Probeklausur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WS 2011/2012
Januar 2012

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punktzahl	10	10	10	12	8	10	60	
erreichte Punktzahl								

Bitte beachten Sie: Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In dieser Klausur sind alle schriftlichen Unterlagen als Hilfsmittel zugelassen.
Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Punkte	00-24	25-28	29-31	32-34	35-38	39-41	42-44	45-48	49-51	52-54	55-60
Note	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\Phi\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ definiert durch

$$\Phi((x,y,z)^T) = \begin{pmatrix} x-\tilde{2}y \\ \tilde{4}z-x \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Seien weiterhin die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \tilde{1} \\ \tilde{1} \\ \tilde{1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \tilde{3} \\ \tilde{0} \\ \tilde{4} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \tilde{1} \\ \tilde{2} \\ \tilde{1} \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} \tilde{4} \\ \tilde{3} \\ \tilde{3} \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \tilde{3} \\ \tilde{3} \\ \tilde{2} \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} \tilde{2} \\ \tilde{3} \\ \tilde{4} \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{Z}_5^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $u_i := \Phi(v_i)$ für $i = 1,2,3$. **(3P)**

(b) Seien $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$. Finden Sie $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$. **(7P)**

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $x = 546$ und $y = 53$. **(2P)**

(b) Sei $H := \{53, 546\} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$. Bestimmen Sie $\langle H \rangle$ in $(\mathbb{Z}, +)$. **(4P)**

(c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Zahl $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ von 19 geteilt wird. **(4P)**

3. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion: für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist

$$\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n.$$

4. Aufgabe (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen! Sie erhalten jeweils für die richtige Antwort einen Punkt und für die Begründung zwei Punkte.

(a) Die Menge $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. **(3P)**

(b) Sei K ein Körper und seien $\varphi\colon K \to K$ und $\psi\colon K \to K$ lineare Abbildungen. Dann ist auch

$$\varphi \cdot \psi \colon \begin{cases} K \to K \\ x \mapsto \varphi(x) \cdot \psi(x) \end{cases}$$

linear. **(3P)**

(c) Die Relation R auf $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ gegeben durch

$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc$$

ist eine Äquivalenzrelation. **(3P)**

(d) Sei $n \geq 2$. Die Menge $K^{n\times n}$ bildet zusammen mit der Addition und der Matrixmultiplikation einen Ring, in dem Elemente existieren, die sowohl Linksnullteiler als auch Rechtsnullteiler sind. **(3P)**

5. Aufgabe (8 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum von V und $\phi\colon V \to V$ ein Automorphismus mit $\phi(U) = U$.

(a) Zeigen Sie für jedes $\tilde{v} \in V/U$, dass $\tilde{v} = \tilde{0}$ genau dann gilt, wenn $v \in U$ liegt. **(1P)**

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\tilde{\phi}\colon \begin{cases} V/U \to V/U \\ \tilde{v} \mapsto \widetilde{\phi(v)} \end{cases}$$

ein wohldefinierter Automorphismus ist. **(7P)**

6. Aufgabe (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Eine korrekte Antwort gibt einen Punkt, jede falsche Antwort zieht einen Punkt ab. Die Mindestpunktzahl in diesem Aufgabenteil beträgt 0.
In diesem Aufgabenteil sind keine Begründungen erforderlich.

wahr	falsch	
☐	☐	$\mathbb{Z}_{105}$ ist ein Körper.
☐	☐	Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 = \lvert z\rvert^2$.
☐	☐	Jedes Maximum einer Menge M ist auch ein Supremum von M.
☐	☐	Für alle Teilmengen A, B einer Grundmenge M ist $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
☐	☐	Auf $\mathbb{R}$ ist $>$ eine Ordnungsrelation.
☐	☐	Wenn $A \subseteq B$ gilt, dann gibt es eine injektive Funktion $f\colon A \to B$.
☐	☐	Jede lineare Abbildung, die injektiv ist, muss auch bijektiv sein.
☐	☐	Es sei $(\cdot\mid\cdot)$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Dann gilt $(v\mid w)\cdot(v\mid w) \leq (v\mid v)\cdot(w\mid w)$ für alle $v, w \in V$.
☐	☐	Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt $\dim(\langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle) \leq n$.
☐	☐	Sei V ein K-Vektorraum und sei $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist $\{2v_1 + v_2, -v_1 + v_2, v_1 + v_2\}$ linear abhängig.