

**Skript zur Vorlesung**  
**Mathematik I/II für Inf, WInf**  
**Wintersemester 15/16 und Sommersemester 16**

Robert Haller-Dintelmann

7. März 2021



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Mathematik I</b>	<b>1</b>
<b>1. Grundbegriffe</b>	<b>3</b>
1.1. Aussagen . . . . .	3
1.1.1. Aussagen . . . . .	3
1.1.2. Aussageformen . . . . .	3
1.1.3. All- und Existenzquantor . . . . .	4
1.1.4. Verknüpfung von Aussagen . . . . .	4
1.2. Mengen . . . . .	5
1.3. Relationen . . . . .	8
1.3.1. Ordnungsrelationen . . . . .	9
1.3.2. Äquivalenzrelationen . . . . .	11
1.4. Abbildungen . . . . .	13
1.5. Beweisprinzipien . . . . .	15
1.5.1. Der direkte Beweis . . . . .	15
1.5.2. Beweis durch Kontraposition . . . . .	16
1.5.3. Beweis durch Widerspruch . . . . .	16
1.5.4. Vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ . . . . .	17
<b>2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper</b>	<b>19</b>
2.1. Rechnen in $\mathbb{Z}$ , Primzahlen und Teiler . . . . .	19
2.1.1. Modulare Arithmetik . . . . .	20
2.1.2. Der Euklidische Algorithmus . . . . .	21
2.1.3. Der kleine Satz von Fermat . . . . .	25
2.2. Die Mathematik hinter Public-Key-Verfahren der Kryptographie .	25
2.3. Gruppen . . . . .	27
2.3.1. Untergruppen . . . . .	31
2.3.2. Gruppenhomomorphismen . . . . .	33
2.4. Ringe und Körper . . . . .	36
2.4.1. Ringe . . . . .	36
2.4.2. Körper . . . . .	38
2.5. Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .	41

<b>3. Lineare Algebra</b>	<b>47</b>
3.1. Vektorräume . . . . .	47
3.1.1. Das Axiomensystem und Beispiele . . . . .	47
3.1.2. Die Summenschreibweise . . . . .	52
3.2. Untervektorräume, Basis und Dimension . . . . .	53
3.2.1. Untervektorräume . . . . .	53
3.2.2. Lineare Unabhängigkeit und Basen . . . . .	56
3.3. Der Faktorraum . . . . .	62
3.4. Normierte Räume . . . . .	65
3.5. Geometrie im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	72
3.6. Lineare Abbildungen . . . . .	77
3.7. Matrizen und lineare Abbildungen . . . . .	87
3.7.1. Matrixrechnung . . . . .	87
3.7.2. Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung . . . . .	91
3.8. Lineare Gleichungssysteme . . . . .	98
3.8.1. Lösbarkeitstheorie . . . . .	98
3.8.2. Der Gauß-Algorithmus . . . . .	100
3.9. Basiswechsel . . . . .	105
3.10. Determinanten . . . . .	110
3.11. Eigenwerttheorie . . . . .	116
<b>4. Ein Ausblick auf die universelle Algebra</b>	<b>125</b>
4.1. Motivation . . . . .	125
4.2. Signaturen, Algebren und Homomorphismen . . . . .	126
4.3. Unteralgebren und Faktoralgebren . . . . .	127
4.4. Terme, termerzeugte Algebren und das Prinzip der Terminuktion	129
<b>5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit</b>	<b>131</b>
5.1. Die reellen Zahlen . . . . .	131
5.2. Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten . . . . .	133
5.3. Konvergenz von Folgen . . . . .	137
5.3.1. Der Konvergenzbegriff und wichtige Beispiele . . . . .	137
5.3.2. Konvergenzkriterien . . . . .	144
5.3.3. Teilfolgen und Häufungswerte . . . . .	146
5.4. Asymptotik . . . . .	147
<b>II. Mathematik II</b>	<b>151</b>
5.5. Reihen . . . . .	153
5.5.1. Absolute Konvergenz . . . . .	156
5.5.2. Das Cauchy-Produkt . . . . .	159
5.6. Konvergenz in normierten Räumen . . . . .	162

5.7.	Stetigkeit reeller Funktionen . . . . .	170
5.7.1.	Der Grenzwertbegriff für Funktionen . . . . .	171
5.7.2.	Stetigkeit . . . . .	174
5.7.3.	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	178
5.8.	Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	180
5.9.	Potenzreihen . . . . .	187
5.10.	Wichtige Funktionen . . . . .	193
5.10.1.	Exponentialfunktion und Logarithmus . . . . .	193
5.10.2.	Trigonometrische Funktionen . . . . .	195
5.10.3.	Die Polardarstellung komplexer Zahlen . . . . .	200
5.10.4.	Hyperbolische Funktionen . . . . .	202
<b>6.</b>	<b>Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung</b>	<b>203</b>
6.1.	Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen . . . . .	203
6.1.1.	Der Ableitungsbegriff . . . . .	203
6.1.2.	Ableitungsregeln . . . . .	206
6.1.3.	Höhere Ableitungen . . . . .	211
6.2.	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . . .	214
6.3.	Extremwerte . . . . .	224
6.4.	Partielle Ableitungen . . . . .	226
6.5.	Totale Differenzierbarkeit . . . . .	233
6.6.	Extremwertprobleme in mehreren Variablen . . . . .	241
6.7.	Integration in $\mathbb{R}$ . . . . .	245
6.7.1.	Definition des bestimmten Integrals . . . . .	245
6.7.2.	Stammfunktionen und der Hauptsatz . . . . .	251
6.8.	Integrationstechniken . . . . .	254
6.9.	Fourierreihen . . . . .	261
<b>7.</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>269</b>
7.1.	Problemstellung und Motivation . . . . .	269
7.2.	Elementare Lösungsmethoden . . . . .	272
7.2.1.	Getrennte Veränderliche . . . . .	272
7.2.2.	Homogene Differentialgleichungen . . . . .	275
7.2.3.	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	276
7.3.	Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	279
7.3.1.	Lineare Systeme . . . . .	280
7.3.2.	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	282
7.4.	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	288
7.5.	Existenz- und Eindeutigkeitsresultate . . . . .	292
	<b>Tabelle der griechischen Buchstaben</b>	<b>297</b>



**Teil I.**

**Mathematik I**





# 1. Grundbegriffe

## 1.1. Aussagen

### 1.1.1. Aussagen

Eine *Aussage* ist ein in verständlicher Sprache formulierter Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

**Beispiel 1.1.1.** Hier sind fünf Aussagen:

$A_1$  : 3 ist eine ungerade Zahl. (w)

$A_2$  : Die Erde ist eine Scheibe. (f)

$A_3$  : Es regnet gerade in Madrid. (?)

$A_4$  : Jede natürliche Zahl ist gerade. (f)

$A_5$  : 3 ist eine Primzahl. (w)

Keine Aussage ist: „Guten Morgen.“

### 1.1.2. Aussageformen

Eine *Aussageform* ist ein Satz mit einer oder mehreren Variablen, der bei Belegung der Variablen durch einen konkreten Wert eine Aussage wird.

**Beispiel 1.1.2.** Hier sind vier Aussageformen:

$E_1(x) : x + 10 = 5.$

$E_2(x) : x^2 \geq 0.$

$E_3(n) : n \text{ ist gerade.}$

$E_4(x, y) : 3x - 4y \neq 10.$

## 1. Grundbegriffe

### 1.1.3. All- und Existenzquantor

Sei  $E(x)$  eine Aussageform und  $M$  eine Menge von möglichen  $x$ . Dann bedeutet

$$\forall x \in M : E(x) \quad \text{„Für alle } x \text{ aus } M \text{ ist } E(x) \text{ wahr“}.$$

Man nennt  $\forall$  den *Allquantor*.

Weiter bedeutet

$$\exists x \in M : E(x) \quad \text{„Es existiert ein } x \text{ aus } M, \text{ für das } E(x) \text{ wahr ist“}.$$

Man nennt  $\exists$  den *Existenzquantor*.

Man beachte, dass durch das Vorstellen eines Quantors auf diese Weise aus einer Aussageform eine Aussage wird. Hat die Aussageform mehrere Variablen braucht es natürlich auch mehrere Quantoren.

**Beispiel 1.1.3.** Aus obigen Aussageformen können wir z.B. die folgenden Aussagen machen:

(a)  $\forall x \in \mathbb{R} : E_2(x)$ , d.h.  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ . (w)

(b)  $\forall n \in \mathbb{N} : E_3(n)$  entspricht genau  $A_4$ . (f)

(c)  $\exists n \in \mathbb{N} : E_3(n)$ , d.h. es gibt eine gerade natürliche Zahl. (w)

**Warnung 1.1.4.** „Es existiert ein  $x$ “ bedeutet nicht „Es existiert genau ein  $x$ “. Ist die Aussage  $\exists x \in M : E(x)$  wahr, so kann es durchaus mehrere  $x$  geben, für die  $E(x)$  wahr wird!

### 1.1.4. Verknüpfung von Aussagen

Seien  $A$  und  $B$  zwei Aussagen. Dann können wir daraus verschiedene neue Aussagen machen.

**Konjunktion („und“):** Zeichen:  $\wedge$

$$A \wedge B : \quad \text{Sowohl } A \text{ als auch } B \text{ sind wahr.}$$

**Disjunktion („oder“):** Zeichen:  $\vee$

$$A \vee B : \quad A \text{ ist wahr oder } B \text{ ist wahr.}$$

**Negation („nicht“):** Zeichen:  $\neg$

$$\neg A : \quad A \text{ gilt nicht.}$$

**Implikation („wenn . . . , dann“):** Zeichen:  $\implies$

$A \implies B$  : Wenn  $A$  gilt dann auch  $B$ .  
 Aus  $A$  folgt  $B$ .  
 $A$  impliziert  $B$ .

**Äquivalenz („genau dann, wenn“):** Zeichen:  $\iff$

$A \iff B$  :  $A$  gilt genau dann, wenn  $B$  gilt.  
 $A$  und  $B$  sind äquivalent.

**Warnung 1.1.5.** (a)  $\vee$  ist *nicht* „entweder . . . oder“, d.h.  $A \vee B$  ist auch wahr, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  wahr sind.

(b) Gewöhnungsbedürftig ist zunächst folgendes: Wenn  $A$  falsch ist, dann ist  $A \implies B$  in jedem Fall wahr. Anders ausgedrückt: Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern. Man sieht das auch an der Wahrheitstafel der Implikation

$A$	$B$	$A \implies B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$w$

**Bemerkung 1.1.6.** Als kleine Übung machen wir uns noch klar, dass die Aussage  $C := (A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$  immer wahr ist:

$A$	$B$	$A \implies B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \implies \neg A$	$C$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Das bedeutet, dass der Wahrheitsgehalt der Aussagen  $A \implies B$  und  $\neg B \implies \neg A$  immer der selbe ist. Zum Nachweis von „ $A \implies B$  ist wahr“ kann man also gleichbedeutend auch „ $\neg B \implies \neg A$  ist wahr“ beweisen. Das ist dann ein sogenannter Beweis durch Kontraposition und ist manchmal einfacher als ein direkter Beweis, vgl. Abschnitt 1.5.

## 1.2. Mengen

Beispiele von Mengen sind: Die Menge aller Studierenden in einem Hörsaal, ein Dreieck (als Punktmenge der Ebene), die Menge aller Dreiecke in der Ebene oder

## 1. Grundbegriffe

die Mengen  $\mathbb{N}$ ,<sup>1</sup>  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , also die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, bzw. reellen Zahlen. Den Begriff der Menge definieren wir hier nicht, sondern legen ihn naiv zu Grunde; wir stellen uns damit auf den Standpunkt der naiven (und nicht der axiomatischen) Mengenlehre.

Wenn wir Mengen bilden, ist unser Ausgangspunkt immer eine gegebene, unter Umständen sehr großen Grundmenge  $G$ , aus der Elemente ausgesondert und zu neuen Mengen zusammengefasst werden. Auf diese Weise vermeidet man Bildungen wie die „Menge aller Mengen“, die zu Widersprüchen führen.

Mengen kann man, solange sie klein genug sind, einfach durch das Aufzählen ihrer Elemente angeben, z.B.

$$M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Es ist aber häufig angenehmer, sie durch die Angabe einer definierenden Eigenschaft, die genau für die Elemente der Menge, und nur für diese, wahr ist, zu beschreiben. Für unsere Menge  $M_1$  könnte das so aussehen:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{N} : x < 6\} \quad \text{oder} \quad M_1 = \{x \in \mathbb{N} : x - 6 \text{ ist keine natürliche Zahl}\}.$$

Allgemein schreibt man

$$M = \{x \in G : E(x)\},$$

wobei  $G$  die Grundmenge ist, aus der die Elemente der Menge  $M$  ausgesondert werden sollen und  $E(x)$  eine Aussageform.

**Definition 1.2.1.** Seien  $M$  und  $N$  Mengen. Wir schreiben  $a \in M$ , falls  $a$  ein Element von  $M$  ist und, falls dem nicht so ist,  $a \notin M$ .

Ist jedes Element von  $N$  auch in  $M$  enthalten, so schreiben wir  $N \subseteq M$  und sagen  $N$  ist eine Teilmenge von  $M$ . Weiter nennt man in diesem Fall  $M$  eine Obermenge von  $N$  und schreibt  $M \supseteq N$ . Solche Teilmengenbeziehungen werden oft auch als Inklusion bezeichnet.

Schlussendlich schreiben wir  $\emptyset$  für die leere Menge, d.h. die Menge, die kein Element enthält.

**Bemerkung 1.2.2.** Für zwei Mengen  $M$  und  $N$  gilt  $M = N$  genau dann, wenn  $M \subseteq N$  und  $N \subseteq M$  gilt.

**Definition 1.2.3.** Seien  $M$  und  $N$  Mengen in einer Grundmenge  $G$ . Dann ist

- (a)  $M \cup N := \{x \in G : x \in M \vee x \in N\}$  Vereinigung von  $M$  und  $N$ ,
- (b)  $M \cap N := \{x \in G : x \in M \wedge x \in N\}$  Schnitt von  $M$  und  $N$ ,
- (c)  $M^c := \{x \in G : x \notin M\}$  Komplement von  $M$  in  $G$ ,
- (d)  $M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\}$  Mengendifferenz von  $M$  und  $N$ ,
- (e)  $M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$  kartesisches Produkt von  $M$  und  $N$ .

---

<sup>1</sup>In dieser Vorlesung ist  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Für die natürlichen Zahlen ohne Null schreiben wir  $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

**Bemerkung 1.2.4.** Damit ist ebenfalls für eine endliche Anzahl von Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  das  $n$ -fache kartesische Produkt

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_j \in A_j \text{ für } j = 1, 2, \dots, n\}.$$

definiert.

**Satz 1.2.5.** Seien  $A, B$  und  $C$  Mengen. Dann gilt

- (a)  $A \cup B = B \cup A$  und  $A \cap B = B \cap A$ . (Kommutativgesetze)
- (b)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  und  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .  
(Assoziativgesetze)
- (c)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  und  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
(Distributivgesetze),
- (d)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  und  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  (Regeln von De Morgan).

*Beweis.* Wir behandeln hier das erste Distributivgesetz und die erste Regel von De Morgan, die weiteren verbleiben als Übungsaufgabe.

Für das Distributivgesetz zeigen wir zuerst (vgl. Bemerkung 1.2.2)

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

und zwar folgendermaßen: Sei  $x \in A \cup (B \cap C)$ . Dann ist also  $x \in A$  oder  $x \in B \cap C$ . Betrachten wir zunächst den Fall  $x \in A$ . Dann gilt natürlich auch  $x \in A \cup B$  und  $x \in A \cup C$ , denn diese Mengen sind ja größer als  $A$ . Also ist  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$  und wir sind fertig. Betrachten wir also den Fall  $x \in B \cap C$ . Dann ist  $x \in B$  und  $x \in C$ , also gilt wieder  $x \in A \cup B$  und  $x \in A \cup C$ , dieses Mal, weil  $x$  sowohl in  $B$  als auch in  $C$  liegt. Daraus folgt wieder  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$  und wir haben  $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$  gezeigt.

Um die im ersten Distributivgesetz behauptete Gleichheit zu zeigen, müssen wir nun noch die umgekehrte Inklusion

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

zeigen. Dazu sei  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Dann ist  $x$  sowohl in  $A \cup B$ , als auch in  $A \cup C$ . Wir betrachten die beiden Fälle  $x \in A$  und  $x \notin A$ . (Man beachte, dass wir dann alle denkbaren Fälle  $x \in G$  berücksichtigt haben!) Ist  $x \in A$ , so haben wir sofort auch  $x \in A \cup (B \cap C)$ , was unser Ziel war. Es bleibt also der Fall  $x \notin A$ . Da dann  $x$  in  $A \cup B$  ist, ohne in  $A$  zu sein, muss  $x$  zwangsläufig in  $B$  sein, denn wie sollte es sonst da hineinkommen? Genauso folgt  $x \in C$  aus  $x \in A \cup C$ . Also ist  $x$  in  $B \cap C$  und damit auch  $x \in A \cup (B \cap C)$  und wir haben auch die zweite Inklusion und damit die Gleichheit

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

## 1. Grundbegriffe

gezeigt.

Für die erste De Morgan'sche Regel zeigen wir wieder zuerst

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c.$$

Sei dazu  $x \in (A \cup B)^c$ . Dann ist  $x \notin (A \cup B)$ , d.h.  $x$  ist nicht in der Vereinigung von  $A$  und  $B$ . Damit kann  $x$  weder in  $A$  noch in  $B$  sein, denn sonst würde es ja in dieser Vereinigung liegen. Es ist also  $x \notin A$  und  $x \notin B$ , d.h.  $x \in A^c$  und  $x \in B^c$ , was schließlich  $x \in A^c \cap B^c$  nach sich zieht.

Die zweite Inklusion

$$(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$$

geht folgendermaßen: Es sei  $x \in A^c \cap B^c$ . Dann ist  $x \in A^c$  und  $x \in B^c$ . Also ist  $x$  nicht in  $A$  und nicht in  $B$ , es ist also auch nicht in der Vereinigung von  $A$  und  $B$ , was gerade  $x \in (A \cup B)^c$  bedeutet.  $\square$

**Definition 1.2.6.** Eine Menge  $M$  heißt endlich, falls sie endlich viele Elemente besitzt. In diesem Fall schreiben wir  $|M|$  für die Anzahl der Elemente von  $M$ .

**Bemerkung 1.2.7.** Seien  $A$  und  $B$  endliche Mengen, dann gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ . Warum? Es gilt  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . Für die Wahl der  $a \in A$  in der ersten Komponente hat man  $|A|$  Möglichkeiten. Ist dann  $a \in A$  gewählt, so gibt es für jede dieser Wahlen wieder  $|B|$  Möglichkeiten ein  $b \in B$  zuzulosen. Zusammen ergibt das  $|A| \cdot |B|$  Möglichkeiten, d.h. es gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .

**Übungsaufgabe 1.2.8.** Es seien  $A$  und  $B$  endliche Mengen. Zeigen Sie:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

**Definition 1.2.9.** Ist  $M$  eine Menge, so heißt

$$\mathcal{P}(M) := \{N : N \text{ Teilmenge von } M\}$$

Potenzmenge von  $M$ .

**Beispiel 1.2.10.** Es ist  $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ .

## 1.3. Relationen

**Definition 1.3.1.** Sei  $X$  eine Menge. Eine Teilmenge  $R \subseteq X \times X$  heißt (zweistellige) Relation auf  $X$ . Man schreibt  $xRy$ , falls das Tupel  $(x, y) \in R$  liegt und sagt „ $x$  steht in Relation zu  $y$ “.

**Beispiel 1.3.2.** (a)  $\leq$  in  $\mathbb{N}$ : Dann ist  $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \leq m\}$  und  $x$  steht genau dann mit  $y$  in Relation, wenn  $x \leq y$  gilt.

- (b) Nehmen Sie als  $X$  die Menge aller Internetseiten, so können Sie durch die Setzung  $R := \{(x, y) : x \text{ verlinkt nach } y\}$  eine Relation auf  $X$  definieren, die die Verlinkungsstruktur codiert.

**Definition 1.3.3.** Sei  $X$  eine Menge. Eine Relation  $R$  auf  $X$  heißt

- (a) reflexiv, falls  $xRx$  für jedes  $x \in X$  gilt.
- (b) symmetrisch, falls für alle  $x, y \in X$  mit  $xRy$  auch  $yRx$  gilt.
- (c) antisymmetrisch, falls für alle  $x, y \in X$ , für die  $xRy$  und  $yRx$  gilt,  $x = y$  folgt.
- (d) transitiv, falls für alle  $x, y, z \in X$  mit  $xRy$  und  $yRz$  auch  $xRz$  gilt.
- (e) Äquivalenzrelation, falls  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. In diesem Fall schreibt man meist „ $\sim$ “ statt „ $R$ “.
- (f) Ordnungsrelation, falls  $R$  reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Man schreibt dann meist „ $\leq$ “ statt „ $R$ “.

Ist  $\leq$  eine Ordnungsrelation auf  $X$ , so heißt  $X$  partiell geordnet.

### 1.3.1. Ordnungsrelationen

**Beispiel 1.3.4.** Ordnungsrelationen sind z.B.

- (a) „ $\leq$ “ in  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ .
- (b) die lexikographische Ordnung.
- (c) Ist  $M$  eine Menge, so ist  $\subseteq$  eine Ordnungsrelation auf  $\mathcal{P}(M)$ .

**Bemerkung 1.3.5.** (a) Hat man eine Ordnungsrelation  $\leq$  auf einer Menge  $X$ , so kann es immer noch sein, dass es Elemente  $x, y \in X$  gibt, die unvergleichbar sind, für die also weder  $x \leq y$  noch  $y \leq x$  gilt, vgl. z.B. Beispiel 1.3.4 (c). Gilt für eine Ordnungsrelation zusätzlich

$$\text{Für alle } x, y \in X \text{ gilt } x \leq y \text{ oder } y \leq x,$$

so heißt  $\leq$  eine *Totalordnung* und die Menge  $X$  dann *total geordnet*.

- (b) Ist  $(X, \leq)$  eine partiell (total) geordnete Menge, so ist auch jede Teilmenge  $Y$  von  $X$  durch  $\leq$  partiell (total) geordnet.
- (c) Sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge. Wir schreiben

$$\begin{aligned} x &\geq y, \text{ falls } y \leq x, \\ x &< y, \text{ falls } x \leq y \text{ und } x \neq y, \\ x &> y, \text{ falls } y < x. \end{aligned}$$

## 1. Grundbegriffe

**Definition 1.3.6.** Sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge und  $Y \subseteq X$

- (a)  $g \in X$  heißt größtes Element von  $X$ , falls  $x \leq g$  für alle  $x \in X$ .  
 $k \in X$  heißt kleinstes Element von  $X$ , falls  $k \leq x$  für alle  $x \in X$ .
- (b)  $s \in X$  heißt obere Schranke von  $Y$ , falls  $y \leq s$  für alle  $y \in Y$ .  
 $t \in X$  heißt untere Schranke von  $Y$ , falls  $t \leq y$  für alle  $y \in Y$ .

**Satz 1.3.7.** Sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge. Dann hat  $X$  höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element.

*Beweis.* Seien  $g_1$  und  $g_2$  größte Elemente von  $X$ . Da  $g_1$  größtes Element ist, gilt  $g_2 \leq g_1$ . Da aber auch  $g_2$  ein größtes Element ist, haben wir auch  $g_1 \leq g_2$ . Also ist wegen der Antisymmetrie von Ordnungsrelationen  $g_1 = g_2$ .

Für die kleinsten Elemente führt ein analoges Argument zum Ziel.  $\square$

**Definition 1.3.8.** Es sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge und  $Y \subseteq X$ .

- (a) Hat  $S := \{s \in X : s \text{ obere Schranke von } Y\}$  ein kleinstes Element  $s_0$ , so heißt  $\sup Y := s_0$  Supremum von  $Y$ .  
Hat  $T := \{t \in X : t \text{ untere Schranke von } Y\}$  ein größtes Element  $t_0$ , so heißt  $\inf Y := t_0$  Infimum von  $Y$ .
- (b) Gilt  $s_0 = \sup(Y) \in Y$ , so heißt  $s_0$  Maximum von  $Y$ ; Bezeichnung  $\max Y$ .  
Gilt  $t_0 = \inf(Y) \in Y$ , so heißt  $t_0$  Minimum von  $Y$ ; Bezeichnung  $\min Y$ .

**Merkregel:**

Das Supremum ist die kleinste obere Schranke.  
Das Infimum ist die größte untere Schranke.

**Beispiel 1.3.9.** (a)  $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$  hat in  $\mathbb{Q}$ , versehen mit der üblichen Ordnung, kein größtes und kein kleinstes Element. Wohl hat diese Menge aber untere Schranken, z.B.  $-7$ ,  $-43$  oder  $0$ . Die größte untere Schranke und damit  $\inf \mathbb{Q}_+$  ist  $0$ . Dieses ist aber kein Minimum, denn  $0 \notin \mathbb{Q}_+$ .

(b)  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$  hat in  $\mathbb{Q}$  obere Schranken, z.B.  $2$  oder  $37$ , aber kein Supremum, denn die Menge der oberen Schranken ist  $\{q \in \mathbb{Q} : q \geq \sqrt{2}\}$  und diese Menge hat kein kleinstes Element, denn  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

(c) In  $\mathbb{N}$  mit der üblichen Ordnung hat jede nicht-leere Teilmenge ein Minimum und jede nicht-leere, endliche Teilmenge ein Maximum.

(d) In  $(\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \subseteq)$  hat die Teilmenge  $\mathcal{M} := \{\emptyset, \{0\}\}$  obere Schranken, z.B.  $\{0\}$ ,  $\{0, 1\}$  und  $\{0, 2\}$ . Dabei ist  $\{0\}$  die kleinste obere Schranke, also das Supremum, das in diesem Fall, wegen  $\{0\} \in \mathcal{M}$ , auch das Maximum ist.

Hat  $\mathcal{N} := \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$  ein Supremum, Infimum, Maximum, bzw. Minimum?



### 1.3.2. Äquivalenzrelationen

**Beispiel 1.3.10.** (a) „=“ in  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$

(b) gleicher Vorname, Pulloverfarbe, Armlänge in Menschengruppen

(c) Verwandtschaftsbeziehungen

**Beispiel 1.3.11.** Sei  $n \in \mathbb{N}^*$  fest gewählt. Wir definieren die Relation  $\sim_n$  auf  $\mathbb{Z}$  durch

$$a \sim_n b \iff a - b \text{ ist Vielfaches von } n \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k \cdot n, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Wir werden gleich zeigen, dass  $\sim_n$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z}$  ist. Vorher sei noch vermerkt, dass man statt  $a \sim_n b$  oft  $a \equiv b \pmod{n}$  schreibt, gelesen: „ $a$  ist kongruent  $b$  modulo  $n$ “.

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} 19 &\equiv 9 \pmod{5}, & \text{denn } 19 - 9 = 10 \text{ ist Vielfaches von } 5, \\ 23 &\equiv 1 \pmod{2}, \\ 17 &\equiv 3 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Nun zum Nachweis, dass  $\sim_n$  Äquivalenzrelation ist:

1. *Reflexivität:* Sei  $a \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $a - a = 0 = 0 \cdot n$  ein Vielfaches von  $n$ , also gilt  $a \sim_n a$ .

2. *Symmetrie:* Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $a \sim_n b$ . Dann gibt es ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $a - b = k \cdot n$ . Also gilt  $b - a = (-k) \cdot n$ . Nun ist auch  $-k \in \mathbb{Z}$ . Also gibt es ein  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $b - a = \ell \cdot n$ , d.h.  $b \sim_n a$ .

3. *Transitivität:* Seien  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  mit  $a \sim_n b$  und  $b \sim_n c$ . Das bedeutet, dass es zwei Zahlen  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $a - b = k \cdot n$  und  $b - c = \ell \cdot n$ . Damit ist

$$a - c = a - b + b - c = k \cdot n + \ell \cdot n = (k + \ell) \cdot n.$$

Da auch  $k + \ell \in \mathbb{Z}$  ist, folgt damit  $a \sim_n c$ .

**Satz 1.3.12.** Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $X \neq \emptyset$ . Wir definieren für jedes  $a \in X$  die Äquivalenzklasse  $\tilde{a}$  als

$$\tilde{a} := \{x \in X : x \sim a\}.$$

Dann gilt

(a)  $\tilde{a} \neq \emptyset$  für jedes  $a \in X$ .

(b) Für alle  $a, b \in X$  mit  $\tilde{a} \neq \tilde{b}$  gilt  $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \emptyset$ .

(c)  $\bigcup_{a \in X} \tilde{a} = X$ , d.h. die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist gleich  $X$ .

## 1. Grundbegriffe

*Beweis.* (a) Sei  $a \in X$ . Wegen der Reflexivität von  $\sim$ , gilt  $a \sim a$ , also ist  $a \in \tilde{a}$ .

(b) Wir beweisen die Aussage per Kontraposition (vgl. Bemerkung 1.1.6), d.h.

wir zeigen:  $\tilde{a} \cap \tilde{b} \neq \emptyset \implies \tilde{a} = \tilde{b}$ .

Wenn  $\tilde{a} \cap \tilde{b} \neq \emptyset$  ist, so gibt es ein Element  $x$  aus dieser Menge. Für dieses  $x$  gilt dann sowohl  $x \sim a$ , als auch  $x \sim b$ . Wegen der Symmetrie von  $\sim$ , haben wir also  $a \sim x$  und  $x \sim b$  und damit folgt aus der Transitivität  $a \sim b$ .

Sei nun  $y \in \tilde{a}$ . Dann ist  $y \sim a$  und da wir auch  $a \sim b$  haben, folgt wieder mit der Transitivität von  $\sim$  die Beziehung  $y \sim b$ . Das bedeutet  $y \in \tilde{b}$  und wir haben damit  $\tilde{a} \subseteq \tilde{b}$  gezeigt.

Startet man mit einem  $z \in \tilde{b}$ , so zeigt man genauso  $z \in \tilde{a}$  und bekommt  $\tilde{b} \subseteq \tilde{a}$ .

Zusammen ist also  $\tilde{a} = \tilde{b}$  und wir sind fertig.

(c) Zunächst gilt für alle  $a \in X$  natürlich  $\tilde{a} \subseteq X$ , also ist auch  $\bigcup_{a \in X} \tilde{a} \subseteq X$ . Wir müssen nur noch die umgekehrte Inklusion zeigen.

Sei  $b \in X$ . Dann ist  $b \in \tilde{b}$  nach (a), also ist auch  $b \in \bigcup_{a \in X} \tilde{a}$  und wir haben die umgekehrte Inklusion.  $\square$

**Bemerkung 1.3.13.** Satz 1.3.12 bedeutet, dass die Äquivalenzrelation  $\sim$  eine Zerlegung von  $X$  in die Äquivalenzklassen erzeugt, die die Elemente von  $X$  nach der durch  $\sim$  beschriebenen Eigenschaft sortiert.

Die Menge

$$X/\sim := \{\tilde{a} : a \in X\}$$

aller Äquivalenzklassen heißt *Faktormenge* von  $X$  bezüglich  $\sim$ .

**Beispiel 1.3.14.** Als Beispiel betrachten wir wieder  $\sim_n$  auf  $\mathbb{Z}$  aus Beispiel 1.3.11. Dann ist für jedes  $a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \{b \in \mathbb{Z} : a \sim_n b\} = \{b \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } a - b = n \cdot k\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} : b = a - nk \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\} = \{b \in \mathbb{Z} : b = a + nk \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a + nk : k \in \mathbb{Z}\} =: a + n \cdot \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Für  $n = 3$  gilt also beispielsweise

$$\begin{aligned} \tilde{0} &= 0 + 3 \cdot \mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} && \text{(durch 3 teilbare Zahlen)} \\ \tilde{1} &= 1 + 3 \cdot \mathbb{Z} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} && \text{(Rest 1 beim teilen durch 3)} \\ \tilde{2} &= 2 + 3 \cdot \mathbb{Z} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} && \text{(Rest 2 beim teilen durch 3)} \\ \tilde{3} &= 3 + 3 \cdot \mathbb{Z} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = \tilde{0}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbb{Z}/\sim_3 = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$$

eine Zerlegung von  $\mathbb{Z}$ , die die ganzen Zahlen nach ihrem Rest beim Teilen durch drei sortiert. Genauso enthält  $\mathbb{Z}/\sim_n$  die  $n$  Elemente  $\tilde{0}, \tilde{1}, \dots, \tilde{n-1}$  und in  $\tilde{a}$  sind jeweils alle die ganzen Zahlen enthalten, die beim Teilen durch  $n$  den Rest  $a$  haben.

Man schreibt meist kurz  $\mathbb{Z}_n$  statt  $\mathbb{Z}/\sim_n$ .

Wir werden uns diesem Thema im Abschnitt 2.1 noch genauer widmen.

## 1.4. Abbildungen

**Definition 1.4.1.** Seien  $A$  und  $B$  Mengen und jedem Element  $a \in A$  sei genau ein Element  $f(a) \in B$  zugeordnet. Diese Zuordnung heißt Abbildung oder Funktion  $f$ . Man schreibt

$$f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ a \mapsto f(a). \end{cases}$$

und nennt  $A$  den Definitionsbereich,  $B$  den Zielbereich, sowie  $a \mapsto f(a)$  die Funktionsvorschrift von  $f$ .

Weiter heißt die Menge  $f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$  das Bild und die Menge  $\{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$  der Graph von  $f$ .

Ist schließlich  $C \subseteq B$ , so bezeichnet man mit  $f^{-1}(C) := \{a \in A : f(a) \in C\} \subseteq A$  das Urbild von  $C$  unter  $f$ .

**Beispiel 1.4.2.** (a) Bekannt sind Funktionen wie

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \quad \text{oder} \quad g : \begin{cases} [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x \mapsto \sqrt{x}. \end{cases}$$

(b) Auch  $+$  :  $\begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) \mapsto a + b \end{cases}$ , d.h. die Addition in  $\mathbb{N}$ , ist eine Abbildung.

(c) Auf jeder Menge  $A$  kann man die Identität, d.h.  $id : \begin{cases} A \rightarrow A \\ a \mapsto a \end{cases}$  definieren.

(d) Ist  $X$  eine Menge mit einer auf  $X$  erklärten Äquivalenzrelation  $\sim$ , so ist  $\nu : \begin{cases} X \rightarrow X/\sim \\ a \mapsto \tilde{a} \end{cases}$  die sogenannte kanonische Abbildung.

**Definition 1.4.3.** Seien  $A, B, C$  Mengen und  $f : A \rightarrow B$ , sowie  $g : B \rightarrow C$  Funktionen. Dann heißt

$$g \circ f : \begin{cases} A \rightarrow C \\ a \mapsto (g \circ f)(a) := g(f(a)) \end{cases}$$

Verkettung von  $f$  und  $g$ . Man liest  $g \circ f$  als „ $g$  nach  $f$ “.

## 1. Grundbegriffe

**Definition 1.4.4.** Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt

- (a) surjektiv, wenn  $f(A) = B$ .
- (b) injektiv, wenn für alle  $x, y \in A$  aus  $f(x) = f(y)$  schon  $x = y$  folgt.
- (c) bijektiv, wenn  $f$  surjektiv und injektiv ist.

**Satz 1.4.5.** Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  ist genau dann bijektiv, wenn für jedes  $b \in B$  genau ein  $a \in A$  existiert mit  $f(a) = b$ . In diesem Fall existiert eine Abbildung  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , so dass

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{für alle } a \in A \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b \quad \text{für alle } b \in B$$

gilt.

*Beweis.* 1. Schritt: Wir zeigen:  $f$  bijektiv  $\implies$  für alle  $b \in B$  existiert genau ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$ .

Da  $f$  surjektiv ist, gibt es zu jedem  $b \in B$  mindestens ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$ . Nehmen wir an, es gäbe mehr als eins, d.h. es gäbe  $a_1, a_2 \in A$  mit  $f(a_1) = f(a_2) = b$ , so folgt aus der Injektivität von  $f$  sofort  $a_1 = a_2$ , es kann also nur genau ein solches  $a \in A$  geben.

2. Schritt: Wir zeigen: Für alle  $b \in B$  existiert genau ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b \implies f$  bijektiv.

Nach Voraussetzung sind alle  $b \in B$  in  $f(A)$  enthalten, also ist  $f$  surjektiv. Seien nun  $a_1, a_2 \in A$  mit  $f(a_1) = f(a_2)$  gegeben. Da jedes  $b \in B$  nur genau ein Urbild hat, muss dann  $a_1 = a_2$  sein, d.h.  $f$  ist auch injektiv.

3. Schritt: Wir zeigen:  $f$  bijektiv  $\implies$  es existiert  $f^{-1} : B \rightarrow A$  mit  $f^{-1}(f(a)) = a$  für alle  $a \in A$  und  $f(f^{-1}(b)) = b$  für alle  $b \in B$ .

Für jedes  $b \in B$  definieren wir  $f^{-1}(b) := a$ , wobei  $a \in A$  das nach dem ersten Schritt eindeutig bestimmte Element mit  $f(a) = b$  ist. Dann ist  $f^{-1}(f(a))$  das Element von  $A$ , das in  $f$  eingesetzt  $f(a)$  ergibt, also  $f^{-1}(f(a)) = a$  für alle  $a \in A$ . Sei nun  $b \in B$ . Dann ist  $f^{-1}(b)$  das Element von  $A$  mit  $f(f^{-1}(b)) = b$  und wir sind fertig.  $\square$

**Definition 1.4.6.** Es seien  $A, B$  zwei Mengen und  $f : A \rightarrow B$  bijektiv. Dann heißt die Abbildung  $f^{-1}$  aus Satz 1.4.5 Umkehrfunktion von  $f$ .

**Beispiel 1.4.7.** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$  (vgl. Beispiel 1.4.2 (a)) ist nicht injektiv, denn es gilt  $f(1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = f(-1)$ , aber  $1 \neq -1$ . Sie ist auch nicht surjektiv, denn  $-1 \notin f(\mathbb{R})$ .

Betrachtet man  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\hat{f}(x) = x^2$ , so ist diese nun surjektiv, denn  $f(\mathbb{R}) = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$ , aber genau so wie oben nicht injektiv.

Geht man jedoch zu  $\hat{\hat{f}} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\hat{\hat{f}}(x) = x^2$  über, so ist diese injektiv und surjektiv, d.h. bijektiv. Die nach Satz 1.4.5 existierende Umkehrfunktion  $\hat{\hat{f}}^{-1}$  ist genau die Funktion  $g$  aus Beispiel 1.4.2 (a), d.h. die Wurzelfunktion.

**Definition 1.4.8.** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion und  $M \subseteq A$ . Dann heißt

$$f|_M : \begin{cases} M \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

die Einschränkung von  $f$  auf  $M$ .

**Übungsaufgabe 1.4.9.** Beweisen Sie: Sind  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  bijektive Funktionen, so ist auch  $g \circ f : A \rightarrow C$  bijektiv.

**Übungsaufgabe 1.4.10.** Unter welchen Voraussetzungen an die Menge  $A$  ist die Abbildung  $id : A \rightarrow A$  bijektiv? Bestimmen Sie in diesem Fall  $id^{-1}$ .

## 1.5. Beweisprinzipien

In einem Beweis ist die Aufgabe aus einer Aussage  $A$ , der *Voraussetzung*, eine Aussage  $B$ , die *Behauptung*, zu folgern. Anders ausgedrückt: Man muss nachweisen, dass die Aussage  $A \implies B$  wahr ist. Selbst, wenn der Satz, der zu beweisen ist, eine Äquivalenz, d.h. eine Aussage der Form  $A \iff B$  postuliert, wird der Beweis fast immer in die Teilbeweise  $A \implies B$  und  $B \implies A$  aufgeteilt, vgl. den Beweis von Satz 1.4.5.

Dieser Abschnitt stellt mögliche Beweismethoden zusammen und liefert jeweils ein kurzes Beispiel. Einige davon haben wir in den vorherigen Kapiteln schon gesehen, einige sind neu.

### 1.5.1. Der direkte Beweis

Der *direkte Beweis* hat folgende Form:

*Voraussetzung:* Aussage  $A$   
*Behauptung:* Aussage  $B$   
*Beweis:* Sei  $A$  erfüllt. Dann gilt ... bla bla bla und deswegen  
 .... Also gilt auch  $B$ .

Bisherige Beispiele für direkte Beweise waren die Beweise von (a) und (c) aus Satz 1.3.12 und die von Satz 1.2.5. Hier ist ein weiteres:

**Beispiel 1.5.1.** *Voraussetzung:* Seien  $n, m \in \mathbb{N}$  gerade Zahlen.

*Behauptung:* Dann ist auch  $n + m$  gerade.

*Beweis:* Seien  $n$  und  $m$  gerade Zahlen. Dann gibt es  $\ell, k \in \mathbb{N}$  mit  $n = 2\ell$  und  $m = 2k$ . Mit diesen  $\ell, k$  gilt dann  $n + m = 2\ell + 2k = 2(\ell + k)$ . Mit  $\ell$  und  $k$  ist auch  $p := \ell + k \in \mathbb{N}$ . Also haben wir gezeigt, dass es ein  $p \in \mathbb{N}$  mit  $n + m = 2p$  gibt. Damit ist  $n + m$  gerade.  $\square$

## 1. Grundbegriffe

### 1.5.2. Beweis durch Kontraposition

Der *indirekte Beweis* oder auch *Beweis durch Kontraposition* hat folgende Form:

Voraussetzung: Aussage  $A$   
Behauptung: Aussage  $B$   
Beweis: Es gelte  $\neg B$ . Dann gilt ... bla bla bla und deswegen  
.... Also ist auch  $A$  falsch.

Durch diese Beweisführung  $\neg B \implies \neg A$  ist auch die Aussage  $A \implies B$  wahr, vgl. Bemerkung 1.1.6. Ein Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition haben wir bereits bei Satz 1.3.12 (b) gesehen. Ein weiteres kurzes Beispiel ist folgendes:

**Beispiel 1.5.2.** *Voraussetzung:* Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n^2$  gerade.

*Behauptung:* Dann ist auch  $n$  gerade.

*Beweis:* Sei  $n \in \mathbb{N}$  so, dass die Behauptung nicht gilt, d.h.  $n$  sei ungerade. Dann gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $n = 2k + 1$  und es gilt  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ . Damit haben wir  $\ell := 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$  gefunden mit  $n^2 = 2\ell + 1$ . Dann ist  $n^2$  ebenfalls ungerade und die Aussage „ $n^2$  gerade“ falsch.  $\square$

### 1.5.3. Beweis durch Widerspruch

Der *Beweis durch Widerspruch* ist eng verwandt mit der Kontraposition. Seine übliche Form ist die folgende:

Voraussetzung: Aussage  $A$   
Behauptung: Aussage  $B$   
Beweis: Es gelte  $A$ . Angenommen  $B$  wäre falsch. Dann gilt ... bla bla bla und deswegen .... Also ergäbe sich ein Widerspruch. Damit war die Annahme falsch und es gilt  $B$ .

Eines der typischen ersten Beispiele für diese Beweistechnik ist der Beweis, dass  $\sqrt{2}$  irrational ist.

**Beispiel 1.5.3.** *Behauptung:* Die Zahl  $\sqrt{2}$  ist nicht rational.

*Beweis:* *Annahme:*  $\sqrt{2}$  ist rational.

Dann gibt es  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt{2} = n/m$ . Außerdem können wir annehmen, dass dieser Bruch bereits maximal gekürzt ist, d.h. wir können die Zahlen  $n$  und  $m$  teilerfremd wählen. Es gilt  $2 = \sqrt{2}^2 = n^2/m^2$ , d.h.

$$n^2 = 2m^2. \tag{1.1}$$

Aus dieser Gleichheit bekommen wir jetzt insbesondere, dass die Zahl  $n^2$  eine gerade Zahl ist und nach Beispiel 1.5.2 ist dann auch  $n$  gerade. Also gibt es ein

$k \in \mathbb{N}$  mit  $n = 2k$  und wir erhalten wieder mit (1.1), dass  $2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ , d.h.  $m^2 = 2k^2$  ist.

Also ist auch  $m^2$  gerade und damit wie oben  $m$  gerade und wir haben einen Widerspruch, denn nun sind  $n$  und  $m$  teilerfremd und beide gerade.

Also war die Annahme falsch und  $\sqrt{2}$  ist nicht rational.  $\square$

#### 1.5.4. Vollständige Induktion über $\mathbb{N}$

Die *vollständige Induktion* ist ein Beweisverfahren, das dazu dient, die Richtigkeit einer Aussageform  $E(n)$  für alle natürlichen Zahlen  $n$  nachzuweisen. Es sieht so aus:

Voraussetzung:	Aussage $A$
Behauptung:	Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $E(n)$
Beweis:	<i>Induktionsanfang:</i> Es gilt $A$ und bla bla bla, also gilt auch $E(0)$ . <i>Induktionsvoraussetzung:</i> Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $E(n)$ . <i>Induktionsschluss:</i> $E(n)$ und $A$ sind wahr, also ist ... bla bla bla und deswegen .... Damit gilt auch $E(n+1)$ .

**Bemerkung 1.5.4.** Das Verfahren funktioniert allgemeiner auch um zu zeigen, dass eine Aussage  $E(n)$  für alle  $n \geq n_0$ , für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , also ab einem gewissen  $n_0$  für alle größeren  $n$  gilt. Dann muss der Induktionsanfang den Nachweis erbringen, dass  $E(n_0)$  wahr ist.

Außerdem werden Sie in der Vorlesung „Formale Grundlagen der Informatik“ noch weitere Verallgemeinerungen dieser Methodik auf andere Strukturen als  $\mathbb{N}$  kennen lernen.

**Beispiel 1.5.5.** *Behauptung:* Für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*Beweis:* *Induktionsanfang:* Auf der linken Seite der behaupteten Gleichheit steht für  $n = 1$  einfach 1 und auf der rechten Seite steht  $1 \cdot (1 + 1)/2 = 2/2 = 1$ . Also stimmt diese für  $n = 1$ .

*Induktionsvoraussetzung:* Für ein  $n \in \mathbb{N}^*$  gelte  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*Induktionsschritt:* Es ist  $1 + 2 + \dots + (n+1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n+1)$ , also erhalten wir mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
 &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2},
 \end{aligned}$$

was die behauptete Gleichheit für  $n+1$  zeigt.  $\square$

Da das Prinzip der Induktion bisher noch nicht vorkam, hier noch ein Beispiel.

## 1. Grundbegriffe

**Beispiel 1.5.6.** *Behauptung:* Für jede endliche Menge  $M$  gilt  $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ .

*Beweis:* Wir führen eine Induktion nach der Mächtigkeit der Menge  $M$ .

*Induktionsanfang:* Ist  $|M| = 0$ , so muss  $M = \emptyset$  sein. Dann ist  $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  und wir haben  $|\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0 = 2^{|M|}$ . Die Behauptung stimmt also für  $|M| = 0$ .

*Induktionsvoraussetzung:* Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt für alle Mengen mit  $n$  Elementen  $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ .

*Induktionsschritt:* Sei  $M$  eine Menge mit  $n + 1$  Elementen. Dann hat  $M$  mindestens ein Element. Sei also ein  $x \in M$  fest gewählt. Wir betrachten nun  $N := M \setminus \{x\}$ . Dann hat  $N$  genau  $n$  Elemente, nach der Induktionsvoraussetzung gilt also  $|\mathcal{P}(N)| = 2^{|N|} = 2^n$ .

Es gilt aber

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(N) \cup \{A \cup \{x\} : A \in \mathcal{P}(N)\}. \quad (1.2)$$

Um das einzusehen, beweisen wir zunächst die Inklusion „ $\subseteq$ “. Sei also  $B \in \mathcal{P}(M)$ . Dann ist entweder  $x \in B$  oder  $x \notin B$ . Im zweiten Fall ist  $B$  auch Teilmenge von  $N$  also in  $\mathcal{P}(N)$  und damit in der Menge auf der rechten Seite in (1.2). Ist  $x \in B$ , so ist  $\hat{B} := B \setminus \{x\} \in \mathcal{P}(N)$  und damit  $B = \hat{B} \cup \{x\}$  wiederum in dem Mengensystem auf der rechten Seite von (1.2) enthalten. Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar, denn wegen  $x \in M$  und  $N \subseteq M$  ist jedes Element des rechten Mengensystems eine Teilmenge von  $M$ .

Mit der Hilfe von (1.2) sind wir nun bald am Ziel. Wichtig ist noch die Beobachtung, dass wegen  $x \notin N$

$$\mathcal{P}(N) \cap \{A \cup \{x\} : A \in \mathcal{P}(N)\} = \emptyset$$

gilt, denn damit folgt mit Übungsaufgabe 1.2.8 und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(M)| &= |\mathcal{P}(N) \cup \{A \cup \{x\} : A \in \mathcal{P}(N)\}| \\ &= |\mathcal{P}(N)| + |\{A \cup \{x\} : A \in \mathcal{P}(N)\}| \\ &= |\mathcal{P}(N)| + |\mathcal{P}(N)| = 2|\mathcal{P}(N)| = 2 \cdot 2^{|N|} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \end{aligned}$$

und wir haben die Behauptung mit  $|M| = n + 1$  gezeigt. □



## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

Nach dem vorhergehenden Abschnitt, der vor allem die Sprache der Mathematik einführen sollte, wollen wir nun „richtig“ anfangen. Ein häufiges Missverständnis über Mathematik, ist „Mathematik = Rechnen“, das werden Sie schon gemerkt haben, so viel gerechnet haben wir bisher nicht. Eher mathematisch ist die folgende Frage: Was ist das überhaupt: „rechnen“? Was machen wir, wenn wir rechnen? Was ist die dahinterliegende allgemeine Struktur? Dieser Frage wollen wir ein bisschen nachgehen und uns verschiedene Rechenstrukturen anschauen. Der Weg wird nicht ganz geradlinig sein, sondern wir werden den einen oder anderen Abstecker, z.B. zum RSA-Algorithmus aus der Public-Key-Verschlüsselung machen, aber die Grundfrage dieses Abschnitts ist obiges „was ist rechnen?“ Beginnen wollen wir auf vertrautem Grund, dem Rechnen mit ganzen Zahlen.

