A、B 班 9-6,8 作业分析

9-6 作业：习题一：7,8,9,10,11,12

7(3) 有同学书写不规范，如原式经过变换 $c_1+c_2+\ldots+c_n$, $c_1\div(x+(n-1)a)$得到 $x+(n-1)a\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a\\1&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a&\cdots&x\end{vmatrix}$，漏了括号.

另外有同学 7(1)(3)(6)做复杂了，可如下：

7(1)解：$D_n=\begin{vmatrix}x&y&&\\&x&\ddots&\\&&\ddots&y\\y&&&x\end{vmatrix}\overset{c_1展开}{=}x\begin{vmatrix}x&y&&\\&x&\ddots&\\&&\ddots&y\\&&&x\end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y&&&\\x&y&&\\&\ddots&\ddots&\\&&x&y\end{vmatrix}_{n-1}=x^{n-1}+(-1)^{n+1}y^{n-1}.$

7(3)解：$D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x+(n-1)a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&\cdots&a\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$

7(6)解：$D_n=\begin{vmatrix}-a_1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}&a_{n-1}\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=}\begin{vmatrix}0&a_1&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}&a_{n-1}\\n&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}\overset{c_1展开}{=}(-1)^{n+1}n\begin{vmatrix}a_1&&&\\-a_2&a_2&&\\&\ddots&\ddots&\\0&0&a_{n-1}&a_{n-1}\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n\prod_{i=1}^{n-1}a_i.$

还可以：$c_{i+1}+c_i,i=1,2,\ldots,n-1$，然后 c_n 展开，或 $c_n+c_1+\ldots+c_{n-1}$，然后 c_n 展开.

7(5)有同学使用差分方程求解公式。差分方程解法是专业课程内容，不要使用.很多同学用递推式解，也可如下：

解：$D_n=\begin{vmatrix}2&1&&\\1&2&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&&\\1&2&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&&\\0&2&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&&\\1&1&\ddots&\\&\ddots&\ddots&0\\&&1&1\end{vmatrix}+D_{n-1}=1+D_{n-1}=\cdots=n-1+D_1=n+1.$

8(1)(2)有很多同学计算错误. (2)有同学使用的题目有错(早期印刷的教材的题目错，教学立方题目是正确的)，另外，有同学计算出 $\Delta=-\omega(\omega-1)^2(\omega+2)$或$=\omega^2(1-\omega^2)-2(\omega-\omega^2)$，没有判定该式子非零，后续 Δ_1/Δ 等就有错.

该题涉及到的 ω 是个特别的量，是方程 $x^3-1=0$ 的三个解 1、ω、ω^2 中的一个，其中 ω 与 ω^2 是互为共轭复数，且有关系 $\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$.

12 大部分同学都是展开行列式得到 $f(x)=-x(x-1)^3$，然后讨论，有用 $f(x)$讨论，有用 $f'(x)$讨论，可如下：

证明：显然 $f(x)=\begin{vmatrix}1&x-1&2x-1\\1&x^2-2&3x-2\\1&x^3-3&4x-3\end{vmatrix}$ 展开后是 x 的 4 次多项式，为连续可导函数，

且有 $f(0)=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&-2&-2\\1&-3&-3\end{vmatrix}=0,f(1)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\1&-2&1\end{vmatrix}=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

其余一些作业解题思路：

7(2) r_i-r_1 , $i=2,3,\ldots,n$；(4) r_i-r_2 , $i=1,3,4,\ldots,n$，c_1-c_2

8(1) $\Delta=4$，$\Delta_1=8$，$\Delta_2=-4$，$\Delta_3=0$，$\Delta_4=4$；(2) $\Delta=-3\sqrt{3}i$，$\Delta_1=0$，$\Delta_2=\Delta$，$\Delta_3=0$

9-8 作业：习题二：2,11,12,13,15,16,41

2(5)(6)有同学写错矩阵，(6)有同学没有合并相同的项，另外，(3)的结果是 (11)，也可写成 11，1 阶方阵就是数.

