Digitaltechnik
Wintersemester 2021/2022
4. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr.-Ing. Thomas Schneider, M.Sc. Daniel Günther, M.Sc. Amos Treiber

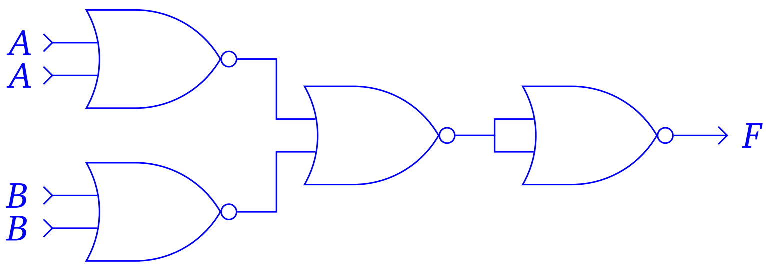
LÖSUNGSVORSCHLAG **KW46**

Bitte bearbeiten Sie die Übungsblätter bereits im Voraus, sodass Sie Ihre Lösungen zusammen mit Ihren Kommilitonen und Tutoren während der wöchentlichen Übungsstunde diskutieren können.
Mit der angegebenen Bearbeitungszeit für die einzelnen Aufgaben können Sie Ihren Leistungsstand besser einschätzen.

Übung 4.1 Logikgatter und Boole'sche Algebra EX3-1-1 [10 min]

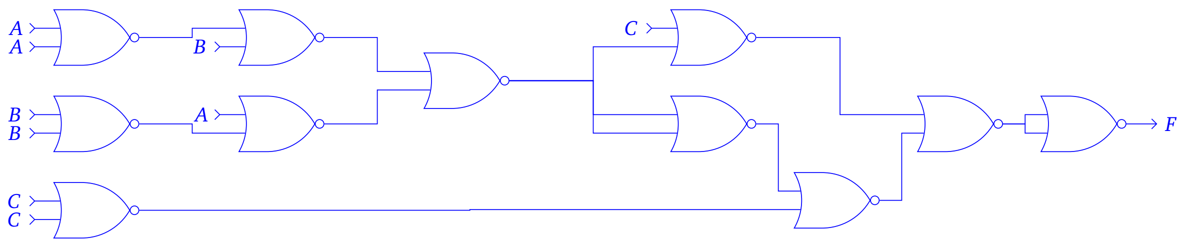
a) Zeichnen Sie eine Logikgatterschaltung, die aus den Signalen $A, B \in \mathbb{B}$ das Ergebnis $F = \overline{A\,B}$ berechnet, und ausschließlich aus NOR-Gattern mit je zwei Eingängen besteht.

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{A\,B} && \text{De Morgan (AND in OR umwandeln)}\\
&= \overline{A} + \overline{B} && \text{Involution (OR in NOR umwandeln)}\\
&= \overline{\overline{\overline{A} + \overline{B}}}
\end{aligned}
$$



b) Zeichnen Sie eine Logikgatterschaltung, die aus den Signalen $A, B, C \in \mathbb{B}$ das Ergebnis $F = A \oplus B \oplus C$ berechnet, und ausschließlich aus NOR-Gattern mit je zwei Eingängen besteht.

$$
\begin{aligned}
F &= A \oplus B \oplus C && \text{XOR auflösen}\\
&= (A\,\overline{B} + \overline{A}\,B) \oplus C && \text{XOR auflösen}\\
&= (A\,\overline{B} + \overline{A}\,B)\,\overline{C} + \overline{(A\,\overline{B} + \overline{A}\,B)}\,C && \text{Involution}\\
&= \overline{\overline{(\overline{\overline{A\,\overline{B}}} + \overline{\overline{\overline{A}\,B}})}}\,\overline{C} + \overline{\overline{\overline{(\overline{\overline{A\,\overline{B}}} + \overline{\overline{\overline{A}\,B}})}\,C}} && \text{De Morgan}\\
&= \overline{\overline{(\overline{\overline{A}+B} + \overline{A+\overline{B}})} + C} + \overline{(\overline{\overline{A}+B} + \overline{A+\overline{B}}) + \overline{C}} && \text{Involution}\\
&= \overline{\overline{(\overline{\overline{A}+B} + \overline{A+\overline{B}})} + C} + \overline{\overline{\overline{(\overline{\overline{A}+B} + \overline{A+\overline{B}})}} + \overline{C}} && \text{Involution}\\
&= \overline{\overline{\overline{\overline{(\overline{\overline{A}+B} + \overline{A+\overline{B}})} + C} + \overline{\overline{\overline{(\overline{\overline{A}+B} + \overline{A+\overline{B}})}} + \overline{C}}}}
\end{aligned}
$$



