2.6 可逆矩阵与伴随矩阵

1、知有变换如下：

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3, \end{cases}$$

试问是否有逆变换，若有逆变换，则逆变换是什么？

2、有矩阵方程如下：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

试问什么样的3阶矩阵*X*满足上述方程？

解决上述问题需要可逆矩阵、逆矩阵的相关知识

定义2.6.1 (逆矩阵) 对于*n*阶方阵*A*，如果存在同阶方阵*B*，使得

$$AB=BA=E,$$

则称*A*是可逆矩阵，并称*B*是*A*的逆矩阵，简称逆阵，记为A^{-1} .

变换：$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3, \end{cases}$ 的矩阵形式为：***y*=*Ax***，其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

***A*有逆矩阵，*A*的逆矩阵为：** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -17 & 7 \\ -1 & -12 & 5 \\ 2 & 27 & -11 \end{pmatrix}$

于是：$A^{-1}y = A^{-1}Ax = Ex = x$，即有逆变换 $\begin{cases} x_1 = -y_1 - 17y_2 + 7y_3, \\ x_2 = -y_1 - 12y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 2y_1 + 27y_2 - 11y_3. \end{cases}$

矩阵方程： $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **即 *BX*=*C*，有** $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

***BX*=*C*两边左乘*B*$^{-1}$，得：** $X = B^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

逆矩阵有什么特点

注：逆矩阵是唯一的

因为：若A有逆矩阵B和C，则有：$AB=BA=E$，$AC=CA=E$

故 $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$，结果 $B=C$

特殊矩阵的逆矩阵：

$E^{-1}=E$，$(kE)^{-1}=(1/k)E$，

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n)^{-1}=\mathrm{diag}(1/\lambda_1,\ldots,1/\lambda_n)$ 即
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

直接验证：

$(kE)^{-1}=(1/k)E$：

$$(kE)(\frac{1}{k}E) = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/k & & & \\ & 1/k & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E, \text{同理}(\frac{1}{k}E)(kE) = E.$$

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n)^{-1}=\mathrm{diag}(1/\lambda_1,1/\lambda_2,\ldots,1/\lambda_n)$：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E.$$

可逆矩阵的基本性质：

(1) 若A可逆，则A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$；还有 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

(2) 若A可逆，数$k\neq 0$，则kA可逆，且 $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

(3) 若A可逆，则A^{T}也可逆，且 $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.

(4) 若A, B为同阶的可逆矩阵，则AB也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证明：用定义验证

(1) $A^{-1}A=AA^{-1}=E$，故$(A^{-1})^{-1}=A$；还有 $|A||A^{-1}|=|AA^{-1}|=|E|=1$.

(2) $(kA)(k^{-1}A^{-1})=(k\times k^{-1})(AA^{-1})=1\cdot E=E$， 同理 $(k^{-1}A^{-1})(kA)=E$.

(3) $(A^{T})(A^{-1})^{T}=(A^{-1}A)^{T}=E^{T}=E$， 同理 $(A^{-1})^{T}(A^{T})=E$.

(4) $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$， 同理 $(B^{-1}A^{-1})(AB)=E$.
故 AB 可逆，且逆矩阵为$B^{-1}A^{-1}$.

性质(4) 可推广到有限个同阶可逆矩阵的乘积：

若$A_1, A_2, \ldots, A_k$都可逆，则$A_1A_2\ldots A_k$也可逆，且
$$(A_1A_2\ldots A_k)^{-1}=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1} .$$

求逆矩阵的三个途径：定义、公式、算法

1、利用定义求逆矩阵：*AB*=*E*

例2.6.1 试证明下列矩阵为可逆矩阵，并求其逆矩阵：

(1) $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 为对角矩阵，其中 λ_i (i=1,2,…,n)为非零数.

(2) $B=\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}$，其中$a,c$为非零实数.

