Digitaltechnik
Wintersemester 2021/2022
4. Vorlesung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Erste Überlegungen zu eventueller DT Hybrid-Vorlesung (Folie von letzter Woche)

- Aktuelle Regelungen erlauben prinzipiell hybride Vorlesung: Mi, 9:50 - 11:30 Uhr am Innenstadtcampus
- Max. 50% Hörsaalbelegung im Schachbrettmuster unter 3G Bedingungen
- Erlaubt deutlich bessere Interaktion zwischen Dozent und Studierenden im Hörsaal als Online
- Vorlesung würde aufgezeichnet (wie bisher)
- Asynchrone Fragen zur Vorlesung via Moodle (wie bisher)
- Änderungen:
  - Falls LAN stabil würden wir versuchen, weiterhin live zu streamen mit Online Fragen im Chat (ohne Garantie)
  - Falls Regelungen es nicht mehr erlauben, würden wir wieder auf DT Online-Vorlesung wechseln

Umfrage: Wer von Ihnen hätte Stand JETZT prinzipiell Interesse an einer DT Hybrid-Vorlesung und würde in den Hörsaal kommen?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Umfrage

Inhalt

1. Einleitung
2. Kombinatorische Logik
3. Boole'sche Gleichungen
4. Boole'sche Algebra
5. Zusammenfassung

Anwendungs-software	>"hello world!"	Programme
Betriebs-systeme		Gerätetreiber
Architektur		Befehle Register
Mikro-architektur		Datenpfade Steuerung
Logik	+	Addierer Speicher
Digital-schaltungen		UND Gatter Inverter
Analog-schaltungen	+	Verstärker Filter
Bauteile		Transistoren Dioden
Physik		Elektronen

Agenda

1. Einleitung
2. Kombinatorische Logik
3. Boole'sche Gleichungen
4. Boole'sche Algebra
5. Zusammenfassung

Anwendungs-software	>"hello world!"	Programme
Betriebs-systeme		Gerätetreiber
Architektur		Befehle Register
Mikro-architektur		Datenpfade Steuerung
Logik	+	Addierer Speicher
Digital-schaltungen		UND Gatter Inverter
Analog-schaltungen	+	Verstärker Filter
Bauteile		Transistoren Dioden
Physik		Elektronen

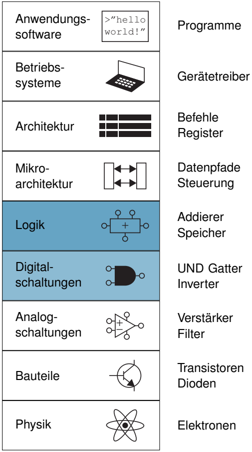
Überblick der heutigen Vorlesung

- Kombinatorische Logik
  - Boole'sche Gleichungen
  - Boole'sche Algebra

Harris 2013/2016
Kap. 2.1 - 2.3

Agenda

1. Einleitung
2. Kombinatorische Logik
3. Boole'sche Gleichungen
4. Boole'sche Algebra
5. Zusammenfassung

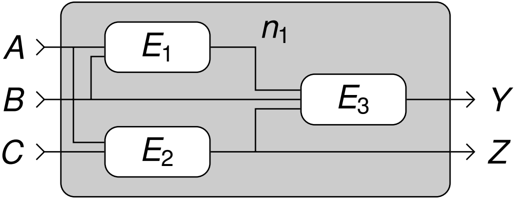


Abstrakte Eigenschaften *logischer* Schaltungen

- Eingänge
- Ausgänge
- Spezifikation des Funktionalen Verhaltens = realisierte (boole'sche) Funktion
- Spezifikation des Zeitverhaltens

Komponenten einer *logischen* Schaltung

- Verbindungsknoten
  - Eingangs-Terminale: A, B, C
  - Ausgangs-Terminale: Y, Z
  - Interne Knoten: n_1
- Schaltungselemente
  - E_1, E_2, E_3
  - jedes selbst eine Schaltung $\rightarrow$ Hierarchie



