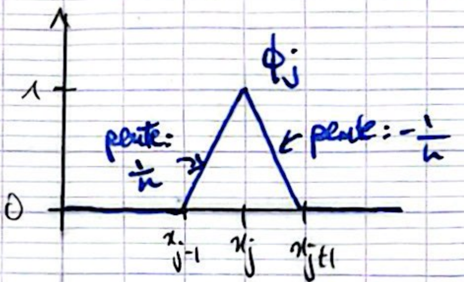
Ethan Cohen

Questions de cours - PC 5

Exercice 9 $\forall j \in [1, m]$, $\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right)$, $\phi(x) = 1 - |x|$.



* On a : $A_{ij} = \int_{-1}^{1} \phi'_j(x)\,\phi'_i(x)\,dx$.

· Pour $i = j$, sur $[x_{j-1}, x_j]$, on a $\phi'_j(x) = \frac{1}{h}$

sur $[x_j, x_{j+1}]$, $\phi'_j(x) = -\frac{1}{h}$.

D'où $A_{jj} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx = \frac{1}{h^2}[h + h] = \frac{2}{h}$.

· Pour $i = j \pm 1$, l'intersection des supports ϕ_j et $\phi_{j\pm1}$ est l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ (ou $[x_{j-1}, x_j]$. Par exemple, pour $i = j+1$ sur $[x_j, x_{j+1}]$

$\phi'_j(x) = -\frac{1}{h}$ et $\phi'_{j+1}(x) = \frac{1}{h}$.

Donc $A_{j,j+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h}$.

· Les autres intégrales sont nulles car il n'y a pas de recouvrement des supports

→ Donc :

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

* On a : $M_{ij} = \int_{-1}^{1} \phi_j(x)\,\phi_i(x)\,dx$

· Pour $i = j$, ϕ_j est non nulle sur $[x_{j-1}, x_{j+1}]$. On a :

$$M_{jj} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(1 - \left|\frac{x - x_j}{h}\right|\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)^2 h\,dt = h \cdot 2\int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{2h}{3}.$$

· Pour $i = j+1$, l'intervalle de recouvrement est $[x_j, x_{j+1}]$, on a :

$$M_{j,j+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(1 - \frac{x - x_j}{h}\right)\underbrace{\left(\frac{x - x_j}{h}\right)}_{\phi_{j+1}(x)} dx = h\int_0^1 (1-t)\cdot t\,dt = h\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{h}{6}$$

Le même raisonnement donne $M_{j-1,j} = \frac{h}{6}$.

Et pour les autres termes, le recouvrement est nul donc $M_{ij} = 0$.

D'où
$$M = \frac{h}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & & 0 \\ 0.5 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0.5 \\ 0 & & 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 10

Soit X vecteur propre de A associé à λ : $AX = \lambda X$.

$\forall i \in [\![1, m]\!]$, on a : $\frac{1}{h}\left[2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}\right] = \lambda x_i$ $\left(\text{avec} \left|\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_{m+1} = 0 \end{array}\right.\right)$

En cherchant une solution de la forme $x_i = \sin(i \cdot \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$,

et en utilisant $\sin[(i+1)\theta] + \sin[(i-1)\theta] = 2\sin(i\theta)\cos\theta$, l'équation devient : $\frac{1}{h}\left[2\sin(i\theta) - 2\sin(i\theta)\cos\theta\right] = \lambda \sin(i \cdot \theta)$.

Pour θ tq $\sin(i \cdot \theta) \neq 0$, on a : $\frac{2}{h}\left[1 - \cos\theta\right] = \lambda$.

On a bien $x_0 = \sin(0 \cdot \theta) = 0$.

Il faut $x_{m+1} = 0$ i.e. $(m+1)\theta = j\pi$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

D'où $\theta = \frac{j\pi}{m+1}$

Il vient donc $\lambda_j(A) = \frac{2}{h}\left(1 - \cos\frac{j\pi}{m+1}\right)$, $j = 1, \dots, m$ et

en utilisant : $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, on a :

$$\lambda_j(A) = \frac{4}{h}\sin^2\left(\frac{j\pi}{2(m+1)}\right) \quad \& \quad h = \frac{2}{m+1}$$
$$= \frac{4}{h}\sin^2\left(\frac{j\pi h}{4}\right), \quad j = 1, \dots, m$$

· En procédant exactement de la même façon pour M, on obtient :

$$\lambda_j(M) = \frac{h}{3}\left(1 + 2\cdot\cos\left(\frac{j\pi h}{4}\right)^2\right), \quad j = 1, \dots, m$$

Exercice 11

Pour (AM 1) : $v_{n+1} = v_n + k f_{n+1}$, avec $\left|\begin{array}{l} v_{n+1} = u(t_{n+1}) \\ v_n = u(t_n) \\ f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) = f_{n+1} = u'(t_{n+1}). \end{array}\right.$

Par Taylor : $u(t_n) = u(t_{n+1}) - k u'(t_{n+1}) + \frac{k^2}{2} u''(t_{n+1}) + O(k^3)$.

Donc : $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} = u'(t_{n+1}) - \frac{k}{2} u''(t_{n+1}) + O(k^2)$.