证明 (1) 由于

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}&&&\\&\lambda_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^{-1}\end{pmatrix}=E=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}&&&\\&\lambda_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

所以对角矩阵Λ可逆，且其逆矩阵 $\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}&&&\\&\lambda_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^{-1}\end{pmatrix}=E.$

(2) 设矩阵 $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$**，使得 *BC*=*E*，得关系式：** $\begin{cases} ac_{11}=1, \\ ac_{12}=0, \\ bc_{11}+cc_{21}=0, \\ bc_{12}+cc_{22}=1. \end{cases}$

解得 $c_{11}=1/a$, $c_{12}=0$, $c_{21}=-b/ac$, $c_{22}=1/c$ **，即** $C=\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/(ac) & 1/c \end{pmatrix}.$

易于验证*BC*=*CB*=*E*，故*B*可逆，且逆矩阵 $B^{-1}=C$ **.**

(2) 解法二：设矩阵 $C=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_2 \end{pmatrix}$**，使得 *BC*=*E*，**

用行列式解方程组： $B\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **和** $B\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **，**

因为 $|B|=ac\neq 0$**，故有唯一解：** $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{ac}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}.$

令 $C=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/(ac) & 1/c \end{pmatrix},$

易于验证 *BC*=*CB*=*E*，故*B*可逆，且逆矩阵 $B^{-1}=C$ **.**

*** 此法可最终得出求逆矩阵的公式**

例2.6.2 A满足方程:$A^2-3A-10E=O$. 证明A和$A-4E$都可逆,并求A^{-1}和$(A-4E)^{-1}$.

证明 由 $A^2-3A-10E=O$ 得 $A(A-3E)=10E=(A-3E)A$,

立得 $A(\frac{1}{10}(A-3E))=E=(\frac{1}{10}(A-3E))A.$

由逆矩阵定义知 A 可逆，且有 $A^{-1}=\frac{1}{10}(A-3E).$

再由 $A^2-3A-10E=O$ 得

$(A-4E)(A+E)=6E=(A+E)(A-4E)$, 即 $(A-4E)(\frac{1}{6}(A+E))=E=(\frac{1}{6}(A+E))(A-4E).$

故知 $A-4E$ 可逆，且 $(A-4E)^{-1}=\frac{1}{6}(A+E).$

注 A , B 可逆, $A+B$ 也不一定可逆；即使$A+B$可逆, 一般 $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$.

$(1)A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,则$A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$A+B$不可逆;

$(2)A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,则$A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$可逆,$(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{pmatrix}\neq A^{-1}+B^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

2、利用公式求逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ 矩阵A求逆矩阵

求A的逆就是求X满足：

$$E=AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

解下列方程组可得到X的第j列(j=1,2,…,n)：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

利用行列式解方程组：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \text{解得}\ x_{1j} = \frac{D_1}{|A|}, x_{2j} = \frac{D_2}{|A|}, \cdots, x_{ij} = \frac{D_i}{|A|}, \cdots, x_{nj} = \frac{D_n}{|A|}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & 1_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1i}A_{1i} + \cdots + a_{ji}A_{ji} + + a_{ni}A_{ni} \qquad = 0A_{1i} + \cdots + 1_{ji}A_{ji} + + 0A_{ni} = A_{ji}$$

$$\text{故有}\quad x_{ij} = \frac{D_i}{|A|} = \frac{A_{ji}}{|A|}, i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, n$$

伴随矩阵

故有：

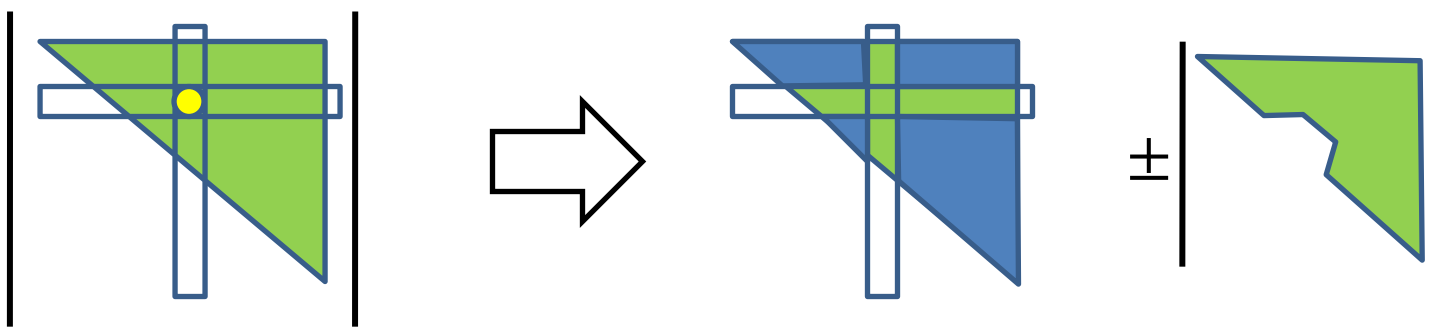
$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \text{当} |A| \neq 0$$