13 有同学用元素来证明，相对繁琐一些，可用对称矩阵反对称矩阵的矩阵条件 $A^T=A$, $B^T=-B$ 来证，见如下：
证明：已知 $A^T=A$, $B^T=-B$.

(1) $(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=-BA+AB=AB-BA$，故对称. 同理 $AB+BA$ 反对称.

(2) $(AB)^T=B^TA^T=-BA$，故有： AB 反对称⇔$(AB)^T= -AB$ ⇔$-BA= -AB$ ⇔ $AB=BA$.

13(2) 有同学充分性和必要性弄混淆了，可用 “=>”和 “<=”表示证明方向，见如下：
13(2)证明：“=>” AB 反对称，则$(AB)^T= -AB$，又有$(AB)^T=B^TA^T=-BA$，故$-AB =-BA$，即 $AB=BA$.
“<=” $AB=BA$，故$(AB)^T=B^TA^T=-BA= -AB$，即 AB 反对称 .

15 大部分同学设 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，代入式子 $BA=B+2E$，得到$\begin{pmatrix} 2a-b & a+2b \\ 2c-d & c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2 & b \\ c & d+2 \end{pmatrix}$，元素比较得 $a=c=d=1,b=-1$，
然后计算$|B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$. 可以不用算出矩阵 B，直接计算 $|B|$，见如下：

解：由 $BA=B+2E$，得 $B(A-E)=2E$，取行列式 $|B|\times|A-E|=|2E|$，因为$|A-E|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2, |2E|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4$，故 $|B|=4/2=2$.

16 有同学先证明 $|A|=-1$，然后用 $|A+E|=|A|+|E|=-1+1=0$，这样使用是错的，行列式只能用于乘法不能用于加法，
有：**$|AB|=|A|\times|B|$，但是 $|A+B|\neq|A|+|B|$** （例子：$2^n=|2E|=|E+E|\neq|E|+|E|=2$）
也有同学由 $AA^T=E$，$|A|<0$ 得出 $A=-E$，这也是错的，例子：$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,满足$AA^T=E$，可如下：

解：因为 $(A+E)A^T=AA^T+A^T=E+A^T=(A+E)^T$，取行列式得：$|A+E|\times|A^T|=|(A+E)A^T|=|(A+E)^T|=|A+E|$，
于是有 $|A+E|(1-|A^T|)=0$，因为 $|A^T|=|A|<0$，故 $1-|A^T|>1$，最后有 $|A+E|=0$.

41(2) 有同学写出 $-4\alpha\alpha^T=-4$，错误，因为 $\alpha^T\alpha=1$，但是 $\alpha\alpha^T$ 是一个矩阵，$\alpha\alpha^T\neq1$. 另外有同学直接写 $4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=4\alpha\alpha^T$，跳步骤，应该指明计算依据，即 $4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=4\alpha\alpha^T$. 另外 41 题有同学用元素证明也较繁琐，可如下：
41 证明：(1) $A^T=(E-2\alpha\alpha^T)^T=E^T-2(\alpha\alpha^T)^T=E-2(\alpha^T)^T\alpha^T=E-2\alpha\alpha^T=A$，对称.
(2) $A^2=(E-2\alpha\alpha^T)(E-2\alpha\alpha^T)=E-2\alpha\alpha^T-2\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=E$.

其余一些作业解题思路：
11(1) $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$； $A(B_1B_2)=(AB_1)B_2=(B_1A)B_2=B_1(AB_2)=B_1(B_2A)=(B_1B_2)A$；
(2) $AB^k=A(BB^{k-1})=(AB)B^{k-1}=(BA)B^{k-1}=B(AB^{k-1})=B(B(AB^{k-2}))=B^2(AB^{k-2})=\ldots=B^kA$.

12 设 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，则有 $O=AB-BA=\begin{pmatrix} 0 & -b_{13} & -2b_{12}+3b_{13} \\ 2b_{31} & -b_{23}+2b_{32} & -2b_{22}+3b_{23}+2b_{33} \\ b_{21}-3b_{31} & b_{22}-3b_{32}-b_{33} & b_{23}-2b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再比较元素得 B.