Mathe 1: Klausur #4

1. Aufgabe

(a) $$(b_1 | b_2) = \left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{5^2} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{25} (-12+12) = 0.$$

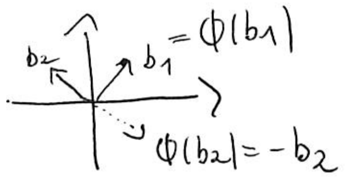
$$(b_1 | b_1) = \frac{1}{25} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{25}(9+16) = \frac{25}{25} = 1$$

$$(b_2 | b_2) = \frac{1}{25} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{25}(16+9) = \frac{25}{25} = 1$$

Also ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$.

(b) Es gilt $\phi(b_1) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2$ und

$\phi(b_2) = -b_2 = 0 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2$.



Also ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Weiter sei $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dann gilt

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$$

$$= \frac{1}{5} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=} \cdot \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}.$$

(c) Nach Rechnung in (b) ist

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\Phi) \text{ ähnlich zu } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: A.$$

Die Matrix A hat Diagonalgestalt, also ist $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\Phi)$ diagonalisierbar.

2. Aufgabe

Nur Teil (a):

Anfang $n=1$: $\left\| \sum_{k=1}^{1} v_k \right\|_V = \|v_1\|_V \leq \|v_1\|_V = \sum_{k=1}^{1} \|v_k\|_V$

ist wahr.

Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $\left\| \sum_{k=1}^{n} v_k \right\|_V \leq \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|_V$.

Schritt $n \to n+1$: Es gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} v_k \right\|_V = \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} v_k \right) + v_{n+1} \right\|_V$$

$$\overset{\triangle\text{-Ungleichung}}{\leq} \left\| \sum_{k=1}^{n} v_k \right\|_V + \|v_{n+1}\|_V$$

$$\overset{\text{Annahme}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} \|v_k\|_V \right) + \|v_{n+1}\|_V$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \|v_k\|_V.$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}^*$ wahr.

Teil (b) nicht relevant für diese Mathe 1.

3. Aufgabe

(a) p Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ wird nicht von p geteilt

$\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (Korollar 2.1.17.)

Hier also: $a = 10$ und $p = 13$. Dann ist

$10^{12} = a^{12} \equiv 1 \pmod p$. Also ist

$$10^{12000} \equiv 1^{1000} \pmod p \equiv 1 \pmod p$$

und damit

$$10^{12001} \equiv 10^{12000} \cdot 10 \pmod p$$

$$\equiv 1 \cdot 10 \pmod p \equiv 10 \pmod p.$$

(b) Satz 2.3.8. anwenden:

(UG1) $U \neq \emptyset$: Sei $g := n$, ~~Dann ist $n \in U$~~ dann ist $g^1 = n$, d.h. für $k = 1$ gilt $g^k = n$. Somit ist $n \in U$ und $U \neq \emptyset$.

(UG2) Seien $g, h \in U$. Dann gibt es $k, l \in \mathbb{N}^*$ mit $g^k = h^l = n$. Zu zeigen: $g * \overline{h} \in U$.

Sei $m \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Dann ist

$$(g * \overline{h})^m = g * \overline{h} * \dots * g * \overline{h}$$

$$\overset{\text{Gabelsch}}{=} g * \dots * g * \overline{h} * \dots * \overline{h}$$

$$= g^m * \overline{h}^m = g^m * \overline{h^m}.$$

Für $m = k \cdot \ell$ folgt

$$g^m = g^{k \cdot \ell} = (g^k)^\ell = n^\ell = n \quad \text{und}$$

$$\overline{h^m} = \overline{h^{k \cdot \ell}} = \overline{(h^\ell)^k} = \overline{n^k} = \overline{n} = n.$$

Also ist $(g * \overline{h})^{k \cdot \ell} = n * n = n$, d.h. $g * \overline{h} \in U$.

Somit ist U Untergruppe von G.

(c) $U = \{ x \in \mathbb{Z} : (\exists k \in \mathbb{N}^*)(k \cdot x = 0) \} = \{0\}$.

4. Aufgabe

(a) Wahr: Sei λ EW von A, d.h. $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dann gilt

$$\det(A^T - \lambda I) \overset{I^T = I}{=} \det(A^T - \lambda I^T)$$
$$= \det((A - \lambda I)^T)$$
$$= \det(A - \lambda I) = 0, \text{ d.h.}$$

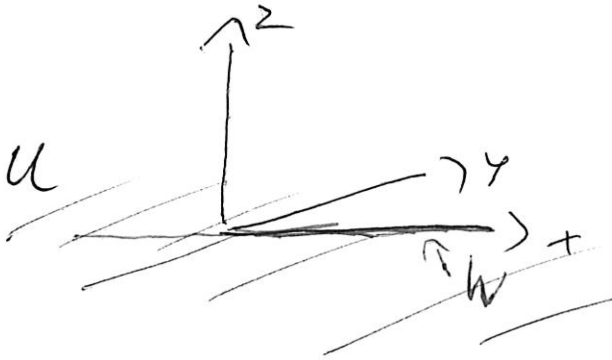
λ ist EW von A^T.

(b) Wahr: Sei $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und weiter sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V. Dann gilt:

$\operatorname{Rang}(\Phi) = \dim(W) \Rightarrow \{\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)\}$ hat m linear unabhängige Vektoren, d.h. $\{\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)\}$ spannen W auf. Damit ist Φ surjektiv.

(c) Falsch: Sei $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \}$

und $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0 \}$.



Für den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt es dann keine $u \in U$

und $w \in W$ mit $u + w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, weil stets $z = 0$ ist.

(d) Falsch: • $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 = \frac{2-1}{1}$ ✓

• $n = 2$: $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{3}{2}$ und $\frac{2 \cdot 2 - 1}{2} = \frac{3}{2}$ ✓

• $n = 3$: $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6}$ und

$$\frac{2 \cdot 3 - 1}{3} = \frac{5}{3} \neq \frac{11}{6} \quad f$$

5. Aufgabe

Direkt: Wegen $\Phi \neq id_V$ gibt es $v \in V$ mit $\Phi(v) \neq v$.

Dann ist $w := \Phi(v) - v \neq 0$ und $\Phi(w) = \Phi(\Phi(v)) - \Phi(v) = 0$,

d.h. w ist EV zum EW 0.

Indirekt: Ist 0 kein EW von Φ, dann ist Φ invertierbar

und aus $\Phi \circ \Phi = \Phi$ folgt $\underbrace{\Phi \circ \Phi \circ \Phi^{-1}}_{\Phi =} = \Phi \circ \Phi^{-1} = id_V$

↯.

6. Aufgabe

(a) Falsch: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, aber $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq (A \cdot B)^{-1}$

(b) Falsch: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ist indefinit

(c) Falsch: $z = i$

(d) Wahr: $f(x) := 4x$

(e) Nicht relevant für diese Mathe 1

(f) Wahr: $D = \lambda \cdot I \Rightarrow B = S \cdot D \cdot S^{-1} = \lambda\, S \cdot I \cdot S^{-1}$

$= \lambda \cdot S \cdot S^{-1} = \lambda \cdot I = D$.

(g) Falsch: $v = -w$ wählen

(h) Wahr

(i) Wahr

(j) Wahr