验证：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{当} |A| \neq 0$$

三角矩阵的逆矩阵：上(下)三角阵的逆矩阵是上(下)三角阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

***i<j*: $A_{ij}=\pm$** 

=0

三角矩阵相乘：上(下)三角阵乘以上(下)三角阵仍是上(下)三角阵

定义2.6.2 (方阵的伴随矩阵) 设$A=(a_{ij})$为n阶方阵，A_{ij}是$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式，则称矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为A的伴随矩阵．

例2.6.3 求A的伴随矩阵A^*，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

解 因为

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=-4,\ A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=17,\ A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=26,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=-4,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=-19,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-6.$$

所以

$$A^*=\begin{pmatrix} -4 & 17 & -8 \\ 26 & -4 & -19 \\ -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

例2.6.4 证明：$AA^*=A^*A=|A|E$.

证明　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

$$AA^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=|A|E.$$

同理可证　　$A^*A=|A|E$.

注　此处用到行列式的重要公式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=|A|\delta_{ij}=\begin{cases} |A|, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

δ_{ij}称为Kronecker常数，规定 $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0,(i\neq j)$.

定理2.6.1 (矩阵可逆的条件) 矩阵A可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

证明　必要性. 设 A可逆，即存在A^{-1}，使 $AA^{-1}=E$，则

$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|=1$. 所以 $|A|\neq 0$.

充分性. 由例2.6.4 可知 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$，因为$|A|\neq 0$，所以

$A(\frac{1}{|A|}A^{*})=(\frac{1}{|A|}A^{*})A=E.$ 由逆矩阵的定义即知 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$

$AB=E$ 不一定有 $BA=E$，如 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\3&4\end{pmatrix}, AB=E, BA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&3&0\end{pmatrix}.$

但是，对于方阵 $AB=E$ 等价于 $BA=E$. 见如下推论

推论2.6.3 设A,B 都是n阶方阵, 若$AB=E$，则$BA=E$，且$A^{-1}=B$, $B^{-1}=A$.

证明　由 $|A||B|=|AB|=|E|=1$可得$|A|\neq 0,|B|\neq 0$，故A^{-1},B^{-1}存在，且有

$B=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}$ ，　$A=A(BB^{-1})=(AB)B^{-1}=EB^{-1}=B^{-1}$.

即 A, B 可逆，且 A, B互为逆矩阵 .

例2.6.5 判断下列矩阵 A , B , C 是否可逆 . 若可逆，求其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&5\\-3&0&4\\2&1&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&-3&5\\1&5&-11\end{pmatrix},\text{其中}a,c\text{为非零实数}.$$

解 因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-2&5\\-3&0&4\\2&1&6\end{vmatrix}=-71\neq 0,$$

所以 A 可逆. 再由例2.6.3已求得的A的伴随矩阵A^*，立即得到

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=-\frac{1}{71}\begin{pmatrix}-4&17&-8\\26&-4&-19\\-3&-5&-6\end{pmatrix}.$$

因为 $|B|=\begin{vmatrix}a&0\\b&c\end{vmatrix}=ac\neq 0,$

所以B可逆，且 $B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^*=\frac{1}{ac}\begin{pmatrix}c&0\\-b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{-1}&0\\-\frac{b}{ac}&c^{-1}\end{pmatrix}.$

最后，因为 $|C|=0$，所以C不可逆 .

例2.6.6 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$, A^*是A的伴随矩阵，求$(A^*)^{-1}$.

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{vmatrix}=10\neq 0,$ 而 $AA^*=|A|E=10E$，即有 $\frac{1}{10}AA^*=E,$ 从而

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{10}A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1&0&0\\0.2&0.2&0\\0.3&0.4&0.5\end{pmatrix}.$$

例2.6.7 证明:设A为$n(n\geq 2)$阶方阵, 则 $|A^*|=|A|^{n-1}$,这里A^*为A的伴随矩阵.

证明 (1) 若 $|A|\neq 0$，则A可逆. 由逆矩阵公式知 $A^*=|A|A^{-1}$，从而

$|A^*|=|\ |A|A^{-1}|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$.

(2) 若 $|A|=0$，则一定有 $|A^*|=0$. 否则若 $|A^*|\neq 0$，则A^*可逆. 由于

$AA^*=|A|E=O$，两边右乘$(A^*)^{-1}$得$A=O\cdot(A^*)^{-1}=O$，于是$A^*=O$. 这

与 $|A^*|\neq 0$矛盾，故 $|A^*|=0$.

