南京大学大学数学试卷

考试时间____2016.6.20____ 任课教师________ 考试成绩________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，E为3阶单位阵，求 $|aE-A^n|$，其中a为常数，n为正整数.

2. 设 A为3阶可逆矩阵，且A^{-1}的特征值为1、2、3，求$|A|$的代数余子式$A_{11}+A_{22}+A_{33}$的值.

3. 设矩阵B满足：$2ABA^{-1}=AB+10E$，其中E为单位阵，且$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-3&0\end{pmatrix}$，求矩阵$B$.

4. 已知三个平面$x=\gamma y+\beta z, y=\alpha z+\gamma x, z=\beta x+\alpha y$，求证：它们至少相交于一条直线的充要条件为$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=1$.

二、 (本题12分) 可逆矩阵中每行元素之和都等于常数d，(1) 证明：$d\neq 0$；(2) 求 A^{-1} 中每行元素之和.

三. (本题12分) 求以 $\alpha_1=(1,-1,1,0),\alpha_2=(1,1,0,1),\alpha_3=(2,0,1,1)$ 为解向量的齐次线性方程组.

四. (本题12分) 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 阶实矩阵，证明：B^TAB 为正定矩阵的充要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

五. (本题12分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-a\\2&a&-2\\-a&-1&1\end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量，并判断$A$是否能对角化？若能对角化，求出可逆矩阵$P$及相应的对角矩阵.

六. (本题12分) 在多项式空间 $P_3[x]$ 中，线性变换 T 规定为 $\forall f(x)\in P_3[x], T(f(x))=\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}+f(x)$.
试求：(1) T 在基$1,x,x^2$下的矩阵；(2) 从基$1,x,x^2$到基$1,1+x,x+x^2$的过渡矩阵及T在基$1,1+x,x+x^2$下的矩阵.

七. (本题12分) 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$，求a,b的值和正交矩阵 P.