Klausurvorbereitung SoSe 2020 am 09.08.22

① a) $Ax = b \quad , x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\leadsto$ weniger Gleichungen als Unbekannte

$\Longrightarrow$ keine eind. Lösung

Also falsch

$\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\} = m < n$

$\Longrightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \text{rang}(A)$

$> n - n = 0.$

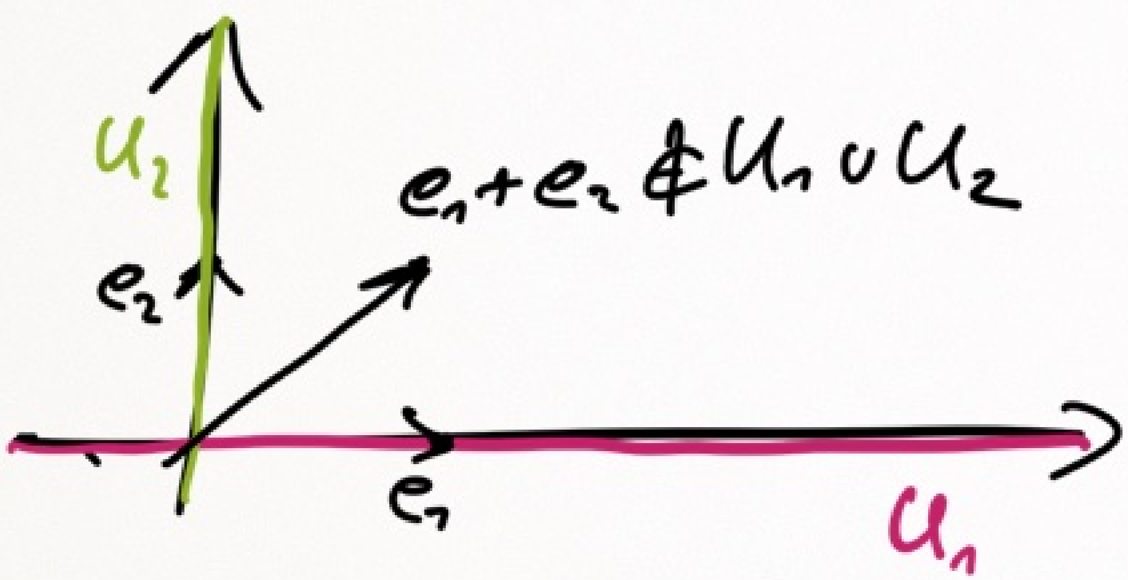
b) wahr

$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 < 3$

$\Rightarrow$ Jede lin. unabh. Teilmenge in $\mathbb{R}^2$ besteht aus höchstens zwei Vektoren

c) falsch

z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \langle e_1 \rangle$, $U_2 = \langle e_2 \rangle$



d) wahr

T linear $\Rightarrow T(0)=0$

$\underbrace{T \text{ injektiv}}_{\substack{T(a)=T(b) \\ \Rightarrow a=b}} \Rightarrow$ Für $x \neq 0$ gilt $T(x) \neq T(0) = 0$

T linear und injektiv $\Rightarrow \operatorname{Ker}(T) = \{0\}$

e) falsch

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq -1 = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f) falsch

$$\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1 \neq 0 = \det\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

g) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ voller Rang $\iff A$ invertierbar

$\iff \det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

Ist wahr

$\iff 0 \neq \det(A)$

$\iff 0 \neq \det(A^T A) = \det(A^T)\cdot\det(A)$

$= (\det(A))^2$

$A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vollen Rang $\iff A^T A$ invertierbar

$\det A^T = \det A$

i) falsch

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal, aber nicht symmetrisch

$A \cdot A^T = I$

<u>sym:</u> $a_{ij} = a_{ji}$. Also hier $a_{12} \overset{!}{=} a_{21}$

$1 = -1$ $\lightning$

j) $\forall v \in V: v^T A v > 0$ pos. def.

$\geq$ semipos. def.

