Intro to Functional Analysis – Brief Review

1 度量空间

1.1 基本定义与性质

度量空间

设 X 是一个非空集合，定义二元函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ 满足：

1. **（正定性）** $d(x, y) \geq 0$ 且 $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. **（对称性）** $d(x, y) = d(y, x)$
3. **（三角不等式）** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$，$\forall x, y, z \in X$

注：同一个集合 X 上可以有多种不同的度量方式，最初级的度量方式便是“离散度量”。

开集、闭集的定义是数分课程的必会内容，这里不再抄写。值得注意的是集合的开/闭与度量的定义有关。
注：在度量空间中的点列收敛即为 $d(x_n, x_0) \to 0 \iff x_n \to x_0$。

映射的连续性

设 X, Y 均为度量空间，映射 $T : X \to Y$ 对于 $x_0 \in X$ 满足：对任意点列 $x_n \to x_0$ $x_n \in X$ 都有 $Tx_n \to Tx_0 \iff$ 映射 T 在 x_0 处连续。
注：通常还有第二种定义，这两种定义是等价的： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(x_0, \delta), |T(x) - T(x_0)| < \varepsilon$。
定义的等价性证明为数分内容，略去。

整体角度的连续刻画

T 为连续映射 $\iff$（1）对任意开集 $U \subset Y, T^{-1}(U)$ 是开集；（2）对任意闭集 $U \subset Y, T^{-1}(U)$ 是闭集；
（1）的必要性证明： 设 $T^{-1}x \in T^{-1}(U)$，则对 $x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset U$
又对于 ε 存在 $\delta > 0$ 使得 $\forall y \in B(T^{-1}x, \delta), d(x, Ty) < \varepsilon \implies Ty \in B(x, \varepsilon) \subset U \implies y \in T^{-1}(U)$
因此 $B(T^{-1}x, \delta) \subset T^{-1}(U)$
（1）的充分性证明： 考虑开球的原像 $T^{-1}B(Tx_0, \varepsilon)$（其中 ε 是任取的正数）
根据条件可知它是一个开集，且可以肯定 $x_0 \in T^{-1}B(Tx_0, \varepsilon) \implies \exists \delta > 0, B(x_0, \delta) \subset T^{-1}B(Tx_0, \varepsilon)$
综上，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(x_0, \delta), |Tx - Tx_0| < \varepsilon$。
最后 (1)(2) 等价，这可以由取补集得到。

同胚

给定度量空间 X, Y，若映射 $f: X \to Y$ 满足

1. f 是双射
2. f 是连续的
3. f^{-1} 是连续的

则称 X 与 Y 是同胚的，f 为同胚映射。
注：同胚代表着共享所有拓扑不变量，这包含了紧致性，这也是本课程最常用到的结论之一。证明将在后面给出。

1.2 可分度量空间

稠密：为数分课要求掌握的内容，定义略去。

可分度量空间

若度量空间 A 有可数的稠密子集，则称其为可分的。

常见可分例子

1. $C[0,1]$ 可分。

   说明：连续函数可以用多项式逼近，而任何多项式又可以用有理多项式集合逼近，有理多项式是可数的。

2. $L[0,1]$ 可分

   说明：根据实变函数的知识，$L[0,1]$ 中的可积函数可以用连续函数来逼近（在 L^1 范数下）；而连续函数又可以由有理系数的多项式来一致逼近，且有理系数多项式集合是可数的，因此 $L[0,1]$ 是可分的。

3. $l^p(1 \le p < \infty)$ 可分。

   说明：可以用有限多项非 0、每一项都是有理数的数列集合逼近，这个集合是可数的，而且包含于 l^p

怎么说明一个集合是不可分的?

方法：构造一个不可数集合，其间元素两两距离大于某常数。
例 1：l^∞ 空间，考虑集合 $\{\{a_n\}|a_n = 0, 1\} \subset l^\infty$，该集合不可数，且两两距离 $\ge 1 \implies l^\infty$ 不可分。

例 2：$BC(R)$ 空间，考虑连续函数列 $f_n(x)$，其中 $f_n(x)$ 在 $[n, n+1]$ 上为一个“锯齿形”，其余部分为 0，再考虑其中若干个函数之和组成的集合。这个集合也不可分，且两两距离为 1。

1.3 完备度量空间

完备度量空间的定义

若度量空间 X 中的任意柯西列 $\{x_n\}$ 都一定收敛到 X 中某点 x_0，则称 X 是完备的。

1.4 紧空间

紧空间的定义

若度量空间 X 中的集合 A 满足，A 中任意点列都存在收敛子列，且收敛于 X 中的点，则称 A 为列紧的。特别地，若收敛于 A 中的点，则称为自列紧（紧）。

紧空间的等价定义

在度量空间 (X, d) 中，关于集合 $A \subset X$ 的以下三个命题是**等价**的：

1. **序列紧（自列紧）**：A 中的任意点列都有收敛子列，且极限在 A 中。(这是上一条中使用的定义)
2. **覆盖紧（开覆盖定理）**：A 的任意开覆盖都必定存在有限子覆盖。
3. **完备且完全有界**：A 作为子空间是完备的，且对于任意 $\varepsilon > 0$，A 都能被有限个半径为 ε 的开球覆盖（即存在有限 ε-网）。

形象：紧是拓扑意义上的有限，无论用多小的开球去覆盖都只需要有限个。它是保证最值存在、局部性质能推广到整体的核心条件。

1.5 压缩映射定理

压缩映射定理

设 (X, d) 是完备度量空间，映射 $T : X \to X$ 满足压缩条件：存在常数 $0 \le k < 1$，使得对任意 $x, y \in X$ 有 $d(Tx, Ty) \le k \cdot d(x, y)$，则 T 有唯一不动点 $x^* \in X$（即 $Tx^* = x^*$）；

证明：任取 $x_0 \in X$，令 $x_{n+1} = T(x_n)$，$n \ge 0$，则由压缩性：$d(x_{n+1}, x_n) \le k^n d(x_1, x_0)$。

对 $m > n$，

$$d(x_m, x_n) \le \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \le \sum_{j=n}^{m-1} k^j d(x_1, x_0) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由 X 的完备性，存在 $x^* \in X$ 使 $x_n \to x^*$。

由于 T 连续（压缩映射必连续），

$$T(x^*) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

唯一性证明：若 y^* 也是不动点，则

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \le k d(x^*, y^*),$$

由于 $k < 1$，必须 $d(x^*, y^*) = 0$，故 $x^* = y^*$。

2 赋范线性空间与 Banach 空间

2.1 基本定义

赋范线性空间的定义

设 X 是实数域或复数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间。如果对于 X 中的每一个元素 x，都有一个实数 $||x||$ 与之对应，且满足以下三个条件：

1. **（正定性）** $||x|| \geq 0$，且 $||x|| = 0 \iff x = \mathbf{0}$；
2. **（绝对齐次性）** $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$，$\forall \alpha \in \mathbb{K}$，$\forall x \in X$；
3. **（三角不等式）** $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$，$\forall x, y \in X$。

则称 $||x||$ 为元素 x 的**范数 (Norm)**，称 $(X, ||\cdot||)$ 为**赋范线性空间**。
注：赋范线性空间天然是一个度量空间，其诱导度量为 $d(x, y) = ||x - y||$。范数不仅刻画了向量的"长度"，还刻画了向量之间的"距离"。所有度量空间的性质（开集、闭集、连续性、完备性）都可以直接平移过来。

Banach 空间的定义

如果赋范线性空间 $(X, ||\cdot||)$ 作为其诱导度量空间 (X, d) 是**完备的**（即其中的任意柯西列都按范数收敛到空间内的一点），则称 X 为 **Banach 空间**。
经典例子：

- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 配合 p-范数是 Banach 空间。
- $C[a, b]$ 配合最大值范数 $||f||_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$ 是 Banach 空间。
- $L^p[a, b]$ 和 l^p $(1 \leq p \leq \infty)$ 配合各自的 p-范数都是 Banach 空间。

2.2 范数的等价性与有限维空间

等价范数

设 $||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 是线性空间 X 上的两种范数。如果存在常数 $c, C > 0$，使得对任意 $x \in X$，都有：

$$c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1$$

则称这两种范数是**等价的**。
重要性质：等价范数诱导相同的拓扑结构（即收敛序列完全相同，开集闭集完全相同，完备性相同）。

有限维赋范空间的极其重要性质

1. **范数全等价**：有限维线性空间上的**任意**两种范数都是等价的。
2. **必定完备**：有限维赋范线性空间一定是 Banach 空间（即有限维子空间一定是闭子空间）。
3. **Riesz 引理与紧性**：赋范线性空间 X 是有限维的 $\iff$ 其闭单位球 $B = \{x \in X \mid ||x|| \leq 1\}$ 是

紧集。

核心直观：Riesz 引理是无穷维空间与有限维空间的分水岭。它说明在无穷维空间中，单位球一定不紧（里面可以塞下无穷多个相互距离大于等于 $1-\varepsilon$ 的点，就像一只长满长刺的刺猬）。这也是为什么我们在无穷维空间里需要引入“紧算子”和“弱收敛”等概念的根本原因！

3 线性算子与线性泛函

3.1 基本定义与性质

线性算子的定义

设 X, Y 是同一个数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间。一个映射 $T : X \to Y$ 被称为**线性算子**，如果满足：对任意 $x, y \in X$ 和任意标量 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$，都有

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

注：

- 线性算子必然把零元映射为零元，即 $T(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$。
- **极其重要的特例**：当目标空间 $Y = \mathbb{K}$（即映射结果是一个具体的数）时，该线性算子特称为**线性泛函 (Linear Functional)**。

线性算子的有界性

若存在常数 M 使得线性算子 $T : X \to Y$ 对于 $\forall x \in X$ 满足 $||Tx|| \leq C||x||$，则称线性算子 T 有界。

线性算子的连续和有界等价

必要性证明：若 T 连续，则对任意点列 $x_n \to 0$ 有 $Tx_n \to 0$
若不有界，则可以构造模长为 1 的点列 $\{x_n\}$ 使得 $||Tx_n|| \geq n$。
注意到点列 $\{\frac{x_n}{n}\} \to 0$ 但 $||\frac{Tx_n}{n}|| = 1$，这与题目假设矛盾。
充分性证明：若 T 有界 C，对于点列 $x_n \to 0$ 有 $||Tx_n|| \leq C||x_n|| \to 0 \implies Tx_n \to 0$。

