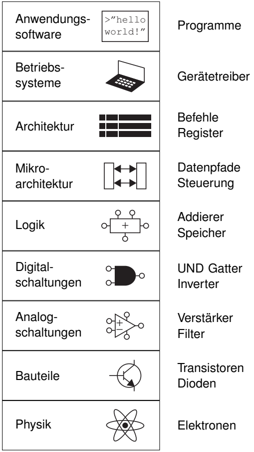
Digitaltechnik
Wintersemester 2021/2022
2. Vorlesung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Inhalt

1. Einleitung
2. Darstellung von natürlichen Zahlen
3. Umrechnen zwischen Zahlensystemen
4. Addition von vorzeichenlosen Binärzahlen
5. Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
6. Logikgatter
7. Zusammenfassung und Ausblick



Agenda

1. Einleitung
2. Darstellung von natürlichen Zahlen
3. Umrechnen zwischen Zahlensystemen
4. Addition von vorzeichenlosen Binärzahlen
5. Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
6. Logikgatter
7. Zusammenfassung und Ausblick

Anwendungs-software >"hello world!"	Programme
Betriebs-systeme	Gerätetreiber
Architektur	Befehle Register
Mikro-architektur	Datenpfade Steuerung
Logik	Addierer Speicher
Digital-schaltungen	UND Gatter Inverter
Analog-schaltungen	Verstärker Filter
Bauteile	Transistoren Dioden
Physik	Elektronen

Rückblick auf letzte Vorlesung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beherrschen von Komplexität
  - Abstraktion
  - Disziplin
  - Hierarchie
  - Modularität
  - Regularität

- Binärsystem als digitale Disziplin

- Digitaltechnik befasst sich mit Entwurf digitaler Schaltungen
  - Ein/Ausgaben binär

Zweierpotenzen: das Einmaleins der Informatik

$2^0 = 1$	$2^{10} =$	1024	Kibi ($\approx$ Tausend)
$2^1 = 2$	$2^{11} =$	2048	
$2^2 = 4$	$2^{12} =$	4096	
$2^3 = 8$	$2^{13} =$	8192	
$2^4 = 16$	$2^{14} =$	16384	
$2^5 = 32$	$2^{15} =$	32768	
$2^6 = 64$	$2^{16} =$	65536	
$2^7 = 128$	$2^{20} =$	1048576	Mebi ($\approx$ Million)
$2^8 = 256$	$2^{30} =$	1073741824	Gibi ($\approx$ Milliarde)
$2^9 = 512$	$2^{40} =$	1099511627776	Tebi ($\approx$ Billion)

Überblick der heutigen Vorlesung

- Zahlensysteme: Bitfolgen $\leftrightarrow$ (ganze) Zahlen
  - Dezimal-, Binär-, Hexadezimalzahlen
  - Darstellung
  - Umrechnung
  - Addition von Binärzahlen
  - Vorzeichenbehaftete Binärzahlen

- Logikgatter: Einfache Boole'sche Funktionen
  - Wahrheitswertetabellen
  - Symbole und Schreibweisen
  - Anwendung

Harris 2013/2016
Kap. 1.4 - 1.5

Agenda

1. Einleitung
2. Darstellung von natürlichen Zahlen
3. Umrechnen zwischen Zahlensystemen
4. Addition von vorzeichenlosen Binärzahlen
5. Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
6. Logikgatter
7. Zusammenfassung und Ausblick

Anwendungs-software (>"hello world!")	Programme
Betriebs-systeme	Gerätetreiber
Architektur	Befehle Register
Mikro-architektur	Datenpfade Steuerung
Logik	Addierer Speicher
Digital-schaltungen	UND Gatter Inverter
Analog-schaltungen	Verstärker Filter
Bauteile	Transistoren Dioden
Physik	Elektronen

Definition von Zahlenmengen

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge b \neq 0\}$
- reele Zahlen $\mathbb{R}$
- komplexe Zahlen, ...