### 2.1. Rechnen in $\mathbb{Z}$ , Primzahlen und Teiler

**Definition 2.1.1.** *Es seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  und  $p \in \mathbb{N}$ .*

- (a) *Man sagt  $p$  teilt  $a$  und schreibt  $p|a$ , falls ein  $m \in \mathbb{Z}$  existiert mit  $a = m \cdot p$ .*
- (b) *Eine natürliche Zahl  $p > 1$  heißt Primzahl, wenn  $p$  nur durch  $p$  und 1 teilbar ist.*
- (c) *Die Zahl  $\text{ggT}(a, b) := \max\{q \in \mathbb{N} : q|a \text{ und } q|b\}$  heißt größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .*

**Satz 2.1.2** (Division mit Rest). *Seien  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{N}^*$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $q \in \mathbb{Z}$  und  $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  mit  $a = q \cdot b + r$ .*

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall  $a \geq 0$ , der Beweis im Fall  $a < 0$  verläuft analog. Zu vorgegebenen  $a$  und  $b$  betrachten wir die Menge

$$M := \{s \in \mathbb{N} : s \cdot b \leq a\}.$$

Dann ist  $M \subseteq \{0, 1, \dots, a\}$ , denn für alle  $s \in M$  gilt  $s = s \cdot 1 \leq s \cdot b \leq a$ . Damit existiert  $q := \max M$  als größte ganze Zahl, für die noch  $q \cdot b \leq a$  gilt. Mit diesem  $q$  setzen wir nun  $r := a - q \cdot b$ . Dann ist in jedem Fall  $a = q \cdot b + r$ .

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

Zum Nachweis, dass  $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  gilt, überlegen wir uns zunächst, dass wegen  $q \cdot b \leq a$  auch  $r = a - q \cdot b \geq 0$  gilt. Wir müssen also noch zeigen, dass  $r < b$  ist. Nehmen wir an, es wäre  $r \geq b$ , so folgt

$$(q+1) \cdot b = qb + b \leq qb + r = a$$

und damit wäre  $q+1 \in M$ , was im Widerspruch zur Konstruktion von  $q$  als größtem Element von  $M$  steht.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien dazu  $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$  und  $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  mit  $a = q_1 \cdot b + r_1 = q_2 \cdot b + r_2$ . Dann gilt

$$(q_1 - q_2) \cdot b = r_2 - r_1.$$

Insbesondere teilt damit  $b$  die Zahl  $r_2 - r_1$ . Nun liegt aber  $r_2 - r_1$  zwischen  $-(b-1)$  und  $b-1$  und die einzige Zahl in diesem Bereich, die durch  $b$  teilbar ist, ist Null. Also gilt  $r_2 - r_1 = 0$ , d.h.  $r_2 = r_1$ . Damit ist aber  $q_1 \cdot b = q_2 \cdot b$  und wegen  $b \neq 0$  erhalten wir auch  $q_1 = q_2$  und sind fertig.  $\square$

**Definition 2.1.3.** Seien  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$  und  $q$  und  $r$  seien die eindeutig bestimmten Zahlen aus Satz 2.1.2. Dann heißt  $q$  Quotient und  $r$  Rest der Division von  $a$  und  $b$ . Man schreibt

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \quad \text{und} \quad r = a \bmod b.$$

**Übungsaufgabe 2.1.4.** Zeigen Sie:

- (a) Für jedes  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{N}^*$  ist die Zahl  $a \bmod b$  das eindeutige  $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  mit  $b|(a-r)$ .
- (b)  $a|b \iff b \bmod a = 0$ .

### 2.1.1. Modulare Arithmetik

In diesem ganzen Abschnitt sei  $n \in \mathbb{N}^*$  eine feste Zahl.

**Satz 2.1.5.** Für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  gilt

- (a)  $(a+b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$ .
- (b)  $(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot (b \bmod n)) \bmod n$ .
- (c)  $a^b \bmod n = (a \bmod n)^b \bmod n$ .

*Beweis.* Seien  $k = \lfloor a/n \rfloor$  und  $\ell = \lfloor b/n \rfloor$ , d.h.

$$a = kn + a \bmod n \quad \text{und} \quad b = \ell n + b \bmod n.$$

(a) Mit obiger Notation gilt

$$a + b = kn + a \bmod n + \ell n + b \bmod n = (k + \ell)n + a \bmod n + b \bmod n.$$

Also ist

$$(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n,$$

denn  $(k + \ell)n$  ist durch  $n$  teilbar.

(b) Übung

(c) Unter Verwendung von (b) gilt

$$a^b \bmod n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ Mal}}) \bmod n = (a \bmod n)^b \bmod n. \quad \square$$

**Bemerkung 2.1.6.** Obiges Resultat bedeutet, dass man, wann immer am Ende einer Rechnung nur der Rest modulo  $n$  interessiert, auch nach jedem Rechenschritt schon die Zwischenergebnisse modulo  $n$  reduzieren kann. Das ist insbesondere im Zusammenhang mit Fragen der Effizienz von Algorithmen und damit für die Geschwindigkeit von Computerprogrammen von Interesse.

**Beispiel 2.1.7.** Wir wählen mal  $n = 7$  und berechnen

$$\begin{aligned} & ((9 - 15) \cdot 23 + 705)^{322} \bmod 7 \\ &= ((9 \bmod 7 - 15 \bmod 7) \cdot (23 \bmod 7) + 705 \bmod 7)^{322} \bmod 7 \\ &= ((2 - 1) \cdot 2 + 5)^{322} \bmod 7 = 7^{322} \bmod 7 \\ &= 0^{322} \bmod 7 = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also (einfach und von Hand!) herausgefunden, dass  $((9 - 15) \cdot 23 + 705)^{322}$  durch 7 teilbar ist.

Als Übung können Sie zeigen, dass die Zahl  $3^{444} + 4^{333}$  durch 5 teilbar ist.

## 2.1.2. Der Euklidische Algorithmus

Das erste Ziel dieses Abschnittes ist die algorithmische Bestimmung von  $\text{ggT}(a, b)$  für gegebene  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

**Lemma 2.1.8.** Seien  $a, b \in \mathbb{N}^*$  mit  $a \geq b$ . Dann gilt

$$(a) \text{ ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a \bmod b)$$

$$(b) b|a \implies \text{ggT}(a, b) = b.$$

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

*Beweis.* (a) Sei  $d := \text{ggT}(a, b)$ . Dann gilt nach Definition  $d|a$  und  $d|b$ , also ist  $a \bmod d = 0$  und  $b \bmod d = 0$ , vgl. Übungsaufgabe 2.1.4. Damit gilt nach Definition der Division mit Rest und unter Mitwirkung von Satz 2.1.5

$$\begin{aligned}(a \bmod b) \bmod d &= \left[ a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b \right] \bmod d \\ &= a \bmod d - \left( \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \bmod d \right) (b \bmod d) = 0.\end{aligned}$$

Wir finden also  $d|(a \bmod b)$ . Damit ist  $d$  schon mal gemeinsamer Teiler von  $b$  und  $a \bmod b$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $d$  der größte solche ist.

Sei also  $c$  ein gemeinsamer Teiler von  $b$  und  $a \bmod b$ . Dann gilt wegen  $c|b$  und  $c|(a \bmod b)$  auch  $c|(kb + a \bmod b)$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ . Insbesondere können wir  $k = \lfloor a/b \rfloor$  wählen. Dann ist  $kb + a \bmod b = a$  und wir bekommen  $c|a$ . Also ist  $c$  auch ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Dieser kann nicht größer sein als  $d = \text{ggT}(a, b)$ , also gilt  $c \leq d$  und wir sind fertig.

- (b) Es gilt immer  $b|b$  und da  $b$  nach Voraussetzung auch  $a$  teilt, ist  $b$  schon mal ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Sei  $c$  ein weiterer gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Dann gilt wegen  $c|b$  sofort  $c \leq b$ , womit  $b$  der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  ist.  $\square$

**Beispiel 2.1.9.** Wir bestimmen den größten gemeinsamen Teiler von 128 und 36. Es ist

$$128 \bmod 36 = 20, \text{ da } 3 \cdot 36 = 108, \text{ also } \text{ggT}(128, 36) \stackrel{(a)}{=} \text{ggT}(36, 20)$$

$$36 \bmod 20 = 16, \text{ da } 1 \cdot 20 = 20, \text{ also } \text{ggT}(128, 36) \stackrel{(a)}{=} \text{ggT}(20, 16)$$

$$20 \bmod 16 = 4, \text{ da } 1 \cdot 16 = 16, \text{ also } \text{ggT}(128, 36) \stackrel{(a)}{=} \text{ggT}(16, 4)$$

$$16 \bmod 4 = 0, \text{ da } 4 \cdot 4 = 16, \text{ also } \text{ggT}(128, 36) \stackrel{(a)}{=} \text{ggT}(4, 0) \stackrel{(b)}{=} 4.$$

Schematisch:

$a$	$b$
128	36
36	20
20	16
16	4
4	0

Beim Übergang von einer Zeile zur nächsten überträgt man jeweils die rechte Zahl in die linke Spalte und füllt die rechte Spalte mit dem Rest der beim Teilen mit Rest übrigbleibt. Man wiederholt dieses bis in der rechten Spalte einer Zeile Null steht, die Zahl in der linken Spalte dieser Zeile ist dann der größte gemeinsame Teiler.

## 2.1. Rechnen in $\mathbb{Z}$ , Primzahlen und Teiler

Dieses Verfahren ist sehr wichtig und hat darum auch einen eigenen Namen.

**Satz 2.1.10** (Euklidischer Algorithmus). *Seien  $a, b \in \mathbb{N}^*$  mit  $a > b$ . Der Algorithmus*

**Euklid(a, b)**  
 IF  $b = 0$  THEN return  $a$   
 ELSE return Euklid( $b, a \bmod b$ )

*terminiert nach endlich vielen Schritten und liefert  $\text{ggT}(a, b)$ .*

*Beweis.* Für jede Ausgangswahl von  $a, b \in \mathbb{N}^*$  gilt  $0 \leq a \bmod b < b$ , also wird das zweite Argument des Aufrufs in jedem Schritt echt kleiner. Damit muss es in endlich vielen Schritten nach Null kommen, d.h. der Algorithmus terminiert.

Seien  $a_n, b_n$  die Eingangswerte beim  $n$ -ten Aufruf von Euklid. Terminiert der Algorithmus nach  $n$  Schritten, d.h. ist  $b_n = 0$ , so bedeutet das  $a_{n-1} \bmod b_{n-1} = 0$ , d.h.  $b_{n-1} | a_{n-1}$ . Damit ist nach Lemma 2.1.8 (b)

$$\text{ggT}(a_{n-1}, b_{n-1}) = b_{n-1} = a_n = \text{Euklid}(a, b).$$

Andererseits ist nach (a) des selben Lemmas

$$\text{ggT}(a_{n-1}, b_{n-1}) = \text{ggT}(a_{n-2}, b_{n-2}) = \cdots = \text{ggT}(a_0, b_0) = \text{ggT}(a, b). \quad \square$$

**Satz 2.1.11** (Erweiterter Euklidischer Algorithmus). *Seien  $a, b \in \mathbb{N}^*$  mit  $a > b$ . Der Algorithmus*

**Erw-Euklid(a, b)**  
 IF  $b = 0$  THEN return  $(a, 1, 0)$   
 ELSE DO  
      $(d, x, y) := \text{Erw-Euklid}(b, a \bmod b)$   
     return  $(d, y, x - \lfloor a/b \rfloor \cdot y)$   
 OD

*terminiert nach endlich vielen Schritten und liefert  $(d, k, \ell) = \text{Erw-Euklid}(a, b)$  mit  $d = \text{ggT}(a, b)$  und die Zahlen  $k$  und  $\ell$  erfüllen die Beziehung*

$$d = \text{ggT}(a, b) = ka + \ell b.$$

Der erweiterte Euklidsche Algorithmus liefert damit im Spezialfall von Zahlen mit ggT Eins insbesondere die folgende wichtige Erkenntnis.

**Korollar 2.1.12.** *Es seien  $a, b \in \mathbb{N}^*$  mit  $\text{ggT}(a, b) = 1$ . Dann gibt es  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  mit  $ka + \ell b = 1$ .*

Wir wollen Satz 2.1.11 hier nicht beweisen, sondern nur kurz erwähnen, dass der Algorithmus zur Bestimmung von  $d$  genau der selbe ist wie im einfachen Euklidschen Algorithmus, man also den Beweis, dass dies der ggT ist und dass der

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert von oben übernehmen kann. Die zweite Aussage über die Zahlen  $k$  und  $\ell$  beweist man schließlich per Induktion nach der Anzahl der rekursiven Aufrufe, aber das soll hier nicht ausgeführt werden.

**Beispiel 2.1.13.** Wir starten den erweiterten Euklid mit  $a = 141$  und  $b = 9$ . Wie oben bekommen wir ein Schema:

$a$	$b$	$\lfloor a/b \rfloor$	$k$	$\ell$
141	9	15	-1	$16 = 1 - 15 \cdot (-1)$
9	6	1	1	$-1 = 0 - 1 \cdot 1$
6	3	2	0	$1 = 1 - 2 \cdot 0$
3	0		1	0

Man rechnet dabei zunächst die ersten zwei Spalten wie in Beispiel 2.1.9 und protokolliert zusätzlich in der dritten Spalte jeweils den Quotienten der ersten beiden Spalten mit. Damit bekommt man schon mal den ggT in der linken unteren Ecke, hier ist er 3.

Nun schreibt man 1 und 0 in die unterste Zeile der  $k$ - und  $\ell$ -Spalte und rechnet von unten wieder rauf. Dabei kommt in die  $k$ -Spalte jeweils der Wert aus der  $\ell$ -Spalte in der Zeile drunter und in die  $\ell$ -Spalte kommt  $x - q \cdot y$ , wobei  $x$  der Wert aus der  $k$ -Spalte der Zeile darunter,  $q$  der Quotient aus der aktuellen Zeile und  $y$  der Wert aus der  $\ell$ -Spalte der Zeile drunter ist.

Das Endergebnis besteht nun aus dem ggT der beiden Zahlen und aus den Einträgen bei  $k$  und  $\ell$  in der ersten Zeile. Für diese beiden Zahlen gilt dann (vgl. den Satz)  $\text{ggT}(a, b) = ka + \ell b$ .

In obigem Beispiel haben wir tatsächlich

$$ka + \ell b = (-1) \cdot 141 + 16 \cdot 9 = -141 + 144 = 3 = \text{ggT}(141, 9).$$

**Beispiel 2.1.14.** Erw-Euklid liefert auch eine Methode, um Gleichungen zu lösen der Form: Gegeben  $a$  und  $n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$ , finde  $x$  mit  $ax \equiv 1 \pmod{n}$ . Ist nämlich  $(d, k, \ell) = \text{Erw-Euklid}(n, a)$ , so gilt  $d = 1$  und  $1 = kn + \ell a$ , also

$$1 \bmod n = (kn + \ell a) \bmod n = \ell a \bmod n.$$

Also ist  $x = \ell$  eine Lösung.

Als Beispiel betrachte man  $93x \equiv 1 \pmod{100}$ . Wegen  $\text{Erw-Euklid}(100, 93) = (1, 40, -43)$  ist  $x = -43 \bmod 100 = 57$  eine Lösung. Tatsächlich ist  $57 \cdot 93 = 5301 \equiv 1 \pmod{100}$ .

**Übungsaufgabe 2.1.15.** Es seien  $a, b, n \in \mathbb{N}^*$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$ . Dann gilt  $n|ab \implies n|b$ .

Daraus folgt, dass für Primzahlen  $p$  und  $a, b \in \mathbb{N}^*$  aus  $p|ab$  folgt, dass  $p|a$  oder  $p|b$ .

### 2.1.3. Der kleine Satz von Fermat

**Satz 2.1.16** (Kleiner Satz von Fermat). *Für alle Primzahlen  $p$  und alle  $a \in \mathbb{N}$  gilt  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .*

*Beweis.* Wir führen eine Induktion nach  $a$ .

*Induktionsanfang:* Für  $a = 0$  gilt  $0^p = 0 \equiv 0 \pmod{p}$ .

*Induktionsvoraussetzung:* Für ein  $a \in \mathbb{N}$  gelte  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

*Induktionsschluss:* Nach der allgemeinen binomischen Formel gilt

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}a + 1, \quad (2.1)$$

wobei für jedes  $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \in \mathbb{N}$$

ist. Also teilt  $p$  die natürliche Zahl  $\binom{p}{k} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ . Da  $p$  eine Primzahl ist und somit  $\text{ggT}(p, \ell) = 1$  für  $\ell \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ , folgt mit Übungsaufgabe 2.1.15, dass  $p$  die Zahl  $\binom{p}{k}$  teilt. Damit liefert (2.1)

$$(a+1)^p \bmod p = (a^p + 0 \cdot a^{p-1} + 0 \cdot a^{p-2} + \dots + 0 \cdot a + 1) \bmod p = (a^p + 1) \bmod p.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist  $a^p \bmod p = a \bmod p$ , also haben wir schließlich

$$(a+1)^p \bmod p = (a+1) \bmod p,$$

womit die Behauptung für  $a+1$  gezeigt ist.  $\square$

**Korollar 2.1.17.** *Ist  $p$  Primzahl und  $a \in \mathbb{N}$  eine Zahl, die nicht von  $p$  geteilt wird, so gilt  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .*

*Beweis.* Nach Satz 2.1.16 gilt  $a^p \equiv a \pmod{p}$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $a^p = kp + a$ , womit  $a(a^{p-1} - 1) = kp$  folgt. Damit teilt  $p$  das Produkt  $a(a^{p-1} - 1)$ . Da  $p$  eine Primzahl ist, die  $a$  nicht teilt, ist  $\text{ggT}(a, p) = 1$ . Wir erhalten also mit Hilfe von Übungsaufgabe 2.1.15  $p \mid (a^{p-1} - 1)$ , d.h.  $(a^{p-1} - 1) \bmod p = 0$ . Das liefert  $a^{p-1} \bmod p = 1 \bmod p$ , also die Behauptung.  $\square$

## 2.2. Die Mathematik hinter Public-Key-Verfahren der Kryptographie

Die Ausgangssituation der Kryptographie ist, dass jemand, der üblicherweise Bob genannt wird, jemand anderes, üblicherweise Alice, eine Nachricht zukommen lassen will, ohne dass diese von anderen Personen gelesen werden kann. Die

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

Inkarnation des Bösen, die versucht an die Nachricht zu gelangen, wird dabei üblicherweise Eve genannt.

Das Grunddilemma lautet: Bob könnte die Nachricht verschlüsseln, doch dazu müssen sich Bob und Alice zunächst über den Schlüssel einigen und wie macht man das so, dass Eve nicht die Kommunikation über den Schlüssel abfängt? Eine Lösung liefert die modulare Arithmetik; wie, das wollen wir hier kurz anhand des *RSA-Algorithmus* beschreiben. Dieser ist benannt nach den Entwicklern Roland Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman und er ist einer der grundlegenden Public-Key-Verfahren, d.h. Verschlüsselungsverfahren, bei denen Alice den Verschlüsselungsschlüssel einfach öffentlich zugänglich macht.

Die Stärke des Algorithmus steht und fällt damit, dass es kein effizientes Verfahren zum Zerlegen großer natürlicher Zahlen in ihre Primfaktoren gibt.

Der Algorithmus braucht drei Schritte, die einmalig zur Vorbereitung von Alice ausgeführt werden müssen:

1. Alice wählt zwei (große) Primzahlen  $p$  und  $q$  mit  $p \neq q$  und berechnet  $n = p \cdot q$  und  $N = (p - 1) \cdot (q - 1)$ .
2. Alice wählt ein  $e \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(e, N) = 1$  und bestimmt dann ein  $x \in \mathbb{N}$  mit  $ex \equiv 1 \pmod{N}$ , vgl. Beispiel 2.1.14.
3. Alice schickt unverschlüsselt und frei zugänglich das Zahlenpaar  $(n, e)$  an Bob, das ist ihr sogenannter *Public Key*.

Verschlüsseln und Entschlüsseln einer Nachricht  $M \in \mathbb{N}$  mit  $M < n$  geht dann so:

**Verschlüsseln:** Bob rechnet  $M' := M^e \bmod n$  und schickt das Ergebnis an Alice.

**Entschlüsseln:** Alice rechnet  $M'' := (M')^x \bmod n$ .

Zum Entschlüsseln verwendet Alice ihren sogenannten *Private Key*  $(n, x)$ . Dieser ist nur ihr bekannt und um  $x$  aus dem public key  $(n, e)$  zu berechnen, bräuchte man  $N$ , d.h.  $p$  und  $q$  und damit die Primfaktorzerlegung von  $n$ .

Es bleibt uns noch zu zeigen, dass Alice auch wirklich Bobs Nachricht lesen kann, d.h. dass  $M'' = M$  gilt.

**Satz 2.2.1.** *Mit obigen Bezeichnungen gilt  $M'' = M^{ex} \bmod n = M$  für alle  $M < n$ .*

*Beweis.* Es ist nach Konstruktion  $ex \equiv 1 \pmod{N}$ , wobei  $N = (p - 1)(q - 1)$  ist. Also gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $ex = 1 + k(p - 1)(q - 1)$ , woraus

$$M^{ex} = M \cdot M^{(p-1)(q-1)k} = M \cdot (M^{p-1})^{(q-1)k}$$



folgt. Nun betrachten wir zwei Fälle: Ist  $M \not\equiv 0 \pmod{p}$ , so liefert der kleine Satz von Fermat, vgl. Korollar 2.1.17,  $M^{p-1} \pmod{p} = 1$ , und damit ist

$$M^{ex} \pmod{p} = (M \pmod{p}) \cdot (M^{p-1} \pmod{p})^{(q-1)k} \pmod{p} = M \pmod{p}.$$

Ist dagegen  $M$  ein Vielfaches von  $p$ , so gilt ebenfalls  $M^{ex} \pmod{p} = M \pmod{p}$ , denn dann steht auf beiden Seiten der Gleichung Null.

Mit der selben Argumentation für  $q$  statt  $p$  bekommen wir auch

$$M^{ex} = M \cdot (M^{q-1})^{(p-1)k}$$

und damit

$$M^{ex} \pmod{q} = (M \pmod{q}) \cdot (M^{q-1} \pmod{q})^{(p-1)k} \pmod{q} = M \pmod{q}.$$

Zusammengenommen gibt es also zwei Zahlen  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  mit  $M^{ex} = M + k_1p = M + k_2q$ , woraus insbesondere  $k_1p = k_2q$  folgt. Nun sind aber  $p$  und  $q$  zwei verschiedene Primzahlen. Das bedeutet  $p|k_2$  und wir bekommen noch ein  $k_3 \in \mathbb{N}$  mit  $k_2 = k_3p$ . Damit haben wir nun endgültig

$$M^{ex} \pmod{n} = (M + k_3pq) \pmod{n} = (M + k_3n) \pmod{n} = M \pmod{n} = M. \quad \square$$

## 2.3. Gruppen

In diesem Abschnitt beginnen wir mit der abstrakten Beschreibung des Rechnens. Wir beschränken uns dazu zunächst auf nur eine Rechenoperation. Diese kann ein Plus, ein Mal oder noch etwas anderes sein. Deshalb brauchen wir ein neues nicht mit Assoziationen beladenes Zeichen, als das wir im Folgenden meistens „ $*$ “ nehmen.

**Definition 2.3.1.** *Eine Gruppe ist eine Menge  $G \neq \emptyset$  mit einer Abbildung (Verknüpfung)  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ , so dass gilt*

- (a) Für alle  $a, b, c \in G$  gilt  $a * (b * c) = (a * b) * c$ . (Assoziativität)
- (n) Es gibt ein  $n \in G$ , so dass für alle  $a \in G$  gilt  $n * a = a$  und  $a * n = a$ . (Existenz eines neutralen Elements)
- (i) Zu jedem  $a \in G$  gibt es ein  $a^\sharp \in G$ , so dass  $a^\sharp * a = n$  und  $a * a^\sharp = n$  gilt. (Existenz des inversen Elements)

Gilt zusätzlich noch

- (k) Für alle  $a, b \in G$  ist  $a * b = b * a$  (Kommutativität),

so heißt die Gruppe  $G$  abelsch.

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

**Beispiel 2.3.2.** (a)  $\mathbb{Z}$  mit der üblichen Addition ist eine abelsche Gruppe, aber nicht  $\mathbb{N}$ .

(b)  $\mathbb{Q}$  mit der üblichen Addition und  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  mit der üblichen Multiplikation sind abelsche Gruppen.

(c) Sei  $M$  eine beliebige nichtleere Menge und

$$F := \{f : M \rightarrow M \text{ bijektiv}\}.$$

Dann ist  $F$  mit der Verkettung „ $\circ$ “ als Verknüpfung eine Gruppe. Man nennt diese die *Permutationsgruppe* von  $M$ .

Man beachte, dass diese Gruppe i.A. nicht abelsch ist. Machen Sie sich das an dem Beispiel  $M = \mathbb{R}$  und  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x + 1$  klar.

Um einzusehen, dass  $(F, \circ)$  eine Gruppe ist, müssen wir uns zunächst überlegen, dass  $\circ$  eine vernünftige Verknüpfung auf  $F$  ist, d.h. dass für alle  $f, g \in F$  auch  $f \circ g \in F$ , also bijektiv, ist. Das war aber gerade die Aussage von Übungsaufgabe 1.4.9.

Nun müssen wir noch (a), (n) und (i) zeigen. Zum Nachweis von (a) rechnen wir für drei Funktionen  $f, g, h \in F$ , dass für alle  $x \in M$  gilt

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = [(f \circ g) \circ h](x).$$

Das bedeutet aber gerade, dass  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  ist.

Ein neutrales Element können wir explizit angeben, nämlich die Identität  $\text{id} : M \rightarrow M$  mit  $\text{id}(x) = x$  für alle  $x \in M$ . Es gilt nämlich für alle  $f \in F$  und jedes  $x \in M$

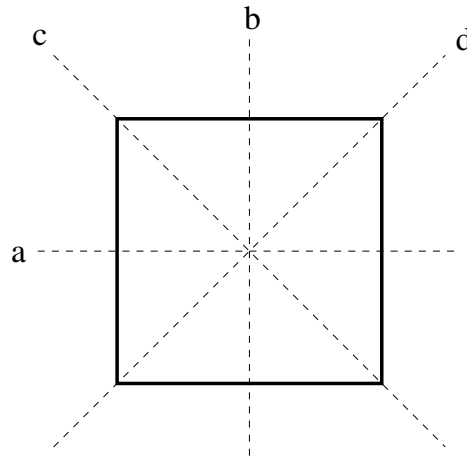
$$(\text{id} \circ f)(x) = \text{id}(f(x)) = f(x) \quad \text{und} \quad (f \circ \text{id})(x) = f(\text{id}(x)) = f(x).$$

Damit haben wir  $\text{id} \circ f = f$  und  $f \circ \text{id} = f$  und somit gezeigt, dass  $\text{id}$  ein neutrales Element in  $F$  ist.

Schließlich ist jedes  $f \in F$  bijektiv, besitzt also eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$ , die wiederum bijektiv, also ein Element von  $F$  ist. Für diese gilt  $f \circ f^{-1} = \text{id}$  und  $f^{-1} \circ f = \text{id}$ , vgl. Satz 1.4.5, also ist jeweils  $f^{-1}$  das inverse Element zu  $f$ .

(d) Betrachtet man eine geometrische Figur in der Ebene und alle Spiegelungen und Drehungen der Ebene, die die Figur auf sich selbst abbilden, so erhält man die sogenannte *Symmetriegruppe* der Figur. Nimmt man beispielsweise ein Quadrat  $Q$ , vgl. Abbildung 2.1, so ist die Symmetriegruppe gerade gegeben durch

$$G = \{\text{Spiegelung an } a, \text{ Spiegelung an } b, \text{ Spiegelung an } c, \text{ Spiegelung an } d, \\ \text{Drehung um } 90^\circ, \text{ Drehung um } 180^\circ, \text{ Drehung um } 270^\circ, \text{id}\}$$

Abbildung 2.1.: Das Quadrat  $Q$  mit den Symmetrielinien  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ 

Machen Sie sich klar, was die Verknüpfung in dieser Gruppe ist und dass es sich mit dieser tatsächlich um eine Gruppe handelt. Was ergibt die Spiegelung an  $a$  verknüpft mit der Spiegelung an  $b$ ? Ist diese Gruppe abelsch?

- (e) Zu  $n \in \mathbb{N}^*$  betrachten wir wieder die Menge  $\mathbb{Z}_n = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \dots, \widetilde{n-1}\}$  der Restklassen modulo  $n$ . Definieren wir für  $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{Z}_n$

$$\tilde{a} + \tilde{b} := \widetilde{a + b}$$

so ist  $\mathbb{Z}_n$  mit diesem „+“ eine abelsche Gruppe.

Bevor wir den Nachweis der Axiome (a), (n), (i) und (k) als Übungsaufgabe stehen lassen können, sollte zumindest geklärt werden, dass obiges Plus eine vernünftige Verknüpfung ist, d.h. dass die Definition von den gewählten Repräsentanten  $a$ , bzw.  $b$  unabhängig ist.

Seien dazu  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$  und  $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2$ . Dann gilt  $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$  und  $b_1 \equiv b_2 \pmod{n}$  und wir haben mit Satz 2.1.5 auch

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1) \bmod n &= (a_1 \bmod n + b_1 \bmod n) \bmod n \\ &= (a_2 \bmod n + b_2 \bmod n) \bmod n = (a_2 + b_2) \bmod n, \end{aligned}$$

oder anders ausgedrückt  $\widetilde{a_1 + b_1} = \widetilde{a_2 + b_2}$ .

**Satz 2.3.3.** *Sei  $(G, *)$  eine Gruppe. Dann gilt*

- (a)  *$G$  enthält nur ein neutrales Element.*
- (b) *Zu jedem  $a \in G$  gibt es genau ein Inverses.*
- (c) *Für gegebene  $a, b, c, d \in G$  sind die Gleichungen  $a * x = b$  und  $x * c = d$  jeweils eindeutig lösbar.*

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

(d) Für alle  $g, h \in G$  gilt  $(g * h)^\# = h^\# * g^\#$ .

*Beweis.* (a) Seien  $n_1, n_2 \in G$  neutrale Elemente. Dann gilt durch zweimalige Anwendung von (n)

$$n_1 = n_1 * n_2 = n_2.$$

(b) Sei  $a \in G$ . Die Existenz eines inversen Elements zu  $a$  garantiert uns (i), zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit. Dazu seien  $b_1$  und  $b_2$  inverse Elemente von  $a$ . Dann gilt

$$b_1 \stackrel{(n)}{=} b_1 * n \stackrel{(i)}{=} b_1 * (a * b_2) \stackrel{(a)}{=} (b_1 * a) * b_2 \stackrel{(i)}{=} n * b_2 \stackrel{(n)}{=} b_2.$$

(c) Wir betrachten nur die erste Gleichung, das Argument für die zweite verläuft analog. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung geben wir einfach eine an, nämlich  $x = a^\# * b$ , denn für dieses  $x$  gilt

$$a * x = a * (a^\# * b) \stackrel{(a)}{=} (a * a^\#) * b \stackrel{(i)}{=} n * b \stackrel{(n)}{=} b.$$

Um Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir wieder zwei Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  her. Dann gilt  $a * x_1 = b = a * x_2$  und damit auch  $a^\# * (a * x_1) = a^\# * (a * x_2)$ . Mit (a) folgt daraus  $(a^\# * a) * x_1 = (a^\# * a) * x_2$ , was, (i) folgend,  $n * x_1 = n * x_2$  bedeutet. Werfen wir nun noch Axiom (n) dazu, liefert das  $x_1 = x_2$  und wir sind fertig.

(d) Seien  $g, h \in G$ . Dann gilt

$$(g * h) * (h^\# * g^\#) \stackrel{(a)}{=} g * (h * h^\#) * g^\# \stackrel{(i)}{=} g * n * g^\# \stackrel{(n)}{=} g * g^\# \stackrel{(i)}{=} n$$

und analog  $(h^\# * g^\#) * (g * h) = n$ . Also ist  $h^\# * g^\#$  ein Inverses von  $g * h$  und mit Teil (b) dieses Satzes folgt die Behauptung.  $\square$

**Übungsaufgabe 2.3.4.** Es sei  $(G, *)$  eine Gruppe mit neutralem Element  $n$ . Zeigen Sie:

(a) Für alle  $g \in G$  gilt  $(g^\#)^\# = g$ .

(b) Es ist  $n^\# = n$ .

(c) Ist  $G$  endlich, so gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\underbrace{g * g * \cdots * g}_{k \text{ Mal}} = n$  für alle  $g \in G$ .

### 2.3.1. Untergruppen

**Beispiel 2.3.5.** Wir betrachten die Menge  $2\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ . Dann ist  $2\mathbb{Z}$  mit der üblichen Addition aus  $\mathbb{Z}$  wieder eine Gruppe, denn für je 2 Elemente aus  $2\mathbb{Z}$  ist deren Summe wieder in  $2\mathbb{Z}$ , das neutrale Element 0 ist in  $2\mathbb{Z}$  und zu jedem  $z \in 2\mathbb{Z}$  ist auch das inverse Element  $-z \in 2\mathbb{Z}$ .

Damit ist also  $(2\mathbb{Z}, +)$  eine Teilmenge der Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$ , die selbst wieder eine Gruppe ist. Solche Phänomene gibt es sehr oft und wir wollen dies im Folgenden ein wenig untersuchen.

**Definition 2.3.6.** Eine Teilmenge  $U$  einer Gruppe  $(G, *)$  heißt Untergruppe von  $G$ , falls auch  $(U, *)$  eine Gruppe ist.

**Beispiel 2.3.7.** (a) Die Teilmengen  $G$  und  $\{n\}$  sind Untergruppen einer jeden Gruppe  $G$ . Man nennt diese die *trivialen* Untergruppen von  $G$ .

(b) Erinnern wir uns noch einmal an die Symmetriegruppe des Quadrates aus Beispiel 2.3.2 (d), so hat diese neben den trivialen Untergruppen noch die Untergruppe, die aus den drei Drehungen zusammen mit der Identität, die man auch als Drehung um  $0^\circ$  auffassen kann, besteht. Indem Sie sich das klar machen, können Sie schon einiges Gefühl für Gruppen gewinnen.

Bilden auch die Spiegelungen eine Untergruppe?

**Satz 2.3.8** (Untergruppenkriterium). Eine Teilmenge  $U$  einer Gruppe  $(G, *)$  ist genau dann eine Untergruppe von  $G$ , wenn

**(UG1)**  $U \neq \emptyset$  und

**(UG2)** für alle  $a, b \in U$  ist auch  $a * b^\sharp \in U$ .

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Ist  $U$  eine Untergruppe, so muss  $U$  eine Gruppe sein und damit zumindest ein neutrales Element enthalten, also ist  $U$  nicht leer und wir haben (UG1).

Wir zeigen als nächstes, dass das neutrale Element von  $U$ , das wir mit  $n_U$  bezeichnen, gleich dem neutralen Element  $n_G$  von  $G$  ist. Dazu bezeichne  $n_U^\sharp$  das Inverse zu  $n_U$  in  $G$ . Dann gilt  $n_U = n_U * n_U^\sharp$ , also

$$n_G = n_U * n_U^\sharp = (n_U * n_U) * n_U^\sharp = n_U * (n_U * n_U^\sharp) = n_U * n_G = n_U.$$

Seien nun  $a, b \in U$  und sei  $b^\sharp$  das inverse Element von  $b$  in  $G$ . Da  $U$  eine Gruppe ist, hat  $b$  auch ein inverses Element  $\hat{b}$  in  $U$ . Sind die beiden wirklich verschieden? Nein, denn wegen  $b * \hat{b} = \hat{b} * b = n_U = n_G$  ist  $\hat{b}$  auch ein Inverses von  $b$  in  $G$  und dieses ist in der Gruppe  $G$  eindeutig, vgl. Satz 2.3.3 (b). Also gilt  $b^\sharp = \hat{b} \in U$ . Da  $U$  eine Gruppe ist, muss schlussendlich mit  $a$  und  $b^\sharp$  auch  $a * b^\sharp \in U$  sein und wir sind fertig.

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $U \subseteq G$  so, dass (UG1) und (UG2) gelten. Wir müssen zeigen, dass  $U$  dann eine Gruppe ist, d.h. dass  $*$  :  $U \times U \rightarrow U$  gilt, und dass die Axiome (a), (n) und (i) erfüllt sind.

Zunächst ist  $*$  auf  $U$  assoziativ, da dies auf  $G$  gilt. Wir haben also (a).

Weiter gibt es wegen (UG1) auf jeden Fall irgendein  $a \in U$ . Wegen (UG2) ist dann auch  $a * a^\# = n \in U$ . Nun ist jedes Element  $b \in U$  auch in  $G$  und dort gilt  $n * b = b$  und  $b * n = b$ , also gilt das auch in  $U$  und wir haben (n) gezeigt.

Zum Nachweis von (i) sei nun  $a \in U$  gegeben. Da nach obigen Überlegungen das neutrale Element  $n$  von  $G$  ebenfalls in  $U$  liegen muss, gilt wiederum nach (UG2) nun  $n * a^\# = a^\# \in U$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $*$  eine vernünftige Verknüpfung auf  $U$  ist, die Elemente aus  $U$  zu Elementen aus  $U$  verknüpft. Seien dazu  $a, b \in U$ . Wie wir oben schon gezeigt haben, ist dann auch  $b^\# \in U$  und wegen (UG2) und dem Resultat von Übungsaufgabe 2.3.4 (a) haben wir  $a * (b^\#)^\# = a * b \in U$ .  $\square$

**Lemma 2.3.9.** Sei  $(G, *)$  eine Gruppe,  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $U_j$  sei für jedes  $j \in I$  eine Untergruppe von  $G$ . Dann ist auch der Schnitt all dieser Untergruppen, d.h.

$$\bigcap_{j \in I} U_j = \{x \in G : x \in U_j \text{ für jedes } j \in I\},$$

eine Untergruppe von  $G$ .

*Beweis.* Wir wenden das Untergruppenkriterium an. Da alle  $U_j$  Untergruppen sind, muss jede dieser Gruppen das neutrale Element  $n$  von  $G$  enthalten, vgl. den Beweis von Satz 2.3.8, also ist dieses auch im Schnitt aller  $U_j$ ,  $j \in I$ , enthalten und wir haben  $\bigcap_{j \in I} U_j \neq \emptyset$ .

Zum Nachweis von (UG2) seien  $a, b \in \bigcap_{j \in I} U_j$ . Das bedeutet, dass diese beiden für jedes  $j \in I$  in der Untergruppe  $U_j$  enthalten sind. Dann liefert aber Satz 2.3.8 sofort  $a * b^\# \in U_j$  und zwar für jedes  $j \in I$ . Also haben wir auch  $a * b^\# \in \bigcap_{j \in I} U_j$  und sind fertig.  $\square$

**Definition 2.3.10.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $M \subseteq G$ . Dann heißt

$$\langle M \rangle := \bigcap_{\substack{U \text{ Untergruppe von } G \\ U \supseteq M}} U$$

Erzeugnis von  $M$  oder die von  $M$  erzeugte Untergruppe.

**Bemerkung 2.3.11.** Man beachte, dass nach Lemma 2.3.9 das Erzeugnis  $\langle M \rangle$  immer eine Untergruppe von  $G$  ist. Tatsächlich ist  $\langle M \rangle$  die kleinste Untergruppe von  $G$ , in der  $M$  ganz enthalten ist.

Insbesondere gilt  $M = \langle M \rangle \iff M$  Untergruppe von  $G$ .

**Beispiel 2.3.12.** Betrachten wir in der Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$  die Teilmenge  $M = \{2\}$ , so gilt  $\langle M \rangle = 2\mathbb{Z}$ , denn zum Einen müssen natürlich die Zahlen  $2, -2, 0, 2+2, -2-2, 2+2+2, -2-2-2, \dots$  drin sein, d.h.  $2\mathbb{Z} \subseteq \langle M \rangle$ . Zum Anderen ist  $2\mathbb{Z}$  eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}$ , vgl. Beispiel 2.3.5, also haben wir auch  $\langle M \rangle \subseteq 2\mathbb{Z}$  und damit Gleichheit.

Zur Verkürzung der Notation führen wir noch die folgende Schreibweise für ein Gruppenelement  $g$  einer Gruppe  $(G, *)$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  ein:

$$g^k := \begin{cases} \underbrace{g * g * g * \dots * g}_{k \text{ Mal}}, & \text{falls } k > 0, \\ n, & \text{falls } k = 0, \\ \underbrace{g^\# * g^\# * g^\# * \dots * g^\#}_{k \text{ Mal}}, & \text{falls } k < 0. \end{cases}$$

**Übungsaufgabe 2.3.13.** (a) Bestimmen Sie  $\langle \{3, 6\} \rangle$  und  $\langle \{3, 2\} \rangle$  in  $(\mathbb{Z}, +)$ .

(b) Zeigen Sie: Ist  $(G, *)$  Gruppe und  $g \in G$ , so gilt  $\langle \{g\} \rangle = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$ .

## 2.3.2. Gruppenhomomorphismen

**Definition 2.3.14.** (a) Es seien  $(G, *)$  und  $(H, \diamond)$  Gruppen. Eine Abbildung  $f : G \rightarrow H$  heißt (Gruppen-)Homomorphismus, falls

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \diamond f(g_2) \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G$$

gilt.

(b) Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt (Gruppen-)Isomorphismus.

(c) Zwei Gruppen  $G$  und  $H$ , für die ein Isomorphismus  $f : G \rightarrow H$  existiert, heißen isomorph.

**Beispiel 2.3.15.** (a) Die Abbildung

$$f : \begin{cases} (\mathbb{Z}, +) & \rightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ k & \mapsto 4k \end{cases}$$

ist ein Homomorphismus, denn für alle  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  gilt

$$f(k + \ell) = 4(k + \ell) = 4k + 4\ell = f(k) + f(\ell).$$

Allerdings ist  $f$  kein Isomorphismus, denn  $f$  ist nicht surjektiv.

Zeigen Sie, dass  $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (4\mathbb{Z}, +)$  ein Isomorphismus ist.

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

(b) Die Abbildung

$$g : \begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \\ x & \mapsto 2^x \end{cases}$$

ist ebenfalls ein Homomorphismus, denn für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  gilt

$$g(x_1 + x_2) = 2^{x_1 + x_2} = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = g(x_1) \cdot g(x_2).$$

Ist  $g$  ein Isomorphismus?

**Übungsaufgabe 2.3.16.** Zeigen Sie: Ist  $(G, *)$  eine Gruppe und  $g \in G$  ein beliebiges Gruppenelement, so ist

$$\varphi_g : \begin{cases} G & \rightarrow G \\ h & \mapsto g^\sharp * h * g \end{cases}$$

ein Homomorphismus.

Finden Sie weiter Beispiele von Gruppen  $G$  und Elementen  $g \in G$ , so dass  $\varphi_g$  einmal ein Isomorphismus ist und einmal nicht.

**Satz 2.3.17.** Es seien  $(G, *)$  und  $(H, \diamond)$  Gruppen mit neutralen Elementen  $n_G$  bzw.  $n_H$  und  $f : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus. Dann gilt

- (a)  $f(n_G) = n_H$ .
- (b)  $f(g)^\sharp = f(g^\sharp)$  für jedes  $g \in G$ .
- (c)  $f(G)$  ist eine Gruppe, d.h. eine Untergruppe von  $H$ .
- (d) Ist  $G$  abelsch, so ist auch  $f(G)$  abelsch.

*Beweis.* (a) Dank (n) haben wir  $n_G = n_G * n_G$ . Also ist wegen der Homomorphieeigenschaft von  $f$  auch  $f(n_G) = f(n_G * n_G) = f(n_G) \diamond f(n_G)$ . Weiter hat  $f(n_G)$  wie jedes Gruppenelement wegen (i) ein Inverses  $f(n_G)^\sharp$  in  $H$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} n_H &\stackrel{(i)}{=} f(n_G)^\sharp \diamond f(n_G) = f(n_G)^\sharp \diamond (f(n_G) \diamond f(n_G)) \\ &\stackrel{(a)}{=} (f(n_G)^\sharp \diamond f(n_G)) \diamond f(n_G) \stackrel{(i)}{=} n_H \diamond f(n_G) \stackrel{(n)}{=} f(n_G). \end{aligned}$$

- (b) Sei  $g \in G$ . Dann gilt mit der Homomorphieeigenschaft von  $f$  und Teil (a) des Beweises.

$$f(g) \diamond f(g^\sharp) = f(g * g^\sharp) = f(n_G) = n_H,$$

sowie

$$f(g^\sharp) \diamond f(g) = f(g^\sharp * g) = f(n_G) = n_H.$$

Also ist  $f(g^\sharp) = f(g)^\sharp$ .



- (c) Wir wenden das Untergruppenkriterium an. Wegen Teil (a) des Beweises gilt  $n_H = f(n_G) \in f(G)$ , also ist  $f(G) \neq \emptyset$  und wir haben (UG1). Zum Nachweis von (UG2) seien  $h_1, h_2 \in f(G)$  gegeben. Dann gibt es  $g_1, g_2 \in G$  mit  $f(g_1) = h_1$  und  $f(g_2) = h_2$ . Mit diesen haben wir dank Teil (b)

$$h_1 \diamond h_2^\sharp = f(g_1) \diamond f(g_2)^\sharp = f(g_1) \diamond f(g_2^\sharp) = f(g_1 * g_2^\sharp) \in f(G).$$

- (d) Sei nun  $G$  abelsch und seien  $h_1, h_2 \in f(G)$ . Dann gibt es wieder  $g_1, g_2 \in G$  mit  $f(g_1) = h_1$  und  $f(g_2) = h_2$  und wir bekommen

$$h_1 \diamond h_2 = f(g_1) \diamond f(g_2) = f(g_1 * g_2) \stackrel{(k)}{=} f(g_2 * g_1) = f(g_2) \diamond f(g_1) = h_2 \diamond h_1.$$

□

**Definition 2.3.18.** Es seien  $(G, *)$  und  $(H, \diamond)$  Gruppen mit neutralen Elementen  $n_G$  bzw.  $n_H$  und  $f : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus. Dann heißt  $\ker(f) := \{g \in G : f(g) = n_H\}$  Kern von  $f$ .

**Beispiel 2.3.19.** Wir betrachten

$$f : \begin{cases} (\mathbb{Z}_4, +) & \rightarrow (\mathbb{Z}_4, +) \\ \tilde{n} & \mapsto \widetilde{2n}. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wegen

$$f(\widetilde{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2}) = f(\widetilde{n_1 + n_2}) = 2(\widetilde{n_1 + n_2}) = \widetilde{2n_1} + \widetilde{2n_2} = f(\tilde{n}_1) + f(\tilde{n}_2)$$

ein Homomorphismus mit

$$f(\tilde{0}) = \tilde{0}, \quad f(\tilde{1}) = \tilde{2}, \quad f(\tilde{2}) = \tilde{4} = \tilde{0}, \quad f(\tilde{3}) = \tilde{6} = \tilde{2}.$$

In diesem Fall ist also  $\ker(f) = \{\tilde{0}, \tilde{2}\}$ .

**Satz 2.3.20.** Die Menge  $\ker(f)$  ist immer eine Untergruppe von  $G$ .

*Beweis.* Es ist immer  $f(n_G) = n_H$ , vgl. Satz 2.3.17 (a), also ist  $n_G \in \ker(f)$  und damit  $\ker(f) \neq \emptyset$ . Seien nun  $g_1, g_2 \in \ker(f)$ . Dann gilt

$$f(g_1 * g_2^\sharp) = f(g_1) \diamond f(g_2)^\sharp = f(g_1) \diamond f(g_2)^\sharp = n_H \diamond n_H^\sharp = n_H \diamond n_H = n_H.$$

Also ist auch  $g_1 * g_2^\sharp \in \ker(f)$  und die Behauptung folgt aus dem Untergruppenkriterium. □

Insbesondere haben wir damit gesehen, dass  $\{\tilde{0}, \tilde{2}\}$  eine Untergruppe von  $(\mathbb{Z}_4, +)$  ist.

## 2.4. Ringe und Körper

### 2.4.1. Ringe

**Definition 2.4.1.** (a) Eine Menge  $R$  mit zwei Verknüpfungen  $+: R \times R \rightarrow R$  und  $\cdot: R \times R \rightarrow R$  heißt Ring, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe.
- $\forall a, b, c \in R: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , d.h. „ $\cdot$ “ ist assoziativ.
- $\forall a, b, c \in R: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  und  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ , d.h. die beiden Verknüpfungen erfüllen die Distributivgesetze.

(b) Das neutrale Element der Gruppe  $(R, +)$  heißt Nullelement, Symbol: 0.

(c) Existiert ein Element  $1 \in R$  mit  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  für jedes  $a \in R$ , so heißt 1 Einselement von  $R$  und man nennt dann  $R$  einen Ring mit Eins.

(d) Ist zusätzlich die Verknüpfung „ $\cdot$ “ auf  $R$  kommutativ, so nennt man  $R$  einen kommutativen Ring.

**Beispiel 2.4.2.** (a)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  sind kommutative Ringe mit Eins.

(b)  $\mathbb{R}[x]$ , d.h. die Menge aller Polynome in einer Variablen über  $\mathbb{R}$ , ist ein kommutativer Ring mit dem Einselement, das durch das konstante Polynom 1 gegeben ist.

(c) Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Definieren wir auf  $\mathbb{Z}_n$  eine Multiplikation durch  $\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \widetilde{a \cdot b}$ , so ist diese nach Satz 2.1.5 (b) wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  sogar ein kommutativer Ring mit Eins ist. Dazu erinnern wir uns zunächst, dass wir in Beispiel 2.3.2 (e) bereits festgestellt haben, dass  $(\mathbb{Z}_n, +)$  eine abelsche Gruppe ist. Die Assoziativität und die Kommutativität von „ $\cdot$ “, sowie die Distributivgesetze können wir leicht auf die entsprechenden Eigenschaften von  $\mathbb{Z}$  zurückspielen. Hier führen wir beispielhaft nur das Assoziativgesetz vor. Für alle  $\tilde{k}, \tilde{\ell}, \tilde{m} \in \mathbb{Z}_n$  gilt

$$(\tilde{k} \cdot \tilde{\ell}) \cdot \tilde{m} = \widetilde{(k \cdot \ell)} \cdot \tilde{m} = \widetilde{(k \cdot \ell) \cdot m} = \tilde{k} \cdot \widetilde{(\ell \cdot m)} = \tilde{k} \cdot (\tilde{\ell} \cdot \tilde{m}).$$

Schließlich bleibt uns noch das Einselement zu identifizieren, aber auch das ist nicht sonderlich schwer, denn für alle  $\tilde{k} \in \mathbb{Z}_n$  gilt  $\tilde{1} \cdot \tilde{k} = \widetilde{1 \cdot k} = \tilde{k}$ , also ist  $\tilde{1}$  das Einselement von  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ .

Was bei der Multiplikation in  $\mathbb{Z}_n$  für konkrete (kleine) Werte von  $n$  passiert, kann man sich gut mit *Multiplikationstabellen* klar machen. Hier sind die für

$n = 5$						$n = 4$				
	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{3}$	$\tilde{4}$		$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{3}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
$\tilde{1}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{3}$	$\tilde{4}$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{3}$
$\tilde{2}$	$\tilde{0}$	$\tilde{2}$	$\tilde{4}$	$\tilde{1}$	$\tilde{3}$	$\tilde{2}$	$\tilde{0}$	$\tilde{2}$	$\tilde{0}$	$\tilde{2}$
$\tilde{3}$	$\tilde{0}$	$\tilde{3}$	$\tilde{1}$	$\tilde{4}$	$\tilde{2}$	$\tilde{3}$	$\tilde{0}$	$\tilde{3}$	$\tilde{2}$	$\tilde{1}$
$\tilde{4}$	$\tilde{0}$	$\tilde{4}$	$\tilde{3}$	$\tilde{2}$	$\tilde{1}$					

**Schreibweise 2.4.3.** Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring.

- (a) Das zu  $r \in R$  additiv inverse Element bezeichnet man mit  $-r$  und für  $r, s \in R$  schreibt man  $r - s$  statt  $r + (-s)$ .
- (b) Oft lässt man das „ $\cdot$ “ weg und schreibt  $rs$  statt  $r \cdot s$  für  $r, s \in R$ .

**Satz 2.4.4.** Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Für jedes  $r \in R$  gilt  $0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$ .
- (b) Für alle  $r, s \in R$  gilt  $(-r) \cdot s = r \cdot (-s) = -(r \cdot s)$  und  $(-r) \cdot (-s) = rs$ .
- (c) Für jede Wahl von  $r, s, t \in R$  gilt  $r(s - t) = rs - rt$ .

*Beweis.* (a) Sei  $r \in R$ . Dann gilt wegen (n) und dank des Distributivgesetzes  $r \cdot 0 = r \cdot (0 + 0) = r \cdot 0 + r \cdot 0$ . Da  $(R, +)$  eine Gruppe ist, besitzt  $r \cdot 0$  ein additives Inverses  $-(r \cdot 0)$ . Mit diesem gilt

$$0 = r \cdot 0 - r \cdot 0 = (r \cdot 0 + r \cdot 0) - r \cdot 0 = r \cdot 0 + (r \cdot 0 - r \cdot 0) = r \cdot 0.$$

(b), (c) Übung. □

Analog zur Situation bei Gruppen definieren wir Homomorphismen und Isomorphismen von Ringen, als die Abbildungen, die die beiden Verknüpfungen von Ringen respektieren.

**Definition 2.4.5.** Seien  $(R, +, \cdot)$ ,  $(S, \oplus, \odot)$  Ringe.

- (a) Eine Abbildung  $f : R \rightarrow S$  heißt (Ring-)Homomorphismus, falls für alle  $r, s \in R$  gilt

$$f(r + s) = f(r) \oplus f(s) \quad \text{und} \quad f(r \cdot s) = f(r) \odot f(s). \quad (2.2)$$

- (b) Sind  $R$  und  $S$  Ringe mit Eins und sind  $1_R$  und  $1_S$  die beiden Einselemente, so fordert man zusätzlich zu (2.2)

$$f(1_R) = 1_S.$$

- (c) Einen bijektiven Ringhomomorphismus nennt man (Ring-)Isomorphismus und sagt in diesem Fall, dass die beiden Ringe  $R$  und  $S$  isomorph sind.

**Bemerkung 2.4.6.** Wie bei Gruppen gilt auch für Ringe, dass das Bild eines Rings unter einem Ringhomomorphismus immer wieder ein Ring ist.

### 2.4.2. Körper

Die letzte klassische Rechenart, die wir jetzt noch nicht untersucht haben, ist das Teilen. Zum Teilen brauchen wir auf jeden Fall eine Eins, wir sollten also mit einem Ring mit Eins  $R$  starten und uns überlegen, was wir weiterhin zum Teilen brauchen. Teilen durch ein  $r \in R$  bedeutet Multiplizieren mit  $1/r$ , aber was ist das,  $1/r$ ? Das ist ein Element, das, wenn wir es mit  $r$  multiplizieren das Einselement ergibt. Wegen Satz 2.4.4 (a) heißt das von vornherein, dass wir Teilen durch Null komplett vergessen können. Um ansonsten freizügig teilen zu können, fordern wir also, dass es zu jedem  $r \in R \setminus \{0\}$  ein Element  $r^{-1} \in R$  gibt mit  $r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = 1$ .

Nun erhebt sich natürlich die Frage: Gibt es solche Ringe? Ja, z.B.  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  sehen gut aus. Wie ist es mit unseren anderen Beispielen?

$\mathbb{Z}$ : Nein, sicher nicht, denn es gibt kein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \cdot 2 = 1$ .

$\mathbb{R}[x]$ : Ebensowenig, denn für welches Polynom  $P$  gilt  $P(x) \cdot x^2 = 1$ ?

$\mathbb{Z}_n$ : Hier ist die Sache weniger klar und hängt von  $n$  ab (wie genau werden wir weiter unten sehen). Wir betrachten die Beispiele  $n = 4$  und  $n = 5$ , vgl. Beispiel 2.4.2 (c).

Für  $n = 4$  gilt  $\tilde{2} \cdot \tilde{2} = \tilde{4} = \tilde{0}$ , was schon mal befremdlich aussieht. Nehmen wir nun an, es gäbe ein Element  $\tilde{2}^{-1} \in \mathbb{Z}_4$ , also ein  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  mit  $\tilde{n} = \tilde{2}^{-1}$ , so folgt

$$\tilde{0} = \widetilde{0 \cdot n} = \tilde{0} \cdot \tilde{n} = \tilde{2} \cdot \tilde{2} \cdot \tilde{2}^{-1} = \tilde{2},$$

was ein sauberer Widerspruch ist, also kann man in  $\mathbb{Z}_4$  nicht durch  $\tilde{2}$  teilen.

In  $\mathbb{Z}_5$  sieht das schon anders aus. Aus der Multiplikationstabelle in Beispiel 2.4.2 (c) liest man ab:

$$\tilde{1}^{-1} = \tilde{1}, \quad \tilde{2}^{-1} = \tilde{3}, \quad \tilde{3}^{-1} = \tilde{2}, \quad \tilde{4}^{-1} = \tilde{4}.$$

Dem befremdlichen Verhalten von  $\mathbb{Z}_4$  oben geben wir zunächst einen Namen.

**Definition 2.4.7.** Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring. Gibt es Zahlen  $r, s \in R \setminus \{0\}$  mit  $rs = 0$ , so heißt  $r$  ein linker und  $s$  ein rechter Nullteiler.

Wir wollen nun den besonders schönen Ringen, in denen wir durch alles außer der Null teilen können, einen eigenen Namen geben.

**Definition 2.4.8.** Ein kommutativer Ring mit Eins  $K$ , in dem zusätzlich  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  eine abelsche Gruppe ist, heißt Körper.

Beispiele von Körpern sind die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , sowie die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und wie wir oben gesehen haben  $\mathbb{Z}_5$ .

**Bemerkung 2.4.9.** Da es in der Definition des Körpers etwas versteckt ist, sei an dieser Stelle explizit darauf hingewiesen, dass in jedem Körper  $1 \neq 0$  gelten muss, denn die Eins ist das neutrale Element der Gruppe  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  und kann damit nicht Null sein.

Wir wollen nun zeigen, dass es in Körpern keine Nullteiler geben kann.

**Satz 2.4.10.** *Ist  $K$  ein Körper, so gilt für alle  $x, y \in K$*

$$x \cdot y = 0 \implies x = 0 \text{ oder } y = 0.$$

*Beweis.* Seien  $x, y \in K$  mit  $x \cdot y = 0$ . Ist  $x = 0$  sind wir fertig, sei also  $x \neq 0$ . Dann gibt es das multiplikative Inverse  $x^{-1} \in K$  und wir haben mit Unterstützung von Satz 2.4.4 (a)

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = 0.$$

□

**Satz 2.4.11.** *Der Ring  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  ist genau dann ein Körper, wenn  $n$  prim ist.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $n$  nicht prim. Dann gibt es  $p, r \in \{2, 3, \dots, n-1\}$  mit  $n = pr$ . Das bedeutet aber  $\tilde{p} \cdot \tilde{r} = \tilde{pr} = \tilde{n} = \tilde{0}$  und da  $\tilde{p}$  und  $\tilde{r}$  beide nicht gleich  $\tilde{0}$  sind, hat  $\mathbb{Z}_n$  also Nullteiler und kann kein Körper sein.

„ $\Leftarrow$ “ Zum Nachweis der Rückrichtung beobachten wir zunächst, dass  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  nach Beispiel 2.4.2 (c) ein kommutativer Ring mit Eins ist, es bleibt also nur zu zeigen, dass jedes Element von  $\mathbb{Z}_n$ , das nicht Null ist, ein multiplikatives Inverses besitzt. Sei also  $a \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  gegeben.

Da  $n$  prim ist und  $a < n$  gilt, bekommen wir aus dem kleinen Satz von Fermat, vgl. Korollar 2.1.17, dass  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  ist. Das bedeutet in  $\mathbb{Z}_n$  gilt  $\widetilde{a^{n-1}} = \tilde{1}$ . Betrachten wir nun das Element  $\tilde{b} := \widetilde{a^{n-2}} \in \mathbb{Z}_n$ , so gilt

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \tilde{a} \cdot \widetilde{a^{n-2}} = \widetilde{a \cdot a^{n-2}} = \widetilde{a^{n-1}} = \tilde{1}.$$

Also ist  $\tilde{a}^{-1} = \tilde{b} = \widetilde{a^{n-2}}$  das gesuchte inverse Element und wir sind fertig. □

**Definition 2.4.12.** *Seien  $(K, +, \cdot)$  und  $(L, \oplus, \odot)$  Körper mit Einselementen  $1_K$  und  $1_L$ .*

- (a) *Ein Ringhomomorphismus  $f : K \rightarrow L$  (mit  $f(1_K) = 1_L$ , vgl. Definition 2.4.5 (b)) heißt (Körper-)Homomorphismus.*
- (b) *Ist  $f$  zusätzlich bijektiv, so heißt  $f$  (Körper-)Isomorphismus, und man nennt dann  $K$  und  $L$  isomorph.*

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

(c) Ist schließlich  $f : K \rightarrow K$  ein Isomorphismus, so nennt man  $f$  einen (Körper-)Automorphismus von  $K$ .

**Bemerkung 2.4.13.** Wie bei Gruppen und Ringen gilt auch hier, dass für jeden Körperhomomorphismus  $f : K \rightarrow L$  die Menge  $f(K)$  ein Körper ist.

**Beispiel 2.4.14.** (a) Jeder Körper  $K$  hat den Automorphismus  $\text{id} : K \rightarrow K$ , dies ist der sogenannte *triviale* Körperautomorphismus.

(b) Ein Körperhomomorphismus ist z.B.  $\text{id} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sind  $(K, +, \cdot)$  und  $(L, \oplus, \odot)$  Körper und  $f : K \rightarrow L$  ein Homomorphismus, so ist wenig überraschend, dass  $f(0_K) = 0_L$  und  $f(1_K) = 1_L$  gilt, denn  $f$  ist ja insbesondere auch jeweils ein Gruppenhomomorphismus von  $(K, +)$  nach  $(L, \oplus)$ , bzw. von  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  nach  $(L \setminus \{0\}, \odot)$ . Auf den ersten Blick weniger zu erwarten ist folgendes Resultat.

**Satz 2.4.15.** Jeder Körperhomomorphismus  $f : K \rightarrow L$  ist injektiv.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $f^{-1}(\{0_L\}) = \{0_K\}$  ist, d.h. nur das Nullelement von  $K$  wird auf das Nullelement von  $L$  abgebildet. Dazu nehmen wir an, es gäbe ein  $x \in K$  mit  $x \neq 0_K$  und  $f(x) = 0_L$ . Wegen  $x \neq 0_K$  gibt es dann  $x^{-1} \in K$  mit  $x \cdot x^{-1} = 1_K$ . Also ist

$$1_L = f(1_K) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) \odot f(x^{-1}) = 0_L \odot f(x^{-1}) = 0_L$$

und das ist in einem Körper nicht möglich.

Seien nun  $x_1, x_2 \in K$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$  gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x_1 - x_2) &= f(x_1 + (-x_2)) = f(x_1) \oplus f(-x_2) = f(x_1) \oplus (-f(x_2)) \\ &= f(x_1) \ominus f(x_2) = 0_L. \end{aligned}$$

Also muss nach obigen Erkenntnissen  $x_1 - x_2 = 0_K$  und damit  $x_1 = x_2$  sein. Das bedeutet aber gerade, dass  $f$  injektiv ist.  $\square$

**Definition 2.4.16.** Ist  $(K, +, \cdot)$  ein Körper, auf dem eine Totalordnung „ $\leq$ “ gegeben ist, so dass

- $\forall a, b, c \in K : a \leq b \implies a + c \leq b + c$  und
- $\forall a, b, c \in K : (a \leq b \text{ und } 0_K \leq c) \implies ac \leq bc$

gelten, so heißt  $(K, +, \cdot, \leq)$  angeordneter Körper.

Ein Paradebeispiel für einen angeordneten Körper ist  $\mathbb{Q}$ .

**Übungsaufgabe 2.4.17.** Ist  $(K, +, \cdot, \leq)$  ein angeordneter Körper, so gilt

## 2.5. Der Körper der komplexen Zahlen

(a) Für alle  $a \in K$  mit  $a > 0$  gilt  $-a < 0$ .

(b) Für alle  $a \in K$  gilt  $a^2 \geq 0$ .

Wir können nun den Begriff des angeordneten Körpers verwenden, um den Körper der reellen Zahlen zu definieren.

**Definition 2.4.18.** *Ein angeordneter Körper, der das Vollständigkeitsaxiom:*

Jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke besitzt, besitzt auch ein Supremum.  
*erfüllt, heißt Körper der reellen Zahlen.*

Natürlich ist diese Definition erst dann sinnvoll, wenn sie keinen inneren Widerspruch enthält, d.h. die Konstruktion eines solchen Körpers überhaupt möglich ist und außerdem müssten wir noch zeigen, dass es (bis auf Isomorphismen von Körpern) nur einen solchen Körper gibt.

## 2.5. Der Körper der komplexen Zahlen

**Definition 2.5.1.** *Wir definieren auf der Menge  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  eine Addition  $\oplus$  und eine Multiplikation  $\odot$ , indem wir für  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  setzen:*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{und} \\ (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).\end{aligned}$$

**Satz 2.5.2.**  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  ist ein Körper.

*Beweis.* Zunächst ist festzustellen, dass  $\oplus$  und  $\odot$  wohldefinierte Verknüpfungen sind, da sie jeweils zwei Elementen von  $\mathbb{R}^2$  wieder Elemente von  $\mathbb{R}^2$  zuordnen.

Wir wenden uns also dem Nachweis zu, dass  $(\mathbb{R}^2, \oplus)$  eine abelsche Gruppe ist. Für alle  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$  gilt dank der Assoziativität bzw. Kommutativität von  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)) \oplus (x_3, y_3) &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= (x_1, y_1) \oplus ((x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3))\end{aligned}$$

und

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1).$$

Weiterhin ist  $(0, 0)$  das additive neutrale Element, denn für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$(x, y) \oplus (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

Schließlich ist das zu  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  additiv inverse Element gegeben durch  $(-x, -y)$ , denn  $(x, y) \oplus (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$ .

Die nächste Etappe ist der Nachweis, dass  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \odot)$  eine abelsche Gruppe ist. Die Assoziativität und die Kommutativität findet man wieder durch eine geradlinige Rechnung, die allerdings leicht länglich wird. Wir wollen hier deshalb darauf verzichten (Weniger freundlich ausgedrückt: Der Autor kneift...). Das multiplikative neutrale Element ist in diesem Fall gegeben durch  $(1, 0)$ , denn für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt nach Definition der Multiplikation

$$(x, y) \odot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y).$$

Ganz so einfach zu erraten ist das multiplikativ inverse Element nicht (aber Sie werden in wenigen Seiten wissen, wie man es sich merken kann). Wir geben uns also ein  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $(x, y) \neq (0, 0)$  vor und behaupten, dass  $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$  das Inverse ist. Bevor wir das nachrechnen, beachte man noch, dass dieser Ausdruck tatsächlich für alle  $(x, y) \neq (0, 0)$  definiert ist, da der Nenner nur Null wird, wenn  $x$  und  $y$  beide Null sind. Tatsächlich haben wir

$$(x, y) \odot \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \left( \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{-y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = (1, 0).$$

Damit bleibt uns zum Körperglück nur noch ein Distributivgesetz nachzurechnen. Seien also  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \odot ((x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) \odot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \oplus (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) \odot (x_3, y_3). \end{aligned}$$

□

**Definition 2.5.3.**  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  heißt Körper der komplexen Zahlen und wird üblicherweise mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

**Satz 2.5.4.** Die Abbildung  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto (x, 0) \end{cases}$  ist ein Körperhomomorphismus.

*Beweis.* Es gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) \oplus (y, 0) = f(x) \oplus f(y)$$

und

$$f(xy) = (xy, 0) = (xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (x, 0) \odot (y, 0).$$

Da schließlich noch  $f(1) = (1, 0) = 1_{\mathbb{C}}$  ist, sind wir schon fertig. □



## 2.5. Der Körper der komplexen Zahlen

**Bemerkung 2.5.5.** Dank Satz 2.4.15 ist obiger Homomorphismus  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$  bijektiv. Die reellen Zahlen können daher mit der Identifikation  $x \hat{=} (x, 0)$  als Teilkörper der komplexen Zahlen aufgefasst werden. Wir haben also unseren Zahlraum noch mal erweitert.

**Beispiel 2.5.6.** Wir berechnen zwei wesentliche Produkte komplexer Zahlen. Es ist

$$(0, 1) \odot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) \hat{=} -1$$

und für alle  $y \in \mathbb{R}$  gilt

$$(y, 0) \odot (0, 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y).$$

**Bemerkung 2.5.7.** Setzt man  $i := (0, 1)$ , so gilt nach obiger Rechnung  $i^2 = (-1, 0) \hat{=} -1$ . Damit können wir eine andere, intuitiver zu verwendende Schreibweise der komplexen Zahlen einführen. Wir machen uns dazu zu nutze, dass für  $(x, y) \in \mathbb{C}$  mit obigen Identifikationen gilt

$$(x, y) = (x, 0) \oplus (0, y) = (x, 0) \odot (1, 0) \oplus (y, 0) \odot (0, 1) \hat{=} x \cdot 1 + y \cdot i.$$

Die komplexe Addition und Multiplikation berechnet sich dann wegen

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i \quad \text{und} \\ (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) &= x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

indem man wie wir es aus  $\mathbb{R}$  gewohnt sind rechnet und unterwegs immer  $i^2 = -1$  beachtet.

Wir werden deshalb in Zukunft auf die Kringel um Plus und Mal verzichten und die gewohnten Symbole verwenden.

Die für die komplexen Zahlen fundamentale Zahl  $i$  nennt man auch die *imaginäre Einheit*.

**Definition 2.5.8.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  und seien  $x, y \in \mathbb{R}$  so, dass  $z = (x, y) = x + yi$  ist. Dann heißt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &:= x \quad \text{Realteil von } z \text{ und} \\ \operatorname{Im}(z) &:= y \quad \text{Imaginärteil von } z. \end{aligned}$$

Ist  $y = 0$ , so nennt man  $z$  reell und ist  $x = 0$ , so heißt  $z$  rein imaginär.

**Bemerkung 2.5.9.** (a) Zunächst als Warnung vor einem häufigen Fehler der Hinweis, dass der Imaginärteil einer komplexen Zahl immer reell ist. Es ist z.B.  $\operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$  und nicht  $2i$ .

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

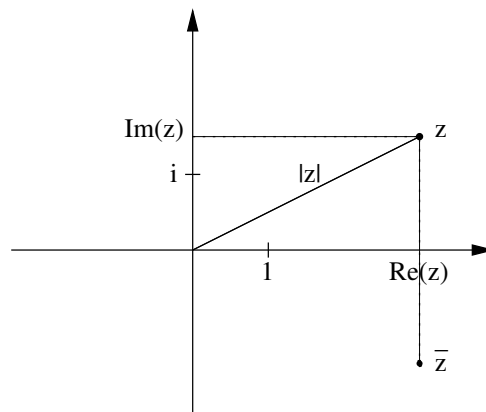


Abbildung 2.2.: Die komplexe Zahlenebene

- (b) Da die komplexen Zahlen aus  $\mathbb{R}^2$  hervorgehen, kann man sie sich gut in der sogenannten *komplexen Zahlenebene*, auch *Gauß'sche Zahlenebene* genannt, vgl. Abbildung 2.2, veranschaulichen.

**Definition 2.5.10.** Sei  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann heißt.

$$\begin{array}{ll} \bar{z} := x - yi & \text{zu } z \text{ konjugiert komplexe Zahl und} \\ |z| := \sqrt{x^2 + y^2} & \text{Betrag von } z \end{array}$$

**Satz 2.5.11.** (a) Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $\overline{\bar{z}} = z$ .

(b) Die Abbildung  $z \mapsto \bar{z}$  ist ein nichttrivialer Körperautomorphismus von  $\mathbb{C}$ .

(c) Es ist  $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$  und  $z - \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Im}(z)i$ .

(d) Ein  $z \in \mathbb{C}$  ist genau dann reell, wenn  $z = \bar{z}$  gilt.

*Beweis.* (a)  $\bar{\bar{z}} = \overline{x + yi} = \overline{x - yi} = x + yi = z$ .

(b) Zunächst ist  $\bar{1} = 1 = 1_{\mathbb{C}}$ . Weiter gilt für alle  $z = x + yi$  und  $w = u + vi$  aus  $\mathbb{C}$  mit  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{x + yi + u + vi} = \overline{x + u + (y + v)i} = x + u - (y + v)i \\ &= x - yi + u - vi = \bar{z} + \bar{w} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(x + yi) \cdot (u + vi)} = \overline{xu - yv + (xv + yu)i} = xu - yv - (xv + yu)i \\ &= xu - (-y)(-v) + x(-v)i + (-y)ui = (x + (-y)i) \cdot (u + (-v)i) \\ &= (x - yi) \cdot (u - vi) = \bar{z} \cdot \bar{w}. \end{aligned}$$

## 2.5. Der Körper der komplexen Zahlen

Also ist die Konjugation schon mal ein Körperhomomorphismus. Nach Satz 2.4.15 ist dieser auch injektiv, wir brauchen also zum Nachweis, dass es sich um einen Automorphismus handelt, nur noch die Surjektivität. Doch diese folgt direkt aus (a), denn zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  ist demnach  $\bar{z}$  ein Urbild unter der Konjugation.

Schließlich ist die Konjugation nicht der triviale Körperautomorphismus, denn  $\bar{i} = -i \neq i$ .

$$(c) \quad z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x = 2 \cdot \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi = 2 \cdot \operatorname{Im}(z)i.$$

$$(d) \quad \text{Ist } z \in \mathbb{C} \text{ reell, so gilt } z = x + 0 \cdot i \text{ für ein } x \in \mathbb{R}. \text{ Also ist in diesem Fall } \bar{z} = \overline{x + 0 \cdot i} = x - 0 \cdot i = x = z.$$

Gilt umgekehrt  $z = \bar{z}$ , so ist mit obiger Rechnung  $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i) = 0$ , also ist  $z = \operatorname{Re}(z)$  reell.  $\square$

**Satz 2.5.12.** *Für alle  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt*

$$(a) \quad |z| = |\bar{z}|.$$

$$(b) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

$$(c) \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ falls } z \neq 0.$$

$$(d) \quad \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) \leq |z|.$$

$$(e) \quad |z| \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad |z| \geq 0 \quad \text{und} \quad (|z| = 0 \iff z = 0).$$

$$(f) \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

$$(g) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

*Beweis.* Übung  $\square$

Mit dem Wissen aus (c) dieses Satzes erklärt sich nun auch rückwirkend die zunächst unintuitive Wahl des multiplikativen Inversen im Beweis von Satz 2.5.2.

**Satz 2.5.13.** *Es gibt keine Totalordnung auf  $\mathbb{C}$ , die  $\mathbb{C}$  zu einem angeordneten Körper macht.*

*Beweis.* Wir nehmen an, es gäbe eine solche Totalordnung „ $\leq$ “. Nach Übungsaufgabe 2.4.17 (b) gilt dann  $z^2 \geq 0$  für jedes  $z \in \mathbb{C}$ . Speziell für  $z = -1$  erhalten wir also  $1 = (-1)^2 \geq 0$  und mit  $z = i$  erhalten wir  $-1 = i^2 \geq 0$ . Das ist nun ein Widerspruch zu Übungsaufgabe 2.4.17 (a). Also kann es solch eine Totalordnung nicht geben.  $\square$

## 2. Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper

**Satz 2.5.14** (Fundamentalsatz der Algebra). *Es sei  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  ein Polynom mit  $a_j \in \mathbb{C}$  für  $j = 0, 1, \dots, n$  und  $a_n \neq 0$ . Dann hat  $p$  eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .*

*Insbesondere zerfällt jedes komplexe Polynom über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren.*

**Bemerkung 2.5.15.** Der Fundamentalsatz der Algebra bedeutet, dass jede polynomiale Gleichung über  $\mathbb{C}$  lösbar ist (ja, außer  $3 = 5$  und Ähnlichem natürlich...). Der entsprechende Schönheitsfehler von  $\mathbb{R}$ , wo z.B. die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  keine Lösung besitzt, ist damit durch die Zählerweiterung nach  $\mathbb{C}$  behoben. Wir werden diese Eigenschaft von  $\mathbb{C}$  noch sehr zu schätzen lernen.

# 3. Lineare Algebra

## 3.1. Vektorräume

### 3.1.1. Das Axiomensystem und Beispiele

**Definition 3.1.1.** (a) Sei  $V$  eine Menge und  $K$  ein Körper. Weiter seien zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V, & (\text{Vektoraddition}) \\ \cdot : K \times V &\rightarrow V & (\text{Skalar-Multiplikation}) \end{aligned}$$

gegeben. Die Menge  $V$  mit diesen beiden Verknüpfungen heißt dann Vektorraum über  $K$  oder auch  $K$ -Vektorraum, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

**(V1)**  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe.

**(V2)**  $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$ .

**(V3)**  $\forall v \in V \forall \alpha, \beta \in K : (\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ .

**(V4)**  $\forall v \in V \forall \alpha, \beta \in K : (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ .

**(V5)**  $\forall v, w \in V \forall \alpha \in K : \alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ .

(b) Das neutrale Element der Gruppe  $(V, +)$  wird als Nullvektor bezeichnet und die Elemente des zugrundeliegenden Körpers  $K$  nennt man Skalare.

Ist speziell  $K = \mathbb{R}$ , bzw.  $K = \mathbb{C}$ , so spricht man von einem reellen, bzw. komplexen Vektorraum.

Vektorräume spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine fundamentale Rolle. Wir wollen das mit einem Stapel verschiedener Beispiele andeuten.

### Beispiel 3.1.2. (a) Der Raum $K^n$ der $n$ -Tupel

Sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dann ist

$$K^n := \underbrace{K \times K \times \cdots \times K}_{n \text{ Mal}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_j \in K \text{ für } j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

### 3. Lineare Algebra

mit den für  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$  und  $\alpha \in K$  durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

gegebenen Verknüpfungen ein  $K$ -Vektorraum mit  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  als Nullvektor. Das Nachrechnen der Axiome ist eine leichte Übung.

Im Falle  $K = \mathbb{R}$  ist  $\mathbb{R}^n$  der sogenannte reelle *Standardvektorraum*.

Aus Gründen, die erst später klar werden werden, ist es sinnvoll die Elemente von  $K^n$  als Spalten zu schreiben. Da das aber in der schriftlichen Darstellung manchmal sehr viel Platz verbraucht, führen wir die Notation

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T := (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ein. Das „ $T$ “ macht also formal aus einem Zeilenvektor einen Spaltenvektor und umgekehrt. Man liest  $x^T$  als „ $x$  transponiert“.

#### (b) Der Raum der $p \times n$ -Matrizen

Seien  $K$  ein Körper und  $p, n \in \mathbb{N}^*$ . Dann ist  $K^{p \times n}$  der Vektorraum aller Matrizen mit  $p$  Zeilen und  $n$  Spalten, d.h.

$$K^{p \times n} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pn} \end{pmatrix} : \alpha_{j,k} \in K, j = 1, \dots, p, k = 1, \dots, n \right\}.$$

Eine *Matrix* ist also ein rechteckiges Schema aus  $pn$  Elementen aus  $K$ . Wie kann man nun mit solchen Monstern rechnen und wozu ist das gut? Die Antwort auf die zweite Frage werde ich Ihnen im weiteren Verlauf der Vorlesung näher bringen, zunächst wollen wir für die Matrizen eine Addition und eine Skalar-Multiplikation definieren.

Seien also  $A = (\alpha_{jk})_{j=1, \dots, p, k=1, \dots, n}$  und  $B = (\beta_{jk})_{j=1, \dots, p, k=1, \dots, n}$  Matrizen aus  $K^{p \times n}$ , sowie  $\lambda \in K$ . Dann definieren wir beide Verknüpfungen im Prinzip

wie in (a) komponentenweise durch

$$\begin{aligned} A + B &= (\alpha_{jk})_{j=1,\dots,p,k=1,\dots,n} + (\beta_{jk})_{j=1,\dots,p,k=1,\dots,n} := (\alpha_{jk} + \beta_{jk})_{j=1,\dots,p,k=1,\dots,n} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \dots & \alpha_{2n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} + \beta_{p1} & \alpha_{p2} + \beta_{p2} & \dots & \alpha_{pn} + \beta_{pn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda A &= \lambda(\alpha_{jk})_{j=1,\dots,p,k=1,\dots,n} := (\lambda\alpha_{jk})_{j=1,\dots,p,k=1,\dots,n} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \dots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \dots & \lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{p1} & \lambda\alpha_{p2} & \dots & \lambda\alpha_{pn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Nullvektor, der hier auch *Nullmatrix* genannt wird, ist die Matrix, deren Einträge alle Null sind. Das Nachrechnen der Axiome ist hier naturgemäß etwas mühsamer als in (a) aber genauso elementar.

Hier ist noch ein konkretes Beispiel für das Rechnen mit Matrizen über  $\mathbb{Q}$ , bzw.  $\mathbb{R}$ , bzw.  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### (c) Funktionenräume

Sei  $K$  ein Körper und  $M$  eine Menge. Die Menge  $\text{Abb}(M, K)$  aller Funktionen von  $M$  nach  $K$  ist mit den für  $f, g \in \text{Abb}(M, K)$  und  $\alpha \in K$  definierten Verknüpfungen

$$f + g : \begin{cases} M & \rightarrow K \\ x & \mapsto f(x) + g(x) \end{cases} \quad \text{und} \quad \alpha f : \begin{cases} M & \rightarrow K \\ x & \mapsto \alpha f(x) \end{cases}$$

ein  $K$ -Vektorraum.

Dies wollen wir exemplarisch ausführlich beweisen. Zunächst beobachten wir, dass die beiden oben definierten Verknüpfungen in dem Sinne wohldefiniert sind, dass sie als Ergebnis jeweils immer wieder ein Element von  $\text{Abb}(M, K)$  liefern. Es bleiben also die Axiome (V1) bis (V5) zu zeigen.

### 3. Lineare Algebra

- (V1) Zunächst ist die Verknüpfung „+“ assoziativ, denn für je drei Funktionen  $f, g, h \in \text{Abb}(M, K)$  gilt dank der Assoziativität der Addition in  $K$  für alle  $x \in M$

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) \\ &= [f + (g + h)](x). \end{aligned}$$

Also ist  $(f + g) + h = f + (g + h)$ .

Genauso bekommt man die Kommutativität wegen

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Als neutrales Element der Addition identifizieren wir die Nullabbildung  $o : M \rightarrow K$  mit  $o(x) = 0$  für alle  $x \in M$ . Mit dieser gilt nämlich für alle  $f \in \text{Abb}(M, K)$  und alle  $x \in M$

$$(f + o)(x) = f(x) + o(x) = f(x) + 0 = f(x),$$

also ist  $f + o = f$  für jedes  $f \in \text{Abb}(M, K)$ .

Schließlich findet man zu jedem  $f \in \text{Abb}(M, K)$  das additiv inverse Element  $-f : M \rightarrow K$  mit  $(-f)(x) = -f(x)$ ,  $x \in M$ , denn für dieses gilt für jedes  $x \in M$

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = o(x),$$

und damit haben wir  $f + (-f) = o$ .

- (V2) Sei  $f \in \text{Abb}(M, K)$ . Dann gilt  $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$  für alle  $x \in M$ , also ist  $1 \cdot f = f$ .

- (V3) Seien  $\alpha, \beta \in K$  und  $f \in \text{Abb}(M, K)$ . Dann gilt für jedes  $x \in M$  unter Ausnutzung der Assoziativität der Multiplikation in  $K$

$$[(\alpha\beta) \cdot f](x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha((\beta \cdot f)(x)) = [\alpha \cdot (\beta \cdot f)](x)$$

und damit  $(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$ .

- (V4) Seien  $\alpha, \beta \in K$  und  $f \in \text{Abb}(M, K)$ . Dann gilt für jedes  $x \in M$  unter Ausnutzung des Distributivgesetzes in  $K$

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta) \cdot f](x) &= (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) \\ &= (\alpha \cdot f)(x) + (\beta \cdot f)(x) = [\alpha \cdot f + \beta \cdot f](x). \end{aligned}$$

Das liefert wieder  $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$ .



(V5) Es seien  $\alpha \in K$  und  $f, g \in \text{Abb}(M, K)$ . Dann gilt für jedes  $x \in M$  wieder dank des Distributivgesetzes

$$\begin{aligned} [\alpha \cdot (f + g)](x) &= \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) \\ &= (\alpha \cdot f)(x) + (\alpha \cdot g)(x) = [\alpha \cdot f + \alpha \cdot g](x) \end{aligned}$$

und wir bekommen  $\alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$  wie gefordert.

(d) **Der Raum aller Folgen in  $K$**

Als Spezialfall von (c) erhalten wir mit  $M = \mathbb{N}$  den Raum  $F = \text{Abb}(\mathbb{N}, K)$  aller *Folgen* in  $K$ . Für ein Element  $a \in F$  schreibt man für das Bild von  $n \in \mathbb{N}$  unter  $a$  statt  $a(n)$  üblicherweise  $a_n$  und gibt die Abbildung  $a$  als „unendliche Liste“ der Bilder  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  an. Beispiele für Folgen in  $\mathbb{R}$  sind

$$\begin{aligned} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right) &= \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \\ (1, 2, 4, 8, 16, \dots) &= (2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots) &= ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

In dieser Schreibweise lesen sich die Verknüpfungen aus  $F = \text{Abb}(\mathbb{N}, K)$  mit  $a, b \in F$  und  $\alpha \in K$  so:

$$\begin{aligned} a + b &= (a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) \\ &:= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \\ \alpha \cdot a &= \alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \alpha \cdot (a_0, a_1, a_2, \dots) := (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots) = (\alpha a_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

(e) **Der Raum aller endlichen Folgen**

Betrachtet man die Teilmenge

$$c_{00} := \{a \in F : a_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n \in \mathbb{N}\},$$

von  $F$  aus (d), so ist auch diese mit den Verknüpfungen aus  $F$  ein  $K$ -Vektorraum.

Elemente von  $c_{00}$  sind z.B. für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Folgen  $e^{(k)}$  mit  $e_j^{(k)} = 1$  für  $j = k$  und Null sonst, d.h.

$$\begin{aligned} e^{(0)} &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots), & e^{(1)} &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots), \\ e^{(2)} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots), & e^{(3)} &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots), \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Verwendet man für  $j, k \in \mathbb{Z}$  das sogenannte *Kronecker-Delta*, d.h. die Schreibweise

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k, \\ 0, & \text{falls } j \neq k, \end{cases}$$

### 3. Lineare Algebra

so kann man diese speziellen Elemente kurz beschreiben durch

$$e^{(k)} = (\delta_{jk})_{j \in \mathbb{N}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Bemerkung 3.1.3.** In jedem Vektorraum  $V$  gelten für die abelsche Gruppe  $(V, +)$  natürlich alle Ergebnisse aus dem Abschnitt über Gruppen. Insbesondere ist also der Nullvektor und das additive Inverse jeweils eindeutig bestimmt. Ebenso übernehmen wir für  $u, v \in G$  die Schreibweise  $u - v$  für  $u + (-v)$ . Schließlich bemerken wir noch, dass nach unseren Erkenntnissen über Gruppen die Gleichung  $a + x = b$  für jede Vorgabe von  $a, b \in V$  in  $V$  eindeutig lösbar ist.

**Satz 3.1.4.** *Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit Nullvektor  $0_V$ . Dann gilt für jedes  $\alpha \in K$  und alle  $v \in V$*

$$(a) \quad \alpha \cdot v = 0_V \iff (\alpha = 0 \text{ oder } v = 0_V).$$

$$(b) \quad (-\alpha) \cdot v = -(\alpha \cdot v), \text{ insbesondere ist } (-1) \cdot v = -v.$$

*Beweis.* Wir beweisen nur (a), der Teil (b) verbleibt als Übung.  
Zum Nachweis von „ $\Leftarrow$ “ in (a) sei zunächst  $\alpha = 0$ . Dann gilt

$$v \stackrel{(V2)}{=} 1 \cdot v = (1 + 0) \cdot v \stackrel{(V4)}{=} 1 \cdot v + 0 \cdot v \stackrel{(V2)}{=} v + 0 \cdot v.$$

Nach Bemerkung 3.1.3 hat die Gleichung  $v = v + x$  genau eine Lösung in  $V$ . Da  $0_V$  nach (V1) eine Lösung ist, muss also  $0 \cdot v = 0_V$  sein, wie gewünscht.  
Sei nun  $v = 0_V$ . Wir beobachten, dass für jedes  $\alpha \in K$  und  $w \in V$  gilt

$$\alpha \cdot w \stackrel{(V1)}{=} \alpha \cdot (w + 0_V) \stackrel{(V5)}{=} \alpha \cdot w + \alpha \cdot 0_V.$$

Auch die eindeutig lösbare Gleichung  $\alpha \cdot w = \alpha \cdot w + x$  hat wieder  $x = 0_V$  als Lösung. Also ist  $\alpha \cdot 0_V = 0_V$ .

Es bleibt noch „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen. Seien also  $\alpha \in K$  und  $v \in V$  mit  $\alpha \cdot v = 0_V$  gegeben. Ist  $\alpha = 0$  so sind wir fertig, wir betrachten also den Fall  $\alpha \neq 0$ . Dann gilt

$$v \stackrel{(V2)}{=} 1 \cdot v \stackrel{\alpha \neq 0}{=} (\alpha^{-1}\alpha) \cdot v \stackrel{(V3)}{=} \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot v) = \alpha^{-1} \cdot 0_V \stackrel{\Leftarrow}{=} 0_V. \quad \square$$

#### 3.1.2. Die Summenschreibweise

In Vektorräumen wird viel addiert und wir werden in den nächsten Kapiteln Unmengen Summen mit einer variablen Anzahl, also z.B.  $n$ , Summanden haben. Dazu führen wir folgende sehr praktische Notation ein, die Sie sich unbedingt angewöhnen sollten.

### 3.2. Untervektorräume, Basis und Dimension

**Definition 3.1.5.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  seien Elemente einer kommutativen additiven Struktur, also z.B. eines Vektorraums, Körpers oder Rings, oder auch einer abelschen Gruppe, deren Verknüpfung additiv geschrieben wird. Dann schreibt man

$$\sum_{j=0}^n a_j := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Die Variable, die die Summanden hochzählt, in obigem Beispiel  $j$ , heißt Summationsindex.

In Erweiterung obiger Definition schreibt man auch

$$\sum_{j=3}^9 2^j = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^9 \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^{\infty} x^j = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

mit hoffentlich intuitiv klarer Bedeutung. Zumindest sollte jeder/m, die/der schon mal eine Schleife programmiert hat, klar sein was hier passiert.

Im folgenden Beispiel kann man einige oft verwendete Rechenregeln für das Summenzeichen finden.

**Beispiel 3.1.6.** (a)

$$\sum_{k=3}^9 (k-3)^5 = 0^5 + 1^5 + 2^5 + \dots + 6^5 = \sum_{k=0}^6 k^5 \quad (\text{Indexshift})$$

(b) Seien  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\alpha \in \mathbb{K}$ , sowie  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ . Dann ist

$$\alpha \cdot \sum_{k=1}^n a_k = \alpha \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \dots + \alpha a_n = \sum_{k=1}^n \alpha a_k.$$

So einfach ist Ausmultiplizieren und Ausklammern mit dem Summenzeichen.

## 3.2. Untervektorräume, Basis und Dimension

### 3.2.1. Untervektorräume

**Definition 3.2.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Teilmenge  $U$  von  $V$  heißt Untervektorraum von  $V$ , falls  $U$  mit den Verknüpfungen von  $V$  ebenfalls ein  $K$ -Vektorraum ist.

**Bemerkung 3.2.2.** Die Teilmengen  $\{0_V\}$  und  $V$  sind in jedem Vektorraum  $V$  Untervektorräume.

### 3. Lineare Algebra

**Satz 3.2.3** (Untervektorraumkriterium). *Eine Teilmenge  $U$  eines Vektorraums  $V$  ist genau dann ein Untervektorraum von  $V$ , wenn*

**(UVR1)**  $U \neq \emptyset$  und

**(UVR2)**  $\forall a, b \in U \forall \lambda, \mu \in K : \lambda a + \mu b \in U$

gelten.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $U$  ein Untervektorraum von  $V$ . Da damit  $U$  ein Vektorraum ist, muss  $U$  nach (V1) zumindest einen Nullvektor enthalten, also gilt (UVR1). Seien zum Nachweis von (UVR2) nun  $a, b \in U$  und  $\lambda, \mu \in K$ . Da  $U$  mit den Verknüpfungen aus  $V$  ein  $K$ -Vektorraum ist, muss  $\cdot : K \times U \rightarrow U$  und  $+: U \times U \rightarrow U$  gelten. Damit sind zunächst  $\lambda a$  und  $\mu b$  in  $U$  und dann auch  $\lambda a + \mu b$ .

„ $\Leftarrow$ “ Wir müssen zeigen, dass wir aus der Information, dass  $U$  eine Teilmenge eines  $K$ -Vektorraums ist, und dass (UVR1) und (UVR2) gelten, schon nachweisen können, dass  $U$  selbst ein  $K$ -Vektorraum ist. Setzen wir in (UVR2)  $\lambda = \mu = 1$ , so erhalten wir, dass für alle  $a, b \in U$  gilt  $a + b \in U$ , also ist  $+: U \times U \rightarrow U$  schon mal eine vernünftige Verknüpfung auf  $U$ . Setzt man  $\mu := 0$  und  $b := a$ , so erhält man das selbe Resultat für die Skalarmultiplikation.

Der Nachweis der Assoziativität und der Kommutativität von „+“, sowie von (V2)–(V5) ergibt sich jeweils direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von  $V$ . Was wirklich zu zeigen bleibt, ist die Existenz eines neutralen Elements und der additiv inversen Elemente in  $(U, +)$ .

Nach (UVR1) ist  $U \neq \emptyset$ , also gibt es irgendein  $u \in U$ . Mit Hilfe von (UVR2) muss dann auch  $0 \cdot u = 0_V \in U$  sein und dieses Element ist natürlich auch in  $U$  ein neutrales, denn es gilt ja sogar  $v + 0_V = v$  für alle  $v \in V$ .

Sei nun  $a \in U$  gegeben. Dann ist wiederum nach (UVR2) auch das Element  $-a = (-1) \cdot a \in U$  und wir sind fertig.  $\square$

**Beispiel 3.2.4.** (a) Der Vektorraum  $c_{00}$  der endlichen Folgen in  $K$ , den wir in Beispiel 3.1.2 (e) kennengelernt haben, ist ein Untervektorraum des Raums aller Folgen aus Beispiel 3.1.2 (d).

(b) In  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  betrachten wir die Menge  $U$  aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  $f(0) = 0$  gilt und weisen nach, dass dies ein Untervektorraum ist. Zunächst hat die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^3 - \pi x^2 + 15x$  diese Eigenschaft, also ist  $U$  nicht leer, d.h. (UVR1) gilt. Seien nun  $f, g \in U$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

also ist auch  $\lambda f + \mu g \in U$  und wir haben (UVR2).

### 3.2. Untervektorräume, Basis und Dimension

- (c) Im Standardvektorraum  $\mathbb{R}^2$  kann man alle Untervektorräume angeben. Neben den immer vorhandenen  $\{0\}$  und  $\mathbb{R}^2$  sind das genau die durch Ursprungsgeraden beschriebenen Mengen.

**Definition 3.2.5.** Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ , sowie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ . Dann heißt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j$$

eine Linearkombination von  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Beispiel 3.2.6.** In  $\mathbb{R}^2$  ist der Vektor  $(1, 6)^T$  eine Linearkombination von  $a_1 = (1, 2)^T$ ,  $a_2 = (0, 1)^T$  und  $a_3 = (0, 2)^T$ , z.B. mit

$$(1, 6)^T = a_1 - 2a_2 + 3a_3 \quad \text{oder} \quad (1, 6)^T = a_1 + 4a_2 + 0a_3.$$

**Definition 3.2.7.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M \subseteq V$ . Dann heißt

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &:= \{v \in V : v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M\} \\ &= \left\{ v \in V : \exists n \in \mathbb{N}^* \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \exists m_1, \dots, m_n \in M \text{ mit } v = \sum_{j=1}^n \alpha_j m_j \right\} \end{aligned}$$

lineare Hülle von  $M$ .

Ist  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  endlich, so schreibt man auch  $\langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$  statt  $\langle \{m_1, m_2, \dots, m_n\} \rangle$ .

Schließlich setzen wir  $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ .

**Satz 3.2.8.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M \subseteq V$ . Dann ist  $\langle M \rangle$  ein Untervektorraum von  $V$ .

*Beweis.* Ist  $M = \emptyset$ , so ist  $\langle M \rangle = \{0\}$  und damit ein Untervektorraum. Wir betrachten also den Fall  $M \neq \emptyset$ . Da jedes Element  $m \in M$  sich als die Linearkombination  $1 \cdot m$  mit Elementen aus  $M$  schreiben lässt, ist immer  $M \subseteq \langle M \rangle$  und damit insbesondere auch  $\langle M \rangle \neq \emptyset$ . Zum Nachweis von (UVR2) seien  $u, v \in \langle M \rangle$  und  $\lambda, \mu \in K$ . Dann existieren  $n, p \in \mathbb{N}^*$ , sowie  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p \in K$  und  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p \in M$  mit

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j \quad \text{und} \quad v = \sum_{k=1}^p \beta_k b_k.$$

Also ist

$$\lambda u + \mu v = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j + \mu \sum_{k=1}^p \beta_k b_k = \sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j) a_j + \sum_{k=1}^p (\mu \beta_k) b_k$$

und dieses ist wiederum eine Linearkombination von endlich vielen Elementen  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p \in M$ , also ist  $\lambda u + \mu v \in \langle M \rangle$  und damit ist (UVR2) erfüllt.  $\square$

### 3. Lineare Algebra

**Übungsaufgabe 3.2.9.** Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M, M_1, M_2$  Teilmengen von  $V$ . Dann gilt

(a)  $M_1 \subseteq M_2 \implies \langle M_1 \rangle \subseteq \langle M_2 \rangle$ .

(b)  $M = \langle M \rangle \iff M$  Untervektorraum von  $V$ .

**Übungsaufgabe 3.2.10.** In Definition 2.3.10 im Abschnitt über Gruppen haben wir das (Gruppen-)Erzeugnis definiert, dessen Idee sehr an das der linearen Hülle erinnert: Finde eine möglichst kleine Unterstruktur, die die gegebene Teilmenge aber komplett enthält. Dort war das Vorgehen allerdings ein anderes. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu sehen, dass das dort verwendete Verfahren ebenfalls zur Definition der linearen Hülle verwendet werden kann und das dabei auch genau das selbe herauskommt. Beweisen sie dazu die beiden folgenden Aussagen für einen  $K$ -Vektorraum  $V$ .

(a) Ist  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(V)$  ein Mengensystem von Untervektorräumen von  $V$ , so ist auch  $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$  ein Untervektorraum von  $V$ .

(b) Sei  $M \subseteq V$  und

$$\mathcal{U} := \{U \in \mathcal{P}(V) : M \subseteq U \text{ und } U \text{ Untervektorraum von } V\}.$$

Dann gilt

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \langle M \rangle.$$

### 3.2.2. Lineare Unabhängigkeit und Basen

**Definition 3.2.11.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M \subseteq V$ .

(a) Die Menge  $M$  heißt linear abhängig, falls es eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus Elementen von  $M$  gibt, d.h. wenn es ein  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n$  verschiedene Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_n \in M$  und Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  gibt, die nicht alle Null sind, mit  $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0_V$ .

(b) Ist  $M$  nicht linear abhängig, so nennt man  $M$  linear unabhängig.

**Beispiel 3.2.12.** (a) Die Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist linear abhängig, denn

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

### 3.2. Untervektorräume, Basis und Dimension

(b) Betrachtet man in  $\mathbb{R}^2$  hingegen die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

so ist diese linear unabhängig, denn aus

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt  $\alpha = 0$  und  $\beta = 0$ .

(c) Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  betrachten wir die Menge  $\{f, g\} := \{x \mapsto x^2, x \mapsto x\}$ . Diese ist linear unabhängig, denn hat man  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha f + \beta g = 0$ , so folgt  $\alpha x^2 + \beta x = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Setzt man speziell  $x = 1$ , bzw.  $x = -1$  ein, so erhält man  $\alpha + \beta = 0$ , bzw.  $\alpha - \beta = 0$ . Addition der beiden Gleichungen liefert dann  $2\alpha = 0$  und damit zuerst  $\alpha = 0$  und dann  $\beta = 0$ .

(d) In jedem Vektorraum ist  $\{0\}$  linear abhängig, denn  $1 \cdot 0 = 0$  ist eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors.