非零线性泛函连续的充要条件

设 X 是赋范线性空间，f 是 X 上的非零线性泛函，则 f 连续 $\iff$ $N(f)$ 是 X 上的闭子集。
必要性证明：取 $N(f)$ 中收敛子列 $x_n \to x_0$，则由 f 的连续性可知 $f(x_n) \to f(x_0)$
又 $f(x_n) = 0$ 恒成立，因此 $f(x_0) = 0 \implies x_0 \in N(f)$。
充分性证明：反证法，假设 f 不连续，也就是说 f 不是有界的，则存在 $||x_n|| = 1, |f(x_n)| \geq n$
构造 $N(f)$ 中的点列 $y_n = \dfrac{x_1}{f(x_1)} - \dfrac{x_n}{f(x_n)} \implies f(y_n) = 0 \implies y_n \in N(f)$
又因为 $y_n \to \dfrac{x_1}{f(x_1)} \implies f(y_n) \to 1$，这和 $f(y_n) = 0$ 矛盾！

非零线性泛函不连续的充要条件

设 X 是赋范线性空间，f 是 X 上的非零线性泛函，则 f 不连续 $\iff$ $N(f)$ 是 X 上的稠密子集。
必要性证明：由不连续性，可以取一列 $x_n \to 0$ 使得 $|f(x_n)| \geq \varepsilon$
对于 $\forall x \in X$，考虑 $x - \dfrac{x_n}{f(x_n)} f(x) \in N(f)$，注意到

$$||x - \frac{x_n}{f(x_n)} f(x) - x|| = \frac{|f(x)|}{|f(x_n)|} ||x_n|| \leq \frac{|f(x)|}{\varepsilon} ||x_n|| \to 0$$

因此 $\forall x \in X$，存在 $N(f)$ 中的点列趋近于 x。
充分性证明：假设连续，$\forall x \in X$，存在 $N(f)$ 中的一列 $x_n \to x$。
则 $0 = f(x_n) \to f(x) \implies f = 0$ 恒成立，因此 f 是零泛函，矛盾。

3.2 对偶空间

定义：对偶空间

对于 **Banach 空间** X，考虑 X 上的所有**连续线性泛函** $f : X \to R$，事实上可以验证这些**连续线性泛函**构成 **Banach 空间**（对应范数为算子范数）。
将这一 Banach 空间记为 Y，则称 Y 是 X 的对偶空间，记为 $Y = X^*$。

引入：丘砖高代中的有限维例子

考虑定义在 Banach 空间 K^n 上的**线性函数（也是泛函）**f，它们的解析式通式形如：

$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K^n,\ f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

所有的这些线性函数，其实就是"取分量函数"（即函数 $f_i(\boldsymbol{x}) = x_i\ (1 \leq i \leq n)$）的线性组合。
也就是说，这 n 个"取分量函数"构成了 $(K^n)^*$ 的基，因此显然 $(K^n)^*$ 也是 Banach 空间。

重要性质：对偶空间是 Banach 空间

证明：设 X 为 Banach 空间，X^* 中有一个 Cauchy 泛函列 f_n
首先构造目标的收敛泛函 f：$\forall x \in X, ||f_m(x) - f_n(x)|| \leq ||f_m - f_n|| ||x|| \to 0$
因此 $\{f_n(x)\}$ 是 Cauchy 列，设其极限为 y
由此可以得到一个线性映射关系 $f : x \mapsto y$，即 $\forall x \in X, f_n(x) \to f(x)$
下证明 $f \in X^*$，即证明有界性：因 $\{f_n\}$ 是柯西列，故是有界列，即存在 M 使得 $||f_n|| \leq M$。

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} ||f_n|| \cdot ||x|| \leq M||x||$$

故 f 有界，即 $f \in X^*$。
最后证明 $f_n \to f$：因为 $\{f_n\}$ 是柯西列，$\forall \epsilon > 0, \exists N$，当 $n, m > N$ 时 $||f_n - f_m|| < \epsilon$
即对任意 x $(||x|| = 1)$ 有 $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$，**固定** n，**令** $m \to \infty$，得 $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$
取上确界，即得 $||f_n - f|| = \sup\limits_{||x||=1} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall n > N \implies f_n \to f$
因此 X^* 是完备的，即为 Banach 空间。

经典结论：$(l^p)^*$ 与 l^q 的等距同构

设 $1 \le p < \infty$，且 $p+q=pq$。则 $(l^p)^* \cong l^q$。

证明：

第一步：构造映射（从 l^q 到 $(l^p)^*$） 对于任意 $y=(y_n) \in l^q$，定义 l^p 上的线性泛函 f_y：

$$f_y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \forall x \in l^p$$

由 Hölder 不等式：$|f_y(x)| \le ||x||_p ||y||_q$，故 $f_y \in (l^p)^*$ 且 $||f_y|| \le ||y||_q$。
进一步，根据 Holder 不等式取等条件），可证 $||f_y|| = ||y||_q$。由此建立了**保距单射** $\Phi : y \mapsto f_y$。

第二步：证明满射（从 $(l^p)^*$ 到 l^q） 任取 $g \in (l^p)^*$，我们要寻找一个 $y \in l^q$ 满足 $f_y = g$。
1. **确定 y 的形式**：取 l^p 的标准基 $e_k=(0,\dots,1,\dots)$，定义 $y_k=g(e_k)$。由此得到序列 $y=(y_1,y_2,\dots)$。
2. **验证** $y \in l^q$：考虑 y 的前 n 项截断。构造测试向量 $x^{(n)}=(\xi_1,\dots,\xi_n,0,\dots)$，其中：

$$\xi_k = |y_k|^{q-1}\mathrm{sgn}(y_k)$$

那么 $||x^{(n)}||_p = (\sum_{k=1}^n |y_k|^{(q-1)p})^{1/p} = (\sum_{k=1}^n |y_k|^q)^{1/p}$。
利用 g 的有界性：

$$g(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} y_k \xi_k = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \le ||g|| \cdot ||x^{(n)}||_p$$

代入范数计算并化简（两边消去 $(\sum |y_k|^q)^{1/p}$），得：

$$(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q} \le ||g||$$

令 $n \to \infty$，得 $||y||_q \le ||g|| < \infty \implies y \in l^q$。
3. **验证** $f_y = g$：现在我们有了 $y \in l^q$，它对应的泛函是 f_y。对于任意 $x \in l^p$，由于 $p<\infty$，有限线性组合稠密。g 和 f_y 在基向量 e_k 上显然相等（由 y_k 定义），故由连续性，它们在整个空间上相等。即 $g=f_y$。
综上，Φ 是保距同构。

例：$(c_0)^* = l^1$

证明思路完全同上，构造 l^1 与 $(c_0)^*$ 之间的双射。
值得注意的是，$(l^\infty)^* \neq l^1$!!

L^p 空间

$(L^p(E))^* = L^q(E)$，其中 $p+q=pq, 1 \le p < +\infty$
证明较复杂，涉及到许多测度论知识，故略去。
注：此处的 E 可以是无限测度空间，这一点和 L^p 空间的包含关系不一样！

3.3 算子的谱

算子的谱与预解集

设 X 是复 Banach 空间，$T \in \mathcal{B}(X)$ 是有界线性算子。考察算子 $T_\lambda = \lambda I - T$（其中 $\lambda \in \mathbb{C}$）。
1. 预解集 $\rho(T)$：如果 T_λ **存在有界的逆算子**（即 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$），那么称 $\lambda \in C$ 属于 T 的预解集。

2. 谱集 $\sigma(T)$ ：复平面上预解集的补集，即 $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$。

谱的三种分类

无穷维空间的奇妙之处在于，$\lambda I - T$ 出毛病的方式有三种，因此谱集被划分为三个互不相交的部分：

1. **点谱** $\sigma_p(T)$： T_λ **不是单射**，也就是逆映射不存在。

   这意味着存在非零向量 x 使得 $(\lambda I - T)x = 0 \implies Tx = \lambda x$。这就是线性代数里最熟悉的**特征值**！

2. **连续谱** $\sigma_c(T)$： T_λ **是单射**，也就是逆映射存在，且它的值域是**稠密的**（几乎满射）。

   但是它的逆算子**无界**，这种现象是无穷维独有的"病态"。

3. **剩余谱** $\sigma_r(T)$： T_λ **是单射**，也就是逆映射存在，但它的值域**不稠密**（严重不满射）。

谱集和正则集的性质

定理：有界线性算子的正则集 $\rho(T)$ 一定是复平面上的**开集**。
定理：有界线性算子的谱集 $\sigma(T)$ 一定是复平面上的**非空紧集**，且谱半径 $r(T) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \leq ||T||$。
证明：
1. 证明正则集 $\rho(T)$ 是开集
任取 $\lambda_0 \in \rho(T)$，这意味着逆算子 $R(\lambda_0) = (\lambda_0 I - T)^{-1}$ 存在且有界。我们要证明 λ_0 的一个小邻域内的点也都属于 $\rho(T)$。对于任意复数 λ，我们可以做如下代数变形：

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T) - (\lambda_0 - \lambda)I = (\lambda_0 I - T)[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)]$$

记 $A = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)$。只要 λ 足够接近 λ_0，使得：

$$||A|| = |\lambda - \lambda_0| \cdot ||R(\lambda_0)|| < 1$$

即 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R(\lambda_0)||}$ 时，根据 **Neumann 级数定理**，算子 $(I - A)$ 是可逆的。
由于 $\lambda I - T$ 是两个可逆算子 $(\lambda_0 I - T)$ 和 $(I - A)$ 的乘积，因此它也是可逆的。这说明 λ_0 的一个开邻域完全包含在 $\rho(T)$ 中。故 $\rho(T)$ 是开集。

2. 证明谱集 $\sigma(T)$ 是紧集（有界闭集）

- **闭集**：由集合论定义，$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$。因为刚刚证明了 $\rho(T)$ 是开集，所以其补集 $\sigma(T)$ 必然是闭集。

- **有界性**：考察 $|\lambda| > ||T||$ 的情况。此时有 $||\frac{T}{\lambda}|| = \frac{||T||}{|\lambda|} < 1$。我们可以把算子写成：$\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$。同样利用 Neumann 级数可知 $(I - \frac{T}{\lambda})$ 可逆，因此 $\lambda I - T$ 可逆。这意味着：所有模长大于 $||T||$ 的 λ 都属于正则集。反之，谱集 $\sigma(T)$ 必须被限制在闭圆盘 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq ||T||\}$ 内部。