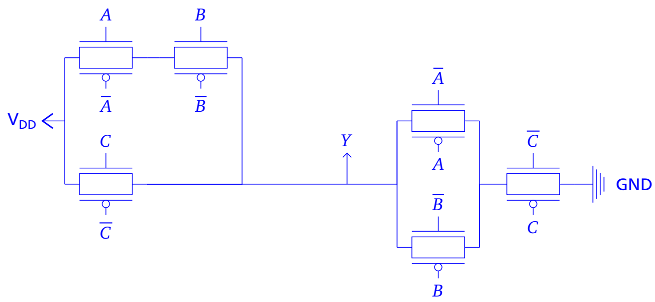
Übung 4.2 Transmissionsgatter [10 min]

Jede kombinatorische Schaltung lässt sich als Schaltnetz aus Transmissionsgattern darstellen. Analog zu CMOS-Schaltungen müssen dabei immer zwei komplementäre Pfade realisiert werden:

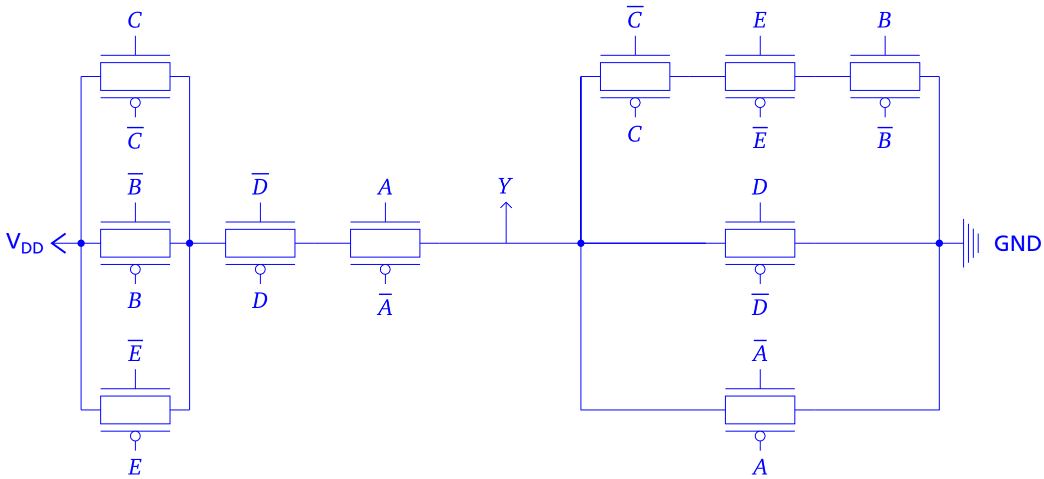
- der 1-Pfad von V_{DD} zum Ausgang
- der 0-Pfad von GND zum Ausgang

Bei jeder Kombination der Eingänge muss **genau einer** der beiden Pfade durchschalten, um den Ausgang auf eine logische 1 (V_{DD}) oder eine logische 0 (GND) zu ziehen. Im 1-Pfad entspricht eine Reihenschaltung der logischen Und-Verknüpfung der sequentiellen Teilschaltungen, während eine Parallelschaltung die logische Oder-Verknüpfung realisiert. Im 0-Pfad ist dies genau umgekehrt (komplementär). Die beiden Steuereingänge eines Transmissionsgatters (EN und $\overline{EN}$) müssen jeweils mit der positiven und negierten Form ein und desselben Eingangs beschaltet werden.
Realisieren Sie nun die folgenden Funktionen mit Transmissionsgattern:

a) $Y = (A\,B) + C$

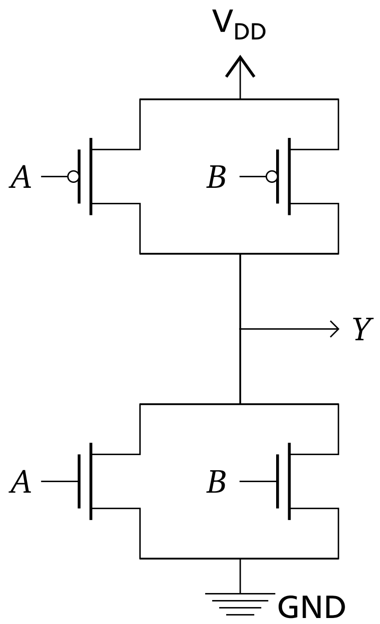


b) $Y = (C + \overline{B} + \overline{E})\,(\overline{D}\,A)$



Übung 4.3 Fehlerhafte Schaltung [5 min]

Folgende Schaltung ist gegeben. Chips, die entsprechend diesem Enwurf hergestellt sind, brennen im Betrieb aus.



a) Geben Sie die Input Variationen an, für welche die Chips ausbrennen.

   Der Chip wird zerstört, wenn pull-up und pull-down Netzwerk gleichzeitig aktiv sind. Dies ist der Fall, wenn $A = 0$ und $B = 1$, oder $A = 1$ und $B = 0$ gilt.

b) Gibt es Input Kombinationen, für die ein valider Output zustande kommt? Falls ja, geben Sie diese an.

   Ja, wenn $A = B$ gilt. Also $A = B = 0 \Rightarrow Y = 1$ oder $A = B = 1 \Rightarrow Y = 0$.

c) Alle Eingänge werden jetzt nur mit Input A verbunden. Entsteht dadurch ein funktionsfähiger Chip?

   Wie bereits festgestellt wurde, ist der Output valide wenn $A = B$ gilt. Wenn B durch A ersetzt wird, ist dies immer der Fall. Der Chip implementiert dann einen Inverter.

Übung 4.4 Komplementbildung [15 min]

Vereinfachen Sie das Komplement der folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln der boole'schen Algebra. Geben Sie für jeden Umformungsschritt das verwendete Axiom bzw. Theorem an.

a) $F = A + B(C\ D)$

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \overline{A + B(C\ D)} && \text{De Morgan} \\ &= \overline{A}\ \overline{B\ C\ D} && \text{De Morgan} \\ &= \overline{A}\,(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) \end{aligned}$$

b) $F = \overline{C} + (\overline{A}\, D + \overline{B}) + D\ (\overline{B\ \overline{B}} \oplus C)$

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{C} + (\overline{A}\, D + \overline{B}) + D\ (\overline{B\ \overline{B}} \oplus C)} && \text{Komplement}\\
&= \overline{\overline{C} + (\overline{A}\, D + \overline{B}) + D\ (\overline{0} \oplus C)} && \text{Negieren}\\
&= \overline{\overline{C} + (\overline{A}\, D + \overline{B}) + D\ (1 \oplus C)} && \text{XOR auflösen}\\
&= \overline{\overline{C} + (\overline{A}\, D + \overline{B}) + D\ (1 \cdot \overline{C} + \overline{1} \cdot C)} && \text{Negieren}\\
&= \overline{\overline{C} + (\overline{A}\, D + \overline{B}) + D\ (1 \cdot \overline{C} + 0 \cdot C)} && \text{Extremum}\\
&= \overline{\overline{C} + (\overline{A}\, D + \overline{B}) + D\ (1 \cdot \overline{C} + 0)} && \text{Neutralität}\\
&= \overline{\overline{C} + (\overline{A}\, D + \overline{B}) + D\ \overline{C}} && \text{Absorption}\\
&= \overline{\overline{C} + \overline{A}\, D + \overline{B}} && \text{De Morgan}\\
&= C\ \overline{\overline{A}\, D}\ B && \text{De Morgan}\\
&= C\ (A + \overline{D})\ B
\end{aligned}
$$

