南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2016.1.6 任课教师__________ 考试成绩__________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$的值.

解：将第2行和第3行对换得$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 3 & c & 4 & 5 \\ 2 & 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，再将第1列和第4列对换得$\begin{vmatrix} a & 0 & 2 & 1 \\ 5 & c & 4 & 3 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$，即化为$\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$，故行列式值为$abcd$.

2. 已知$\alpha = (1, 1, -1)^T$是矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$的一个特征向量，(1) 求$a$、$b$和特征向量$\alpha$所对应的特征值；(2) 判断矩阵$A$是否相似于对角矩阵.

解：(1) 由$A\alpha = \lambda\alpha$可得$a = -3, b = 0, \lambda = -1$.

(2) $|\lambda I - A| = (\lambda + 1)^3$，故$\lambda = -1$为3重特征根，又因为$r(-I - A) = 2$，故$A$不能相似于对角矩阵.

3. 设矩阵X满足$AXA + BXB = AXB + BXA + I$，其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵$X$.

解：由题设方程式得：$AX(A-B)+BX(B-A) = I \Rightarrow AX(A-B)-BX(A-B) = I \Rightarrow (A-B)X(A-B) = I$，由于$|A-B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，故$A - B$可逆，且$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 故$X = (A-B)^{-1}(A-B)^{-1} = [(A-B)^{-1}]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 求二次型$f = x_1x_2 + x_2x_3$的秩和正负惯性指数.

解：令$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$及$\begin{cases} y_1 = z_1 - \frac{1}{2}z_3 \\ y_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$可得$f = z_1^2 - z_2^2$，故二次型的秩为2，正负惯性指数均为1.

二、 (本题12分) 设 A 为任一 n 阶实矩阵，证明 $r(A^n) = r(A^{n+1})$.

证明：若线性方程组$A^nx = 0$与$A^{n+1}x = 0$同解，则可知$n - r(A^n) = n - r(A^{n+1})$，故$r(A^n) = r(A^{n+1})$，因此，我们只需证明线性方程组$A^nx = 0$(I)与$A^{n+1}x = 0$(II)同解即可.

一方面，方程组(I)的解显然是方程组(II)的解，另一方面，若α是方程组(II)的解，但非方程组(I)的解，则有$A^{n+1}\alpha = 0$，但$A^n\alpha \neq 0$，则可推出向量组$\alpha, A\alpha, \cdots, A^n\alpha$线性无关，

(令$k_0\alpha + k_1A\alpha + \cdots + k_nA^n\alpha = 0 \Rightarrow A^n(k_0\alpha + k_aA\alpha + \cdots + k_nA^n\alpha) = 0$

$\Rightarrow k_0A^n\alpha = 0 \Rightarrow k_0 = 0$ (因为$A^n\alpha \neq 0$)

同理可得$k_0 = k_1 = \cdots = k_n = 0$，故向量组$\alpha, A\alpha, \cdots, A^n\alpha$线性无关.)

但这是矛盾的，因为该向量组含有$n+1$个n维向量，必定是线性相关的，所以可证得方程组(II)的解也必为方程组(I)的解，继而推出，$r(A^n) = r(A^{n+1})$.

三. (本题12分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$，其中$0 < a, b < 1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

解：由于$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-1+a+b)$，故$A$的特征值为1和$1-a-b$，对应的特征向量分别为$\beta_1=(1,1)^T,\beta_2=(a,-b)^T$. 令$P=(\beta_1,\beta_2)$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&1-a-b\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b&a\\1&-1\end{pmatrix}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A^n=P\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}1&0\\0&1-a-b\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b&a\\b&a\end{pmatrix}$.(其中$-1<1-a-b<1$)

四. (**本题12分**) 设 A 是 n 阶对称阵，P 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 α 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量，(1) 证明 λ 是矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 的一个特征值；(2) 求矩阵 $(P^{-1}AP)^T$对应于特征值 λ 的特征向量.

