2.4 初等变换与初等矩阵

解如下方程组：

矩阵表示

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 = -1, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

借用行列式符号

(2)+(1)×2： r_2+2r_1：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ 7x_1 = 7, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

(2) ÷ 7： $r_2 \div 7$：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ x_1 = 1, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1) ↔ (2)： $r_1 \leftrightarrow r_2$：

$$\begin{cases} x_1 = 1, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 4, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

(2) - (1)×2： r_2-2r_1：

$$\begin{cases} x_1 = 1, & (1) \\ x_2 = 2, & (2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

矩阵形式解方程组：

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

由此导出矩阵的**初等变换**

初等变换：

- 行交换
- 行乘以一个非零数
- 行的倍数加到另一行

或者：

- 列交换
- 列乘以一非零数
- 列的倍数加到另一列

初等变换还可简化矩阵：

如同步简化矩阵中的列，从而找到矩阵中列的相互关系

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 3 & -2 & -2 & -2\\ 1 & 3 & -2 & -4 & -4\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{array}\end{array} \xrightarrow{r_i-r_1, i=2,3,4} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -5 & -5\\ 0 & 2 & -2 & -7 & -7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3+r_2\\ r_4+r_2\\ r_1+0.5r_2}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1-3r_3\\ r_4-r_3}]{\substack{r_2\div(-2)\\ r_3\div(-5)\\ r_4\div(-7)}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5\end{array}\end{array}$$

有$\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4-\beta_5=0$，则也有$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-\alpha_5=0$

定义2.4.1 (初等变换) 下面三种对矩阵的变换，统称为矩阵的初等变换：

(1) 对调变换：互换矩阵 i , j 两行(列)，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$) .

(2) 数乘变换：用任意数 $k \neq 0$ 去乘矩阵的第 i 行(列)，记作 kr_i (kc_i) .

(3) 倍加变换：把矩阵的第 i 行(列)的k倍加到第 j 行(列)，其中k为任意数，记作$r_j + kr_i$ ($c_j + kc_i$) .

注：初等变换都有逆变换：$r_i \leftrightarrow r_j \Leftrightarrow r_i \leftrightarrow r_j$, $kr_i \Leftrightarrow r_i \div k$, $r_j + kr_i \Leftrightarrow r_j - kr_i$

矩阵乘积有行或列变换的作用，见对角矩阵P左乘或右乘矩阵A

$$PA = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & k_1 a_{13} \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & k_2 a_{23} \\ k_3 a_{31} & k_3 a_{32} & k_3 a_{33} \end{pmatrix}$$ A各行乘以对应对角元

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & k_3 a_{13} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & k_3 a_{23} \\ k_1 a_{31} & k_2 a_{32} & k_3 a_{33} \end{pmatrix}$$ A各列乘以对应对角元

左乘对角矩阵相当于对矩阵的行乘上各个倍数，
右乘对角矩阵相当于对矩阵的列乘上各个倍数

更进一步，左乘矩阵相当于对矩阵作行的组合变换，
右乘对角矩阵相当于对矩阵作了列的组合变换

说明：
$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \overset{\substack{A\text{矩阵}\\ \text{按行分块}}}{=} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}\alpha_1 + k_{12}\alpha_2 \\ k_{21}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \overset{\substack{A\text{矩阵}\\ \text{按列分块}}}{=} (\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = (k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2, k_{12}\beta_1 + k_{22}\beta_2)$$

反过来，由初等变换找对应的矩阵***P***？

以交换矩阵的两行为例：
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = B = PA$$

矩阵***P***左乘矩阵达到两行交换：即 ***PA=B***，此处左乘***P***看成是一个作用

因为 $PA = P(EA) = (PE)A$，故有 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = PE = P$

故矩阵*P*是对单位矩阵*E*进行同样的初等行变换得到的矩阵(初等矩阵)

定义2.4.2 (初等矩阵) 将单位矩阵 E，做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵，对应于三类初等行(列)变换，有如下三种类型的初等矩阵 .

