Probeklausur zu „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. David Meffert
Dipl.-Math. Ulrike Roder

WiSe 2013/2014
Januar 2014

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	14	20	10	12	16	18	90		
erreichte Punktzahl									

Bitte beachten Sie: Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In dieser Klausur sind alle schriftlichen Unterlagen als Hilfsmittel zugelassen.
Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (14 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für $(a,b) = (9,143)$ den größten gemeinsamen Teiler, sowie eine Darstellung $\operatorname{ggT}(a,b) = ka + \ell b$.

(b) Finden Sie eine Zahl, sodass $9x \equiv 1 \pmod{143}$.

(c) Zeigen Sie: Ist $m \in \mathbb{N}^*$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist n genau dann durch 2^m teilbar, wenn die aus den letzten m Dezimalziffern von n bestehende Zahl durch 2^m teilbar ist.

Lösung:

(a) Wir benutzen den erweiterten Euklidischen Algorithmus:

a	b	$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$	k	ℓ
143	9	15	-1	16
9	8	1	1	-1
8	1	8	0	1
1	0		1	0

Es gilt $\operatorname{ggT}(a,b) = 1 = ka + \ell b$, also $1 \pmod{a} = ka + \ell b \pmod{a} = \ell b \pmod{a}$.

(b) Nach Teil (a) ist $x = \ell$ eine Lösung. In diesem Fall $x = 16$.

(c) Wir wählen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $n = 10^m n_1 + n_2$ mit $0 \leq n_2 < 10^m$. (Geht mit Division mit Rest.) Wegen $10^m = 5^m \cdot 2^m$ folgt

$$2^m | n \iff 2^m | n_2.$$

2. Aufgabe (20 Punkte)

Gegeben seien die linearen Abbildungen

$\Phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Spiegelung an der Ebene, die durch den Untervektorraum $E := \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$ gegeben ist,

$\Phi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Streckung um den Faktor 2.

(a) Wählen Sie eine Basis $\mathcal{B}_1$, in der die Bilder der Basisvektoren unter Φ_1 leicht anzugeben sind und geben Sie die Bilder der Basisvektoren an.

Hinweis: Was passiert mit Vektoren in E? Was passiert mit Vektoren, die orthogonal zu E sind?

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ_1 bzgl. $\mathcal{B}_1$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns und des Bildes von Φ_1. Ist Φ_1 injektiv/surjektiv/bijektiv?

(d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ_2 bzgl. $\mathcal{B}_1$.

(e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Verknüpfung $\Phi_1 \circ \Phi_2$.

Lösung:

(a) Wir wählen zwei Basisvektoren, die die Ebenengleichung erfüllen, sprich in E liegen und linear unabhängig sind, z. B.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Als dritten Basisvektoren wählen wir den Vektor, der senkrecht auf E steht

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir die Basis

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

gefunden.

(b) Die Abbildungsmatrix lautet mit der in (a) gewählten Basis $\mathcal{B}_1$

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\Phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Man sieht an der Abbildungsmatrix zu Φ_1, dass $\operatorname{rank}(\Phi_1) = 3$. Mit der Dimensionsformel folgt

$$\operatorname{rank}(\Phi_1) + \dim(\ker(\Phi_1)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

und somit $\dim(\ker(\Phi_1)) = 0$. Damit gilt $\ker(\Phi_1) = \{0\}$ und $\operatorname{im}(\Phi_1) = \mathbb{R}^3$.

Die Abbildung ist also injektiv, surjektiv und bijektiv.

(d) Für die Abbildungsmatrix gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi_1 \circ \Phi_2) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi_1) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lösung: Nach dem Hinweis müssen wir

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

zeigen.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung wegen

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

erfüllt.

Induktionsannahme: Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Induktionsschritt: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

4. Aufgabe (12 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum von V und $\phi : V \to V$ ein Isomorphismus mit $\phi(U) = U$.

(a) Zeigen Sie für jedes $\tilde{v} \in V/U$, dass $\tilde{v} = \tilde{0}$ genau dann gilt, wenn $v \in U$ liegt.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\tilde{\phi} : \begin{cases} V/U \to V/U \\ \tilde{v} \mapsto \widetilde{\phi(v)} \end{cases}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

Lösung:

(a) Es ist $\tilde{v} = \tilde{0} \iff v \sim 0 \iff v - 0 \in U \iff v \in U$.

(b) **Wohldefiniertheit:** Seien $v, w \in V$ mit $\tilde{v} = \tilde{w}$. Dann gibt es ein $u \in U$ mit $v = w + u$ und es folgt

$$\tilde{\phi}(\tilde{v}) = \widetilde{\phi(v)} \overset{\phi \text{ linear}}{=} \widetilde{\phi(w)} + \widetilde{\phi(u)} \overset{\phi(u) \in U}{=} \widetilde{\phi(w)} = \tilde{\phi}(\tilde{w}).$$

Linearität: Seien $\tilde{v}, \tilde{w} \in V/U$ und $a, b \in K$. Dann ist

$$\tilde{\phi}(a\tilde{v} + b\tilde{w}) = \phi(\widetilde{av + bw}) \overset{\phi \text{ linear}}{=} a\widetilde{\phi(v)} + b\widetilde{\phi(w)} = a\tilde{\phi}(\tilde{v}) + b\tilde{\phi}(\tilde{w}).$$