Darstellungen von natürlichen Zahlen — Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

dezimal: 5347

$$\begin{aligned} 5347 &= 7 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 1000 \\ &= 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 \\ &=: 5347_{10} \end{aligned}$$

binär: 1101_2

$$\begin{aligned} 1101_2 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 \\ &= 13_{10} \end{aligned}$$

hexadezimal: $1F3A_{16}$

$$\begin{aligned} 1F3A_{16} &= 10 \cdot 16^0 + 3 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^3 \\ &= 10 \cdot 1 + 3 \cdot 16 + 15 \cdot 256 + 1 \cdot 4096 \\ &= 7994_{10} \end{aligned}$$

Darstellungen von natürlichen Zahlen — Verallgemeinerung (Abstraktion)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition: vorzeichenloses Stellenwertsystem

Für eine Basis $b \in \mathbb{N} \land b \geq 2$ ist $Z_b := \{0, 1, \ldots, b-1\}$ die Menge der verfügbaren Ziffern. Die Funktion $\mathrm{u}_{b,k}$ bildet eine Ziffernfolge der Breite $k \in \mathbb{N}$ auf eine natürliche Zahl ab:

$$\mathrm{u}_{b,k} : (a_{k-1} \ldots a_1 a_0) \in Z_b^k \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot b^i \in \mathbb{N}$$

Trick zur effizienteren Berechnung ohne Exponentiationen b^i: Horner Schema:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot b^i = ((\ldots((a_{k-1} \cdot b + a_{k-2}) \cdot b + a_{k-3}) \ldots) \cdot b + a_1) \cdot b + a_0$$

Vorzeichenloses Stellenwertsystem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- polyadisches Zahlensystem
- niedrigstwertige Stelle (LSD, least significant digit): a_0
- höchstwertige Stelle (MSD, most significant digit): a_{k-1}
- kleinste darstellbare Zahl: $\sum_{i=0}^{k-1} 0 \cdot b^i = 0$
- größte darstellbare Zahl: $\sum_{i=0}^{k-1} (b-1) \cdot b^i = b^k - 1$
- Anzahl der darstellbaren Werte: $\left|Z_b^k\right| = \left|Z_b\right|^k = b^k$
- eineindeutig (bijektiv) abbildbar auf Wertebereich $\{0, \ldots, b^k - 1\}$ für festes k

Häufig verwendete Basen

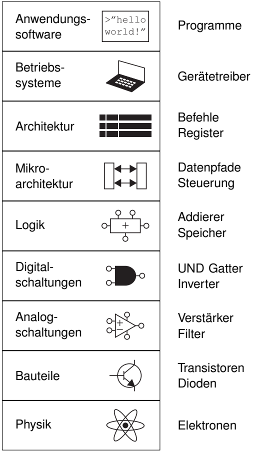
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

	dual/binär	oktal	dezimal	hexadezimal
b	2	8	10	16
Z_b	$\{0, 1\} := \mathbb{B}$	$\{0, \dots, 7\}$	$\{0, \dots, 9\}$	$\{0, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$
Literale	$1101\ 0011_2$	323_8	211_{10}	$D3_{16}$
	0b11010011	0o323	0d211	0xD3

- weniger gebräuchlich:
  - b = 20 wenn man mit Händen *und* Füßen rechnet
  - b = 60 zur Angabe von Zeit bzw. Längen-/Breitengraden
  - b = 12 ein “Dutzend”

Agenda

1. Einleitung
2. Darstellung von natürlichen Zahlen
3. Umrechnen zwischen Zahlensystemen
4. Addition von vorzeichenlosen Binärzahlen
5. Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
6. Logikgatter
7. Zusammenfassung und Ausblick