(1) 初等对调矩阵

对调E的i、j行
或者对调E的i、j列

$$E(i,j)=\begin{array}{cl}\begin{array}{ccccccc}&&i\text{列}&&j\text{列}&&\end{array}&\\\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{l}\\\\i\text{行}\\\\j\text{行}\\\\\\\end{array}\end{array},$$

(2) 初等倍乘矩阵

E的i行乘以k
或者E的i列乘以k

$$E(i(k))=\begin{array}{cl}\begin{array}{ccccc}&&i\text{列}&&\end{array}&\\\left(\begin{array}{ccccc}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{l}\\\\i\text{行}\\\\\\\end{array}\end{array},$$

特点：(i,i)元素是k

(3) 初等倍加矩阵

E的j行k倍加到i行
或者E的i列k倍加到j列

$$E(i,j(k))=\begin{array}{cl}\begin{array}{ccccccc}&&i\text{列}&&j\text{列}&&\end{array}&\\\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&k&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{l}\\\\i\text{行}\\\\j\text{行}\\\\\\\end{array}\end{array},$$

特点：(i,j)元素是k

初等矩阵的逆矩阵：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j),\quad E(i(k))^{-1}=E(i(1/k)),\quad E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$$

$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$：

$$E(i,j)E(i,j)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&0&&\\&&&\ddots&&&\\&&0&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}=E.$$

等价于两列交换

$E(i(k))^{-1}=E(i(1/k))$：

等价于列乘1/*k*

$$E(i(k))E(i(\frac{1}{k}))=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\frac{1}{k}&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}=E,\text{同理}E(i(\frac{1}{k}))E(i(k))=E.$$

$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$：

等价于*i*列-*k*倍加到*j*列

$$E(i,j(k))E(i,j(-k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&-k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&0&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}=E,\text{同理}E(i,j(-k))E(i,j(k))=E.$$

例2.4.1 计算矩阵与初等矩阵的乘积：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$ **相当于初等行变换：kr_2**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{31} & a_{12} + ka_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$ **相当于初等行变换：r_1+kr_3**

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}.$$ **相当于初等列变换：$c_2 \leftrightarrow c_3$**

初等矩阵的变换作用

定理2.4.1 (初等变换与初等矩阵) 设 A是一个$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以一个相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换, 相当于A的右边乘以一个相应n阶初等矩阵.

证明　只须具体验证即可, 此处只举一种情形. A按行分块，A施行第三种初等行变换, 将 A的第 j行乘 k倍加到i行上, 即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i+kr_j}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i+k\alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},\text{而}E(i,j(k))A=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i+kr_j}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i+k\alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}.$$

注：定理中相应初等矩阵表示同样的初等变换作用到E后的初等矩阵。

* 初等变换和分块矩阵结合来考虑例2.2.7的证明 思路.

P_{33}中例2.2.7原题为：证明 $|AB|=|A||B|$.

矩阵变换 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & ab \\ -1 & b \end{pmatrix},$

没有乘法交换，即可推广到分块矩阵 $\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix},$

取行列式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} \overset{\text{行倍加}}{=} \left|\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} O & AB \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & O \\ B & -E \end{vmatrix}.$$

补充例2G 已知同阶方阵 A,B,C,D，A可逆，且$AC=CA$，证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$

证明 由矩阵式子 $\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$

两边取行列式得 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|,$

因为 $AC=CA$，故有：左式$=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|$.

初等分块矩阵

***只讲2阶分块矩阵的初等分块矩阵**

$$\text{行交换:}\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{pmatrix},\quad \text{列交换:}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{22} & A_{21} \end{pmatrix}$$

$$\text{行倍乘:}\begin{pmatrix} P & O \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PA_{11} & PA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad \text{列倍乘:}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}P & A_{12} \\ A_{21}P & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{行倍加:}\begin{pmatrix} E & O \\ P & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}+PA_{11} & A_{22}+PA_{12} \end{pmatrix},$$

$$\text{列倍加:}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ P & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}+A_{12}P & A_{12} \\ A_{21}+A_{22}P & A_{22} \end{pmatrix}$$

一个矩阵是否可以通过初等变换化成任意一个同阶的矩阵？否

考虑3阶零矩阵和3阶单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{任意初等变换}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

有些矩阵可以通过初等行变换转换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，\text{但 } A \not\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有些矩阵可以通过初等行列变换转换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r,c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，\text{但 } A \not\xrightarrow{r,c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通过初等变换对矩阵进行一个分类，能相互变换的归成一类，
于是同一类的矩阵都可以通过初等变换简化成一类中的最简矩阵.

