

2.1 矩阵和 n 维向量的概念

定义2.1.1(矩阵) 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\dots,m;j=1,2,\dots,n)$ 排成 m 行 n 列数表, 外加括号, 写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

叫做 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 这里用 A 表示定义中的矩阵. 这 $m \times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素, a_{ij} 是矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素.

元素都是实数的矩阵叫做实矩阵, 元素存在复数的矩阵叫做复矩阵.

用符号 $R^{m \times n}$ 或 $M_{m \times n}(R)$ 表示全体 $m \times n$ 实矩阵的集合.

当 $m=n$ 时, $m \times n$ 矩阵 A 称为 n 阶方阵. $m \times n$ 矩阵和 n 阶方阵可表示为 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $A=(a_{ij})_{n \times n}$, 也可记为 $A_{m \times n}$, A_n 等.

定义2.1.2 (**n 维向量**) n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称为 **n 维向量**，前者称为**行向量**，后者称为**列向量**， $a_i (i=1,2,\dots,n)$ 称为**第 i 个分量或坐标**，分量都是实数的向量称为**实向量**，实向量的全体用 **\mathbf{R}^n** 表示；分量存在复数的向量称为**复向量**，复向量的全体用 **\mathbf{C}^n** 表示。

向量是只有一行或一列的矩阵

矩阵 $(a_{ij})_{m \times n}$ 的第 i 行的元素所成的行向量 $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ 称为它的第 i 个行向量。

同样，第 j 列元素所成的列向量 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 称为它的第 j 个列向量。

常用粗体英文字母 **A, B, C** 等表示矩阵，用小写粗体希腊字母 **α, β, γ** 等表示向量。

零矩阵：所有元素为零的矩阵， m 行 n 列的零矩阵记为 $O_{m \times n}$ 或 O 。

零向量：所有分量为零的向量称为零向量，用希腊字母 θ 表示，有时也记为 0 。

对角矩阵： $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵，且有 $a_{ij}=0, i \neq j$ ，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{常写成} \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

可记为 $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ，

若对角矩阵 A 中的 $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}=k$ ，则称 A 为**数量矩阵**，
当 $k=1$ 时，称为**单位矩阵**，记为 E 或 I ，数量矩阵记为 kE 。

例如

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上三角矩阵: $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 且有 $a_{ij}=0, i > j$, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 常写成 } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下三角矩阵: $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 且有 $a_{ij}=0, i < j$, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 常写成 } \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

对称矩阵: $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 且有 $a_{ij}=a_{ji}, (i,j=1,2,\dots,n)$.

反对称矩阵: $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 且有 $a_{ij}=-a_{ji}, (i,j=1,2,\dots,n)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ 是对称矩阵, } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -7 \\ \frac{1}{2} & 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ 是反对称矩阵.}$$

矩阵相等: 矩阵 A 和 B 的行数和列数分别相等, 并且对应的元素也都相等.

向量相等: 向量 α 与 β 同为行向量或列向量, 分量个数相等, 且对应分量也相等. 或者两个向量作为矩阵来看相等.

定义2.1.3 (转置矩阵) 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 的行与列互换后得到的矩阵 $(a_{ji})_{n \times m}$ 称为 A 的**转置矩阵**, 记为 A^T (或 A').

