2.) $(7^{2n} - 4^{2n}) \bmod 33$

$= ((7^2)^n - (4^2)^n) \bmod 33 = (49^n - 16^n) \bmod 33$

$= ((49 \bmod 33)^n - (16 \bmod 33)^n) \bmod 33$

$= ((16 \bmod 33)^n - (16 \bmod 33)^n) \bmod 33 = 0$

Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

3a.) $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Induktionsanfang für $n=0$ gilt

$$(1+x)^n = 1 = 1+nx \quad \checkmark$$

Induktionshypothese Für ein fixes beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \qquad (IH)$$

Induktionsschritt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{(IH)}{\geq} (1+x)(1+nx)$$

$$= 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+x^2$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

6.) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0, \quad x > 0$$

Es gilt

$$\left|\frac{1}{(1+x)^n}\right| \leq \frac{1}{|1+nx|} \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{|x|} \to 0 \, .$$ Da $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

4.) "$\subseteq$" Sei $v \in \langle M \rangle$. Dann ex. $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $m_i \in M$: $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i$.

Sei $U \in \mathcal{M}$. Dann ist $m_i \in U$ für alle $i = 1, \dots, n$. Also auch $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i \in U$. Da U beliebig, gilt $v \in \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$.

"$\supseteq$". Offensichtlich ist $M \subset \langle M \rangle$. Außerdem ist $\langle M \rangle$ UVR von V.

4 Also gilt $\langle M \rangle \in \mathcal{M}$

Damit gilt

$$\bigcap_{U \in \mathcal{M}} U = \langle M \rangle \cap \bigcap_{U \in \mathcal{M} \setminus \{\langle M \rangle\}} U$$

$C \langle M \rangle$.

5

a.) wahr. A ortho $\Rightarrow |\det A| = 1$
$AA^T = I$

$$|\det(A)| = \sqrt{\det(A)^2} = \sqrt{\det(A)\cdot\det(A)}$$

$$= \sqrt{\det(A)\det(A^T)} = \sqrt{\det(AA^T)}$$

$$= \sqrt{\det(I)} = 1$$

6.) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A \neq 0 \Rightarrow A^k \neq 0 \ \forall k$. falsch.

$n=2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \neq 0 \ , \ A^2 = 0$

6.) Sei A symm pos def. $(x|y)_A = (x|Ay)$

Skalerprod.

- Definitheit: $(x|x)_A = (x|Ax) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und gleichheit gilt nur für $x=0$, weil A positiv definit ist.

- Symmetrie: $(x|y)_A = (x|Ay) \overset{(\cdot|\cdot)\text{ sym.}}{=} (Ay|x) \overset{\text{Hinweis Auf}}{=} (y|A^Tx)$

$$\underset{A\text{ symm}}{=} (y|Ax) = (y|x)_A$$

- Linearität: $(\lambda x_1 + \mu x_2 | y)_A$

$$= (\lambda x_1 + \mu x_2 | A y) \overset{(\cdot|\cdot) \text{ linear}}{=} \lambda (x_1 | A y) + \mu (x_2 | A y)$$

$$= \lambda (x_1 | y)_A + \mu (x_2 | y)_A$$

$\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

---

7. a.) $A_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\det(A_\alpha) = \frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha)$$

$\Rightarrow$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist A_α invertierbar, sonst nicht.

b.) $p_{A_\alpha}(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix}$

$$= \left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\alpha-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2-\lambda-\alpha^2+\alpha = (\lambda-\alpha)(\lambda-(1-\alpha)),$$

Also A_α ähnlich zu

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

p-q-Formel

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\alpha^2-\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \left(\alpha-\frac{1}{2}\right) \in \{\alpha, 1-\alpha\}$$

c.) $E_\alpha(A_\alpha) = \ker(A_\alpha - \alpha I) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}-\alpha & \alpha-\frac{1}{2} & 0 \\ \alpha-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\alpha & 0 \end{array}\right)$

$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW α.

$E_{1-\alpha}(A_\alpha) = \ker(A_\alpha - (1-\alpha)I)$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$= \langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \} \rangle \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } 1-\alpha$$

Also gilt $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. und

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d.)

1.) A_α ist pos. def., wenn $\min\{\alpha, 1-\alpha\} > 0$, also für $\alpha \in (0, \infty) \cap (-\infty, 1) = (0, 1)$

2. A_α ist neg. def. wenn $\max\{\alpha, 1-\alpha\} < 0$, also für $\alpha \in (-\infty, 0) \cap (1, \infty) = \emptyset$. Also für kein $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. A_α ist indefinit, wenn $\alpha > 0$ und $1-\alpha < 0$ oder $\alpha < 0$ und $1-\alpha > 0$ also $\alpha > 1$ oder $\alpha < 0$.

$$\alpha \in \big((0,\infty) \cap (1,\infty)\big) \cup \big((-\infty, 0) \cap (-\infty, 1)\big)$$

$$= (1, \infty) \cup (-\infty, 0)$$

e.) $\alpha, 1-\alpha, 1-\alpha^2$.

f.) Nein, für $\alpha = -1$ gilt $\det(A_{-1}) = -2 \neq 0$ aber $\det(B_{-1}) = 0$

$$\det(B_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} A_\alpha - \lambda & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1-\alpha^2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\alpha^2-\lambda)\,|A_\alpha - \lambda I|$$

$$\overset{a)}{=} (1-\alpha^2-\lambda)(\lambda-\alpha)(\lambda-(1-\alpha))$$

$A \Rightarrow B$ (f stetig, K kompakt $\Rightarrow$ f max auf K)

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_2$

$g \circ f$

f	g	$g \circ f$
inj		inj?
	inj	inj?
	sur	sur?
sur		sur?
inj	inj	inj