行列式

行列式计算

2阶、3阶行列式计算：

$$\begin{vmatrix} 32 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式变换：

- $r_i \leftrightarrow r_j$、$c_i \leftrightarrow c_j$　变号
- kr_i、$c_i \times k$、r_j/k　提取$1/k$或k
- $r_i + kr_j$、$c_i + kc_j$　行列式不变
- 两行(列)成比例，行列式为0
- 行列式可以按任一行(列)展开

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

Crammer法则

方程组 $Ax=b$：当$|A|\neq 0$时，有唯一解：$x_i=D_i/|A|$，
其中D_i为第i列替换成b后的行列式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2, \\ 5x_1 + 9x_2 = 1. \end{cases}$$

行列式特殊公式

- 块三角行列式 $\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$ ，$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$

- 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\ n-1} & x_2^{\ n-1} & \cdots & x_n^{\ n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 9 & 1 & 4 \\ 8 & 27 & 1 & -8 \end{vmatrix}$$

矩阵

矩阵的算术运算

计算 AB，Ab 其中 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&1&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

基本逆矩阵

E^{-1}、$(kE)^{-1}$、$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})^{-1}$、$E(i,j)^{-1}$、$E(i(k))^{-1}$、$E(i,j(k))^{-1}$

公式求逆

当$|A|\neq 0$时，A可逆，$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$，

其中

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

求$\begin{pmatrix}3&-1\\-7&2\end{pmatrix}^{-1}$.

初等变换特点

- A进行初等行(列)变换⇔左(右)乘相应初等矩阵
- A进行一系列初等行(列)变换⇔左(右)乘可逆矩阵

求矩阵的秩：

初等行变换化为行梯形，计算非零行数

$$\text{求秩：}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

求矩阵的逆：

$$(A,E)\xrightarrow{r}(E,A^{-1})$$

$$\text{求}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

解矩阵方程：

解*AX*=*B*，即求 *X*=*A*$^{-1}$*B*

$$(A,B)\xrightarrow{r}(E,A^{-1}B)$$

$$\text{解}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

解*YA*=*B*，即求 *Y*=*BA*$^{-1}$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{解}Y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

向量相关性

线性相关

判断线性相关：

- 定义：$k_1\alpha_1+...+k_n\alpha_n=\theta$，解方程组有非零解⇔相关
- 矩阵的秩：$r(\alpha_1,...,\alpha_n)<n$⇔相关
- 性质：个数>维数=>相关；$|\alpha_1,...,\alpha_n|=0$⇔相关

已知：$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix},$

分别 (1)用定义; (2)用秩; (3)用行列式判断相关性.

线性相关性质：

- 向量组相关⇔必有向量可由其它向量表示
- 无关向量组加新向量后相关，则新向量可由向量组唯一表示
- 初等行变换不改变列向量组的相关性和组合关系

极大无关组

判断极大无关组：

- 准则1：(1) 无关 (2) 加其它向量相关
- 准则2：(1) 无关 (2)可表示其它向量

计算极大无关组：用初等行变换简化列向量组

已知：$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-9\\-6\\9\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

求一个极大无关组，并用极大无关组表示其它向量.

极大无关组和矩阵秩的性质：

- $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$可被$\beta_1,\ldots,\beta_m$表示，则$r\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\le r\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$
- 等价向量组秩相等
- 行秩=列秩=矩阵的秩
- $r(A+B)\le r(A)+r(B)$
- $r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$

答案:

行列式计算:2、3阶行列式:**2,12**

行列式变换:**90**

Crammer法则:

$x_1=14/7=2$,$x_2=-7/7=-1$

行列式特殊公式:**36,-120**

矩阵的算术运算:$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

公式求逆:$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$

求矩阵的秩:

r=2

求矩阵的逆:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解矩阵方程:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$$

判断相关性:线性相关

(1) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\theta$,(2) $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2<3$,(3) $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$

计算极大无关组:$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

α_1, α_3为一个极大无关组,$\alpha_2= -3\alpha_1$, $\alpha_4= -\alpha_1-\alpha_3$