

Digitaltechnik

Wintersemester 2021/2022

5. Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Prof. Dr.-Ing. Thomas Schneider, M.Sc. Daniel Günther, M.Sc. Amos Treiber
Tablet Version

KW47

Bitte bearbeiten Sie die Übungsblätter bereits im Voraus, sodass Sie Ihre Lösungen zusammen mit Ihren Kommilitonen und Tutoren während der wöchentlichen Übungsstunde diskutieren können.

Mit der angegebenen Bearbeitungszeit für die einzelnen Aufgaben können Sie Ihren Leistungsstand besser einschätzen.

Die mit **“Zusatzaufgabe”** gekennzeichneten Aufgaben sind zur zusätzlichen Vertiefung für interessierte Studierende gedacht und daher nicht im Zeitumfang von 90 Minuten einkalkuliert.

Übung 5.1 Normalformen und Theoreme der boole'schen Algebra – Wiederholung

[15 min]

Die Funktion f bildet die vier Eingangsvariablen $A, B, C, D \in \mathbb{B}$ auf eine Ausgabevariable $Y \in \mathbb{B}$ ab. Die Ausgabe ist genau dann 1, wenn $A = 0$ gilt oder folgendes zutrifft:

Wenn $A = 1$ gilt, dann müssen mindestens zwei oder keine der verbleibenden Eingänge gleich 1 sein.

Erstellen Sie zunächst eine Wahrheitstabelle für die Funktion f . Geben Sie anschließend die konjunktive Normalform (KNF) der Funktion an. Formen Sie dann die KNF mit Hilfe der Rechenregeln der bool'schen Algebra in die äquivalente minimale Summe der Produkte (von Literalen) um. Geben Sie dabei für jeden Umformungsschritt das verwendete Axiom bzw. Theorem an. Realisieren Sie zum Abschluss die Summe als eine Gatterschaltung.



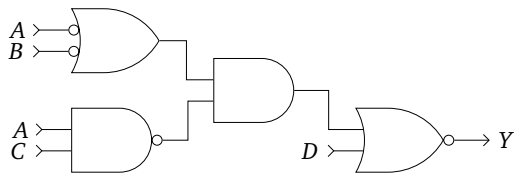
Übung 5.2 Bubble Pushing

[15 min]

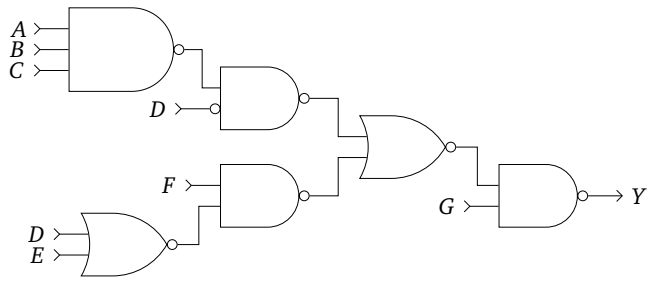
Verschieben Sie die Invertierungsblasen in den folgenden Schaltungen so weit wie möglich in die jeweils angegebene Richtung. Geben Sie die Funktion der umgeformten Schaltung zusätzlich als boole'schen Ausdruck an.

Übung 5.2.1 Vom Ausgang zu den Eingängen

a)

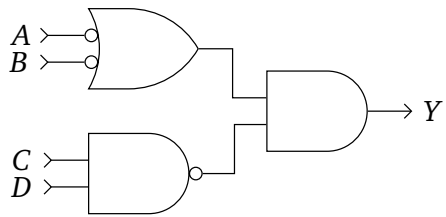


b)

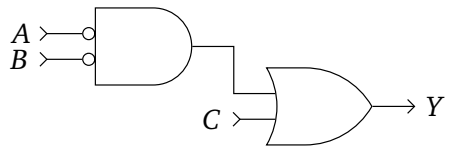


Übung 5.2.2 Von den Eingängen zum Ausgang

a)

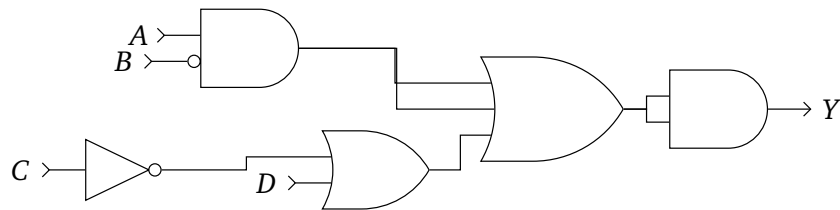


b)



Übung 5.2.3 Invertierung mittels Bubble Pushing

Geben Sie zunächst einen bool'schen Ausdruck an, welcher die folgende Gatterschaltung repräsentiert. Ermitteln Sie anschließend das Komplement dieser Funktion, indem Sie Bubble Pushing auf die Schaltung anwenden.