$\det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$

$\Rightarrow$ Eigenwerte sind $0, 2$ Also wahr

k) Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|(v|w)| \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2 = 1$$

für alle Vektoren $\|v\|_2 = \|w\|_2 = 1$

$$\Rightarrow -1 \leq (v|w) \leq 1$$

Also wahr.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 0 & & \textrm{\Large 0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & \textrm{\Large 0} & & & \ddots & 1 \quad 0 \\ & & & & & \lambda_J \end{pmatrix}$$

② a)

a_i	b_i	$\frac{a_i}{b_i}$	k_i	l_i
143	9	15 Rest 8	-1	$1-15\cdot(-1)=16$
9	8	1 Rest 1	1	$0-1\cdot 1=-1$
8	1	8 Rest 0	0	$1-8\cdot 0=1$
1	0		$\boxed{1}$	$\boxed{0}$
$\Vert$	Stopp!		Start	
ggT(143,9)				

$$ggT(143,9) = 1 = -1\cdot 143 + 16\cdot 9$$

d.h. $k=-1$ und $l=16$

b) $1 = -1 \cdot 143 + 16 \cdot 9 \equiv 16 \cdot 9 \mod 143$

$\Rightarrow x = 16$ liefert uns $9 \cdot x \equiv 1 \mod 143$

c) Schreibe $n \in \mathbb{N}$ als $n = 1000 \cdot m + k$

für $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 999\}$

Dann gilt $8 \mid 1000$, also

$n \equiv k \mod 8$

$\Rightarrow$ n ist genau dann durch 8 teilbar, wenn k durch 8 teilbar ist.

③

<u>Ind. Anfang:</u> $n=1$

$$\sum_{k=2}^{2} 2k = 4 = 3\cdot 1^2+1$$

Also ist die Aussage für $n=1$ wahr.

<u>Ind. Hypothese:</u> Sei $\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2+n$

für ein $n\in\mathbb{N}$ wahr.

Ind. Schritt: $n \longmapsto n+1$

Dann gilt

$$\sum_{k=(n+1)+1}^{2(n+1)} 2k = \sum_{k=n+2}^{2n+2} 2k + \underbrace{2(n+1) - 2(n+1)}_{=0}$$

2 zuviel

1 zu wenig

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} 2k - \underbrace{2(n+1)}_{\text{"}k=n+1\text{"}} + \underbrace{2(2n+1)}_{\text{"}k=2n+1\text{"}} + \underbrace{2(2n+2)}_{\text{"}k=2n+2\text{"}}$$

$$\overset{\text{I.H.}}{=} 3n^2+n - 2n \cancel{-2} + 4n \cancel{+2} + 4n + 4$$

$$= 3n^2 + 7n + 4$$

$$= \underbrace{3(n+1)^2}_{=3n^2+6n+3} + (n+1)$$

Also ist die Aussage für $n+1$ wahr.

Ind. Schluss:

Also ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2} 2k = \left(\sum_{k=n+2}^{2n+1} 2k\right) + 2(2n+2)$$

$$= 2(n+2) + 2(n+3) + 2(n+4) + \ldots + 2(2n+1) + 2(2n+2)$$

$$= \left(\sum_{k=n+2}^{2n} 2k\right) + 2(2n+1) + 2(2n+2)$$

$$\underbrace{+2(n+1) - 2(n+1)}_{=0}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} 2k \ldots$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} 2k - 2(n+1) + 2(2n+1) + 2(2n+2)$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 2(n+1) + 2(n+2) + \ldots + 2(2n)$$

4 a) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{Id} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{G} & & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{B} \end{array}$$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id) = \underbrace{M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}(Id)}_{= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}}(Id)^{-1}} \cdot \underbrace{M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(Id)}_{I} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{G}}(Id)$$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{G}}(Id) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\det}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id)}} = M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}(Id) \cdot I \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}}(Id)$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Alternativ:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} [v_2]_{\mathcal{B}} & [v_1]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}\}$

$\mathcal{C} = \{v_2, v_1\}$

$$\underline{v_1} = 1 \cdot \underline{v_1} + 0 \cdot \underline{v_2} \rightsquigarrow [v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \rightsquigarrow [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_1 \rightarrow [v_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) $\det(A) = -4 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= -4 \cdot \left((-1)\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)\right)$