**Bemerkung 3.2.13.** Linearkombinationen sind immer *endliche* Summen, d.h. eine Teilmenge  $M$  eines Vektorraums ist genau dann linear unabhängig, wenn für jede Wahl von  $n \in \mathbb{N}^*$  und paarweise verschiedenen Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in M$  gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

**Satz 3.2.14.** Sind  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $v_1, \dots, v_n \in V$ , so gilt

- (a) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind genau dann linear abhängig, wenn einer von ihnen eine Linearkombination der  $n - 1$  anderen ist.
- (b) Ist  $p \leq n$  und sind  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig, so sind auch  $v_1, \dots, v_p$  linear unabhängig.
- (c) Ist  $p \leq n$  und sind  $v_1, \dots, v_p$  linear abhängig, so sind auch  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig.
- (d) Bildet man  $n + 1$  Linearkombinationen  $w_1, \dots, w_{n+1}$  aus  $v_1, \dots, v_n$ , so sind  $w_1, \dots, w_{n+1}$  linear abhängig.

*Beweis.* (a) Wir beweisen zunächst „ $\implies$ “. Seien dazu  $v_1, \dots, v_n \in V$  linear abhängig. Dann existieren  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ , die nicht alle Null sind, so dass

### 3. Lineare Algebra

$\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$  gilt. Sei  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  so gewählt, dass  $\alpha_{j_0} \neq 0$  ist. Dann haben wir

$$\alpha_{j_0} v_{j_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \alpha_j v_j = 0.$$

Also ergibt sich dank  $\alpha_{j_0} \neq 0$

$$v_{j_0} = -\frac{1}{\alpha_{j_0}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \alpha_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \frac{-\alpha_j}{\alpha_{j_0}} v_j,$$

was eine Linearkombination der  $n - 1$  übrigen Vektoren ist.

Zum Nachweis der umgekehrten Implikation „ $\Leftarrow$ “, sei  $j_0$  ein Index, für den  $v_{j_0}$  eine Linearkombination der übrigen Vektoren ist. Das bedeutet, dass es  $\alpha_1, \dots, \alpha_{j_0-1}, \alpha_{j_0+1}, \dots, \alpha_n \in K$  gibt mit

$$v_{j_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \alpha_j v_j, \quad \text{also ist} \quad 1 \cdot v_{j_0} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \alpha_j v_j = 0$$

und wir haben wegen  $1 \neq 0$  eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors gefunden. Also sind  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig.

(b) Übung

(c) Übung

(d) ohne Beweis

□

**Definition 3.2.15.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subseteq V$  heißt Basis von  $V$ , falls

**(B1)**  $\mathcal{B}$  ist linear unabhängig und

**(B2)**  $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ , d.h.  $\mathcal{B}$  erzeugt  $V$

gelten.

**Beispiel 3.2.16.** (a) Die Menge  $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\} \subseteq \mathbb{R}^2$  aus Beispiel 3.2.12 (b) ist eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ , denn erstens ist sie nach diesem Beispiel linear unabhängig und zweitens gilt für alle  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



### 3.2. Untervektorräume, Basis und Dimension

(b) Genauso ist auch die Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , die gegeben ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ , die sogenannte *Standardbasis*.

(c) Im Raum  $c_{00}$  der endlichen Folgen betrachten wir für  $k \in \mathbb{N}$  die Vektoren  $e^{(k)} = (\delta_{jk})_{j \in \mathbb{N}}$ , vgl. Beispiel 3.1.2 (e). Dann ist  $\mathcal{B} := \{e^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$  eine Basis von  $c_{00}$ . Um das einzusehen, beobachten wir zunächst, dass man jede endliche Folge  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots)$  als Linearkombination

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{(k)}$$

dieser speziellen Folgen schreiben kann. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  mit  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n$  paarweise verschiedene Indizes und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  so, dass

$$\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell e^{(k_\ell)} = 0 = (0)_{j \in \mathbb{N}}$$

gilt. Das heißt

$$(0, 0, 0, \dots) = (0, \dots, 0, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_2, 0, \dots, 0, \alpha_n, 0, 0, \dots)$$

und wir sehen  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Man beachte, dass wir hier ein Beispiel einer Basis haben, die unendlich viele Elemente hat.

(d) Der Nullraum  $\{0\}$  hat immer die Basis  $\emptyset$ .

Den folgenden sehr nützlichen Satz wollen wir hier ohne Beweis verwenden.

**Satz 3.2.17** (Basissatz, Basisergänzungssatz).

(a) Jeder Vektorraum hat eine Basis.

(b) Ist  $V$  ein Vektorraum und  $M \subseteq V$  linear unabhängig, so gibt es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  mit  $M \subseteq \mathcal{B}$ .

Eine wichtige Anwendung dieses Resultats ist die folgende Beobachtung.

### 3. Lineare Algebra

**Satz 3.2.18.** *Sei  $V$  ein Vektorraum und  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  mit  $n \in \mathbb{N}$  Elementen. Dann hat jede Basis von  $V$  genau  $n$  Elemente.*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  und es sei  $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_p\}$  eine weitere Basis von  $V$  mit  $p \in \mathbb{N}$  Elementen. Wir nehmen nun an, es wäre  $p > n$  und betrachten die dann vorhandenen Elemente  $w_1, \dots, w_n, w_{n+1} \in \mathcal{B}'$ . Da  $\mathcal{B}$  eine Basis ist, müssen diese alle Linearkombinationen der Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sein. Das bedeutet aber nach Satz 3.2.14 (d), dass  $w_1, \dots, w_{n+1}$  linear abhängig sein müssen und wir haben einen Widerspruch, da  $\mathcal{B}'$  eine Basis von  $V$  sein soll.

Nehmen wir umgekehrt  $p < n$  an, so sind mit den gleichen Argumenten wie oben die  $p + 1$  Elemente  $v_1, \dots, v_{p+1} \in \mathcal{B}$  Linearkombinationen der  $w_1, \dots, w_p$  und deshalb ist  $\mathcal{B}$  linear abhängig, was wieder auf einen Widerspruch führt.

Damit bleibt nur  $p = n$  übrig.  $\square$

**Definition 3.2.19.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum. Besitzt  $V$  eine  $n$ -elementige Basis, so sagt man  $V$  hat die Dimension  $n$  und schreibt  $\dim(V) = n$ .*

*Besitzt  $V$  keine endliche Basis, so nennt man  $V$  unendlichdimensional.*

Wir betrachten zur Illustration noch einmal die Vektorräume aus Beispiel 3.1.2.

**Beispiel 3.2.20.** (a) Der Standardvektorraum  $K^n$ : Es gilt  $\dim(K^n) = n$ , vgl. Beispiel 3.2.16 (b).

(b)  $p \times n$ -Matrizen: Hier ist  $\dim(K^{p \times n}) = pn$ .

(c) Funktionenräume: Wir werden später im Abschnitt 3.6 sehen, dass für endliche Mengen  $M$  gilt  $\dim(\text{Abb}(M, K)) = |M|$ .

(d) Folgenräume: Wie man an Beispiel 3.2.16 (c) sieht, ist  $c_{00}$  unendlichdimensional. Selbiges steht dann auch für den Raum aller Folgen zu vermuten.

Können Sie die hinter dieser Vermutung stehende abstrakte Aussage beweisen?

**Übungsaufgabe 3.2.21.** Ist  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, so ist jede linear unabhängige Teilmenge von  $V$  mit  $n$  Elementen eine Basis von  $V$ .

**Satz 3.2.22.** *Seien  $n \in \mathbb{N}^*$ , sowie  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$ . Dann gibt es für jedes  $v \in V$  eindeutig bestimmte  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  mit  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$ .*

*Beweis.* Sei  $v \in V$  beliebig vorgegeben. Die Existenz passender  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  mit  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$  folgt sofort daraus, dass  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit. Seien also zusätzlich  $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ , für die ebenfalls

$$\sum_{j=1}^n \beta_j b_j = v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$$

### 3.2. Untervektorräume, Basis und Dimension

gilt. Dann ist insbesondere

$$0 = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j - \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j = \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) b_j.$$

Da  $\mathcal{B}$  eine Basis ist, sind die Vektoren  $b_1, \dots, b_n$  linear unabhängig, so dass aus obiger Gleichheit  $\alpha_j - \beta_j = 0$  und damit  $\alpha_j = \beta_j$  für alle  $j = 1, \dots, n$  gilt.  $\square$

**Definition 3.2.23.** Seien  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  und  $v \in V$ . Die nach Satz 3.2.22 eindeutig bestimmten Elemente  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  mit  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$  heißen Koordinaten von  $v$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

Weiter heißt der Vektor  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in K^n$  Koordinatenvektor von  $v$  bezüglich  $\mathcal{B}$ . Wir werden diesen häufiger mit  $\vec{v}$ , oder, wenn die zugrundeliegende Basis klar betont werden soll, mit  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ , bezeichnen.

**Warnung 3.2.24.** Der Koordinatenvektor eines Vektors liegt nur nach der Wahl einer konkreten Basis fest. Ändert man die Basis, ändern sich auch alle Koordinatenvektoren. Die Schreibweise  $\vec{v}$  für den Koordinatenvektor von  $v$  ist also nur angebracht, wenn aus dem Zusammenhang vollkommen klar ist, bezüglich welcher Basis dieser zu bilden ist. In allen anderen Fällen ist die genauere Schreibweise notwendig.

**Beispiel 3.2.25.** (a) Im Raum  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  betrachten wir  $U := \langle f_1, f_2 \rangle$ , wobei  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_1(x) = x$  und  $f_2(x) = x^2$  gegeben seien. Die beiden Vektoren  $f_1$  und  $f_2$  sind linear unabhängig nach Beispiel 3.2.12 (c), also bilden sie eine Basis von  $U$ .

Das Element  $g \in U$  mit  $g(x) = 3x^2 + x$  für  $x \in \mathbb{R}$  hat bezüglich dieser Basis den Koordinatenvektor  $\vec{g} = (1, 3)^T \in \mathbb{R}^2$ , da  $g = 1 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2$  gilt.

(b) Wir betrachten  $\mathbb{R}^2$  mit der Basis, die durch die beiden Vektoren  $b_1 := (1, 1)^T$  und  $b_2 := (-1, 1)^T$  gegeben ist. Der Vektor  $e_1 = (1, 0)^T \in \mathbb{R}^2$  hat dann bezüglich dieser Basis den Koordinatenvektor  $\vec{e}_1 = (1/2, -1/2)^T$ , denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 3.2.26.** Durch die Bestimmung von Koordinaten scheint jeder  $n$ -dimensionale  $K$ -Vektorraum in gewisser Weise mit dem Raum  $K^n$  übereinzustimmen, wenn wir jeden Vektor mit seinem Koordinatenvektor identifizieren. Diese Intuition werden wir im Abschnitt 3.6 mathematisch rigoros machen.

### 3.3. Der Faktorraum

**Lemma 3.3.1.** *Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U$  ein Untervektorraum von  $V$ . Die Relation, die für  $v, w \in V$  gegeben ist durch*

$$v \sim w \iff v - w \in U,$$

*ist eine Äquivalenzrelation auf  $V$ .*

**Beweis. Reflexivität:** Sei  $v \in V$ . Dann gilt  $v - v = 0 \in U$ , also ist  $v \sim v$ .

**Symmetrie:** Seien  $v, w \in V$  mit  $v \sim w$  gegeben. Dann ist  $v - w \in U$ . Da  $U$  ein Untervektorraum ist, ist dann auch  $w - v = (-1)(v - w) \in U$  und das bedeutet  $w \sim v$ .

**Transitivität:** Es seien  $v, w, x \in V$  mit  $v \sim w$  und  $w \sim x$ . Das bedeutet  $v - w \in U$  und  $w - x \in U$ . Da  $U$  ein Untervektorraum ist, gilt insbesondere dann auch  $v - x = (v - w) + (w - x) \in U$ . Also haben wir  $v \sim x$  und sind fertig.  $\square$

Nun erinnern wir uns an ein Ergebnis unserer Betrachtungen in Abschnitt 1.3.2, den Satz 1.3.12:

Ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $V$ , so bilden die Äquivalenzklassen  $\tilde{v}$  von  $v \in V$  mit

$$\tilde{v} = \{w \in V : w \sim v\}$$

eine Zerlegung von  $V$ , d.h. die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist ganz  $V$  und je zwei verschiedene solcher Klassen sind disjunkt.

**Bemerkung 3.3.2.** (a) Wie sieht nun die Äquivalenzklasse eines Elements  $v \in V$  bezüglich obiger Äquivalenzrelation aus? Wir überlegen uns folgendes:

$$\begin{aligned} w \in \tilde{v} &\iff w - v \in U \iff \exists u \in U : w - v = u \\ &\iff \exists u \in U : w = v + u \iff w \in v + U, \end{aligned}$$

wobei  $v + U := \{v + u : u \in U\}$  ist. Anschaulich ist damit  $\tilde{v}$  der um  $v$  verschobene Unterraum  $U$ .

Am besten kann man sich dies an einem eindimensionalen Unterraum  $U$  des  $\mathbb{R}^2$  veranschaulichen, vgl. Beispiel 3.3.3 und Abbildung 3.1.

- (b) Es ist immer  $\tilde{0} = U$ , denn zum Einen gilt für jedes  $u \in U$  auch  $u - 0 = u \in U$  und damit  $u \sim 0$ , d.h.  $u \in \tilde{0}$ . Zum Anderen ist für jedes  $v \in \tilde{0}$  nach Definition  $v = v - 0 \in U$ .

**Beispiel 3.3.3.** In  $V = \mathbb{R}^2$  betrachten wir

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

### 3.3. Der Faktorraum

Nach obiger Bemerkung ist für jedes  $v \in \mathbb{R}^2$  die Äquivalenzklasse  $\tilde{v}$  in  $\mathbb{R}^2/U$  gegeben durch

$$\tilde{v} = v + U = \left\{ v + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

ist also anschaulich die Gerade in Richtung  $U$  mit Aufpunkt  $v$ .

Beispielsweise ist mit  $\mu = \lambda - 1$

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\} = \widetilde{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Die Äquivalenzrelation, die durch den Unterraum  $U$  gegeben ist, identifiziert also alle Vektoren miteinander, die auf einer gemeinsamen Geraden mit Richtung  $U$  liegen.

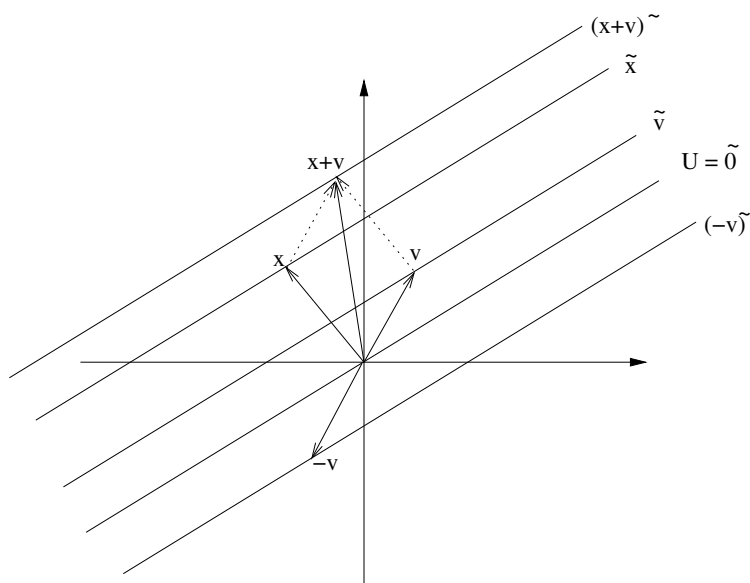


Abbildung 3.1.: Die Äquivalenzklassen in  $\mathbb{R}^2/U$

Nun kommt die überraschende Wendung. Wenn wir uns die Menge der durch den obigen Prozess gegebenen Äquivalenzklassen anschauen, so können wir diese auf eine kanonische Weise selbst wieder zu einem Vektorraum machen.

**Satz 3.3.4.** *Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $U$  ein Untervektorraum von  $V$  und  $\sim$  sei definiert wie in Lemma 3.3.1. Dann ist die Menge*

$$V/U := V/\sim = \{\tilde{v} : v \in V\}$$

*mit den für  $\tilde{v}, \tilde{w} \in V/U$  und  $\alpha \in K$  durch*

$$\tilde{v} + \tilde{w} := \widetilde{v + w} \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \tilde{v} := \widetilde{\alpha v}$$

*definierten Verknüpfungen ein  $K$ -Vektorraum.*

### 3. Lineare Algebra

*Beweis.* Der entscheidende Punkt im Beweis ist die Wohldefiniertheit der beiden Verknüpfungen, das bedeutet in diesem Zusammenhang wir müssen Repräsentantenunabhängigkeit zeigen.

Seien also  $\tilde{v}, \tilde{w} \in V/U$  und seien  $v_0 \in \tilde{v}$ , sowie  $w_0 \in \tilde{w}$ . Dann ist  $v - v_0 \in U$  und  $w - w_0 \in U$ . Da  $U$  ein Untervektorraum ist, bedeutet das insbesondere, dass auch die Summe  $v - v_0 + w - w_0$  in  $U$  ist und damit auch  $(v + w) - (v_0 + w_0) \in U$  gilt. Also ist  $v + w \sim v_0 + w_0$ , was nach Satz 1.3.12 (b) gerade  $\widetilde{v + w} = \widetilde{v_0 + w_0}$  bedeutet. Das liefert nun

$$\tilde{v} + \tilde{w} = \widetilde{v + w} = \widetilde{v_0 + w_0} = \tilde{v}_0 + \tilde{w}_0.$$

Um den entsprechenden Nachweis für die Skalar-Multiplikation zu führen, geben wir ein  $\alpha \in K$  und ein  $\tilde{v} \in V/U$  vor. Für jedes  $v_0 \in \tilde{v}$  gilt dann wieder  $v - v_0 \in U$  und da  $U$  ein Untervektorraum ist, ist auch  $\alpha(v - v_0) \in U$ . Das liefert  $\alpha v - \alpha v_0 \in U$ , was gerade  $\alpha v \sim \alpha v_0$  und damit  $\widetilde{\alpha v} = \widetilde{\alpha v_0}$  bedeutet. Das liefert zum Abschluss wieder

$$\alpha \tilde{v} = \widetilde{\alpha v} = \widetilde{\alpha v_0} = \alpha \tilde{v}_0.$$

Da nun die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen gezeigt ist, müssen wir noch die Vektorraumaxiome nachweisen. Diese lassen sich jedoch ohne Probleme von  $V$  auf  $V/U$  übertragen. Der Nullvektor in  $V/U$  ist dabei  $\tilde{0}$  und das Inverse  $-\tilde{v}$  zu  $\tilde{v} \in V/U$  ist gegeben durch  $\widetilde{-v}$ . Wir führen die Übertragung exemplarisch anhand der Kommutativität der Vektorraumaddition und (V4) vor.

Seien also für den Nachweis der Kommutativität  $\tilde{v}, \tilde{w} \in V/U$ . Dann gilt dank der Kommutativität in  $(V, +)$

$$\tilde{v} + \tilde{w} = \widetilde{v + w} = \widetilde{w + v} = \tilde{w} + \tilde{v}.$$

Zum Nachweis von (V4) seien  $\alpha, \beta \in K$  und  $\tilde{v} \in V/U$ . Dann haben wir

$$(\alpha + \beta) \cdot \tilde{v} = \widetilde{(\alpha + \beta)v} = \widetilde{\alpha v + \beta v} = \widetilde{\alpha v} + \widetilde{\beta v} = \alpha \cdot \tilde{v} + \beta \cdot \tilde{v}. \quad \square$$

**Definition 3.3.5.** Der Raum  $V/U$  in obigem Satz heißt Faktorraum von  $V$  nach  $U$  oder auch Quotientenraum. Die Schreibweise  $V/U$  wird „ $V$  (faktoriert) nach  $U$ “ gelesen.

**Satz 3.3.6.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $U$  ein  $m$ -dimensionaler Untervektorraum von  $V$ . Dann gilt  $\dim(V/U) = n - m$ .

*Beweis.* Nach Satz 3.2.17 hat  $U$  eine Basis, sei also  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$  eine solche. Nach dem gleichen Satz können wir diese nun zu einer Basis von  $V$  erweitern, es gibt also  $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n \in V$ , so dass  $\mathcal{B}' = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$  ist. Wir zeigen nun, dass  $\tilde{\mathcal{B}} := \{\tilde{b}_{m+1}, \dots, \tilde{b}_n\}$  eine Basis von  $V/U$  ist. Dazu überzeugen wir uns zunächst, dass diese Menge ganz  $V/U$  erzeugt. Sei also  $\tilde{v} \in V/U$ . Da

$\mathcal{B}'$  eine Basis von  $V$  ist, gibt es  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  mit  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$ . Damit gilt

$$\tilde{v} = \sum_{j=1}^n \widetilde{\alpha_j b_j} = \sum_{j=1}^n \widetilde{\alpha_j} \tilde{b_j} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{b_j}.$$

Da  $b_1, \dots, b_m \in U$  sind, gilt für alle diese  $\tilde{b}_1 = \dots = \tilde{b}_m = \tilde{0}$  und wir verbleiben mit

$$\tilde{v} = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \tilde{b_j},$$

was gerade bedeutet, dass  $\tilde{v}$  in der linearen Hülle von  $\tilde{\mathcal{B}}$  liegt.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien  $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in K$  gegeben mit  $\sum_{j=m+1}^n \alpha_j \tilde{b_j} = \tilde{0}$ . Dann gilt wie oben

$$\tilde{0} = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \tilde{b_j} = \sum_{j=m+1}^n \widetilde{\alpha_j b_j},$$

d.h.  $\sum_{j=m+1}^n \alpha_j b_j \in U$ .

Nun haben wir mit  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$  eine Basis von  $U$ , also gibt es nun Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$  mit

$$\sum_{j=m+1}^n \alpha_j b_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j b_j, \quad \text{d.h.} \quad \sum_{j=m+1}^n \alpha_j b_j - \sum_{j=1}^m \alpha_j b_j = 0.$$

Nun ist aber die Menge  $\{b_1, \dots, b_n\}$  wiederum eine Basis, diesmal von  $V$ , insbesondere sind diese  $n$  Vektoren linear unabhängig. Da wir in der letzten Gleichung aus diesen aber den Nullvektor kombiniert haben, muss  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$  gelten und wir sind fertig.  $\square$

## 3.4. Normierte Räume

Das Ziel dieses Abschnittes ist das Messen von Längen und Abständen in Vektorräumen. Dazu betrachten wir in diesem Abschnitt nur reelle Vektorräume. Alle Begriffe und Ergebnisse lassen sich auf komplexe Vektorräume übertragen, wobei sie allerdings zum Teil leicht angepasst werden müssen. Der Übersichtlichkeit halber wollen wir hier darauf verzichten.

**Definition 3.4.1.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Norm, falls*

**(N1)**  $\forall v \in V : \|v\| \geq 0$  und  $(\|v\| = 0 \iff v = 0)$ . (Definitheit)

**(N2)**  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall v \in V : \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ . (Homogenität)

### 3. Lineare Algebra

**(N3)**  $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ . (Dreiecksungleichung)

Ein Vektorraum mit einer Norm heißt normierter Raum.

**Beispiel 3.4.2.** (a) Der Betrag  $|\cdot|$  in  $\mathbb{R}$  ist eine Norm.

Das ergibt sich aus den Eigenschaften des Betrags in  $\mathbb{C}$  in Satz 2.5.12.

(b) Unser Alltagsbegriff von Länge ist der Euklidische Abstand, der z.B. in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  gegeben ist durch die *Euklidische Norm* oder auch *2-Norm*

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

oder allgemein in  $\mathbb{R}^n$  durch

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Beim Nachweis, dass dies eine Norm ist, sind die Nachweise von (N1) und (N2) einfach, dagegen stellt sich der Nachweis von (N3) auf direktem Wege als sehr sperrig und rechenintensiv heraus. Versuchen Sie sich ruhig einmal ein bisschen daran. Dass  $\|\cdot\|_2$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ist, werden wir in Kürze aus einem deutlich allgemeineren Resultat geschenkt bekommen. Wir können also auf die lange Rechnung verzichten.

(c) Es gibt in  $\mathbb{R}^n$  aber auch noch andere Normen. Wir betrachten in  $\mathbb{R}^2$  die Abbildung  $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

die sogenannte *1-Norm*. Diese ist eine Norm, denn

**(N1)** Für jedes  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  ist  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \geq 0$  und ist  $x \neq 0$ , so muss  $x_1 \neq 0$  oder  $x_2 \neq 0$  gelten. Also ist in diesem Fall  $|x_1| > 0$  oder  $|x_2| > 0$  und wir erhalten  $\|x\|_1 > 0$ .

Damit folgt die Definitheit per Kontraposition.

**(N2)** Seien  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\|\alpha x\|_1 = \|(\alpha x_1, \alpha x_2)^T\|_1 = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha|\|x\|_1.$$

**(N3)** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt mit Hilfe von (a)

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)^T\|_1 = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = \|x\|_1 + \|y\|_1. \end{aligned}$$



Auch die 1-Norm gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  in  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

- (d) Ein weiteres Beispiel, das als Übungsaufgabe verbleibt, ist die *Maximums-* oder  $\infty$ -Norm in  $\mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Hat man in einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  eine Norm  $\|\cdot\|$ , so kann man damit Abstände messen. Die entsprechenden Begriffe liefert die folgende Definition.

**Definition 3.4.3.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Norm  $\|\cdot\|$  und  $A$  und  $B$  seien nicht-leere Teilmengen von  $V$ . Dann heißt*

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$$

Abstand von  $A$  und  $B$ . Sind  $A = \{a\}$  und/oder  $B = \{b\}$  einelementig, so schreibt man auch  $\text{dist}(a, B)$  oder  $\text{dist}(a, b)$  statt  $\text{dist}(\{a\}, B)$ , bzw.  $\text{dist}(\{a\}, \{b\})$ .

**Bemerkung 3.4.4.** Der Abstand zwischen zwei Vektoren  $u$  und  $v$  aus  $V$  ist damit gegeben durch  $\|u - v\|$ .

Nimmt man die euklidische Norm in  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ , so stimmt dieser Abstandsbegriff mit unserem alltäglich gemessenen Abstand überein.

Man beachte auch, dass dank der Homogenität der Norm die für einen Abstand recht sinnige Eigenschaft

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |-1|\|v - u\| = \|v - u\| = \text{dist}(v, u)$$

gilt.

**Definition 3.4.5.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Skalarprodukt, falls*

**(SP1)**  $\forall x \in V : (x|x) \geq 0$  und  $((x|x) = 0 \iff x = 0)$ . (Definitheit)

**(SP2)**  $\forall x, y \in V : (x|y) = (y|x)$ . (Symmetrie)

**(SP3)**  $\forall x, y, z \in V \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$ .

(Linearität im ersten Argument)

**Bemerkung 3.4.6.** Aus (SP3) und (SP2) folgt wegen

$$(x|\alpha y + \beta z) = (\alpha y + \beta z|x) = \alpha(y|x) + \beta(z|x) = \alpha(x|y) + \beta(x|z)$$

für alle  $x, y, z \in V$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  auch die Linearität im zweiten Argument.

### 3. Lineare Algebra

**Beispiel 3.4.7.** In  $\mathbb{R}^n$  erhält man ein Skalarprodukt, das sogenannte *Standard-skalarprodukt*, wenn man für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  und  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  aus  $\mathbb{R}^n$  setzt

$$(x|y) := \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Das sieht man folgendermaßen:

**(SP1)** Für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $(x|x) = \sum_{j=1}^n x_j^2 \geq 0$ . Weiter ist offensichtlich  $(0|0) = 0$ . Ist schließlich  $x \neq 0$  so gibt es einen Index  $j_0$  mit  $x_{j_0} \neq 0$  und es ist

$$(x|x) = \sum_{j=1}^n x_j^2 \geq x_{j_0}^2 > 0,$$

also insbesondere  $(x|x) \neq 0$  in diesem Fall. Damit folgt die Definitheit per Kontraposition.

**(SP2)** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$(x|y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \sum_{j=1}^n y_j x_j = (y|x).$$

**(SP3)** Seien  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\alpha x + \beta y|z) &= \sum_{j=1}^n (\alpha x_j + \beta y_j) z_j = \sum_{j=1}^n (\alpha x_j z_j + \beta y_j z_j) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n x_j z_j + \beta \sum_{j=1}^n y_j z_j = \alpha(x|z) + \beta(y|z). \end{aligned}$$

**Übungsaufgabe 3.4.8.** Sei  $(\cdot|\cdot)$  ein Skalarprodukt auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ . Dann gilt  $(x|0) = (0|x) = 0$  für alle  $x \in V$ .

Was hat nun ein Skalarprodukt mit Abständen und Normen zu tun? Eine ganze Menge. Hat man ein Skalarprodukt  $(\cdot|\cdot)$  auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ , so werden wir nun zeigen, dass dann durch

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)}, \quad x \in V, \tag{3.1}$$

eine Norm definiert wird. Man beachte zunächst, dass dank der Definitheit des Skalarprodukts diese Setzung wohldefiniert ist, da das Argument der Wurzel nie negativ werden kann.

Zum Nachweis, dass wir so wirklich eine Norm bekommen, benötigen wir zunächst die folgende Ungleichung.

**Satz 3.4.9** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). *Es sei  $(\cdot|\cdot)$  ein Skalarprodukt auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und  $\|\cdot\|$  definiert wie in (3.1). Dann gilt für alle  $v, w \in V$*

$$|(v|w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

*und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.*

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall  $w = 0$ . Dann ist  $(w|w) = 0$  und damit auch  $\|w\| = 0$ . Aus Übungsaufgabe 3.4.8 folgt dann

$$(v|w) = 0 = \|v\| \cdot \|w\|$$

und wir können diesen Fall zu den Akten legen.

Sei also nun  $w \neq 0$ . Dann gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  dank der Definitheit aus (SP1)

$$\begin{aligned} 0 &\leq (v - \alpha w|v - \alpha w) \stackrel{(\text{SP3})}{=} (v|v - \alpha w) - \alpha(w|v - \alpha w) \\ &\stackrel{3.4.6}{=} (v|v) - \alpha(v|w) - \alpha(w|v) + \alpha^2(w|w) \stackrel{(\text{SP2})}{=} (v|v) - 2\alpha(v|w) + \alpha^2(w|w). \end{aligned}$$

Da  $w \neq 0$  ist, haben wir mit (SP1)  $(w|w) \neq 0$  und können nun  $\alpha := (v|w)/(w|w)$  setzen. Damit erhalten wir aus obiger Rechnung

$$\begin{aligned} 0 &\leq (v|v) - 2 \frac{(v|w)}{(w|w)}(v|w) + \frac{(v|w)^2}{(w|w)^2}(w|w) = (v|v) - 2 \frac{(v|w)^2}{(w|w)} + \frac{(v|w)^2}{(w|w)} \\ &= (v|v) - \frac{(v|w)^2}{(w|w)}. \end{aligned}$$

Da  $(w|w) > 0$  ist, können wir die Ungleichung mit diesem Wert multiplizieren, ohne dass sich das Relationszeichen umdreht. Das liefert

$$0 \leq (v|v)(w|w) - (v|w)^2.$$

Also ist

$$|(v|w)|^2 = (v|w)^2 \leq (v|v)(w|w) = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2,$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt.

Abschließend müssen wir uns noch überlegen, wann Gleichheit gilt. Nach unserer Rechnung gilt Gleichheit genau dann, wenn  $(v - \alpha w|v - \alpha w) = 0$  ist. Wegen der Definitheit des Skalarprodukts gilt das aber genau dann, wenn  $v - \alpha w = 0$ , d.h.  $v = \alpha w$  ist. Womit wir bei der linearen Abhängigkeit von  $v$  und  $w$  sind.  $\square$

**Satz 3.4.10.** *Sei  $(\cdot|\cdot)$  ein Skalarprodukt auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ . Dann ist  $\|\cdot\|$  definiert wie in (3.1) eine Norm auf  $V$ .*

*Beweis.* Wir rechnen die drei Norm-Axiome nach.

### 3. Lineare Algebra

**(N1)** Zunächst ist  $\|v\| = \sqrt{(v|v)} \geq 0$  für jedes  $v \in V$  und es gilt  $\|0\| = \sqrt{(0|0)} = \sqrt{0} = 0$ . Außerdem folgt aus  $\|v\| = 0$  auch  $\sqrt{(v|v)} = 0$ , d.h.  $(v|v) = 0$  und das liefert uns mit (SP1) nun  $v = 0$ .

**(N2)** Seien  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $v \in V$ . Dann gilt dank der Linearität des Skalarprodukts in beiden Variablen

$$\|\alpha v\| = \sqrt{(\alpha v|\alpha v)} = \sqrt{\alpha^2(v|v)} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{(v|v)} = |\alpha| \|v\|.$$

**(N3)** Seien  $u, v \in V$ . Dann gilt wieder mit der Linearität und dieses Mal zusätzlich der Symmetrie des Skalarprodukts

$$\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = (u|u) + (u|v) + (v|u) + (v|v) = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert das nun

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,$$

woraus  $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$  folgt. □

**Korollar 3.4.11.** Die Euklidische Norm  $\|\cdot\|_2$  auf  $\mathbb{R}^n$ , vgl. Beispiel 3.4.2 (b), ist tatsächlich eine Norm.

*Beweis.* Für das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ , vgl. Beispiel 3.4.7, gilt mit  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \|x\|_2.$$

Also folgt die Behauptung aus Satz 3.4.10. □

**Definition 3.4.12.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $(\cdot|\cdot)$ .

- (a) Zwei Vektoren  $v, w \in V$  heißen senkrecht oder orthogonal, falls  $(v|w) = 0$  ist. Man schreibt dann  $v \perp w$ .
- (b) Eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  heißt Orthogonalbasis, falls für alle Wahlen von  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$  mit  $b_1 \neq b_2$  gilt  $b_1 \perp b_2$ .
- (c) Eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  heißt Orthonormalbasis, falls  $\|b\| = 1$  für alle  $b \in \mathcal{B}$  gilt.

**Beispiel 3.4.13.** (a) Die Standardbasis ist eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt.

- (b) Die Menge  $\{(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix})\}$  ist eine Orthogonalbasis von  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standardskalarprodukt, aber keine Orthonormalbasis.

Den folgenden Basisergänzungssatz für Orthonormalbasen wollen wir wieder ohne Beweis stehen lassen.

**Satz 3.4.14.** *Jeder  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt hat eine Orthonormalbasis und jede Menge von normierten und paarweise orthogonalen Vektoren lässt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.*

**Bemerkung 3.4.15.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot|\cdot)$  und  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Bezüglich dieser Basis gibt es dann zu einem gegebenen  $v \in V$  den Koordinatenvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$$

ist, vgl. Definition 3.2.23. Das Problem ist, wie bestimmt man ganz konkret diesen Koordinatenvektor?

Bei einer Orthonormalbasis ist das zum Glück einfach. Wir multiplizieren für ein  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  obige Gleichung mit  $e_k$  und erhalten dank der Linearität des Skalarprodukts

$$(v|e_k) = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \middle| e_k \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (e_j|e_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{jk} = \alpha_k,$$

wobei wir wieder das Kronecker-Delta, vgl. Bemerkung 3.1.2 (e), verwendet haben.

Zusammen gilt also

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} (v|e_1) \\ (v|e_2) \\ \vdots \\ (v|e_n) \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass diese Formel *nur für Orthonormalbasen* gilt!

**Übungsaufgabe 3.4.16.** (a) Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $U$  sei ein Untervektorraum von  $V$ . Dann gibt es zu jedem  $v \in V$  genau ein  $u \in U$ , so dass  $v - u$  auf allen Vektoren aus  $U$  senkrecht steht. Man nennt  $u$  die *Orthogonalprojektion* von  $v$  auf  $U$ .

(b) Ist  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , so dass  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  eine Orthonormalbasis von  $U$  ist, so berechnet sich die Orthogonalprojektion von  $v$  auf  $U$  als

$$\sum_{j=1}^k (v|e_j) e_j.$$

### 3.5. Geometrie im $\mathbb{R}^n$

Der uns vertraute Raum und die euklidische Ebene lassen sich leicht mit  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^2$  identifizieren und tragen damit eine Vektorraum-Struktur. Wie diese dazu dienen kann, elementargeometrische Betrachtungen anzustellen, wollen wir in diesem Abschnitt ein wenig anreißen.

Dabei betrachten wir hier durchgängig den reellen Standardvektorraum  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt.

**Definition 3.5.1.** (a) Es seien  $x, v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v \neq 0$ . Dann heißt

$$g := \{x + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade mit Aufpunkt  $x$  und Richtungsvektor  $v$ .

(b) Seien  $x, v, w \in \mathbb{R}^n$  und seien  $v$  und  $w$  linear unabhängig. Dann heißt

$$E := \{x + \lambda v + \mu w : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Ebene mit Aufpunkt  $x$  und Richtungsvektoren  $v$  und  $w$ .

**Bemerkung 3.5.2.** Man kann Geraden und Ebenen als um den Aufpunkt verschobene Untervektorräume auffassen. Mit den obigen Notationen also

$$g = x + \langle v \rangle \quad \text{und} \quad E = x + \langle v, w \rangle.$$

Ein solcher verschobener Untervektorraum wird auch *affiner Raum* genannt.

Oft werden Geraden durch die Angabe von zwei Punkten angegeben, durch die die Gerade geht. Dass das ein sinnvolles Vorgehen ist, zeigt der folgende Satz.

**Satz 3.5.3.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq y$  gegeben. Dann existiert genau eine Gerade  $g$  mit  $x, y \in g$ , nämlich  $g = \{x + \lambda(y - x) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

*Beweis.* Zunächst erhalten wir mit den speziellen Wahlen  $\lambda = 0$ , bzw.  $\lambda = 1$ , dass  $x, y \in g$  gilt.

Sei nun  $h = \{u + \mu v : \mu \in \mathbb{R}\}$  eine andere Gerade mit  $x, y \in h$ . Dann gibt es also ein  $\mu_x \in \mathbb{R}$  mit  $u + \mu_x v = x$  und ein  $\mu_y \in \mathbb{R}$ , so dass  $u + \mu_y v = y$  gilt. Außerdem ist  $\mu_x \neq \mu_y$ , denn es ist ja  $x \neq y$ .

Insbesondere haben wir damit  $x - \mu_x v = u = y - \mu_y v$ , d.h.  $x - y = (\mu_x - \mu_y)v$ . Damit folgt

$$u = x - \mu_x v = x - \frac{\mu_x}{\mu_x - \mu_y}(x - y)$$

und das liefert schließlich

$$\begin{aligned} h &= \{u + \mu v : \mu \in \mathbb{R}\} = \left\{x - \frac{\mu_x}{\mu_x - \mu_y}(x - y) + \frac{\mu}{\mu_x - \mu_y}(x - y) : \mu \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x + \frac{\mu - \mu_x}{\mu_x - \mu_y}(x - y) : \mu \in \mathbb{R}\right\} = \{x + \lambda(x - y) : \lambda \in \mathbb{R}\} = g. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt  $\lambda := (\mu - \mu_x)/(\mu_x - \mu_y)$  gesetzt. Man beachte dabei, dass  $\mu \mapsto (\mu - \mu_x)/(\mu_x - \mu_y)$  eine Bijektion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  ist.  $\square$

**Bemerkung 3.5.4.** In gleicher Weise liegt eine Ebene durch die Angabe von drei Punkten  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , die nicht auf einer Geraden liegen, fest. Die Ebene ist dann gegeben durch

$$\{x + \lambda(y - x) + \mu(z - x) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Die Bedingung, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen dürfen, sorgt dann dafür, dass die beiden Richtungsvektoren  $y - x$  und  $z - x$  linear unabhängig sind.

**Beispiel 3.5.5.** In  $\mathbb{R}^3$  sei  $g$  die Gerade, die die Punkte  $(3, -4, 2)^T$  und  $(3, 2, 4)^T$  enthält, sowie  $E$  die durch

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

gegebene Ebene. Wir bestimmen die Schnittmenge  $g \cap E$ .

Nach Satz 3.5.3 ist

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right] : \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} : \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Damit ein Punkt  $x \in g \cap E$  existieren kann, muss es  $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$  geben mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das liefert uns das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 2 \\ -\lambda - 6\gamma & = -4 \\ \lambda + 2\mu - 2\gamma & = 2. \end{cases}$$

Die erste Zeile liefert uns  $\mu = 2 - \lambda$  und die zweite verrät  $\gamma = (-4 + \lambda)/(-6) = 2/3 - 1/6 \cdot \lambda$ . Setzt man diese beiden Informationen in die dritte Zeile ein, so erhält man

$$\lambda + 2(2 - \lambda) - 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\lambda\right) = 2 \iff -\frac{2}{3}\lambda + \frac{8}{3} = 2 \iff -\frac{2}{3}\lambda = -\frac{2}{3} \iff \lambda = 1.$$

Das bedeutet abschließend  $\mu = 1$  und  $\gamma = 1/2$ .

Da das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat, gibt es genau einen Punkt  $x \in g \cap E$ , und zwar

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

### 3. Lineare Algebra

**Definition 3.5.6.** Sei  $U$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann nennt man den affinen Raum  $x + U$  eine Hyperebene in  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 3.5.7.** Geraden sind Hyperebenen in  $\mathbb{R}^2$  und Ebenen sind Hyperebenen in  $\mathbb{R}^3$ . In  $\mathbb{R}^4$  wäre z.B.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Hyperebene.

**Übungsaufgabe 3.5.8.** Ist  $H = x + U$  eine Hyperebene und  $y \in H$  ein Punkt in  $H$ , so gilt auch  $H = y + U$ . Anders formuliert, der Untervektorraum, der  $H$  aufspannt, hängt nicht von der speziellen Wahl des Aufpunkts ab.

**Satz 3.5.9.** Es sei  $H = x + U$  eine Hyperebene in  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert ein bis auf sein Vorzeichen eindeutiger Vektor  $\nu \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\nu\|_2 = 1$  und  $\nu \perp u$  für alle  $u \in U$ , ein sogenannter Normaleneinheitsvektor von  $H$ .

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$  eine Orthonormalbasis von  $U$  und wir wählen  $\nu \in \mathbb{R}^n$  so, dass dieser Vektor die Menge  $\mathcal{B}'$  zu einer Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \nu\}$  von  $\mathbb{R}^n$  ergänzt, vgl. Satz 3.4.14. Dann gilt nach Konstruktion  $\|\nu\|_2 = 1$  und  $\nu \perp e_j$  für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Ist  $u \in U$ , so ist aber  $u$  eine Linearkombination von  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ , also ist auch  $\nu \perp u$ .

Es bleibt die Eindeutigkeit (bis auf ein Vorzeichen) zu zeigen. Sei dazu ein  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\|_2 = 1$  und  $v \perp u$  für jedes  $u \in U$  gegeben. Nun ist  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis, also gilt nach Bemerkung 3.4.15 und weil  $v \perp e_j$  für alle  $j = 1, 2, \dots, n-1$  gilt

$$v = \sum_{j=1}^{n-1} (v|e_j)e_j + (v|\nu)\nu = (v|\nu)\nu.$$

Der Vektor  $v$  ist also ein Vielfaches des Vektors  $\nu$ . Da aber beide Länge Eins haben sollen, muss  $v = \nu$  oder  $v = -\nu$  gelten und wir sind fertig.  $\square$

**Satz 3.5.10.** Es sei  $H$  eine Hyperebene in  $\mathbb{R}^n$  mit Normaleneinheitsvektor  $\nu$  und es sei  $x_0 \in H$ . Dann gilt für  $d := (x_0|\nu)$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x|\nu) = d\}.$$

*Beweis.* Sei  $U$  der Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ , mit dem  $H = x_0 + U$  gilt.

„ $\subseteq$ “ Es sei  $x \in H$ . Dann gibt es ein  $u \in U$  mit  $x = x_0 + u$ . Also ist dank der Linearität des Skalarprodukts und mit Hilfe der Definition des Normaleneinheitsvektors

$$(x|\nu) = (x_0 + u|\nu) = (x_0|\nu) + (u|\nu) = (x_0|\nu) = d.$$



„ $\supseteq$ “ Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $(x|\nu) = d = (x_0|\nu)$  gilt. Dann ist  $(x - x_0|\nu) = 0$ , d.h.  $x - x_0 \perp \nu$ . Ist wieder  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$  eine Orthonormalbasis von  $U$ , so ist  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \nu\}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$  und wir haben mit Hilfe von Bemerkung 3.4.15

$$x - x_0 = \sum_{j=1}^{n-1} (x - x_0|e_j)e_j + (x - x_0|\nu)\nu = \sum_{j=1}^{n-1} (x - x_0|e_j)e_j.$$

Das bedeutet aber, dass  $x - x_0 \in U$  liegt, d.h.  $x \in x_0 + U = H$ .  $\square$

**Definition 3.5.11.** Die Darstellung  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x|\nu) = d\}$  für eine Hyperebene  $H$  mit Normaleneinheitsvektor  $\nu$  heißt Hesse-Normalform von  $H$ .

Mit Hilfe der Hesse-Normalform ist die Bestimmung des Abstandes von der Hyperebene recht einfach, wie der folgende Satz zeigt. Zum Begriff des Abstandes sei an Definition 3.4.3 erinnert.

**Satz 3.5.12.** Es sei  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Hyperebene mit Hesse-Normalform  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x|\nu) = d\}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\text{dist}(x_0, H) = |(x_0|\nu) - d|.$$

Insbesondere ist  $\text{dist}(0, H) = |d|$ .

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass  $y_0 := x_0 - ((x_0|\nu) - d)\nu$  in  $H$  liegt. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} (y_0|\nu) &= (x_0 - ((x_0|\nu) - d)\nu|\nu) = (x_0|\nu) - ((x_0|\nu) - d)(\nu|\nu) \\ &= (x_0|\nu) - (x_0|\nu) + d = d. \end{aligned}$$

Also ist  $y_0 \in H$  und wir bekommen

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_0, H) &= \inf\{\|x_0 - y\|_2 : y \in H\} \leq \|x_0 - y_0\|_2 = \|((x_0|\nu) - d)\nu\| \\ &= |(x_0|\nu) - d|\|\nu\|_2 = |(x_0|\nu) - d|. \end{aligned}$$

Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Sei dazu  $U$  der Untervektorraum von  $V$  mit  $H = y_0 + U$ . Ist nun  $z \in H$  beliebig, so gilt  $y_0 - z \in U$  und wir haben

$$(x_0 - y_0|y_0 - z) = (((x_0|\nu) - d)\nu|y_0 - z) = ((x_0|\nu) - d)(\nu|y_0 - z) = 0,$$

da  $\nu \perp u$  für alle  $u \in U$  gilt. Das liefert nun

$$\begin{aligned} \|x_0 - z\|_2^2 &= (x_0 - z|x_0 - z) = (x_0 - y_0 + y_0 - z|x_0 - y_0 + y_0 - z) \\ &= (x_0 - y_0|x_0 - y_0) + (y_0 - z|y_0 - z) + 2(x_0 - y_0|y_0 - z). \end{aligned}$$

### 3. Lineare Algebra

Nun ist nach der Vorüberlegung der letzte Summand Null und die ersten beiden lassen sich als Normen schreiben, die beide positiv sind. Das ergibt

$$\|x_0 - z\|_2^2 = \|x_0 - y_0\|_2^2 + \|y_0 - z\|_2^2 \geq \|x_0 - y_0\|_2^2.$$

Also ist  $\|x_0 - y_0\|_2 \leq \|x_0 - z\|_2$  für jedes  $z \in H$ , was uns zum Abschluss

$$\|x_0 - y_0\|_2 \leq \inf\{\|x_0 - z\|_2 : z \in H\} = \text{dist}(x_0, H)$$

liefert. □

**Beispiel 3.5.13.** Wir wollen das obige Verfahren zur Abstandsberechnung einmal beispielhaft anwenden. Wir betrachten dazu in  $\mathbb{R}^3$  die Ebene

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

und bestimmen ihren Abstand vom Punkt  $(1, 1, 1)^T$ . Dazu ermitteln wir zunächst die Hesse-Normalform von  $E$ , d.h. wir suchen einen Normaleneinheitsvektor  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \in \mathbb{R}^3$  mit  $\nu \perp (1, 1, 0)^T$  und  $\nu \perp (1, 2, 2)^T$ , sowie  $\|\nu\|_2 = 1$ .

Aus der ersten Bedingung bekommen wir die Gleichung  $\nu_1 + \nu_2 = 0$ , d.h.  $\nu_1 = -\nu_2$ . Die zweite Bedingung liefert  $\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 = 0$ , d.h. wir erhalten durch Einsetzen der ersten Gleichung  $\nu_1 - 2\nu_1 + 2\nu_3 = 0$ . Das liefert  $\nu_1 = 2\nu_3$ . Wir setzen nun  $\nu_1 = 2$  und erhalten  $\nu_2 = -2$  und  $\nu_3 = 1$ . Ein Vektor, der die ersten beiden Bedingungen erfüllt, ist also  $\hat{\nu} := (2, -2, 1)^T$ .

Dieser hat nun noch nicht Länge Eins. Wir beachten, dass mit  $\hat{\nu} \perp x$  auch  $\alpha\hat{\nu} \perp x$  für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt. Auch die Vektoren  $\alpha\hat{\nu}$  erfüllen also weiter die ersten beiden Bedingungen. Es reicht also  $\|\hat{\nu}\|_2 = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$  zu bestimmen und  $\hat{\nu}$  damit zu „normieren“. Dann ist

$$\nu := \frac{1}{3}\hat{\nu} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der gesuchte Normaleneinheitsvektor.

Weiter ist der Vektor  $x := (1, 0, 1)^T$  ein Element von  $E$ , womit wir

$$d = (x|\nu) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3}(2 + 1) = 1$$

bestimmen. Also ist die Hesse-Normalform gegeben durch

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n : (y|\nu) = 1\} = \left\{ y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 = 1 \right\}.$$

Damit bekommen wir nun sofort mit Satz 3.5.12

$$\text{dist}((1, 1, 1)^T, E) = \left| \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - d \right| = \left| \frac{1}{3}(2 - 2 + 1) - 1 \right| = \frac{2}{3}.$$

Das mühsamste an obiger Berechnung war die Bestimmung von  $\hat{\nu}$ , also eines Vektors, der senkrecht auf dem Untervektorraum steht, der die Ebene aufspannt. Im für das reale Leben wichtigen Spezialfall des dreidimensionalen Raums  $\mathbb{R}^3$  gibt es zum Glück eine relativ einfache Möglichkeit einen solchen Vektor zu bestimmen. Diese wollen wir zum Abschluss dieses Abschnitts noch schnell angeben.

**Definition 3.5.14.** Es seien  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  und  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$  aus  $\mathbb{R}^3$ . Dann heißt der Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von  $x$  und  $y$ .