解：(1) 记 $B=(P^{-1}AP)^T$，则有 $B=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA(P^T)^{-1}$，
故矩阵 B 与 A 相似，从而 λ 是 B 的一个特征值.
(2) 设 $\xi\neq 0$ 是矩阵 B 的对应于 λ 的特征向量，有 $B\xi=\lambda\xi\Leftrightarrow P^TA(P^T)^{-1}\xi=\lambda\xi$
$\Leftrightarrow A(P^T)^{-1}\xi=\lambda(P^T)^{-1}\xi\Leftrightarrow(P^T)^{-1}\xi$ 是 A 的对应于 λ 的特征向量，
于是，令 $(P^T)^{-1}\xi=\alpha$，即 $\xi=P^T\alpha$，则 $\xi\neq 0$，且为矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

五. (**本题12分**) 取向量空间F^4的基底 $\alpha_1=(-1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,-1,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,-1,1)^T,\alpha_4=(1,1,1,-1)^T$，已知向量$\alpha$的坐标是$(-2,0,1,2)^T$，求在基底$\beta_1=(3,1,1,1)^T,\beta_2=(1,3,1,1)^T,\beta_3=(1,1,3,1)^T$, $\beta_4=(1,1,1,3)^T$之下向量α的坐标以及从基底$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 到基底 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 的过渡矩阵.

解：设从基底 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 到基底 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 的过渡矩阵为 P，则有：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$$

解得 $P=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}$，故在基底 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 下，向量 α 的坐标$=P^{-1}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\1\\-2\\-5\end{pmatrix}$.

六. (**本题12分**) 设矩阵 A 与 B 相似，且 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$，(1) 求$a,b$的值；(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

解：A 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2-(a+3)\lambda+(3a-3)]$.
因为 $A\sim B$，所以 A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=b$，由于2是 A 的二重特征值，故2是方程$\lambda^2-(a+3)\lambda+(3a-3)=0$ 的根，将 $\lambda=2$ 代入该方程得：$a=5$，因而有：$|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$，于是$b=\lambda_3=6$. 从而 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$.
当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$2I-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，
得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$；
当 $\lambda_3=6$ 时，$6I-A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&2/3\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\alpha_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1)^T$.
令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1/3\\1&0&-2/3\\0&1&1\end{pmatrix}$，则满足 $P^{-1}AP=B$.

七. (本题12分) $P_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 是空间中四点，矩阵 $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{pmatrix}$，$r(A)=r$，求证：(1) $r=3$ 时，此四点共面；(2) $r=2$ 时，此四点共线；(3) $r=1$ 时，此四点重合(共点).

证明：$A\to\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0\end{pmatrix}=A_1$，记 $A_2=\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{pmatrix}$，则 $r(A)=r(A_1)=r(A_2)+1$.

(1) 当 $r=3$ 时，$r(A_2)=r-1=2$，不妨设 A_2 的前2行线性无关，而第3行可用它们线性表示，即向量$\overrightarrow{P_2P_1}$与$\overrightarrow{P_3P_1}$ 线性无关，确定一平面，而向量$\overrightarrow{P_4P_1}$在此平面上，由于这三个向量的起点均为P_1，故四点共面.

(2) 当 $r=2$ 时，$r(A_2)=r-1=1$，不妨设 A_2 的第2、3行均可用第1行线性表示，即向量$\overrightarrow{P_2P_1}$与$\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_4P_1}$共线，故四点共线.

(3) 当 $r=1$ 时，不妨设 A 中后3行均可用第1行线性表示：

$(x_i,y_i,z_i,1)=k_i(x_1,y_1,z_1,1)$ $(i=2,3,4)$，但由第4个分量知，$k_i=1$ $(i=2,3,4)$，故$(x_i,y_i,z_i,1)=(x_1,y_1,z_1,1)$ $(i=2,3,4)$，即四点重合.