$= -4 \cdot (-3-1) = \underline{\underline{16}}$

2) $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot(-1) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$= (-1)\cdot(-4)\cdot 4 = \underline{\underline{16}}$

$$\det(A) \neq 0 \implies \dim(\operatorname{Ker}(A)) = \dim\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = \underline{\underline{0}},$$

$$\dim(\operatorname{Bild}(A)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Ker}(A)) = 3 - 0$$
$$= \underline{\underline{3}}$$

c) $z^6 = \overset{\in\mathbb{R}}{64} \quad ; z \in \mathbb{C}$

$$z = \underbrace{|z|}_{r} \cdot e^{i\varphi}$$

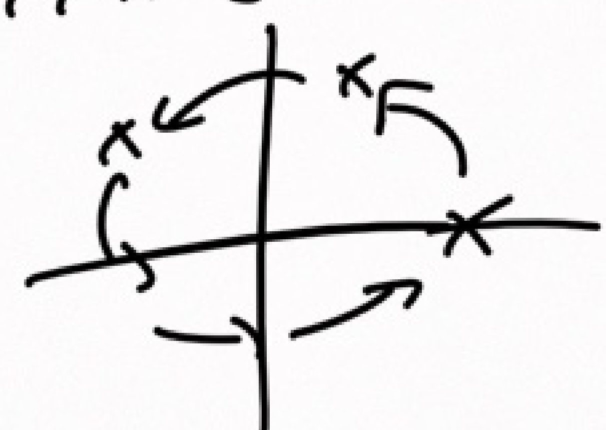
$$; e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$\underbrace{e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \underbrace{\sin 2\pi}_{=0}}_{\in\mathbb{R}}$$

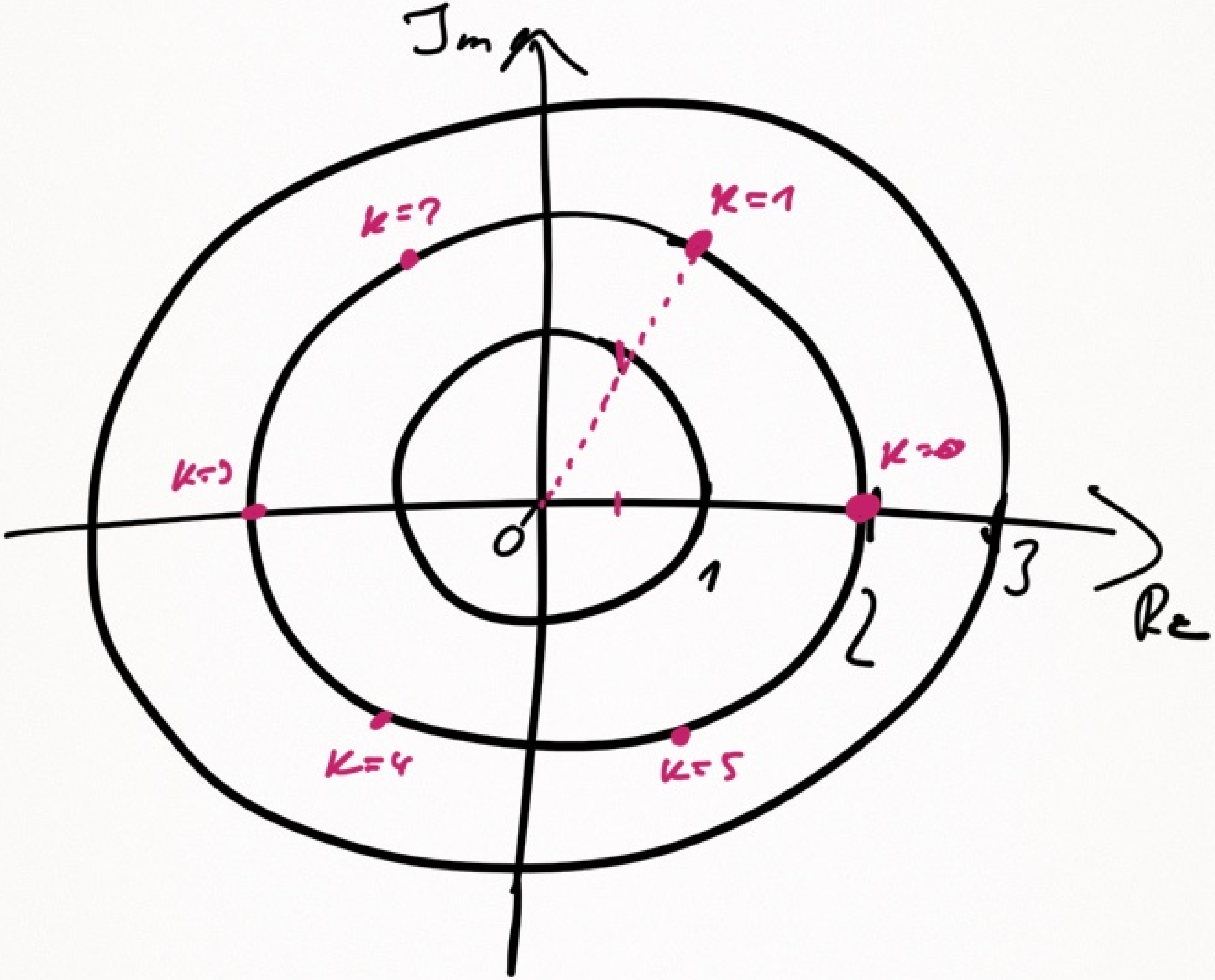
$$\implies z_k = \sqrt[6]{64} \cdot e^{k \cdot \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{6}3}}$$