综上所述，$\sigma(T)$ 是复平面上的有界闭集，即为紧集。
（注：关于"非空性"的证明此处略去细节，仅需记住结论。）

3.4 Banach 空间上的共轭算子

Banach 空间上的共轭算子定义

设 X,Y 是 Banach 空间，$T \in B(X,Y)$ 是有界线性算子。
对于任意 $g \in Y^*$，设 $T^*g \in X^*$ 是 X 上的一个线性泛函，满足：

$$(T^*g)(x) = g(Tx), \quad \forall x \in X$$

则称 T 的共轭算子为 $T^* : Y^* \to X^*$。

Banach 共轭算子的基本性质：保范性

对于上述定义的共轭算子 T^*，有 $T^* \in B(Y^*, X^*)$，且算子范数相等：$||T^*|| = ||T||$。
证明：

1. **证明 T^* 是有界线性算子（且 $||T^*|| \leq ||T||$）：** 线性显然。我们来计算范数：对于任意 $x \in X, g \in Y^*$，利用泛函有界性和算子有界性，有：

$$|(T^*g)(x)| = |g(Tx)| \leq ||g|| \cdot ||Tx|| \leq ||g||_{Y^*} \cdot ||T|| \cdot ||x||$$

由于这对于所有 x 成立，取上确界得到 X^* 中的泛函范数：

$$||T^*g||_{X^*} = \sup_{||x||=1} |(T^*g)(x)| \leq ||T|| \cdot ||g||_{Y^*}$$

这说明 T^* 是有界的，且 $||T^*|| \leq ||T||$。

2. **证明** $||T|| \leq ||T^*||$：对于任意 $x \in X$，其像 $Tx \in Y$。根据 Hahn-Banach 定理（选取 $\mathrm{span}\{Tx\}$ 作为子空间），存在一个泛函 $g_0 \in Y^*$，满足 $||g_0|| = 1$ 且 $g_0(Tx) = ||Tx||$。

把这个特别的 g_0 代入共轭算子的定义中：

$$||Tx|| = g_0(Tx) = (T^*g_0)(x) \leq ||T^*g_0|| \cdot ||x|| \leq ||T^*|| \cdot ||g_0|| \cdot ||x|| = ||T^*|| \cdot ||x||$$

根据算子范数定义，取上确界得到 $||T|| \leq ||T^*||$

3.5 巴拿赫空间的基本定理

3.5.1 Hahn-Banach 定理

实 Hahn-Banach 定理：将一个泛函从小的子空间延拓到整个空间中

设实线性空间 X 的子空间是 X_1，p 是定义在 X 上的次线性泛函，f 是定义在 X_1 上的线性泛函，满足 $f(x) \leq p(x), \forall x \in X_1$，**则可将 f 延拓到 X 上的线性泛函 g 使得** $g|_{X_1} = f, g(x) \leq p(x), \forall x \in X$。

次线性泛函

若定义在线性空间 X 上的泛函 $p(x)$ 满足，$\forall x, y \in X, \lambda > 0$ 有下界

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

形象理解：想象有一个只能测量物体长度的尺子（线性泛函），现在你想测量物体的体积（更大空间里的线性泛函）。Hahn-Banach 定理说：如果你能在小空间（比如一维线段）上定义某种“合理的测量规则”（满足某些条件），那么你就能把这个测量规则安全地（保持原有线性、有界性等）推广到整个大空间（三维空间），而不会产生矛盾。

证明：STEP 1：在 X_1 的基础上，拓展一个维度。

不妨设 $X \neq X_1, \exists x_0 \in X \setminus X_1$，考虑子空间 $X_2 = X_1 + \mathrm{span}\{x_0\} = \{x_1 + \lambda x_0 | \lambda \in R, x_1 \in X_1\}$
将泛函延拓到 X_2 上：设 $f(x_0) = c$（其中 c 是人为设定的，**待定**）
即 $f(x_1 + \lambda x_0) = \lambda c + f(x_1)$

STEP 2：检验延拓后的泛函是否满足条件

首先，延拓后的泛函显然保持线性。为了使其仍被 p 控制，我们要求

$$f(x_1 + \lambda x_0) = f(x_1) + \lambda c \leq p(x_1 + \lambda x_0), \forall \lambda \in R, x_1 \in X_1$$

$$\Longrightarrow c \leq \frac{p(x_1 + \lambda x_0) - f(x_1)}{\lambda}, \forall \lambda > 0, x_1 \in X_1 \text{ 且 } c \geq \frac{f(x_2) - p(x_2 - \mu x_0)}{\mu}, \forall \mu > 0, x_2 \in X_1$$

我们需要验证这两个不等式是可以同时满足的，事实上

$$\frac{f(x_2) - p(x_2 - \mu x_0)}{\mu} \leq \frac{p(x_1 + \lambda x_0) - f(x_1)}{\lambda} \iff f(\frac{x_1}{\lambda} + \frac{x_2}{\mu}) \leq p(\frac{x_1}{\lambda} + x_0) + p(\frac{x_2}{\mu} - x_0)$$

注意到 $p(\frac{x_1}{\lambda} + x_0) + p(\frac{x_2}{\mu} - x_0) \geq p(\frac{x_1}{\lambda} + \frac{x_2}{\mu}) \geq f(\frac{x_1}{\lambda} + \frac{x_2}{\mu})$，因此这一要求能够满足，即：

$$\sup_{\lambda > 0, x \in X} \frac{f(x) - p(x - \lambda x_0)}{\lambda} \leq \inf_{\lambda > 0, x \in X} \frac{p(x + \lambda x_0) - f(x)}{\lambda}$$

取 c 落在这一区间里即可满足控制的要求。

STEP 3：使用 Zorn 引理完成整体延拓

设 $\mathcal{F}$ 是所有满足以下条件的 (Y, g) 的集合：

- $X_1 \subset Y \subset X$ 是线性子空间
- $g : Y \to \mathbb{R}$ 是线性泛函
- $g|_{X_1} = f_1$（即延拓了原来定义的 f_1）
- $g(x) \leq p(x)$ 对所有 $x \in Y$

在 $\mathcal{F}$ 上定义偏序：$(Y, g) \preceq (Y', g')$ 当且仅当 $Y \subset Y'$ 且 $g'|_Y = g$。

- $\mathcal{F}$ 非空：$(X_2, f_2) \in \mathcal{F}$（这里 f_2 是我们在 STEP 2 中构造的延拓）。
- 任意链有上界：设 $\{(Y_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的链。令

$$Y = \bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha, \quad g(x) = g_\alpha(x) \text{ 当} x \in Y_\alpha.$$

  由链的定义，g 是良定义的线性泛函，且满足控制条件，所以 $(Y, g) \in \mathcal{F}$ 是该链的上界。

由 Zorn 引理，$\mathcal{F}$ 有极大元 $(Y_{\max}, g_{\max})$。

STEP 4：证明 $Y_{\max} = X$
假设 $Y_{\max} \neq X$，则存在 $x_0 \in X \setminus Y_{\max}$。重复 STEP 1-2 的过程，可将 $g_{\max}$ 延拓到 $Y_{\max} + \mathrm{span}\{x_0\}$，这与 $(Y_{\max}, g_{\max})$ 的极大性矛盾。
因此 $Y_{\max} = X$。令 $f = g_{\max}$，则 $f : X \to \mathbb{R}$ 是 f_1 的线性延拓，且满足

$$f(x) \le p(x) \quad \forall x \in X.$$

复 Hahn-Banach 定理

此时的控制改为“半范数”：（1）$p(x) \ge 0$；（2）$p(x+y) \le p(x) + p(y)$；（3）$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$
定理的证明是类似的，对实部和虚部分开讨论。作为初级笔记，主要讨论实的情况。

推论：保范延拓

给定赋范空间 X 和子空间 X_1，设 $f(x)$ 是 X_1 上的连续线性泛函，则存在 X 上的连续线性泛函 $F(x)$ 满足：$F|_{X_1} = f, ||F|| = ||f||_{X_1}$（保范数延拓）。
在延拓过程中，可以保持泛函的范数不变：选取 $p(x) = ||f||_{X_1}||x||$，容易验证其可以作为控制泛函。
现在应用 Hahn-Banach 定理，$F(x) \le ||f||_{X_1}||x|| \implies ||F|| \le ||f||_{X_1}$
又 $X_1 \subset X \implies ||F|| \ge ||f||_{X_1} \implies ||F|| = ||f||_{X_1}$

例 1: 任意两个不同元素都存在某个连续线性泛函进行区分

$\forall x_1, x_2 \in X$，我们要构造线性泛函 f 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$
记 $x_0 = x_1 - x_2$，构造 $\mathrm{span}\{x_0\}$ 上的泛函：$f(\lambda x_0) = \lambda ||x_0||$，此后将其延拓得到 X 上的泛函 F
注意到 $F(x_0) = ||x_0|| = F(x_1) - F(x_2) > 0 \implies F(x_1) \neq F(x_2)$，则 F 为所求。

例 2

设 X 是赋范空间，则 $\forall x \in X, ||x|| = \sup\{|f(x)||f \in X^*, ||f|| = 1\}$
证明：首先对于 $||f|| = 1$ 的线性泛函 f：$|f(x)| \le ||f||||x|| = ||x||$
下构造取等：构造 $\mathrm{span}\{x\}$ 上的泛函：$f(\lambda x) = \lambda ||x||$，则 $||f|| = 1$，此后将其作保范延拓得到 X 上的泛函 F，则 $F(x) = x, ||F|| = 1$。综上 $||x|| = \sup\{|f(x)||f \in X^*, ||f|| = 1\}$

例 3: 点到平面距离公式的推广

点 x_0 到线性泛函 f 的核空间 $\ker f$ 的距离公式 $d = \dfrac{|f(x_0)|}{||f||}$

证明: 考虑空间 $\ker f + \mathrm{span}\{x_0\} = \{m + \alpha x_0 | \alpha \in R, m \in \ker f\}$, 定义该空间上的泛函 $F(m+\alpha x_0) = \alpha$
下计算泛函 F 的范数: 注意到

$$|\alpha| = |F(m+\alpha x_0)| = |\alpha||F(x_0 + \frac{m}{\alpha})| \leq |\alpha|||F||||x_0 + \frac{m}{\alpha}||$$