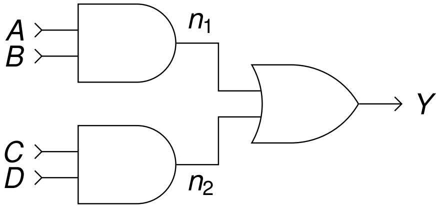
Arten von *logischen* Schaltungen

- kombinatorische Logik ("Schaltnetz")
  - Ausgänge hängen nur von *aktuellen* Eingangswerten ab

- sequentielle Logik ("Schaltwerk")
  - Ausgänge hängen von aktuellen Eingangswerten und **internem** Zustand ab
  - ⇒ Ausgänge indirekt abhängig von *vorherigen* Eingangswerten

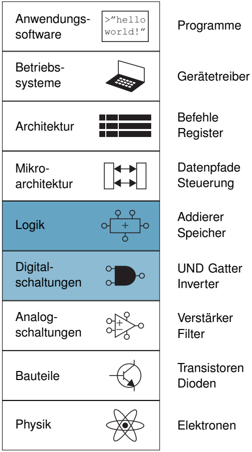
Eigenschaften kombinatorischer Logik

- jedes Schaltungselement ist selbst kombinatorisch
- jeder Verbindungsknoten ist
  - Eingang in die Schaltung, oder
  - an *genau ein* Ausgangsterminal ("Treiber") eines Schaltungselements angeschlossen
- jeder Pfad durch die Schaltung besucht jeden Verbindungsknoten maximal einmal (*zyklenfrei*)



Agenda

1. Einleitung
2. Kombinatorische Logik
3. Boole’sche Gleichungen
4. Boole’sche Algebra
5. Zusammenfassung



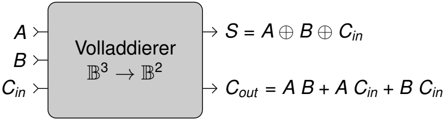
Boole’sche Gleichungen LQ2-1

- beschreiben Ausgänge einer kombinatorischen Schaltung als (boole’sche) Funktion der Eingänge

⇒ Spezifikation des funktionalen Verhaltens (ohne zeitliche Information)

- unter Verwendung elementarer boole’scher Operatoren (sortiert nach *Operatorpräzedenz*):
  - NOT: $\overline{A}$
  - AND: $A\,B = A \cdot B$
  - XOR: $A \oplus B$
  - OR: $A + B$

- Beispiel: Volladdierer
  - $S = F_1 : (A, B, C_{in}) \in \mathbb{B}^3 \mapsto \mathbb{B}$
  - $C_{out} = F_2 : (A, B, C_{in}) \in \mathbb{B}^3 \mapsto \mathbb{B}$



Grundlegende Definitionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Komplement: boole'sche Variable mit einem Balken (invertiert)
$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

Literal: Variable oder ihr Komplement
$A, \overline{A}, B, \overline{B}, C, \overline{C}$

Implikant: Produkt von Literalen
$ABC, A\overline{C}, BC$

Minterm: Produkt (UND, Konjunktion) über <u>alle</u> Eingangsvariablen
$ABC, AB\overline{C}, \overline{A}BC$

Maxterm: Summe (ODER, Disjunktion) über <u>alle</u> Eingangsvariablen
$(A + \overline{B} + \overline{C}), (A + B + \overline{C}), (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

Minterm LQ2-2 RQ2-2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Produkt (Implikant), das jede Eingangsvariable *genau einmal* enthält
- entspricht einer Zeile in Wahrheitswertetabelle
- jeder Minterm wird für *genau eine* Eingangskombination ***wahr*** (unabhängig von Ergebnisspalte)

A	B	Y	Minterm
0	0	0	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}$
0	1	1	$m_1 = \overline{A}\,B$
1	0	1	$m_2 = A\,\overline{B}$
1	1	0	$m_3 = A\,B$

Disjunktive Normalform (DNF) = Sum-of-products (SOP)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Summe aller Minterme, für welche die Funktion *wahr* ist