例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

对称矩阵: $A^T=A$

反对称矩阵: $A^T=-A$

定义2.1.4 (方阵的行列式) 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

称为方阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 的行列式, 记为 $|A|$. 如果 $|A| \neq 0$, 则称矩阵 A 是**非异矩阵**, 如果 $|A|=0$, 则称矩阵 A 是**奇异矩阵或退化矩阵**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{记号为 } \mathbf{O} \text{ 或 } O_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{记号为 } \mathbf{O} \text{ 或 } O_{2 \times 4}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{记号为 } \mathbf{O} \text{ 或 } O_{3 \times 2} \text{ 零矩阵}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{记号为 } \boldsymbol{\theta} \text{ 或 } 0, (0,0,0,0) \text{记号为 } \boldsymbol{\theta} \text{ 或 } \boldsymbol{\theta}^T \text{ 或 } 0 \text{ 零向量}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & -2 \end{pmatrix} \text{上三角矩阵} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 2 & \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{下三角矩阵}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 5 & & & \\ & -2 & & \\ & & -1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \text{或 } \text{diag}(5, -2, -1, 2) \text{ 对角矩阵}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{常写成 } -3\mathbf{E} \text{ 或 } -3E_3 \text{ 数量矩阵} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{常写成 } \mathbf{E} \text{ 或 } E_3 \text{ 单位矩阵}$$

2.2 矩阵运算

矩阵的处理可以分成两类

矩阵的第1类处理:

相对于解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 = -1, & (2) \end{cases}$$

进行行处理

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

得到解

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

矩阵的初等变换

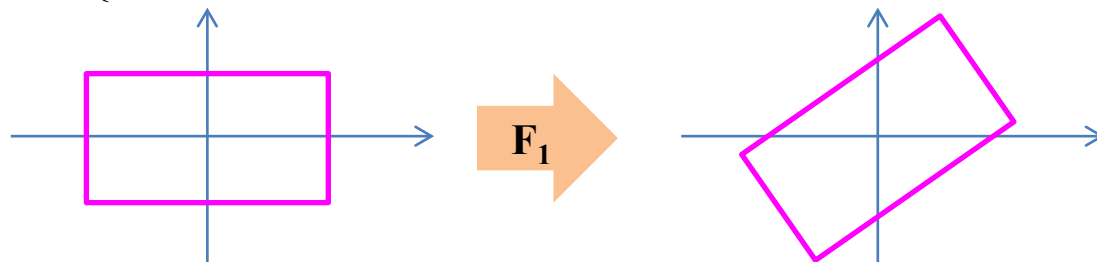
矩阵的第2类处理:

平面中的物体受到力的作用产生移动或变形

在 F_1 作用下产生旋转:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

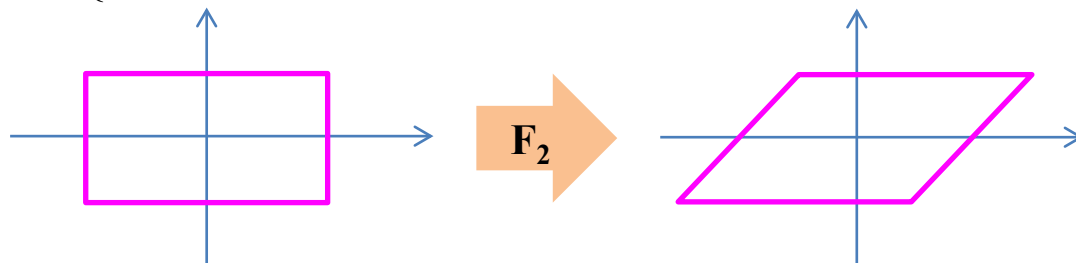
矩阵表示: $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$



在 F_2 作用下产生错切:

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y. \end{cases}$$

矩阵表示: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

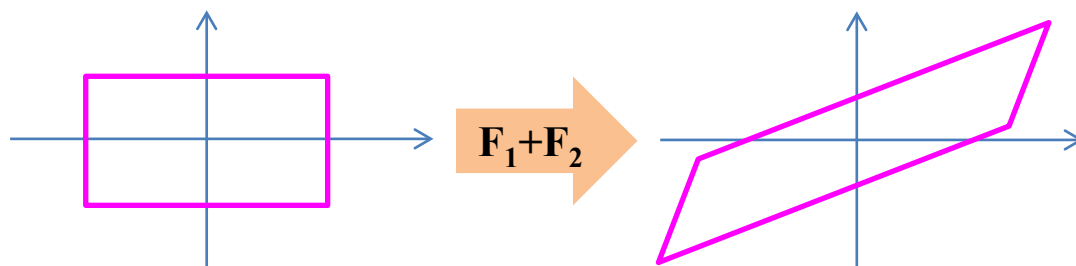


当物体受到 F_1 和 F_2 的
作用下的综合效果:

$$\begin{cases} x' = (\cos \theta x - \sin \theta y)x + (x + y) = (\cos \theta + 1)x + (-\sin \theta + 1)y, \\ y' = (\sin \theta x + \cos \theta y) + y = \sin \theta x + (\cos \theta + 1)y. \end{cases}$$