**Satz 3.5.15.** Sind  $x, y \in \mathbb{R}^3$ , so gilt  $(x \times y) \perp x$  und  $(x \times y) \perp y$ .

## 3.6. Lineare Abbildungen

**Definition 3.6.1.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume bezüglich desselben Körpers  $K$ .

- (a) Eine Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  heißt linear oder (Vektorraum-)Homomorphismus, falls für alle  $a, b \in V$  und alle  $\alpha \in K$

$$\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b) \quad \text{und} \quad \Phi(\alpha a) = \alpha \Phi(a)$$

gilt.

- (b) Ist  $\Phi$  zusätzlich bijektiv, so heißt  $\Phi$  (Vektorraum-)Isomorphismus, und  $V$  und  $W$  werden dann als isomorph bezeichnet, in Zeichen:  $V \cong W$ .

Die beiden Bedingungen in der Definition einer linearen Abbildung können zu einer verschmolzen werden:

**Satz 3.6.2.** Seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Dann ist  $\Phi : V \rightarrow W$  genau dann linear, wenn für alle  $a, b \in V$  und alle  $\alpha, \beta \in K$  gilt

$$\Phi(\alpha a + \beta b) = \alpha \Phi(a) + \beta \Phi(b).$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Mit den beiden Eigenschaften aus Definition 3.6.1 (a) folgt nacheinander

$$\Phi(\alpha a + \beta b) = \Phi(\alpha a) + \Phi(\beta b) = \alpha \Phi(a) + \beta \Phi(b).$$

„ $\Leftarrow$ “ Seien  $a, b \in V$ . Dann gilt nach Voraussetzung mit  $\alpha = \beta = 1$

$$\Phi(a + b) = \Phi(1 \cdot a + 1 \cdot b) = 1 \cdot \Phi(a) + 1 \cdot \Phi(b) = \Phi(a) + \Phi(b).$$

Sind  $a \in V$  und  $\alpha \in K$ , so ist auf die gleiche Weise mit  $b = 0$  und  $\beta = 0$

$$\Phi(\alpha a) = \Phi(\alpha a + 0 \cdot 0) = \alpha \Phi(a) + 0 \cdot \Phi(0) = \alpha \Phi(a). \quad \square$$

### 3. Lineare Algebra

**Übungsaufgabe 3.6.3.** (a) Für jeden Vektorraumhomomorphismus  $\Phi : V \rightarrow W$  gilt  $\Phi(0_V) = 0_W$ .

(b) Sind  $\Phi : V \rightarrow W$  und  $\Psi : W \rightarrow X$  lineare Abbildungen zwischen  $K$ -Vektorräumen  $V$ ,  $W$  und  $X$ , so ist auch  $\Psi \circ \Phi : V \rightarrow X$  linear.

(c) Ist  $\Phi : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus, so ist auch  $\Phi^{-1} : W \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, also wieder ein Isomorphismus.

**Beispiel 3.6.4.** (a) Für zwei beliebige  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  ist die *Nullabbildung*  $\Omega : V \rightarrow W$  mit  $\Omega(a) = 0_W$  für jedes  $a \in V$  linear, denn für alle  $a, b \in V$  und alle  $\alpha, \beta \in K$  gilt

$$\Omega(\alpha a + \beta b) = 0_W = \alpha \cdot 0_W + \beta \cdot 0_W = \alpha \Omega(a) + \beta \Omega(b).$$

(b) Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\lambda \in K$  fest. Dann ist  $\Phi_\lambda : V \rightarrow V$  mit  $\Phi_\lambda(a) = \lambda a$ ,  $a \in V$ , ein Homomorphismus. Für  $\lambda \neq 0$  ist das sogar ein Isomorphismus mit  $\Phi_\lambda^{-1} = \Phi_{1/\lambda}$ .

(c) Zu vorgegebenem  $v \neq 0$  aus einem  $K$ -Vektorraum  $V$  betrachten wir die Abbildung  $\Psi_v : V \rightarrow V$  mit  $\Psi_v(a) = a + v$  für jedes  $a \in V$ . Dieses ist keine lineare Abbildung, denn es gilt  $\Psi_v(0) = 0 + v = v \neq 0$ .

Wir wollen uns noch ein paar sehr wichtige lineare Abbildungen im Anschauungsraum zu Gemüte führen.

**Beispiel 3.6.5.** Die folgenden Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$  sind linear:

(a) Die in Übungsaufgabe 3.4.16 definierte Orthogonalprojektion.

(b) Jede Spiegelung an einem  $(n - 1)$ -dimensionalen Untervektorraum.

(c) Die Streckung um einen Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vgl. Beispiel 3.6.4 (b)

(d) Für  $n = 2$  die Drehung der Ebene um einen Winkel  $\alpha$  und für  $n = 3$  die Drehung des Raums um eine Ursprungsgerade.

(e) Außerdem alle Verkettungen der obigen, vgl. Übungsaufgabe 3.6.3 (b), also alle Drehstreckspiegelungsprojektionen,...

Um den Isomorphie-Begriff zu beleuchten, zeigen wir beispielhaft den folgenden Satz.

**Satz 3.6.6.** Es sei  $K$  ein Körper und  $M$  eine Menge mit  $|M| = n \in \mathbb{N}^*$ . Dann gilt  $\text{Abb}(M, K) \cong K^n$ .

### 3.6. Lineare Abbildungen

*Beweis.* Wir benennen  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  und betrachten die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \text{Abb}(M, K) & \rightarrow K^n \\ f & \mapsto (f(m_1), f(m_2), \dots, f(m_n))^T, \end{cases}$$

von der wir nun zeigen wollen, dass sie ein Isomorphismus ist.

Zum Nachweis der Linearität seien  $f, g \in \text{Abb}(M, K)$  und  $\alpha, \beta \in K$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f + \beta g) &= \begin{pmatrix} (\alpha f + \beta g)(m_1) \\ (\alpha f + \beta g)(m_2) \\ \vdots \\ (\alpha f + \beta g)(m_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha f(m_1) + \beta g(m_1) \\ \alpha f(m_2) + \beta g(m_2) \\ \vdots \\ \alpha f(m_n) + \beta g(m_n) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} f(m_1) \\ f(m_2) \\ \vdots \\ f(m_n) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} g(m_1) \\ g(m_2) \\ \vdots \\ g(m_n) \end{pmatrix} = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g) \end{aligned}$$

und die Linearität von  $\Phi$  folgt aus Satz 3.6.2.

Es bleibt also noch die Bijektivität von  $\Phi$  zu zeigen. Seien dazu  $f, g \in \text{Abb}(M, K)$  mit  $\Phi(f) = \Phi(g)$  gegeben. Dann ist

$$(f(m_1), f(m_2), \dots, f(m_n))^T = (g(m_1), g(m_2), \dots, g(m_n))^T$$

und damit  $f(m_j) = g(m_j)$  für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Also ist  $f = g$  und wir wissen, dass  $\Phi$  injektiv ist.

Sei weiter  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in K^n$  gegeben. Für die Funktion  $f : M \rightarrow K$  mit  $f(m_j) = x_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , gilt dann  $\Phi(f) = (f(m_1), f(m_2), \dots, f(m_n))^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = x$ . Also ist  $\Phi$  auch surjektiv und wir sind fertig.  $\square$

**Übungsaufgabe 3.6.7.** (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3)^T & \mapsto (x_2, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3)^T \end{cases}$$

linear und injektiv, aber nicht surjektiv ist.

- (b) Finden Sie eine surjektive lineare Abbildung, die nicht injektiv ist oder zeigen Sie, dass es eine solche nicht geben kann.

Die Menge der linearen Abbildungen bildet selbst wieder einen  $K$ -Vektorraum. Wir geben dieser zunächst eine Bezeichnung.

**Definition 3.6.8.** Wir setzen

$$\mathcal{L}(V, W) := \{\Phi : V \rightarrow W : \Phi \text{ linear}\}.$$

Ist  $V = W$ , so schreibt man auch kurz  $\mathcal{L}(V)$  statt  $\mathcal{L}(V, V)$ .

### 3. Lineare Algebra

**Übungsaufgabe 3.6.9.** Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Dann ist  $\mathcal{L}(V, W)$  mit der Addition und Skalar-Multiplikation aus Beispiel 3.1.2 (c) ein  $K$ -Vektorraum.

**Satz 3.6.10.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume,  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $\Phi \in \mathcal{L}(V, W)$ .

- (a) Sind  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  linear abhängig, so sind auch  $\Phi(v_1), \Phi(v_2), \dots, \Phi(v_n)$  linear abhängig.
- (b) Ist  $\Phi$  injektiv und sind  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  linear unabhängig, so sind auch  $\Phi(v_1), \Phi(v_2), \dots, \Phi(v_n)$  linear unabhängig.
- (c) Ist  $\Phi$  ein Isomorphismus und  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ , so ist auch  $\Phi(\mathcal{B})$  eine Basis von  $W$ . Insbesondere gilt  $\dim(V) = \dim(W)$ .

*Beweis.* (a) Es sei  $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0_V$  eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors. Dann gilt wegen Übungsaufgabe 3.6.3 (a) und der Linearität von  $\Phi$

$$0_W = \Phi(0_V) = \Phi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi(v_j)$$

und dieses ist eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors in  $W$ . Also sind  $\Phi(v_1), \Phi(v_2), \dots, \Phi(v_n)$  linear abhängig.

- (b) Wir nehmen an, dass  $\Phi(v_1), \Phi(v_2), \dots, \Phi(v_n)$  linear abhängig sind. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi(v_j) = 0_W$ . Mit dieser und der Linearität von  $\Phi$  gilt nun

$$\Phi(0_V) = 0_W = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi(v_j) = \Phi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right).$$

Nun ist  $\Phi$  nach Voraussetzung injektiv, also haben wir  $0_V = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ , was eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus  $v_1, v_2, \dots, v_n$  wäre und damit ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit dieser Vektoren.

- (c) Sei  $\Phi$  bijektiv und  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ . Dann ist dank (b) auch  $\Phi(\mathcal{B})$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $W$ . Wir müssen noch zeigen, dass  $\Phi(\mathcal{B})$  ganz  $W$  erzeugt. Sei dazu  $w \in W$  beliebig vorgegeben. Da  $\Phi$  surjektiv ist, gibt es ein  $v \in V$  mit  $\Phi(v) = w$ . Weiter ist  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ , also gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathcal{B}$ , sowie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$  mit  $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j b_j$ . Dann ist aber

$$w = \Phi(v) = \Phi\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j b_j\right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \Phi(b_j),$$

was bedeutet, dass  $w \in \langle \Phi(\mathcal{B}) \rangle$  ist. □

**Bemerkung 3.6.11.** Damit haben wir im Zusammenspiel mit Satz 3.6.6 insbesondere gezeigt, dass  $\dim(\text{Abb}(M, K)) = |M|$  gilt und das entsprechende Versprechen aus Beispiel 3.2.20 (c) ist eingelöst.

**Übungsaufgabe 3.6.12.** (a) Zeigen Sie, dass jeder  $n$ -dimensionale  $K$ -Vektorraum isomorph zu  $K^n$  ist, vgl. Bemerkung 3.2.26.

(b) Seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale Vektorräume. Zeigen Sie, dass  $V \cong W$  genau dann gilt, wenn  $\dim(V) = \dim(W)$  ist.

Wir wollen nun den fundamental wichtigen Satz beweisen, dass eine lineare Abbildung durch die Angabe der Bilder der Basisvektoren festgelegt werden kann.

**Satz 3.6.13.** *Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $V$  sei  $n$ -dimensional mit einer Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Für jede Wahl von  $w_1, w_2, \dots, w_n \in W$  gibt es dann genau eine lineare Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$ , für die  $\Phi(b_j) = w_j$  für alle  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  gilt.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass eine solche Abbildung  $\Phi$ , wenn sie existiert, durch die Angabe der  $\Phi(b_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , eindeutig bestimmt ist. Sei dazu  $v \in V$  beliebig. Da  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist, gibt es dann eindeutig bestimmte Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  mit  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$ . Wegen der Linearität von  $\Phi$  muss dann gelten

$$\Phi(v) = \Phi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j b_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi(b_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j.$$

Das Bild eines jeden  $v \in V$  liegt also durch die Angabe der Werte  $w_1, w_2, \dots, w_n$  bereits fest.

Obiger Eindeutigkeitsbeweis liefert nun auch gleich die Blaupause für die Konstruktion der gesuchten Abbildung. Wir definieren einfach für jedes  $v \in V$  die Abbildung  $\Phi$  durch

$$\Phi(v) := \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j, \quad \text{falls } v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j.$$

Wir müssen nun zeigen, dass das so definierte  $\Phi$  eine lineare Abbildung ist und dass  $\Phi(b_j) = w_j$  für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  gilt.

Zum Nachweis der Linearität seien  $a, b \in V$  und  $\lambda, \mu \in K$  gegeben. Mit den Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$ , für die  $a = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$  und  $b = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$  gilt, haben wir dann nach der Definition von  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda a + \mu b) &= \Phi\left(\lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j + \mu \sum_{j=1}^n \beta_j b_j\right) = \Phi\left(\sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j + \mu \beta_j) b_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j + \mu \beta_j) w_j = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j + \mu \sum_{j=1}^n \beta_j w_j = \lambda \Phi(a) + \mu \Phi(b). \end{aligned}$$

### 3. Lineare Algebra

Schließlich ist für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  die Basisdarstellung von  $b_j$  gegeben durch  $b_j$  selbst, also gilt

$$\Phi(b_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n 0 \cdot w_k + 1 \cdot w_j = w_j. \quad \square$$

**Definition 3.6.14.** Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $\Phi \in \mathcal{L}(V, W)$ . Dann heißt

$$\ker(\Phi) := \{v \in V : \Phi(v) = 0_W\}$$

der Kern von  $\Phi$ .

**Satz 3.6.15.** Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $\Phi : V \rightarrow W$  linear. Dann gilt

- (a)  $\ker(\Phi)$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- (b)  $\Phi$  ist genau dann injektiv, wenn  $\ker(\Phi) = \{0_V\}$ .
- (c)  $\Phi(V)$  ist ein Untervektorraum von  $W$ , der sogenannte Bildraum von  $\Phi$ .

*Beweis.* (a) Zum Einen ist immer  $0_V \in \ker(\Phi)$ , also ist der Kern nicht leer, zum Anderen gilt für alle  $a, b \in \ker(\Phi)$  und alle  $\alpha, \beta \in K$  dank der Linearität von  $\Phi$

$$\Phi(\alpha a + \beta b) = \alpha \Phi(a) + \beta \Phi(b) = \alpha \cdot 0_W + \beta \cdot 0_W = 0_W$$

und damit auch  $\alpha a + \beta b \in \ker(\Phi)$ . Die Behauptung folgt damit aus dem Untervektorraumkriterium, vgl. Satz 3.2.3.

- (b) Ist  $\Phi$  injektiv, so kann  $0_W$  außer  $0_V$  kein weiteres Urbild haben und es ist  $\ker(\Phi) = \{0_V\}$ . Ist umgekehrt diese Mengengleichheit gegeben und haben wir  $a, b \in V$  mit  $\Phi(a) = \Phi(b)$ , so gilt mit Hilfe der Linearität von  $\Phi$

$$\Phi(a - b) = \Phi(a) - \Phi(b) = 0_W, \quad \text{also} \quad a - b = 0_V,$$

womit  $a = b$  gezeigt ist. Das bedeutet aber gerade, dass  $\Phi$  injektiv ist.

- (c) Zum Einen ist  $\Phi(V)$  nicht leer und zum anderen gibt es für jede Wahl von  $w, x \in \Phi(V)$  Vektoren  $u, v \in V$  mit  $\Phi(u) = w$  und  $\Phi(v) = x$ . Damit ist für alle  $\alpha, \beta \in K$  auch

$$\alpha w + \beta x = \alpha \Phi(u) + \beta \Phi(v) = \Phi(\alpha u + \beta v) \in \Phi(V),$$

die Behauptung folgt also wieder aus dem Untervektorraumkriterium.  $\square$

**Definition 3.6.16.** Ist in der Situation von Satz 3.6.15 der Raum  $\Phi(V)$  endlich-dimensional, so heißt  $\text{Rang}(\Phi) := \dim(\Phi(V))$  der Rang von  $\Phi$ .



Wir haben in obigem Satz gezeigt, dass  $\ker(\Phi)$  ein Untervektorraum von  $V$  ist. In Erinnerung an Abschnitt 3.3 können wir also den Faktorraum  $V/\ker(\Phi)$  betrachten. Wie sieht eine Äquivalenzklasse in diesem Raum aus? Erstens gilt  $\widetilde{0_V} = \ker(\Phi)$  und allgemein ist nach der Definition des Faktorraums

$$\begin{aligned} a \in \tilde{b} &\iff a - b \in \ker(\Phi) \iff \Phi(a - b) = 0_W \\ &\iff \Phi(a) - \Phi(b) = 0_W \iff \Phi(a) = \Phi(b). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Elemente einer Äquivalenzklasse  $\tilde{a}$  genau die Elemente von  $V$  sind, die unter  $\Phi$  das selbe Bild wie  $a$  haben. Damit ist die Abbildung

$$\tilde{\Phi} : \begin{cases} V/\ker(\Phi) & \rightarrow W \\ \tilde{v} & \mapsto \Phi(v) \end{cases} \quad (3.2)$$

wohldefiniert. Diese hat eine wesentliche Bedeutung durch den folgenden Satz.

**Satz 3.6.17** (Homomorphiesatz für Vektorräume). *Seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume,  $\Phi : V \rightarrow W$  linear und  $\tilde{\Phi}$  wie in (3.2) definiert. Dann ist  $\tilde{\Phi} : V/\ker(\Phi) \rightarrow \Phi(V)$  ein Isomorphismus und es gilt  $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \nu$ , wobei  $\nu : V \rightarrow V/\ker(\Phi)$  die kanonische Abbildung ist.*

*Beweis.* Wir haben schon festgestellt, dass  $\tilde{\Phi}$  eine wohldefinierte Abbildung ist. Wir zeigen also Linearität von  $\tilde{\Phi}$ . Seien dazu  $\tilde{a}, \tilde{b} \in V/\ker(\Phi)$  und  $\alpha, \beta \in K$ . Dann gilt

$$\tilde{\Phi}(\alpha\tilde{a} + \beta\tilde{b}) = \tilde{\Phi}(\widetilde{\alpha a + \beta b}) = \Phi(\alpha a + \beta b) = \alpha\Phi(a) + \beta\Phi(b) = \alpha\tilde{\Phi}(\tilde{a}) + \beta\tilde{\Phi}(\tilde{b}).$$

Zum Nachweis der Injektivität von  $\tilde{\Phi}$  sei  $\tilde{a} \in \ker(\tilde{\Phi})$ . Dann gilt  $\tilde{\Phi}(\tilde{a}) = 0_W$ . Also ist  $\Phi(a) = 0_W$ , was wiederum  $a \in \ker(\Phi) = \widetilde{0_V}$  impliziert und schließlich  $\tilde{a} = \widetilde{0_V}$  liefert. Diese Überlegungen bedeuten  $\ker(\tilde{\Phi}) = \{\widetilde{0_V}\}$  und mit Satz 3.6.15 (b) folgt die Injektivität von  $\tilde{\Phi}$ .

Da wir den Zielbereich von  $\tilde{\Phi}$  auf  $\Phi(V)$  eingeschränkt haben, ist  $\tilde{\Phi}$  auch surjektiv und wir haben bewiesen, dass  $\tilde{\Phi} : V/\ker(\Phi) \rightarrow \Phi(V)$  ein Isomorphismus ist.

Abschließend bleibt noch zu bemerken, dass für jedes  $a \in V$  gilt

$$(\tilde{\Phi} \circ \nu)(a) = \tilde{\Phi}(\nu(a)) = \tilde{\Phi}(\tilde{a}) = \Phi(a). \quad \square$$

**Korollar 3.6.18.** *Seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume, wobei  $V$  endliche Dimension habe. Ist dann  $\Phi \in \mathcal{L}(V, W)$ , so gilt die Dimensionsformel*

$$\text{Rang}(\Phi) + \dim(\ker(\Phi)) = \dim(V).$$

*Beweis.* Es gilt nach dem Homomorphiesatz  $V/\ker(\Phi) \cong \Phi(V)$ . Also erhalten wir mit Übungsaufgabe 3.6.12 (b)

$$\dim(V/\ker(\Phi)) = \dim(\Phi(V)) = \text{Rang}(\Phi).$$

### 3. Lineare Algebra

Andererseits liefert Satz 3.3.6

$$\dim(V/\ker(\Phi)) = \dim(V) - \dim(\ker(\Phi))$$

und die Kombination der beiden Gleichungen liefert die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.6.19.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\Phi : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a)  $\Phi$  ist bijektiv.

(b)  $\Phi$  ist injektiv.

(c)  $\ker(\Phi) = \{0\}$ .

(d)  $\text{Rang}(\Phi) = \dim(V)$ .

(e)  $\Phi$  ist surjektiv.

*Beweis.* Wir zeigen  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$ . Dann sind alle Äquivalenzen gezeigt, denn man kommt dann von jedem Buchstaben zu jedem Buchstaben.

Die Implikation  $(a) \Rightarrow (b)$  ist klar und  $(b) \Rightarrow (c)$  findet sich in Satz 3.6.15 (b). Wir zeigen also  $(c) \Rightarrow (d)$ . Ist  $\ker(\Phi) = \{0\}$ , so ist die Dimension dieses Raumes Null und wir erhalten mit der Dimensionsformel aus Korollar 3.6.18  $\text{Rang}(\Phi) = \dim(V)$  und damit (d).

Zum Nachweis von  $(d) \Rightarrow (e)$  erinnern wir uns, dass  $\text{Rang}(\Phi) = \dim(\Phi(V))$  ist. Gilt also (d), so haben wir  $\dim(\Phi(V)) = \dim(V)$ . Dann ist  $\Phi(V)$  ein Unterraum von  $V$  mit gleicher Dimension wie  $V$ , es muss also  $\Phi(V) = V$  sein und  $\Phi$  ist surjektiv.

Es bleibt noch (a) aus (e) zu folgern. Ist  $\Phi$  surjektiv, so gilt  $\Phi(V) = V$ , also insbesondere

$$\text{Rang}(\Phi) = \dim(\Phi(V)) = \dim(V).$$

Mit der Dimensionsformel sehen wir, dass dann  $\dim(\ker(\Phi)) = 0$  sein muss, also ist  $\ker(\Phi) = \{0\}$ . Das liefert aber nach Satz 3.6.15 (b) die Injektivität von  $\Phi$  und damit (a).  $\square$

**Beispiel 3.6.20.** Wir betrachten die lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

und wollen ihren Kern und ihr Bild bestimmen. Zur Bestimmung des Kerns suchen wir alle  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  mit  $\Phi(x) = 0$ , also haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

zu lösen. Aus der letzten Gleichung bekommen wir  $x_1 = x_2$  und aus der ersten  $x_2 = -x_3$ . Also ist auch  $-x_1 + 2x_2 + x_3 = -x_2 + 2x_2 - x_2 = 0$  und die zweite Gleichung ist automatisch erfüllt. Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist also

$$\ker(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da damit  $\dim(\ker(\Phi)) = 1$  ist, wissen wir nach der Dimensionsformel schon, dass  $\dim(\Phi(V)) = \text{Rang}(\Phi) = 2$  sein muss. Damit reicht es zur Bestimmung des Bildes von  $\Phi$  aus, wenn wir zwei linear unabhängige Vektoren in  $\Phi(V)$  angeben können. Dazu betrachten wir auf Geratewohl die Bilder

$$\Phi((1, 0, 0)^T) = (0, -1, 1)^T \quad \text{und} \quad \Phi((0, 0, 1)^T) = (1, 1, 0)^T.$$

Da diese beiden linear unabhängig sind, gilt

$$\Phi(V) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

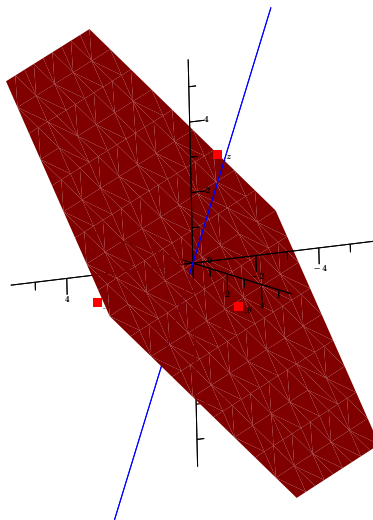


Abbildung 3.2.: Das Bild (Projektionsebene) und der Kern (Projektionsrichtung) der linearen Abbildung aus Beispiel 3.6.20

### 3. Lineare Algebra

**Bemerkung 3.6.21.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume und  $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$ , sowie  $\mathcal{C} := \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  eine Basis von  $W$ . Weiter sei  $\Phi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

Ein gegebenes  $x \in V$  können wir nun bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  darstellen und erhalten

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k b_k,$$

wobei  $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in K^n$  der Koordinatenvektor von  $x$  bezüglich  $\mathcal{B}$  ist. Damit gilt nun dank der Linearität von  $\Phi$

$$\Phi(x) = \Phi\left(\sum_{k=1}^n \xi_k b_k\right) = \sum_{k=1}^n \xi_k \Phi(b_k).$$

Stellen wir nun wiederum jedes  $\Phi(b_k)$  durch seine Koordinaten bzgl.  $\mathcal{C}$  dar, also bestimmen wir für jedes  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  Koeffizienten  $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \dots, \alpha_{p,k} \in K$  mit

$$\Phi(b_k) = \sum_{j=1}^p \alpha_{j,k} c_j,$$

so erhalten wir zusammen

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k \Phi(b_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^p \alpha_{j,k} c_j = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \xi_k \right) c_j.$$

Was sagt uns dieser Zeichenwust nun? Wir haben mit

$$[\overrightarrow{\Phi(x)}]_{\mathcal{C}} = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_{1,k} \xi_k, \sum_{k=1}^n \alpha_{2,k} \xi_k, \dots, \sum_{k=1}^n \alpha_{p,k} \xi_k \right)^T$$

den Koordinatenvektor von  $\Phi(x)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$  bestimmt, d.h. die Darstellung von  $\Phi(x)$  in der Basis  $\mathcal{C}$  in  $W$  angegeben. Dabei können wir die Koeffizienten  $\sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \xi_k$  berechnen, wenn wir zum Einen die  $\xi_k$ , für jedes  $k$  kennen und zum anderen die Koeffizienten  $\alpha_{j,k}$ . Die  $\xi_k$  lassen sich direkt aus  $x$  bestimmen, sobald wir die Basis  $\mathcal{B}$  haben, diese haben also nichts mit der speziellen Abbildung  $\Phi$  zu tun. Umgekehrt bestimmen sich die  $\alpha_{j,k}$  ausschließlich aus den Vektoren  $\Phi(b_1), \Phi(b_2), \dots, \Phi(b_n)$  und der Basis  $\mathcal{C}$ . Diese sind also für jedes  $x \in V$  die selben. Diese Beobachtungen sind aus verschiedenen Gründen bemerkenswert:

1. Wir haben gesehen, dass es zur Berechnung von  $\Phi(x)$  für jedes  $x \in V$  ausreicht, wenn wir die  $n$  Vektoren  $\Phi(b_1), \Phi(b_2), \dots, \Phi(b_n)$  kennen.
2. Das bedeutet umgekehrt: Gibt uns jemand die gesamte Kollektion der Koeffizienten  $\alpha_{j,k}$  für  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  und  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so kennen wir die lineare Abbildung  $\Phi$ , die dahinter steht komplett, denn wir können dann jedes  $\Phi(x)$  ausrechnen.

## 3.7. Matrizen und lineare Abbildungen

### 3.7.1. Matrixrechnung

Wir erinnern noch mal an den Vektorraum der  $p \times n$ -Matrizen über einem Körper  $K$ , vgl. Beispiel 3.1.2 (b). Eine solche Matrix ist ein Schema von Elementen aus  $K$  mit  $p$  Zeilen und  $n$  Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pn} \end{pmatrix} = (\alpha_{jk})_{j=1,\dots,p,k=1,\dots,n},$$

wobei die Addition und Skalar-Multiplikation komponentenweise erklärt sind.

Wichtig ist außerdem der Spezialfall  $n = 1$ . In diesem Fall hat die Matrix nur eine Spalte, es hat also ein  $A \in K^{p \times 1}$  die Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{p1} \end{pmatrix}.$$

und wir haben  $K^{p \times 1} \cong K^p$ .

Wir wollen nun eine weitere Rechenoperation einführen, die Matrixmultiplikation.

**Definition 3.7.1.** *Es seien  $K$  ein Körper und  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ . Weiter seien zwei Matrizen  $A = (\alpha_{j\ell})_{j=1,\dots,q,\ell=1,\dots,p} \in K^{q \times p}$ , sowie  $B = (\beta_{\ell k})_{\ell=1,\dots,p,k=1,\dots,n} \in K^{p \times n}$  gegeben. Dann definieren wir das Matrixprodukt  $A \cdot B = AB \in K^{q \times n}$  als*

$$AB := \left( \sum_{\ell=1}^p \alpha_{j\ell} \beta_{\ell k} \right)_{j=1,\dots,q,k=1,\dots,n}.$$

**Bemerkung 3.7.2.** (a) Man beachte, dass das Produkt zweier Matrizen nur dann definiert ist, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten ist.

(b) Sieht man die Matrix  $A$  als Spaltenvektor ihrer Zeilen und  $B$  als Zeilenvektor der Spalten, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_q^T \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

### 3. Lineare Algebra

wobei  $a_1, a_2, \dots, a_q \in K^p$  die Zeilen von  $A$  und  $b_1, b_2, \dots, b_n \in K^p$  die Spalten von  $B$  sind, so bekommt man den Eintrag  $\gamma_{jk}$  von  $AB$  für  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$  und  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , indem man das Skalarprodukt der  $j$ -ten Zeile von  $A$  mit der  $k$ -ten Spalte von  $B$  berechnet, also

$$\gamma_{jk} = (a_j | b_k) = \sum_{\ell=1}^p \alpha_{j\ell} \beta_{\ell k}.$$

#### Beispiel 3.7.3.

(a) Wir betrachten  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  und  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ .

Dann ist  $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

und  $B \cdot A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 13 & 26 & 5 \end{pmatrix}.$$

Man beachte insbesondere, dass damit die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

(b) Sei nun  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

Dann ist auch  $Ax \in \mathbb{R}^{3 \times 1} = \mathbb{R}^3$  mit

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrixmultiplikation gelten die folgenden Rechenregeln:

**Satz 3.7.4.** Seien  $A, D \in K^{q \times p}$  und  $B, C \in K^{p \times n}$ , sowie  $\lambda \in K$ . Dann gilt

(a)  $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B)$ .

(b)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  und  $(A + D) \cdot B = A \cdot B + D \cdot B$ .

### 3.7. Matrizen und lineare Abbildungen

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage in (a), die zweite Aussage verbleibt als Übung. Es sei  $A = (\alpha_{j\ell})_{j=1,\dots,q,\ell=1,\dots,p}$  und  $B = (\beta_{\ell k})_{\ell=1,\dots,p,k=1,\dots,n}$ . Dann gilt  $\lambda B = (\lambda\beta_{\ell k})_{\ell=1,\dots,p,k=1,\dots,n}$  und nach der Definition der Matrixmultiplikation

$$A \cdot (\lambda B) = \left( \sum_{\ell=1}^p \alpha_{j\ell} (\lambda\beta_{\ell k}) \right)_{j=1,\dots,q,k=1,\dots,n} = \left( \sum_{\ell=1}^p (\lambda\alpha_{j\ell}) \beta_{\ell k} \right)_{j=1,\dots,q,k=1,\dots,n}.$$

Dieses ist nun zum Einen gleich der Matrix  $(\lambda A) \cdot B$  und zum Anderen können wir nun das  $\lambda$  ganz aus der Summe und dann aus der Matrix ziehen und bekommen so

$$A \cdot (\lambda B) = \left( \lambda \sum_{\ell=1}^p \alpha_{j\ell} \beta_{\ell k} \right)_{j=1,\dots,q,k=1,\dots,n} = \lambda \left( \sum_{\ell=1}^p \alpha_{j\ell} \beta_{\ell k} \right)_{j=1,\dots,q,k=1,\dots,n} = \lambda(A \cdot B). \quad \square$$

**Bemerkung 3.7.5.** Insbesondere gilt also für  $A, B \in K^{p \times n}$  und  $x, y \in K^n$  damit

$$A(x + y) = Ax + Ay \quad \text{und} \quad (A + B)x = Ax + Bx.$$

Besonders wichtig ist in der Matrixrechnung der Fall  $p = n$ . Man spricht dann von einer *quadratischen Matrix*. Hat man zwei gleich große quadratische Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so sind beide Produkte  $AB$  und  $BA$  definiert und wieder Elemente von  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Tatsächlich gilt sogar der folgende Satz.

**Satz 3.7.6.** Sei  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $K$  ein Körper. Dann ist  $(K^{n \times n}, +, \cdot)$  ein Ring mit Eins, der für  $n \geq 2$  nicht kommutativ ist.

*Beweis.* Nach Beispiel 3.1.2 (b) ist  $K^{n \times n}$  ein  $K$ -Vektorraum, also ist  $(K^{n \times n}, +)$  insbesondere eine abelsche Gruppe. Das Distributivgesetz ist genau die Aussage aus Satz 3.7.4 (b). Das Assoziativgesetz für die Multiplikation folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von  $K$ , denn für drei Matrizen  $A, B, C \in K^{n \times n}$  gilt

$$\begin{aligned} A(BC) &= (\alpha_{j\ell})_{j,\ell=1,\dots,n} \cdot [(\beta_{\ell m})_{\ell,m=1,\dots,n} \cdot (\gamma_{mk})_{m,k=1,\dots,n}] \\ &= (\alpha_{j\ell})_{j,\ell=1,\dots,n} \cdot \left( \sum_{m=1}^n \beta_{\ell m} \gamma_{mk} \right)_{\ell,k=1,\dots,n} = \left( \sum_{\ell=1}^n \alpha_{j\ell} \sum_{m=1}^n \beta_{\ell m} \gamma_{mk} \right)_{j,k=1,\dots,n} \\ &= \left( \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{j\ell} (\beta_{\ell m} \gamma_{mk}) \right)_{j,k=1,\dots,n} = \left( \sum_{m=1}^n \sum_{\ell=1}^n (\alpha_{j\ell} \beta_{\ell m}) \gamma_{mk} \right)_{j,k=1,\dots,n} \\ &= (AB)C, \end{aligned}$$

wobei man für das letzte Gleichheitszeichen, die davor getätigte Rechnung wieder rückwärts machen muss.

### 3. Lineare Algebra

Das Einselement ist die Matrix

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{jk})_{j,k=1,\dots,n},$$

denn für alle  $A = (\alpha_{j\ell})_{j,\ell=1,\dots,n} \in K^{n \times n}$  gilt

$$AI = (\alpha_{j\ell})_{j,\ell=1,\dots,n} \cdot (\delta_{\ell k})_{\ell,k=1,\dots,n} = \left( \sum_{\ell=1}^n \alpha_{j\ell} \delta_{\ell k} \right)_{j,k=1,\dots,n} = (\alpha_{jk})_{j,k=1,\dots,n} = A$$

und umgekehrt genauso.

Die Nichtkommutativität sieht man schließlich für jedes  $n \geq 2$  an

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Definition 3.7.7.** Die Matrix  $I = (\delta_{jk})_{j,k=1,\dots,n} \in K^{n \times n}$ , d.h. das Einselement von  $K^{n \times n}$ , wird auch Einheitsmatrix genannt.

**Definition 3.7.8.** Sei  $A = (\alpha_{jk})_{j=1,\dots,p,k=1,\dots,n} \in K^{p \times n}$  eine Matrix. Dann heißt

$$A^T := (\alpha_{kj})_{k=1,\dots,n,j=1,\dots,p} \in K^{n \times p}$$

die zu  $A$  transponierte Matrix.

Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (1 \ 3 \ 7)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

vgl. Beispiel 3.1.2 (a).

Für das Transponieren gelten die folgenden Rechenregeln:



**Satz 3.7.9.** (a) Für alle  $A, B \in K^{p \times n}$  und alle  $\lambda \in K$  gilt

- $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,
- $(A^T)^T = A$ ,
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ .

(b) Für alle  $A \in K^{q \times p}$  und  $B \in K^{p \times n}$  gilt  $(AB)^T = B^T A^T$ .

*Beweis.* Wir beweisen nur beispielhaft den dritten Punkt von (a), der Rest verbleibt als Übung.

Sei also  $A = (\alpha_{jk})_{j=1, \dots, p, k=1, \dots, n} \in K^{p \times n}$  und  $\lambda \in K$ . Dann gilt nach der Definition der Skalar-Multiplikation in  $K^{p \times n}$

$$(\lambda A)^T = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{11} & \lambda \alpha_{12} & \dots & \lambda \alpha_{1n} \\ \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{22} & \dots & \lambda \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \alpha_{p1} & \lambda \alpha_{p2} & \dots & \lambda \alpha_{pn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{11} & \lambda \alpha_{21} & \dots & \lambda \alpha_{p1} \\ \lambda \alpha_{12} & \lambda \alpha_{22} & \dots & \lambda \alpha_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \alpha_{1n} & \lambda \alpha_{2n} & \dots & \lambda \alpha_{pn} \end{pmatrix} = \lambda A^T.$$

□

**Übungsaufgabe 3.7.10.** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix und  $(\cdot | \cdot)$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass dann für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$(Ax | y) = (x | A^T y).$$

Im Lichte dieser Übungsaufgabe ist auch das Vertauschen der Reihenfolge in Satz 3.7.9 (b) zu sehen:

$$((AB)^T x | y) = (x | AB y) = (A^T x | B y) = (B^T A^T x | y).$$

### 3.7.2. Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung

Was haben nun Matrizen mit linearen Abbildungen zu tun? Dieser Frage wollen wir jetzt nachgehen. Dazu sei  $\Phi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräumen, sowie  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  eine Basis von  $W$ .

In dieser Situation haben wir in Bemerkung 3.6.21 folgendes gesehen: Bestimmt man  $\alpha_{jk}$  für  $j = 1, \dots, p$  und  $k = 1, \dots, n$  so, dass  $\Phi(b_k) = \sum_{j=1}^p \alpha_{jk} c_j$  gilt und stellt man  $x \in V$  durch seinen Koordinatenvektor  $\vec{x} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in K^n$  bezüglich  $\mathcal{B}$  dar, so gilt

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \xi_k \right) c_j = \sum_{j=1}^p (A \vec{x})_j c_j,$$

mit  $A = (\alpha_{jk})_{j=1, \dots, p, k=1, \dots, n}$ , d.h. der Vektor  $A \vec{x}$  enthält die Koordinaten des Vektors  $\Phi(x)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$ , oder in Formeln  $[\Phi(x)]_{\mathcal{C}} = A[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ .

### 3. Lineare Algebra

**Definition 3.7.11.** Es seien  $V$ ,  $W$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $n$ ,  $p$  und  $\Phi : V \rightarrow W$  wie oben. Die Matrix  $A = (\alpha_{jk})_{j=1,\dots,p,k=1,\dots,n} \in K^{p \times n}$  heißt dann Darstellungsmatrix oder Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ . Wir bezeichnen diese mit  $A =: M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$ .

Im Kopf haben sollten Sie die folgende

**Merkregel:** In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren.

**Beispiel 3.7.12.** Es sei  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Spiegelung an der  $x_2$ -Achse. Das ist nach Beispiel 3.6.5 (b) eine lineare Abbildung. Statt  $\mathbb{R}^2$  mit der Standardbasis  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$  aus, so können wir die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}$  angeben, indem wir die Bilder der Basisvektoren bestimmen:

$$\Phi(b_1) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2$$

und

$$\Phi(b_2) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2.$$

Also ist  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Tatsächlich ist zum Beispiel für  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  der Koordinatenvektor  $\vec{x}$  bezüglich  $\mathcal{B}$  gleich dem Vektor  $x$  und wir bekommen

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\Phi(x)}.$$

**Beispiel 3.7.13.** Wir betrachten die lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei zunächst  $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ . Dann ist

$$\Phi(b_1) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2$$

und

$$\Phi(b_2) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2.$$

Also ist

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Ändert man die Basen, bekommt man auch eine andere Abbildungsmatrix für die selbe Abbildung. Wir behalten  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  wie oben, aber ersetzen  $\mathcal{C}$  durch  $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Dann ist

$$\Phi(b_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = d_1 \quad \text{und} \quad \Phi(b_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = d_2.$$

Also ist damit

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist  $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , aber es ist doch  $\Phi((1, 1)^T) = (1, 2)^T$ ? Was ist hier schief gegangen?

Nichts! Wir müssen nur richtig interpretieren. Nach unserer Definition der Abbildungsmatrix ist das Ergebnis von  $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  der Koordinatenvektor  $[\overrightarrow{\Phi(x)}]_{\mathcal{D}}$  von  $\Phi(x)$  bezüglich  $\mathcal{D}$  und nicht  $\Phi(x)$  selbst! Da nun  $\mathcal{D}$  nicht die Standardbasis ist, sind Vektor und Koordinatenvektor nicht mehr identisch. Aber tatsächlich gilt

$$1 \cdot d_1 + 1 \cdot d_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \Phi((1, 1)^T).$$

**Beispiel 3.7.14.** Wir wählen  $V = W$  und betrachten die Identität  $\text{id} : V \rightarrow V$  auf  $V$ . Diese ist linear, also hat sie zu einer gegebenen Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  von  $V$  eine Abbildungsmatrix bezüglich  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}$ , die wir nun bestimmen wollen. Es ist  $\text{id}(b_j) = b_j$ , also ist der Koordinatenvektor von  $\text{id}(b_j)$  der  $j$ -te Einheitsvektor. In der Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id})$  der Identität steht also in der  $j$ -ten Spalte der  $j$ -te Einheitsvektor, also

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

d.h. die Abbildungsmatrix ist die Einheitsmatrix.

**Bemerkung 3.7.15.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume und  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  eine Basis von  $W$ . Dann haben wir nun gesehen, dass es zu jeder linearen Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  eine Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  gibt. Aber auch umgekehrt wird ein Schuh daraus: Geben wir eine beliebige Matrix  $A = (\alpha_{jk})_{j=1, \dots, p, k=1, \dots, n} \in K^{p \times n}$  vor, so gibt es nach Satz 3.6.13 genau eine lineare Abbildung  $\Phi_A : V \rightarrow W$  mit

$$\Phi_A(b_k) = \sum_{j=1}^p \alpha_{jk} c_j.$$

### 3. Lineare Algebra

Für diese Abbildung gilt dann  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi_A) = A$  (warum?).

Damit haben wir zusammengefasst folgendes gesehen: Wählt man die Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  fest, so gibt es eine eins-zu-eins-Beziehung zwischen den linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  und den Matrizen aus  $K^{p \times n}$ . Das bedeutet, dass wir jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräumen, also ein u.U. durchaus unübersichtliches Objekt, durch eine solche Matrix, also etwas recht überschaubares, beschreiben können und dass uns jede Erkenntnis über Matrizen eine Erkenntnis über lineare Abbildungen beschert und umgekehrt.

**Definition 3.7.16.** Es sei  $A \in K^{p \times n}$  eine Matrix und  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K^p$  seien die Spalten von  $A$ . Dann heißt

- (a)  $\text{Rang}(A) := \dim(\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle)$  (Spalten-)rang von  $A$ .
- (b) der Untervektorraum  $\ker(A) := \{x \in K^n : Ax = 0\}$  von  $K^n$  Kern von  $A$ .

Der folgende Satz zeigt ein paar Beziehungen zwischen einer linearen Abbildung und ihrer Abbildungsmatrix auf. Er bleibt hier ohne Beweis stehen.

**Satz 3.7.17.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume mit Basen  $\mathcal{B}$ , bzw.  $\mathcal{C}$ ,  $\Phi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und  $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$ . Dann gilt

- (a)  $\text{Rang}(\Phi) = \text{Rang}(A)$ .
- (b)  $\text{Rang}(A)$  ist die Maximalanzahl linear unabhängiger Spalten von  $A$ .
- (c)  $\dim(\ker(\Phi)) = \dim(\ker(A))$ .
- (d)  $\dim(V) = \text{Rang}(A) + \dim(\ker(A))$ .

Im Abschnitt über lineare Abbildungen haben wir in Übungsaufgabe 3.6.3 gesehen, dass die Verkettung von linearen Abbildungen und die Umkehrfunktion von Isomorphismen wieder lineare Abbildungen sind. Wie bestimmt man nun deren Abbildungsmatrizen, d.h. wie bekommt man  $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\Psi \circ \Phi)$  und  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\Phi^{-1})$  aus  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  und  $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(\Psi)$ ?

Zuerst zeigen wir, dass die Abbildungsmatrix der Verkettung genau das Matrixprodukt der beiden Abbildungsmatrizen von  $\Psi$  und  $\Phi$  ist.

**Satz 3.7.18.** Es seien  $V$ ,  $W$  und  $X$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume mit Basen  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , bzw.  $\mathcal{D}$ . Weiter seien  $\Phi \in \mathcal{L}(V, W)$  und  $\Psi \in \mathcal{L}(W, X)$ . Dann gilt

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\Psi \circ \Phi) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(\Psi) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi).$$

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  und  $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_q\}$ . Weiterhin seien  $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(\Psi) = (\alpha_{j\ell})_{j=1, \dots, q, \ell=1, \dots, p}$  und  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = (\beta_{\ell k})_{\ell=1, \dots, p, k=1, \dots, n}$ , sowie  $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\Psi \circ \Phi) = (\gamma_{jk})_{j=1, \dots, q, k=1, \dots, n}$ . Um die Abbildungsmatrix von  $\Psi \circ \Phi$  zu

### 3.7. Matrizen und lineare Abbildungen

bestimmen, müssen wir die Koordinaten von  $(\Psi \circ \Phi)(b_k)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{D}$  für jedes  $k = 1, \dots, n$  bestimmen. Es gilt nach der Definition der Abbildungsmatrix

$$(\Psi \circ \Phi)(b_k) = \Psi(\Phi(b_k)) = \Psi\left(\sum_{\ell=1}^p \beta_{\ell k} c_\ell\right).$$

Verwenden wir nun die Linearität von  $\Psi$  und dann die Abbildungsmatrix von  $\Psi$ , so erhalten wir

$$(\Psi \circ \Phi)(b_k) = \sum_{\ell=1}^p \beta_{\ell k} \Psi(c_\ell) = \sum_{\ell=1}^p \beta_{\ell k} \sum_{j=1}^q \alpha_{j\ell} d_j = \sum_{j=1}^q \left( \sum_{\ell=1}^p \alpha_{j\ell} \beta_{\ell k} \right) d_j.$$

Also ist die Abbildungsmatrix von  $\Psi \circ \Phi$  gegeben durch

$$\gamma_{jk} = \sum_{\ell=1}^p \alpha_{j\ell} \beta_{\ell k}$$

und das ist genau die Definition des Matrixprodukts.  $\square$

Entsprechend kann man auch die folgenden Rechenregeln zeigen:

**Übungsaufgabe 3.7.19.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume mit Basen  $\mathcal{B}$ , bzw.  $\mathcal{C}$ . Sind  $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(V, W)$  und  $\lambda \in K$ , so gilt

- (a)  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi + \Psi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi) + M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Psi)$  und
- (b)  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\lambda\Phi) = \lambda M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$ .

**Beispiel 3.7.20.** Die lineare Abbildung in  $\mathbb{R}^2$ , die man bekommt, wenn man zunächst die Abbildung  $\Phi$  in Beispiel 3.7.13 ausführt und dann die Spiegelung an der  $x_2$ -Achse, vgl. Beispiel 3.7.12, hat also bezüglich der Standardbasis in  $\mathbb{R}^2$  die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden uns der Abbildungsmatrix der Umkehrfunktion zu. Es seien also  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume mit Basen  $\mathcal{B}$ , bzw.  $\mathcal{C}$  und  $\Phi : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus.

Wir bemerken zunächst, dass  $\Phi$  nur bijektiv sein kann, wenn die Dimensionen von  $V$  und  $W$  übereinstimmen, denn nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim(W) \stackrel{\Phi \text{ surj.}}{=} \text{Rang}(\Phi) = \dim(V) - \dim(\ker(\Phi)) \stackrel{\Phi \text{ inj.}}{=} \dim(V).$$

Also muss die Abbildungsmatrix einer solchen bijektiven Abbildung quadratisch sein.

### 3. Lineare Algebra

Es gilt nun  $\Phi \circ \Phi^{-1} = \text{id}_W$  und  $\Phi^{-1} \circ \Phi = \text{id}_V$ , also ist nach Beispiel 3.7.14

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\Phi^{-1}) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_W) = I \quad \text{und} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi^{-1}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = I.$$

Nach Satz 3.7.6 ist  $I$  das neutrale Element der Multiplikation im Ring  $K^{n \times n}$ . Wir haben also gerade gezeigt, dass man einen Vektorraum-Isomorphismus daran erkennt, dass seine Abbildungsmatrix in diesem Ring ein multiplikatives Inverses besitzt. Und dieses multiplikative Inverse ist dann die Abbildungsmatrix der Umkehrfunktion. Wir gießen das in eine Definition.

**Definition 3.7.21.** *Es sei  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $K$  ein Körper. Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt invertierbar oder regulär, falls ein  $A^{-1} \in K^{n \times n}$  existiert mit  $A \cdot A^{-1} = I$  und  $A^{-1} \cdot A = I$ . Die Matrix  $A^{-1}$  heißt dann die Inverse von  $A$ . Ist  $A$  nicht regulär, so nennt man  $A$  singular.*

**Bemerkung 3.7.22.** (a) Nicht jede von der Nullmatrix verschiedene quadratische Matrix ist invertierbar, d.h.  $K^{n \times n}$  ist kein Körper. Z.B. ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist ein linker Nullteiler.

(b) Die Inverse ist eindeutig, denn sind  $A'$  und  $A''$  zwei Inverse von  $A$ , so ist mit dem schon mehrfach bemühten Argument  $A' = A'(AA'') = (A'A)A'' = A''$ .

**Satz 3.7.23.** *Es sei  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $K$  ein Körper und  $A \in K^{n \times n}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a)  $A$  ist invertierbar.

(b)  $\text{Rang}(A) = n$ .

(c)  $\ker(A) = \{0\}$ .

*Beweis.* Nach unseren obigen Überlegungen ist  $A$  genau dann invertierbar, wenn die Abbildung  $\Phi_A$ , vgl. Bemerkung 3.7.15, bijektiv ist. Dies wiederum ist wegen Satz 3.6.19 und Satz 3.7.17 (a) äquivalent dazu, dass  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\Phi_A) = n$  ist. Damit haben wir (a)  $\iff$  (b) gezeigt.

