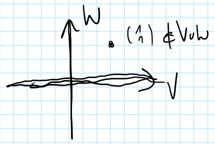
Mathe I: Klausurvorbereitung

Aufgabe 1: a) U VR, $V, W \subseteq U$ Unter-VR

$V \cup W$ UVR?

Falsch!, da: $U = \mathbb{R}^2$, $V = \text{span}\{\binom{1}{0}\} = \{\lambda \binom{1}{0} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $W = \text{span}\{\binom{0}{1}\}$



$\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = \binom{1}{1} \notin V \cup W$

b) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ so, dass $A \cdot v = 0$, $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot v \in \mathbb{R}^n$, $A(cv) \overset{A \text{ linear}}{=} c \underbrace{Av}_{=0} = 0$

$\Rightarrow$ auch $c \cdot v$ ist Lsg von $Aw = 0$, $w \in \mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $c \cdot v$ Lsg $\Rightarrow$ unendlich viele Lsg $\Rightarrow$ WAHR!

c) $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ A ist invertierbar, da $\det(A) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists B = A^{-1}$: $B A = A B = I$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

FALSCH! $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 1 - (1 \cdot (-2))} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = B \notin \mathbb{Z}^{2 \times 2}$

d) FALSCH! $R = (\mathbb{Z}_4, +, \cdot) = (\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ $\quad \mathbb{Z}_4 = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}\}$

$a = 2, b = 2$, $\Rightarrow a \cdot b = 4 = \tilde{0}$ in $\mathbb{Z}_4$, also $a \neq 0$, $b \neq 0$ aber $a \cdot b = \tilde{0}$

e) RICHTIG: Sei $\{v_1, .., v_p\} \subseteq V$ eine l.u. Teilmenge von V

$U = \text{span}\{v_1, .., v_p\}$ ein UVR und $v_1, .., v_p$ ist Basis, da die Vektoren l.u. sind.

f) WAHR! $\Phi \circ \psi = 0 \Leftrightarrow \psi(V) \subseteq \ker(\Phi)$

"$\Rightarrow$": $\Phi \circ \psi = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V: \Phi \circ \psi(v) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V: \Phi(\psi(v)) = 0 \Rightarrow \psi(v) \in \ker(\Phi)$ ✓

"$\Leftarrow$": $\psi(V) \subseteq \ker(\Phi) \Rightarrow \Phi \circ \psi(v) = 0 \;\; \forall v \in V \Leftrightarrow \Phi \circ \psi = 0$

g) WAHR! $\dim(U) = 4$, $\dim(V) = 3$, $\dim(W) = 2$, mit der Dimensionsformel

$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$ folgt $\quad V + W = \text{span}\{V \cup W\} \subseteq U$

Annahme: $\dim(V \cap W) = 0 \Rightarrow \dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) = 3 + 2 = 5$

$\dim(V+W) \leq \dim(U) = 4 \Rightarrow 4 \geq 5$ ↯

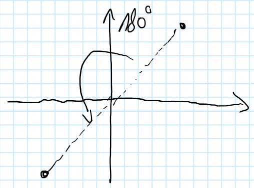
$\Rightarrow \dim(V \cap W) > 0$ ✓

f) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bijektiv existiert: WAHR!

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right), & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$-(\frac{n+1}{2})$, n ungerade

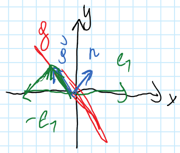
Aufgabe 2:



Um die Matrixdarstellung in der Standardbasis zu bestimmen, genügt es die Bilder der Basisvektoren zu kennen.

ges: $\Phi_2 \circ \Phi_1 (e_i)$, $i=1,2$, $\quad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^{2\times 2} \ni \Phi_2 \circ \Phi_1 = \left(\Phi_2\circ\Phi_1(e_1), \Phi_2\circ\Phi_1(e_2)\right)$$



Wir bilden e_1 ab: $\quad$ unter Φ_1: $\quad \Phi_1(e_1) = -e_1$

$\Phi_2(-e_1) = ?$: $\quad \Phi_2$ als Projektion auf $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x=-y}_{y(x)=-x}\}$

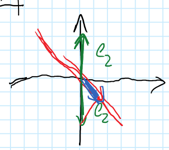
Normalvektor auf g ist $n = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$-e_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = r\cdot n + \underbrace{s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{} \Rightarrow \begin{pmatrix}\underset{n}{1} & \underset{\binom{-1}{1}}{-1}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rechnen} \Rightarrow r = -\tfrac{1}{2}, \ \boxed{s = \tfrac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \Phi_2(-e_1) = s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_2\circ\Phi_1(e_1) = \Phi_2(-e_1) = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}}$$

e_2: analog wie für e_1:



$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\Phi_1(e_2) = -e_2, \quad \Phi_2(-e_2) = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\Phi_2\circ\Phi_1(e_2) = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_2\circ\Phi_1 = \begin{pmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}} \checkmark$$

b) $v \in \mathbb{R}^2$ bel. $\quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 = r\cdot n + s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$$\Phi_2 \circ \Phi_1(v) = \Phi_2(-v) = \Phi_2\left(-r\cdot n - s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = -s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$(\Phi_2\circ\Phi_1)\cdot(\Phi_2\circ\Phi_1)(v) = (\Phi_2\circ\Phi_1)\left(-s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = \Phi_2\Big(\underbrace{s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\in g}\Big) = s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$(\Phi_2\circ\Phi_1)^3(v) = -s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ die Projektion Φ_2 ändert nichts mehr, nach einmaliger Anwendung.
Es ändert sich also nur mehr das Vorzeichen

$$\Rightarrow \left| (\Phi_2\circ\Phi_1)^n(v) = (-1)^n\cdot s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \ n\geq 1 \right|$$

v ändert sich also nur mehr das Vorzeichen

$$\Rightarrow \boxed{(\Phi_2 \circ \Phi_1)^n(v) = (-1)^n \cdot s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \geq 1}$$

s aus Punkt a)

Also für e_1: $(\Phi_2 \circ \Phi_1)^n = (-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

für e_2: $(\Phi_2 \circ \Phi_1)^n = \dots = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{(\Phi_2 \circ \Phi_1)^n = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{n=2021}{=} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3: ZZ: $x \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Induktionsanfang: $n=0$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq 1$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $0 \leq k \leq n$: $(1+x)^k \geq 1 + x \cdot k$ (IV)

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0,\ \text{da } x \geq -1} \overset{(IV)}{\geq} (1+x \cdot n)(1+x) = 1 + x + x \cdot n + \underbrace{x^2 \cdot n}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1) \cdot x \ ✓$$

Aufgabe 4:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -12 & 2 \\ 3 & 11 & -1 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Eigenwerte:

$$0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -12 & 2 \\ 3 & 11-\lambda & -1 \\ 6 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & -12 \\ 3 & 11-\lambda \end{vmatrix} - 12 \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ 11-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \cdot \left((-1-\lambda)(11-\lambda) + 3 \cdot 12 \right) - 12 \left((1+\lambda) - 6 \right) + 6 \left(12 - 2(11-\lambda) \right)$$

$$= \dots = (3-\lambda) \cdot (\lambda - 5)^2$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte (als Nullstellen des char. Polys.) sind $\underline{\underline{\lambda_1 = 3}}$, $\underline{\underline{\lambda_2 = 5}}$, $\underline{\underline{\lambda_3 = 5}}$

(b) Eigenräume:

Zu λ_1: $\ker(A - \lambda_1 I)$:

$$A - 3I = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} -4 & -12 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -12 & -4 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & -12 & -4 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \Big] \cdot 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \Big] -3$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ges: $v = (v_1, v_2, v_3)$; $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$4v_2 + 2v_3 = 0 \quad | :2$

$\Rightarrow 2v_2 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = -2v_2$

$-v_1 + 8v_2 + 3v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 8v_2 + 3v_3$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\text{da Spaltentausch}) \rightsquigarrow \boxed{x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\lambda_1} = \{ \lambda \cdot x^{(1)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \ker(A - \lambda_1 I)}$$

$\ker(A - \lambda_{2,3} I) = ?$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 6 & 12 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -6 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{E_{\lambda_{2,3}} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}}$$

c) Diagonalisiere A: d.h. Finde S: $SAS^{-1} = D$

$x^{(i)}$ EV von A: $\quad A \cdot x^{(i)} = \lambda_i \cdot x^{(i)}$

Für die Matrix $S = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ gilt

$$A \cdot S = A(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = (Ax^{(1)}, Ax^{(2)}, Ax^{(3)}) = (\lambda_1 x^{(1)}, \lambda_2 x^{(2)}, \lambda_3 x^{(3)}) = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = S \cdot D$$

$$\Rightarrow A \cdot S = S \cdot D \quad \Rightarrow \quad \boxed{S^{-1} A S = D}$$

Aufgabe 5:

(a) zz: $G_n := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid |\det(A)| = 1 \}$ ist eine Gruppe

Gruppeneigenschaften: (Skript S.27)

1.) $G_n \neq \emptyset$: da $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(I) = 1$

2.) Assoziativität: $A, B, C \in G_n$: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ stimmt für Matrizen

3.) neutrales Element: $I \in G_n$: $I \cdot A = A \cdot I = A \quad \forall A \in G_n \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ ✓

4.) inverses Element: $A \in G_n$: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existiert

$$|\det(A^{-1})| = |\det(A)^{-1}| = \frac{1}{|\det(A)|} = 1 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \in G_n$$

$\Rightarrow$ G_n ist eine Gruppe. !