Die Ausgabe der Funktion Y mit Inputs A , B , C , und D ist genau dann 1, wenn die Mehrheit ihrer Eingänge den Wert 1 haben. Geben Sie die DNF der Funktion f an und realisieren Sie diese mit zweistufiger Logik.

- a) Welchen Teil der zweistufigen Schaltung können Sie durch einen Decoder ersetzen? Setzen Sie die Schaltung mithilfe eines Decoders um.

- b) Anstelle zahlreicher einzeln verdrahteter Gatter, werden in Rechnersystemen häufig Multiplexer (bzw. Look-Up-Tabellen) verwendet. Setzen Sie die Schaltung nun auch mithilfe eines Multiplexers um.

Minimieren Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe von Karnaugh Diagrammen.

a) $Y = A \bar{C} + C A B + \bar{C} (\bar{B} \bar{A} + B)$

b) $Y = A \bar{D} \bar{B} + D(B A + \bar{B} \bar{A}) + \bar{A} \bar{B} (C \bar{D} + \bar{C} \bar{D})$

c) $Y = C(\bar{B} \bar{D} + A(B \bar{D} + \bar{D} \bar{B})) + D \bar{A} \bar{B} + B \bar{A} \bar{D} \bar{C}$

Verwenden Sie "Don't Cares" spezifiziert durch die Funktion $X = A B \bar{D} \bar{C} + C(\bar{B}(\bar{A} \bar{D} + A D) + B D \bar{A})$.

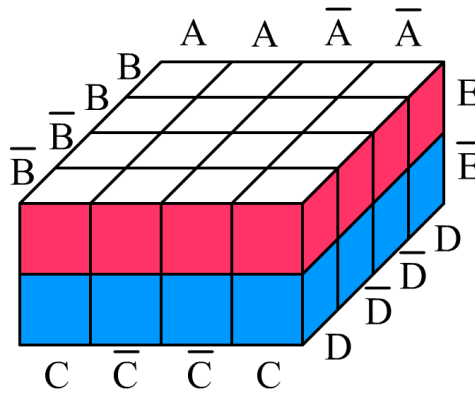
Übung 5.4.2 Extraktion einer KNF aus einem Karnaugh Diagramm

In der Vorlesung haben Sie bereits gelernt, wie Sie aus Karnaugh Diagrammen eine minimierte disjunktive Normalform extrahieren können. Überlegen Sie nun, wie Sie aus folgendem Karnaugh Diagramm eine entsprechend minimale konjunktive Normalform extrahieren könnten. Klären Sie auch die Rolle von Don't Cares in diesem Fall.

Y:		AB		A		
				11	10	
CD	00	00	01	11	10	D
	00	*	0	0	1	
	01	1	0	0	*	
	11	0	*	0	1	
C	10	0	0	0	1	
	B					

Übung 5.5 Karnaugh Diagramm für 5 Variablen – Zusatzaufgabe

Bisher haben wir gelernt, wie wir mittels Karnaugh Diagrammen bool'sche Gleichungen mit bis zu vier Variablen minimieren können. Tatsächlich bieten Karnaugh Diagramme auch die Möglichkeit, Ausdrücke mit mehr als vier Variablen zu minimieren. Exemplarisch wollen wir dies nun für einen bool'schen Ausdruck mit 5 Variablen durchführen. Hierzu müssen wir das Karnaugh Diagramm um eine weitere Schicht erweitern. Zwangsweise führt dies zu einer dreidimensionalen Struktur. Diese könnte etwa folgendermaßen aussehen:



Quelle: <https://de.wikibooks.org/wiki/Karnaugh-Veitch-Diagramm>

Wir versuchen in diesem Block nun Quader mit 2^k Einträgen zu finden, die nur 1 und * enthalten. Die Quader müssen, wie auch die Rechtecke bei Karnaugh Diagrammen, hierbei so groß wie möglich sein. Unser Ziel ist es, alle Einsen mit so wenigen Quadern wie möglich zu überdecken.

Minimieren Sie mit diesem Verfahren die folgende Gleichung. Nutzen sie dafür die gegebenen Karnaugh Diagramme.

$$Y = \bar{A} \bar{B} C \bar{D} + A D E \bar{B} + \bar{A} \bar{B} C \bar{D} + \bar{A} B D E + A C D E + B D \bar{E}$$

Verwenden Sie auch folgende Don't Cares:

$$X = \bar{A} \bar{B} \bar{C} D \bar{E} + A B D C E + \bar{A} B D E$$

Y:

		A			
		AB			
C	CD	00	01	11	10
	00				
	01				
	11				
	10				

B

D

Für E

Y:

		A			
		AB			
C	CD	00	01	11	10
	00				
	01				
	11				
	10				

B

D

Für \bar{E}