$f_{n+1} = u'(t_{n+1})$, on a pour erreur locale :

$\frac{v_{n+1} - v_n}{k} - f_{n+1} \simeq \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} - u'(t_{n+1}) = \underbrace{-\frac{k}{2} u''(t_{n+1}) + O(k^2)}_{O(k)}$: consistent d'ordre 1

Pour (AM 2) : $v_{n+1} = v_n + \frac{k}{2}(f_{n+1} + f_n)$.

L'erreur locale est :

$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} - \frac{1}{2}\left[f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) - f(t_n, u(t_n))\right]$ &

$= \left[u'(t_n) + \frac{k}{2} u''(t_n) + O(k^2)\right] - \left[u'(t_n) + \frac{k}{2} u''(t_n) + O(k^2)\right]$

$= O(k^2)$.

$\left|\begin{array}{l} u(t_{n+1}) = u(t_n) + k u'(t_n) + \frac{k^2}{2} u''(t_n) + O(k^3) \\ f_{n+1} = f_n + k \underbrace{\frac{d}{dt} f_n}_{u''(t_n)} + O(k^2) \end{array}\right.$

Donc (AM 2) est consistent d'ordre 2.

Exercice 12 On cherche les racines du polynôme caractéristique : $\rho(z)=\sum_{j=0}^{s} \alpha_j z^j$.

Pour (AM2), on a : $\alpha_1 u_{n+1}+\alpha_0 u_0 = k\left[\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n+1}\right]$

avec $\begin{cases}\alpha_0=-1\\ \alpha_1=1\\ \beta_0=1/2\\ \beta_1=1/2\end{cases}$. On a $\rho(z)=-1+z$.

ρ admet une unique racine $z=1$ de multiplicité 1 donc est simple.

Donc AM2 est stable.

Exercice 13 On a $\pi(z)=\rho(z)-k\cdot a\cdot\sigma(z)$ avec $\begin{cases}\rho(z)=-1+z\\ \sigma(z)=\beta_0+\beta_1 z=\frac{1}{2}[1+z]\end{cases}$

Donc $\pi(z)= z-1-\frac{ka}{2}(z+1)$

$= z\left[1-\frac{ka}{2}\right]-\left(1+\frac{ka}{2}\right) = z\left(1-\frac{\mu}{2}\right)-\left(1+\frac{\mu}{2}\right)$ avec $\mu=ka$

La racine est : $z=\dfrac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}}$

Pour $|z|\leq 1$, il faut $\left|1+\frac{\mu}{2}\right|^2\leq\left|1-\frac{\mu}{2}\right|^2$ et avec $\mu=x+iy$, on a :

$\left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\leq\left(1-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2$

i.e. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\leq\left(1-\frac{x}{2}\right)^2$

D'où $1+x+\frac{x^2}{4}\leq 1-x+\frac{x^2}{4}$

$\iff x\leq 0$.

Ainsi $|z|\leq 1 \iff \mathcal{R}(ka)\leq 0$ donc la région de stabilité S de AM2 est bien le demi-plan gauche.

Exercice 14 On divise $[-1,1]$ en n sous-intervalles de longueur $h=\frac{2}{n}$.

Par la midpoint rule, sur $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $I_i\approx f(x_i)h$ et $I_n=\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$

- Le développement de Taylor autour de x_i donne :

$f(x)=f(x_i)+f'(x_i)(x-x_i)+\frac{1}{2}f''(\alpha)(x-x_i)^2$.

En intégrant sur $[x_i-\frac{h}{2}, x_i+\frac{h}{2}]$:

$$\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} f(x)=f(x_i)h+f'(x_i)\underbrace{\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}}(x-x_i)\,dx}_{=0}+\frac{1}{2}\int f''(\alpha)(x-x_i)^2dx.$$

Par continuité sur $[-1,1]$, $\exists M$ tq $|f''(\alpha)|\leq M\ \forall\alpha$. On a alors :

$$\left|\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} f(x)\,dx - f(x_i)h\right| \leq \frac{1}{2} M \int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} (x-x_i)^2\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2} M \frac{h^3}{12}$$

Donc $|I - I_m| \leq \sum_{i=1}^{m} \left|\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} f(x)\,dx - f(x_i)h\right|$

$$\leq m \cdot \frac{Mh^3}{24} \quad \text{où } h = \frac{2}{m}$$

$$\leq \frac{M}{3m^2}.$$

Donc $I - I_m = O\left(\frac{1}{m^2}\right)$. D'où le résultat.

Exercice 15

Soit A une matrice symétrique. On a P matrice orthogonale avec $A = PDP^T$ tq $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}$ avec $\lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.
On suppose $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$.

On a : $\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$. On note $q_1, \dots, q_m$ la base orthonormale.

Soit $x \neq 0$ on a : $x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i q_i$.

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \mu_i A q_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_i q_i$$

D'où $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} (\mu_i \lambda_i)^2 \leq \lambda_1^2 \sum_{i=1}^{m} \mu_i^2$

$$\leq \lambda_1^2 \|x\|_2^2.$$

Donc $\forall x \neq 0$, $\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)^2 \leq \lambda_1^2 \Rightarrow \|A\|_2 \leq \underbrace{|\lambda_1|}_{=\lambda_1}$ (les valeurs propres sont positives)

Pour $x = q_1$ vecteur propre associé à λ_1, on a : $\frac{\|Aq_1\|_2}{\|q_1\|_2} = \lambda_1$.

Donc on a : $\|A\|_2 = \lambda_{max}(A)$