1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

定义1.1.1 (二阶行列式) 将4个可以进行乘法与加法运算的元素a,b,c,d排成两行两列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

并称之为二阶行列式. 行列式也可简记为Δ、D等.

1.1.2 三阶行列式

定义1.1.2 (三阶行列式) 设有9个可以进行乘法和加法运算的元素排成三行三列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix},$$

并称之为三阶行列式，其中a_{ij} $(i,j=1,2,3)$ 为该行列式的元素 .

$$\begin{vmatrix} 3 & 1.5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 1.5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 1.5 \\ -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{matrix}$$

对角线法则
(Sarrus法则)

1.2 n阶行列式

我们注意二阶、三阶行列式的计算：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0.7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1.5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

利用对角线计算

4阶、**5**阶乃至n阶是否也利用对角线来计算呢？

答案是否定的。

因为行列式是用来给出线性方程组解的表达式。因此作为方程组解的表达式的主要式子，高阶行列式是不能用对角线法则计算的。

考虑一次方程组(线性方程组)解的表达式

1、二元一次方程组解的表达式

二元一次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (1)$$

将方程组(1)的第一式乘以a_{22}，第二式乘以a_{12}得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}, \end{cases}$$

第一式减去第二式得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

类似地，方程组(1)的第二式乘以a_{11}减去第一式乘以a_{21}得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

合并后得方程组

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1,\end{cases} \qquad (2)$$

用符号表示就是 $\begin{cases}\Delta x_1=\Delta_1, \\ \Delta x_2=\Delta_2,\end{cases} \qquad (3)$

其中△$=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，△$_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$，△$_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$

2阶行列式

为了表示△的值受四个元素$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$的数值及前后位置的影响，我们用有位置的元素形式表示如下

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}, \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

我们得到方程组(1)的解的表达式

$$\begin{cases} x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \end{cases} \text{其中:} \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

为了便于导出3阶行列式，我们看看二阶行列式有些什么明显的特点：

*1：任意一列的带比例的和可分割成两个行列式带比例的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+kc_1 & a_{12} \\ a_{21}+kc_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+kc_1 \\ a_{21} & a_{22}+kc_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$$

*2：相邻两列交换改变符号：

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ .$$

2、三元一次方程组解的表达式与3阶行列式

三元一次方程组为
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{4}$$

将方程组(4)的后两式改写为
$$\begin{cases} a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2-a_{21}x_1, \\ a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3-a_{31}x_1, \end{cases}$$

用行列式表示解为
$$\begin{cases} x_2=\begin{vmatrix} b_2-a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3-a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -x_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ x_3=\begin{vmatrix} a_{22} & b_2-a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3-a_{31}x_1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -x_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \quad = x_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

顺一下列

同步交换列

将上述的解代入方程组(4)的第一式： $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$，

并去掉分母得

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}x_1-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}x_1+a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}x_1-a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

移项后即为

$$(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix})x_1=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} \quad (5)$$

类似于2阶行列式，我们用下列形式表示上述组合项

3阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

方程(5)用符号表示为： $\Delta x_1=\Delta_1$

类似地，将后两式的x_2或x_3移到右边处理可得： $\Delta x_2=\Delta_2, \Delta x_3=\Delta_3$，

于是我们得到方程组 $$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1, \\ \Delta x_2 = \Delta_2, \\ \Delta x_3 = \Delta_3, \end{cases} \qquad (6)$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

进一步方程组(6)的解为： $$\begin{cases} x_1 = \Delta_1/\Delta, \\ x_2 = \Delta_2/\Delta, \\ x_3 = \Delta_3/\Delta, \end{cases}$$ 其中△ ≠0

*1：类似于2阶行列式, 3阶行列式任意一列比例和也可分割为两个行列式比例之和

$$\begin{vmatrix} a_{11}+kc_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+kc_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+kc_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}+kc_1)\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}+kc_2 & a_{23} \\ a_{31}+kc_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}+kc_2 & a_{22} \\ a_{31}+kc_3 & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$+kc_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}k\begin{vmatrix} c_2 & a_{23} \\ c_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}k\begin{vmatrix} c_2 & a_{22} \\ c_3 & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

同理可得第二第三列分割成两个行列式的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+kc_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+kc_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+kc_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+kc_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+kc_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+kc_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