Zweierpotenzen

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
16^0 & = & 8^0 & = & 2^0 & = & 1 \\
 & & & & 2^1 & = & 2 \\
 & & & & 2^2 & = & 4 \\
 & & 8^1 & = & 2^3 & = & 8 \\
16^1 & & & = & 2^4 & = & 16 \\
 & & & & 2^5 & = & 32 \\
 & & 8^2 & = & 2^6 & = & 64 \\
 & & & & 2^7 & = & 128 \\
16^2 & & & = & 2^8 & = & 256 \\
 & & 8^3 & = & 2^9 & = & 512
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
 & & & & 2^{10} & = & 1\,\text{Ki} \\
 & & & & 2^{11} & = & 2\,\text{Ki} \\
16^3 & = & 8^4 & = & 2^{12} & = & 4\,\text{Ki} \\
 & & & & 2^{13} & = & 8\,\text{Ki} \\
 & & & & 2^{14} & = & 16\,\text{Ki} \\
 & & 8^5 & = & 2^{15} & = & 32\,\text{Ki} \\
16^4 & & & = & 2^{16} & = & 64\,\text{Ki} \\
16^5 & & & = & 2^{20} & = & 1\,\text{Mi} \\
 & & 8^{10} & = & 2^{30} & = & 1\,\text{Gi} \\
16^{10} & & & = & 2^{40} & = & 1\,\text{Ti}
\end{array}
$$

Nibble-Werte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$
\begin{aligned}
0000_2 &= 0_{10} &= 0_{16} \\
0001_2 &= 1_{10} &= 1_{16} \\
0010_2 &= 2_{10} &= 2_{16} \\
0011_2 &= 3_{10} &= 3_{16} \\
0100_2 &= 4_{10} &= 4_{16} \\
0101_2 &= 5_{10} &= 5_{16} \\
0110_2 &= 6_{10} &= 6_{16} \\
0111_2 &= 7_{10} &= 7_{16} \\
1000_2 &= 8_{10} &= 8_{16} \\
1001_2 &= 9_{10} &= 9_{16} \\
1010_2 &= 10_{10} &= A_{16} \\
1011_2 &= 11_{10} &= B_{16} \\
1100_2 &= 12_{10} &= C_{16} \\
1101_2 &= 13_{10} &= D_{16} \\
1110_2 &= 14_{10} &= E_{16} \\
1111_2 &= 15_{10} &= F_{16}
\end{aligned}
$$

Binär/Hexadezimal $\rightarrow$ Dezimal LQ5-9

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- polyadische Abbildung anwenden:

- $u_{2,5}(1\ 0011_2) = 2^0 + 2^1 + 2^4 = 19_{10}$

- $u_{16,3}(4AF_{16}) = 15 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^2 = 1199_{10}$

Binär $\leftrightarrow$ Hexadezimal

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Nibble-weise umwandeln
- bei least significant bit beginnen
- führende Nullen weglassen oder ergänzen (je nach geforderter Bitbreite)

- $11\ 1010\ 0110\ 1000_2 = 3A68_{16}$

- $7BF_{16} = 111\ 1011\ 1111_2$

Dezimal → Binär LQ5-1 (Prinzip auch für größere Basen anwendbar)

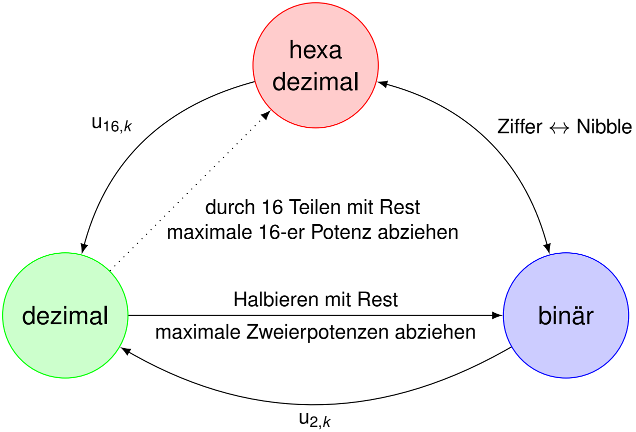
- Methode 1 (links nach rechts): maximale Zweierpotenzen abziehen

$$
\begin{aligned}
& 53_{10} \\
&= 32 + \underline{21} \\
&= 32 + 16 + \underline{5} \\
&= 32 + 16 + 4 + 1 \\
&= 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 \\
&= 11\ 0101_2
\end{aligned}
$$

- Methode 2 (rechts nach links): Halbieren mit Rest

$$
\begin{aligned}
& 53_{10} \\
&= 2 \cdot \underline{26} + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot \underline{13} + 0) + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \underline{6} + 1) + 0) + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \underline{3} + 0) + 1) + 0) + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \underline{1} + \underline{1}) + \underline{0}) + \underline{1}) + \underline{0}) + \underline{1} \\
&= 11\ 0101_2
\end{aligned}
$$

Umrechnen zwischen Zahlensystemen



Zweierpotenzen verinnerlichen!

