

# DT-Projekt1

7/7

In dieser Aufgabe untersuchen Sie mögliche Zahlendarstellungen der gemeldeten COVID-19 Impfungen.

Am 26.10.2021 gab es deutschlandweit 55 158 070 gemeldete vollständige Impfungen.

a) Geben Sie eine allgemein gültige Formel an, welche die minimale Bitbreite  $z$  ausgibt, die zur Darstellung der Dezimalzahl  $x$  benötigt wird. Es wird also eine Gleichung der Form  $z = \dots$  gesucht.

Hinweis: Verwenden Sie die Notation  $\lceil n \rceil$ , um  $n$  auf die nächste ganze Zahl aufzurunden (z.B.  $\lceil 23e \rceil = 24$ ). (1PP)

$$z = \lceil \log_2(x + 1) \rceil$$

117

b) Wie viele Bits werden benötigt, um die oben genannte Anzahl vollständiger Impfungen im Binärsystem darzustellen? Verwenden Sie zur Berechnung Ihre in a) hergeleitete Formel. (0,5 PP)

$$z = \lceil \log_2(55,158,070 + 1) \rceil$$

$$z = \lceil \log_2(55,158,071) \rceil$$

$$z = \lceil 25.717068668 \rceil$$

$$z = 26$$

0,5/0,5

c) Um die Anzahl der benötigten Stellen zur Repräsentation der Anzahl vollständiger Impfungen zu verringern, sollen die Zahlen im 7er-Zahlensystem dargestellt werden. Berechnen Sie die benötigte Anzahl an Stellen für die Repräsentation der oben genannten Anzahl vollständig geimpfter Personen im 7er-Zahlensystem. Geben Sie anschließend die oben genannte Anzahl vollständig geimpfter Personen im 7er-Zahlensystem an. (2 PP)

$$7^0 = 1$$

$$7^1 = 7$$

$$7^2 = 49$$

$$7^3 = 343$$

$$7^4 = 2401$$

$$7^5 = 16,807$$

$$7^6 = 117,649$$

$$7^7 = 823,543$$

$$7^8 = 5,764,801$$

$$7^9 = 40,353,607$$

$$7^{10} = 282,475,249$$

$7^{10} > 55,158,070 \Rightarrow$  man kann diese Zahl mit 10 Stellen im 7er System schreiben

2/2

$$(1 * 7^9 + 2 * 7^8 + 3 * 7^7 + 6 * 7^6 + 5 * 7^5 + 5 * 7^4 + 6 * 7^3 + 4 * 7^2 + 6 * 7^1 + 2 * 7^0)_{10}$$

$$= (1236556462)_7$$

d) Wie viele vollständige Impfungen liegen in einer Woche vor, wenn jeden Tag 96 472 Impfdosen verabreicht werden, wovon 53 693 Erstimpfungen 3 sind? Führen Sie alle Rechnungen im 7er-Zahlensystem durch. Konvertieren Sie dafür zunächst alle benötigten Zahlen in das 7er-Zahlensystem. (3,5 PP)

$$(96472)_{10} = (5 \cdot 7^5 + 5 \cdot 7^4 + 1 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0)_{10} = (551155)_7$$

$$(53693)_{10} = (3 \cdot 7^5 + 1 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0)_{10} = (312353)_7$$

Ab jetzt sind alle Rechnungen im 7er System, weshalb auf die 7 bei  $x_7$  verzichtet wird.

$$\begin{array}{r} 551155 \\ -312353 \\ \hline \end{array}$$

$$235502$$

Als nächstes müssen wir mit  $7_{10}$  multiplizieren, also  $(10)_7$ , was wie bei jeder Multiplikation mit dem Wert der Basis ein Anhängen einer 0 rechts von der Ursprungszahl bedeutet.

