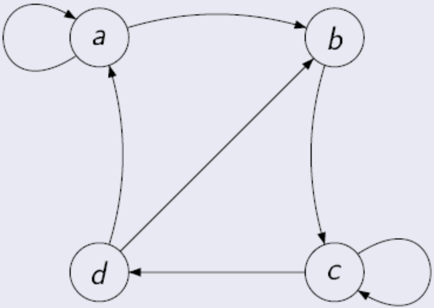
Théorie des graphes.

Exemple1

Voici un exemple d'un graphe orienté à quatre sommets a, b, c, d :



Certains **sommets** sont reliés par des **arcs**.

Pour définir un graphe, il faut préciser la liste de tous ses sommets et de tous ses arcs.
Les arcs sont *orientés* : dans l'exemple précédent, il existe un arc a → b, mais pas d'arc b → a.
On dit donc que ce graphe est orienté.

<u>1. Vocabulaire</u>

l'**origine** d'un arc x → y est …

la **destination** d'un arc x → y est …

une **boucle** est un arc x → …

un **successeur** de x est un sommet y tel qu'il existe un arc … → …

le nombre de successeurs d'un sommet x est appelé « degré sortant de x »

un **prédécesseur** de y est un sommet x tel qu'il existe un arc … → …

le nombre de prédécesseur d'un sommet y est appelé « degré entrant de y »
un sommet **isolé** n'a ni prédécesseur ni successeur.
l'**ordre** d'un graphe est le nombre total de sommets de ce graphe

Avec le graphe donné en exemple1 on a :

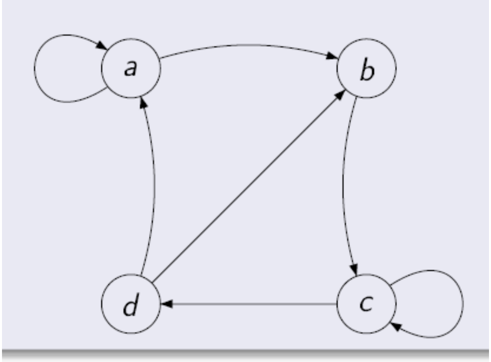


Tableau des successeurs :

Sommet	a	b	c	d
Successeurs				

Tableau des prédécesseurs :

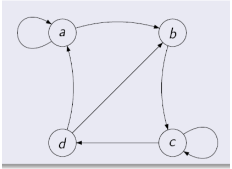
Sommet	a	b	c	d
Prédécesseurs				

2. Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence d'un graphe orienté d'ordre n (dont les sommets sont numérotés de 1 à n) est la matrice carrée de taille n dont le terme $t_{i,j}$ situé à la ligne n°i et à la colonne n°j est égal au **nombre d'arêtes** reliant i à j (c'est à dire d'origine i et d'extrémité j).

La matrice d'adjacence du graphe donné en exemple1 est :

$$M = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$



Remarques :

La somme des termes de la première ligne donne le nombre de . . . . du sommet a

La somme des termes de la première colonne donne le nombre de . . . . du sommet a.

3. Chemins et puissances de la matrice d'adjacence

Un **chemin** est une succession d'arcs consécutifs.

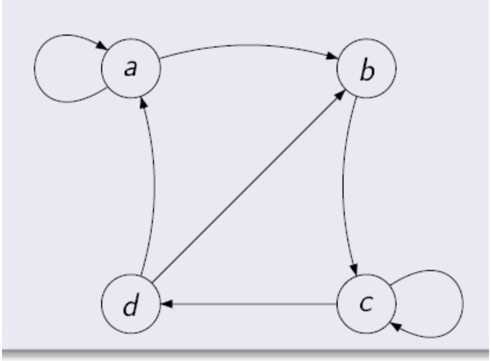
La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arcs qui le composent.

Un chemin de longueur p s'écrit donc avec ($p+1$) sommets, il est possible qu'un même sommet apparaisse plusieurs fois dans un chemin (on dit alors qu'il y a un circuit).

Un **circuit** est un chemin qui commence et termine au même sommet (« on revient au point de départ »). Une boucle est un cas particulier de circuit de longueur 1 !

Vocabulaire : un chemin **hamiltonien** est un chemin qui passe exactement une fois par chaque sommet du graphe.