Agenda

1. Einleitung
2. Darstellung von natürlichen Zahlen
3. Umrechnen zwischen Zahlensystemen
4. Addition von vorzeichenlosen Binärzahlen
5. Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
6. Logikgatter
7. Zusammenfassung und Ausblick

Anwendungs-software	>"hello world!"	Programme
Betriebs-systeme		Gerätetreiber
Architektur		Befehle Register
Mikro-architektur		Datenpfade Steuerung
Logik	+	Addierer Speicher
Digital-schaltungen		UND Gatter Inverter
Analog-schaltungen	+ −	Verstärker Filter
Bauteile		Transistoren Dioden
Physik		Elektronen

Schriftliche Addition

- Dezimal

		1	1		Übertrag
	3	7	3	4	Summand
+	5	1	6	8	Summand
=	8	9	0	2	Summe

- Binär

		1	1		Übertrag
	1	0	1	1	Summand
+	0	0	1	1	Summand
=	1	1	1	0	Summe

Addition mit Überlauf LQ5-2 RQ5-2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Binär

		1	1	1		Übertrag
			1	0	1	1	Summand
+			0	1	1	0	Summand
=	1	0	0	0	1	Summe

Überlauf

- Digitale Systeme arbeiten i.d.R. mit festen Bitbreiten
  - Langzahlarithmetik nur in Software (Bitbreite nur durch verfügbaren Arbeitsspeicher beschränkt)
  - Overflow-flag zum Signalisieren arithmetischer Ausnahmen in Hardware
- Operation (bspw. Addition) läuft über, wenn Ergebnis nicht mit der verfügbaren Bitbreite dargestellt werden kann
- für 4 bit Addierer gilt: 11 + 6 = 1

Umfrage

Agenda

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Einleitung
2. Darstellung von natürlichen Zahlen
3. Umrechnen zwischen Zahlensystemen
4. Addition von vorzeichenlosen Binärzahlen
5. Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
6. Logikgatter
7. Zusammenfassung und Ausblick

Anwendungs- software (>"hello world!")	Programme
Betriebs- systeme	Gerätetreiber
Architektur	Befehle Register
Mikro- architektur	Datenpfade Steuerung
Logik	Addierer Speicher
Digital- schaltungen	UND Gatter Inverter
Analog- schaltungen	Verstärker Filter
Bauteile	Transistoren Dioden
Physik	Elektronen

Darstellungen von ganzen Zahlen — Dezimal

$$-5347_{10} = (7 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 1000) \cdot -1$$
$$= \left(7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3\right) \cdot (-1)^1$$

$$+5347_{10} = (7 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 1000) \cdot 1$$
$$= \left(7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3\right) \cdot (-1)^0$$

- Vorzeichen
  - spezielle Ziffer an höchstwertiger Stelle
  - kann auch als 0/1 repräsentiert werden

Darstellung von ganzen Zahlen — Verallgemeinerung (Abstraktion)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition: Vorzeichen und Betrag

Für eine Basis $b \in \mathbb{N} \land b \geq 2$ ist $Z_b := \{0, 1, \ldots, b-1\}$ die Menge der verfügbaren Ziffern. Die Funktion $\mathrm{vb}_{b,k}$ bildet eine Ziffernfolge der Breite $k \in \mathbb{N}$ auf eine ganze Zahl ab:

$$\mathrm{vb}_{b,k} : (a_{k-1} \ldots a_1 a_0) \in \{0, 1\} \times Z_b^{k-1} \mapsto (-1)^{a_{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{k-2} a_i \cdot b^i \in \mathbb{Z}$$