Alternativ ist ein weiterer Weg die Addition:

$$\begin{array}{r} 235502 \\ +235502 \\ \hline 504304 \end{array}$$

Womit wir den Wert für 2 Tage haben.

$$\begin{array}{r} 504304 \\ +504304 \\ \hline 1311611 \end{array}$$

Der Wert für 4 Tage.

$$\begin{array}{r} 1311611 \\ +504304 \\ \hline 2116215 \end{array}$$

Der Wert für 6 Tage.

$$\begin{array}{r} 2116215 \\ +235502 \\ \hline 2355020 \end{array}$$

$$2355020 = 10 \cdot 235502$$

3,5 13,5

Der Wert für  $(10)_7$  Tage

Um die Datenraten bei der Übertragung aktualisierter Impfungen an unser Einlasssystem möglichst gering halten zu können, wird lediglich die Gesamtzahl neuer verabreichter Impfdosen und die Anzahl an Erstimpfungen übertragen. Zur Vermeidung von Übertragungsfehlern soll eine Längs- und Querparität verwendet werden.

Dem Einlasssystem wurden 93 185 insgesamt verabreichte Impfdosen und 57 849 Erstimpfungen übermittelt. Tragen Sie die Binärdarstellung der insgesamt verabreichten Impfdosen in die erste Zeile in folgender Tabelle ein und die Binärdarstellung der Erstimpfungen in die zweite Zeile. Die empfangenen Längs- und Querparitätsbits sind jeweils in der unteren Zeile und der rechten Spalte eingetragen. Lag ein Übertragungsfehler vor? Wenn ja, markieren Sie das betroffene Bit und nennen Sie die korrekte Dezimalzahl.

7.2 2,5 12,5

1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	✓
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	X
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	-	-
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-	-

Es liegt ein Übertragungsfehler im 7. Bit der Erstimpfungszahl vor:

$$57849_{10} = 1110000111111001_2 \neq 1110000110111001_2 = 57785_{10}$$

Es ist möglich, dass es noch weitere Übertragungsfehler gibt, die durch einfache Längs- und Querparitätsbits nicht erkannt werden können. Wenn bspw. die letzten beiden Bits von beiden Zahlen falsch wären, also vor der Übertragung ...10 und nicht wie jetzt ...01 waren, dann kann man dies nicht erkennen.

In dieser Aufgabe erstellen Sie einen Dekodierer für ein Display zur Darstellung von Dezimalzahlen. Der studentische Filmkreis der TU Darmstadt denkt allerdings auch weiter in die Zukunft und möchte das Display des Einlasssystems nach der Pandemie zur Anzeige von Filmtiteln verwenden. Da eine übliche 7-Segmentanzeige nur mit Einschränkungen Buchstaben anzeigen kann, kommt eine 16-Segmentanzeige (vgl. Abbildung 1) zum Einsatz.

a) Folgende Tabelle gibt an, welche Segmente bei welcher Ziffer beleuchtet sind. Eine Ziffer wird mit  $x_0 \times 1 \times 2 \times 3$  binär kodiert. Vervollständigen Sie die Tabelle, indem Sie sich an den Segmentnamen und Zuweisungen in Abbildung 1 orientieren. (2,5 PP)

Ziffer	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g_1$	$g_2$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$	$dp$	$dk$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

b) Geben Sie zu den Segmenten c, d, e, f und g 1 die zugehörige vollständige disjunktive Normalform (DNF) oder konjunktive Normalform (KNF) an, je nachdem welche weniger Minterme bzw. Maxterme benötigt. Sofern gleich viele Minterme/Maxterme benötigt werden, geben Sie die DNF an. (2,5 PP)