Avec le graphe de l'exemple1 :



Chemins de longueur 2 :

Circuit de longueur 1 :

Circuit de longueur 3 :

Chemin hamiltonien :

Propriété : puissances de la matrice d'adjacence

Soit M la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté (dont les sommets sont numérotés de 1 à n). Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

Dans la matrice M^p, le terme $t_{i,j}$ situé à la ligne n°i et à la colonne n°j est égal au **nombre de chemins de longueur p** reliant i à j (c'est à dire d'origine i et d'extrémité j)

Avec le graphe de l'exemple1 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Nombre de chemins de longueur 2 partant de a :

Nombre de chemins de longueur 2 arrivant à c :

$$M^3 = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Nombre total de chemins de longueur 3 :

Nombre total de circuits de longueur 3 :

4. Graphes sans circuits, niveau d'un sommet.

<u>Raisonnement 1 :</u> Un graphe d'ordre 4 contient un chemin de longueur 4

a) Soit M la matrice d'adjacence de ce graphe, que peut-on dire de la matrice M^4 ?

b) combien de sommets faut-il pour écrire un chemin de longueur 4 ?

c) ces sommets peuvent-ils être tous différents ?

d) que peut-on en conclure ?

Raisonnement 2 : Un graphe d'ordre 4 ne contient aucun chemin de longueur 4

a) Soit M la matrice d'adjacence de ce graphe, que peut-on dire de la matrice M^4 ?

b) pourquoi ce graphe ne peut-il pas avoir de circuit ?

Propriété : soit G un graphe d'ordre n , et M sa matrice d'adjacence,
Le graphe G est sans circuits si et seulement si M^n est la matrice nulle.

Définition : dans un graphe sans circuit, le **niveau d'un sommet** est la longueur du plus long chemin arrivant à ce sommet.

Il est facile d'ordonner par niveau les sommets d'un graphe dont on connaît le tableau des prédécesseurs (ou la matrice d'adjacence).

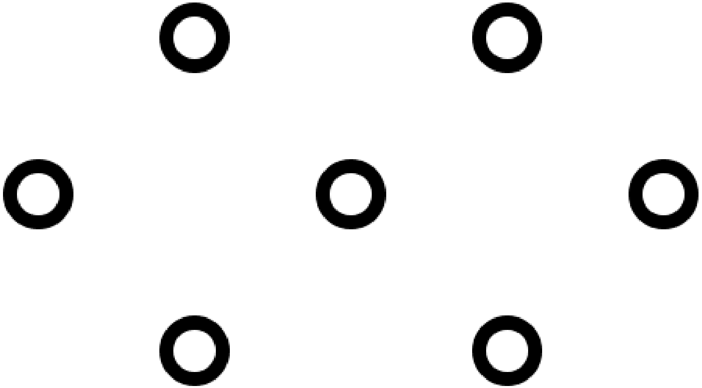
Exemple2 :

Soit G_2 le graphe à 7 sommets défini par le tableau des prédecesseurs :

Sommet	a	b	c	d	e	f	g
Prédécesseurs		a	a,b,e	c, e	a	b,c,d	b, c

Niveau	0	1	2	3	4	
Sommets						

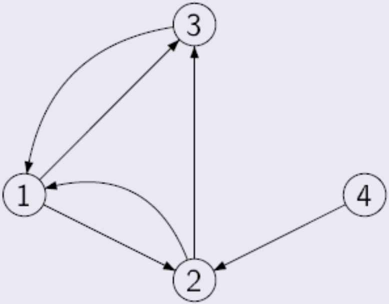
Ceci permet de donner une représentation géométrique « simple » de G_2 .



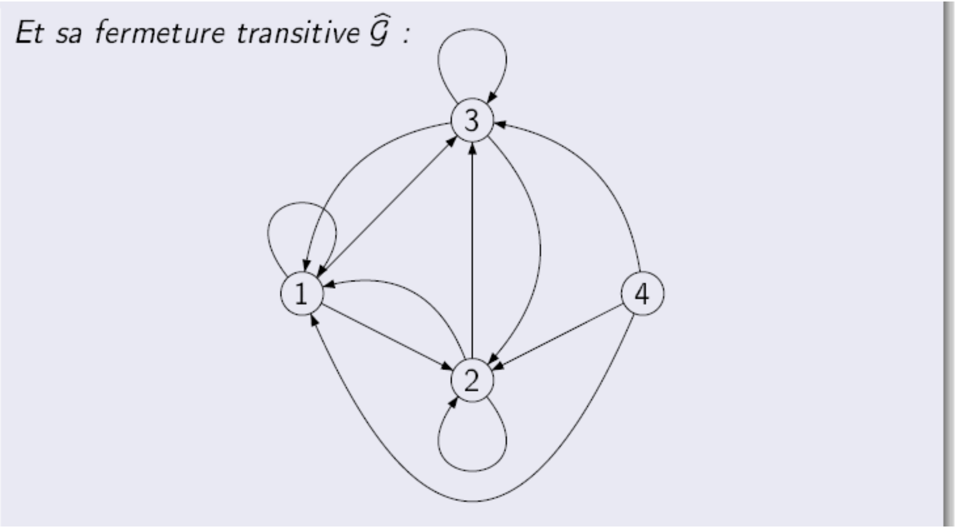
5. Fermeture transitive d'un graphe : accessibilité

Exemple

Voici le graphe $\mathcal{G}$ initial :



La fermeture transitive d'un graphe s'obtient en ajoutant certains arcs au graphe initial : dès que deux sommets sont reliés par un *chemin*, on ajoute un **arc** entre ces deux sommets.