(b) $H_n = \{ A \in G_n \mid \det(A) = 1 \}$ ist eine UG von G_n

Untergruppeneigenschaften: (S.37)

(UG1): $H_n \neq \emptyset$: da $I \in H_n$, $\det(I) = 1$

(UG2): Für $A, B \in H_n$: $AB^{-1} \in H_n$ da, $\det(A B^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B^{-1}) = \underbrace{\det(A)}_{=1} \cdot \underbrace{\det(B)^{-1}}_{1/1 = 1} = 1$

$\Rightarrow A \cdot B^{-1} \in H_n$ ✓

(c) $K_n = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist orthogonal} \}$ ist UG von G_n

1.) Zeige: $K_n \subseteq G_n$

Sei $A \in K_n$: A ist orthogonal d.h. $A^T A = A A^T = I$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \det(A^T A) = \det(I) \\ \qquad \det(A^T)\cdot\det(A) = \det(A)\cdot\det(A) = \det(A)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Leftrightarrow |\det(A)| = 1 \Rightarrow A \in G_n$$

(UG1): $\underline{K_n \neq \emptyset}$ & $\underline{I \in K_n}$ mit $I^T I = I I^T = I$

(UG2): $\underline{\text{Für } A, B \in K_n: \ A \cdot B^{-1} \in K_n}$

$$(A\cdot B^{-1})^T (A\cdot B^{-1}) = (A\cdot B^{-1})\cdot(A\cdot B^{-1})^T = I$$

$$(A\cdot B^{-1})^T (A\cdot B^{-1}) = (A\cdot B^{-1})^T (A\cdot B^{-1}) = (B^T)^T \underbrace{A^T \cdot A}_{=I} \cdot B^T = B\cdot B^T = I \ \checkmark$$

(d) ges: $A \in K_2 \setminus H_2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = -1, \quad \Rightarrow A \notin H_2$$

aber $A^T A = A\cdot A^T = A^2 = I \Rightarrow A \in K_2$

Aufgabe 6:

(a) zz: $(R_s'')_{s\in S} := (R_s \cap R_s')_{s\in S}$ ist eine Kongruenzrelation

$\underline{\text{Definition 4.33:}}$ Für eine Kongruenzrelation $(\hat{R}_s)_{s\in S} = \hat{R}$ gilt

$$x_1 \hat{R}_{s_1} y_1, \ldots, x_n \hat{R}_{s_n} y_n \Leftrightarrow f^A(x_1,\ldots,x_n)\ \hat{R}_s\ f^A(y_1,\ldots,y_n) \quad \text{für alle } f: s_1 \times \ldots \times s_n \to s$$

Sei f^A bel., dann gilt

$$x_1 R_{s_1}'' y_1, \ldots, x_n R_{s_n}'' y_n \Leftrightarrow x_1 R_{s_1}' y_1 \wedge x_1 R_{s_1} y_1, \ldots, x_n R_{s_n}' y_n \wedge x_n R_{s_n} y_n$$

$$\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} f^A(x_1,\ldots,x_n)\ R_s'\ f^A(y_1,\ldots,y_n) \wedge f^A(x_1,\ldots,x_n)\ R_s\ f^A(y_1,\ldots,y_n)$$

$$\Leftrightarrow f^A(x_1,\ldots,x_n)\ R_s''\ f^A(y_1,\ldots,y_n)$$

$\Rightarrow$ laut Def. ist R_s'' eine Kongruenzrelation.

(b) $\Sigma = (S, F, ar)$, $S = \{s\}$, $F = \{c, f\}$, $ar(c) = (\varepsilon, s)$, $ar(f) = (s, s)$

$\underline{\text{zz}}$: $T(\Sigma)$ ist isomorph zur Σ-Algebra N mit $N_s = \mathbb{N}$, $c^N = 0$, $f^N(n) = n+1$, $n \in \mathbb{N}$

Ein bijektiver Homomorphismus ist gegeben durch

$$h_s: (T(\Sigma))_s \to N_s$$

- •) $h_s(c) := 0$
- •) $h_s(ft) := h_s(t) + 1$, $t \in (T(\Sigma))_s$

$\underline{\text{Homomorphie:}}$

$$h_s(c^{T(\Sigma)}) = h_s(c) = 0 = c^N$$

$$h_s(f^{T(\Sigma)}(t)) = h_s(ft) = h_s(t)+1 = f^N(h_s(t))$$

$\underline{\text{Isomorphie:}}$

Wir gebn die Umkehr-abbildung an.

$$g_s : N_s = N \to (T(\Sigma))_s$$

- $g_s(0) = c$
- $g_s(n+1) = f g_s(n) \quad , n \in N$

<u>z.z.:</u> $g_s \circ h_s = id_{T(\Sigma)_s}$, $h_s \circ g_s = id_N$

<u>per Induktion:</u>

<u>IA:</u> $g_s(h_s(c)) = g_s(0) = c \quad , \quad h_s(g_s(0)) = h_s(c) = 0$

<u>IV:</u> $g_s \circ h_s(t) = t \quad , \quad h_s \circ g_s(n) = n$

<u>IS:</u> $h_s \circ g_s(n+1) = h_s(f g_s(n)) = h_s(g_s(n)) + 1 = n+1 \quad , \quad g_s \circ h_s(ft) = g_s(h_s(t)+1) = f g_s(h_s(t)) = ft$ ✓