

Mathe 1: Klausur #3

①

1. Aufgabe

(a) Charakteristisches Polynom:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 & 0 \\ -6 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Entwicklung
nach 3. Spalte

$$= (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot ((-4-\lambda) \cdot (5-\lambda) + 18)$$

$$= (2-\lambda) \cdot (-20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18)$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2)$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-2)$$

Nullstellen: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$ sind die EW von A ,
bzw. $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = -1$ sind die
verschiedenen EW von A

Eigenvektoren zu $\mu_1 = 2$: Löse Gleichungssystem

$$(A - 2 \cdot I) \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leadsto$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \leadsto \begin{array}{l} \text{I} - \text{II} \\ \text{I} - 3 \cdot \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rang ist 1 bzw. zwei Nullzeilen. Also sind zwei
linear unabhängige Lösungen vorhanden und

$$m_1 = \dim(E(A, 2)) = 2.$$

Durch Hinschauen: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2)

erfüllen $(A - 2I)v_j = 0$ für $j \in \{1, 2\}$.

Dies sind ^{die} Eigenvektoren zu EW 2 und es gilt

$$E(A, 2) = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_3 = -1$: Löse LGS $(A + I) \cdot x = 0$
mit $x \neq 0 \leadsto$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rang ist 2, also eine solche Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ existiert.

Nach 2. Zeile ist $x_1 = x_2$. Nach 1. Zeile ist

$$3x_3 = 2x_1 - x_1 = x_1, \text{ d.h. } x_3 = \frac{1}{3}x_1. \text{ Also ist}$$

$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_3 = -1$ und

$$E(A, -1) = \langle v_3 \rangle, \text{ d.h. } m_2 = \dim(E(A, -1)) = 1$$

(b) Nein: Gäbe es solch einen Vektor, dann wäre

~~es~~ x Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Nach (a) ist 1 kein Eigenwert von A .

$$(c) \quad A \text{ invertierbar} \stackrel{\text{Skript}}{\Leftrightarrow} \det(A) \neq 0$$

(3)

$$\stackrel{\text{Skript}}{\Leftrightarrow} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$\neq 0$

$$4 \cdot (-1)$$

Also ist A invertierbar.

A ist diagonalisierbar, weil $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis aus Eigenvektoren ist bzw. $m_1 + m_2 = 3$ gilt.

2. Aufgabe

$$(a) \quad \text{Für alle } j \in \{1, 2, 3\} \text{ gilt } (b_j | b_j) = \frac{1}{9} (1^2 + 2^2 + 2^2) = 1, \text{ d.h.}$$

sie sind normiert. Weiter ist

$$(b_1 | b_2) = \frac{1}{9} (-2 + 4 - 2) = 0,$$

$$(b_2 | b_3) = \frac{1}{9} (-4 + 2 + 2) = 0,$$

$$(b_3 | b_1) = \frac{1}{9} (2 + 2 - 4) = 0.$$

Also ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis.

$$(b) \quad \text{Es gilt } \Phi(b_1) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3,$$

$$\Phi(b_2) = b_3 = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3,$$

$$\Phi(b_3) = -b_2 = 0 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Also ist $M_B^B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: A$

(4)

(c) Sei $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A' &:= M_{B'}^{B'}(\phi) = \underbrace{M_{B'}^B(\text{id}_{\mathbb{R}^3})}_{= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot M_B^B(\phi) \cdot M_B^{B'}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = S \cdot A \cdot S^{-1} \\ &=: S \end{aligned}$$

Nun ist S orthogonal nach (a), d.h. $S^{-1} = S^T$.

Also ist

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot S^T \\ &= \frac{1}{3^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiter ist $\det(A') = \det(S \cdot A \cdot S^{-1}) \stackrel{\text{Skript}}{=} \det(A)$

Entwicklung
nach 1. Spalte $\stackrel{=}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$

3. Aufgabe auf Seite (7)

4. Aufgabe

(5)

(a) Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$, d.h. $v_1 - v_2 \in U$.