$\Rightarrow$ jede boole'sche Funktion hat *genau eine* DNF (abgesehen von Kommutation)

- Im Beispiel: $Y = m_1 + m_2 = \overline{A}\,B + A\,\overline{B}$

$\Rightarrow$ $A \oplus B$ nur kompakte Schreibweise für $\overline{A}\,B + A\,\overline{B}$

A	B	Y	Minterm
0	0	0	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}$
0	1	1	$m_1 = \overline{A}\,B$
1	0	1	$m_2 = A\,\overline{B}$
1	1	0	$m_3 = A\,B$

Maxterm LQ2-2 RQ2-2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Summe, welche jede Eingangsvariable *genau einmal* enthält
- entspricht einer Zeile in Wahrheitswertetabelle
- jeder Maxterm wird für *genau eine* Eingangskombination ***falsch*** (unabhängig von Ergebnisspalte)

A	B	Y	Maxterm
0	0	0	$M_0 = A + B$
0	1	1	$M_1 = A + \overline{B}$
1	0	1	$M_2 = \overline{A} + B$
1	1	0	$M_3 = \overline{A} + \overline{B}$

Konjunktive Normalform (KNF) = Product-of-sums (POS)

- Produkt aller Maxterme, für welche die Funktion *falsch* ist

⇒ jede boole'sche Funktion hat *genau eine* KNF (abgesehen von Kommutation)

- Im Beispiel: $Y = M_0 \; M_3 = (A + B) \; (\overline{A} + \overline{B})$

⇒ $A \oplus B$ nur kompakte Schreibweise für $(A + B) \; (\overline{A} + \overline{B})$

A	B	Y	Maxterm
0	0	0	$M_0 = A + B$
0	1	1	$M_1 = A + \overline{B}$
1	0	1	$M_2 = \overline{A} + B$
1	1	0	$M_3 = \overline{A} + \overline{B}$

Agenda

1. Einleitung
2. Kombinatorische Logik
3. Boole’sche Gleichungen
4. **Boole’sche Algebra**
5. Zusammenfassung

Anwendungs-software (>”hello world!”)	Programme
Betriebs-systeme	Gerätetreiber
Architektur	Befehle Register
Mikro-architektur	Datenpfade Steuerung
Logik	Addierer Speicher
Digital-schaltungen	UND Gatter Inverter
Analog-schaltungen	Verstärker Filter
Bauteile	Transistoren Dioden
Physik	Elektronen

Boole'sche Algebra LQ3-1

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechenregeln boole'scher Gleichungen
  - Axiome: grundlegende Annahmen der Algebra (nicht beweisbar)
  - Theoreme: komplexere Regeln, die sich aus Axiomen ergeben (beweisbar)
- analog zur Algebra auf natürlichen Zahlen
- ergänzt um Optimierungen durch Begrenzung auf $\mathbb{B}$
- Axiome und Theoreme haben jeweils duale Entsprechung: AND $\leftrightarrow$ OR, 0 $\leftrightarrow$ 1

Axiome der boole'schen Algebra

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

(Dualität: AND $\leftrightarrow$ OR, 0 $\leftrightarrow$ 1)

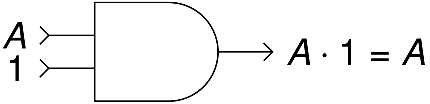
	Axiom		Duales Axiom	Bedeutung
A1	$B \neq 1 \Rightarrow B = 0$	A1'	$B \neq 0 \Rightarrow B = 1$	Dualität
A2	$\overline{0} = 1$	A2'	$\overline{1} = 0$	Negieren
A3	$0 \cdot 0 = 0$	A3'	$1 + 1 = 1$	Und / Oder
A4	$1 \cdot 1 = 1$	A4'	$0 + 0 = 0$	Und / Oder
A5	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	A5'	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	Und / Oder

