

大学数学试卷 答案 2021.6.22

一、简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 求关于 x 的一元四次方程 $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$ 的根, 其中 a 为一个实数.

解: $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0,$
因此, 该方程的根为 $-3a$ (一重), a (三重).

2. 求 a 的范围使得矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ 为对称正定方阵.

解: A 对称正定, 当且仅当 $\det(6) = 6 > 0, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0, |A| = 2 - 6a^2 > 0,$

因此 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, A 为对称正定方阵.

解法二: 合同变换 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a^2 \end{pmatrix},$

故 A 对称正定当且仅当 $1-3a^2 > 0$, 因此 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, A 为对称正定方阵.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是否相似, 请说明理由?

解: 这两个矩阵相似. A 的三个特征值为 $2, -1, 1$, B 的三个特征值为 $2, -1, 1$, 因此这两个矩阵都相似于对角矩阵 $\text{diag}(2, -1, 1)$, 因此它们相似.

4. $n \times n$ ($n > 1$) 方阵 A, B 满足 $|A| = 2, |B| = 3$, 求 $2A^{-1}B^*$ 的行列式的值.

解: $|2A^{-1}B^*| = 2^n |A^{-1}| |B^*| = 2^n \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} = 6^{n-1}.$

二、(本题12分) A, B, C, D 是4个 $n \times n$ 方阵, 其中 A 可逆且 $AC = CA$, 求证: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$

解: 注意到: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$ 且 $\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}$ 的行列式为1, 因此

$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & -CA^{-1}B + D \end{vmatrix} = |A| |-CA^{-1}B + D| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|$, 证毕.

(本题可以有多种证明方法)

三、(本题12分) 设 A 是一个 $m \times 4$ 矩阵, b 是一个 m 维列向量. 已知 A 的秩为2. 线性方程组 $AX = b$ 有三个解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = (2, 1, 3, 2)^T, 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = (4, -1, 4, 8)^T, 3\alpha_1 + \alpha_3 = (0, -1, 3, 5)^T$. 求线性方程组 $AX = b$ 的通解.

解: 线性方程组 $AX = b$ 有4个未知数且 A 的秩为2, 因此该方程导出组的基础解系有两个线性无关的向量. 再注意到导出组有的两个解

$$2(\alpha_1 + \alpha_2) - (3\alpha_1 + \alpha_3) = (4, 3, 3, -1)^T, 5(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(2\alpha_2 + 3\alpha_3) = (2, 7, 7, -6)^T,$$

且这两个向量线性无关. 因此 $(4, 3, 3, -1)^T, (2, 7, 7, -6)^T$ 是导出组的基础解系.

另一方面 $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = (1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)^T$ 是方程组 $AX = b$ 的一个解. 综上所述, $AX = b$ 的通解为:

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)^T + k_1(4, 3, 3, -1)^T + k_2(2, 7, 7, -6)^T \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R}). \quad (\text{本题答案形式不唯一})$$

四、(本题12分) 在 \mathbf{R}^3 中取两组基 $\begin{cases} \alpha_1 = (1, 1, 0)^T \\ \alpha_2 = (0, 1, 1)^T \\ \alpha_3 = (1, 0, 1)^T \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \beta_1 = (1, 2, 1)^T \\ \beta_2 = (1, 0, -1)^T \\ \beta_3 = (3, 4, 3)^T \end{cases}$. 试求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵以及从基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.

解: 设从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P . 我们应该有:

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$, 且从基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为 P^{-1} . 计算得:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

五、(本题12分) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 + x_3^2 - 4x_2x_3$ 是否为正定二次型?

将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准二次型.

解: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的行列式为 -27 .

因此这个二次型不是正定的. 该矩阵的特征值为 -3 (一重), 3 (二重). 一个属于特征值 -3 的单位特征向量

为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, 两个属于特征值 3 的互相正交的单位特征向量为 $\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$.

令矩阵 U 为: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$, U 为正交矩阵且我们有 $U^T A U = \text{diag}(-2, 3, 3)$.

在正交变换 $x = Uy$ 下, 我们有标准形 $f = -3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$. (本答案形式不唯一)

六、(本题12分) 令 X 为一个 n 维 ($n \geq 2$) 实向量, 满足 $XX^T = 1$. 令 λ 为一个实数, 试证明

(1) X^T 是 $n \times n$ 矩阵 $E - \lambda X^T X$ 的一个特征向量, 并求特征值.

(2) 令 P 是一个 $n \times n$ 正交矩阵并且以 X^T 为其第一列. 证明 $E - \lambda X^T X$ 可通过 P 对角化.

(3) 当 λ 为何值时, $E - \lambda X^T X$ 能成为一个对称正交矩阵?

解: (1) $(E - \lambda X^T X)X^T = X^T - \lambda X^T (XX^T) = (1 - \lambda)X^T$. 因此 X^T 是 $E - \lambda X^T X$ 的一个特征向量且特征值为 $1 - \lambda$.

(2) 注意到 $XP = (1, 0, \dots, 0)$. 从而我们有:

$$P^T(E - \lambda X^T X)P = E - \lambda(XP)^T(XP) = \text{diag}(1 - \lambda, 1, \dots, 1). \text{ 得证.}$$

(3) $E - \lambda X^T X$ 是一个对称矩阵. 我们有 $(E - \lambda X^T X)(E - \lambda X^T X) = E + (\lambda^2 - 2\lambda)X^T X$.

因此 $E - \lambda X^T X$ 是对称正交矩阵当且仅当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 2$.

七、(本题12分) 一个实系数 $n \times n$ 方阵 A 满足 $A^3 = A$. 证明 A 可以对角化.

证: 设 λ 为 A 的一个特征值, 那么属于 λ 的特征向量 α 满足 $\lambda\alpha = A\alpha = A^3\alpha = \lambda^3\alpha$. 因此 $\lambda^3 = \lambda$.

从而 A 的特征值只能为 $0, 1, -1$. 再由条件 $A^3 = A$, 我们得到:

$$-A(A^2 - E) = O, (-E - A)(A^2 - A) = O, (E - A)(A^2 + A) = O.$$

从上面三式中我们可以得到 A 的线性无关特征向量的个数 $\geq r(A^2 - E) + r(A^2 + A) + r(A^2 - A)$. 注意到

$$r(A^2 - E) + r(A^2 + A) + r(A^2 - A) \geq r(A^2 - E) + r(2A^2) = r(A^2 - E) + r(-A^2) \geq r(-E) = n.$$

因此我们可以找到 A 的 n 个线性无关的特征向量, 从而 A 可对角化.