矩阵的简化 (行梯形、列梯形)

定义2.4.3 (行(列)等价矩阵，等价矩阵) 如果A经过有限次初等行变换变成矩阵B，称矩阵 A与B行等价，记作 $A \xrightarrow{r} B$；若矩阵 A经有限次初等列变换变成矩阵 B， 称矩阵A与B列等价，记作 $A \xrightarrow{c} B$；若矩阵 A经有限次初等变换变成矩阵 B， 称矩阵A与B等价，记作$A \to B$.

矩阵的等价是一种等价关系，具有：(1)自反性 (2)对称性 (3) 传递性.

行(列)等价的矩阵归为一类，然后找这一类中最简单的矩阵表示这一类.
行(列)等价类中最简单的矩阵就是行(列)简化梯形矩阵.
等价类中最简单的矩阵就是标准形矩阵.

行等价矩阵的意义：

考虑方程组：$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 = -1, & (2) \end{cases}$ 用矩阵形式求解：

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \text{故} \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

可以看到：

行等价矩阵对应的方程组是同解方程组，解对应的矩阵是

行等价矩阵中最简单的矩阵 $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$，就是行简化梯形矩阵.

零行(列)：矩阵中全为零的行(列)；非零行(列)：矩阵中不全为零的行(列).

定义2.4.4 (梯形矩阵，矩阵的标准形) 若矩阵A满足下面两个条件：

(1) 若有零行，则零行全部在下方，

(2) 从第一行起，每行第一个非零元素前面的零的个数逐行增加，则称A为行梯形矩阵. 若A还满足：

(3) 非零行的第一个非零元素为1，且 "1"所在的列的其余元素全为零，则称A为行简化梯形矩阵. 类似可定义列梯形矩阵与列简化梯形矩阵 .
若矩阵A既是行简化梯形矩阵，又是列简化梯形矩阵，则称A是标准形矩阵，矩阵的标准形可写为 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$