Ganze Zahlen als Vorzeichen und Betrag

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- niedrigstwertige Stelle: a_0
- höchstwertige Stelle: a_{k-1}
- kleinste darstellbare Zahl: $(-1)^1 \cdot \sum_{i=0}^{k-2}(b-1) \cdot b^i = -(b^{k-1} - 1)$
- größte darstellbare Zahl: $(-1)^0 \cdot \sum_{i=0}^{k-2}(b-1) \cdot b^i = +(b^{k-1} - 1)$
- Anzahl der darstellbaren Werte: $2 \cdot b^{k-1} - 1$
- nicht eindeutig (doppelte Darstellung für Null: ± 0)

Binärdarstellung mit Vorzeichen und Betrag

LQ5-5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiele

$$vb_{2,4}(1110_2) = \left(0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2\right) \cdot (-1)^1 = -6_{10}$$

$$vb_{2,4}(0110_2) = \left(0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2\right) \cdot (-1)^0 = +6_{10}$$

- *inkompatibel* mit binärer (unsigned) Addition:

$$\begin{array}{cccccccl}
 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & = -6_{10} \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 0 & = +6_{10} \\
\hline
= & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & = 4_{10} \lightning
\end{array}$$

Darstellung von ganzen Zahlen — Digitaler “Goldstandard”

Definition: Zweierkomplement

Die Funktion s_k bildet eine Bitfolge der Breite $k \in \mathbb{N}$ auf eine ganze Zahl ab:

$$\mathrm{s}_k : (a_{k-1} \ldots a_1 a_0) \in \mathbb{B}^k \mapsto a_{k-1} \cdot (-2^{k-1}) + \sum_{i=0}^{k-2} a_i \cdot 2^i \in \mathbb{Z}$$

- auch für Basen $b > 2$ verallgemeinerbar: $\mathrm{s}_{b,k}$
  - wird aber heute kaum noch verwendet

Ganze Zahlen als Zweierkomplement

- niedrigstwertige Stelle: a_0
- höchstwertige Stelle: a_{k-1}
- kleinste darstellbare Zahl: $1 \cdot (-2^{k-1}) + \sum_{i=0}^{k-2} 0 \cdot 2^i = -2^{k-1}$
- größte darstellbare Zahl: $0 \cdot (-2^{k-1}) + \sum_{i=0}^{k-2} 1 \cdot 2^i = 2^{k-1} - 1$
- Anzahl der darstellbaren Werte: 2^k
- eineindeutig (bijektiv) abbildbar auf Wertebereich $\{-2^{k-1}, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$ für festes k

Binärdarstellung im Zweierkomplement LQ5-5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiele

$$s_4(1010_2) = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot (-2^3) = -6_{10}$$

$$s_4(0110_2) = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot (-2^3) = +6_{10}$$

- *kompatibel* mit binärer (unsigned) Addition:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 = -6_{10} \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 0 = +6_{10} \\
\hline
= & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 = 0_{10} \checkmark
\end{array}$$

- *kein Überlauf* bei Addition positiver und negativer Zahl gleicher Breite

Dezimal $\rightarrow$ Zweierkomplement RQ5-5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Methode 1 (links nach rechts): größtmögliche Zweierpotenzen abziehen

$$
\begin{aligned}
-53_{10} &= -64 + \underline{11} \\
&= -64 + 8 + \underline{3} \\
&= -64 + 8 + 2 + 1 \\
&= -2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \\
&= 100\ 1011_2
\end{aligned}
$$

- Methode 2 (rechts nach links): Betrag negieren = Komplement (bitweise $\overline{a}$) und Inkrement (+1) (Reihenfolge beachten!)

$$
\begin{aligned}
-53_{10} &= \overline{53_{10}} + 1 \\
&= \overline{011\ 0101_2} + 1 \\
&= 100\ 1010_2 + 1 \\
&= 100\ 1011_2
\end{aligned}
$$

- in beiden Fällen auf korrekte/geforderte Bitbreite achten
- ggf. müssen führende Null(en) schon für Betragsdarstellung eingefügt werden

Bitbreitenerweiterung

- notwendig, um unterschiedlich breite Bitfolgen zu addieren
- *zero extension*:
  - Auffüllen mit führenden Nullen für vorzeichenlose Darstellung

$$u_{2,k+1}(0a_{k-1} \dots a_0) = 0 \cdot 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 2^i = u_{2,k}(a_{k-1} \dots a_0)$$

