1. Aufgabe

Mathe 1 WiSe 2017/18

a) Richtig: Definition der Schnittmenge

b) Falsch. $X = Y = \{0\}$, $Z = \{0,1\}$, $f(0)=0$, $g(0)=0$

c) wahr. Nach dem erweiterten Euklid existieren $\tilde{k}, \tilde{l}$, sodass $1 = \tilde{k}a + \tilde{l}b$ gilt
Multiplikation mit c und die Wahl $k = \tilde{k}c$ und $l = \tilde{l}c$ liefern die Aussage

d) Falsch. $0 \notin \{3k+5 : k \in \mathbb{Z}\}$

e) wahr. $\left(\frac{1}{i}\right)^{2018} = \left(\frac{1}{i}\right)^{2016} (i^2)^{-1} = 1 \cdot (-1) = -1$

f) wahr. Sei $z = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$

g) falsch. Sei $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann sind A und B ähnlich mit
$S^{-1}BS = A$, wobei $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = S^T$. Dann ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV
von A, aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kein EV von B.

h) falsch. $V = \mathbb{R}$, $\lambda = 2$, $x = 1$ $\quad (2\cdot 1 \mid 2 \cdot 1) = 4 \neq 2 = 2 \cdot (1 \mid 1)$

i) falsch. $\sup\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} = \sup\left\{-1, \underline{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \frac{1}{2}$

j) wahr. Sei $\varepsilon > 0$ und sei n, sodass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{b}$, wobei b die Schranke von (b_n) ist. Es gilt:

$|a_n b_n| \leq b|a_n| < \varepsilon$.

2. Aufgabe

a) • (i.) symmetrisch (und nicht transitiv)

(offensichtlich symmetrisch und wegen z.B. $x=8, y=4, z=0$ nicht transitiv)

• (ii.) transitiv (und nicht symmetrisch)

$((a_n)=(1), (b_n)=(n+1) \Rightarrow a_n \in \mathcal{O}(b_n)$ aber $b_n \notin \mathcal{O}(a_n)$. Sei $(x_n) \in \mathcal{O}(y_n)$, $y_n \in \mathcal{O}(z_n)$

Dann $\exists\, C_1, C_2 : \frac{x_n}{y_n} < C_1, \frac{y_n}{z_n} < C_2 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Also auch $\frac{x_n}{z_n} = \frac{x_n}{y_n} \frac{y_n}{z_n} < C_1 C_2$ Also $x_n \in \mathcal{O}(z_n))$

b) (i) 0

$(1+12) \bmod 13 = 0, \dots, (6+7) \bmod 13 = 0$

(ii) 4

$(-9-4) \bmod 13 = 0$

c) (i) 2

(Dimensionsformel $5 = \dim(V) = \dim(V/U) - \underbrace{\dim(\ker \pi)}_{\dim(U)} = \dim(V/U) - 3$)

(ii)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + U \right\}, M_B^E(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^n n^4}{4^n} = \frac{1}{2}$, $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^2 - 6n^3}{n(5n-2n^2)+2} = 3$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{3n} = 1$

3. Aufgabe

a) Beweis per Kontraposition. $\varphi(a) = e \Rightarrow a = e$

Es gilt $\varphi(e) = e$. Aus der Injektivität folgt $a = e$

b) Induktionsanfang

Sei $n=0$. Nach der Wahl von a gilt $a_0 = a \neq 0$

Induktionsvorraussetung (IV)

Sei $a_n \neq e$ für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt

Nach IV ist $a_n \neq 0$. Nach a) ist also auch $a_{n+1} = \varphi(a_n) \neq 0$.