矩阵加法

矩阵表示: $\begin{pmatrix} \cos \theta + 1 & -\sin \theta + 1 \\ \sin \theta & \cos \theta + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



当物体先后发生变形和移动

变形1:

$$T_1: \begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y \\ y' = b_{21}x + b_{22}y \end{cases} \quad \text{矩阵表示: } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

变形2:

$$T_2: \begin{cases} x'' = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y'' = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases} \quad \text{矩阵表示: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

先变形1, 再变形2的综合效果:

$$T: \begin{cases} x'' = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y \\ y'' = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y \end{cases}$$

矩阵表示:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = AB$$

矩阵乘法

矩阵的算术运算

矩阵乘法的进一步说明：

$$f(x, y) = b_1x + b_2y = (b_1, b_2) \cdot (x, y) \quad \text{向量内积看成矩阵乘积: } f(x, y) = (b_1, b_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{变形1: } T_1: \begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y \\ y' = b_{21}x + b_{22}y \end{cases} \quad \text{矩阵乘法表示: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{变形2: } T_2: \begin{cases} x'' = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y'' = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases} \quad \text{矩阵乘法表示: } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

先变形1，再变形2的综合效果：

$$T: \begin{cases} x'' = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y \\ y'' = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y \end{cases}$$

矩阵乘法表示：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = (AB) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2.1 矩阵的加法运算

定义2.2.1 (加法) 设 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m \times n}$ 是两个同型矩阵, 矩阵 A 与 B 的和定义为 $(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$, 记为 $A+B$:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n} .$$

例2.2.1 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, A+B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, A-B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

注意:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \times$$

加法最基本性质:

1. 交换律: $A+B=B+A$. 证明: 比较 (i,j) 元素: $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$
2. 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. 零矩阵: 对任一矩阵 A , $A+O=O+A=A$ (O 与 A 是同型矩阵).
4. 负矩阵: 对任一矩阵 $A=(a_{ij})$, 可定义 $-A=(-a_{ij})$, 称 $-A$ 为 A 的负矩阵, 显然有 $A+(-A)=O$.

定义矩阵的减法为: $A-B=A+(-B)$.

$$\text{即: } (a_{ij})_{m \times n} - (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n} .$$

2.2.2 矩阵的数乘运算

定义2.2.2 (矩阵的数乘) 数 k 与矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 相乘的积定义为 $(ka_{ij})_{m \times n}$ ，记为 kA ：

$$kA=(ka_{ij})_{m \times n} .$$

一个数乘以矩阵：该数乘以每个元素

$$2 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

数乘最基本性质：

1. 结合律： $(kl)A=k(lA)=l(kA)$.
2. 分配律： $k(A+B)=kA+kB$, $(k+l)A=kA+lA$, 其中 k,l 均为实数, A,B 均为 $m \times n$ 矩阵 .
3. $1 \cdot A=A$; $0 \cdot A=O$.
4. $(-1)A=-A$.

例2.2.2 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $3A - 2X = B$, 求矩阵 X .

解 在 $3A - 2X = B$ 两端同时加上 $(-3A)$ 得

$$-2X = B - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix},$$

两端再乘以 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 得 $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$

例2.2.3 (方阵的数乘与其行列式) 已知矩阵 A 是五阶方阵, 且 $|A|=2$, 则 $|2A|=2^5|A|=32 \times 2=64$.