$$c = x_0 + x_1 + \bar{x}_2 + x_3$$

$$d = (x_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

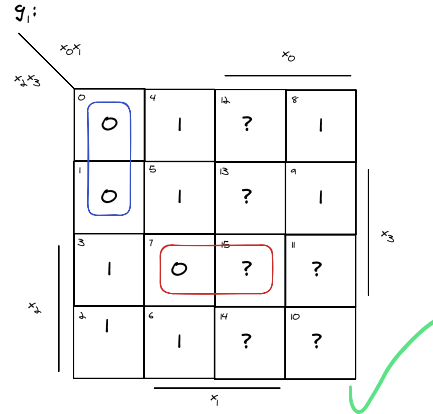
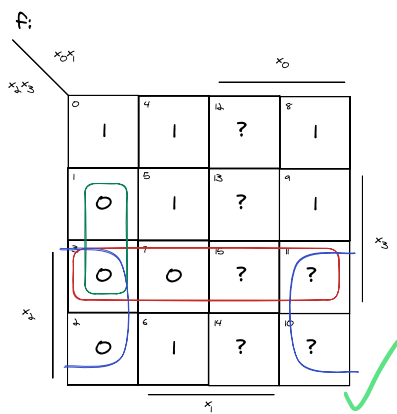
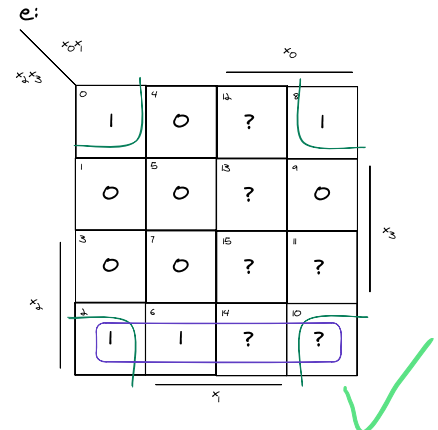
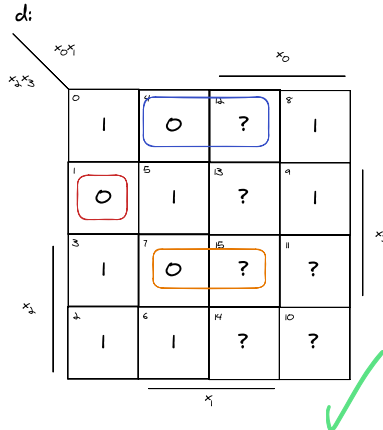
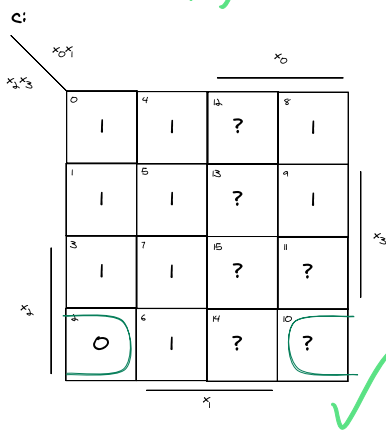
$$e = \bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$f = (x_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_0 + x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (x_0 + x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

$$g_1 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

c) Die aus Teilaufgabe b) resultierenden DNFs und KNFs können noch weiter vereinfacht werden. Nutzen Sie Karnaugh Diagramme um die DNFs bzw. KNFs zu minimieren. Betrachten Sie nicht verwendete Kodierungen (10 -15) als "Don't Cares". Verwenden Sie das folgende dargestellte Karnaugh Diagramm. (2,5 PP)

215/12,5



$$\bar{c} = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$c = x_1 + \bar{x}_2 + x_3$$

$$\bar{d} = x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_0 \bar{x}_1 + x_2 x_3 x_1$$

$$d = (\bar{x}_1 + x_3 + x_2) \cdot (\bar{x}_3 + x_2 + x_0 + x_1) \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_1)$$

$$e = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{f} = \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_0 \bar{x}_1 x_3 + x_2 x_3$$