约去 α, 取下确界有 $||F|| \geq \dfrac{1}{d}$
另一方面, 注意如下式子成立

$$|F(m+\alpha x_0)| \leq \frac{||m+\alpha x_0||}{d} \iff d \leq ||x_0 + \frac{m}{\alpha}||$$

则有 $||F|| \leq \dfrac{1}{d} \implies ||F|| = \dfrac{1}{d}$。**由 Hanh-Banach 定理: 可以对泛函 F 作保范数延拓。**
注意到 F 和 f 的核空间相同, 因此 $F(x) = \lambda f(x)$, 又 $F(x_0) = 1 \implies f(x) = f(x_0)F(x)$
取范数有 $||f|| = \dfrac{|f(x_0)|}{d}$, 即距离公式 $d = \dfrac{|f(x_0)|}{||f||}$

例 4: 赋范线性空间里, 任意有限维子空间都有闭补空间

注意: 这里没有讲唯一, 与后面的正交补空间有不同!
证明: 设 X 为赋范线性空间, 其子集 $Y = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$
在 Y 上构造 n 个线性泛函 $f_i(\lambda x_i) = \lambda$, 计算其范数可得 $||f_i|| = \dfrac{1}{||x_i||}$
将其保范延拓, 可得到 X 上的泛函 F_i, 构造线性算子 $P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$, 则 $\ker P$ 是闭空间。
我们断言: $X = Y \bigoplus \ker P$, 事实上, $\forall x \in X, x = (x - P(x)) + P(x), x - P(x) \in \ker P, P(x) \in Y$
且 $\forall y \in \ker P \bigcap Y, P(y) = 0 \implies y = 0$, 因此 $X = Y \bigoplus \ker P$

几何形式: 凸集分离定理

设 X 是实赋范线性空间 (或 Banach 空间), A 和 B 是 X 中两个**不相交**的非空**凸集**。
若 A 是**开集**, 则存在 X 上的非零连续线性泛函 $f \in X^*$ 以及实数 $\gamma \in \mathbb{R}$, 使得:

$$f(x) < \gamma \leq f(y), \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

证明: 取 $-x_0 \in A - B$, 记 $C = A - B + x_0$ 是一个开的凸集, 则 $0 \in C, x_0 \notin C$。
定义 Minkowski 泛函作为控制泛函: $p(x) = \inf\{b > 0 | x \in bC\}, x \in X$, 则 $p(bx_0) \geq b$
在 $\mathrm{span}(x_0)$ 上定义泛函 $l(bx_0) = b \leq p(bx_0)$, 则在 $\mathrm{span}(x_0)$ 上 p 是控制次泛函。
由 Hanh-Banach 定理, 可以将 l 进行延拓到整个空间 X 上面。
设 $x \in C, C$ 为开集合, 即 x 在 C 的内部 $\implies l(x) < 1$
设 $x = y - z + x_0 \implies l(x) = l(y) - l(z) + l(x_0) < 1 \implies l(y) < l(z)$

评注: Minkowski 泛函的构造思路其实来源于常规的范数:
对于普通范数 (例如 $||x|| = 2$), 我们可以将其理解成 "将单位球扩大 $||x|| = 2$ 倍从而覆盖到 x"。
那么对于一般的 (含有 0 的) 凸集, 我们也可以如此定义一个 "广义的范数", 那么这个范数也想相当于一个泛函, 称为 Minkowski 泛函。(也就是说范数是单位球的 Minkowski 泛函)

3.5.2 纲、Baire 纲定理

疏集

若集合 A 满足**闭包** $\overline{A}$ 没有内点，则称其为疏集。
没有内点的集合不一定是疏集（比如 Q），要加上闭集的前提。

纲

若 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，其中 A_n 是疏集，则 A 是第一纲的，反之则为第二纲的。

第一/二纲集的常见例子

1. N **赋予欧式度量：第二纲集**。若 $A\subset N$ 且 $A\neq\emptyset$，设 $x_0\in A$，则有 $B(x_0,1/2)=\{x_0\}\subset A$，即 x_0 为内点，因此 N 中的疏集只有空集，因此 N 是第二纲的。
2. Q **在** R **中：第一纲集**。此时单点集 $\{q_n\}$ 是一个疏集（因为此时开球不再退化成一个点），因此 Q 可以写成可数个疏集的并。

Baire 纲定理

完备度量空间是第二纲的。
证明：若否，设 $X=\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}\subset X \implies X=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}$，其中 A_n 是疏集。
不妨设 A_n 是闭的。取 $x_1\in A_1,x_{n+1}\in B(x_n,\dfrac{1}{n^2})$。
注意到有限个闭疏集的并仍然闭，因此 $B(x_n,\dfrac{1}{n^2})\nsubseteq A_1\cup A_2\cdots\cup A_n$
因此在选取 x_{n+1} 时候可以使 $x_{n+1}\notin A_1\cup A_2\cdots\cup A_n$
由此构造出点列 $\{x_n\}$ 满足 $||x_{n+1}-x_n||\leq\dfrac{1}{n^2}\implies||x_m-x_n||\leq\dfrac{1}{n^2}+\cdots+\dfrac{1}{(m-1)^2}<\dfrac{1}{n}$
因此 $\{x_n\}$ 是柯西列，因此收敛于 $x\in X$
我们断言 $x\notin X$，否则 $x\in A_k$，而 $||x_n-x||<\dfrac{1}{n}\implies n$ 足够大时，

例 1

设 $A\subset R$ 是第一纲集，证明 $A^c-A^c=R$
证明：设 $x\notin A^c-A^c\implies\{x\}\cap(A^c-A^c)=\varnothing\implies(x+A^c)\bigcap A^c=\varnothing\implies x+A^c\subset A$
注意到 A 是第一纲的，因此其子集 $x+A^c$ 是第一纲的。
而 A^c 是第二纲的，平移后依旧是第二纲的，矛盾。

例 2

设 X 是无穷维的 Banach 空间，证明 X 没有可数个 Hamel 基。
证明：设 X 有 Hamel 基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$，设 $F_n=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，这一有限维空间是闭集。
我们断言 F_n 是疏集：$\forall x\in F_n,x+0.9\varepsilon e_{n+1}\in B(x,\varepsilon)$
而 $x+0.9\varepsilon e_{n+1}\notin F_n\implies B(x,\varepsilon)\nsubseteq F_n\implies x$ 不是内点，因此 F_n 是疏集。
又 $X=\cup_{n=1}^{+\infty}F_n$，由 Baire 纲定理矛盾。

例 3

设 X 是无穷维的 Banach 空间，闭集列 $\{F_n\}$ 满足 $X=\cup_{n=1}^{+\infty}F_n$，证明 $\cup_{n=1}^{+\infty}F_n^\circ$ 在 X 中稠密。
证明：若否，则 $\exists B(x_0,r)\cap(\cup_{n=1}^{+\infty}F_n^\circ)=\emptyset \implies B(x_0,r)\subset(\cup_{n=1}^{+\infty}(F_n-F_n^\circ))$
注意到 $F_n-F_n^\circ$ 是疏集，因此 $\cup_{n=1}^{+\infty}(F_n-F_n^\circ)$ 是第一纲集，这与 $B(x_0,r)$ 的完备性矛盾！
注：与本题方法相似的：设 X 是完备度量空间，U_n 是 X 中的一系列稠密子集，则 $\cap_{n=1}^{+\infty}U_n$ 也是稠密的。

3.5.3 开映射定理

开映射的定义

给定赋范空间 X 和 Y，设映射 $T:X\to Y$ 将 X 中的任意开集映射成 Y 中的开集，则称 T 是开映射。

开映射定理

给定两个 **Banach 空间** X 和 Y，若线性算子 $T\in B(X,Y)$ 是满射 $\iff$ T 是开映射。
必要性证明：STEP 1：运用满射对 Y 做出刻画
考虑集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty}TB(0,n)\subset Y$
由于 Y 是满射，任意元素必定有原像，因此 $Y\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}TB(0,n) \implies Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}TB(0,n)$
由于 Y 是 Banach 空间，由 Baire 纲定理：存在一个 $\overline{TB(0,n)}$ 有内点 y
设 $B(y,\delta)\subset\overline{TB(0,n)} \implies B(-y,\delta)\subset\overline{TB(0,n)}$
说明：这是由于对称性，$\forall z\in B(-y,\delta) \implies -z\in B(y,\delta) \implies -z\in\overline{TB(0,n)} \implies z\in\overline{TB(0,n)}$
因此 $B(0,\delta)\subset\dfrac{1}{2}(B(y,\delta)+B(-y,\delta))\subset\overline{TB(0,n)}$

STEP 2：证明更小的球包含于 $TB(0,n)$，去掉闭包
下证明 $B(0,\frac{\delta}{2})\subset TB(0,n)$：

$$\forall y_0\in B(0,\frac{\delta}{2})\subset\overline{TB(0,\frac{n}{2})} \implies \exists x_0\in B(0,\frac{n}{2}),||y_0-Tx_0||<\frac{\delta}{4}$$

思想：根据前面的结论，只能得到一个逼近的值，因此需要对残差继续逼近（有点像牛顿法）

$$\text{对}y_1=y_0-Tx_0\in B(0,\frac{\delta}{4})\subset\overline{TB(0,\frac{n}{4})} \implies \exists x_1\in B(0,\frac{n}{4}),||y_1-Tx_1||<\frac{\delta}{4}$$

依次构造下去，可以得到 $y_m\in B(0,\dfrac{\delta}{2^{m+1}}) \implies y_m\to 0$
注意到 $Tx_0+Tx_1+\cdots+Tx_m=y_0-y_m$，令 $m\to\infty$，可得 $y_0=\sum\limits_{m=0}^{\infty}Tx_m=T\sum\limits_{m=0}^{\infty}x_m$
注意到 $||\sum\limits_{m=0}^{\infty}x_m||\le\sum\limits_{m=0}^{\infty}||x_m||<\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^{m+1}}=n \implies \sum\limits_{m=0}^{\infty}x_m\in B(0,n) \implies y_0\in TB(0,n)$

STEP 3：将这个结论推广到全空间
设 $U\subset X$ 是开集，我们证明 TU 是开集。$\forall y\in TU$, 设 $y=Tx,\exists B(x,\varepsilon)\subset U$
由前面所证明的，$\exists\delta>0,B(0,\delta)\subset TB(0,1) \implies B(Tx,\varepsilon\delta)\subset TB(x,\varepsilon)\subset TU$
即 $B(y,\varepsilon\delta)\subset TU$，因此证明了 TU 是开集。