一般, 若 A 是 n 阶方阵, k 为任意数, 则有 $|kA|=k^n|A|$.

2.2.3 矩阵的乘法运算

定义2.2.3 (矩阵的乘法) 设 $A=(a_{ij})_{m \times l}$, $B=(b_{ij})_{l \times n}$, 则 A 与 B 的乘积 AB 定义为 $C=(c_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj}, \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n).$$

两个矩阵相乘：左边矩阵的每一行与右边矩阵每一列
对应元素相乘的和构成矩阵的元素

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times (-1) \\ 2 \times 3 + 1 \times 1 & 2 \times 1 + 1 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

例2.2.4 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -28 \\ -28 & 36 \\ 13 & -17 \end{pmatrix}$

注意：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$



例2.2.5 设 $A=(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n), B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA .

解

$$AB = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n), BA = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}.$$

[illegible]

可表示为矩阵形式:

为矩阵形式:

$Ax=b$, 其中: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$

乘法最基本性质:

矩阵乘法无交换律

1. 结合律: $(AB)C=A(BC)$.
2. 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.
3. 分配律: $A(B+C)=AB+AC$; $(B+C) A=BA+CA$.

此外，还有 $AO=OA=O$ ， $AE=EA=A$ ，其中 O 为零矩阵， E 为单位矩阵.

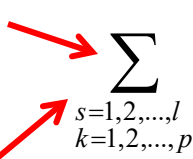
矩阵乘法的结合律和分配率

矩阵乘法的结合律:

$$(AB)C=A(BC) \quad , \quad k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

说明: 比较 (i,j) 元素, 以 $(AB)C=A(BC)$ 为例

$$\begin{array}{ll}
 AB \text{ 的 } (i,k) \text{ 元素 } \sum_{s=1}^l a_{is} b_{sk} & (AB)C \text{ 的 } (i,j) \text{ 元素 } \sum_{k=1}^p \left(\sum_{s=1}^l a_{is} b_{sk} \right) c_{kj} \\
 BC \text{ 的 } (s,j) \text{ 元素 } \sum_{k=1}^p b_{sk} c_{kj} & A(BC) \text{ 的 } (i,j) \text{ 元素 } \sum_{s=1}^l a_{is} \left(\sum_{k=1}^p b_{sk} c_{kj} \right)
 \end{array}$$



$$\sum_{\substack{s=1,2,\dots,l \\ k=1,2,\dots,p}} a_{is} b_{sk} c_{kj}$$

矩阵乘法的分配律:

$$\begin{aligned}
 A(B+C) &= AB+AC \\
 (B+C)A &= BA+CA
 \end{aligned}$$

说明: 比较 (i,j) 元素, 以 $A(B+C)=AB+AC$ 为例

$$A(B+C) \text{ 的 } (i,j) \text{ 元素 } \sum_{k=1}^l a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \quad AB+AC \text{ 的 } (i,j) \text{ 元素 } \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^l a_{ik} c_{kj}$$

例2.2.7 证明 $|AB|=|A||B|$.

结论可作为
公式使用

证明 设 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times n}$, 记 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = |A| \times |B|,$$

对 D_{2n} 作一系列变换:

a_{11} 所在行加上 a_{11} 倍 b_{11} 行, 再加上 a_{12} 倍 b_{21} 行, \dots , 加上 a_{1n} 倍 b_{n1} 行, 则第1行的 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ 消为0, 第1行后面的0变为 $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}$

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

进一步：消去 $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{nn}$ ，得到如下行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{其中 } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} c_i \leftrightarrow c_{n+i} \\ i=1,2,\dots,n \end{matrix} \\ & = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & -1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \end{vmatrix} = |AB|, \end{aligned}$$

于是 $|AB|=|A| |B|$.

进一步可得： $|A_1 A_2 \dots A_k| = |A_1| |A_2| \dots |A_k|$.