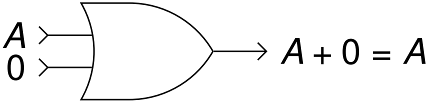
Theoreme der boole'schen Algebra

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

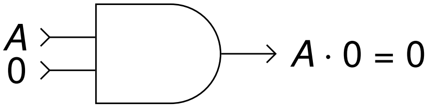
	Theorem		Duales Theorem	Bedeutung
T1	$A \cdot 1 = A$	T1'	$A + 0 = A$	Neutralität
T2	$A \cdot 0 = 0$	T2'	$A + 1 = 1$	Extremum
T3	$A \cdot A = A$	T3'	$A + A = A$	Idempotenz
T4	$\overline{\overline{A}} = A$			Involution
T5	$A \cdot \overline{A} = 0$	T5'	$A + \overline{A} = 1$	Komplement
T6	$A \cdot B = B \cdot A$	T6'	$A + B = B + A$	Kommutativität
T7	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	T7'	$A + (B + C) = (A + B) + C$	Assoziativität
T8	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$	T8'	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	Distributivität
T9	$A \cdot (A + B) = A$	T9'	$A + (A \cdot B) = A$	Absorption
T10	$(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$	T10'	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	Zusammenfassen
T11	$(A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C) + (B \cdot C) =$ $(A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C)$	T11'	$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) =$ $(A + B) \cdot (\overline{A} + C)$	Konsensus
T12	$\overline{A \cdot B \cdot C \ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \ldots$	T12'	$\overline{A + B + C \ldots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \ldots$	De Morgan