充分性证明：若 T 是开算子，则 $TB(0,1)$ 是开集，且包含了 0 $\implies B(0,\delta)\subset TB(0,1)$

$\forall y \in Y$，考虑 $\dfrac{\delta}{2||y||}y \in B(0,\delta) \subset TB(0,1) \implies \dfrac{\delta}{2||y||}y = Tx \implies y = T(\dfrac{2||y||}{\delta}x)$，因此是满射。

推论：逆算子定理

设 X, Y 为 **Banach 空间**，若 $T \in B(X,Y)$ 是双射，则 $T^{-1} \in B(Y,X)$

证明： 因为 T 是满射，所以 T 是开映射，$TB(0,1)$ 是开集，且同样含有 0

设 $B(0,\delta) \subset TB(0,1) \implies B(0,1) \subset TB(0,\dfrac{1}{\delta}) \implies T^{-1}B(0,1) \subset B(0,\dfrac{1}{\delta})$

$\forall y \in B(0,1), y \in Y$，有 $||T^{-1}y|| < 1 = \dfrac{1}{\delta}$

对 y 作近似归一化：令 $z = \dfrac{y}{||y||+\varepsilon} \in B(0,1) \implies ||T^{-1}z|| < \dfrac{1}{\delta} \implies ||T^{-1}y|| < \dfrac{||y||+\varepsilon}{\delta}$

令 $\varepsilon \to 0 \implies ||T^{-1}|| \leq \dfrac{1}{\delta}$，因此 T^{-1} 是有界的，而线性易得，因此 $T^{-1} \in B(Y,X)$

3.5.4 共鸣定理（一致有界定理）

共鸣定理：讨论一致有界问题

设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范空间，$B(X,Y)$ 中的算子族 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 满足：$\forall x \in X$，$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||T_\lambda x|| < \infty$，则算子族范数有统一上界 $||T_\lambda|| < M$

理解：点点收敛 $\implies$ 一致收敛

证明： 设

$$A_n = \{x \in X | ||T_\lambda x|| \leq n, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

由算子的连续性，易证明 A_n 为闭集，则 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \exists N, A_N$ 有内点（Baire 纲定理）

设 $B(x_0,\delta) \subset A_N \implies B(-x_0,\delta) \subset A_N \implies B(0,\delta) \subset A_N$

则 $\forall x \in X (x \neq 0), \dfrac{\delta}{2||x||}x \in B(0,\delta) \subset A_N \implies ||T_\lambda(\dfrac{\delta}{2||x||}x)|| \leq N \implies ||T_\lambda x|| \leq \dfrac{2N}{\delta}||x||$

因此 $||T_\lambda||$ 有一致上界 $\dfrac{2N}{\delta}$.

例 1：构造反例

证明：存在以 2π 为周期的连续函数 $f(x)$，其 Fourier 级数在某给定点不收敛。

利用共鸣定理，本题不需要显式给出一个具体的反例。

定义完备空间为所有 $T = 2\pi$ 的连续函数，其范数为 L^∞ 范数。不妨证明存在一个 $f(x)$ 在 0 处不收敛。

定义一列泛函 F_n，为 $x(0)$ 的 Fourier 级数的部分和：

$$F_n x = \frac{1}{2\pi} < x(t), 1 > + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} < x(t), \cos nt > = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

下面计算泛函 F_n 的范数（这是一个积分核，是经典例题，过程略，直接使用结论）：

$$||F_n|| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t\right| \approx \frac{4}{\pi^2}\ln n \to \infty$$

因此，若所有 $T = 2\pi$ 的连续函数 Fourier 级数在 0 处收敛，由共鸣定理可推出矛盾。

总结：构造算子列，然后计算算子的范数（或者估计），如果发现趋于正无穷，那么必定有一个点处无法点态收敛。

例 2: 将数列问题转化为算子的构造

给定数列 $\{\beta_n\}$，若对于任意收敛数列 $\{\alpha_n\}$，$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\beta_n<+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|\beta_n|<\infty$

证明：对于收敛数列空间，定义其范数为 l^∞ 范数。

构造泛函：$T_nx=\sum_{i=1}^n x_i\beta_i$（其中 x 为收敛数列空间的一点）

由共鸣定理，泛函列 T_n 的范数有统一上界 M。注意到

$$|T_nx|=|\sum_{i=1}^n x_i\beta_i|\le ||x||\sum_{i=1}^n|\beta_i| \implies ||T_n||\le\sum_{i=1}^n|\beta_i|$$

当 $x=(sgn(b_1),sgn(b_2),\cdots,sgn(b_n),0,\cdots)$ 时可以取等

因此 $||T_n||=\sum_{i=1}^n|\beta_i|\le M \implies \sum_{n=1}^{+\infty}|\beta_n|<\infty$

3.5.5 闭图像定理

闭算子

定义：任取点列 $\{x_n\}\subset X$，若 $x_n\to x$ 且 $Tx_n\to y$，则 $y=Tx$

理解：连续算子的要求是，如果点列 $\{x_n\}$ 收敛到 x，那么 $\{Tx_n\}$ 也必须收敛、且收敛到 Tx。

而闭算子可以使得 $\{Tx_n\}$ 不收敛，只要求如果收敛，则必须收敛到对的地方（即 Tx）。

注意：闭算子不一定把闭集映为闭集！

反例：$T:l_1\to l_1$ 满足 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots)$，有 $R(T)=\{x\in l_1|\sum_{n=1}^{+\infty}n|x_n|<\infty\}$

取 $R(T)$ 中点列 $x_n=(1,\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{n^2},0,\cdots)\to x=(1,\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{n^2},\cdots)\notin R(T)$，可知 $R(T)$ 不为闭集。

注意：在一般空间里，闭算子和连续算子是不充分不必要的。当 T 的定义域不闭时，连续算子推不出闭算子，而 T 的定义域为闭集时，连续算子比闭算子强。

闭图像定理：讨论闭线性算子有界的充分条件

X,Y 为 Banach 空间，算子 $T:X\to Y$ 是闭算子，则也是连续算子。

注：这个命题的逆命题也是正确的，即 Banach 空间中的算子闭和连续等价。

证明：首先定义空间 $X\times Y$ 的范数为 $||(x,y)||=||x||_X+||y||_Y$

考虑其中子集（算子的图象）：$G(T)=\{(x,Tx)|x\in X\}$，我们断言它是完备的。

事实上，若 $\{(x_n,Tx_n)\}$ 是柯西列，则 $\{x_n\}$ 和 $\{Tx_n\}$ 都是柯西列。

设 $x_n\to x,Tx_n\to y$，则由闭算子条件：$y=Tx\in Y$，因此 $(x_n,Tx_n)\to(x,Tx)\in X\times Y$。

考虑算子 $K:G(T)\to X$ 满足 $K(x,Tx)=x$，这个映射显然是双射。

注意到 $||K(x,Tx)||=||x||\le||x||+||Tx||=||(x,Tx)|| \implies ||K||\le 1$，则 K 是有界的，$K\in B(X,Y)$。

因此由逆映射定理：K^{-1} 连续。

注意到 $K^{-1}x=(x,Tx)$，取范数有 $||x||+||Tx||=||K^{-1}x||\le||K^{-1}||||x|| \implies ||Tx||\le(||K^{-1}||-1)||x||$

1. **常见用途：证明 Banach 空间的算子连续。因为闭算子是比连续算子更弱的条件，通常更容易证明。**
2. **反例：如果去掉 Banach 空间的前提，该命题不再成立：**

   考虑 $C^1[0,1]$ 上的求导算子 D，易知其为线性的。

若 $\{x_n(t)\} \to x(t)$（即函数列一致收敛），且 $x_n'(t) \to y(t)$，由数学分析知识：$y(t) = x'(t)$

考虑点列 $x_n(t) = t^n$，则 $x_n'(t) = nt^{n-1}$ 不收敛（范数 $\to \infty$）

例 1：证明算子连续

Hilbert 空间上的线性算子 T 满足 $(x, Ty) = (Tx, y)$，则 $T \in B(H)$

证明：设点列 $x_n \to x, Tx_n \to y$。

注意到 $(x_n, Tz) = (Tx_n, z) \implies (x, Tz) = (y, z) = (Tx, z) \implies y = Tx$（由于 z 任意）

因此 T 是完备空间上的闭算子，进而是连续算子。

3.6 弱收敛

弱收敛

设 X 是一个赋范空间，给定点列 $\{x_n\} \subset X$，若 $\forall f \in B(X)$ 有 $f(x_n) \to f(x)$，则称 x_n 弱收敛于 x，记为 $x_n \xrightarrow{w} x$

弱收敛的例子

考虑无穷维的 Hilbert 空间 H，有一组标准正交基 $\{e_n\}$

考虑任意 $f \in B(H)$，由（后面 4.2）Riesz 表示定理：$f(x) =< x, y > \implies f(e_n) =< y, e_n >$

注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty} < y, e_n >^2 \leq ||y||^2 < \infty \implies f(e_n) =< y, e_n > \to 0 \implies e_n$ 弱收敛于 0

但是 $||e_n|| = 1 \implies e_n \nrightarrow 0$，**这便是弱收敛的一个经典例子。**

例：利用对偶性证明弱收敛

设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\} \subset X$。若 $x_n \xrightarrow{w} x$，则 $\{x_n\}$ 是有界序列，即 $\sup_n ||x_n|| < \infty$。

证明：视 x_n 为 X^{**} 中的元素。定义 X^* 上的线性泛函 $g_n : X^* \to \mathbb{F}$ 为：

$$g_n(f) = f(x_n), \quad \forall f \in X^*$$

由 Hahn-Banach 定理推论知，自然嵌入是保距的，即：

$$||g_n||_{X^{**}} = ||x_n||_X$$

对于任意固定的 $f \in X^*$，由弱收敛定义知 $f(x_n) \to f(x)$，即泛函列 $\{g_n\}$ 点点有界。

由一致有界原理，存在常数 M，使得：

$$||x_n||_X = ||g_n|| \leq M, \quad \forall n$$

弱 * 收敛的定义

设 X 是一个赋范空间，给定点列 $\{f_n\} \subset X^*$，若 $\forall x \in X$ 有 $f_n(x) \to f(x)$，则称 f_n 弱 * 收敛于 f，记为 $f_n \xrightarrow{w} f$

有界算子列的强、弱和一致收敛

设 X,Y 是 Banach 空间，算子列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(X,Y)$，$T \in B(X,Y)$。