Injektivität: Seien $\tilde{v}, \tilde{w} \in V/U$ mit $\tilde{\phi}(\tilde{v}) = \tilde{\phi}(\tilde{w})$. Dann folgt $\widetilde{\phi(v)} = \widetilde{\phi(w)}$, also $\phi(v) = \phi(w) + u$ mit einem $u \in U$. Da $\phi(U) = U$ gilt, gibt es ein $u' \in U$ mit $\phi(u') = u$, so dass wir zusammen folgern

$$\phi(v) = \phi(w) + u = \phi(w) + \phi(u') \overset{\phi \text{ linear}}{=} \phi(w + u') \overset{\phi \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} v = w + u' \implies \tilde{v} = \tilde{w}.$$

Surjektivität: Sei $\tilde{w} \in V/U$. Da ϕ surjektiv ist, gibt es ein $v \in V$ mit $\phi(v) = w$. Wir behaupten, dass dann $\tilde{\phi}(\tilde{v}) = \tilde{w}$ gilt, was die Surjektivität zeigt. Tatsächlich ist

$$\tilde{\phi}(\tilde{v}) = \widetilde{\phi(v)} = \tilde{w}.$$

5. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten jeweils für die richtige Antwort einen Punkt und für die richtige Begründung drei Punkte.

(a) Seien $f : X \to Y$ eine Funktion und $A, B \subseteq X$. Dann gilt $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

(b) $G = (\mathcal{P}(\{0,1\}), \cup)$ ist eine abelsche Gruppe.

(c) Die Relation R auf $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ gegeben durch

$$(a,b)R(c,d) :\iff ad = bc$$

ist eine Äquivalenzrelation.

(d) Sei K ein Körper und seien $\varphi\colon K \to K$ und $\psi\colon K \to K$ lineare Abbildungen. Dann ist auch

$$\varphi \cdot \psi\colon \begin{cases} K \to K \\ x \mapsto \varphi(x) \cdot \psi(x) \end{cases}$$

linear.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch. Im Allgemeinen gilt $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$. Beispiel:

$$f\colon \begin{cases} \{0,1\} \to \{0\} \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$f(\{0\} \cap \{1\}) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{0\} = f(\{0\}) \cap f(\{1\}).$$

(b) Die Aussage ist falsch. Zwar ist G assoziativ mit neutralem Element $\emptyset$, allerdings hat kein Element außer $\emptyset$ selbst ein Inverses: Dieses müsste für $A \in G$ der Bedingung $A \cup A^\sharp = \emptyset$ genügen, woraus bereits $A = A^\sharp = \emptyset$ folgt.

(c) Die Aussage ist wahr. Seien $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Die Relation ist reflexiv, denn

$$(a,b)R(a,b) \iff ab = ab.$$

Sie ist symmetrisch, denn

$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc \iff cb = da \iff (c,d)R(a,b).$$

Sie ist transitiv, denn aus $(a,b)R(c,d)$ und $(c,d)R(e,f)$ folgt $ad = bc$ und $cf = de$. Da $f \neq 0$ gilt, erhalten wir aus der zweiten Gleichung $c = \frac{de}{f}$, was wir in die erste Gleichung einsetzen. Damit erhalten wir

$$ad = \frac{bde}{f} \overset{d\neq 0}{\implies} a = \frac{be}{f} \implies af = be \implies (a,b)R(e,f).$$

(d) Die Aussage ist falsch. Für $K = \mathbb{R}$ und $\varphi = \psi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ folgt beispielsweise

$$(\varphi \cdot \psi)(2 \cdot 1) = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2 = 2 \cdot (\varphi \cdot \psi)(1).$$

6. Aufgabe (18 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.
Eine korrekte Antwort gibt zwei Punkte, eine leere Zeile gibt einen Punkt und eine falsche Antwort gibt 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie deutlich, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

wahr	falsch	
☐	☐	$\mathbb{Z}_{77}$ ist ein Körper.
☐	☐	Seien V ein K-Vektorraum und $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist $\{2v_1 + v_2, -v_1 + v_2, v_1 + v_2\}$ linear abhängig.
☐	☐	Es gibt einen Gruppenisomorphismus zwischen $G_1 = (\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ und $G_2 = (\mathbb{Z}_4, +)$.
☐	☐	Seien V, W zwei Vektorräume. Es gibt genau dann einen Isomorphismus $\phi : V \to W$, wenn $\dim V = \dim W$.
☐	☐	Wenn das Skalarprodukt $(a \mid b) = 0$ ist, sind a und b linear abhängig.
☐	☐	Jedes Minimum einer Menge M ist auch ein Infimum von M.
☐	☐	Auf $\mathbb{R}^3$ wird durch $(x \mid y) = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ ein Skalarprodukt definiert.
☐	☐	Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt $(AB)^T = A^T B^T$.
☐	☐	Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\left\lvert \frac{z}{\lvert z\rvert} \right\rvert = 1$.

Lösung:

wahr	falsch	
☐	☒	$\mathbb{Z}_{77}$ ist ein Körper.
☒	☐	Seien V ein K-Vektorraum und $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist $\{2v_1 + v_2, -v_1 + v_2, v_1 + v_2\}$ linear abhängig.
☒	☐	Es gibt einen Gruppenisomorphismus zwischen $G_1 = (\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ und $G_2 = (\mathbb{Z}_4, +)$.
☐	☒	Seien V, W zwei Vektorräume. Es gibt genau dann einen Isomorphismus $\phi : V \to W$, wenn $\dim V = \dim W$.
☐	☒	Wenn das Skalarprodukt $(a \mid b) = 0$ ist, sind a und b linear abhängig.
☒	☐	Jedes Minimum einer Menge M ist auch ein Infimum von M.
☐	☒	Auf $\mathbb{R}^3$ wird durch $(x \mid y) = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ ein Skalarprodukt definiert.
☐	☒	Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt $(AB)^T = A^T B^T$.
☒	☐	Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\left\lvert \frac{z}{\lvert z\rvert} \right\rvert = 1$.