$$k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$



$$z_k = 2\, e^{k \cdot \frac{\pi i}{3}} \quad ; \quad \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{= \, \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{1}{2}$$



⑤ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a)

$$p(A) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+1) \cdot \left(\underbrace{(1-\lambda)^2 - 4}_{} \right)$$

EW -1

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2$$

$$\lambda_2 = 3 \quad , \lambda_3 = -1$$

Also $p(A) = -(\lambda+1)^2 \cdot (\lambda - 3)$

Eigenwerte: $-1,\ 3$

b) $\mathrm{Eig}(A,3) = \mathrm{Ker}(A - 3I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 = s \in \mathbb{R}\ (\mathbb{K})$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{beliebig}$$

$$\rightsquigarrow x = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 - s = 0$

$x_3 = 0$

$\Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_3 = 0 \end{array} \Longrightarrow \mathrm{Eig}(A,3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\| \qquad \left\{ s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathrm{Eig}(A,-1) = \mathrm{Ker}(A+I)$:

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \;1:2 \\ \;- \\ \; \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ x_2 = s \in \mathbb{R} \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$x_1 + s = 0 \iff x_1 = -s$$

$$\Rightarrow x = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,-1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$v \in V$, dann ist $\frac{v}{\|v\|}$ normiert.

d) Da die algebraische Vielfachheit der EW mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt, ist A diagonalisierbar.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\text{zu } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{EW } 3} \qquad \underbrace{\text{zu } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{zu } \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{EW } -1}$$

⑥
a) $x \sim_\varphi y :\Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$

Refl.: Da $\varphi(x) = \varphi(x)$ ist $x \sim_\varphi x$.

Also ist $\sim_\varphi$ reflexiv.

Symm.: z.z.: Wenn $x \sim_\varphi y$, dann $y \sim_\varphi x$.

Sei $x \sim_\varphi y \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$

$\Longleftrightarrow \varphi(y) = \varphi(x)$

$\Longleftrightarrow y \sim_\varphi x$.

Also ist $\sim_\varphi$ symmetrisch.

Transitiv z.z.: wenn $x \sim_\varphi y$ und $y \sim_\varphi z$,

dann $x \sim_\varphi z$.

Sei $x \sim_\varphi y$ und $y \sim_\varphi z$

$\iff \varphi(x) = \varphi(y)$ und $\varphi(y) = \varphi(z)$

$\iff \underline{\varphi(x)} = \varphi(y) = \underline{\varphi(z)}$

$\iff x \sim_\varphi z$.

Also ist $\sim_\varphi$ transitiv.