Also gibt es $u \in U$ mit $v_1 = v_2 + u$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\tilde{v}_1) &= (\Phi - \lambda \text{id}_V)(v_1) = \underbrace{(\Phi - \lambda \text{id}_V)(v_2 + u)}_{\text{lineare Abbildung}} \\ &= (\Phi - \lambda \text{id}_V)(v_2) + \underbrace{(\Phi - \lambda \text{id}_V)(u)}_{= 0, \text{ weil } u \in U} \\ &= (\Phi - \lambda \text{id}_V)(v_2) = \Phi_\lambda(\tilde{v}_2),\end{aligned}$$

Was zu zeigen war.

(b) Φ_λ ist injektiv $\Leftrightarrow \Phi_\lambda(\tilde{v}) = 0_V$ ~~nur~~ nur für $\tilde{v} = 0_{V/U}$

Sei also $\Phi_\lambda(\tilde{v}) = 0_V \Leftrightarrow (\Phi - \lambda \text{id}_V)(v) = 0_V$

$$\Leftrightarrow v \in U \Leftrightarrow \tilde{v} = 0_{V/U} = \tilde{0}_V.$$

Damit ist Φ_λ injektiv.

(c) ~~Nur~~ Es ist $\dim(U) \geq 1$, weil λ EW von Φ ist. Also ist $\dim(V/U) \stackrel{\text{Skript}}{=} \dim(V) - \dim(U) < \dim(V)$.
Daher kann Φ_λ nicht surjektiv sein.

5. Aufgabe

(6)

(a) Wahr: Es gilt $|\{A\}| = 1$, also ist $|\mathcal{P}(\{A\})| = 2^1 = 2$
nach Beispiel 1.5.6.

(b) Wahr: $a * a = n$ für alle $a \in G \Rightarrow a^{-1} = a$.

Für ~~a, b~~ $a, b \in G$ gilt also $(a * b)^{-1} = a * b$

und $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} = b * a$. Zusammen

folgt $a * b = b * a$, was zu zeigen war.

(c) Falsch: Es gilt $\|2 \cdot x\|_{ab} = \|2 \cdot x\|_a \cdot \|2 \cdot x\|_b$

$$= 2 \cdot \|x\|_a \cdot 2 \cdot \|x\|_b$$

$$= 2^2 \cdot \|x\|_a \cdot \|x\|_b = 4 \cdot \|x\|_{ab}$$

also ist die Homogenität nicht erfüllt.

(d) Falsch: $4 \equiv 8 \pmod{2}$, aber $4 \not\equiv 2 \pmod{8}$.

6. Aufgabe

(a) Wahr (b) Wahr (c) Wahr (d) Wahr: Satz 2.1.16.

(e) Falsch (f) Wahr (g) Falsch (h) Wahr

(i) Falsch (j) Wahr

3. Aufgabe

⑦

Aussage: 71^n endet mit Ziffer 1 für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow 71^n \equiv 1 \pmod{10} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Anfang $n=0$: Für $n=0$ ist $71^n = 1$, d.h.

$$71^0 = 1 \equiv 1 \pmod{10}. \quad \checkmark$$

Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $71^n \equiv 1 \pmod{10}$.

Schritt $n \rightarrow n+1$: Es gilt $71^{n+1} = 71^n \cdot 71$, also

$$\text{ist } 71^{n+1} = 71^n \cdot 71 \equiv \underbrace{(71^n \pmod{10})}_{\substack{\text{Annahme} \\ \equiv 1 \pmod{10}}} \cdot \underbrace{(71 \pmod{10})}_{\equiv 1 \pmod{10}}$$

$$\equiv (1 \pmod{10}) \cdot (1 \pmod{10})$$

$$\equiv 1 \pmod{10}.$$

Also endet 71^n mit Ziffer 1 für alle $n \in \mathbb{N}$.