ .

**补充例2J** 已知  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $r(A)=1$ , 则有非零向量  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^n$  使得  $A=\alpha\beta^T$ .

证明 因为  $r(A)=1$ , 故有  $A = P \begin{pmatrix} 1 & \\ & O \end{pmatrix} Q = P e_1 e_1^T Q = (P e_1)(e_1^T Q) = \alpha \beta^T$ ,

其中  $P$ 、 $Q$  为可逆矩阵,  $\alpha$ ,  $\beta$  为  $P$  和  $Q^T$  的第一列.

又有  $1=r(A) \leq r(\beta^T)=r(\beta) \leq 1$ , 故  $r(\beta)=1$ , 同理  $r(\alpha)=1$ , 故  $\alpha$ ,  $\beta$  非零.