4 Aufgabe

$$h(f^A(x_1, \dots, x_n)) \overset{\text{Def Hom}}{=} f^B(h_{s_1}(x_1), \dots, h_{s_n}(x_n)) \overset{x_i \sim_s y_i}{=} f^B(h_{s_1}(y_1), \dots, h_{s_n}(y_n))$$

$$\underset{\text{Def. Hom}}{=} h(f^A(x_1, \dots, x_n)).$$

Also $f^A(x_1, \dots, x_n) \sim_s f^A(y_1, \dots, y_n)$.

5. Aufgabe

a.) Wohldefiniertheit: Offensichtlich ist $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Linearität: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, dann gilt

$$f(\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f((\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \lambda(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + \mu(b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \lambda f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \mu f((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

b.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker(f)$. Dann gilt

$$(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0 \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$$

Also $a_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Demnach gilt $\ker(f) = \{(x, 0, 0, \dots) \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}\}$.

c.) Surj.: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Definiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

nicht Inj.: Sei $x_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $y_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $y_0 = 1$

dann gilt $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = 0_{Abb(\mathbb{N},\mathbb{R})} = (y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = f((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$

d.) Weil $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nicht endlichdimensional.

$\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, $e_k = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ ist unendlich und nicht linear abhängig.

6. Aufgabe

a) Es gilt $A-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} 8&2&8&2\\ 0&2&0&2\\ -4&-2&-4&-2\\ 0&2&0&2 \end{pmatrix}$ offensichtlich sind die Zeilen II und VI linear abhängig (alternativ auch I und III, oder Spalten) also ist λ_1 ein Eigenwert.

Es gilt $A-\lambda_2 I = \begin{pmatrix} 4&2&8&2\\ 0&-2&0&2\\ -4&-2&-8&-2\\ 0&2&0&-2 \end{pmatrix}$ Begründung wie oben. Also ist λ_2 EW.

b) $((A-\lambda_1 I)\times|0) \underset{\substack{III+\frac{I}{2}\\ IV-II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 8&2&8&2\\ 0&2&0&2\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\frac{I-II}{8}\\ \frac{II}{2}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$. Also gibt es zwei Freiheitsgrade (zwei Nullzeilen)

Wähle $x_4=s$, Dann folgt $x_2=-s$. Wähle $x_3=r$, dann folgt $x_1=-r$

Es gilt $E_{-2}(A)=\left\{\begin{pmatrix}-r\\-s\\r\\s\end{pmatrix} : r,s\in\mathbb{R}\right\} = \Big\langle \underbrace{\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}_{B_{-2}\text{ Basis für } E_{-2}(A)} \Big\rangle$

$((A-\lambda_2 I)|0) \underset{\substack{III+I\\ II+VI}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4&2&8&2\\ 0&-2&0&2\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\frac{I+II}{4}\\ \frac{II}{2}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&2&1\\ 0&-1&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ Also gibt es zwei Freiheitsgrade (zwei Nullzeilen)

Wähle $x_4=s$, dann folgt $x_2=s$. Wähle $x_1=r$ dann folgt $x_3=\frac{-s-r}{2}$.

Es gilt $E_2(A)=\left\{\begin{pmatrix}r\\s\\\frac{-r-s}{2}\\s\end{pmatrix} : r,s\in\mathbb{R}\right\} = \Big\langle \underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}}_{B_2\text{ Basis von } E_2(A)} \Big\rangle$

c) Eigenvektoren (auch zu verschiedenen EW) sind linear unabhängig. Also ist auch $B_{-2}\,B_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und es gibt keine weiteren Eigenvektoren

d) $\det(A) = \det\left(S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_1&&\\&&\lambda_2&\\&&&\lambda_2\end{pmatrix}S\right) = \det\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_1&&\\&&\lambda_2&\\&&&\lambda_2\end{pmatrix} = \lambda_1^2\cdot\lambda_2^2 = (-2)^2\cdot 2^2 = \underline{\underline{16}}$, wobei $S = B_{-2}\,B_2$ ist.

e) $M=\begin{pmatrix} -1&0&1&0\\ 0&-1&0&1\\ 1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$