Und damit insgesamt eine Äquivalenzrelation

5) Sei $\varphi: A \to B$ mit

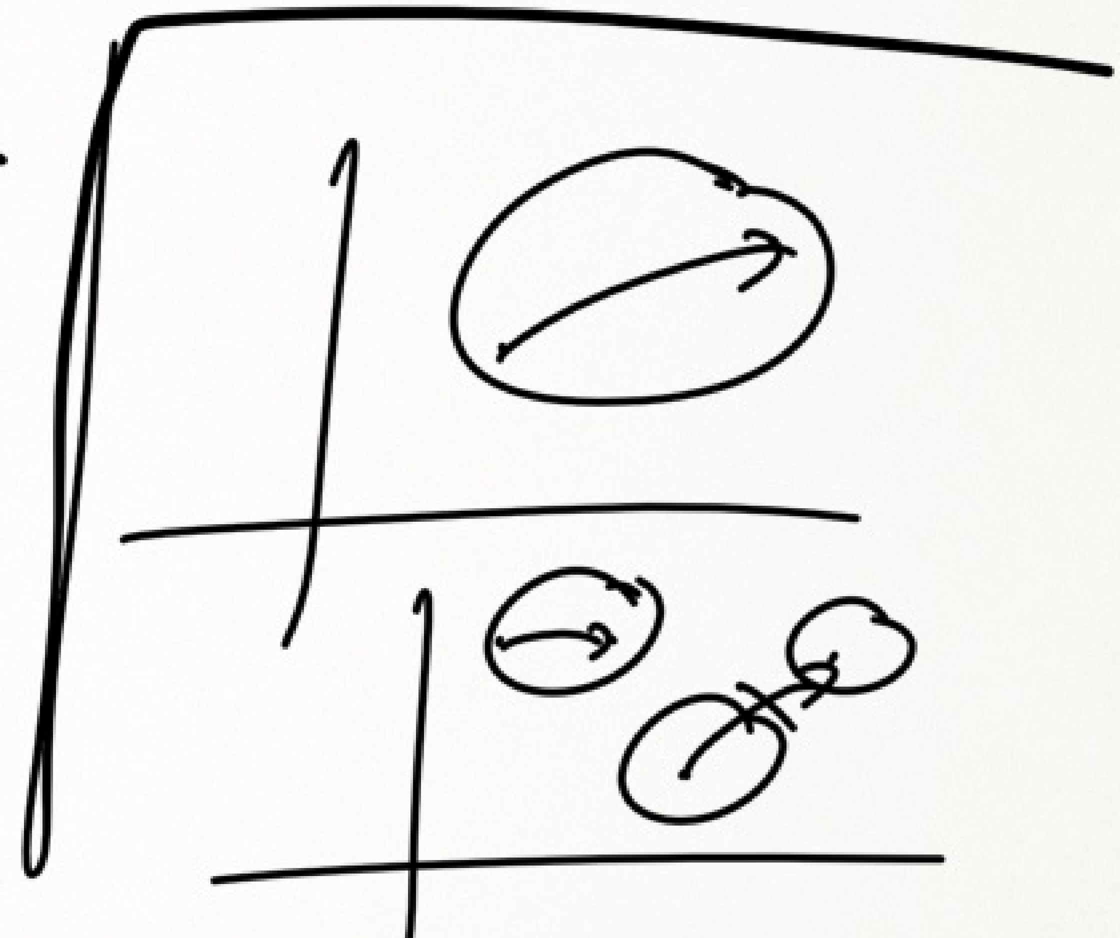
$$\varphi(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konstante}}}{c^{\in B}} \text{ f.a. } x \in A.$$

Das bedeutet

$\forall x, y \in A : x \sim_\varphi y$, da $\varphi(x) = c = \varphi(y)$

$\Rightarrow F = A/_{\sim_\varphi} = \{A\}$

und $a = |F| = 1$



c) $\forall x, y \in A: \quad x \sim y$

$$\overset{\text{Def. } \varphi}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) = \varphi(y)$$

$$\overset{\text{Def. } \sim_\varphi}{\Longleftrightarrow} x \sim_\varphi y$$

Also ist $\sim \; = \; \sim_\varphi$

$\varphi: A \longrightarrow F = A/\sim$

$\quad x \longmapsto [x] = \{ y \in A \mid y \sim x \}$

$x \sim y \Longleftrightarrow \underline{x, y \in [x]} \Longleftrightarrow \underline{\varphi(x)} = [x] = \varphi(y)$