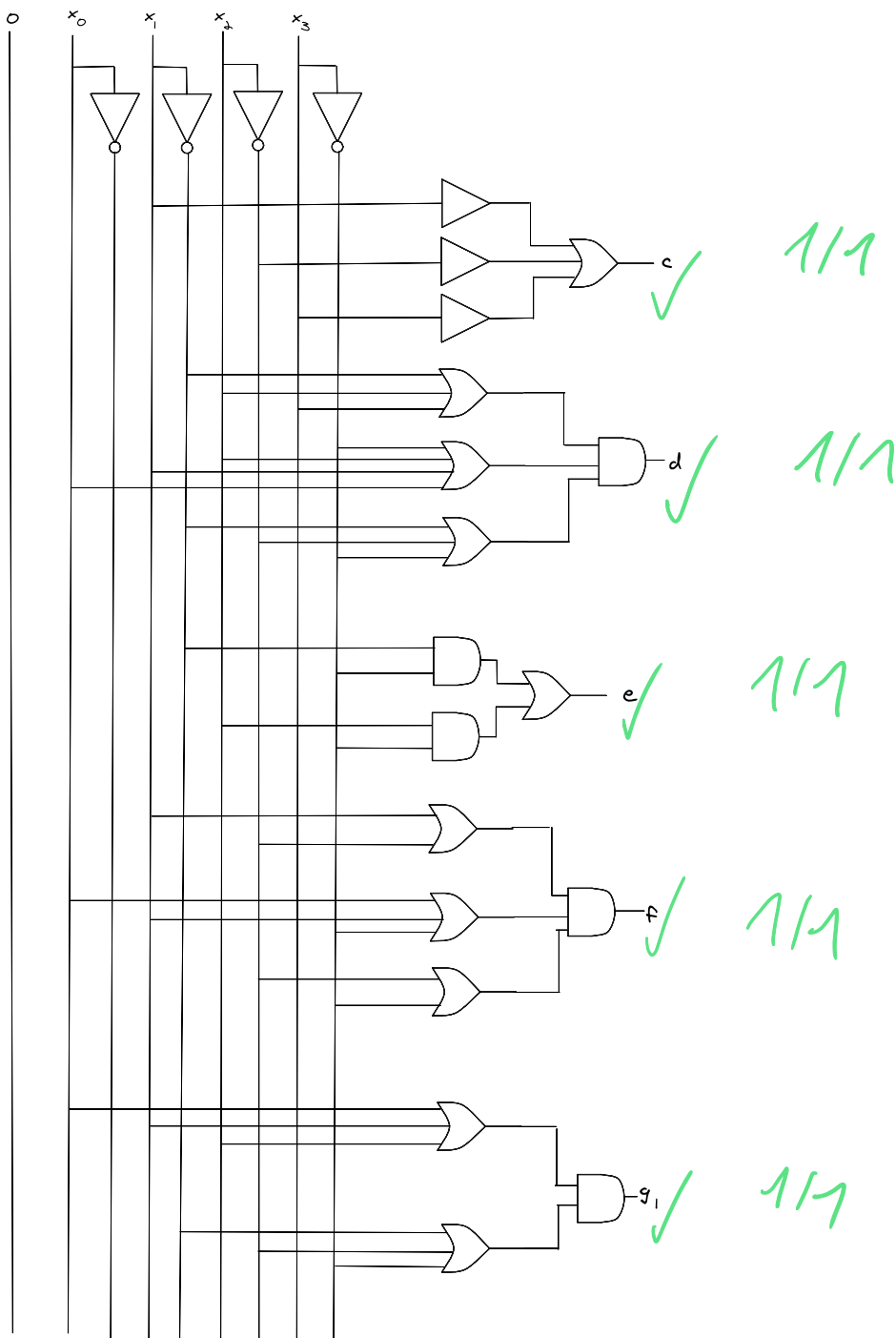
$$f = (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (x_0 + x_1 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

$$\bar{g}_1 = \bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 x_3$$

$$g_1 = (x_0 + x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

d) Vervollständigen Sie die Schaltung für einen Dekodierer der 16-Segmentanzeige. Realisieren Sie dafür die minimierten Ausdrücke aus Teilaufgabe c) mit zweistufiger Logik. Sollte ein Segment in einer der beiden Stufen kein Gatter benötigen, verwenden Sie jeweils einen Buffer als Ersatz. Der Eingang 0 ist eine konstante Null. Hinweis: Sie müssen nur die Schaltung für die Segmente c, d, e, f und g 1 zeichnen. Die Segmente a und b müssen Sie nicht kopieren. (5 PP)