c) $F = A\,B + (\overline{C} + D\ \overline{A})\overline{B} + C\ \overline{D}$

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{(A\,B + (\overline{C} + D\ \overline{A})\overline{B} + C\ \overline{D})} && \text{De Morgan}\\
&= \overline{(A\,B + (\overline{C} + D\ \overline{A})\overline{B})}\ \overline{C\ \overline{D}} && \text{De Morgan}\\
&= \overline{(A\,B + (\overline{C} + D\ \overline{A})\overline{B})}\ (\overline{C} + D) && \text{De Morgan}\\
&= \overline{A\,B}\ \overline{((\overline{C} + D\ \overline{A})\overline{B})}\ (\overline{C} + D) && \text{De Morgan}\\
&= (\overline{A} + \overline{B})\overline{(\overline{C} + D\ \overline{A})\overline{B}}\ (\overline{C} + D) && \text{De Morgan}\\
&= (\overline{A} + \overline{B})(\overline{(\overline{C} + D\ \overline{A})} + B)\ (\overline{C} + D) && \text{De Morgan}\\
&= (\overline{A} + \overline{B})(C\ \overline{D\ \overline{A}} + B)\ (\overline{C} + D) && \text{De Morgan}\\
&= (\overline{A} + \overline{B})(C\ (\overline{D} + A) + B)\ (\overline{C} + D) && \text{Distributivität}\\
&= (\overline{A}\ (C\ \overline{D} + C\ A + B) + \overline{B}(C\ \overline{D} + C\ A + B))\ (\overline{C} + D) && \text{Distributivität}\\
&= (\overline{A}\ C\ \overline{D} + \overline{A}\ A\ C + \overline{A}\ B + \overline{B}\ C\ \overline{D} + \overline{B}\ C\ A + \overline{B}\ B)\ (\overline{C} + D) && \text{Komplement}\\
&= (\overline{A}\ C\ \overline{D} + 0\ C + \overline{A}\ B + \overline{B}\ C\ \overline{D} + \overline{B}\ C\ A + 0)\ (\overline{C} + D) && \text{Extremum}\\
&= (\overline{A}\ C\ \overline{D} + \overline{A}\ B + \overline{B}\ C\ \overline{D} + \overline{B}\ C\ A)\ (\overline{C} + D) && \text{Distributivität}\\
&= \overline{A}\ C\ \overline{D}\ \overline{C} + \overline{A}\ B\ \overline{C} + \overline{B}\ C\ \overline{D}\ \overline{C} + \overline{B}\ C\ A\ \overline{C} + \overline{A}\ C\ \overline{D}\ D + \overline{A}\ B\ D + \overline{B}\ C\ \overline{D}\ D + \overline{B}\ C\ A\ D && \text{Komplement}\\
&= \overline{A}\ \overline{D}\ 0 + \overline{A}\ B\ \overline{C} + \overline{BD}\ 0 + \overline{B}\ A\ 0 + \overline{A}\ C\ 0 + \overline{A}\ B\ D + \overline{B}\ C\ 0 + \overline{B}\ C\ A\ D && \text{Extremum}\\
&= \overline{A}\ B\ \overline{C} + \overline{A}\ B\ D + \overline{B}\ C\ A\ D
\end{aligned}
$$

Übung 4.5 Boole'sche Algebra EX3-1-2 EX3-1-3 EX3-1-4 EX3-1-5 [15 min]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln der boole'schen Algebra. Geben Sie für jeden Umformungsschritt das verwendete Axiom bzw. Theorem an.

a) $F = \overline{(\overline{A}+D)\,\overline{(B+\overline{C})}\,\overline{(\overline{C}+D)}}$

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{(\overline{A}+D)\,\overline{(B+\overline{C})}\,\overline{(\overline{C}+D)}} && \text{De Morgan + Involution}\\
&= \overline{(\overline{A}+D)}+B+\overline{C}+\overline{C}+D && \text{De Morgan}\\
&= A\,\overline{D}+B+\overline{C}+\overline{C}+D && \text{Idempotenz}\\
&= A\,\overline{D}+B+\overline{C}+D && \text{Distributivität}\\
&= (A+D)\,(\overline{D}+D)+B+\overline{C} && \text{Komplement}\\
&= (A+D)\cdot 1+B+\overline{C} && \text{Neutralität}\\
&= A+D+B+\overline{C}
\end{aligned}
$$

b) $F = \overline{A\,\overline{B}\,\overline{C+D}\,C\,A}$

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{A\,\overline{B}\,\overline{C+D}\,C\,A} && \text{De Morgan}\\
&= \overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C+D}}+\overline{C}+\overline{A} && \text{Involution}\\
&= \overline{A}+B+C+D+\overline{C}+\overline{A} && \text{Kommutitivität}\\
&= \overline{A}+\overline{A}+B+C+\overline{C}+D && \text{Komplement}\\
&= \overline{A}+\overline{A}+B+1+D && \text{Extremum}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

c) $F = \overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,\overline{B}\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,C+A\,B\,\overline{C}+A\,B\,C$