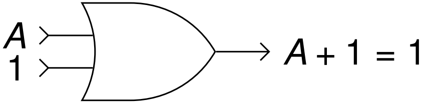
T1: Neutralität von 1 und 0



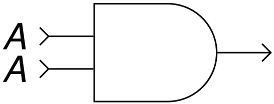


T2: Extremum von 0 und 1

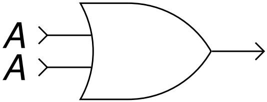




T3: Idempotenz

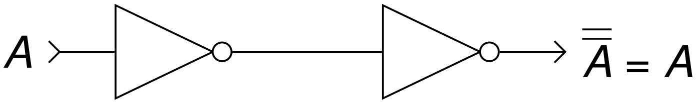


$A \cdot A = A$

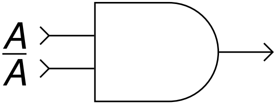


$A + A = A$

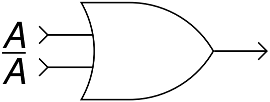
T4: Involution



T5: Komplement

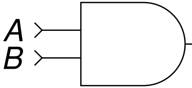


$$A \cdot \overline{A} = 0$$

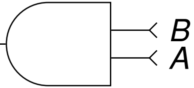


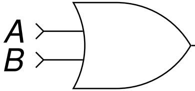
$$A + \overline{A} = 1$$

T6: Kommutativität

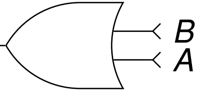


$$A \cdot B = B \cdot A$$

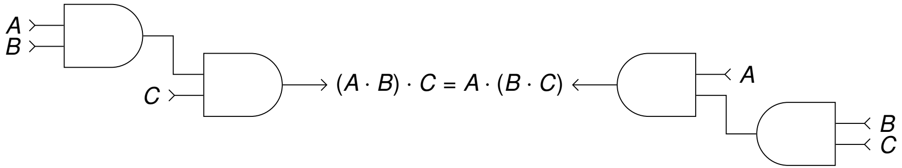


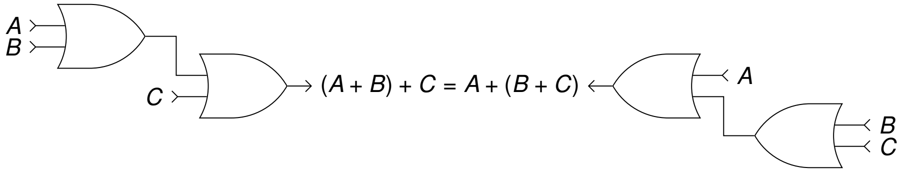


$$A + B = B + A$$

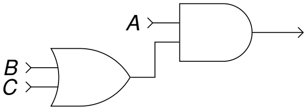


T7: Assoziativität

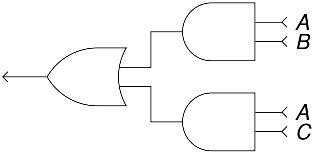


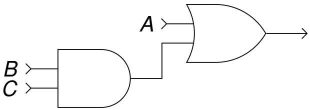


T8: Distributivität

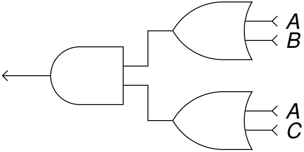


$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$



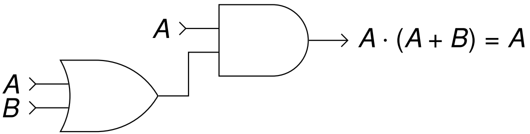


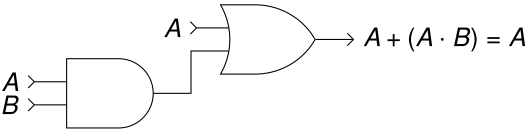
$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$



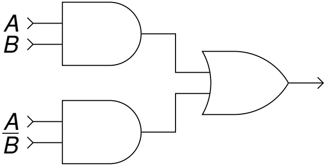
!!! Letzteres gilt **NICHT über den ganzen Zahlen**, aber in boole'scher Algebra !!!

T9: Absorption

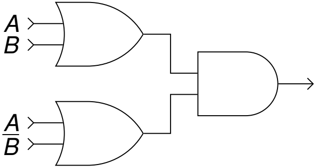




T10: Zusammenfassen

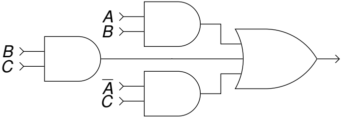


$(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$

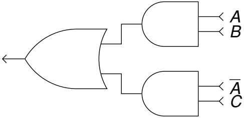


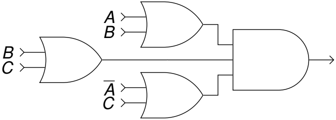
$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

T11: Konsensus

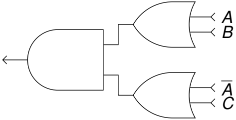


$$(A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C)$$

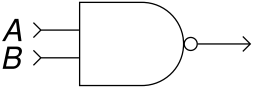




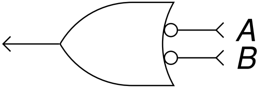
$$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) = (A + B) \cdot (\overline{A} + C)$$

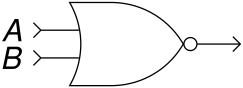


T12: De Morgan

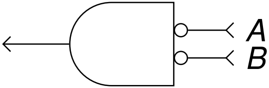


$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$





$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$



Augustus De Morgan, 1806 - 1871

- erster Präsident der London Mathematical Society
- Lehrer von Ada Lovelace
- De Morgan'sche Regeln:
  - Das Komplement des Produkts ist die Summe der Komplemente.
  - Das Komplement der Summe ist das Produkt der Komplemente.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Umfrage

Beweis für Theoreme

- Methode 1: Überprüfen aller Möglichkeiten
- Methode 2: Gleichung durch Axiome und andere Theoreme vereinfachen

Beweis für Distributivität (T8) durch Überprüfen aller Möglichkeiten

A	B	C	$B + C$	$A\,(B + C)$	$A\,B$	$A\,C$	$A\,B + A\,C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Beweis für Absorption (T9) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen

$A \cdot (A + B)$	Distributivität
$= A \cdot A + A \cdot B$	Idempotenz
$= A + A \cdot B$	Neutralität
$= A \cdot 1 + A \cdot B$	Distributivität
$= A \cdot (1 + B)$	Extremum
$= A \cdot 1$	Neutralität
$= A$	q.e.d.