- *sign extension*:
  - Auffüllen mit Wert des Vorzeichen-Bits für Zweierkomplement Darstellung

$$\begin{aligned} s_{k+1}(a_{k-1}a_{k-1} \dots a_0) &= a_{k-1} \cdot \underbrace{(-2^k)}_{2\cdot(-2^{k-1})} + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i \cdot 2^i \\ &= a_{k-1} \cdot \left(-2^{k-1} - 2^{k-1} + 2^{k-1}\right) + \sum_{i=0}^{k-2} a_i \cdot 2^i \\ &= s_k(a_{k-1} \dots a_0) \end{aligned}$$

Bitbreitenerweiterung — Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- -5_{10} im Zweierkomplement von 4 auf 8 Bit erweitern:

$$
\begin{aligned}
5_{10} &= 0101_2 \\
\Rightarrow -5_{10} &= \overline{0101_2} + 1 \\
&= 1010_2 + 1 \\
&= 1011_2 \\
&= {\color{red}1111}\ 1011_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textit{Probe}: -(-5_{10}) = \overline{1111\ 1011_2} + 1 &= 0000\ 0100_2 + 1 \\
&= 0000\ 0101_2 \\
&= 5_{10}
\end{aligned}
$$

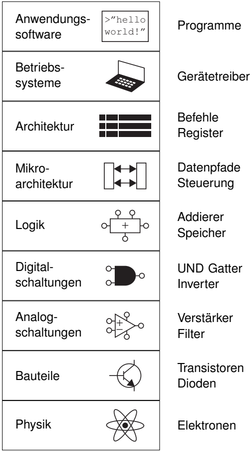
Vergleich der binären Zahlendarstellungen für k=4

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$\mathbb{Z}$	Vorzeichenlos: $u_{2,k}$ $\{0, \dots, 2^k - 1\}$	Vorzeichen/Betrag: $vb_{2,k}$ $\{-2^{k-1}+1, \dots, 2^{k-1} - 1\}$	Zweierkomplement: s_k $\{-2^{k-1}, \dots, 2^{k-1} - 1\}$
15	1111		
14	1110		
13	1101		
12	1100		
11	1011		
10	1010		
9	1001		
8	1000		
7	0111	0111	0111
6	0110	0110	0110
5	0101	0101	0101
4	0100	0100	0100
3	0011	0011	0011
2	0010	0010	0010
1	0001	0001	0001
0	0000	0000 1000	0000
−1		1001	1111
−2		1010	1110
−3		1011	1101
−4		1100	1100
−5		1101	1011
−6		1110	1010
−7		1111	1001
−8			1000

Agenda

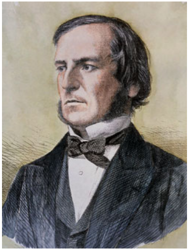
1. Einleitung
2. Darstellung von natürlichen Zahlen
3. Umrechnen zwischen Zahlensystemen
4. Addition von vorzeichenlosen Binärzahlen
5. Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
6. **Logikgatter**
7. Zusammenfassung und Ausblick



George Boole, 1815 - 1864

- in einfachen Verhältnissen geboren
- brachte sich selbst Mathematik bei
- Professor am Queen's College in Irland
- "An Investigation of the Laws of Thought" (1854)

⇒ grundlegende logische Variablen und Operationen



Harris 2013/2016
Kap. 1.5

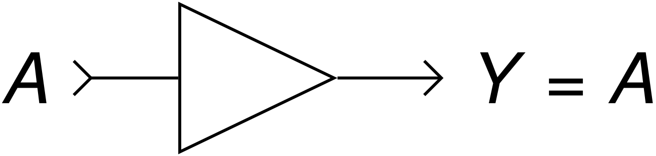
Logische Operationen

LQ1-1 **RQ1-1** **LQ1-2** **RQ1-2**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