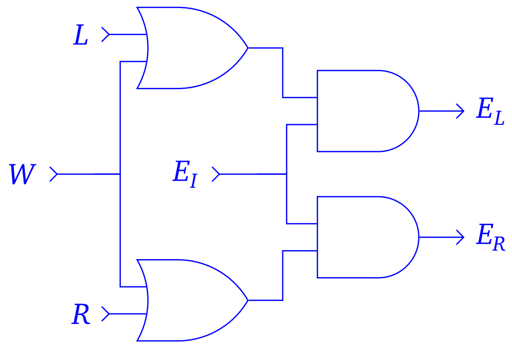
$$
\begin{aligned}
F &= \overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,\overline{B}\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,C+A\,B\,\overline{C}+A\,B\,C && \text{Distributivität}\\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,\overline{B}\,(\overline{C}+C)+A\,B\,(\overline{C}+C) && \text{Komplement}\\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,\overline{B}\cdot 1+A\,B\cdot 1 && \text{Neutralität}\\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,\overline{B}+A\,B && \text{Distributivität}\\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,(\overline{B}+B) && \text{Komplement}\\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,C+A\cdot 1 && \text{Neutralität}\\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,C+A && \text{Distributivität}\\
&= (\overline{A}+A)\,(\overline{B}+A)\,(C+A) && \text{Komplement}\\
&= 1\cdot(\overline{B}+A)\,(C+A) && \text{Neutralität}\\
&= (\overline{B}+A)\,(C+A) && \text{Distributivität}\\
&= \overline{B}\,C+A
\end{aligned}
$$

Übung 4.6 Entwurf realer Schaltungen [15 min]

Übung 4.6.1 Lichtsteuerung für ein Kraftfahrzeug

Entwerfen Sie die digitale Schaltung einer einfachen Lichtsteuerung für ein Kraftfahrzeug. Die Schaltung hat die Eingänge L (links blinken), R (rechts blinken), W (Warnblinker) und E_I (Blinkimpuls) sowie die Ausgänge E_L (linker Blinker) und E_R (rechter Blinker). Folgende Spezifikationen soll die Schaltung erfüllen:

- Wenn der Eingang L bzw. R gesetzt ist, soll der linke bzw. rechte Blinker blinken.
- Wenn der Eingang W gesetzt ist, sollen beide Blinker blinken.
- Die Blinkimpulse liegen am Eingang E_I an, d.h. E_I ist oszillierend auf 0 und 1 gesetzt.
- Wenn der Ausgang E_L bzw. E_R gesetzt ist, leuchtet der linke bzw. rechte Blinker.



Übung 4.6.2 Redundantes Überwachungssystem

Die Deutsche Bahn benutzt während einer Zugfahrt ein redundantes Fehlersystem, welches eine Notbremsung im Falle eines betrieblichen Fehlers automatisch auslöst. Dafür simulieren drei Computer den weiteren Fahrtverlauf und geben ein Signal C_i $(1 \leq i \leq 3)$ aus, welches bei gesetzter "0" einen Fehler signalisiert und ansonsten "1" ausgibt. Entwerfen Sie eine Schaltung, die die Eingänge C_1, C_2, C_3 und E_I (Blinkimpuls) erhält und die Ausgänge E_G (grüne LED), E_R (rote LED) und N (Notbremse) nach folgenden Spezifikationen setzt:

- die grüne LED (E_G) soll leuchten (logische "1"), wenn keiner der drei Computer einen Fehler ausgibt.
- die rote LED (E_R) soll leuchten (logische "1"), wenn genau einer der drei Computer einen Fehler ausgibt.
- die rote LED (E_R) soll blinken, wenn mindestens zwei der drei Computer einen Fehler ausgeben. Als Blinkimpuls soll der Eingang E_I verwendet werden.
- Die Notbremse (N) wird ausgelöst (logische "1"), wenn mindestens zwei der drei Computer einen Fehler ausgeben.