Mit Hilfe der Dimensionsformel  $n = \text{Rang}(A) + \dim(\ker(A))$  aus Satz 3.7.17 (d) sieht man, dass (b) genau dann gilt, wenn  $\dim(\ker(A)) = 0$  ist, was wiederum zu (c) äquivalent ist.  $\square$

**Beispiel 3.7.24.** Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{ist invertierbar mit} \quad A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

denn

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = I$$

und

$$A^{-1}A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = I.$$

Im Kontrast dazu ist

$$B := \begin{pmatrix} \tilde{2} & \tilde{3} \\ \widetilde{-1} & \tilde{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{2 \times 2} \quad \text{nicht invertierbar,}$$

denn es ist

$$\tilde{5} \begin{pmatrix} \tilde{2} \\ \widetilde{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{10} \\ \widetilde{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{3} \\ \tilde{2} \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass die zweite Spalte von  $B$  ein Vielfaches der ersten Spalte ist, die beiden sind also linear abhängig. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von  $B$  ist folglich 1 und Satz 3.7.17(b) liefert, dass  $\text{Rang}(B) = 1$  ist. Das bedeutet wiederum nach Satz 3.7.23 das Aus für die Invertierbarkeit.

**Bemerkung 3.7.25.** (a) Sind  $A, B \in K^{n \times n}$  invertierbare Matrizen, so ist auch ihr Produkt  $AB$  invertierbar mit  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , denn

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

und genauso gilt umgekehrt  $B^{-1}A^{-1}AB = I$ .

Man beachte, dass sich die Reihenfolge der beiden Matrizen umkehrt!

(b) Außerdem gilt für jedes  $\lambda \in K \setminus \{0\}$  und jedes invertierbare  $A \in K^{n \times n}$

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}.$$

(c) Schließlich ist mit  $A \in K^{n \times n}$  immer auch  $A^T$  invertierbar und es gilt

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1},$$

weshalb man manchmal auch die etwas verwegene Schreibweise  $A^{-T}$  sieht.

**Übungsaufgabe 3.7.26.** Die Menge

$$GL(n, K) := \{A \in K^{n \times n} : A \text{ invertierbar}\}$$

ist mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe. Diese heißt *allgemeine lineare Gruppe*. Die Abkürzung kommt von der englischen Bezeichnung “general linear group”.

## 3.8. Lineare Gleichungssysteme

In vielen Zusammenhängen stößt man in der Linearen Algebra (und auch anderswo) auf die Problematik lineare Gleichungssysteme lösen zu müssen.

Die Problemstellung ist die folgende: Gegeben Koeffizienten  $\alpha_{jk}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , aus einem Körper  $K$  und weitere Elemente  $b_1, b_2, \dots, b_p \in K$ , bestimme  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  mit

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \alpha_{p1}x_1 + \alpha_{p2}x_2 + \dots + \alpha_{pn}x_n &= b_p.\end{aligned}$$

Setzt man  $b := (b_1, b_2, \dots, b_p)^T \in K^p$  und  $A := (\alpha_{jk})_{j=1, \dots, p, k=1, \dots, n} \in K^{p \times n}$ , so kann man jedes lineare Gleichungssystem in der *Matrixform*

$$Ax = b$$

schreiben.

**Definition 3.8.1.** (a) Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist die Gleichung  $Ax = b$ , wobei  $A \in K^{p \times n}$  und  $b \in K^p$  gegeben und der Vektor  $x \in K^n$  gesucht ist.

(b) Ein LGS heißt homogen, falls  $b = 0$  ist. Sonst heißt es inhomogen.

(c) Das LGS  $Ax = b$  heißt lösbar, falls ein  $x \in K^n$  existiert mit  $Ax = b$  und es heißt eindeutig lösbar, wenn genau ein solches  $x \in K^n$  existiert. Gibt es kein  $x \in K^n$  mit dieser Eigenschaft, so nennt man das LGS unlösbar.

### 3.8.1. Lösbarkeitstheorie

**Bemerkung 3.8.2.** In folgenden Spezialfällen ist es leicht, das Lösungsverhalten von linearen Gleichungssystemen zu bestimmen:

(a) Ist  $p = n$  und  $A \in K^{n \times n}$  invertierbar, so ist  $Ax = b$  für jedes  $b \in K^n$  eindeutig lösbar durch  $x = A^{-1}b$ , denn mit dieser Wahl gilt

$$Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$$

und ist  $y \in K^n$  eine weitere Lösung, gilt also  $Ay = b$ , so ist  $x = A^{-1}b = A^{-1}Ay = y$ .

(b) Ist  $A \in K^{p \times n}$  die Nullmatrix, so ist  $Ax = b$  nur für  $b = 0$  lösbar, dann aber ist jedes  $x \in K^n$  eine Lösung.



- (c) Das homogene System  $Ax = 0$  ist für jede Matrix  $A$  lösbar, da der Nullvektor eine Lösung ist. Außerdem bilden alle Lösungen den Untervektorraum  $\ker(A)$ , vgl. Definition 3.7.16.

Kennt man den Kern von  $A$ , so ist zur Lösung des Systems  $Ax = b$  schon ein Großteil der Arbeit getan, denn es gilt der folgende Satz über die Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

**Satz 3.8.3.** *Es seien  $A \in K^{p \times n}$  und  $b \in K^p$ . Hat das LGS  $Ax = b$  eine Lösung  $x_s \in K^n$ , so sind alle Lösungen des LGS gegeben durch*

$$\{x \in K^n : Ax = b\} = \{x_s + y : y \in \ker(A)\}.$$

Kennt man also eine Lösung, so erhält man alle Lösungen als die Elemente der Äquivalenzklasse dieser einen Lösung in  $V/\ker(A)$ .

*Beweis.* Wir beweisen zunächst „ $\subseteq$ “. Sei dazu  $x \in K^n$  eine Lösung von  $Ax = b$ . Dann gilt

$$A(x - x_s) = Ax - Ax_s = b - b = 0.$$

Also ist  $x - x_s \in \ker(A)$  und es gibt ein  $y \in \ker(A)$  mit  $x = x_s + y$ . Für die umgekehrte Inklusion sei  $y \in \ker(A)$ . Dann gilt

$$A(x_s + y) = Ax_s + Ay = b + 0 = b.$$

Somit ist  $x_s + y$  eine Lösung von  $Ax = b$  und wir sind fertig.  $\square$

Man nennt die Lösung  $x_s$ , deren Existenz man irgendwoher bekommen muss, um obigen Satz anwenden zu können, eine *spezielle Lösung* oder auch *Partikulärlösung* des LGS.

Der folgende Satz bietet ein Kriterium für die grundsätzliche Lösbarkeit eines LGS.

**Satz 3.8.4.** *Es seien  $A \in K^{p \times n}$  und  $b \in K^p$ . Bezeichnen wir mit  $A|b$  die Matrix in  $K^{p \times (n+1)}$ , die durch anfügen von  $b$  als  $(n+1)$ -te Spalte an  $A$  entsteht (man nennt diese auch erweiterte Koeffizientenmatrix), so gilt*

(a) *Das LGS  $Ax = b$  ist genau dann lösbar, wenn  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$  gilt.*

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- i) *Das LGS  $Ax = b$  ist eindeutig lösbar.*
- ii)  *$Ax = b$  ist lösbar und  $\ker(A) = \{0\}$ .*
- iii)  *$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = n$ .*

### 3. Lineare Algebra

*Beweis.* (a) Wir bezeichnen mit  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K^p$  die Spalten von  $A$ . Zum Nachweis von „ $\Rightarrow$ “ bemerken wir zunächst, dass auf jeden Fall  $\text{Rang}(A) \leq \text{Rang}(A|b)$  gilt. Sei nun  $x \in K^n$  eine Lösung von  $Ax = b$ , d.h. es gilt  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot x = b$ . Dann ist nach der Definition der Matrixmultiplikation

$$\sum_{j=1}^n x_j a_j = b,$$

was uns sagt, dass  $b$  eine Linearkombination der Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , also der Spalten von  $A$ , ist. Damit ist der Rang von  $A|b$  sicher nicht größer als der von  $A$  und wir haben die behauptete Gleichheit gezeigt.

Wir beweisen „ $\Leftarrow$ “.  $\text{Rang}(A|b) = \text{Rang}(A)$  bedeutet, dass die beiden Untervektorräume  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$  und  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  von  $K^p$  die selbe Dimension haben. Es muss also schon  $b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  gelten. Das bedeutet, dass es  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  gibt mit  $\sum_{j=1}^n x_j a_j = b$ . Damit ist  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in K^n$  eine Lösung des LGS  $Ax = b$  und wir sind fertig.

(b) Wir zeigen (b)i)  $\Rightarrow$  (b)ii)  $\Rightarrow$  (b)iii)  $\Rightarrow$  (b)i).

Ist  $Ax = b$  eindeutig lösbar, so ist das LGS natürlich lösbar und enthielte  $\ker(A)$  mehr als die Null, so gäbe es nach Satz 3.8.3 mehr als eine Lösung, somit haben wir (b)i)  $\Rightarrow$  (b)ii).

Gilt (b)ii), so haben wir mit Teil (a) sofort  $\text{Rang}(A|b) = \text{Rang}(A)$ . Weiter folgt dank der Dimensionsformel für Matrizen, vgl. Satz 3.7.17 (d), aus  $\dim(\ker(A)) = 0$  auch  $\text{Rang}(A) = n$ .

Zum Nachweis von (b)iii)  $\Rightarrow$  (b)i) sehen wir zunächst, dass die Lösbarkeit des LGS aus (a) folgt. Es bleibt die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Wegen  $\text{Rang}(A) = n$  und wiederum der Dimensionsformel bekommen wir  $\ker(A) = \{0\}$  und damit liefert Satz 3.8.3 die gewünschte Eindeutigkeit.  $\square$

#### 3.8.2. Der Gauß-Algorithmus

Nachdem wir nun im letzten Abschnitt einiges Wissen über die Struktur der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen gesammelt haben, wollen wir uns nun der Frage zuwenden, wie man konkrete Systeme algorithmisch lösen kann. Das meist verwendete Verfahren heißt *Gauß-Algorithmus*. Dieser soll hier intuitiv anhand von Beispielen behandelt werden, ohne exakte mathematische Begründung.

Ist  $A = (\alpha_{jk})_{j=1, \dots, p, k=1, \dots, n} \in K^{p \times n}$  und  $b = (b_1, \dots, b_p)^T \in K^p$  so ändern folgende

Umformungen die Menge der Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rclcl} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n & = & b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1}x_1 + \alpha_{p2}x_2 + \cdots + \alpha_{pn}x_n & = & b_p. \end{array}$$

nicht:

1. Vertauschen zweier Zeilen (Gleichungen),
2. Multiplizieren einer Zeile (Gleichung) mit einem  $\lambda \neq 0$  aus  $K$ ,
3. Addition des Vielfachen einer Zeile (Gleichung) zu einer anderen Zeile (Gleichung).

Man nennt diese Umformungen *Elementarumformungen*. Der Gauß'sche Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssystemen beruht nun auf der Anwendung dieser drei Umformungen.

**Beispiel 3.8.5.** Wir betrachten das LGS:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \end{array}$$

bzw. in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir specken die Notation noch weiter ab und schreiben das LGS als

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Als erstes muss man nun durch das Vertauschen von Zeilen dafür sorgen, dass links oben in der Ecke ein Eintrag steht, der nicht Null ist. Das ist hier schon der Fall, so dass wir gleich damit beginnen können die erste Spalte aufzuräumen.

### 3. Lineare Algebra

Wir addieren nach Elementarumformung 3. die erste Zeile zur dritten dazu und addieren ihr  $(-2)$ -faches zur 2. und 4. Zeile. Das notiert man folgendermaßen:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot 1 \\ \leftarrow \quad | \\ \quad | \quad \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -9 \end{array} \right).$$

Nun arbeiten wir mit der zweiten Zeile. Diese multiplizieren wir zunächst mit  $(-1)$ , so dass wir wieder eine führende 1 haben. Im Falle, dass dort Null steht, so tauscht man sich wieder eine passende Zeile dorthin. Ist die zweite Spalte sogar in allen Zeilen nach der ersten Null, so geht man gleich zur dritten Spalte über. Also

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -9 \end{array} \right) \cdot(-1) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot(-1) \quad \cdot 1 \\ \quad | \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right)$$

Auf diese Weise haben wir dafür gesorgt, dass auch in der zweiten Spalte nur noch eine Eins und sonst nur Nullen stehen.

Nun ist die dritte Spalte dran, wir multiplizieren zunächst die dritte Zeile mit  $1/3$  und räumen dann wieder auf:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right) : 3 \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \quad \leftarrow \\ \cdot 3 \quad \cdot(-4) \quad \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{array} \right).$$

Nun noch mal das selbe Spielchen in der vierten Spalte mit der 5 in der vierten

Zeile:

$$\begin{array}{ccc}
 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{array} \right) : 5 & \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ | \\ \cdot(-5) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \\ | \\ \cdot 4 \end{array} \\
 \rightsquigarrow & & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) .
 \end{array}$$

Abschließend haben wir damit das ursprüngliche LGS durch Elementarumformungen auf die Form

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & & = 1 \\
 x_2 & & = 3 \\
 x_3 & & = 2 \\
 x_4 & = & -1
 \end{array}$$

gebracht und haben damit die Lösung dastehen. Das LGS ist eindeutig lösbar mit  $x = (1 \ 3 \ 2 \ -1)^T$ .

**Bemerkung 3.8.6.** Formt man ein LGS  $Ax = b$  mit Hilfe von Elementarumformungen um, so ändert sich nichts an der Lösungsmenge und insbesondere auch nichts an allen Eigenschaften der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix, die mit dem Lösungsverhalten des LGS zu tun haben. So bleiben z.B.  $\text{Rang}(A)$  und  $\text{Rang}(A|b)$  erhalten.

**Beispiel 3.8.7.** Der Gauß-Algorithmus funktioniert auch für nicht-quadratische lineare Gleichungssysteme. Für  $a \in \mathbb{R}$  betrachten wir z.B.

$$\begin{array}{rrrrcl}
 & x_2 & + 3x_3 & + 5x_4 & = a \\
 -2x_1 & - x_2 & + x_3 & + x_4 & = 0 \\
 x_1 & + x_2 & + x_3 & + 2x_4 & = 1.
 \end{array}$$

Also

$$\begin{array}{ccc}
 \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 5 & a \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \\ \leftarrow \end{array} & \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
 \rightsquigarrow & & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array} \right) .
 \end{array}$$

Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Ist  $a \neq 2$ , so gilt  $\text{Rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{Rang}(A|b)$ , also ist in diesem Fall das LGS unlösbar.

### 3. Lineare Algebra

Im Fall  $a = 2$  ist die letzte Zeile eine komplette Nullzeile und damit sind der Rang der Matrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix beide 2. Das LGS ist also nach Satz 3.8.4 (a) lösbar. Nach Satz 3.8.3 ist weiterhin die Lösungsmenge von der Form  $x_s + \ker(A)$ , wobei  $x_s$  eine spezielle Lösung und  $A$  die Koeffizientenmatrix des LGS ist.

Da der Rang von  $A$  nach obiger Rechnung 2 ist, vgl. Bemerkung 3.8.6, bekommen wir mit dem (b)-Teil von Satz 3.8.4, dass  $\dim(\ker(A)) = 2$  ist. Die Lösung des verbleibenden LGS

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

erhalten wir nun so: wir setzen die noch „unbearbeiteten“ Variablen  $x_3 = \lambda$  und  $x_4 = \mu$ . Dann liefern uns die beiden verbliebenen Gleichungen  $x_1 = -1 + 2\lambda + 3\mu$  und  $x_2 = 2 - 3\lambda - 5\mu$ . Also sind alle  $x \in \mathbb{R}^4$  mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda + 3\mu \\ 2 - 3\lambda - 5\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Lösungen des LGS. Wir erhalten also als Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Beispiel 3.8.8.** Ein weiteres Beispiel über dem Körper  $\mathbb{Z}_5$ :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{3} & \tilde{2} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{4} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{3} & \tilde{1} & \tilde{2} \end{array} \right) \cdot \tilde{2} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & \tilde{4} & \tilde{2} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{4} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{3} & \tilde{1} & \tilde{2} \end{array} \right) \cdot \begin{matrix} \widetilde{(-1)} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & \tilde{4} & \tilde{2} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \widetilde{-3} & \tilde{2} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \widetilde{-1} & \widetilde{-1} & \tilde{2} \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & \tilde{4} & \tilde{2} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{2} & \tilde{2} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{4} & \tilde{4} & \tilde{2} \end{array} \right) \cdot \tilde{3} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & \tilde{4} & \tilde{2} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{3} \\ \tilde{0} & \tilde{4} & \tilde{4} & \tilde{2} \end{array} \right) \cdot \begin{matrix} \leftarrow \\ \widetilde{(-4)} \\ \leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & \tilde{0} & \widetilde{-2} & \widetilde{-12} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{3} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \widetilde{-10} \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{3} & \tilde{3} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{3} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Der Lösungsraum ist damit eindimensional. Wir setzen  $x_3 = \lambda$  und bekommen aus den beiden ersten verbliebenen Gleichungen  $x_1 = \tilde{3} - \tilde{3}\lambda$  und  $x_2 = \tilde{3} - \lambda$ . Also ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{3} - \tilde{3}\lambda \\ \tilde{3} - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{3} \\ \tilde{3} \\ \tilde{0} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \tilde{2} \\ \tilde{4} \\ \tilde{1} \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{Z}_5 \right\}.$$

**Bemerkung 3.8.9.** Der Gauß-Algorithmus ist auch ein Mittel zur Berechnung von Inversen invertierbarer Matrizen, denn dieses lässt sich folgendermaßen als das Lösen mehrerer linearer Gleichungssysteme auffassen. Ist  $A \in K^{n \times n}$  eine invertierbare Matrix und ist  $x_j \in K^n$  für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  die  $j$ -te Spalte von  $A^{-1}$ , so muss  $AA^{-1} = I$  gelten, d.h. es ist  $Ax_j$  die  $j$ -te Spalte der Einheitsmatrix  $I$ , was gerade der Vektor  $e_j := (\delta_{jk})_{k=1}^n$  ist.

Die Inversion der Matrix  $A$  entspricht also dem Lösen der  $n$  linearen Gleichungssysteme  $Ax_j = e_j$  für  $j = 1, 2, \dots, n$ . Diese kann man mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus simultan lösen.

**Beispiel 3.8.10.** Es sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Wir lösen die drei LGSe simultan:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ | \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 1 \quad \cdot (-1) \\ \leftarrow \end{array} \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot (-2) \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Also ist  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### 3.9. Basiswechsel

Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume,  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{C}$  eine Basis von  $W$ . Ist  $\Phi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so haben wir zu dieser in Abschnitt 3.7.2 die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  gefunden. Nun seien  $\mathcal{B}'$  eine weitere Basis von  $V$  und  $\mathcal{C}'$  eine weitere Basis von  $W$  und wir wollen uns der Frage zuwenden, wie man die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi)$  aus  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  bestimmen kann.

Die Idee dazu ist die Abbildung  $\Phi$  kompliziert als  $\text{id}_W \circ \Phi \circ \text{id}_V$  zu schreiben und dann nach Satz 3.7.18

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_W \circ \Phi \circ \text{id}_V) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{id}_W) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V)$$

zu berechnen.

**Satz 3.9.1.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume mit Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$ , bzw.  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}'$  wie oben. Ist dann  $\Phi : V \rightarrow W$  linear, so existieren invertierbare Matrizen  $S$  und  $T$  mit

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) = T M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi) S.$$

### 3. Lineare Algebra

*Beweis.* Nach obigen Vorüberlegungen ist nur noch zu zeigen, dass die Matrizen

$$T := M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{id}_W) \quad \text{und} \quad S := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V)$$

invertierbar sind. Dazu überlegen wir uns mit Hilfe von Satz 3.7.18 und Beispiel 3.7.14

$$S \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V \circ \text{id}_V) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = I$$

und genauso

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) \cdot S = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) = I.$$

Die Argumentation für  $T$  verläuft analog. □

Besonders wichtig ist der Spezialfall  $V = W$ , also für lineare Abbildungen  $\Phi : V \rightarrow V$ .

**Satz 3.9.2.** *Es seien  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$  Basen von  $V$  und  $\Phi : V \rightarrow V$  linear. Sind  $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  und  $A' := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi)$  die Abbildungsmatrizen von  $\Phi$  bezüglich  $\mathcal{B}$ , bzw.  $\mathcal{B}'$ , so existiert eine invertierbare Matrix  $S$  mit*

$$A' = S^{-1}AS.$$

Die Matrix  $S$  in obigem Satz, die die Abbildungsmatrizen bezüglich der verschiedenen Basen ineinander übersetzt, heißt *Basiswechselmatrix*.

*Beweis.* Nach Satz 3.9.1 gilt für  $S := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id})$  und  $T := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id})$  die Beziehung  $A' = TAS$ . Da außerdem

$$\begin{aligned} TS &= M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id})M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}) = I \quad \text{und} \\ ST &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id})M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}) = I \end{aligned}$$

gilt, ist  $T = S^{-1}$  und wir sind fertig. □

**Bemerkung 3.9.3.** Es bleibt natürlich die Frage, wie man denn die Basiswechselmatrix  $S$  im konkreten Fall berechnet. Dazu bezeichnen wir  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  und  $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$  und erinnern uns, dass  $S = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id})$  gilt.

In den Spalten von  $S$  stehen also die Koordinaten von  $\text{id}(b'_1), \text{id}(b'_2), \dots, \text{id}(b'_n)$ , d.h. von  $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$ , bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ . Um die Matrix  $S$  zu erhalten, muss man also die Basisvektoren  $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$  in der Basis  $\mathcal{B}$  ausdrücken, das bedeutet man hat im schlimmsten Fall  $n$  lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Ein wichtiger und sehr einfacher Spezialfall ist der, wenn  $V = K^n$  und  $\mathcal{B}$  die Standardbasis ist, denn dann sind die Koordinaten von  $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$  bezüglich  $\mathcal{B}$  einfach die Vektoren  $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$  selbst, d.h. diese bilden dann die Spalten der Basiswechselmatrix  $S$ .



**Beispiel 3.9.4.** Wir betrachten die lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\ 3x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - 7x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ist  $\mathcal{B}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$ , so ist also

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich der Basis

$$\mathcal{B}' := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

berechnen. Da  $\mathcal{B}$  die Standardbasis ist, gilt für die Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Deren Inverse bestimmt man mit dem Gauß-Verfahren, vgl. Beispiel 3.8.10, zu

$$S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir nach Satz 3.9.2

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) &= S^{-1}AS = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt auch, dass man durch eine angepasste Wahl der Basis die Abbildungsmatrix sehr stark vereinfachen kann. Mit der Frage, wie man eine solche Basis findet, werden wir uns im Abschnitt 3.11 beschäftigen.

### 3. Lineare Algebra

**Beispiel 3.9.5.** Die Technik des Basiswechsels kann auch dazu genutzt werden, die Abbildungsmatrix einer durch geometrische Angaben definierten linearen Abbildung zu ermitteln. Beispielhaft betrachten wir als lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Projektion auf den Unterraum  $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$  in Richtung  $\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ . Gesucht ist die Abbildungsmatrix dieser Abbildung bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{B}$ . Da es sehr schwierig ist, die Abbildung direkt in dieser Basis zu beschreiben, betrachten wir zunächst die dem Problem angepasste Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \{b'_1, b'_2, b'_3\}.$$

Nach der Definition von  $\Phi$  gilt dann  $\Phi(b'_1) = b'_1$ ,  $\Phi(b'_2) = b'_2$  und  $\Phi(b'_3) = 0$ . Also ist

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

die den Basiswechsel von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$  vermittelt, gilt nun  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) = S^{-1}M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)S$ . Also ist  $SM_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)S$  und schließlich  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = SM_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi)S^{-1}$ . Mit dem Gauß-Verfahren kann man wieder

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Also ist die gesuchte Abbildungsmatrix

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) &= SM_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Definition 3.9.6.** Zwei Matrizen  $A, B \in K^{n \times n}$  heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix  $S \in K^{n \times n}$  gibt mit  $B = S^{-1}AS$ .

**Bemerkung 3.9.7.** (a) Darstellungsmatrizen einer linearen Abbildung bezüglich verschiedener Basen sind immer zueinander ähnlich.

- (b) Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation. Machen Sie sich das als Übung klar!
- (c) Sind alle Matrizen zueinander ähnlich? Nein!

Ist  $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ , so heißt  $\text{Spur}(A) := \sum_{j=1}^n \alpha_{jj}$  die Spur von  $A$ .

Man kann zeigen: Sind  $A$  und  $B$  ähnliche Matrizen, dann gilt  $\text{Spur}(A) = \text{Spur}(B)$ .

Eine weitere charakteristische Größe einer Matrix, die sich beim Basiswechsel nicht ändert, werden wir im Abschnitt 3.10 kennenlernen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch den Spezialfall, dass die beiden Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$ , zwischen denen gewechselt wird, jeweils Orthonormalbasen sind.

**Lemma 3.9.8.** *Sind  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$  Orthonormalbasen eines  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$  mit Skalarprodukt  $(\cdot|\cdot)_V$ , so gilt für die Basiswechselmatrix  $S = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dass ihre Spalten eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  bezüglich des Standardskalarproduktes  $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^n}$  bilden.*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  und  $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$ .

Die  $j$ -te Spalte  $s_j$  von  $S$  ist nach Bemerkung 3.9.3 für jedes  $j = 1, 2, \dots, n$  gegeben durch den Koordinatenvektor  $[\vec{b}'_j]_{\mathcal{B}}$  von  $b'_j$  bezüglich  $\mathcal{B}$ . Wie wir in Bemerkung 3.4.15 gesehen haben, ist dieser Koordinatenvektor gegeben durch

$$s_j = \begin{pmatrix} (b'_j|b_1)_V \\ (b'_j|b_2)_V \\ \vdots \\ (b'_j|b_n)_V \end{pmatrix}.$$

Also ist für alle  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(s_k|s_j)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{\ell=1}^n (b'_k|b_{\ell})_V \cdot (b'_j|b_{\ell})_V = \left( b'_j \left| \sum_{\ell=1}^n (b'_k|b_{\ell})_V b_{\ell} \right. \right)_V.$$

Die Summe im zweiten Argument ist nun nach Bemerkung 3.4.15 gerade der Vektor  $b'_k$ . Also haben wir

$$(s_k|s_j)_{\mathbb{R}^n} = (b'_j|b'_k)_V = \delta_{jk}$$

und sind fertig. □

### 3. Lineare Algebra

**Definition 3.9.9.** Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt orthogonal, falls die Spalten von  $A$  eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarproduktes bilden.

Man beachte, dass eine orthogonale Matrix immer invertierbar ist, da ihre Spalten eine Basis bilden und der Rang somit gleich der Spaltenanzahl ist.

**Übungsaufgabe 3.9.10.** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a)  $A$  ist orthogonal.
- (b)  $A$  ist invertierbar und es gilt  $A^{-1} = A^T$ .
- (c) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarproduktes.
- (d)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1}$  ist orthogonal.
- (e)  $A^T$  ist orthogonal.

**Bemerkung 3.9.11.** Beim Basiswechsel zwischen Orthonormalbasen ist vor allem die Beziehung  $A^{-1} = A^T$  nützlich, denn das Transponieren einer Matrix ist vom Rechenaufwand her viel einfacher als das Invertieren.

**Übungsaufgabe 3.9.12.** Die Menge

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ orthogonal}\}$$

ist eine Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{R})$ , genannt *orthogonale Gruppe*.

## 3.10. Determinanten

Wie sieht man einer Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$  an, ob sie invertierbar ist? Berechnet man allgemein die Inverse, so findet man

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{falls } ad - bc \neq 0.$$

Anscheinend ist also der Wert  $ad - bc$  von besonderer Bedeutung. Man nennt ihn die Determinante. Allgemein ist diese folgendermaßen definiert.

**Definition 3.10.1.** (a) Es seien  $A \in K^{n \times n}$  und  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dann bezeichne  $A_{jk} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$  die Matrix, die aus  $A$  durch Streichen der  $j$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte entsteht.

(b) Für  $A = (\alpha) \in K^{1 \times 1}$  definieren wir die Determinante durch  $\det(A) := \alpha$ .

(c) Für ein  $A = (\alpha_{jk})_{j,k=1}^n \in K^{n \times n}$  mit  $n > 1$  erklären wir die Determinante als

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} \alpha_{1k} \det(A_{1k}). \quad (\text{Entwicklung nach der ersten Zeile})$$

(d) Für die Determinante einer Matrix  $A = (\alpha_{jk})_{j,k=1}^n \in K^{n \times n}$  schreibt man auch

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Beispiel 3.10.2.** (a) Im Fall  $n = 2$  gilt nach obiger Definition tatsächlich

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^2 a \det((d)) + (-1)^3 b \det((c)) = ad - bc.$$

(b) Schon für  $n = 3$  wird die Berechnung allerdings ein bisschen mühsamer:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (0 \cdot 8 - 5 \cdot 6) - 1 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 6 - 0 \cdot 7) \\ &= -60 - 32 + 35 + 72 = 15. \end{aligned}$$

Von großer praktischer Bedeutung ist die folgende Beobachtung.

**Beispiel 3.10.3.** Es sei  $A \in K^{n \times n}$  eine sogenannte *untere Dreiecksmatrix*, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & \alpha_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei anstelle der Sterne „\*“ irgendwelche Elemente aus  $K$  stehen. Dann gilt nach der Definition der Determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ * & \alpha_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \alpha_{22} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{33} & 0 & \dots & 0 \\ * & \alpha_{44} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \dots = \alpha_{11} \alpha_{22} \cdot \dots \cdot \alpha_{nn}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt damit immer

$$\det(I) = 1.$$

### 3. Lineare Algebra

Im folgenden Satz fassen wir einige grundlegende Rechenregeln für die Determinante ohne Beweis zusammen.

**Satz 3.10.4.** *Es sei*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n},$$

wobei  $a_1^T, a_2^T, \dots, a_n^T \in K^n$  die Zeilen von  $A$  seien. Dann gilt

- (a) *Vertauscht man zwei beliebige Zeilen der Matrix, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante, z.B. ist*

$$\begin{vmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = -\det(A).$$

- (b) *Die Determinante  $\det(A)$  ist linear in jeder Zeile, d.h. für jeden Vektor  $b \in K^n$ , für alle  $\lambda, \mu \in K$ , sowie jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  gilt*

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ \lambda a_j + \mu b \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \lambda \det(A) + \mu \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ b \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}.$$

- (c) *Sei  $\lambda \in K$ . Addiert man zu einer Zeile von  $A$  das  $\lambda$ -fache einer anderen Zeile von  $A$  hinzu, so ändert sich die Determinante nicht.*
- (d) *Man kann statt nach der ersten Zeile zu entwickeln, vgl. die Definition der Determinante, auch nach der  $j$ -ten Zeile für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  entwickeln. Genauer gesagt gilt für jedes solche  $j$*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \alpha_{jk} \det(A_{jk}).$$

- (e) *Es ist  $\det(A) = \det(A^T)$ .*

(f) Ist  $B \in K^{n \times n}$  eine weitere Matrix, so ist  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

**Korollar 3.10.5.** (a) Die Aussagen in Satz 3.10.4 (a)-(d) gelten auch für Spalten statt Zeilen. Als Formel für das Entwickeln nach der  $k$ -ten Spalte bekommt man

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} \alpha_{jk} \det(A_{jk}).$$

(b) Ist  $\lambda \in K$  und  $A \in K^{n \times n}$ , so gilt  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

*Beweis.* (a) Das folgt aus Satz 3.10.4 (e).

(b) Mit  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  wie in Satz 3.10.4 gilt  $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$ , also ist durch  $n$ -malige Anwendung von (b) aus Satz 3.10.4

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{vmatrix} = \dots = \lambda^n \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \lambda^n \det(A). \quad \square$$

Die praktische Relevanz obiger Rechenregeln liegt unter Anderem darin, dass (a) bis (c) aus Satz 3.10.4 uns sagen, was mit der Determinante unter den Elementarumformungen aus dem Gauß-Verfahren passiert und dass wir dieses Werkzeug damit zur Berechnung von Determinanten nutzen können. Dank Korollar 3.10.5 (a) können wir es sogar sowohl auf die Zeilen als auch auf die Spalten der Matrix anwenden. Wir betrachten die Berechnung von Determinanten anhand zweier Beispiele.

**Beispiel 3.10.6.** (a) Wir berechnen

$$D := \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Zuerst ist es sinnvoll nach der vierten Zeile zu entwickeln, denn dabei sind vier der fünf Summanden Null:

$$D = (-1) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

### 3. Lineare Algebra

Nun können wir los„gaußen“. Wir machen zunächst ein paar der schon gewohnten Zeilenumformungen. Dabei bleibt die Determinante unverändert.

$$D = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \\ \cdot(-2) \end{matrix} \begin{matrix} \\ | \\ | \\ \cdot(-1) \end{matrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Nun haben wir die Sache so weit vereinfacht, dass wir mit Gewinn nach der ersten Spalte entwickeln können, vgl. Korollar 3.10.5:

$$D = -5 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Im nächsten Schritt verwenden wir (b) aus Satz 3.10.4 um die dritte Spalte durch drei zu teilen und machen dann wieder ein paar Gauß'sche Zeilenumformungen, um eine neue Spalte mit nur einem von Null verschiedenen Eintrag zu bekommen:

$$D = 5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot(-1) \end{matrix} \begin{matrix} \\ | \\ \cdot(-3) \end{matrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 16 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

Nun entwickeln wir nach der extra präparierten dritten Spalte und rechnen fertig:

$$D = 15 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15 \cdot (7 - 16) = -15 \cdot 9 = -135.$$

(b) Für jede Wahl von  $a, b \in K$  berechnen wir die folgende  $(n \times n)$ -Determinante

$$D := \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ b-a & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-a & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Nun addieren wir die zweite bis  $n$ -te Spalte zur ersten Spalte und erhalten:

$$D = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$



Der Sinn der ganzen Aktion erschließt sich nun: Es ist eine obere Dreiecksmatrix übriggeblieben. Wenn wir diese transponieren, ändert sich nach Satz 3.10.4 (e) die Determinante nicht und wir erhalten eine untere Dreiecksmatrix, deren Determinante wir nach Beispiel 3.10.3 einfach bestimmen können:

$$D = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

**Übungsaufgabe 3.10.7.** Rechnen Sie die *Formel von Sarrus* nach:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

**Satz 3.10.8.** Ist  $A \in K^{n \times n}$  mit  $\text{Rang}(A) < n$ , so ist  $\det(A) = 0$ .

*Beweis.* **1. Schritt:** Ist die erste Spalte von  $A$  der Nullvektor, so gilt  $\det(A) = 0$ . Es seien  $a_2, a_3, \dots, a_n \in K^n$  die weiteren Spalten von  $A$ . Dann ist dank der Linearität der Determinante in jeder Spalte, vgl. Satz 3.10.4 (b) und Korollar 3.10.5 (a)

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0+0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \det(A) + \det(A). \end{aligned}$$

Also ist  $\det(A) = 0$ .

**2. Schritt:** Beweis des Satzes.

Die Voraussetzung  $\text{Rang}(A) < n$  bedeutet, dass die Spaltenvektoren  $a_1, \dots, a_n \in K^n$  von  $A$  linear abhängig sind. Also existieren  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ , die nicht alle Null sind, mit  $\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j = 0$ . Sei  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  ein Index mit  $\lambda_{j_0} \neq 0$ . Dann gilt nach den verschiedenen Rechenregeln für Determinanten und abschließend Schritt 1

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{j_0} & \dots & a_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_{j_0}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \lambda_{j_0} a_{j_0} & \dots & a_n \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_{j_0}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j & \dots & a_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_{j_0}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\lambda_{j_0}} \begin{vmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 3.10.9.** Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt. In diesem Fall ist  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ .

### 3. Lineare Algebra

*Beweis.* Ist  $A$  invertierbar, so gilt  $A \cdot A^{-1} = I$ . Mit Hilfe von Beispiel 3.10.3 und Satz 3.10.4 (f) ist dann

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}).$$

Damit haben wir sowohl  $\det(A) \neq 0$  als auch  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$  gezeigt. Gilt umgekehrt  $\det(A) \neq 0$ , so muss nach Satz 3.10.8 der Rang von  $A$  voll, d.h. gleich  $n$  sein. Also ist mit Hilfe von Satz 3.7.23 die Matrix  $A$  invertierbar.  $\square$

**Korollar 3.10.10.** *Es seien  $A, B \in K^{n \times n}$  zwei ähnliche Matrizen. Dann gilt  $\det(A) = \det(B)$ .*

*Beweis.* Nach Definition der Ähnlichkeit gibt es eine invertierbare Matrix  $S \in K^{n \times n}$  mit  $B = S^{-1}AS$ . Also gilt mit vorstehendem Satz

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1}) \det(A) \det(S) = \frac{1}{\det(S)} \det(A) \det(S) \\ &= \det(A). \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 3.10.11.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum und  $\Phi : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, so besagt Korollar 3.10.10, dass der Wert  $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi))$  für jede Wahl der Basis  $\mathcal{B}$  derselbe ist. Die Determinante ist also eine charakteristische Größe der linearen Abbildung und hängt nicht von der speziellen Wahl der Basis und damit der Abbildungsmatrix ab. Man schreibt deshalb auch  $\det(\Phi)$  für diesen Wert und spricht von der Determinante der linearen Abbildung. Anschaulich ist  $|\det(\Phi)|$  der Faktor, um den die Abbildung  $\Phi$  bei ihrer Anwendung Volumina verändert.

**Übungsaufgabe 3.10.12.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für jede orthogonale Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $|\det(A)| = 1$ .
- (b) Für alle  $A, B \in K^{n \times n}$  gilt  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .

## 3.11. Eigenwerttheorie

In diesem abschließenden Kapitel zur linearen Algebra wollen wir der schon in Beispiel 3.9.4 angekündigten Frage nachgehen, wie man zu einer gegebenen linearen Abbildung  $\Phi : V \rightarrow V$  eine Basis finden kann, in der die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  möglichst einfach wird.

**Definition 3.11.1.** *Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\Phi : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Ein  $\lambda \in K$  heißt Eigenwert von  $\Phi$ , falls es einen Vektor  $v \in V$  gibt mit  $v \neq 0$  und  $\Phi(v) = \lambda v$ . Ein solches  $v$  heißt dann Eigenvektor von  $\Phi$  zum Eigenwert  $\lambda$ .*

**Beispiel 3.11.2.** Ist  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Spiegelung an der  $x_2$ -Achse, vgl. Beispiel 3.7.12, so gilt für den ersten Standardbasisvektor  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  die Beziehung  $\Phi(e_1) = -e_1$ , dieser ist also ein Eigenvektor von  $\Phi$  zum Eigenwert  $-1$ . Weiter ist der zweite Standardbasisvektor  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $1$ , denn  $\Phi(e_2) = e_2$ , vgl. Abbildung 3.3.

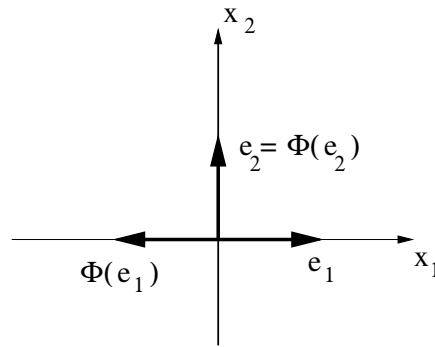


Abbildung 3.3.: Die Spiegelung an der  $x_2$ -Achse  $\Phi$  mit Eigenvektoren

**Definition 3.11.3.** Es sei  $A \in K^{n \times n}$  eine Matrix. Ein  $\lambda \in K$  heißt Eigenwert von  $A$ , falls es ein  $x \in K^n$  mit  $x \neq 0$  und  $Ax = \lambda x$  gibt. Ein solcher Vektor  $x$  heißt dann Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

Wir wollen nun zeigen, dass die beiden Definitionen für Eigenwerte von linearen Abbildungen und Matrizen zusammenpassen. Dazu machen wir uns zunächst klar, dass Eigenwerte bei Basiswechseln erhalten bleiben.

**Satz 3.11.4.** Ist  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $A \in K^{n \times n}$  und ist  $S \in K^{n \times n}$  invertierbar, so ist  $\lambda$  auch ein Eigenwert von  $B = S^{-1}AS$ .

*Beweis.* Es sei  $x \in K^n \setminus \{0\}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Da  $S$  invertierbar ist und  $x \neq 0$  gilt, muss auch  $y := S^{-1}x \neq 0$  gelten. Für diesen Vektor gilt

$$By = (S^{-1}AS)(S^{-1}x) = S^{-1}A(SS^{-1})x = S^{-1}(Ax) = S^{-1}(\lambda x) = \lambda S^{-1}x = \lambda y,$$

er ist also ein Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Insbesondere hat  $B$  den Eigenwert  $\lambda$ .  $\square$

**Satz 3.11.5.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\Phi : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $\lambda \in K$  genau dann ein Eigenwert von  $\Phi$ , wenn  $\lambda$  für jede Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ein Eigenwert von  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Es sei  $\mathcal{B}$  eine beliebige Basis von  $V$  und  $v \in V$  ein Eigenvektor von  $\Phi$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Weiter bezeichnen wir wie üblich mit  $\vec{v}$  den Koordinatenvektor von  $v$  bezüglich  $\mathcal{B}$ . Dann ist auch  $\vec{v} \neq 0$  und es gilt bezüglich dieser Basis auch

$$\overrightarrow{\Phi(v)} = \vec{\lambda v} = \lambda \vec{v}.$$

### 3. Lineare Algebra

Also ist nach der Definition der Abbildungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)\vec{v} = \overrightarrow{\Phi(v)} = \lambda\vec{v}$$

und wir haben gezeigt, dass  $\lambda$  auch ein Eigenwert von  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  ist.

„ $\Leftarrow$ “ Es sei  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  mit zugehörigem Eigenvektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in K^n$ . Dann ist  $x \neq 0$  und damit auch  $v := \sum_{j=1}^n x_j b_j \neq 0_V$ . Außerdem ist

$$\overrightarrow{\Phi(v)} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)\vec{v} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)x = \lambda x = \lambda\vec{v} = \overrightarrow{\lambda v}.$$

Also ist  $\Phi(v) = \lambda v$ . □

**Bemerkung 3.11.6.** Gibt es genügend linear unabhängige Eigenvektoren einer linearen Abbildung, so kann man tatsächlich eine einfache Darstellungsmatrix finden. Wir betrachten auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  eine lineare Abbildung  $\Phi : V \rightarrow V$  und setzen voraus, dass es eine Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  von  $V$  gibt, die aus Eigenvektoren von  $\Phi$  besteht. Wir nennen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  die jeweils zugehörigen Eigenwerte, d.h. es gelte  $\Phi(b_j) = \lambda_j b_j$  für jedes  $j = 1, 2, \dots, n$ . Bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  ist dann  $\overrightarrow{\Phi(b_j)} = (0, \dots, 0, \lambda_j, 0, \dots, 0)^T$  mit dem Eintrag  $\lambda_j$  an der  $j$ -ten Stelle. Also ist dann die Abbildungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Solch eine Matrix nennt man eine *Diagonalmatrix*.

**Definition 3.11.7.** (a) Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum. Eine lineare Abbildung  $\Phi : V \rightarrow V$  heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, so dass  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  eine Diagonalmatrix ist.

(b) Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix  $S \in K^{n \times n}$  gibt, für die  $S^{-1}AS$  eine Diagonalmatrix ist.

Die nächste Frage ist nun wie man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer konkret gegebenen linearen Abbildung, bzw. Matrix, bestimmt. Dazu überlegen wir uns für eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$ :

$\lambda \in K$  ist Eigenwert von  $A$ .

$\iff$  Es gibt ein  $x \in K^n \setminus \{0\}$  mit  $Ax = \lambda x$ .

$\iff$  Es gibt ein  $x \in K^n \setminus \{0\}$  mit  $Ax - \lambda x = 0$ .

$$\begin{aligned}
&\iff \text{Es gibt ein } x \in K^n \setminus \{0\} \text{ mit } (A - \lambda I)x = 0. \\
&\iff \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}. \\
&\iff A - \lambda I \text{ ist nicht invertierbar.} \\
&\iff \det(A - \lambda I) = 0.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt:

**Satz 3.11.8.** *Ein  $\lambda \in K$  ist genau dann ein Eigenwert von  $A \in K^{n \times n}$ , wenn  $\det(A - \lambda I) = 0$  ist.*

Ist  $A \in K^{n \times n}$ , so ist der Ausdruck  $\det(A - \lambda I)$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit Koeffizienten in  $K$ . Dieses heißt *charakteristisches Polynom* von  $A$ .

Die folgende Übungsaufgabe zeigt, dass nicht nur die Eigenwerte sondern das gesamte charakteristische Polynom bei einem Basiswechsel unverändert bleibt. Man kann also auch vom charakteristischen Polynom einer linearen Abbildung sprechen.

**Übungsaufgabe 3.11.9.** Sind  $A, B \in K^{n \times n}$  ähnliche Matrizen, so gilt  $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$ .

**Beispiel 3.11.10.** Wir betrachten die lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\Phi((x_1, x_2, x_3)^T) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 3.6.20. Außerdem sei  $\mathcal{B}$  die Standardbasis. Dann ist

$$A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \xleftarrow{\cdot 1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \xleftarrow{\cdot (-1)} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1 - \lambda)(-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1 - \lambda)^2.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Abbildung sind die Nullstellen dieses Polynoms, also  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = 1$ .

### 3. Lineare Algebra

Zur Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren löst man nun die linearen Gleichungssysteme  $(A - \lambda_j I)x = 0$  für  $j = 1$  und  $2$ .

Hier ist die Rechnung beispielhaft für  $\lambda_1 = 0$ . Es ist

$$A - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen also

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot (-1) \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad \rightsquigarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Wir haben also  $x_1 = x_2 = -x_3$ . Alle Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = 0$  bilden also die Menge

$$\ker(A) \setminus \{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \setminus \{0\}.$$

Man vergleiche mit Beispiel 3.6.20.

**Satz 3.11.11.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\Phi : V \rightarrow V$  linear. Weiter sei  $A \in K^{n \times n}$ . Dann gilt*

(a) *Für jedes  $\lambda \in K$  ist der Eigenraum von  $\Phi$  zum Eigenwert  $\lambda$*

$$E(\Phi, \lambda) := \{v \in V : \Phi(v) = \lambda v\}$$

*ein Untervektorraum von  $V$  und der Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$*

$$E(A, \lambda) := \{x \in K^n : (A - \lambda I)x = 0\} = \ker(A - \lambda I)$$

*ein Untervektorraum von  $K^n$ .*

(b) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von  $\Phi$  (bzw.  $A$ ) sind linear unabhängig.*

(c) *Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  verschiedene Eigenwerte von  $\Phi$  (bzw.  $A$ ) und  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_r$  Basen von  $E(\Phi, \lambda_1), E(\Phi, \lambda_2), \dots, E(\Phi, \lambda_r)$  (bzw. von  $E(A, \lambda_1), E(A, \lambda_2), \dots, E(A, \lambda_r)$ ), so ist die Menge  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$  linear unabhängig.*

Der Beweis von Teil (a) ist eine direkte Anwendung des Untervektorraumkriteriums, die Aussagen in (b) und (c) wollen wir ohne Beweis hinnehmen.

**Übungsaufgabe 3.11.12.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B}$ ,  $\Phi : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$ . Zeigen Sie, dass der Eigenraum von  $A$  zu einem Eigenwert  $\lambda$  genau die Koordinatenvektoren (bezüglich  $\mathcal{B}$ ) der Vektoren aus dem Eigenraum von  $\Phi$  zum selben  $\lambda$  enthält.

Wir beweisen nun die folgende wichtige Konsequenz aus obigem Satz.

**Satz 3.11.13.** *Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\Phi : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $\Phi$  genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der Dimensionen aller Eigenräume gleich  $n$  ist.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Ist  $\Phi$  diagonalisierbar, so gibt es nach Definition eine Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  von  $V$ , für die

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

gilt. Dann gilt für jeden Basisvektor nach der Definition der Abbildungsmatrix

$$\overrightarrow{\Phi(b_j)} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \overrightarrow{b_j} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_j \overrightarrow{b_j}$$

Also ist  $\Phi(b_j) = \alpha_j b_j$ , d.h.  $\mathcal{B}$  ist eine Basis von Eigenvektoren, was bedeutet, dass tatsächlich die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich  $n$  ist.

„ $\Leftarrow$ “ Es sei nun die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich der Raumdimension  $n$ . Wir wählen dann in jedem Eigenraum eine Basis und erhalten so Basen  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_r$  zu jeweils verschiedenen Eigenwerten von  $\Phi$ . Dann ist nach Satz 3.11.11 (c) die Menge  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$  linear unabhängig und enthält nach Voraussetzung  $n$  Vektoren, ist also eine Basis von  $V$ . Bezüglich dieser Basis aus Eigenvektoren ist dann  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$  diagonalisierbar, vgl. Bemerkung 3.11.6.  $\square$

**Beispiel 3.11.14.** Leider gibt es Matrizen und damit auch lineare Abbildungen, die nicht diagonalisierbar sind. Als Beispiel diene  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Dann ist

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

### 3. Lineare Algebra

Also ist nur  $\lambda_1 = 0$  ein Eigenwert von  $A$ . Dessen Eigenraum berechnet sich als Lösungsmenge des LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

zu

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Eigenraum hat Dimension 1, es gibt also nur einen linear unabhängigen Eigenvektor.

**Bemerkung 3.11.15.** Wir haben gesehen, dass die Eigenwerte genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Das Problem Eigenwerte zu finden, ist also ein Nullstellenproblem für Polynome. Zumindest in theoretischer Hinsicht ist dieses mit dem Fundamentalsatz der Algebra 2.5.14 befriedigend gelöst: Jedes komplexe Polynom zerfällt über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren.

Das ist der Grund, warum Eigenwerttheorie eigentlich immer über  $\mathbb{C}$  betrieben wird, selbst wenn alle beteiligten Matrizen rein reell sind.

Auch hier sind alle folgenden Betrachtungen in diesem Sinne zu verstehen.

**Satz 3.11.16.** *Es sei  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ ,  $\mathbb{R}^{n \times n}$  oder  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . Dann hat  $A$  mindestens einen komplexen Eigenwert.*

*Beweis.* Das charakteristische Polynom von  $A$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Die Existenz einer komplexen Nullstelle, und damit eines Eigenwertes, folgt nun aus dem Fundamentalsatz der Algebra 2.5.14.  $\square$

**Definition 3.11.17.** *Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt symmetrisch, falls  $A = A^T$  gilt.*

Es gilt der folgende Hauptsatz für symmetrische Matrizen, den wir wieder nicht beweisen wollen.