5/5



7.3 12,5/12,5

Ein Student des studentischen Filmkreises, der die Vorlesung Digitaltechnik nicht besucht hat, stellt sich die Frage, wie man den Dekodierer erweitern kann, sodass neben den 10 Ziffern auch alle 26 Großbuchstaben des Alphabets auf der Anzeige dargestellt werden können. Dabei stellt er fest, dass 6 Bits  $x_0, \dots, x_5$  zur Kodierung der insgesamt 36 Zeichen benötigt werden, wobei 0 die Zahl Null, 10 den Buchstaben A und 35 den Buchstaben Z kodiert.

a) Nach langen Untersuchungen eines einzelnen Segmentes hat der Student den unten stehenden Ausdruck  $F$  abgeleitet. Vereinfachen Sie  $F$  mit Hilfe der Rechenregeln der boole'schen Algebra zu einer minimalen Summe von Implikanten. Geben Sie für jeden Rechenschritt den Namen des verwendeten Axioms oder Theorems an (Sie können auch die in der Vorlesung eingeführten Abkürzungen verwenden, z.B. T9). (6 PP)

Hinweis: Der minimale Ausdruck besteht aus 4 Implikanten. Sie dürfen die Terme einzeln vereinfachen, sofern Sie diese zum Schluss wieder zusammenfügen.

$$F = \overline{x_1((\bar{x}_3 + \bar{x}_5) + x_3x_4x_5)x_2x_4} + x_0(x_1x_2\bar{x}_5 + x_4x_5 + x_1x_2x_4 + \bar{x}_4x_5) + x_1 + (x_2 + x_3 + x_4)\overline{\bar{x}_2x_3\bar{x}_4} + x_3 + x_5$$

Seien  $A, B, C$  Hilfsausdrücke für die bessere Übersicht mit folgendem Inhalt:

$$A = \overline{x_1((\bar{x}_3 + \bar{x}_5) + x_3x_4x_5)x_2x_4}$$

$$B = x_0(x_1x_2\bar{x}_5 + x_4x_5 + x_1x_2x_4 + \bar{x}_4x_5)$$

$$C = \overline{x_1 + (x_2 + x_3 + x_4)\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_3 + x_5}$$

$$F = A + B + C$$

$$A = \overline{x_1((\bar{x}_3 + \bar{x}_5) + x_3x_4x_5)x_2x_4}$$

$$\stackrel{T12'}{=} x_1((\bar{x}_3\bar{x}_5) + x_3x_4x_5)x_2x_4 \quad \checkmark$$

$$\stackrel{T4}{=} x_1((x_3x_5) + x_3x_4x_5)x_2x_4$$

$$\stackrel{T8'}{=} x_1((x_3 + x_3x_4x_5) \cdot (x_5 + x_3x_4x_5))x_2x_4 \quad \checkmark$$

$$\stackrel{T9'}{=} x_1((x_3) \cdot (x_5))x_2x_4 \quad \checkmark$$

$$\stackrel{T7}{=} x_1x_3x_5x_2x_4$$

$$\stackrel{T6}{=} x_1x_2x_3x_4x_5$$

$$A = x_1x_2x_3x_4x_5$$

$$B = x_0(x_1x_2\bar{x}_5 + x_4x_5 + x_1x_2x_4 + \bar{x}_4x_5)$$

$$\stackrel{T10}{=} x_0(x_1x_2\bar{x}_5 + x_5 + x_1x_2x_4)$$

$$\stackrel{T9'}{=} x_0(x_1x_2\bar{x}_5 + x_1x_2x_5 + x_5 + x_1x_2x_4) \quad \checkmark$$