Pour procéder méthodiquement, on peut utiliser la matrice d'adjacence du graphe. Dans l'exemple, on a $M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

on en déduit

$$M^2=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} \text{ et } M^3=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\2&1&2&0\\2&0&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix} \text{ et } M^4=\begin{pmatrix}4&1&3&0\\3&2&3&0\\1&2&1&0\\2&1&2&0\end{pmatrix}$$

on définit les matrices *booléennes* :

$$M^{[2]}=\begin{pmatrix}.&.&.&.\\.&.&.&.\\.&.&.&.\\.&.&.&.\end{pmatrix} \text{ et } M^{[3]}=\begin{pmatrix}.&.&.&.\\.&.&.&.\\.&.&.&.\\.&.&.&.\end{pmatrix} \text{ et } M^{[4]}=\begin{pmatrix}.&.&.&.\\.&.&.&.\\.&.&.&.\\.&.&.&.\end{pmatrix}$$

La matrice de la fermeture transitive de G est la matrice booléenne :

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} = \ldots \; [+] \; \ldots \; [+] \; \ldots \; [+] \; \ldots \quad \text{(addition booléenne)}$$

Plus généralement :
Soit G un graphe à n sommets, de matrice d'adjacence M.
La **fermeture transitive** de G, notée $\widehat{G}$ est le graphe de matrice $\widehat{M}$ (appelée **matrice d'accessibilité**) correspondant au *calcul booléen* :

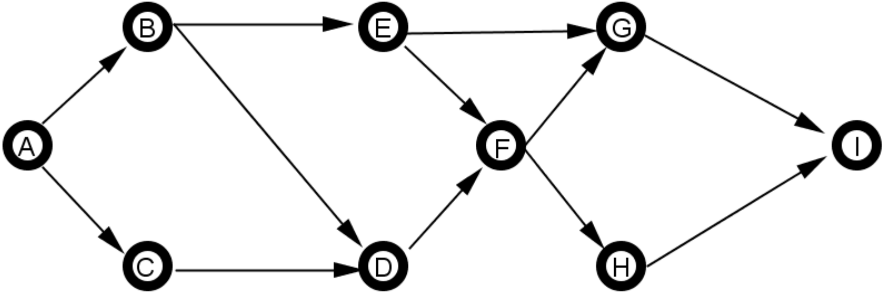
$$\widehat{M} = M\,[+]\,M^{[2]}[+]\ldots[+]\,M^{[n]}$$

Remarque : les opérations entre crochets sont des opérations booléennes, (en particulier : 1[+]1=1).

En effet : un sommet y est accessible à partir d'un sommet x s'il existe un chemin reliant x à y et ayant pour longueur : soit 1, soit 2, soit …, soit n

6. Recherche d'un chemin optimal dans un graphe pondéré

On donne un graphe G ci-dessous



A chaque arc du graphe, on associe une valeur numérique (positive) donnée dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		2	3						
B				5	2				
C				1					
D						1			
E						3	4		
F							4	3	
G									2
H									3
I									

1) Reporter sur chaque arc la valeur correspondante.
2) On souhaite déterminer **le chemin de valeur minimale allant de A jusqu'à I**

On utilise pour cela un algorithme :

Principe : on attribue à chaque sommet la valeur minimale obtenue parmi tous les chemins qui arrivent à ce sommet en partant de A.

Puisque le graphe est ordonné par niveau, <u>on procède par niveaux croissants</u>.

- la valeur du sommet initial (ici le sommet A) est 0.
- on calcule la valeur de chaque sommet de niveau 1,
  - pour un sommet S n'ayant qu'un seul prédécesseur P, la valeur à calculer est la somme de la valeur du prédécesseur P et de la valeur de l'arc reliant P à S
  - pour un sommet ayant plusieurs prédécesseurs, on effectue le calcul pour chaque prédécesseur (et chaque arc correspondant), et on garde la valeur minimale.
- On procède de même pour les sommets de niveau 2, puis 3...

Un **chemin optimal** s'obtient « à rebours » : à partir du sommet d'arrivée (ici le sommet I) on sélectionne à chaque étape un prédécesseur optimal (entouré dans le tableau, ou indiqué en indice sur le graphe).

Dans l'exemple, il y a un seul chemin optimal allant de A à I :

… … … … …