

$$\begin{aligned} 2) \quad & (7^{2^n} - 4^{2^n}) \bmod 33 \\ &= ((7^2)^n - (4^2)^n) \bmod 33 = (49^n - 16^n) \bmod 33 \\ &= ((49 \bmod 33)^n - (16 \bmod 33)^n) \bmod 33 \\ &= ((16 \bmod 33)^n - (16 \bmod 33)^n) \bmod 33 = 0 \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$3) a) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n=0 \text{ gilt: } (1+x)^0 = 1 = 1 + n \cdot x \quad \checkmark$$

Induktionshypothese:

$$\text{Für ein festes beliebiges } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } (1+x)^n \geq 1+nx \quad (IH)$$

Induktionsschritt:

Betrachte $n+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x) (1+x)^n \stackrel{(IH)}{\geq} (1+x) (1+nx) \\ &= 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+x^2 \\ &\stackrel{x^2 \geq 0}{\geq} 1+(n+1)x \end{aligned}$$

$$b) \quad \mathbb{Z}: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0 \quad , \quad x > 0.$$

Es gilt:

$$\frac{1}{(1+x)^n} \stackrel{a)}{\leq} \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

4) " \subseteq ": Sei $v \in \langle M \rangle$. Dann existieren $\alpha_i \in K, m_i \in M : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i$.

Sei $U \in \mathcal{M}$. Dann ist $m_i \in U$ für alle $i=1, \dots, n$.

Also auch $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i \in U$.

Da U beliebig, gilt $v \in \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$.

" \supseteq ": Offensichtlich ist $M \subset \langle M \rangle$. Außerdem ist $\langle M \rangle$ UVR von V .

Also gilt: $\langle M \rangle \subseteq M$

Damit gilt:

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \langle M \rangle \cap \bigcap_{U \in \mathcal{U} \setminus \{\langle M \rangle\}} U \subset \langle M \rangle$$

5)

a) wahr: A orthogonal ($AA^T = I$) $\Rightarrow |\det A| = 1$

Begründung:

$$\begin{aligned} |\det A| &= \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det A \cdot \det A^T} \\ &= \sqrt{\det A \cdot \det A^T} \\ &= \sqrt{\det (A \cdot A^T)} = \sqrt{\det (I)} = 1 \quad \square \end{aligned}$$

b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \neq 0 \Rightarrow A^n \neq 0 \quad \forall n$?

Falsch. $n=2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Sei A symmetrisch pos. def. $(x|y)_A := (x|Ay)$

Prüfe Eigenschaften des Skalarprodukts:

- Definitheit: $(x|x)_A = (x|Ax) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$
und Gleichheit gilt nur für $x=0$, weil A positiv definit.
- Symmetrie: $(x|y)_A = (x|Ay) \stackrel{(1.1.)}{=} (Ay|x) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} (y|Ax) \stackrel{A \text{ symmetrisch}}{=} (y|x)_A$

Linearität:

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + \mu x_2 | y)_A &= (\lambda x_1 + \mu x_2 | Ay) \\ &\stackrel{(1.1.) \text{ linear}}{=} \lambda \cdot (x_1 | Ay) + \mu \cdot (x_2 | Ay) \\ &= \lambda (x_1 | y)_A + \mu (x_2 | y)_A \end{aligned}$$

$$\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Also definiert $(x|y)_A$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

$$7) a) A_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(A_\alpha) = \alpha$$

$$= \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha)$$

Die Matrix ist invertierbar falls $0 \neq \det(A_\alpha) = \alpha \cdot (1-\alpha)$

\Rightarrow für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist A_α invertierbar, für $\alpha=0, \alpha=1$ nicht.

b) Bestimme EW von A_α .

$$p_{A_\alpha}(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \lambda + \frac{1}{4} - \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \lambda + \alpha - \alpha^2$$

$$= (1-\alpha) \cdot (1-(1-\alpha))$$

p-q-Formel

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2 - \alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = 1-\alpha$$

Also ist A_α ähnlich zu

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

c) Ges: S, S^{-1} mit $A_\alpha = S^{-1} D_\alpha S$

$$E_\alpha(A_\alpha) = \ker(A_\alpha - \alpha I) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} - \alpha & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \alpha & 0 \end{array} \right) = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW $\lambda_1 = \alpha$.

$$E_{1-\alpha}(A_\alpha) = \ker(A_\alpha - (1-\alpha)I)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \rangle$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV zum EW $\lambda_2 = 1-\alpha$.

Also gilt:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{EV zu} \\ \text{EW}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}}_{\text{EV zu EW } 1-\alpha}$

Bem.: S und S^{-1} waren
verteuscht in der Veranstaltung

$$S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det S^{-1}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) 1) A_α ist pos. definit, wenn $\min\{\alpha, 1-\alpha\} > 0$,

also für $\alpha \in (0, \infty) \cap (-\infty, 1) = (0, 1)$

D.h. A_α ist pos. definit für $\alpha \in (0, 1)$

2) A_α ist negativ definit, wenn $\max\{\alpha, 1-\alpha\} < 0$, also

für $\alpha \in (-\infty, 0) \cap (1, \infty) = \emptyset$

Also ist A_α für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ negativ definit.

3) A_α ist indefinit, wenn $\alpha > 0$ und $1-\alpha < 0$

oder $\alpha < 0$ und $1-\alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \alpha > 1$

$\Leftrightarrow \alpha < 1$

$\alpha \in ((0, \infty) \cap (1, \infty)) \cup ((-\infty, 0) \cap (-\infty, 1))$

$= (1, \infty) \cup (-\infty, 0)$

Also ist A_α indefinit für $\alpha \in (1, \infty) \cup (-\infty, 0)$.

$$e) B_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} A_\alpha - \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \alpha^2 - \lambda) \cdot \det(A_\alpha - \lambda I)$$

$$= (1 - \alpha^2 - \lambda) \cdot (1 - \alpha)(1 - (1 - \alpha))$$

\Rightarrow EW von B_α sind $\alpha, 1-\alpha, 1-\alpha^2$,

f) Gilt: A_α invertierbar $\Leftrightarrow B_\alpha$ invertierbar?

Nein, das gilt nicht.

$$\text{Sei } \alpha = -1: \det(A_{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -2$$

Also ist A_{-1} invertierbar, aber

$$\det(B_{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Also ist B_{-1} nicht invertierbar.