1. **一致收敛（依范数收敛）**：若
$$\|T_n - T\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$
则称 T_n **一致收敛**于 T，记作 $T_n \to T$。

2. **强收敛（逐点收敛）**：若对任意 $x \in X$，有
$$\|T_n x - Tx\|_Y \to 0 \quad (n \to \infty),$$
则称 T_n **强收敛**于 T，记作 $T_n \xrightarrow{s} T$。

3. **弱收敛**：若对任意 $x \in X$ 和任意 $f \in Y^*$（Y 的对偶空间），有
$$f(T_n x) \to f(Tx) \quad (n \to \infty),$$
（即 $T_n x \xrightarrow{w} Tx$）则称 T_n **弱收敛**于 T，记作 $T_n \xrightarrow{w} T$。

关系：
$$\text{一致收敛} \implies \text{强收敛} \implies \text{弱收敛}.$$
反之一般不成立。特别地：

- 若 $\dim Y < \infty$，则强收敛与一致收敛等价。
- 若 $\dim X < \infty$，则弱收敛与强收敛等价。

4 内积空间

4.1 Hilbert 空间

4.1.1 基本定义与性质

内积空间的定义

设 X 是数域 $\mathbb{K}$（实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$）上的线性空间。若存在映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$，满足下列公理（$\forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$）：

1. **共轭对称性**：$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$；
2. **第一变元线性**：$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$；
3. **正定性**：$\langle x, x \rangle \geq 0$，且 $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \mathbf{0}$。

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 X 上的**内积**，称 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为**内积空间**（或准 Hilbert 空间）。

导出的范数与 Hilbert 空间

导出范数：内积空间可以自然地定义范数（诱导范数）：

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

在此范数下，内积空间成为赋范线性空间。
Hilbert 空间：若内积空间 X 关于由内积导出的范数是**完备**的，则称 X 为 **Hilbert 空间**。

内积是一个二元连续函数

证明关键：

$$| < x_n, y_n > - < x, y > | \leq ||x_n - x||||y_n|| + ||y_n - y||||x_n||$$

内积空间和赋范空间的关系

- 当内积被定义后，范数自动由 $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ 确定（容易验证这个范数的良定义性）。

  总之：内积空间自动为赋范空间。

- 而对于赋范空间，内积不一定能被定义出来。事实上，当且仅当所定义范数满足平行四边形等式

  $$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

  方可定义内积（极化恒等式）：

  $$< x, y >= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k||x + i^k y||$$

例 1: l^p 空间中只有 l^2 可以定义内积

证明：注意到

$$||e_1|| = ||e_2|| = 1, ||e_1 + e_2|| = ||e_1 - e_2|| = 2^{\frac{1}{p}} \implies 2^{\frac{2}{p}+1} = 4 \implies p = 2$$

注：对于 l^2 空间，定义内积

$$< a, b >= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\overline{b_k}$$

4.1.2 正交补

正交补的定义

对于内积空间 H 的**任意**非空子集 M，都能良定义其正交补为 $M^{\perp} = \{x|x \perp M\}$。

正交补为闭集

对于内积空间 H 的任意非空子集 M，其正交补 $M^{\perp}$ 均为闭集。
证明：任取 $\{x_n\} \subset M^{\perp}, x_n \to x$，则 $\forall y \in M, < x_n, y >= 0 \implies < x, y >= 0$（由于内积的连续性）

正交补的完美性质

对于内积空间 H 的任意非空子集 M 有 $M^\perp = \overline{\text{span}(M)}^\perp$

证明：首先 $\forall x \in M^\perp, \forall y \in \overline{\text{span}(M)}$，存在点列 $\{y_n\} \to y, y_n \in \text{span}(M)$

则有 $< y_n, x >= 0 \implies < y, x >= 0$（内积连续性）$\implies x \perp \overline{\text{span}(M)}^\perp$。

另一方面 $\forall x \in \overline{\text{span}(M)}^\perp$，显然有 $x \perp M$（因为 $M \subset \text{span}(M)$）$\implies x \in M^\perp$。综上 $M^\perp = \overline{\text{span}(M)}^\perp$

4.1.3 投影定理与正交分解

最佳逼近

设 H 是 **Banach** 空间，H_1 是其闭凸子集，则 $\forall x \in H$，在 H_1 中**存在唯一**的最佳逼近元。

证明：$x \in H_1$ 是 trivial 的，不妨设 $x \notin H_1$，则 $\{d|d = ||x - y||, y \in H_1\}$ 有下界，设下确界为 d。

根据下确界的定义，存在点列 $\{y_n\} \subset H_1$ 使得 $||x - y_n|| \in [d, d + \frac{1}{n})$

为了证明点列收敛，只需验证其完备性：注意到 $||x - \frac{y_m + y_n}{2}||^2 \geq d^2$（由于凸）

$$\implies 2(||x - \frac{y_m + y_n}{2}||^2 + ||\frac{y_m - y_n}{2}||^2) = ||x - y_m||^2 + ||x - y_n||^2$$

$$\implies 2d^2 + \frac{1}{2}||y_m - y_n||^2 \leq (d + \frac{1}{m})^2 + (d + \frac{1}{n})^2 \implies ||y_m - y_n||^2 \leq 2(\frac{2d}{m} + \frac{2d}{n} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}) \to 0$$

结合 H 的完备性，可得这个点列收敛，进而极限点在 H_1 内（由闭性）

唯一性证明：若有两个最佳逼近元 y_1, y_2，则

$$\implies 2||x - \frac{d_1 + d_2}{2}||^2 + \frac{||y_1 - y_2||^2}{2}||^2 = ||x - y_1||^2 + ||x - y_2||^2 = 2d^2 \geq 2d^2 + \frac{||y_1 - y_2||^2}{2} \implies y_1 = y_2$$

投影定理

设 H 是 **Hilbert** 空间，H_1 是 H 的一个闭子空间，则 $H = H_1 \oplus H_1^\perp$（唯一正交分解!）。

注：

- **这里的“闭子空间”比上面的“闭凸子集”强。**
- $\forall x \in H$，可以由此唯一分解 $x = y + (x - y)$，那么这个 y 即为所求的唯一逼近元。

证明：由最佳逼近的结论，存在唯一最佳逼近元 $y \in H_1$。

由最佳可知：

$$\forall \alpha \in C, z \in H_1, ||x - y - \alpha z|| \geq ||x - y||$$

$$\implies |\alpha|^2 ||z||^2 \geq 2Re(\alpha < z, x - y >)$$

若 $< z, x - y > \neq 0$，取 $\alpha = \lambda \overline{< z, x - y >}$ 代入有 $||z|| \geq \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$，这与 λ 的任意性矛盾!

因此 $< x - y, z >= 0 \implies x - y \perp H_1$，由此我们证明了唯一分解，进而证明了 $H = H_1 \oplus H_1^\perp$

例：闭空间取两次正交补等于自身

对于内积空间 H 的任意非空子集 M，有 $(M^{\perp})^{\perp}=\overline{\text{span}(M)}$
证明：由正交补的性质，有 $M^{\perp}=\overline{\text{span}(M)}^{\perp}$
而 $\overline{\text{span}(M)}$ 是闭空间，因此 $H=\overline{\text{span}(M)}\oplus\overline{\text{span}(M)}^{\perp} \implies (\overline{\text{span}(M)}^{\perp})^{\perp}=\overline{\text{span}(M)}$
因此 $(M^{\perp})^{\perp}=\overline{\text{span}(M)}$

4.1.4 标准（规范）正交基

标准正交系

设 H 是内积空间，若一族非零向量 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足
（1）正交性：$\langle e_\alpha,e_\beta\rangle=0$ 对任意 $\alpha\neq\beta$；
（2）规范性：$\|e_\alpha\|=1$ 对任意 $\alpha\in I$。则称这一族向量构成 H 的标准（规范）正交系。
注意标准（规范）正交系不一定有可数个元素!!

Bessel 不等式

设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 H 的一个标准正交系，则 $\forall x\in H$ 有：

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|<x,e_\alpha>|^2\leq||x||^2$$

证明：首先左边不一定是可求和的级数（因为不一定可数），注意到

$$\forall n\in N,\sum_{i=1}^{n}|<x,e_{\alpha_i}>|^2\leq||x||^2<+\infty \implies \forall m\in N,A_m=\{\alpha|\alpha\in\Lambda,|<x,e_\alpha>|\geq\frac{1}{m}\}\text{可数}$$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{\alpha|\alpha\in\Lambda,<x,e_\alpha>\neq 0\}$ 可数，设对应的 e_α 依次为 $e_1,e_2\cdots$
则可得到 Bessel 不等式

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|<x,e_\alpha>|^2=\sum_{n=1}^{+\infty}<x,e_n>^2\leq||x||^2$$

完备正交系：几个等价命题

若 H 中的**标准**正交系 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足以下五个等价条件之一，则称 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 H 的**完备正交系**（标准正交基）。证明过程略去。

1. **极大性**：正交补 $\{e_\alpha\}^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$
2. **稠密性(张成全空间)**：$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的有限线性组合所构成的集合在 H 中是稠密的。即 $\overline{\text{span}\{e_\alpha\}}=H$。
3. **傅里叶级数展开（万物皆可展开）**：空间中任意元素 x 都可以由该正交系完美展开：

$$x=\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$$

（注：由 Bessel 不等式可知，最多只有可数个系数非零）。

4. **Parseval 等式（能量守恒）**：对于任意向量，Bessel 不等式恒取等号：

$$||x||^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$$

5. **广义 Parseval 等式（内积保持）**：任意两个向量的内积，完全由它们在基底上的“坐标”乘积之和决定：

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x, e_\alpha\rangle\langle e_\alpha, y\rangle$$

例子：$L^2[0, 2\pi]$

根据数学分析傅立叶级数知识可知，该空间上的一组标准正交基为 $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$

例 1

在 $L^2[a, b]$ 中考虑函数集 $S = \{e^{2\pi int}\}$（即周期为 1 的傅立叶正交系）

（1）若 $b - a \le 1$，则 $S^\perp = \{f(x)|f(x) = 0\, a.s.\}$（也就是说，区间长度够用）

证明：将周期为 $b - a$ 的 $f(x)$ 延拓为周期为 1 的 $g(x) = \begin{cases} f(x), a \le x \le b \\ 0, b < x \le a + 1 \end{cases}$

那么 $g(x)$ 的 Fourier 系数为 $\int_a^{a+1} g(t)e^{2\pi int}\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)e^{2\pi int}\,\mathrm{d}t$