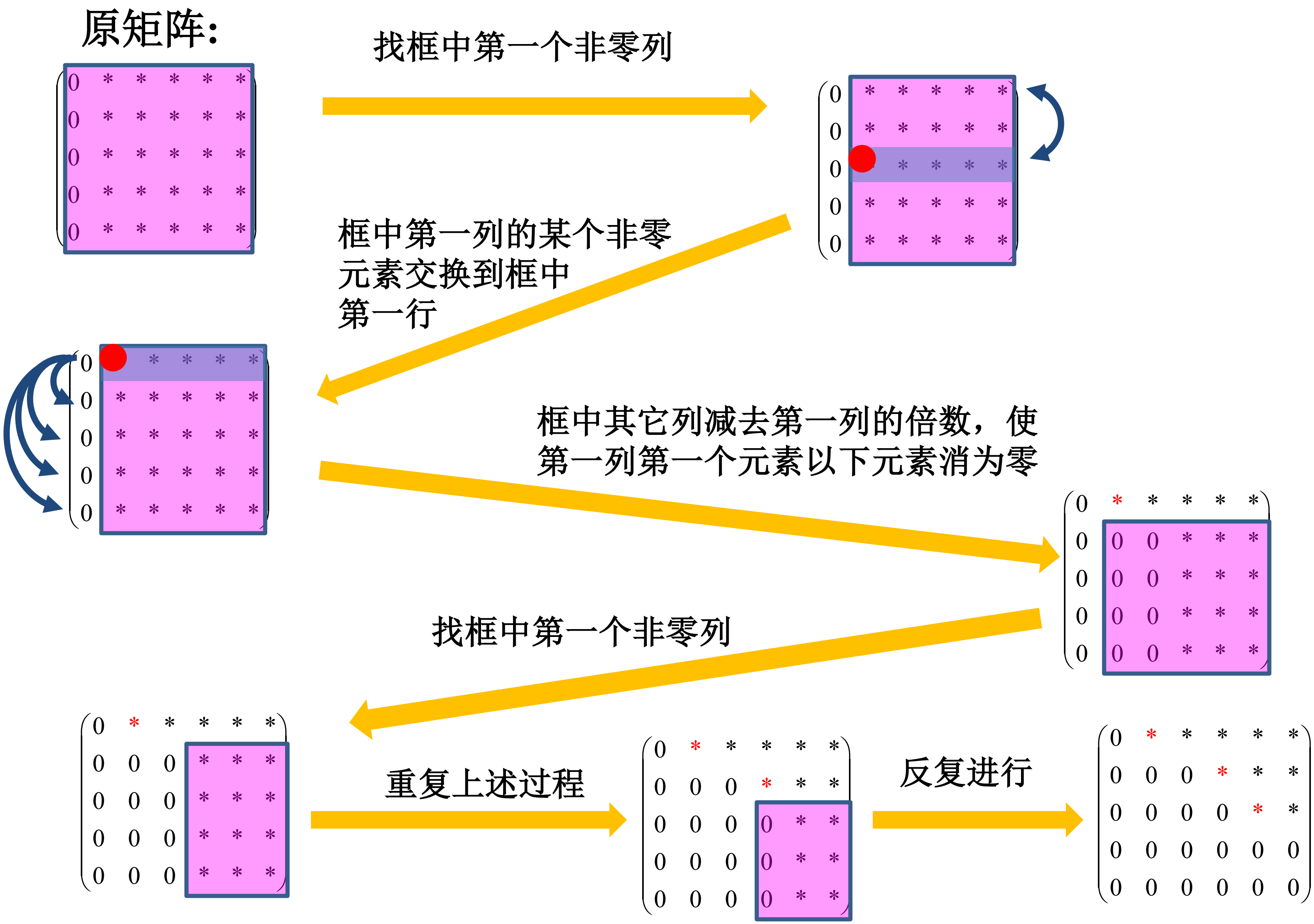
行梯形：$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，行简化梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，列梯形：$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2.1 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$，列简化梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 17 & 7.5 & 0 \end{pmatrix}$，标准型：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

定理2.4.2 (矩阵的化简) 设 A为 $m\times n$矩阵，

(1) 存在m阶初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_s$使$P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1A$ (即对A施行有限次的初等行变换) 成为$m\times n$阶行简化梯形矩阵 .
也存在n阶初等矩阵$Q_1,Q_2,\ldots,Q_t$使$AQ_1Q_2\cdots Q_t$ (即对A施行有限次的初等列变换) 成为$m\times n$阶列简化梯形矩阵 .

(2) 可以经过有限次的初等行变换和初等列变换，将矩阵A化为标准形 .

初等变换化行梯形、行简化梯形的说明



进一步化为行简化梯形

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

每一个非零行除以非零行首元素，化非零行行首为**1**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第二行乘以某个倍数加到第一行上，消去行首**1**上面的元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其它行乘以某个倍数加到它上面的所有行，消去该行行首**1**上的元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*** 注：矩阵*A*变换成的行(列)简化梯形矩阵是唯一的，标准形矩阵也是唯一的.**

例2.4.2 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-4&5\\1&3&-5&7\\2&3&-7&8\end{pmatrix}$，**$A$可经下列初等行变换化为行简化梯形矩阵.**

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-4&5\\1&3&-5&7\\2&3&-7&8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&-4&5\\0&1&-1&2\\2&3&-7&8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-4&5\\0&1&-1&2\\2&4&-8&10\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-4&5\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

相应的初等变换矩阵为

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix},P_4=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\quad P=P_4P_3P_2P_1=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}.$$

验算可得

$$P_4P_3P_2P_1A=PA=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-4&5\\1&3&-5&7\\2&3&-7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

***求A的行简化梯形及变换矩阵P使得PA为行简化梯形方法二：**

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&-4&5&1&0&0\\1&3&-5&7&0&1&0\\2&3&-7&8&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&-4&5&1&0&0\\0&1&-1&2&-1&1&0\\0&-1&1&-2&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&0&-2&1&3&-2&0\\0&1&-1&2&-1&1&0\\0&0&0&0&-3&1&1\end{array}\right)=(B,P).$$

其中，B为行简化梯形，P为变换矩阵使得$PA=B$.