矩阵乘法的一些特点

矩阵与单位矩阵相乘不变：

左乘单位矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

右乘单位矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

矩阵与对角矩阵相乘:

左乘对角
矩阵:
行作用

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} & 7a_{14} & 7a_{15} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34} & 2a_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}$$

右乘对角
矩阵:
列作用

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a_{11} & 4a_{12} & -3a_{13} \\ 8a_{21} & 4a_{22} & -3a_{23} \\ 8a_{31} & 4a_{32} & -3a_{33} \\ 8a_{41} & 4a_{42} & -3a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & 4y & -3z \end{pmatrix}$$

矩阵乘法无交换律

例2.2.5中 $AB \neq BA$

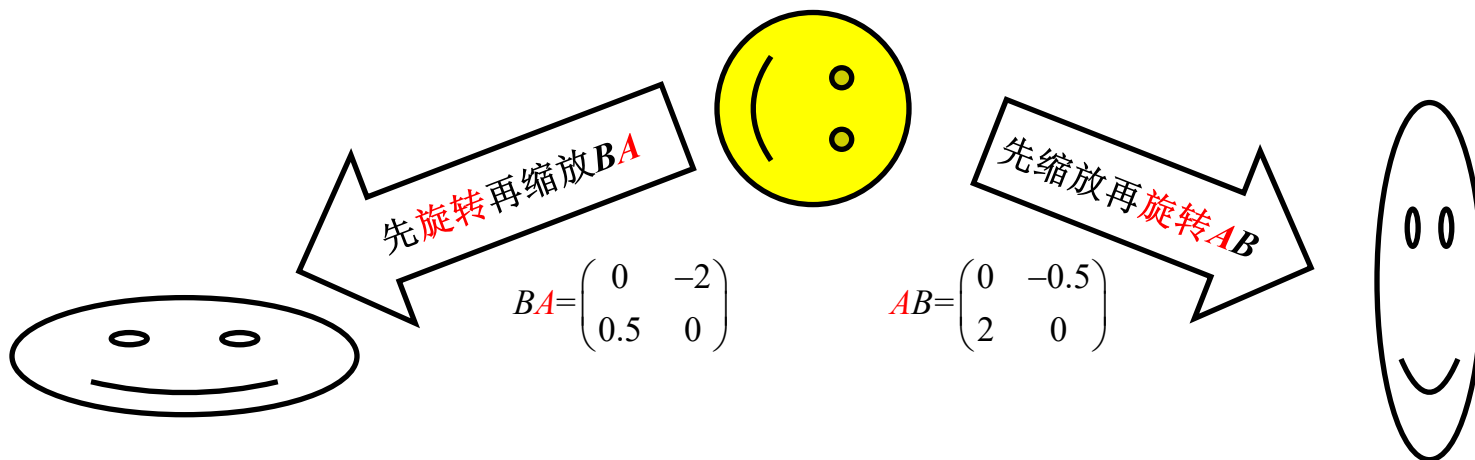
方阵乘法的例子：

$$\left. \begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} AB \neq BA$$

几何说明：

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示图形逆时针旋转 90°

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ 表示图形缩放：
水平2倍，垂直0.5倍



矩阵乘法无消去律

矩阵乘法:

$$AB=O \not\Rightarrow A=O \text{ 或 } B=O \quad \text{见例子} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法不满足消去律:

$$\text{例子: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{其中: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{但是: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.4 转置矩阵的性质

矩阵转置：行变列，列变行

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

定义2.1.3 (转置矩阵) 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 的行与列互换后得到的矩阵 $(a_{ji})_{n \times m}$ 称为 A 的转置矩阵，记为 A^T (或 A')：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

转置基本性质：

1. $(A^T)^T=A$; $|A^T|=|A|$;
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
3. $(kA)^T=kA^T$ (k,l 均是数);
4. $(AB)^T=B^TA^T$.