若存在 $g(x) \perp S \implies g(x)$ 的 Fourier 系数全部为 $0 \implies g(x) = 0(a.s.)$

因此 $S^\perp = \{f(x)|f(x) = 0\, a.s.\}$

（2）若 $b - a > 1$，则可构造出非零函数与 S 正交。

构造：令 $f(x) = \begin{cases} 1, a \le x < b - 1 \\ -1, a + 1 \le x < b \\ 0, \text{ other cases} \end{cases}$ 验证发现 $f(x) \perp S$

例 2

设 $\{e_n\}, \{f_n\}$ 是 Hilbert 空间中的两个标准正交系，且 $\sum_{n=1}^{+\infty} ||e_n - f_n||^2 < \infty$，证明两个正交系的完备性相互等价。

证明：我们采用“完备 $\iff S^\perp = \{0\}$”的条件来证明。

若 $\{e_n\}$ 完备，而 $\{f_n\}$ 不完备，则 $\exists x \perp \{f_n\} \implies < x, f_n >= 0$。

注意到

$$< x, e_n >^2 =< x, e_n - f_n >^2 \le ||x||^2||e_n - f_n||^2 \implies ||x||^2 \le$$

4.1.5 可分 Hilbert 空间

Hilbert 空间可分的充分必要条件

Hilbert 空间 H 可分 $\Longleftrightarrow$ 其标准正交基至多可数。

必要性证明：设 H 的可数稠密子集为 $\{x_1,\cdots,x_n\cdots\}$，将其极大线性无关组提取出来后作 Gram-Schmidt 正交化可得标准正交**集** $\{e_n\}$。而这一正交规范集也是规范基：$\overline{\text{span}\{e_n\}}=\overline{\text{span}\{x_n\}}=H$

充分性证明：设 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是一组标准正交基，则可构造可数稠密集

$$\{\sum_{n=1}^{N}a_ne_n|\text{Re }a_n,|\text{Im }a_n|\in Q\}$$

注：个数 $N<\infty$ 时有 $H\cong K^N$，$N=\infty$ 时有 $H\cong l^2$

这个命题可以通过构造等距同构证明：$T(x)=\{<x,e_n>\}$，映射 $T:H\to K^N/l^2$

4.2 Riesz 表示定理

Riesz 表示定理的内容

设 f 是 Hilbert 空间 X 上的**连续线性**泛函，则存在**唯一的** $y\in X$，使得 $f(x)=<x,y>$

引入：K^3 里的简单例子

考虑定义在 Hilbert 空间 K^3 上的**线性函数（也是泛函）** $f(\boldsymbol{x})=ax_1+bx_2+cx_3=<\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}>$

其中 $\boldsymbol{t}=(a,b,c)$ 是平面 $f(\boldsymbol{x})=ax_1+bx_2+cx_3=0$ 的法向量，也是 Riesz 表示定理当中的 y。

平面 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 上的点是 $f(\boldsymbol{x})$ 的零点集 $\mathcal{N}(f)$，而 y 正是从 $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ 中寻得，这启示了一般性的证明思路。

Riesz 表示定理的证明

存在性证明：首先我们断言空间 $\mathcal{N}(f)=\{x|f(x)=0\}$ 是闭集。

事实上，对于 $\{x_n\}\subset\mathcal{N}(f),x_n\to x$，由连续性可得 $0=f(x_n)\to f(x)\implies x\in\mathcal{N}(f)$

回到原题，对空间进行直和分解：$X=\mathcal{N}(f)\bigoplus\mathcal{N}(f)^{\perp}$

按照 intro 的思路，我们取定 $x_0\in\mathcal{N}(f)^{\perp}$ 作为待寻找的 $'y'$ 的方向

则 $f(x_0)\neq 0$（由直和保证），下面对 $\forall x\in X$ 进行直和分解：$x=(x-\alpha x_0)+\alpha x_0$

其中 α 用于保证 $f(x-\alpha x_0)=0\implies\alpha=\dfrac{f(x)}{f(x_0)}$

又结合垂直，可得 $<x-\alpha x_0,\alpha x_0>=0\implies f(x)=\dfrac{f(x_0)}{||x_0||^2}<x,x_0>=<x,\dfrac{\overline{f(x_0)}x_0}{||x_0||^2}>$

因此待求的 $y=\dfrac{\overline{f(x_0)}x_0}{||x_0||^2}$，存在性至此得证。

唯一性证明：若 $<x,y>=<x,z>\implies<x,y-z>=0$ 恒成立，取 $x=y-z$ 即可得到 $y=z$。

例 1：Hilbert 空间与自身等距同构

Riesz 表示定理告诉我们，Hilbert 空间上的连续线性泛函可以视为一个内积。那么我们考虑映射关系 $f:X\to X^*$，将 $x\in X$ 映为一个泛函："与 x 做内积"（$f_x(t)=<x,t>$）。

- **首先，这是一个满射**：这正是 Riesz 表示定理的结论。
- **其次，这个映射是线性、等距的**：线性显然，为了求 f 的范数，我们取 $x \in X$，记对应的映射 $\phi = f(x)$，则 $\phi(y) =< x, y > \leq ||x||||y||$ 且等号可以取到。则 $||\phi|| = ||x||$，由此证明了等距。

综上，Hilbert 空间的对偶空间与本身等距同构。
例如，在 l^p 空间中，仅有 $p = 2$ 才能定义内积，而其对偶空间仍是 l^2；其他 l^p 空间无法定义内积，对偶空间也是完全不同的其他 l^p 空间。

4.3 一些特殊的有界线性算子

4.3.1 Hilbert 空间上的共轭算子

Hilbert 空间上的共轭算子定义

设 H_1, H_2 均为 Hilbert 空间，算子 $S \in B(H_1, H_2), T \in B(H_2, H_1)$ 满足 $\forall x \in H_1, y \in H_2$ 有

$$< x, Ty >=< Sx, y >$$

恒成立，则 S 与 T 互为共轭算子（伴随算子），记为 $S = T^*, T = S^*$。
这一定义其实在高等代数中已经出现过了，这里只是把 K^n 推广到了更一般的 Hilbert 空间。

共轭算子的基本性质

设 H_1, H_2 均为 Hilbert 空间，算子 $S \in B(H_1, H_2)$，则

- S^* 存在且唯一。
- $||S|| = ||S^*||$（K^n 版本就是，矩阵和它的共轭转置有完全相同的特征值）。

证明：设 $x \in H_1, y \in H_2$，内积 $< Sx, y >$ 可以视为定义在 H_1 上的泛函 $f(x) = (Sx, y)$
我们断言 f 是一个有界线性泛函。事实上，$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (S(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), y) = \lambda_1(Sx_1, y) + \lambda_2(Sx_2, y) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$，因此是线性的。
且 $|f(x)| \leq ||Sx||||y|| \leq ||S||||x||||y||$，因此 $||f|| \leq ||S||||y||$ 有界。
由 Riesz 表示定理，存在**唯一的** $z \in H_1$ 使得 $f(x) =< x, z >$
唯一性确保我们可以良定义算子 $T : H_2 \to H_1$ 使得 $Ty = z$。验证 T 是有界线性算子是 trivial 的。

下证明 $||T|| = ||S||$：在等式 $< x, Sy >=< Tx, y >$ 中令 $y = Tx$
有 $||Tx||^2 =< x, STx > \leq ||x||||STx|| \leq ||Tx||||S||||x|| \implies ||S|| \geq \dfrac{||Tx||}{||x||}$ 恒成立。
取上确界有 $||S|| \geq ||T||$，同理有 $||T|| \geq ||S||$，因此 $||S|| = ||T||$。

高等代数（K^n）其他的性质推广：

设 $T \in B(H)$，则有 $||TT^*|| = ||T||^2$。

证明：方法完全同上。注意到

$$< x, T^*Tx >=< Tx, Tx >= ||Tx||^2 \leq ||x||||T^*T||||x|| \implies ||T^*T|| \geq \frac{||Tx||^2}{||x||^2} \implies ||T^*T|| \geq ||T||^2$$

另一方面，

$$||T^*Tx|| \leq ||T^*||||T||||x|| = ||T||^2||x|| \implies ||T||^2 \geq \frac{||T^*Tx||}{||x||} \implies ||T^*T|| \leq ||T||^2$$

因此

$$||T^*T|| = ||T||^2$$

值域和零空间的推广

在线性代数里，我们有 Ker$\phi \perp$ Im ϕ^*，推广到一般 Hilbert 空间也有类似的结论：
设 H 为 Hilbert 空间，$T \in B(H)$，记 $R(T)$ 为值域，$N(T)$ 为零空间，则有

$$N(T) = R(T^*)^{\perp}$$

证明：$\forall x \in N(T), y \in R(T^*)$，设 $y = T^*z$ 则有 $< x, y >=< x, T^*z >=< Tx, z >= 0 \implies x \in R(T^*)^{\perp}$
另一方面，$\forall y \in R(T^*)^{\perp}$ 有 $0 =< y, T^*Ty >=< Ty, Ty >= ||Ty||^2 \implies Ty = 0 \implies y \in N(T)$
综上有 $N(T) = R(T^*)^{\perp}$。

进一步的，再取一次正交补可得 $\overline{R(T^*)} = N(T)^{\perp}$（注意有界线性算子的零空间一定闭，但值域不一定闭，所以要加闭包!）

4.3.2 自伴算子

自伴算子的定义

H 为 Hilbert 空间，$T \in B(H)$，则当 $T = T^*$ 时称其为自伴算子。在线性代数里，此即为 Hermite 阵。

自伴算子的性质

T 为自伴算子 $\iff \forall x \in H, < x, Tx >\in R$
证明：必要性显然，对于充分性：注意到

$$< \lambda x + y, T(\lambda x + y) >= |\lambda|^2 < x, Tx > +\lambda < x, Ty > +\bar{\lambda} < y, Tx > + < y, Ty >\in R$$

$$\implies \lambda < x, Ty > +\bar{\lambda} < y, Tx >\in R$$

分别取 $\lambda = 1, i$ 可推出 $< T^*x, y >=< x, Ty >= \overline{< y, Tx >} =< Tx, y >$
$\implies T^*x = Tx$（这是因为 y 的任意性）。