**Satz 3.11.18.** *Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch. Dann sind alle Eigenwerte reell und es gibt eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Insbesondere ist jede symmetrische Matrix also diagonalisierbar.*

**Beispiel 3.11.19.** Es sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ .

Dann ist

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 4 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 21$$

und wir erhalten für die Eigenwerte:

$$\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm 5, \quad \text{also } \lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = 3.$$



Die Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = -7$  ergeben sich als Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right) : 4 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot (-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist  $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = -7$ .

Genauso findet man  $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  als einen Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 3$ .

Damit ist

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  aus Eigenvektoren von  $A$ .

**Definition 3.11.20.** Es sei  $(\cdot|\cdot)$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ . Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt

- (a) positiv definit, falls  $(x|Ax) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt.
- (b) positiv semidefinit, falls  $(x|Ax) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt.
- (c) negativ definit, falls  $(x|Ax) < 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt.
- (d) negativ semidefinit, falls  $(x|Ax) \leq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt.
- (e) indefinit, falls es Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gibt mit  $(x|Ax) > 0$  und  $(y|Ay) < 0$ .

**Bemerkung 3.11.21.** Man beachte, dass alle Definitheitsbegriffe von vornherein nur für symmetrische Matrizen  $A$  definiert sind. Spricht man von einer positiv oder negativ definiten Matrix, so ist damit immer, auch wenn es nicht dasteht, auch gemeint, dass die Matrix symmetrisch ist.

Im folgenden Satz sind zum Abschluss dieses Abschnitts noch einige Kriterien zum Nachweis von positiver und negativer Definitheit gesammelt. Wir werden diesen Begriffen in einem ganz anderen Zusammenhang in der Mathematik II noch einmal begegnen.

**Satz 3.11.22.** Es sei  $A = (\alpha_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch.

- (a)  $A$  ist genau dann positiv definit, wenn  $-A$  negativ definit ist.
- (b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
  - i)  $A$  ist positiv definit.
  - ii) Alle Eigenwerte von  $A$  sind größer als Null.
  - iii) Es gilt für jedes  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ , dass  $\det(\alpha_{jk})_{j,k=1}^m > 0$ .

### 3. Lineare Algebra

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i)  $A$  ist negativ definit.
- ii) Alle Eigenwerte von  $A$  sind kleiner als Null.
- iii) Es gilt für jedes  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ , dass  $(-1)^{m+1} \det(\alpha_{jk})_{j,k=1}^m < 0$ .

**Bemerkung 3.11.23.** Die Teildeterminanten  $\det(\alpha_{jk})_{j,k=1}^m$  in (b)iii) und (c)iii) heißen *Unteterminoren* der Determinante. Man kann sich merken: Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Unteterminoren positiv sind und genau dann negativ definit, wenn die Unteterminoren alternierende Vorzeichen haben, wobei es mit einer negativen Zahl losgehen muss.

Dass es genau so sein muss, macht man sich am besten an Diagonalmatrizen klar.

Wir betrachten noch beispielhaft zwei Matrizen

**Beispiel 3.11.24.** Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Unteterminoren von  $A$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \det((1)) &= 1 > 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} &= 5 - 4 = 1 > 0 \\ \det(A) &= 150 - 20 - 120 = 10 > 0, \end{aligned}$$

also ist  $A$  positiv definit.

Die Unteterminoren von  $B$  sind

$$\begin{aligned} \det((-2)) &= -2 < 0 \\ \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} &= 10 - 9 = 1 > 0 \\ \det(B) &= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 = -1 < 0, \end{aligned}$$

und wir erhalten, dass  $B$  negativ definit ist.

**Übungsaufgabe 3.11.25.** Es sei  $(\cdot|\cdot)$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv definit. Zeigen Sie, dass durch

$$(x|y)_A := (x|Ay), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  definiert wird.

## 4. Ein Ausblick auf die universelle Algebra

### 4.1. Motivation

Wir haben bislang einige wenige *algebraischer Strukturen* wie Gruppen, Ringe, Körper oder Vektorräume kennengelernt. Sie alle bestehen aus einer oder mehreren Sorten von Objekten und Operationen auf diesen Objekten. Die verschiedenen in der Informatik betrachteten *Datentypen* geben Anlaß zu weiteren algebraischen Strukturen. Deshalb ist es nützlich einen allgemeinen, d.h. “universellen”, Begriff algebraischer Strukturen einzuführen und Begriffe wie Homomorphismus, Unter-algebra, Kongruenzrelation etc. auf diese allgemeinen Strukturen zu erweitern.

Oft gibt es mehrere verschiedene Implementierungen ein und derselben Datenstruktur. Diese verschiedenen Implementierungen werden als *Algebren* aufgefaßt und was ihnen gemeinsam ist wird durch ihre *Spezifikation* zum Ausdruck gebracht, d.h. eine Liste von Axiomen wie im Falle der bereits betrachteten traditionellen algebraischen Strukturen.

Als Beispiel betrachten wir folgende Spezifikation des Datentyps der Listen

<b>LIST</b>	$\equiv$
<b>sorts</b>	elem, list
<b>funcs</b>	empty : $\rightarrow$ list cons : elem $\times$ list $\rightarrow$ list head : list $\rightarrow$ elem tail : list $\rightarrow$ list
<b>axioms</b>	head(cons( $a$ , $l$ )) = $a$ tail(cons( $a$ , $l$ )) = $l$ tail(empty) = empty

in der zwei Sorten, die der Elemente und die der Listen, postuliert werden zusammen mit den Operationen empty, cons, head, tail und list, von denen angegeben wird, wieviele Argumente welcher Sorte sie erwarten und von welcher Sorte das Resultat ist. Die intendierte Bedeutung dieser Operationen wird durch Axiome zum Ausdruck gebracht, welche in vorliegendem Fall die spezielle Form von Gleichungen haben. Im allgemeinen reichen aber Gleichungen nicht aus wie z.B. im

#### 4. Ein Ausblick auf die universelle Algebra

Fälle von Körpern, wo wir die Existenz eines inversen Elements durch die Formel

$$\forall x \exists y xy = 1$$

ausgedrückt haben, in der auch Quantoren vorkommen.

## 4.2. Signaturen, Algebren und Homomorphismen

Zuerst formalisieren wir den Begriff einer Signatur, in der festgelegt wird, welche Sorten und welche Operationen betrachtet werden. Wir verwenden zu diesem Zweck folgende Notation: für eine Menge  $A$  bezeichne  $A^*$  die Menge der Wörter über dem Alphabet  $A$ .<sup>1</sup>

**Definition 4.2.1.** Eine Signatur bzw. ein Strukturtyp ist ein Tripel

$$\Sigma = (S, F, \text{ar})$$

wobei  $S$  und  $F$  Mengen und  $\text{ar} : F \rightarrow S^* \times S$  eine Funktion ist.  $S$  heißt Menge der Sortensymbole,  $F$  heißt Menge der Funktionssymbole und  $\text{ar}$  heißt Stelligkeitsfunktion (englisch arity function) der Signatur  $\Sigma$ .

Statt  $S$ ,  $F$  und  $\text{ar}$  schreiben wir oft  $\Sigma_{\text{sort}}$ ,  $\Sigma_{\text{func}}$ ,  $\Sigma_{\text{ar}}$ , und für  $\text{ar}(f) = (s_1 \dots s_n, s)$  schreiben wir auch  $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$ .

Als nächstes definieren wir für beliebige Signaturen  $\Sigma$  den Begriff einer  $\Sigma$ -Algebra.

**Definition 4.2.2.** Sei  $\Sigma = (S, F, \text{ar})$  eine Signatur. Eine  $\Sigma$ -Algebra  $A$  besteht aus der Angabe

- (a) einer Menge  $A_s$  für jedes  $s \in S$  und
- (b) einer Funktion  $f^A : A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n} \rightarrow A_s$  für jedes Funktionssymbol  $f \in F$ , wobei  $\text{ar}(f) = (s_1 \dots s_n, s)$ .

$A_s$  heißt Trägermenge der Sorte  $s$  in  $A$  (englisch carrier set) und  $f^A$  heißt Interpretation von  $f$  in  $A$ .

Für  $\vec{s} = s_1 \dots s_n \in S^*$  bezeichne  $A_{\vec{s}}$  als Abkürzung die Menge  $A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n}$ . Also schreiben wir  $f^A : A_{\vec{s}} \rightarrow A_s$  für  $\text{ar}(f) = (\vec{s}, s)$ .

Falls  $\text{ar}(f) = (\varepsilon, s)$ , so schreiben wir  $f : \rightarrow s$ . In diesem Fall nennt man  $f$  eine *Konstante* der Sorte  $s$ , da  $A_\varepsilon = \{\emptyset\}$ .

Wenn  $S$  aus genau einer Sorte besteht, so ist jedes  $(\vec{s}, s) \in S^* \times S$  eindeutig durch  $n := \text{length}(\vec{s})$  bestimmt und wir können die Stelligkeit eines Funktionssymbols eindeutig durch die *Anzahl* seiner Argumente beschreiben. Allerdings ist in den meisten Informatikanwendungen mehr als eine Sorte vonnöten (wie z.B. bei Listen, Stacks, labelled trees...).

Als nächstes verallgemeinern wir den Begriff Homomorphismus auf  $\Sigma$ -Algebren.

---

<sup>1</sup>Wir schreiben  $\varepsilon$  für das leere Wort.

### 4.3. Unteralgebren und Faktoralgebren

**Definition 4.2.3.** Sei  $\Sigma = (S, F, \text{ar})$  eine Signatur und seien  $A$  und  $B$   $\Sigma$ -Algebren. Ein  $\Sigma$ -Homomorphismus (oder kurz Homomorphismus) von  $A$  nach  $B$  ist eine Familie von Funktionen  $(h_s : A_s \rightarrow B_s)_{s \in S}$ , so dass für  $(s_1 \dots s_n, s) \in S^* \times S$  und alle  $f \in F$  mit  $\text{ar}(f) = (s_1 \dots s_n, s)$  gilt:

$$h_s(f^A(x_1, \dots, x_n)) = f^B(h_{s_1}(x_1), \dots, h_{s_n}(x_n))$$

für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $x_i \in A_{s_i}$ .

Intuitiv bedeutet obige Bedingung, dass Algebraoperationen und (Komponenten von)  $h$  vertauschbar sind, der Homomorphismus also die Operationen der Algebra. Dies veranschaulicht folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A_{\vec{s}} & \xrightarrow{f^A} & A_s \\ \downarrow h_{\vec{s}} & & \downarrow h_s \\ B_{\vec{s}} & \xrightarrow{f^B} & B_s \end{array}$$

wobei  $A_{\vec{s}} = A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n}$ ,  $B_{\vec{s}} = B_{s_1} \times \dots \times B_{s_n}$  und  $h_{\vec{s}}$  definiert ist als die Funktion  $h_{\vec{s}}(x_1, \dots, x_n) = (h_{s_1}(x_1), \dots, h_{s_n}(x_n))$ .

Man zeigt leicht, dass Homomorphismen unter Komposition abgeschlossen sind (wobei  $(h' \circ h)_s = h'_s \circ h_s$ ).

**Definition 4.2.4.** Ein Homomorphismus  $h : A \rightarrow B$  von  $\Sigma$ -Algebren heißt Isomorphismus, wenn alle  $h_s$  Bijektionen sind.

Wie üblich zeigt man, dass  $h : A \rightarrow B$  genau dann ein Isomorphismus ist, wenn es einen (eindeutig bestimmten) Homomorphismus  $h^{-1} : B \rightarrow A$  gibt mit  $h^{-1} \circ h = \text{id}_A$  und  $h \circ h^{-1} = \text{id}_B$ .

### 4.3. Unteralgebren und Faktoralgebren

Analog zu Untergruppe, Unterring, Untervektorraum etc. definieren wir den Begriff einer Unteralgebra.

**Definition 4.3.1.** Sei  $\Sigma$  eine Signatur und  $A$  eine  $\Sigma$ -Algebra. Eine Unteralgebra von  $A$  ist eine  $\Sigma$ -Algebra  $B$ , sodass  $B_s \subseteq A_s$  für alle  $s \in \Sigma_{\text{sort}}$  und für alle Operationen  $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$  in  $\Sigma$  gilt, dass

$$f^A(b_1, \dots, b_n) = f^B(b_1, \dots, b_n)$$

für alle  $b_1 \in B_{s_1}, \dots, b_n \in B_{s_n}$ .

#### 4. Ein Ausblick auf die universelle Algebra

Wir überlassen es als Übung zu zeigen, dass  $B$  genau dann Unter algebra von  $A$  ist, wenn eine Homomorphismus  $\iota : B \rightarrow A$  existiert mit  $\iota_s(b) = b$  für alle  $b \in B_s$ . Solche Homomorphismen nennen wir *Inklusion(homomorphism)en*.

Ein Homomorphismus  $h : A \rightarrow B$  heißt *surjektiv*, wenn alle  $h_s : A_s \rightarrow B_s$  surjektive Funktionen sind.

**Satz 4.3.2.** *Sei  $\Sigma$  eine Signatur und  $h : A \rightarrow B$  ein  $\Sigma$ -Homomorphismus. Dann gibt es genau eine Unter algebra  $\iota : C \rightarrow B$ , sodass ein surjektiver Homomorphismus  $e : A \rightarrow C$  existiert mit  $h = \iota \circ e$*

*Beweis.* Notwendigerweise muss  $C_s$  das Bild von  $h_s : A_s \rightarrow B_s$  sein. Dass dann  $C$  eine Unter algebra von  $B$  ist folgt unmittelbar aus der Homomorphieeigenschaft von  $h$ , da  $f^B(h_{s_1}(a_1), \dots, h_{s_n}(a_n)) = h_s(f^A(a_1, \dots, a_n)) \in C_s$  für  $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$ . Der eindeutig bestimmte surjektive Homomorphismus  $e : A \rightarrow C$  ist gegeben durch  $e_s(a) = h_s(a)$ .  $\square$

Als nächstes definieren wir den Begriff einer Kongruenz für  $\Sigma$ -Algebren.

**Definition 4.3.3.** *Sei  $\Sigma = (S, F, \text{ar})$  eine Signatur und  $A$  eine  $\Sigma$ -Algebra. Eine Kongruenz(relation) auf  $A$  ist eine  $S$ -indizierte Familie  $R = (R_s)_{s \in S}$  von Äquivalenzrelationen  $R_s$  auf  $A_s$ , die zusammen folgende Kongruenzbedingung erfüllen: für alle  $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$  in  $S$  folgt aus  $x_1 R_{s_1} y_1, \dots, x_n R_{s_n} y_n$ , dass auch  $f^A(x_1, \dots, x_n) R_s f^A(y_1, \dots, y_n)$ .*

Für eine Kongruenz  $R$  auf  $A$  kann man wie folgt eine Faktoralgebra  $Q = A/R$  konstruieren. Für  $s \in S$  sei  $Q_s$  definiert als  $A_s/R_s$  und für  $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$  in  $F$  sei  $f^Q$  gegeben durch  $f^Q(\widetilde{a_1}, \dots, \widetilde{a_n}) = \widetilde{f(a_1, \dots, a_n)}$ . Beachte, dass  $f^Q$  wohldefiniert ist aufgrund der Kongruenzeigenschaft von  $R$ . Der *Quotientenhomomorphismus*  $q : A \rightarrow Q$  ist gegeben durch  $q_s(a) = \widetilde{a}$  für  $a \in A_s$ . Offenbar ist  $q$  surjektiv.

**Satz 4.3.4.** *Sei  $h : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus von  $\Sigma$ -Algebren. Für jede Sorte  $s$  sei  $(R_h)_s$  definiert als  $\{(x, y) \in A_s \times A_s \mid h_s(x) = h_s(y)\}$ . Dann ist  $R_h = ((R_h)_s)_{s \in S}$  eine Kongruenzrelation auf  $A$ . Dann gibt es genau einen Homomorphismus  $m : A/R_h \rightarrow B$  mit  $h = m \circ q$ , wobei  $q : A \rightarrow A/R_h$  der zu  $R_h$  gehörige Quotientenhomomorphismus ist.*

*Beweis.* Der gesuchte Homomorphismus  $m$  ist gegeben durch  $m(\widetilde{a}) = h(a)$ . Er ist eindeutig, da  $q$  surjektiv ist.  $\square$

Daraus folgt, dass  $A/R_h$  zum Bild von  $A$  unter  $h$  isomorph ist (siehe Satz 4.3.2).

**Übungsaufgabe 4.3.5.** Für jeden surjektiven Homomorphismus  $h : A \rightarrow B$  ist  $B$  isomorph zu  $A/R_h$ .

**Übungsaufgabe 4.3.6.** Sei  $A$  eine  $\Sigma$ -Algebra. Dann sind sowohl die Menge der Unter algebren von  $A$  als auch die Menge der Kongruenzrelationen auf  $A$  unter beliebigen Durchschnitten abgeschlossen.

## 4.4. Terme, term erzeugte Algebren und das Prinzip der Termination

Sei  $\Sigma = (S, F, \text{ar})$  eine Signatur.

**Definition 4.4.1.** Die freie Termalgebra  $T(\Sigma)$  über  $\Sigma$  ist induktiv wie folgt definiert. Wenn  $t_1 \in T(\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in T(\Sigma)_{s_n}$  und  $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$  in  $F$  ist, dann ist  $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\Sigma)_s$ . Außerdem ist  $f^{T(\Sigma)}$  gegeben durch  $f^{T(\Sigma)}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$ .

Die Algebra  $T(\Sigma)$  ist also rein *syntaktischer* Natur. Man kann zeigen, dass für jede  $\Sigma$ -Algebra  $A$  genau ein  $\Sigma$ -Homomorphismus  $h : T(\Sigma) \rightarrow A$  existiert, der syntaktische Objekte (Terme) in der Struktur  $A$  (*Semantik*) interpretiert. Man versteht  $h$  als *Interpretationsfunktion*.

Eine Konsequenz des ersten Teils von Übungsaufgabe 4.3.6 ist, dass jede  $\Sigma$ -Algebra  $A$  eine kleinste Unter algebra  $T_\Sigma(A)$  enthält, nämlich das Bild des eindeutig bestimmten Homomorphismus  $h : T(\Sigma) \rightarrow A$ .

**Definition 4.4.2.** Eine  $\Sigma$ -Algebra heißt *term erzeugt*, wenn  $T_\Sigma(A)$  mit  $A$  übereinstimmt.

Für term erzeugte Algebren gilt folgendes Induktionsprinzip.

**Satz 4.4.3.** (Termination)

Sei  $A$  eine term erzeugte  $\Sigma$ -Algebra und  $(P_s)_{s \in S}$  eine Familie von Prädikaten auf  $A_s$  (d.h.  $P_s \subseteq A_s$ ). Dann gilt  $\forall x \in A_s : P_s(x)$  für alle  $s \in S$  genau dann, wenn  $P$  unter den Operationen  $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$  von  $A$  abgeschlossen ist, d.h.  $f^A(a_1, \dots, a_n) \in P_s$ , wann immer  $a_1 \in P_{s_1}, \dots, a_n \in P_{s_n}$ .

Im Falle der 1-sortigen Algebra mit Trägermenge  $\mathbb{N}$ , Konstante 0 und einstelliger Operation  $s(n) = n + 1$  besagt Satz 4.4.3, dass das Induktionsprinzip für  $\mathbb{N}$  gilt. Satz 4.4.3 verallgemeinert dies auf beliebige term erzeugte Algebren. Da die in der Informatik betrachteten Datentypen meist term erzeugte Algebren sind, eröffnet Satz 4.4.3 die Möglichkeit, allquantifizierte Aussagen über solche Datentypen mithilfe von Termination zu beweisen.

Beispielsweise zeigt man leicht mit Termination, dass für term erzeugte Algebren  $A$  zu jeder Algebra  $B$  höchstens ein Homomorphismus  $A \rightarrow B$  existiert. Seien  $h, h' : A \rightarrow B$  Homomorphismen. Für jede Sorte  $s$  sei  $P_s = \{a \in A_s : h(a) = h'(a)\}$ . Man zeigt leicht (Übung!), dass  $(P_s)_{s \in S}$  unter den Operationen von  $A$  abgeschlossen ist. Somit folgt, dass  $A_s = P_s$  für alle Sorten  $s$ , und somit  $h = h'$ .

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Spezifikation

#### 4. Ein Ausblick auf die universelle Algebra

<b>LIST_APP</b>	$\equiv$
<b>sorts</b>	elem, list
<b>funcs</b>	$c1, c2 : \text{elem}$ $\text{empty} : \rightarrow \text{list}$ $\text{cons} : \text{elem} \times \text{list} \rightarrow \text{list}$ $\text{head} : \text{list} \rightarrow \text{elem}$ $\text{tail} : \text{list} \rightarrow \text{list}$ $\text{append} : \text{list} \times \text{list} \rightarrow \text{list}$
<b>axioms</b>	$\text{head}(\text{cons}(a, l)) = a$ $\text{tail}(\text{cons}(a, l)) = l$ $\text{tail}(\text{empty}) = \text{empty}$ $\text{append}(\text{empty}, l) = l$ $\text{append}(\text{cons}(a, l), l') = \text{cons}(a, \text{append}(l, l'))$

Sei  $\Sigma$  die Untersignatur, wo die Operationen head, tail und append weggelassen werden. Sei  $A$  eine Algebra, die die Spezifikation LIST\_APP erfüllt und für die das *Redukt*<sup>2</sup>  $A|_{\Sigma}$  term erzeugt ist. Dann kann man mit Termination (bzgl.  $\Sigma$ ) zeigen, dass die Operation append in  $A$  assoziativ ist.

---

<sup>2</sup>d.h., man vergisst die (Interpretationen der) Operationen head, tail und append



# 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

## 5.1. Die reellen Zahlen

Wir erinnern uns an den Begriff eines *angeordneten Körpers*: Dies ist ein Körper  $K$  mit einer Totalordnung  $\leq$ , für die gilt:

- $\forall a, b, c \in K : a \leq b \implies a + c \leq b + c$  und
- $\forall a, b, c \in K : (a \leq b \text{ und } 0 \leq c) \implies ac \leq bc$ .

**Definition 5.1.1.** Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist der kleinste angeordnete Körper, der  $\mathbb{Z}$  enthält, und das Vollständigkeitsaxiom

*Jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke besitzt, hat ein Supremum.*

erfüllt.

**Bemerkung 5.1.2.** Auch die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sind ein angeordneter Körper, der  $\mathbb{Z}$  enthält, aber dieser erfüllt nicht das Vollständigkeitsaxiom, denn  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$  hat obere Schranken aber kein Supremum in  $\mathbb{Q}$ , vgl. Beispiel 1.3.9 (b).

**Definition 5.1.3.** Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$  heißt

- (a) nach oben (unten) beschränkt, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt.
- (b) beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

**Satz 5.1.4.** Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Infimum.

*Beweis.* Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  eine nach unten beschränkte und nichtleere Menge. Dann gibt es eine untere Schranke  $C$  von  $M$ . Wir betrachten nun die Teilmenge  $\widehat{M} := \{-x : x \in M\}$  von  $\mathbb{R}$ , die ebenfalls nichtleer ist. Da  $C$  eine untere Schranke von  $M$  ist, gilt  $C \leq x$  für alle  $x \in M$ . Das bedeutet, dass  $-C \geq -x$  für alle  $x \in M$  ist. Anders formuliert, erhalten wir  $-C \geq y$  für jedes  $y \in \widehat{M}$ .

Also ist  $-C$  eine obere Schranke von  $\widehat{M}$ . Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert nun  $s := \sup(\widehat{M})$  und wir wollen zeigen, dass  $-s$  das Infimum von  $M$  ist.

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

Dazu zeigen wir zunächst, dass  $-s$  eine untere Schranke ist: Es sei  $x \in M$  beliebig. Dann gilt  $-x \in \widehat{M}$  und es gilt nach der Konstruktion von  $s$  auf jeden Fall  $-x \leq s$ . Also ist  $x \geq -s$  für jedes  $x \in M$ , was zeigt, dass  $-s$  eine untere Schranke von  $M$  ist.

Sei nun  $t \in \mathbb{R}$  eine weitere untere Schranke von  $M$ . Dann ist mit der selben Argumentation wie oben  $-t$  eine obere Schranke von  $\widehat{M}$ . Nun ist  $s$  die kleinste obere Schranke von  $\widehat{M}$ , also muss  $s \leq -t$  gelten. Damit ist aber auch  $-s \geq t$ . Also ist  $-s$  die größte untere Schranke von  $M$ , d.h. das Infimum.  $\square$

Eine wichtige Rolle in der Analysis spielt die Betragsfunktion, an die wir ebenfalls noch schnell erinnern wollen.

**Definition 5.1.5.** Die Funktion  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

heißt Betragsfunktion und  $|x|$  heißt Betrag von  $x$ .

Es gelten die folgenden Rechenregeln, vgl. Satz 2.5.12 und Beispiel 3.4.2 (a):

**Satz 5.1.6.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

- (a)  $|x| \geq 0$ ,
- (b)  $|x| = |-x|$ ,
- (c)  $\pm x \leq |x|$ ,
- (d)  $|xy| = |x| \cdot |y|$ ,
- (e)  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ ,
- (f)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecksungleichung),

**Übungsaufgabe 5.1.7.** Zeigen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Definition von Intervallen.

**Definition 5.1.8.** Es seien zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  gegeben. Dann heißen

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall,
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall,
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  und

- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  halboffene Intervalle.

Um auch die Fälle von Halbstrahlen abzudecken, definieren wir weiter:

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$
- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}.$

Schließlich schreiben wir

- $\mathbb{R}_+ := [0, \infty),$
- $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0].$

## 5.2. Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Eine wichtige Schlussfolgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom ist die Existenz der  $n$ -ten Wurzeln in  $\mathbb{R}_+$ .

Bevor wir in diese Betrachtungen einsteigen, definieren wir der Vollständigkeit halber noch die ganzzahligen Potenzen.

**Definition 5.2.1.** Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  ist

$$(a) \quad x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}},$$

$$(b) \quad x^{-n} := \frac{1}{x^n}, \text{ falls } x \neq 0, \text{ sowie}$$

$$(c) \quad x^0 := 1.$$

An dieser Stelle sei noch gewarnt, dass das Potenzieren nicht assoziativ ist, d.h. im Allgemeinen ist  $(x^n)^m \neq x^{(n^m)}$ . Um Klammern zu sparen gilt die Konvention, dass  $x^{n^m}$  als  $x^{(n^m)}$  zu lesen ist.

Der zentrale Satz für die Existenz der  $n$ -ten Wurzeln ist der folgende.

**Satz 5.2.2.** Für jedes  $a \in \mathbb{R}_+$  und alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gibt es genau ein  $w \in \mathbb{R}_+$  mit  $x^n = a$ .

*Beweisidee.* Man zeigt zunächst, dass  $x^n \leq y^n \iff x \leq y$  für jede Wahl von  $x, y \in \mathbb{R}_+$  und alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt.

Für den Nachweis der Eindeutigkeit seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x^n = a = y^n$  gegeben. Dann gilt  $x^n \leq y^n$  und  $y^n \leq x^n$ . Nach der Vorüberlegung ist dann  $x \leq y$  und  $y \leq x$ , also  $x = y$ .

Für die Existenz betrachtet man zunächst den Fall  $a = 0$ . Dann ist offensichtlich  $x = 0$  eine Lösung. Sei also ab jetzt  $a > 0$ . Wir betrachten die Menge  $M := \{x \in \mathbb{R}_+ : x^n \leq a\}$ . Dann ist  $0 \in M$ , also ist  $M \neq \emptyset$ . Weiterhin ist  $M$  nach

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

oben beschränkt, z.B. ist  $1 + a$  eine obere Schranke, denn für  $x > 1 + a$  gilt  $x^n \geq (1 + a)^n \geq a$ . Wir beobachten, dass

$$y^n - x^n = (x + (y - x))^n - x^n \leq (2^n - 1)(1 + a)^{n-1}(y - x)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq x \leq y \leq 1 + a$ .

Sei  $w = \sup(M)$ . Offenbar ist  $w \leq 1 + a$ . Wir zeigen zunächst, dass  $w^n \leq a$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $x \in M$  mit  $w - x < \varepsilon$ . Es gilt

$$w^n - a \leq w^n - x^n = (x + (w - x))^n - x^n \leq (2^n - 1)(1 + a)^{n-1}\varepsilon$$

Also haben wir gezeigt, dass  $\forall \varepsilon > 0 : w^n - a \leq \varepsilon$ , d.h.  $w^n - a \leq 0$ , also  $w^n \leq a$ . Angenommen  $w^n < a$ . Dann gäbe es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $w^n < (w + \varepsilon)^n < a$  im Widerspruch zu  $w = \sup(M)$ . Also  $w^n \geq a$  und somit  $w^n = a$ .  $\square$

**Definition 5.2.3.** Es seien  $a \in \mathbb{R}_+$  und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Die eindeutige Zahl  $x \in \mathbb{R}_+$  mit  $x^n = a$  heißt  $n$ -te Wurzel von  $a$  und man schreibt  $x = \sqrt[n]{a}$ . Für den wichtigsten Fall  $n = 2$  gibt es die Konvention  $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$ .

**Satz 5.2.4.** Es seien  $q \in \mathbb{Q}$  und  $m, p \in \mathbb{Z}$ , sowie  $n, r \in \mathbb{N}^*$  so, dass  $q = m/n = p/r$  ist. Dann gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}_+$

$$(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[r]{x})^p.$$

*Beweis.* Für jedes  $x \in \mathbb{R}_+$  gilt

$$\begin{aligned} ((\sqrt[n]{x})^m)^r &= (\sqrt[n]{x})^{mr} = (\sqrt[n]{x})^{np} = ((\sqrt[n]{x})^n)^p = x^p \quad \text{und} \\ ((\sqrt[r]{x})^p)^r &= (\sqrt[r]{x})^{pr} = ((\sqrt[r]{x})^r)^p = x^p. \end{aligned}$$

Also folgt aus der Eindeutigkeit der Wurzel die Behauptung.  $\square$

**Definition 5.2.5.** Für jedes  $x \in \mathbb{R}_+$  und jedes  $q = n/m \in \mathbb{Q}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N}^*$  ist die rationale Potenz definiert durch

$$x^q = x^{n/m} := (\sqrt[m]{x})^n.$$

**Bemerkung 5.2.6.** Auch für rationale Exponenten gelten die bekannten Rechenregeln für Potenzen: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  und alle  $p, q \in \mathbb{Q}$  gilt

- $x^p x^q = x^{p+q}$
- $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$
- $x^p y^p = (xy)^p$
- $\frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p$
- $(x^p)^q = x^{pq}$

**Definition 5.2.7.** (a) Es sei  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dann wird die Zahl

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

als  $n$  Fakultät bezeichnet.

Weiterhin definieren wir  $0! := 1$ .

## 5.2. Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

(b) Es seien  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$ . Dann heißt

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Binomialkoeffizient „ $n$  über  $k$ “.

**Bemerkung 5.2.8.** Die beiden Größen  $n!$  und  $\binom{n}{k}$  haben auch eine anschauliche Bedeutung:

- $n!$  ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von  $n$  unterscheidbaren Dingen.
- $\binom{n}{k}$  ist die Anzahl der Möglichkeiten aus  $n$  unterscheidbaren Dingen genau  $k$  auszuwählen.

**Satz 5.2.9.** Es seien  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(a) \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

$$(b) \quad a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k.$$

$$(c) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (\text{Binomialformel})$$

*Beweis.* (a) Es ist

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
 (a-b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k &= a \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k - b \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \\
 &= \sum_{k=0}^n a^{n-k+1} b^k - \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n a^{n-k+1} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^{k+1} - b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^{k+1} - b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} - b^{n+1}.
 \end{aligned}$$

(c) Dies ist eine gute Auffrischungsübung in vollständiger Induktion. □

Eine Summe, wie sie im Beweis von Teil (b) auftritt, bei der sich bis auf zwei alle Summanden gegenseitig wegheben, nennt man auch anschaulich *Teleskopsumme*.

**Bemerkung 5.2.10.** Mit der zweiten Formel aus Satz 5.2.9 (a) kann man sich die Binomialkoeffizienten gut merken. Schreibt man diese in ein dreieckiges Schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

so sagt diese Formel gerade, dass man einen Eintrag bekommt, indem man die beiden diagonal links und rechts darüber zusammenzählt. Das ergibt das sogenannte *Pascal'sche Dreieck*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 1 & & 1 & & 3 & & 1 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Aus diesem kann man nun nach Teil (c) des obigen Satzes z.B. direkt ablesen, dass

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

gilt.

## 5.3. Konvergenz von Folgen

Wir wollen uns nun dem zentralen Thema der Analysis zuwenden, der mathematisch exakten Behandlung des unendlich Kleinen und unendlich Großen. Beispielsweise kann es darum gehen, unendlich viele Zahlen aufzuaddieren, wie in der unendlichen Summe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots,$$

der wir im Folgenden einen exakten Sinn geben werden.

Hierbei ist einige Vorsicht geboten, denn beim Umgang mit dem Unendlichen können sehr unintuitive Dinge passieren, so dass anschauliche Argumentationen schnell in die Irre führen können. Unser Ziel wird also zunächst sein, eine exakte mathematische Definition für solche Grenzwertfragen zu geben. Diese Aufgabe wollen wir in diesem für alles weitere zentralen Kapitel angehen.

Wir erinnern noch einmal an den Begriff einer Folge aus Beispiel 3.1.2 (d). Eine Folge war dort eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  in einen Körper  $K$ . In Erweiterung der dortigen Definition lassen wir nun statt einem Körper allerdings eine beliebige nichtleere Menge  $X$  zu und sagen, dass eine Folge eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$  ist. Um klar zu machen, was die Zielmenge dieser Abbildung ist, nennen wir  $a$  genauer eine *Folge in  $X$* . Statt Folge in  $\mathbb{R}$ , bzw.  $\mathbb{C}$  sagt man auch oft *reelle Folge*, bzw. *komplexe Folge*.

Wir schreiben wieder  $a_n$  statt  $a(n)$  und bezeichnen die Folge  $a$  mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)_{n \geq 0}$  oder  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Manchmal werden wir auch etwas verkürzt einfach  $(a_n)$  schreiben.

Zuweilen ist es praktisch mit der Zählung nicht bei Null, sondern einer anderen natürlichen Zahl zu beginnen. Wir schreiben dann beispielsweise  $(a_n)_{n \geq 4}$  oder  $(a_4, a_5, a_6, \dots)$ .

Die meisten Betrachtungen in diesem Abschnitt gelten für die Körper  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  gleichermaßen. In diesem Abschnitt steht deshalb  $\mathbb{K}$  für einen dieser beiden Körper.

### 5.3.1. Der Konvergenzbegriff und wichtige Beispiele

**Definition 5.3.1.** (a) Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $a \in \mathbb{K}$ . Die Folge  $(a_n)$  heißt konvergent gegen  $a$ , falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

In diesem Fall heißt  $a$  der Grenzwert oder Limes von  $(a_n)$  und wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

(b) Ist  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ , die gegen kein  $a \in \mathbb{K}$  konvergiert, so heißt diese divergent.

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

Man kann zeigen, dass eine Folge in  $\mathbb{K}$  höchstens einen Grenzwert haben kann. Wenn eine Folge konvergiert, ist der Limes also eindeutig.

### Beispiel 5.3.2.

- (a) Wir betrachten die Folge  $(a_n) = (1/n)_{n \geq 1} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$ .

*Behauptung:*  $(a_n)$  ist konvergent und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > 1/\varepsilon$ . Also ist  $1/n_0 < \varepsilon$  und wir haben für alle  $n \geq n_0$

$$|a_n - a| = |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \quad \square$$

Eine solche Folge, die gegen Null konvergiert, nennt man auch eine *Nullfolge*.

- (b) Es sei  $(a_n) = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ .

*Behauptung:* Die Folge  $(a_n)$  divergiert.

*Beweis.* Wir nehmen an, es gäbe ein  $a \in \mathbb{K}$  mit  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann gibt es zu  $\varepsilon = 1$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für jedes  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $|a_n - a| < 1$  gilt. Für  $n \geq n_0$  gilt dann aber mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2.$$

Also folgt  $2 < 2$ , ein Widerspruch.  $\square$

- (c) Sei  $a_n = \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 + 2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Behauptung:*  $(a_n)$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

*Beweis.* Es gilt

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n^2 + 2n - 1 - n^2 - 2}{n^2 + 2} \right| = \frac{|2n - 3|}{n^2 + 2} \leq \frac{|2n - 3|}{n^2} \leq \frac{2n + 3}{n^2},$$

wobei wir bei der letzten Abschätzung die Dreiecksungleichung angewendet haben. Nun verwenden wir noch, dass für alle  $n \geq 1$  gilt  $2n + 3 \leq 2n + 3n = 5n$  und erhalten damit

$$|a_n - 1| \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es wieder ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > 5/\varepsilon$ . Also haben wir nach obiger Abschätzung für alle  $n \geq n_0$

$$|a_n - 1| \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n_0} < \varepsilon. \quad \square$$



**Übungsaufgabe 5.3.3.** Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $a \in \mathbb{K}$ . Zeigen Sie:

- (a) Gibt es eine reelle Nullfolge  $(\alpha_n)$  mit

$$|a_n - a| \leq \alpha_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $a$ .

- (b) Die Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann gegen  $a$ , wenn die Folge  $(|a_n - a|)$  gegen Null konvergiert.

**Definition 5.3.4.** (a) Eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{K}$  heißt beschränkt, wenn die Menge  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  beschränkt in  $\mathbb{K}$  ist.

- (b) Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so setzen wir weiter

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n=0}^{\infty} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n=0}^{\infty} a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

**Satz 5.3.5.** Jede konvergente Folge in  $\mathbb{K}$  ist beschränkt.

*Beweis.* Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{K}$  mit Grenzwert  $a$ . Nach der Definition der Konvergenz existiert zu  $\varepsilon = 1$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Wir setzen  $C := \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$ . Dann gilt für alle  $n < n_0$  sofort  $|a_n| \leq C$  und auch für alle  $n \geq n_0$  gilt diese Ungleichung, denn

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq C.$$

Zusammengenommen gilt also  $|a_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und somit die Behauptung.  $\square$

**Warnung 5.3.6.** Die Umkehrung von Satz 5.3.5 ist falsch! Es gibt durchaus beschränkte Folgen, die nicht konvergieren, vgl. Beispiel 5.3.2 (b).

Die Berechnung von Grenzwerten ist allein über die Definition sehr mühsam und wird bei größeren Ausdrücken mehr oder weniger unmöglich. Eine große Hilfe ist der folgende Satz, der es erlaubt, die Berechnung komplizierter Grenzwerte auf die Betrachtung einfacherer Einzelteile zu reduzieren.

**Satz 5.3.7** (Grenzwertsätze). Es seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  und  $(c_n)$  Folgen in  $\mathbb{K}$ . Dann gilt:

- (a) Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ .
- (b) Gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , so folgt
- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) = \alpha a$  für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ .

iv) Ist zusätzlich  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $b \neq 0$ , so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = a/b$ .

Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so gilt außerdem

(c) Ist  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , so folgt  $a \leq b$ .

(d) Ist  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ , so ist auch die Folge  $(c_n)$  konvergent und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$  (Sandwich-Theorem).

*Beweis.* (a) Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert, gibt es dann ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Für alle diese  $n$  gilt dann nach der umgekehrten Dreiecksungleichung, s. Übungsaufgabe 5.1.7

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge  $(|a_n|)$  gegen  $|a|$ .

(b) Die Teile (b)i)-(b)iii) verbleiben als Übungsaufgabe. Wir beweisen hier (b)iv).

Da  $(b_n)$  gegen  $b$  konvergiert, konvergiert nach (a) auch  $(|b_n|)$  gegen  $|b|$ . Da weiter  $b \neq 0$  ist, gilt  $|b| > 0$ . Zu  $\varepsilon := |b|/2 > 0$  gibt es also ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $||b_n| - |b|| \leq |b|/2$  für alle  $n \geq n_1$ . Für all diese  $n$  gilt dann mit der Dreiecksungleichung

$$|b| = ||b|| = ||b| - |b_n|| + |b_n| \leq ||b| - |b_n|| + |b_n| \leq \frac{|b|}{2} + |b_n|.$$

Zieht man  $|b|/2$  auf beiden Seiten ab, haben wir also für alle  $n \geq n_1$

$$|b_n| \geq \frac{|b|}{2}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}.$$

Das liefert wiederum für alle diese  $n$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{bb_n} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} \leq \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} = \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|.$$

Da die Folge  $(b_n)$  gegen  $b$  geht, konvergiert nach Übungsaufgabe 5.3.3 (b) die Folge  $(|b_n - b|)$  gegen Null. Also konvergiert nach Teil (b)ii) dieses Satzes auch die Folge  $(2|b_n - b|/|b|^2)$  gegen Null. Da dieses außerdem eine reelle Folge ist, haben wir nach Teil (a) von Übungsaufgabe 5.3.3, dass  $(1/b_n)$  gegen  $1/b$  konvergiert.

Die Konvergenz von  $(a_n/b_n)$  gegen  $a/b$  folgt nun aus (b)iii).

### 5.3. Konvergenz von Folgen

- (c) Wir nehmen an, es wäre  $a > b$ . Dann ist  $\varepsilon := (a - b)/2 > 0$  und dank der Konvergenz von  $(a_n)$  und  $(b_n)$  gibt es nun ein  $n_1 \in \mathbb{N}$ , so dass  $b_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  und  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  für alle  $n \geq n_1$  gilt. Da

$$b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = a - \frac{a - b}{2} = a - \varepsilon$$

gilt, haben wir also für diese  $n$  auch  $b_n < a_n$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

- (d) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  sowohl  $|a_n - a| < \varepsilon$  als auch  $|b_n - a| < \varepsilon$  gilt. Hieraus und aus der Voraussetzung folgern wir für alle diese  $n$

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

Also ist  $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$  oder, anders ausgedrückt,  $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$ , d.h.  $|c_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$  und damit konvergiert die Folge  $(c_n)$  gegen  $a$ .  $\square$

**Warnung 5.3.8.** Die Aussage in (c) gilt nicht mit „<“ statt „ $\leq$ “! Als Beispiel können die Folgen  $(a_n) = (0)_{n \geq 1}$  und  $(b_n) = (1/n)_{n \geq 1}$  dienen. Dann gilt nämlich  $a_n < b_n$  für alle  $n \geq 1$ , aber die beiden Grenzwerte sind gleich.

Wir wollen nun an zwei Beispielen zeigen, wie mit Hilfe dieses Satzes komplizierte Grenzwerte angegangen werden können.

**Beispiel 5.3.9.** (a) Sei  $p \in \mathbb{N}^*$  fest gewählt und  $a_n = 1/n^p$  für  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  die Ungleichung  $n \leq n^p$  und damit

$$0 \leq a_n = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}.$$

Da sowohl die Folge, die konstant Null ist, als auch die Folge  $(1/n)$  gegen Null konvergiert, ist damit nach Satz 5.3.7 (d) auch die Folge  $(a_n)$  konvergent und ebenfalls eine Nullfolge.

- (b) Wir untersuchen

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dazu kürzen wir den Bruch durch die höchste auftretende Potenz:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 3} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \longrightarrow \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dabei stützen wir uns für die Berechnung des Grenzwertes von  $(1/n^2)$  auf das Beispiel in (a) und zum Zusammenbau des Gesamtausdruckes auf (b)i), (b)ii) und (b)iv) aus Satz 5.3.7.

Dieses Vorgehen (Kürzen durch die höchste auftretende Potenz) ist bei allen Grenzwerten der Form „Polynom in  $n$  geteilt durch Polynom in  $n$ “ Erfolg versprechend.

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

**Bemerkung 5.3.10.** Hier finden Sie weitere wichtige Beispiele von konvergenten Folgen.

- (a) Ist  $(a_n)$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert  $a$  und gilt  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist für jedes  $p \in \mathbb{N}^*$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$ .
- (b) Die Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $q \in \mathbb{R}$  konvergiert genau dann, wenn  $q \in (-1, 1]$  ist und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } q = 1, \\ 0, & \text{falls } -1 < q < 1. \end{cases}$$

Ist  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$ , so gilt ebenfalls  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$  für jedes  $c \in \mathbb{R}_+$ .
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .
- (e) Die Folge

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

ist konvergent. Ihr Grenzwert

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

heißt *Eulersche Zahl*. Diese ist eine irrationale Zahl mit

$$e \approx 2,718281828459.$$

**Warnung 5.3.11.** Die Folge  $(a_n)$  aus Teil (e) in obiger Bemerkung bietet eine gute Gelegenheit vor einem verbreiteten Fehler bei der Bestimmung von Grenzwerten zu warnen, der Unterteilung in „eiligere“ und „trägere“  $n$ . Falsch ist nämlich folgende Überlegung: Die Folge  $(1 + 1/n)$  geht offensichtlich gegen 1, also geht  $(a_n)$  gegen  $1^n$  und das ist immer 1, was zu dem Ergebnis führe  $(a_n)$  würde gegen 1 streben. Das ist, vgl. oben, grob falsch. Der Grund ist folgender: Bei dieser Überlegung werden nicht alle  $n$  in der Formel gleich behandelt. Das  $n$  innerhalb der Klammer wird (quasi als Vorhut) zuerst nach  $\infty$  geschickt, während das  $n$  im Exponenten noch warten muss, also zum „trägen“  $n$  ernannt wird. Das geht nicht. Merke: Alle  $n$  sind gleich!

Mit der gleichen Berechtigung könnte man auch argumentieren, dass  $1 + 1/n$  immer echt größer als 1 ist und da  $q^n$  für alle  $q > 1$  divergiert, divergiert der Ausdruck in der Klammer, also auch die ganze Folge. Nun ist das andere  $n$  zum Warten gezwungen worden, und das Ergebnis ist genauso falsch wie das erste. Diese Erörterung zeigt aber, was hier passiert. Das  $1/n$  in der Klammer bringt den Ausdruck immer näher an 1, während es groß wird, und macht es dem  $n$  im Exponenten damit immer schwerer, die Werte von  $a_n$  zu vergrößern. Die beiden

beeinflussen den Wert also in verschiedene Richtungen und die Frage ist, wer dabei erfolgreicher ist: Schafft es das  $n$  in der Klammer, die Sache nach 1 zu drücken, oder ist das  $n$  im Exponent stärker und die Folge divergiert? Daran, dass das Ergebnis irgendwo zwischen 2 und 3 liegt, sieht man, dass die beiden sich in magischer Weise im Gleichgewicht halten.

**Beispiel 5.3.12.** Es bleiben noch zwei wichtige Beispiele nachzutragen.

(a) Den folgenden Trick muss man mal gesehen haben. Es ist für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Da wegen (a) aus Bemerkung 5.3.10 und Beispiel 5.3.2 (a) auch  $(\sqrt{1/n})$  gegen Null geht, folgt damit aus dem Sandwich-Theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

(b) Wir betrachten für jedes  $q \in \mathbb{C}$  die Folge

$$a_n := \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} = q^0 + \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} + \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=1}^n q^k = 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten so für  $q \neq 1$  die *geometrische Summenformel*

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Mit Bemerkung 5.3.10 (b) gilt also für  $|q| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

**Definition 5.3.13.** Eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  divergiert bestimmt nach  $\infty$  ( $-\infty$ ) und wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ( $-\infty$ ), wenn es für jedes  $C \geq 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $a_n \geq C$  ( $a_n \leq -C$ ) für alle  $n \geq n_0$  gilt.

### 5.3.2. Konvergenzkriterien

Wir wollen uns als nächstes mit dem Monotonie-Verhalten von Folgen auseinandersetzen. Das geht naturgemäß nicht in  $\mathbb{C}$ , so dass wir uns auf  $\mathbb{R}$  einschränken müssen.

**Definition 5.3.14.** Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt

- (a) monoton wachsend, wenn  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
- (b) monoton fallend, wenn  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
- (c) monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Damit können wir folgendes Konvergenzkriterium beweisen.

**Satz 5.3.15** (Monotonie-Kriterium). Ist die reelle Folge  $(a_n)$  nach oben (bzw. unten) beschränkt und monoton wachsend (bzw. fallend), so ist  $(a_n)$  konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad (\text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n).$$

*Beweis.* Es sei  $(a_n)$  nach oben beschränkt und monoton wachsend, sowie  $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ . Wählen wir nun ein  $\varepsilon > 0$ , so ist sicherlich  $a - \varepsilon$  keine obere Schranke von  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Damit muss aber ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existieren, so dass  $a_{n_0} > a - \varepsilon$  ist und somit haben wir unsere Folge umzingelt, denn es gilt nun wegen der Monotonie und der Beschränktheit von  $(a_n)$  für alle  $n \geq n_0$ :

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$$

und hiermit  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, sind wir mit der ungeklammerten Aussage fertig. Die Aussage für monoton fallende Folgen beweist man analog.  $\square$

Wir betrachten ein Beispiel für die Anwendung dieses Satzes.

**Beispiel 5.3.16.** Wir betrachten eine *rekursiv definierte* Folge, die gegeben ist durch

$$a_0 := \sqrt[3]{6} \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Also ist

$$a_1 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}, \quad a_2 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}, \quad a_3 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}}, \quad \dots$$

So abstrus dieses Beispiel auch aussieht, in dieser Weise gegebene Folgen treten sehr häufig auf, so liefert z.B. jedes iterative Näherungsverfahren eine solche Folge. Wie untersuchen wir aber ein solches Monstrum auf Konvergenz? Wir wenden unser Monotoniekriterium an, zeigen also, dass  $(a_n)$  nach oben beschränkt und monoton wachsend ist. Genauer gesagt beweisen wir

1.  $a_n < 2$  und  $a_{n+1} > a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

2.  $(a_n)$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

Das erste ist eine Induktionsübung:

*Induktionsanfang:* Es gilt  $a_0 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2$  und  $a_1 = \sqrt[3]{6 + a_0} > \sqrt[3]{6} = a_0$ , da  $a_0 \geq 0$  ist. Also ist die Aussage für  $n = 0$  richtig.

*Induktionsvoraussetzung:* Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $a_n < 2$  und  $a_{n+1} > a_n$ .

*Induktionsschritt:* Es ist mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} < \sqrt[3]{6 + 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

und

$$a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} > \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}.$$

Wir wenden uns also der Konvergenz in 2. zu.