Beweis für Zusammenfassen (T10) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen

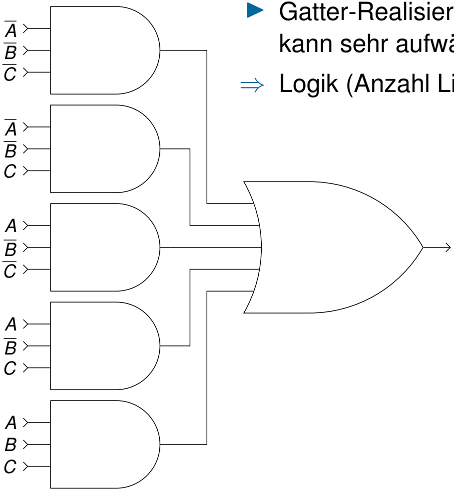
$A \cdot B + A\,\overline{B}$	Distributivität
$= A \cdot (B + \overline{B})$	Komplement
$= A \cdot 1$	Neutralität
$= A$	q.e.d.

Beweis für Konsensus (T11) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$
\begin{array}{rlr}
 & A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C & \text{Neutralität} \\
= & A \cdot B + \overline{A} \cdot C + 1 \cdot B \cdot C & \text{Komplement} \\
= & A \cdot B + \overline{A} \cdot C + (A + \overline{A}) \cdot B \cdot C & \text{Distributivität} \\
= & A \cdot B + \overline{A} \cdot C + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C & \text{Kommutativität} \\
= & A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C + \overline{A} \cdot C \cdot B & \text{Neutralität} \\
= & A \cdot B \cdot 1 + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C \cdot 1 + \overline{A} \cdot C \cdot B & \text{Distributivität} \\
= & A \cdot B \cdot (1 + C) + \overline{A} \cdot C \cdot (1 + B) & \text{Extremum} \\
= & A \cdot B \cdot 1 + \overline{A} \cdot C \cdot 1 & \text{Neutralität} \\
= & A \cdot B + \overline{A} \cdot C & \text{q.e.d.}
\end{array}
$$

Logikminimierung



$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,C$

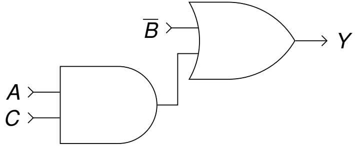
- Gatter-Realisierung per DNF kann sehr aufwändig sein

$\Rightarrow$ Logik (Anzahl Literale und Operatoren) minimieren

Logikminimierung RQ3-1

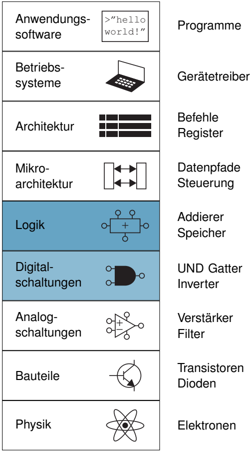
$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,C \\
&= \overline{A}\,(\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,C) + A\,(\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,C) + A\,B\,C \\
&= \overline{A}\,(\overline{B}\,(\overline{C} + C)) + A\,(\overline{B}\,(\overline{C} + C)) + A\,B\,C \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B} + A\,B\,C \\
&= (\overline{A} + A)\,\overline{B} + A\,B\,C \\
&= \overline{B} + A\,B\,C
\end{aligned}
$$

- weitere Vereinfachungen möglich?
- $Y = \overline{B} + A\,C$
- Systematik notwendig, um minimale Ausdücke zu erkennen/finden



Agenda

1. Einleitung
2. Kombinatorische Logik
3. Boole'sche Gleichungen
4. Boole'sche Algebra
5. Zusammenfassung



Zusammenfassung und Ausblick

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombinatorische Logik
- Boole’sche Gleichungen
- Boole’sche Algebra

- Nächste Vorlesung behandelt
  - Logikminimierung und -realisierung