原理：

按照定理2.4.2，有初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_s$使$P_sP_{s-1}\ldots P_2P_1A$为行简化梯形矩阵B，这等价于对A施行有限次的初等行变换化为行简化梯形矩阵B：

故 $(A,E)\xrightarrow{r}(B,P)$ 等价于

$$P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1(A,E)=(P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1A,P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1E)=(B,P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1)$$

若记 $P=P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1$，则有 $P(A,E)=(PA,PE)=(B,P)$

求P使得PA为行简化梯形B的方法：

初等行变换：$(A,E)\xrightarrow{r}(B,P)$

由此得到的P就是所求的变换矩阵.

* 矩阵A经过一系列初等行(列)变换可以转换成唯一的行(列)简化梯形矩阵;
矩阵A经过一系列初等行变换和初等列变换可以转换成唯一的标准形矩阵.

证明　由定理2.4.2知A通过初等行变换可以转换成行简化梯形矩阵.
假设n阶矩阵A经过有限次初等行变换后分别转换成了行简化梯形B_1和行简化梯形B_2，且B_1中含p个非零行，B_2中含q个非零行，$p \le q$. 用矩阵表示就是

$$P_s P_{s-1} \cdots P_1 A = B_1, Q_t Q_{t-1} \cdots Q_1 A = B_2,$$

于是有：$(Q_t Q_{t-2} \cdots Q_1 P_1^{-1} \cdots P_{s-1}{}^{-1} P_s{}^{-1}) B_1 = PB_1 = B_2.$

若B_2各行的首1所在列不在最左边，可以对B_1和B_2进行同步列交换使得B_2各行首1都在左边的q列上. 所以我们不妨设B_2首1在最左边.

按q行、n-q行，q列、n-q列分块，则 $PB_1=B_2$ 可分块成：

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}B_{11} & P_{11}B_{12} \\ P_{21}B_{11} & P_{21}B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B_{22} \\ O & O \end{pmatrix},$$其中B_{11}为行简化梯形.

故有 $P_{11}B_{11}=E$，$P_{11}B_{12}=B_{22}$.

对 $P_{11}B_{11}=E$ 两边取行列式，得到：

$$|P_{11}|\cdot|B_{11}|=|E|=1,$$

故$|B_{11}|\neq 0$.

因为q阶的块B_{11}只有p个非零行，且$|B_{11}|\neq 0$，故 $p=q$.

若B_1的首1所在列不在最左边，则q阶行简化梯形B_{11}一定含零行，与$|B_{11}|\neq 0$矛盾，故B_1首1都在最左边，即$B_{11}=E$.

由$P_{11}B_{11}=E$，$B_{11}=E$，得到$P_{11}=E$，再由 $P_{11}B_{12}=B_{22}$ 得到 $B_{22}=B_{12}$，于是$B_1=B_2$，即行简化梯形唯一.，

对于矩阵A，A^T的行简化梯形是唯一的，故A的列简化梯形也唯一.

对于矩阵A，A的行简化梯形非零行数是A的等价矩阵中非零行数最少的，因为行简化梯形非零行首1所在列中，其它行不可能消去该行的首1.
故A经过一系列初等行变换后最少非零行数是唯一的.
由于初等列变换不改变非零行数，故初等行变换后得到的最少非零行数就是标准形的1的个数，是唯一的.

矩阵的行(列)简化梯形矩阵是行(列)等价矩阵中最简单的矩阵.
矩阵的标准形矩阵是等价矩阵中最简单的矩阵