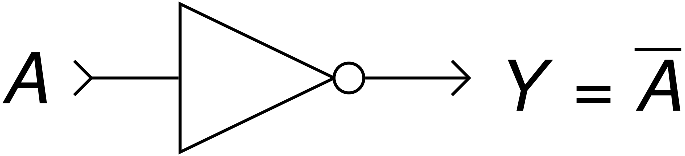
- verknüpfen binäre Werte: $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^k$
- zunächst $k = 1$
- Beispiele für
  - $n = 1$: NOT
  - $n = 2$: AND, OR, XOR
  - $n = 3$: MUX
- Charakterisierung durch Wahrheitswertetabellen

BUF : $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$



A	Y
0	0
1	1

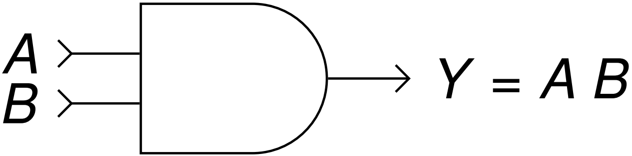
NOT : $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$



A	Y
0	1
1	0

alternativ: $Y = !A = \sim A = \neg A$

AND : $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$

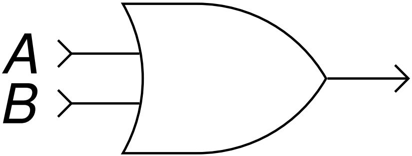


A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

alternativ: $Y = A \cdot B = A \,\&\, B = A \wedge B$

OR : $\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

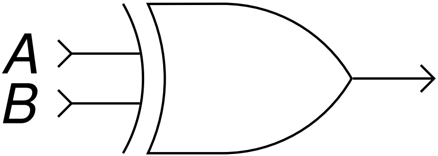


$$Y = A + B$$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

alternativ: $Y = A|B = A \vee B$

XOR : $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$

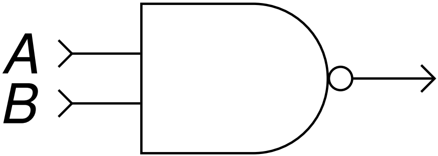


$$Y = A \bigoplus B$$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

alternativ: $Y = A\hat{}B$

NAND : $\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$

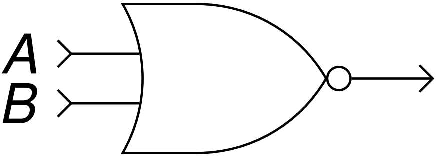


$$Y = \overline{A\,B}$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR : $\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$

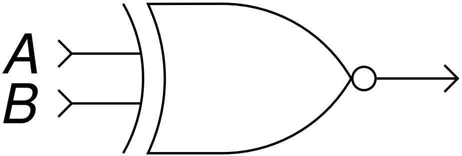
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



$$Y = \overline{A + B}$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

XNOR : $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$

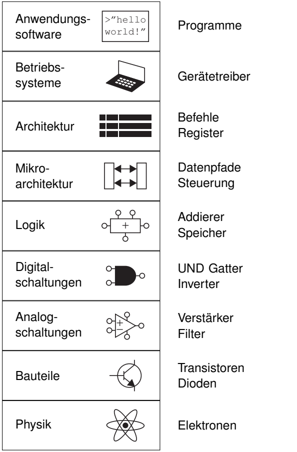


$$Y = \overline{A \oplus B}$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

entspricht Test auf Gleichheit

1. Einleitung
2. Darstellung von natürlichen Zahlen
3. Umrechnen zwischen Zahlensystemen
4. Addition von vorzeichenlosen Binärzahlen
5. Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
6. Logikgatter
7. Zusammenfassung und Ausblick



Zusammenfassung und Ausblick

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zahlensysteme: Bitfolgen $\leftrightarrow$ (ganze) Zahlen
  - Dezimal-, Binär-, Hexadezimalzahlen
  - Darstellung
  - Umrechnung
  - Addition von Binärzahlen
  - Vorzeichenbehaftete Binärzahlen
- Logikgatter
  - Darstellung
  - Wahrheitswertetabellen
- nächste Vorlesung behandelt
  - physikalische Realisierung von Logikgattern