$$\stackrel{T8}{=} x_0(x_1x_2(\bar{x}_5 + x_5 + x_4) + x_5) \quad \checkmark$$

$$\stackrel{T5'}{=} x_0(x_1x_2(1 + x_4) + x_5)$$

$$\stackrel{T2'}{=} x_0(x_1x_2(1) + x_5)$$

$$\stackrel{T1}{=} x_0(x_1x_2 + x_5)$$

$$\stackrel{T8}{=} x_0x_1x_2 + x_0x_5 \quad \checkmark$$

$$B = x_0x_1x_2 + x_0x_5$$

$$C = \overline{x_1 + (x_2 + x_3 + x_4)\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_3 + x_5}$$

$$\stackrel{T12}{=} \overline{x_1 + (x_2 + x_3 + x_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) + x_3 + x_5}$$

$$\stackrel{T4}{=} \overline{x_1 + (x_2 + x_3 + x_4)(x_2 + \bar{x}_3 + x_4) + x_3 + x_5}$$

$$\stackrel{T8}{=} \overline{x_1 + x_2(x_2 + \bar{x}_3 + x_4) + x_3(x_2 + \bar{x}_3 + x_4) + x_4(x_2 + \bar{x}_3 + x_4) + x_3 + x_5} \quad \checkmark$$

$$\stackrel{T8}{=} \overline{x_1 + x_2x_2 + x_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + x_3x_2 + x_3\bar{x}_3 + x_3x_4 + x_4x_2 + x_4\bar{x}_3 + x_4x_4 + x_3 + x_5} \quad \checkmark$$

$$\stackrel{T3}{=} \overline{x_1 + x_2 + x_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + x_3x_2 + x_3\bar{x}_3 + x_3x_4 + x_4x_2 + x_4\bar{x}_3 + x_4 + x_3 + x_5}$$

$$\begin{aligned}
T5 &= x_1 + x_2 + x_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + x_3x_2 + 0 + x_3x_4 + x_4x_2 + x_4\bar{x}_3 + x_4 + x_3 + x_5 \\
T1' &= x_1 + x_2 + x_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + x_3x_2 + x_3x_4 + x_4x_2 + x_4\bar{x}_3 + x_4 + x_3 + x_5 \\
T6 &= x_1 + x_2 + x_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 + \bar{x}_3x_4 + x_4 + x_3 + x_5 \\
T6' &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 + \bar{x}_3x_4 \\
T1 &= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 1 + x_5 \cdot 1 + x_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 + \bar{x}_3x_4 \\
T8 &= x_1 + x_2 \cdot (1 + \bar{x}_3 + x_4 + x_3 + x_4) + x_3 + x_4 \cdot (1 + x_3 + \bar{x}_3) + x_5 \quad \checkmark \\
T2' &= x_1 + x_2 \cdot 1 + x_3 + x_4 \cdot 1 + x_5 \\
T1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
T12' &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$$F = x_1x_2x_3x_4x_5 + x_0x_1x_2 + x_0x_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \quad \checkmark \quad 2/2$$

6/6

b) Leider hat der Student am nächsten Tag vergessen, welches Segment er untersucht hat. Analysieren Sie zunächst, für welche Zeichen (0 bis 9 und A bis Z) der Term F aus Teilaufgabe a) wahr wird und zählen Sie diese auf. Überprüfen Sie dann, welches Segment (vgl. Abbildung 1) der Term F aus Teilaufgabe a) beschreibt und nennen Sie dieses. (2 PP)

Hinweis: Sie können die Segmente einzelner Zeichen unter <https://aresluna.org/segmented-type/> anzeigen. Der Term wird für 0, V, W, X und Z wahr und beschreibt damit das Segment k.

✓✓✓✓✓

✓

2/2

7.9 8/8

7.1 7/7  
 7.2 2,5/2,5  
 7.3 12,5/12,5  
 7.4 8/8  
 30/30 😊