综上(1) , (2) 得，$|A^*|=|A|^{n-1}$.

伴随矩阵相当于比较粗略的逆：$AA^*=A^*A=|A|E$ ，$A^*=|A|A^{-1}$

分块对角矩阵的可逆及逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}, A_{ii}(i=1,2,\cdots,s)\text{可逆，则}A\text{可逆且}A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}.$$

因为：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}=E,$$

$$\text{同样}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}=E.$$

例2.6.8 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\3&4&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&4\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$， **求$A^{-1}$.**

解 A 的分块矩阵为$\begin{pmatrix}A_{11}&&0\\&A_{22}&\\0&&A_{33}\end{pmatrix}$, **其中** $A_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}, A_{22}=2, A_{33}=\begin{pmatrix}2&4\\0&-2\end{pmatrix}$.

容易计算

$$A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}, A_{22}^{-1}=\frac{1}{2}, A_{33}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-3/4&1/4&0&0&0\\0&0&1/2&0&0\\0&0&0&1/2&1\\0&0&0&0&-1/2\end{pmatrix}.$$

例2.6.9 已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

$b=(5,1,1)^T$. 问方程组是否有解？若有，求出其解 .

分析：若有 A^{-1}，则有 $A^{-1}Ax=A^{-1}b$，即$x=A^{-1}b$

解 因为 $|A|=1\neq 0$，所以A可逆，且其逆矩阵 A^{-1} 唯一 . 因此在等式 $Ax=b$ 的两端左乘 A^{-1}，即 $A^{-1}(Ax)=A^{-1}b$. 得 $x=A^{-1}b$，即该方程组有唯一解. 用伴随矩阵法求得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 4 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

进一步计算得

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ 11\\ -5\end{pmatrix}.$$

补充例2C 已知方阵 $A^TA=E$, $B^TB=E$, $|A|+|B|=0$，证明 $|A+B|=0$.

证明 由于$B^TB=E$，故$B^{-1}=B^T$，从而有 $BB^T=E$.

于是有 $A^T(A+B)B^T=B^T+A^T=(A+B)^T$，两边取行列式得，

$|A|\cdot|B|\cdot|A+B|=|A^T|\cdot|A+B|\cdot|B^T|=|A^T(A+B)B^T|=|(A+B)^T|=|A+B|$，

故有 $0=|A+B|(1-|A|\cdot|B|)$. 由 $|A|+|B|=0$可得 $|B|= -|A|$，

于是 $0=|A+B|(1+|A|^2)$，由于 $1+|A|^2>0$，故 $|A+B|=0$.

补充例2D 若$AB=A+2B$，证明$AB=BA$.

证明 $AB=A+2B$可得 $(A-2E)(B-E)=2E$，即 $(A-2E)(0.5(B-E))=E$，

故 $0.5(B-E)$为$A-2E$的逆矩阵，于是 $(0.5(B-E))(A-2E)=E$，

此即 $BA=A+2B=AB$.

补充例2E 已知3阶非零方阵 A，满足 $A_{ij}=2a_{ij}$,$i,j=1,2,3$，求 $|A|$.

证明 $AA^*=A(2A^T)=2AA^T$，故$AA^*=|A|E=2AA^T$，取行列式得，

$|A|^3=|\,|A|E\,|=|2AA^T|=2^3|AA^T|=8|A|\cdot|A^T|=8|A|^2$，故 $|A|=0$或$|A|=8$.

因为A非零，假设 $a_{ij}\neq0$，则 $|A|E=2AA^T$的第 i 个对角元素为

$|A|=2(a_{i1}{}^2+a_{i2}{}^2+a_{i3}{}^2)\geq 2a_{ij}{}^2>0$，故有 $|A|=8$.

补充例2F 设为方阵，证明 $(A^T)^*=(A^*)^T$.

证明 A可能不可逆，故不能使用求逆运算，只能通过比较 (i,j) 元素证明.

$(A^T)^*$ 的(i,j)元素，即A^T的(j,i)位置的代数余子式，即A的(i,j)位置的代数余子式的转置$A_{ij}'=A_{ij}$，

$(A^*)^T$的(i,j)元素，即A^*的(j,i)位置的元素，即A_{ij}. 故$(A^T)^*=(A^*)^T$.