自伴算子的范数公式

若 T 是自伴算子，则 $||T|| = \sup\limits_{||x||=1} |<Tx, x>|$

证明：记上确界 $\sup\limits_{||x||=1} |<Tx, x>|$

一方面，$|<Tx,x>| \leq ||Tx||||x|| \leq ||T||||x||^2 = ||T|| \implies M \leq ||T||$

另一方面，由极化恒等式：

$$<T(x+y), x+y> - <T(x-y), x-y> = 2<Tx, y> + 2<Ty, x> = 4<Tx, y>$$

由 M 的定义：

$$4|<Tx,y>| \leq M(||x+y||^2 + ||x-y||^2) = 2M(||x||^2 + ||y||^2)$$

取 $y = \lambda Tx$（参数待定）有 $2\lambda||Tx||^2 \leq M(||x||^2 + \lambda^2||Tx||^2)$，取 $\lambda = \frac{1}{||Tx||} \implies 2||Tx|| \leq M(||x||^2+1)$

对于单位向量 x，代入有 $||Tx|| \leq M \implies ||T|| \leq M \implies ||T|| = M$

4.3.3 正常算子和酉算子

正常算子的定义

设 H 为 Hilbert 空间，若算子 $T \in B(H)$ 满足 $T^*T = TT^*$，则称 T 为正常算子。在线性代数里，这就是正规矩阵。

特别地，当 $T^*T = TT^* = I$ 时 T 为酉算子。

注：只有一个等于 I 不能推出酉算子，例如左、右移算子。

正常算子的充要条件

算子 $T \in B(H)$ 为正常算子 $\iff ||Tx|| = ||T^*x||, \forall x \in H$

证明：注意到

$$\begin{aligned}
||Tx|| = ||T^*x|| &\iff <x, T^*Tx> = <x, TT^*x> \\
&\iff <x, (T^*T - TT^*)x> = 0 \\
&\iff ||T^*T - TT^*|| = 0 \\
&\iff TT^* = T^*T \\
&\iff T\text{是正常算子}
\end{aligned}$$

酉算子的充要条件

算子 $T \in B(H)$ 为酉算子 $\iff ||Tx|| = ||x||, \forall x \in H$

证明：注意到

$$\begin{aligned}
||Tx|| = ||x|| &\iff <x, T^*Tx> = <x, x> \\
&\iff <x, (T^*T - I)x> = 0 \\
&\iff ||TT^* - I|| = 0, ||T^*T - I|| = 0 \\
&\iff TT^* = T^*T = I \\
&\iff T\text{是酉算子}
\end{aligned}$$

4.3.4 投影算子

投影算子的定义

设 H 为一个 Hilbert 空间，H_1 是其中的一个闭空间，则有正交分解 $H = H_1 \bigoplus H_1^\perp$
相应地，对于 $x \in H$，存在唯一分解 $x = x_1 + x_2, x_1 \in H_1, x_2 \in H_1^\perp$。
由此可定义**投影在 H_1 上的投影算子 P 使得** $Px = x_1$。

投影算子的充要条件 1

设 H 为一个 Hilbert 空间，$T \in B(H)$ 为投影算子 $\iff$ T 是幂等且自伴的。(线代版本表述完全相同)
必要性证明：设 T 是投影到 H_1 上的算子，$\forall x \in H$ 分解为 $x = x_1 + x_2$
则 $Tx = x_1, T^2x = Tx_1 = x_1 = Tx$，由于 x 的任意性知 $T^2 = T$，即 T 是幂等的。
另一方面，$\forall y \in H$，设其分解为 $y = y_1 + y_2$，则

$$<Tx, y> = <x_1, y_1 + y_2> = <x_1, y_1>, <x, Ty> = <x_1 + x_2, y_1> = <x_1, y_1> \implies T\text{是自伴算子}$$

充分性证明：首先断言 $I - T$ 是一个有界线性算子：注意到

$$\begin{aligned}
<x - Tx, x - Tx> &= <x, x> + <Tx, Tx> - 2 <Tx, x> \\
&= ||x||^2 + ||Tx||^2 - 2 <T^2x, x> \\
&= ||x||^2 + ||Tx||^2 - 2 <Tx, Tx> \\
&= ||x||^2 - ||Tx||^2 \le ||x||^2 \\
&\implies ||I - T|| \le 1
\end{aligned}$$

因此，$N(I - T)$ 是一个有界线性泛函的零空间，是闭空间。
因此，可以对全空间作正交分解 $H = N(I - T) \bigoplus [N(I - T)]^\perp$，$T$ 即为 $N(I - T)$ 上的投影算子。

投影算子的充要条件 2

设 H 为一个复 Hilbert 空间，$T \in B(H)$ 为投影算子 $\iff$ $||Tx||^2 = <Tx, x>, \forall x \in H$
必要性证明：$||Tx||^2 = <Tx, Tx> = <x, T^*Tx> = <x, T^2x> = <x, Tx> = <Tx, x>$
充分性证明：在**复** Hilbert 空间里，$<Tx, x> \in R$ $\implies$ T 是自伴算子。
因此 $<Tx, x> = <Tx, Tx> = <T^2x, x> \implies <x, (T - T^2)x> = 0 \implies T = T^2$（这是由自伴算子的范数公式得到的）

4.3.5 紧算子

真正类似于矩阵算子的准确来说应该是紧算子。

紧算子的定义

设 H 是 Hilbert 空间，T 是 H 上的线性算子。若 T 将 H 内的任何有界集都映成列紧集，则称 T 为紧算子。记 H 上的紧算子全体构成 $C(H)$。

有限秩算子

若 Hilbert 空间 H 中的有界线性算子 T 满足 $R(T)$ 的维数有限，则 T 是有限维的。
H 上的有限维算子全体记为 $F(H)$。

有限秩算子的本质

事实上，可以证明：有限秩算子 $T \in F(H)$ 一定可以写成 $Tx = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > y_i$（其中 $x_i, y_i \in H$）

证明：由于值域维数有限，设其标准正交基为 $e_1, \cdots, e_n$，则 $Tx = \sum_{i=1}^{n} < Tx, e_i > e_i$

由 Riesz 表示定理：$f_i(x) =< Tx, e_i >$ 是线性泛函。

因此 $\exists x_i, f_i(x) =< x, x_i > \implies Tx = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > e_i$，得证。

紧算子的相关结论

1. 紧算子是有界线性算子（$C(H) \subset B(H)$）

   证明：紧算子 T 把有界集合映为列紧的，即有界的，因此 $TB(0,1)$ 有界 $M \implies ||T|| \leq M$

   因此线性算子有界，即连续。

2. $C(H) = \overline{F(H)}$

   证明略去，只需要知道紧算子可以用有界线性算子逼近即可。

3. T 是紧算子 $\iff T^*$ 是紧算子。

   证明：由上述 2，设有限秩算子列 $T_n \to T$，则 $T_n^* \to T^*$ 且 T_n^* 也是有限秩的，因此 T^* 是紧算子。

4. 若 $\dim H = \infty$，则任意紧算子 $T \in C(H)$ 不存在**有界**逆算子。

   证明：若存在有界的 T^{-1}，那么 T^{-1} 连续，即 T 将开集 $B(0,1)$ 映为开集。由于 $0 \in TB(0,1)$，因此 $B(0,\delta) \subset TB(0,1)$，而紧算子要求 $TB(0,1)$ 是列紧的。对于维数无穷的 $B(0,\delta)$，其不为列紧的，矛盾。

例 1: 紧算子的直观认识——对空间的强烈压缩

设 X, Y 是 Banach 空间，算子 $T \in B(X,Y)$ 满足 $R(T)$ 是闭集，且 $\dim R(T) = \infty$，证明 T 不是紧算子。

证明：$R(T) \subset Y$ 为闭集，由 Y 的完备性可以得到 $R(T)$ 的完备性。
由开映射定理：线性算子 $T: X \to R(T)$ 是满射，因此也是开映射。
即 $TB(0,1)$ 是 $R(T)$ 中的开集合 $\implies B(0,\delta) \subset TB(0,1)$
而 $B(0,\delta)$ 是一个无穷维的单位球，不是列紧的，因此 T 没有将有界集映射为列紧集，故不是紧算子。

例 2: 紧算子的例题

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的一个紧算子，若 $x_n \xrightarrow{w} x$，证明：$Tx_n \to Tx$
证明：通过平移，不妨设 $x_n \xrightarrow{w} 0$，下证明 $Tx_n \to 0$：
设有限秩算子列 $T_m \to T$，注意到任意有限维算子 A 可以表示成 $Ax = \sum_{i=1}^{k} < x, a_i > b_i$ 的形式
因此，由弱收敛的定义，$Ax_n \to 0$，且弱收敛序列 $\{x_n\}$ 有界，不妨设上界为 C。
因此，$\forall m \in N, ||Tx_n|| \leq ||(T - T_m)x_n|| + ||T_m x_n|| \leq C||T - T_m|| + ||T_m x_n||$
先令 $n \to \infty \implies \limsup ||Tx_n|| \leq C||T - T_m||$，再令 $m \to \infty \implies ||Tx_n|| \to 0 \implies Tx_n \to 0$

4.4 L^2 空间理论的应用——条件数学期望

形象理解：几何视角下的条件数学期望

在概率论中，设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间。
所有满足 $E[X^2] < \infty$ 的随机变量构成了一个 **Hilbert 空间** $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$。
其中的内积定义为：$\langle X, Y \rangle = E[XY]$。

条件期望的几何本质：假设我们有一个部分信息构成的子 σ-代数 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$（比如只知道某几个指标的数据）。基于这些部分信息能构造出的所有随机变量，构成了 L^2 空间中的一个**闭子空间** M（$M = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$）。
现在有一个未知的随机变量 X（属于大空间），我们想用已知信息（也就是子空间 M 里的变量 Y）去**最好地预测 X，也就意味着均方误差 $E[(X - Y)^2]$ 最小，即在子空间 M 中寻找距离 X 最近的点**。

由 Hilbert 空间的**正交投影定理**，这个距离最近的"最佳逼近点"存在且唯一，它正是 X 在闭子空间 M 上的**正交投影** $P_M X$。在概率论中，这个正交投影被赋予了一个名字，就叫**条件数学期望**：

$$E[X \mid \mathcal{G}] \triangleq P_M X$$

核心推论：因为是正交投影，所以误差向量 $X - E[X \mid \mathcal{G}]$ 必须垂直于子空间 M 中的任意元素 Z。即内积为零：$E[(X - E[X \mid \mathcal{G}])Z] = 0$。这正是概率论中条件期望定义的核心等式！