说明：比较 (i,j) 元素，以 $(AB)^T=B^TA^T$ 为例

$$(AB)^T \text{ 的 } (i,j) \text{ 元素} = AB \text{ 的 } (j,i) \text{ 元素} = \sum_{k=1}^l a_{jk} b_{ki}$$

$$B^TA^T \text{ 的 } (i,j) \text{ 元素} = B \text{ 的 } i \text{ 列与 } A \text{ 的 } j \text{ 行相乘} = \sum_{k=1}^l b_{ki} a_{jk}$$

例2.2.8 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

解 法一: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 16 & 1 \\ 28 & 19 \end{pmatrix}$, 所以 $(AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 28 \\ 1 & 11 & 19 \end{pmatrix}$.

法二: $(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 28 \\ 1 & 11 & 19 \end{pmatrix}$.

补充例2A 证明任意方阵都可以表示成对称矩阵和反对称矩阵的和.

证明 设 A 为方阵, 令 $B = 0.5(A + A^T)$, $C = 0.5(A - A^T)$, 显然 $A = B + C$.

又 $B^T = (0.5(A + A^T))^T = 0.5(A^T + A) = B$, $C^T = 0.5(A^T - A) = -C$,

故 B 为对称矩阵而 C 为反对称矩阵, 结论成立.

矩阵代数式

矩阵方阵的乘幂：方阵多次相乘 $A^{k+1} = A^k A$, 并令 $A^0 = E, A^1 = A$

方阵乘幂的性质： $A^k A^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl}$

方阵的代数式： $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2,$

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2,$$

$$(A + \lambda E)^2 = A^2 + 2\lambda A + \lambda^2 E.$$

矩阵无交换律,不能象普通数的代数式那样交换和展开:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2 \neq A^2 - B^2.$$

补充例2B X 幂等是指 $X^2=X$, 若 A 、 B 幂等, 则 $A+B$ 幂等当且仅当 $AB=BA=O$.

证明 因为 $A^2=A$ 、 $B^2=B$, 故 $(A+B)^2=A+B$ 化简可得 $AB+BA=O$. 故只要证明 $AB+BA=O$ 充要条件为 $AB=BA=O$.

充分性显然. 现证必要性. 对 $AB+BA=O$ 两边分别左乘和右乘 A , 利用 A 、 B 幂等性质得到 $AB+ABA=O, ABA+BA=O$, 从而可得 $AB=-ABA=BA$, 进一步有 $AB+BA=2AB=O$, 故 $BA=AB=O$.

矩阵多项式

但是对于一元矩阵多项式，有如下交换律：（专指方阵）

$$A^k A^l = A^{k+l} = A^l A^k, \quad k, l = 1, 2, 3, \dots, \text{其中 } A^0 = E$$

$$A^k E = EA^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$f(A)g(A) = g(A)f(A),$$

$$\text{其中 } f(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E, \quad g(A) = b_m A^m + \dots + b_1 A + b_0 E.$$

一元矩阵多项式可以象普通数的代数式那样交换和展开：

$$\begin{aligned} \text{若有：} \quad f(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则有：} \quad f(A) &= a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E \\ &= a_n (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) \cdots (A - \lambda_n E). \end{aligned}$$

例2.2.6 由 $f(x) = 2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$,

$$\text{可得 } f(A) = 2A^2 + 5A - 3E = (2A - E)(A + 3E).$$

* 矩阵多项式还可用二项式公式化简，如：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = (E + A)^n = E + C_n^1 A + C_n^2 A^2 + C_n^3 A^3 + \cdots \\ &= E + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

* 矩阵乘法不可交换也有用处，如列乘以行是矩阵，但行乘以列就是一个1阶矩阵，相当于一个数，于是可以简化矩阵乘幂计算，如：

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -3, 1), \\ A^n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -3, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -3, 1) \cdots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -3, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ((3, -3, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \cdots ((3, -3, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) (3, -3, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n-1 \text{ times}} (3, -3, 1) = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -3, 1) = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$