*2：相邻两列交换改变符号：

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3、n元一次方程组解的表达式与n阶行列式

n元一次方程组为
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{7}$$

如同三元一次方程的求解，将方程组(7)的后n-1式改写为
$$\begin{cases} a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2-a_{21}x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n-a_{n1}x_1, \end{cases}$$

用n-1阶行列式表示解$x_2,x_3,\ldots,x_n$，并代入(7)的第一式并去掉分母可得

$$\Delta x_1=\Delta_1,\quad \text{(详细过程见后面)}$$

n阶行列式

其中：
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

进一步也可得： $\Delta x_2=\Delta_2,\cdots,\Delta x_n=\Delta_n,$

于是我们有解：

$$\begin{cases} x_1=\Delta_1/\Delta, \\ x_2=\Delta_2/\Delta, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n=\Delta_n/\Delta, \end{cases}$$

其中：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\cdots,\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

***详细过程：**$x_2,x_3,\ldots,x_n$行列式解代入方程组第一式：

方程组：$\begin{cases} a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2-a_{21}x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n-a_{n1}x_1, \end{cases}$

行列式解$x_2,x_3,\ldots,x_n$，

$$x_2=\begin{vmatrix} b_2-a_{21}x_1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3-a_{31}x_1 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n-a_{n1}x_1 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=-x_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$x_n \overset{\text{分割后同步顺列}}{=} -(-1)^{n-2}x_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{n-2}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ b_3 & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式解代入第一式后，去掉分母，再相关列平移到第一列得到：

$$(a_{11}x_1-b_1)\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+a_{12}(-x_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix})+a_{13}(-x_1(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix})+\cdots+a_{1n}(-x_1(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}+(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ b_3 & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix})=0,$$

$$(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}x_1-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+a_{1n}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix})x_1$$

$$=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+-)+a_{13}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

平移后可得　$\Delta x_1=\Delta_1,$

其中：$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

1.2.1、n阶行列式的定义

定义1.2.1 (n阶行列式) 设有n^2个可以进行加法和乘法运算的元素排成n行n列，引用记号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称之为n阶行列式，它是一个算式，有时也用记号$|a_{ij}|_{n\times n}$表示这个n阶行列式.
其中a_{ij} ($i,j=1,2,\ldots,n$) 称为该行列式的元素，其第一个足标i表示该元素在第i行，其第二个足标j表示该元素在第j列. 本教材中行列式的元素主要是数（实数或复数，有时也会是式子），这时行列式是一个数值，该数值可归纳定义如下：
当n=1时，一阶行列式的值定义为 $D_1=\det(a_{11})=a_{11}$.

当$n\geq 2$时，$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$， 其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，

而

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称M_{ij}为元素a_{ij}的余子式，A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式. 显然M_{ij}为一个n-1阶的行列式，它是D_n中划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列后得到的一个行列式.

例1.2.1 计算四阶行列式的值．$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解 按定义1.2.1

$$A=-2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=28-12+15=31.$$

* 四阶以上行列式不能用对角线法则

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

例1.2.2 右边行列式称为下三角行列式（当$i<j$时，a_{ij}=0，即主对角线上方的元素全为0），按定义计算其值

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$A=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

同样可计算上三角行列式（当$i>j$时，$a_{ij}=0$，即主对角线下方的元素全为0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用数学归纳法容易证明值为0

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

数学归纳法证第1列全为0的行列式为0，二阶$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0$，$n$阶如下：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = 0.$$

对角行列式（当$i\neq j$时，$a_{ij}=0$，即主对角线以外的元素全为0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

定义1.2.3(转置行列式) 设

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad A'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们称A'为行列式A的转置行列式。

显然，A'是行列式A的行与列互换之后所得的行列式。通常A的转置行列式也用A^T来表示。

定义1.2.2(基于逆序数的n阶行列式) 设有n^2个可以进行加法和乘法运算的元素排成n行n列，引用记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称它为n阶行列式，它是一个算式，其结果定义为

$$D_n=\sum_{s_1,s_2,\cdots,s_n}(-1)^{\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n},$$

其中，$s_1,s_2,\ldots,s_n$取遍$1,2,\ldots,n$的所有n元排列，$\sum$是对这$n!$个排列求和，$\tau(s_1,s_2,\ldots,s_n)$是排列$s_1,s_2,\ldots,s_n$的逆序数（即排列$s_1,s_2,\ldots,s_n$中逆序数对个数）.

容易发现，和式中的$n!$项在不计正负号的情况下，其实是取遍在不同行不同列的n个元素的乘积 .

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\ .$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\ .$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$