Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WiSe 2012/13
14.03.2013

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	10	16	9	12	7	10	64		
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $r = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Begründen Sie, warum durch diese drei Punkte eine eindeutige Ebene E aufgespannt wird.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform dieser Ebene E.

(c) Geben Sie die Gerade an, die senkrecht zu E steht und durch den Punkt p geht.

2. Aufgabe (16 Punkte)

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die gegeben ist durch die Spiegelung an der Ebene

$$E = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\Phi)$ von Φ bezüglich der Standardbasis.

Hinweis: Sie können ohne weitere Rechnung verwenden, dass $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

(b) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\Phi)^n$, sowie deren Eigenwerte.

3. Aufgabe (9 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und es seien u und v zwei Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten λ und μ. Zeigen Sie, dass u zu v orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts ist.

Hinweis: Ein Verweis auf Satz 3.11.18 des Skripts reicht hier nicht.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils zwei Punkte.

(a) Es sei (a_n) eine konvergente komplexe Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a := \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Dann gilt $\left| \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{|a_n|} \right| = 1$.

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Dann ist die Relation $\sim$ auf R, die definiert ist durch

$$x \sim y \iff x \cdot y = y \cdot x, \qquad x, y \in R,$$

eine Äquivalenzrelation.

(c) $5^{222} + 3^{221}$ ist durch 8 teilbar.

(d) Es seien V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V mit $U_2 \subseteq U_1$, sowie $\mathscr{B}_1$ eine Basis von U_1. Dann gibt es eine Basis $\mathscr{B}_2 \subseteq \mathscr{B}_1$ von U_2.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, in der für alle $g, h \in G$ die Gleichung $g * h = \overline{g * h}$ gilt, wobei der Querstrich die Inversenbildung bezeichnet. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 1 Punkt, jede leere Zeile gibt 0.5 Punkte und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

In der ganzen Aufgabe seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^*$.

		Wahr	Falsch
(a)	Es seien $(G, *)$ und $(H, \diamond)$ Gruppen, n_H bezeichne das neutrale Element in H und $\overline{g}$ die Inverse von g in G. Ist $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt $f(g) \diamond f(\overline{g}) = n_H$ für alle $g \in G$.	☐	☐
(b)	Es sei F der K-Vektorraum aller Folgen in K. Dann ist $\Phi : F \to K$ mit $\Phi((a_k)_{k \in \mathbb{N}}) = a_1$ eine lineare Abbildung.	☐	☐
(c)	Sind $A, B \in K^{n \times n}$ und ist B invertierbar, so gilt $\det(AB^{-1}) = \det(A)/\det(B)$.	☐	☐
(d)	Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ negativ definit, so ist $\det(A) < 0$.	☐	☐
(e)	Ist V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V, so ist der Faktorraum V/U ebenfalls ein Untervektorraum von V.	☐	☐
(f)	Hat $A \in K^{n \times n}$ nicht den Eigenwert 0, so ist die zugehörige lineare Abbildung Φ_A bijektiv.	☐	☐
(g)	Die rekursiv definierte Folge mit $a_0 = 2$ und $a_{k+1} = 2 + 1/a_k$ für $k \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen 2.	☐	☐
(h)	Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\lvert(1 + \mathrm{i})z\rvert = \lvert z\rvert + \lvert \mathrm{i}z\rvert$.	☐	☐
(i)	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann ist durch $(x\|y) := x^T A y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, ein Skalarprodukt definiert.	☐	☐
(j)	Ist für zwei reelle Folgen (a_k) und (b_k) die Summe $(a_k + b_k)$ konvergent, so konvergieren auch die Folgen (a_k) und (b_k).	☐	☐