Nach Satz 5.3.15 wissen wir nun, dass  $(a_n)$  konvergiert, und dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq 2$  ist, denn 2 ist eine obere Schranke der Folge. Außerdem wissen wir, dass  $a_{n+1}^3 = 6 + a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Nach den Rechenregeln für Grenzwertbildung aus Satz 5.3.7 konvergieren bei dieser Gleichung die Folgen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Gehen wir also in dieser Gleichung zum Limes über, so erhalten wir für  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  die Beziehung  $a^3 = 6 + a$ , bzw.  $a^3 - a - 6 = 0$ . Eine Lösung dieser Gleichung ist  $a = 2$ . Dividieren wir diese ab, so erhalten wir  $(a - 2)(a^2 + 2a + 3) = 0$  und  $a^2 + 2a + 3 = (a + 1)^2 + 2 = 0$  hat keine weiteren reellen Lösungen. Also muss  $a = 2$  sein und wir haben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

Noch ein Kommentar zum Verfahren. Obwohl es nicht immer zum Ziel führt, ist dieses doch ein starkes Hilfsmittel zur Behandlung rekursiver Folgen, das man immer wieder mit Gewinn verwenden kann.

**Übungsaufgabe 5.3.17.** (Babylonisches Wurzelziehen) Zeigen Sie, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und jeden beliebigen Startwert  $a_0 > 0$  die Folge  $(a_n)$  mit  $a_{n+1} = \frac{a_n + x/a_n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , konvergiert mit Grenzwert  $\sqrt{x}$ .

**Definition 5.3.18.** Eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{K}$  heißt Cauchy-Folge, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0$$

gilt.

**Satz 5.3.19.** Jede konvergente Folge in  $\mathbb{K}$  ist eine Cauchy-Folge.

*Beweis.* Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{K}$  mit Grenzwert  $a$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < \varepsilon/2$  für alle  $n \geq n_0$ . Also ist für alle  $n, m \geq n_0$  mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

Tatsächlich gilt für reelle und komplexe Folgen auch die Umkehrung, die wir hier nicht beweisen wollen.

**Satz 5.3.20** (Cauchy-Kriterium). *Eine Folge in  $\mathbb{K}$  konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

**Bemerkung 5.3.21.** (a) Bemerkenswert an den beiden behandelten Konvergenzkriterien ist, dass sie beide eine Konvergenzaussage liefern, ohne dass man eine a-priori Vermutung über den Grenzwert braucht.

(b) Während die Aussage, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, allgemeingültig ist, geht in den Beweis der umgekehrten Implikation massiv das Vollständigkeitsaxiom ein. Dass die Implikation ohne dieses Axiom falsch wird, kann man sich klarmachen, wenn man sich die Folge aus Übungsaufgabe 5.3.17 mit  $a = 2$  als Folge in  $\mathbb{Q}$  anschaut.

Da sie in  $\mathbb{R}$  konvergiert, ist sie dort (und dann auch in  $\mathbb{Q}$ ) eine Cauchy-Folge, aber in  $\mathbb{Q}$  ist sie nicht konvergent, denn ein etwaiger Grenzwert in  $\mathbb{Q}$  wäre dann auch ein Grenzwert in  $\mathbb{R}$  und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes also  $\sqrt{2}$ , was nun mal nicht in  $\mathbb{Q}$  liegt.

### 5.3.3. Teilfolgen und Häufungswerte

**Definition 5.3.22.** *Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ . Ein  $a \in \mathbb{K}$  heißt Häufungswert der Folge, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}$  unendlich viele Elemente hat.*

Offensichtlich ist der Grenzwert einer konvergenten Folge ein Häufungswert derselben, denn für jedes  $\varepsilon > 0$  liegen ja dann sogar alle bis auf die ersten paar Folgenglieder näher als  $\varepsilon$  am Grenzwert. Aber es gibt auch divergente Folgen die Häufungswerte haben, z.B. hat  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Häufungswerte 1 und  $-1$  und die komplexe Folge  $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat deren vier, nämlich  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$  und 1. Es gibt sogar reelle (bzw. komplexe) Folgen, die jede reelle (bzw. komplexe) Zahl als Häufungswert haben.

**Definition 5.3.23.** *Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ . Ist  $\{n_1, n_2, n_3, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$  eine unendliche Menge von Indizes mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , so heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ .*

Beispielsweise ist  $(a_0, a_2, a_4, a_6, \dots)$  die Teilfolge der Folgenglieder mit geradem Index. Eine andere Teilfolge ist  $(a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots)$ . Keine Teilfolgen wären  $(a_0, a_0, a_2, a_2, a_4, a_4, \dots)$  oder  $(a_2, a_1, a_4, a_3, a_6, a_5, \dots)$ .

Den engen Zusammenhang zwischen Teilfolgen, Häufungswerten und Konvergenz beschreibt der folgende Satz.

**Satz 5.3.24.** *Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ . Dann gilt*



- (a) Ein  $\alpha \in \mathbb{K}$  ist genau dann ein Häufungswert von  $(a_n)$ , wenn eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  existiert, die gegen  $\alpha$  konvergiert.
- (b) Ist  $(a_n)$  konvergent mit Grenzwert  $a$ , so konvergiert auch jede Teilfolge von  $(a_n)$  gegen  $a$ .
- (c) Ist  $(a_n)$  konvergent, so hat  $(a_n)$  genau einen Häufungswert, nämlich den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Beweis.* Wir behandeln hier nur den Beweis von (a), die Teile (b) und (c) verbleiben als Übungsaufgabe.

„ $\Rightarrow$ “ Es sei  $\alpha \in \mathbb{K}$  ein Häufungswert von  $(a_n)$ . Dann existiert insbesondere für  $\varepsilon = 1$  ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{n_1} - \alpha| < 1$ . Da es auch für  $\varepsilon = 1/2$  unendlich viele Folgenglieder von  $(a_n)$  gibt, die weniger als  $1/2$  von  $\alpha$  entfernt sind, muss es auch ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $n_2 > n_1$  geben, so dass  $|a_{n_2} - \alpha| < 1/2$  gilt. Genauso finden wir ein  $n_3 \in \mathbb{N}$  mit  $n_3 > n_2$ , so dass  $|a_{n_3} - \alpha| < 1/3$  gilt.

Verfahren wir immer weiter so, erhalten wir schließlich eine Folge von Indizes  $n_1, n_2, n_3, \dots$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , so dass

$$|a_{n_k} - \alpha| \leq \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

gilt. Nun ist  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ , und diese konvergiert nach Übungsaufgabe 5.3.3 gegen  $\alpha$ .

„ $\Leftarrow$ “ Sei nun  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ , die gegen ein  $\alpha \in \mathbb{K}$  konvergiert. Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  existiert dann ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$  für alle  $k \geq k_0$  gilt. Insbesondere gilt damit  $|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$  für die unendlich vielen Indizes  $n_{k_0}, n_{k_0+1}, n_{k_0+2}, \dots$ , d.h.  $\alpha$  ist ein Häufungswert von  $(a_n)$ .  $\square$

**Übungsaufgabe 5.3.25.** Erklären Sie jemandem aus ihrem Semester, warum die Umkehrung der Aussage in Teil (c) von Satz 5.3.24 im Allgemeinen falsch ist.

## 5.4. Asymptotik

Ein Thema, bei dem Folgen in der Informatik prominent auftauchen, ist die Laufzeit- bzw. Aufwandsabschätzung von Algorithmen. Dabei ist  $a_n$  die Laufzeit (der Aufwand) des Algorithmus, wenn der verarbeitete Datensatz den Umfang  $n \in \mathbb{N}$  hat.

Bei genauerer Betrachtung kommt es nicht auf den genauen Wert von  $a_n$  an, sondern nur auf das qualitative Verhalten, d.h. wie schnell  $a_n$  mit wachsendem  $n$  groß wird. Ist also z.B. die Laufzeit bei der Bearbeitung von  $n$  Eingabedaten  $a_n = 3n^4 + 2 \mu s$ , so ist die „+2“ reichlich egal, und auch das „3“ interessiert nur

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

am Rande, die wichtige Information ist, dass der Aufwand in der vierten Potenz wächst.

Wir wollen dieses „ungefähr“ rechnen nun „exakt“ formalisieren. Das ist kein Widerspruch, sondern diese Idee führt zum sehr leistungsfähigen „O-Kalkül“, dem Sie in Ihrem Studium noch häufig begegnen werden.

**Definition 5.4.1.** (a) Wir bezeichnen mit

$$F_+ := \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{R} : a_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Es sei  $(b_n) \in F_+$ . Dann definieren wir die Landau-Symbole durch

$$O(b_n) := \left\{ (a_n) \in F_+ : \left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \right\}, \quad (\text{Groß-O von } b_n)$$

$$o(b_n) := \left\{ (a_n) \in F_+ : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \right\}, \quad (\text{Klein-O von } b_n).$$

Andere übliche Schreibweisen für  $(a_n) \in O(b_n)$ , gesprochen „ $(a_n)$  ist ein Groß-/Klein-O von  $b_n$ “, sind  $a_n \in O(b_n)$  und  $a_n = O(b_n)$ , bzw.  $a_n \in o(b_n)$  und  $a_n = o(b_n)$ .

**Bemerkung 5.4.2.** (a) Zur oben angeführten, sehr oft verwendeten, Schreibweise  $a_n = O(b_n)$ , bzw.  $a_n = o(b_n)$  ist eine deutliche Warnung angebracht, denn das „=“-Zeichen wird hier nicht im mathematisch üblichen Sinne gebraucht. Z.B. ist  $n = O(n)$  und  $3n + 2 = O(n)$ , aber  $n \neq 3n + 2$ .

Im Folgenden wird die Kompromiss-Notation  $a_n \in O(b_n)$  verwendet werden.

(b) Es gilt immer  $o(b_n) \subseteq O(b_n)$ , denn jede Nullfolge ist nach Satz 5.3.5 auch beschränkt.

(c) Aus dem gleichen Grund gilt das folgende wichtige Kriterium:

$$\left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \in O(b_n).$$

(d) Anschaulich bedeutet  $a_n \in O(b_n)$ , dass die Folge  $(a_n)$  höchstens so schnell wächst wie ein Vielfaches von  $(b_n)$ , vgl. die folgende Übungsaufgabe.

**Übungsaufgabe 5.4.3.** Zeigen Sie für  $(a_n), (b_n) \in F_+$  die folgenden Aussagen:

(a)  $a_n \in O(b_n)$  genau dann, wenn es ein  $C > 0$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit  $a_n \leq Cb_n$  für alle  $n \geq n_0$ .

(b)  $a_n \in o(b_n)$  genau dann, wenn es für jedes  $C > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit  $a_n \leq Cb_n$  für alle  $n \geq n_0$ .

**Beispiel 5.4.4.** Es seien  $(a_n) = (2n^2 + 3n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n) = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n) = (n^7)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann gilt  $a_n \in O(b_n)$  und  $a_n \in o(c_n)$ , denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = 2$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^7} = \frac{\frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^6} + \frac{1}{n^7}}{1} = 0.$$

Allgemein gilt für jedes Polynom  $p(n) = a_0 + a_1n + \dots + a_kn^k$  vom Grad  $k$ , dass  $p(n) \in O(n^k)$  ist.

**Satz 5.4.5.** Es seien  $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n) \in F_+$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ . Dann gilt

- (a) Sind  $a_n, b_n \in O(c_n)$ , so ist auch  $\alpha a_n + \beta b_n \in O(c_n)$ .
- (b) Gilt  $a_n \in O(b_n)$  und  $c_n \in O(d_n)$ , so ist  $a_n c_n \in O(b_n d_n)$ .
- (c) Aus  $a_n \in O(b_n)$  und  $b_n \in O(c_n)$  folgt  $a_n \in O(c_n)$ . (Transitivität)
- (d)  $a_n \in O(b_n)$  genau dann, wenn  $\frac{1}{b_n} \in O\left(\frac{1}{a_n}\right)$ .

Weiterhin gelten alle diese Aussagen auch mit Klein-O anstelle von Groß-O.

*Beweis.* Wir führen den Beweis für große Os, die kleinen verbleiben als Übung.

- (a) Nach Voraussetzung sind die Folgen  $(a_n/c_n)$  und  $(b_n/c_n)$  beschränkt, also gibt es Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  mit  $a_n/c_n \leq C_1$  und  $b_n/c_n \leq C_2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist auch

$$\frac{\alpha a_n + \beta b_n}{c_n} = \alpha \frac{a_n}{c_n} + \beta \frac{b_n}{c_n} \leq \alpha C_1 + \beta C_2,$$

d.h. die Folge  $((\alpha a_n + \beta b_n)/c_n)$  ist beschränkt, woraus  $\alpha a_n + \beta b_n \in O(c_n)$  folgt.

- (b) Nach Voraussetzung existieren wieder  $C_1, C_2 > 0$  mit  $a_n/b_n \leq C_1$  und  $c_n/d_n \leq C_2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist

$$\frac{a_n c_n}{b_n d_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{c_n}{d_n} \leq C_1 C_2$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit  $a_n c_n \in O(b_n d_n)$ .

## 5. Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

- (c) Gilt  $a_n/b_n \leq C_1$  und  $b_n/c_n \leq C_2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so haben wir für all diese  $n$  auch

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} \leq C_1 C_2,$$

woraus die Behauptung folgt.

- (d) Für die Richtung „ $\Rightarrow$ “ sei  $a_n \in O(b_n)$ . Dann gibt es ein  $C > 0$ , so dass  $a_n/b_n \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Damit ist dann ebenfalls für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1/b_n}{1/a_n} = \frac{a_n}{b_n} \leq C,$$

also haben wir  $1/b_n \in O(1/a_n)$ .

Für die umgekehrte Beweisrichtung wendet man obiges Argument nochmals auf  $1/b_n$  an.  $\square$

**Bemerkung 5.4.6.** Am häufigsten findet man die folgenden Landau-Symbole. Die entsprechende Komplexität eines Algorithmus wird auch mit passenden Namen versehen:

Landau-Symbol	Bezeichnung	Bemerkung
$O(1)$	beschränkt	
$O(\log_a(n))$	logarithmisch	$a > 1$
$O(n)$	linear	
$O(n \log_a(n))$	„n log n“	$a > 1$
$O(n^2)$	quadratisch	
$O(n^3)$	kubisch	
$O(n^k)$	polynomial	$k \in \mathbb{N}^*$
$O(a^n)$	exponentiell	$a > 1$

Die Darstellung in obiger Tabelle ist nach Größe der Menge sortiert. Es gilt also  $O(1) \subseteq O(\log_a(n)) \subseteq O(n) \subseteq O(n \log_a(n)) \subseteq O(n^2) \subseteq O(n^3) \subseteq O(n^k) \subseteq O(n^\ell) \subseteq O(a^n)$  für  $3 \leq k \leq \ell$ .

**Beispiel 5.4.7.** (a) Was ist die kleinste Klasse aus Bemerkung 5.4.6 in der

$$a_n = 5n - 3 \ln(n) + 9n^2 + 3n \ln(n) + n^3 + 0.1 \cdot 2^n$$

liegt? Nach Satz 5.4.5 (a) ist die Summe von mehreren Termen immer in der größten der beteiligten O-Mengen enthalten. Das größte Wachstum hat nach der Aufstellung in dieser Bemerkung hier der Term  $0.1 \cdot 2^n$ , also ist  $a_n \in O(2^n)$ .

- (b) Exponentielle Algorithmen sind viel schlechter als polynomiale. Für die Laufzeit in Mikrosekunden gilt

$a_n \in$	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$
$O(n^2)$	100	2 500	10 000
$O(2^n)$	1 024	36 Jahre	$4 \cdot 10^{16}$ Jahre

# **Teil II.**

## **Mathematik II**



## 5.5. Reihen

In diesem Abschnitt steht der Buchstabe  $\mathbb{K}$  wieder für  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

**Definition 5.5.1.** Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ . Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

die Reihe über  $(a_n)$ . Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  heißt dann  $s_k := \sum_{n=0}^k a_n$  die  $k$ -te Teilsumme oder Partialsumme der Reihe.

Ist die Folge  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergent, so nennen wir die Reihe konvergent mit dem Reihenwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n,$$

ist  $(s_k)$  divergent, so nennen wir auch die Reihe divergent.

**Beispiel 5.5.2.** (a) In Beispiel 5.3.12 (b) haben wir schon eine Reihe betrachtet ohne sie so zu nennen, nämlich die *geometrische Reihe*  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ . Diese ist nach dem dortigen Resultat konvergent, wenn  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$  ist und dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

(b) Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$$

Es gilt für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^k \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^k \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^k \frac{1}{n} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1.$$

(c) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

heißt *harmonische Reihe*. Für die  $2k$ -te Partialsumme  $s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} 1/n$  gilt

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\geq 1/(2k)} + \underbrace{\frac{1}{k+2}}_{\geq 1/(2k)} + \underbrace{\dots}_{\dots} + \underbrace{\frac{1}{2k}}_{\geq 1/(2k)} \geq s_k + k \cdot \frac{1}{2k} = s_k + \frac{1}{2}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Reihe konvergent ist, so ist nach Definition der Reihenkonvergenz die Folge  $(s_k)_{k \geq 1}$  konvergent. Den Grenzwert nennen wir  $s$ . Nach Satz 5.3.24 (b) konvergiert dann auch die Teilfolge  $(s_{2k})_{k \geq 1}$  gegen  $s$  und wir bekommen nach Satz 5.3.7 (c) die Ungleichung

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left( s_k + \frac{1}{2} \right) = s + \frac{1}{2}$$

und damit einen sauberen Widerspruch. Die harmonische Reihe ist also divergent.

Der folgende Satz ergibt sich direkt aus den Grenzwertsätzen für Folgen.

**Satz 5.5.3.** Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  zwei konvergente Reihen in  $\mathbb{K}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Dann ist auch  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Im Allgemeinen ist das konkrete Ausrechnen eines Reihenwertes ein sehr schwieriges Unterfangen. Deshalb sind die wenigen Reihen, bei denen man den Wert exakt angeben kann, wertvolle Schätze. Einen besonders wichtigen solchen wollen wir nun noch ohne Beweis heben:

**Satz 5.5.4.** Es gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ .

Da es für kompliziertere Reihen schon schwer genug ist, überhaupt herauszubekommen, ob sie konvergieren oder nicht (vom Berechnen des Reihenwertes reden wir schon gar nicht), sind Konvergenzkriterien essentiell wichtig. Wir beginnen mit einem notwendigen Kriterium

**Satz 5.5.5.** Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine konvergente Reihe in  $\mathbb{K}$ , so ist  $(a_n)$  eine Nullfolge in  $\mathbb{K}$ .



*Beweis.* Da die Reihe konvergiert, gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{k-1} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n =: s$ . Da außerdem für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$

$$a_k = \sum_{n=0}^k a_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n$$

gilt, ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = s - s = 0$ . □

Hier sind noch zwei Kriterien, die sich direkt aus den entsprechenden Aussagen für Folgen ergeben:

**Satz 5.5.6.** *Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $s_k := \sum_{n=0}^k a_n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

(a) *Ist  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt, so ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergent. (Monotonie-Kriterium)*

(b) *Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist genau dann konvergent, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit*

$$\left| \sum_{n=\ell+1}^k a_n \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{N} \text{ mit } k > \ell \geq n_0. \quad (\text{Cauchy-Kriterium})$$

*Beweis.* (a) Die Konvergenz der Reihe ist nach Definition gleichbedeutend mit der Konvergenz der Folge  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Da alle  $a_n \geq 0$  sind, gilt für diese

$$s_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = \sum_{n=0}^k a_n + a_{k+1} \geq \sum_{n=0}^k a_n = s_k$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Also ist  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und nach Voraussetzung nach oben beschränkt. Die Konvergenz folgt damit aus Satz 5.3.15.

(b) Wir zeigen, dass  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, dann folgt die Konvergenz aus dem Cauchy-Kriterium, Satz 5.3.20. Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es nach Voraussetzung ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $k, \ell \geq n_0$  mit  $k > \ell$  gilt

$$|s_k - s_\ell| = \left| \sum_{n=0}^k a_n - \sum_{n=0}^{\ell} a_n \right| = \left| \sum_{n=\ell+1}^k a_n \right| < \varepsilon. \quad \square$$

Das folgende Konvergenzkriterium behandelt reelle Folgen, deren Summanden wechselnde Vorzeichen haben.

**Satz 5.5.7** (Leibniz-Kriterium). *Es sei  $(a_n)$  eine monoton fallende Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergent.*

**Beispiel 5.5.8.** Das Leibniz-Kriterium liefert z.B. sehr schnell die Konvergenz der *alternierenden harmonischen Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Der Reihenwert  $(\ln(2))$  ist dagegen deutlich schwerer zu bestimmen.

### 5.5.1. Absolute Konvergenz

In diesem Abschnitt geht es vor allem darum, weitere, alltagstauglichere Konvergenzkriterien für Reihen anzugeben. Dazu benötigen wir zunächst einen weiteren Begriff, der eine Verschärfung der Konvergenz bedeutet.

**Definition 5.5.9.** Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  in  $\mathbb{K}$  heißt absolut konvergent, wenn die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  in  $\mathbb{K}$  konvergiert.

**Satz 5.5.10.** Jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  in  $\mathbb{K}$  ist auch konvergent in  $\mathbb{K}$  und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

*Beweis.* Wir verwenden das Cauchy-Kriterium. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gibt es dank der absoluten Konvergenz ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\left| \sum_{n=\ell+1}^k |a_n| \right| = \sum_{n=\ell+1}^k |a_n| < \varepsilon$$

für alle  $k > \ell \geq n_0$  gilt. Mit der Dreiecksungleichung gilt dann sofort auch

$$\left| \sum_{n=\ell+1}^k a_n \right| = |a_{\ell+1} + a_{\ell+2} + \cdots + a_k| \leq |a_{\ell+1}| + |a_{\ell+2}| + \cdots + |a_k| = \sum_{n=\ell+1}^k |a_n| < \varepsilon.$$

Also ist die Reihe nach dem Cauchy-Kriterium konvergent.

Mit demselben Dreiecksungleichungs-Argument erhalten wir nun

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=0}^k a_n \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|. \quad \square$$

**Bemerkung 5.5.11.** (a) Ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt, ist die alternierende harmonische Reihe aus Beispiel 5.5.8. Diese ist nach dem dortigen Ergebnis konvergent, aber nicht absolut konvergent, denn die zugehörige Reihe mit Beträgen ist die harmonische Reihe und diese divergiert, vgl. Beispiel 5.5.2 (c).

(b) Absolut konvergente Reihen haben gegenüber konvergenten einen großen Vorteil: Ist eine Reihe nur konvergent, aber nicht absolut konvergent, so kann man durch bloßes Umsortieren der Summanden den Reihenwert verändern. Dieser Effekt tritt bei absolut konvergenten Reihen nicht auf. Deren Reihenwert ist von der Summationsreihenfolge unabhängig.

Eine häufige Methode zur Konvergenzuntersuchung ist der Vergleich der zu untersuchenden Reihe mit einer bekannten Reihe. Der folgende Satz ist mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums schnell zu beweisen, er ist aber so intuitiv, dass wir auf den Beweis hier auch verzichten können.

**Satz 5.5.12.** *Es seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  reelle Folgen und  $n_0 \in \mathbb{N}$ .*

- (a) *Ist  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \geq n_0$  und konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , so ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent. (Majorantenkriterium)*
- (b) *Ist  $a_n \geq b_n \geq 0$  für alle  $n \geq n_0$  und divergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , so divergiert auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . (Minorantenkriterium)*

**Bemerkung 5.5.13.** (a) Die Vergleichsfolge  $(b_n)$  im obigen Satz heißt im Fall von Teil (a) *konvergente Majorante* und im Teil (b) *divergente Minorante*.

- (b) Mit Hilfe der O-Notation kann man den Satz auch folgendermaßen formulieren:

Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $(b_n) \in F_+$ .

- Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konvergent, so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut, falls  $|a_n| \in O(b_n)$  gilt.
- Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  divergent, so divergiert auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , falls  $(a_n) \in F_+$  gilt und  $b_n \in O(a_n)$  gilt.

**Beispiel 5.5.14.** (a) Da die harmonische Reihe divergiert, divergieren nach dem Minorantenkriterium die Reihen über alle langsamer fallenden Folgen. Insbesondere ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

für alle  $\alpha < 1$  divergent, denn dann gilt  $n^\alpha \leq n$  und damit

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

- (b) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist dagegen absolut konvergent. Dazu beobachten wir zunächst, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

ist. Weiter gilt für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  die Abschätzung  $(n+1)^2 \geq n(n+1)$  und damit

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n.$$

Die Reihe über  $b_n$  ist nach Beispiel 5.5.2 (b) konvergent, kann uns also als konvergente Majorante dienen und wir erhalten die behauptete Konvergenz aus dem Majorantenkriterium.

**Bemerkung 5.5.15.** Tatsächlich ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  genau dann konvergent, wenn  $\alpha > 1$  ist. Die harmonische Reihe ist also genau der Grenzfall.

Wir kommen nun zu zwei weiteren häufig verwendeten Konvergenzkriterien.

**Satz 5.5.16.** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe in  $\mathbb{K}$ .

(a) (Wurzelkriterium) Existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , so ist die Reihe

- absolut konvergent, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  ist und
- divergent, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  ist.

(b) (Quotientenkriterium) Ist  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ , so ist die Reihe

- absolut konvergent, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$  ist und
- divergent, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$  ist.

*Beweis.* Wir beweisen nur exemplarisch das Wurzelkriterium. Es sei also  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ , für die  $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  existiert.

Ist  $\alpha < 1$ , so wählen wir ein  $q \in (\alpha, 1)$ . Dank der Konvergenz von  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  gegen  $\alpha$ , muss es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  geben, so dass  $|\sqrt[n]{|a_n|} - \alpha|$  für alle  $n \geq n_0$  kleiner ist als der Abstand von  $\alpha$  zu  $q$ . Insbesondere ist also

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Daraus folgt  $|a_n| \leq q^n$  für alle  $n \geq n_0$ . Da  $q \in (0, 1)$  ist, ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  nach Beispiel 5.5.2 (a) konvergent. Also liefert uns das Majorantenkriterium, Satz 5.5.12 (a) auch die absolute Konvergenz unserer Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

Es sei nun  $\alpha > 1$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Damit ist auch  $|a_n| > 1$  für alle  $n \geq n_0$  und  $(a_n)$  ist definitiv keine Nullfolge. Nach Satz 5.5.5 kann dann die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  nicht konvergent sein.  $\square$

**Bemerkung 5.5.17.** Liefert der Grenzwert in einem der beiden Kriterien genau Eins, so kann man daraus keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz der Reihe ableiten, vgl. das folgende Beispiel.

**Beispiel 5.5.18.** (a) Wie wir gesehen haben, ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  je nach der Größe von  $\alpha$  konvergent oder divergent, vgl. Beispiel 5.5.14 und Bemerkung 5.5.15. Für jedes  $\alpha \in \mathbb{Q}$  gilt allerdings

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^\alpha} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^{-\alpha} = 1^{-\alpha} = 1.$$

Dies zeigt, dass im Falle, dass das Wurzelkriterium als Grenzwert 1 liefert, keine Aussage über die Konvergenz der Reihe möglich ist.

Gleiches gilt für das Quotientenkriterium.

(b) Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Im Fall  $z = 0$  ist die Konvergenz der Reihe offensichtlich, da sie dann nur einen Summanden hat. Sei also nun  $z \neq 0$ . Dann gilt mit  $a_n := z^n/n!$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{z^n}{n!} \right|} = \frac{|z|^{n+1} n!}{|z|^n (n+1)!} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Also ist für jedes  $z \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe für jedes  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergent.

Man nennt diese überaus wichtige Reihe die *Exponentialreihe*. Diese definiert uns eine Funktion

$$E : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \end{cases}$$

die *Exponentialfunktion*. Wie es zu diesem Namen kommt, wird in Kürze klar werden.

### 5.5.2. Das Cauchy-Produkt

In Satz 5.5.3 haben wir gesehen, dass die Summe konvergenter Reihen wieder konvergent ist. Wir wollen uns nun dem Produkt zuwenden. Naiv könnte man folgendermaßen rechnen:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 b_0 \\
&\quad + a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
&\quad + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
&\quad + a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\
&\quad + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.
\end{aligned}$$

Diese Rechnung ist allerdings im Allgemeinen falsch! Wir haben hier nämlich die Summanden in einer willkürlichen Reihenfolge aufsummiert und nach Bemerkung 5.5.11 (b) ist der Reihenwert nicht immer von der Summationsreihenfolge unabhängig. Bei absolut konvergenten Reihen allerdings schon und tatsächlich gilt der folgende Satz.

**Satz 5.5.19.** *Es seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  zwei absolut konvergente Reihen in  $\mathbb{K}$ . Dann konvergiert auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  absolut und es gilt für die Reihenwerte*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  heißt *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ .

Wir wollen diesen Satz hier nicht beweisen sondern einmal anwenden, indem wir die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion* zeigen.

**Satz 5.5.20.** *Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt  $E(z+w) = E(z)E(w)$ .*

*Beweis.* Es gilt mit Hilfe des Cauchy-Produkts, da alle beteiligten Reihen absolut konvergent sind,

$$\begin{aligned}
E(z)E(w) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}.
\end{aligned}$$

Nun gilt nach der Binomialformel 5.2.9 (c)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = (z+w)^n,$$

also ist zusammengefasst

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = E(z+w).$$

□

Das ist aber nur der erste Streich. In Satz 5.5.4 haben wir gesehen, dass

$$E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

gilt. Mit obigem Resultat ist damit für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$

$$E(k) = E(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ Mal}}) = E(1)^k = e^k.$$

Weiter sieht man sofort, dass

$$E(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

gilt. Also muss für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$  gelten

$$1 = E(0) = E(k + (-k)) = E(k)E(-k).$$

Das liefert uns, dass  $E(k) \neq 0$  ist und  $E(-k) = E(k)^{-1} = (e^k)^{-1} = e^{-k}$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Zusammen haben wir nun schon  $E(k) = e^k$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ .

Doch hier hören wir nicht auf. Es sei nun  $q = k/\ell \in \mathbb{Q}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\ell \in \mathbb{N}^*$ . Zunächst beobachten wir, dass mit dem gleichen Trick wie oben

$$e = E(1) = E\left(\ell \cdot \frac{1}{\ell}\right) = E\left(\underbrace{\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell} + \cdots + \frac{1}{\ell}}_{\ell \text{ Mal}}\right) = E\left(\frac{1}{\ell}\right)^\ell$$

ist und damit

$$e^{1/\ell} = E\left(\frac{1}{\ell}\right).$$

Das liefert schließlich

$$E(q) = E\left(k \cdot \frac{1}{\ell}\right) = E\left(\frac{1}{\ell}\right)^k = (e^{1/\ell})^k = e^{k/\ell} = e^q \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Q}.$$

Es liegt also nahe  $e^x$  für alle reellen Zahlen  $x$  ebenfalls durch die Exponentialreihe zu definieren. Wir sind sogar gleich noch mutiger:

**Definition 5.5.21.** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  ist

$$e^z := E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

## 5.6. Konvergenz in normierten Räumen

Folgen und Reihen kann man nicht nur in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , sondern auch in  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ , oder noch anderen Vektorräumen betrachten. Allerdings muss man, um den Begriff der Konvergenz einführen zu können, in irgendeiner Form Abstände messen können. Das führt uns wieder auf den Begriff des normierten Raums aus Abschnitt 3.4. Wie schon dort betrachten wir hier nur den Fall reeller Vektorräume. Im gesamten Abschnitt sei also  $V$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Norm  $\|\cdot\|_V$ .

Die Konvergenzdefinition ist genau identisch, wir ersetzen nur Beträge durch Normen:

**Definition 5.6.1.** (a) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  heißt konvergent gegen ein  $a \in V$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$\|a_n - a\|_V < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt.

Die Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

(b) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  heißt Cauchy-Folge, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$\|a_n - a_m\|_V < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

(c) Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  in  $V$  heißt konvergent mit Reihenwert  $s \in V$ , wenn die Folge der Partialsummen  $s_k := \sum_{n=0}^k a_n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , in  $V$  gegen  $s$  konvergiert. Konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_V$  in  $\mathbb{R}$ , so heißt die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

Ist die Reihe nicht konvergent, so nennt man sie divergent.

**Definition 5.6.2.** Eine Menge  $M \subseteq V$  heißt beschränkt, falls es ein  $C \geq 0$  gibt, so dass  $\|x\|_V \leq C$  für alle  $x \in M$  gilt.

**Beispiel 5.6.3.** (a) In  $V = \mathbb{R}^3$  mit der 1-Norm betrachten wir die Folge

$$a_n := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{n} \\ \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (1, 0, 1)^T$ . Das sieht man so: Für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt

$$\|a_n - (1, 0, 1)^T\|_1 = |1 - 1| + \left| \frac{1}{n} - 0 \right| + \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} + \left| \frac{n-1-n}{n} \right| = \frac{2}{n}.$$



## 5.6. Konvergenz in normierten Räumen

Ist nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > 2/\varepsilon$  und für alle  $n \geq n_0$  gilt dann

$$\|a_n - (1, 0, 1)^T\|_1 = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon.$$

(b) Die Folge  $a_n = (n, 1/n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , in  $\mathbb{R}^2$  mit der 2-Norm ist wegen

$$\|a_n\|_2 = \sqrt{n^2 + 1/n^2} \geq \sqrt{n^2} = n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

unbeschränkt. Da auch im normierten Raum jede konvergente Folge beschränkt ist, vgl. Übungsaufgabe 5.6.4 ist  $(a_n)$  damit divergent.

**Übungsaufgabe 5.6.4.** Übertragen Sie die Aussagen in Übungsaufgabe 5.3.3, Satz 5.3.5, Satz 5.3.7 (a) bis (b)ii), Satz 5.3.19, Satz 5.5.3 und Satz 5.5.5 in den Kontext von metrischen Räumen und beweisen Sie sie.

**Satz 5.6.5.** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,d})^T)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^d$  mit der 2-Norm  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ . Dann ist  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}^d$  genau dann konvergent, wenn für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$  die Koordinatenfolge  $(a_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  konvergent ist. In diesem Fall ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,2} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,d} \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Es sei  $(a_n)$  konvergent in  $\mathbb{R}^d$  mit Grenzwert  $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)^T \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n,j} - a_j| = \sqrt{(a_{n,j} - a_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^d (a_{n,k} - a_k)^2} = \|a_n - a\|_2.$$

Letzteres ist dank der Konvergenz von  $(a_n)$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R}$ . Also konvergiert  $(a_{n,j})$  in  $\mathbb{R}$  gegen  $a_j$ .

„ $\Leftarrow$ “ Es seien nun für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$  die Koordinatenfolgen  $(a_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent in  $\mathbb{R}$  mit jeweiligem Grenzwert  $a_j \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für jedes solche  $j$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n,j} - a_j| = 0$  nach Übungsaufgabe 5.3.3 (b). Nach den Grenzwertsätzen ist dann  $\sum_{j=1}^d (a_{n,j} - a_j)^2$  ebenfalls konvergent mit Grenzwert  $\sum_{j=1}^d 0^2 = 0$ . Schließlich folgern wir aus Bemerkung 5.3.10 (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{j=1}^d (a_{n,j} - a_j)^2} = 0.$$

Nach Übungsaufgabe 5.6.4 folgt daraus die Konvergenz von  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}^d$  gegen  $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)^T$ .  $\square$

**Beispiel 5.6.6.** Die Folge in  $\mathbb{R}^3$  mit

$$a_n = \begin{pmatrix} \frac{2n^2-n}{4n^2-3n+5} \\ (1 + 1/n)^n \\ \sqrt[n]{n} \end{pmatrix}$$

ist mit Hilfe dieses Satzes sehr schnell auf Konvergenz untersucht. Wir müssen uns nur die Koordinatenfolgen anschauen. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{4n^2 - 3n + 5} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

also ist  $(a_n)$  konvergent in  $\mathbb{R}^3$  (mit der 2-Norm) und der Grenzwert ist  $(1/2, e, 1)^T$ .

**Bemerkung 5.6.7.** Ein identischer Satz gilt für jede mögliche Norm auf  $\mathbb{R}^d$ . Wir werden später sehen, dass in endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen die Wahl der Norm für die Frage der Konvergenz keine Rolle spielt: Wenn eine Folge bezüglich einer Norm konvergiert, dann auch bezüglich jeder anderen und die Grenzwerte sind gleich.

In  $\mathbb{R}$  haben wir offene und abgeschlossene Intervalle betrachtet. Mengen, zu denen ihr Rand gar nicht oder komplett dazugehört, spielen auch in normierten Räumen eine wichtige Rolle. Wir wollen nun die entsprechenden Begriffe definieren.

**Definition 5.6.8.** (a) Es seien  $x_0 \in V$  und  $r \in (0, \infty)$ . Dann heißt die Menge

$$B_r(x_0) := \{x \in V : \|x - x_0\|_V < r\}$$

(offene) Kugel um  $x_0$  mit Radius  $r$ .

(b) Eine Menge  $M \subseteq V$  heißt offen, falls es für jeden Punkt  $x_0 \in M$  einen Radius  $r > 0$  gibt, so dass  $B_r(x_0) \subseteq M$  gilt.

(c) Eine Menge  $M \subseteq V$  heißt abgeschlossen, wenn die Menge  $M^c = V \setminus M$  offen ist.

(d) Es sei  $M \subseteq V$ . Ein Punkt  $x_0 \in M$  heißt innerer Punkt von  $M$ , falls es ein  $r > 0$  gibt, so dass  $B_r(x_0) \subseteq M$  ist. Man nennt

$$M^\circ := \{x \in M : x \text{ innerer Punkt von } M\}$$

das Innere von  $M$ .

**Bemerkung 5.6.9.** (a) Ist eine Menge abgeschlossen, so bedeutet das anschaulich, dass ihr Rand zur Menge dazugehört. Umgekehrt ist eine offene Menge eine, die keinen ihrer Randpunkte enthält. Die Begriffe „Rand“ und „Randpunkt“ definieren wir hier nicht. Trotzdem sollte dies ein richtiges intuitives Gefühl für die Begriffe offen und abgeschlossen geben.

## 5.6. Konvergenz in normierten Räumen

- (b) Achtung: Mengen sind keine Türen! Die meisten Mengen sind weder offen noch abgeschlossen, betrachten Sie z.B. ein halboffenes Intervall in  $\mathbb{R}$ . Hüten Sie sich also vor dem Fehlschluss: Ich habe festgestellt, dass meine Menge nicht offen ist, also ist sie abgeschlossen. . .

**Beispiel 5.6.10.** (a) Für jeden Mittelpunkt  $x_0 \in V$  und jeden Radius  $r > 0$  ist die eben definierte Kugel  $B_r(x_0)$  eine offene Menge.

Um das einzusehen wählen wir ein  $x \in B_r(x_0)$ . Wir müssen nun zeigen, dass es einen Radius  $\varrho > 0$  gibt, so dass  $B_\varrho(x) \subseteq B_r(x_0)$  gilt. Da  $x \in B_r(x_0)$  ist, gilt  $\|x - x_0\|_V < r$ . Die Zahl

$$\varrho := \frac{r - \|x - x_0\|_V}{2}$$

ist also strikt größer als Null.

Sei nun  $y \in B_\varrho(x)$ . Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|y - x_0\|_V = \|y - x + x - x_0\|_V \leq \|y - x\|_V + \|x - x_0\|_V.$$

Der erste Summand ist kleiner als  $\varrho = (r - \|x - x_0\|_V)/2$ , denn  $y$  ist ja in der Kugel um  $x$  mit Radius  $\varrho$ . Also erhalten wir

$$\|y - x_0\|_V < \frac{r}{2} - \frac{\|x - x_0\|_V}{2} + \|x - x_0\|_V = \frac{r}{2} + \frac{\|x - x_0\|_V}{2}.$$

Weiter war  $\|x - x_0\|_V < r$ , also finden wir

$$\|y - x_0\|_V < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Damit haben wir  $B_\varrho(x) \subseteq B_r(x_0)$  gezeigt und sind fertig.

- (b) Die Kugel mit Rand  $\{x \in V : \|x - x_0\|_V \leq r\}$  ist dagegen für jedes  $x_0 \in V$  und alle  $r > 0$  eine abgeschlossene Menge. Das sieht man am einfachsten mit Hilfe des folgenden Satzes ein.

**Satz 5.6.11.** *Eine Teilmenge  $M$  von  $V$  ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge in  $M$ , die in  $V$  konvergiert, der Grenzwert ein Element aus  $M$  ist.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Es sei  $M \subseteq V$  abgeschlossen und  $(a_n)$  eine Folge in  $M$ , die in  $V$  konvergiert. Wir nehmen nun an, es wäre  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \notin M$ , d.h.  $a \in M^c$ .

Da  $M$  abgeschlossen ist, ist die Menge  $M^c$  nach Definition offen. Es gibt also ein  $r > 0$  mit  $B_r(a) \subseteq M^c$ . Weiter ist  $a$  der Limes der Folge  $(a_n)$ . Also gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|a_n - a\|_V < r \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt. Das bedeutet  $a_n \in B_r(a) \subseteq M^c$  für alle  $n \geq n_0$  und wir haben einen Widerspruch zu der Voraussetzung, dass  $a_n \in M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

„ $\Leftarrow$ “ Wir nehmen an,  $M$  wäre nicht abgeschlossen, d.h.  $M^c$  ist nicht offen. Dann gibt es ein  $x_0 \in M^c$ , so dass die Kugeln  $B_r(x_0)$  für kein  $r > 0$  ganz in  $M^c$  liegen. Anders gesagt, für jedes  $r > 0$  gilt  $B_r(x_0) \cap M \neq \emptyset$ . Betrachten wir speziell  $r = 1/n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$ , so erhalten wir für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  ein  $a_n \in B_{1/n}(x_0) \cap M$ .

Die so konstruierte Folge  $(a_n)$  ist nun eine Folge in  $M$ , für die

$$\|a_n - x_0\|_V \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

gilt. Damit ist die Folge  $(a_n)$  konvergent in  $V$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ . Nach Voraussetzung muss also  $x_0 \in M$  liegen, was ein Widerspruch zu  $x_0 \in M^c$  ist.  $\square$

Damit können wir nun die Behauptung aus Beispiel 5.6.10 (b) fertig begründen. Es sei also  $(a_n)$  eine Folge in  $M := \{x \in V : \|x - x_0\|_V \leq r\}$ , die in  $V$  konvergiert und wir setzen  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Da für jede konvergente Folge  $(b_n)$  in  $V$

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right\|_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\|_V$$

gilt (vgl. Satz 5.3.7 (a) und Übungsaufgabe 5.6.4), haben wir

$$\|a - x_0\|_V = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - x_0 \right\|_V = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - x_0) \right\|_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - x_0\|_V.$$

Weiter liegt jedes  $a_n$  in  $M$ , also folgt nun aus der Monotonie des Grenzwertes (Satz 5.3.7 (c))

$$\|a - x_0\|_V \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r = r.$$

Damit ist auch  $a \in M$  und  $M$  somit nach Satz 5.6.11 abgeschlossen.

**Übungsaufgabe 5.6.12.** (a) Zeigen Sie, dass  $M \subseteq V$  genau dann offen ist, wenn  $M = M^\circ$  ist.

(b) Diskutieren Sie, ob  $\emptyset$  und  $V$  offene und/oder abgeschlossene Mengen in  $V$  sind.

**Definition 5.6.13.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so heißt eine Teilmenge  $M \subseteq V$  kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

**Warnung 5.6.14.** Auch in unendlichdimensionalen Räumen gibt es den Begriff einer kompakten Teilmenge (und eigentlich wird er sogar erst dort richtig wichtig). Dann sieht allerdings die Definition völlig anders aus, und es gibt dann Mengen, die abgeschlossen und beschränkt aber nicht kompakt sind!

Im Moment kann Ihnen das egal sein. Diese Warnung soll nur vorbeugen, dass Sie gewarnt sind, wenn Sie in Ihrem Leben einmal über unendlichdimensionale normierte Räume stolpern und den Kompaktheitsbegriff brauchen.

## 5.6. Konvergenz in normierten Räumen

Die Definitionen von Teilfolge und Häufungswert können wir wieder aus der eindimensionalen Situation abschreiben, indem wir Beträge durch Normen ersetzen.

**Definition 5.6.15.** Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $(V, \|\cdot\|_V)$ .

(a) Ein  $a \in V$  heißt Häufungswert von  $(a_n)$ , falls für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : \|a_n - a\|_V < \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_\varepsilon(a)\}$$

unendlich viele Elemente hat.

(b) Ist  $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$  eine unendliche Teilmenge von  $\mathbb{N}$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , so heißt  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ .

**Übungsaufgabe 5.6.16.** Übertragen Sie Satz 5.3.24 mitsamt Beweis in die Situation von normierten Räumen.

**Satz 5.6.17** (Satz von Bolzano-Weierstraß). Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein endlichdimensionaler normierter Raum und  $M \subseteq V$  kompakt. Dann besitzt jede Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $M$ .

**Bemerkung 5.6.18.** Häufig findet man die Aussage dieses Satzes auch in der folgenden Formulierung: „Ist  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein endlichdimensionaler normierter Raum, so besitzt jede beschränkte Folge in  $V$  mindestens einen Häufungswert.“

Anschaulich bedeutet das: In einer beschränkten Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist nicht genug Platz, als dass man mit einer Folge so wild herumspringen kann, dass sie sich nirgends häuft. Anders gesagt: Wenn man unendlich viele Punkte in einer beschränkten Menge unterbringen will, so müssen die irgendwo klumpen.

**Definition 5.6.19.** Ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_V)$  heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in  $V$  konvergiert. Ein vollständiger normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum wird auch Banachraum genannt.

Wird die Norm  $\|\cdot\|_V$  außerdem durch ein Skalarprodukt auf  $V$  induziert, so nennt man  $V$  Hilbertraum.

**Beispiel 5.6.20.** (a) Der Standardvektorraum  $\mathbb{R}^d$  ist für jedes  $d \in \mathbb{N}^*$  mit jeder darauf definierten Norm ein Banachraum. Wählt man speziell die durch das Standardskalarprodukt induzierte 2-Norm, so ist  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$  sogar ein Hilbertraum.

(b) Die Menge

$$\ell^2 := \{(a_n) : (a_n) \text{ reelle Folge, so dass } \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergent}\}$$

ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Weiter ist die Abbildung  $(\cdot|\cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die für zwei Folgen  $(a_n), (b_n) \in \ell^2$  durch

$$((a_n)|(b_n)) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

definiert ist, ein Skalarprodukt. Mit der davon induzierten Norm

$$\|(a_n)\|_2 = \sqrt{((a_n)|(a_n))} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

wird  $\ell^2$  zu einem Hilbertraum.

(c) Die Menge

$$\ell^1 := \{(a_n) : (a_n) \text{ reelle Folge, so dass } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent}\}$$

ist mit der Norm  $\|(a_n)\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  ein Banachraum, der kein Hilbertraum ist.

**Übungsaufgabe 5.6.21.** Die folgenden Resultate aus den Abschnitten 5.3 und 5.5 gelten in beliebigen Banachräumen: Satz 5.3.19, Satz 5.5.10, Satz 5.5.12 (a) (Majorantenkriterium) und Satz 5.5.16 (Wurzel- und Quotientenkriterium). Übertragen Sie die Aussagen und Beweise.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch einen wichtigen Satz beweisen, den Banach'schen Fixpunktsatz. Dieser gibt unter anderem ein einfaches Kriterium an eine Iterationsvorschrift an, das deren Konvergenz garantiert.

**Satz 5.6.22** (Banach'scher Fixpunktsatz). *Es sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein Banachraum,  $M \subseteq V$  abgeschlossen und  $f : M \rightarrow M$  eine Funktion. Weiter existiere ein  $q \in (0, 1)$ , so dass*

$$\|f(x) - f(y)\|_V \leq q \|x - y\|_V \quad \text{für alle } x, y \in M$$

*gilt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Es gibt genau ein  $v \in M$  mit  $f(v) = v$ . (D.h.  $f$  hat genau einen Fixpunkt in  $M$ .)*
- (b) *Für jedes  $x_0 \in M$  konvergiert die Folge  $(x_n)$  mit  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegen  $v$  und es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$ :*

$$\begin{aligned} \|x_n - v\|_V &\leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|_V && (A\text{-priori-Abschätzung}), \\ \|x_n - v\|_V &\leq \frac{q}{1-q} \|x_n - x_{n-1}\|_V && (A\text{-posteriori-Abschätzung}). \end{aligned}$$

## 5.6. Konvergenz in normierten Räumen

*Beweis.* Wir wählen ein beliebiges  $x_0 \in M$  und betrachten die in der Formulierung des Satzes schon erwähnte Folge mit  $x_{n+1} = f(x_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen zunächst

$$\|x_{n+1} - x_n\|_V \leq q^n \|x_1 - x_0\|_V \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

per Induktion. Für  $n = 0$  lautet diese Ungleichung  $\|x_1 - x_0\|_V \leq \|x_1 - x_0\|_V$ , ist also wahr. Wir wenden uns dem Induktionsschritt von  $n$  nach  $n+1$  zu. Tatsächlich gilt mit der Voraussetzung an  $f$

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\|_V = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\|_V \leq q \|x_{n+1} - x_n\|_V$$

und dann der Induktionsvoraussetzung

$$\leq q q^n \|x_1 - x_0\|_V = q^{n+1} \|x_1 - x_0\|_V.$$

Nun wollen wir als nächstes zeigen, dass  $(x_n)$  eine Cauchyfolge in  $V$  ist. Seien dazu zwei Indizes  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gegeben. Dann gilt mit dem Ergebnis von oben

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|_V &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n\|_V \\ &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \right\|_V \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\|_V \leq \sum_{k=n}^{m-1} q^k \|x_1 - x_0\|_V \\ &= q^n \sum_{k=n}^{m-1} q^{k-n} \|x_1 - x_0\|_V = q^n \sum_{k=0}^{m-1-n} q^k \|x_1 - x_0\|_V \\ &\leq q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k \|x_1 - x_0\|_V = \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|_V. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Wir beobachten nun zunächst, dass im Fall  $x_1 = x_0$  aus dieser Ungleichung  $x_m = x_n$  für alle  $m > n \geq 0$  folgt. Wir haben dann also eine konstante Folge  $(x_n)$ , die offensichtlich konvergent gegen  $x_0$  ist. Es sei also in allen weiteren Überlegungen  $x_1 \neq x_0$ .

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Da  $q \in (0, 1)$  gilt, konvergiert die Folge  $(q^n)$  gegen Null, also gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $q^n < \varepsilon(1-q)/\|x_1 - x_0\|_V$  für alle  $n \geq n_0$ . Für alle  $m > n \geq n_0$  gilt dann

$$\|x_m - x_n\|_V \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|_V < \frac{\varepsilon(1-q)}{(1-q)\|x_1 - x_0\|_V} \|x_1 - x_0\|_V = \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $(x_n)$  eine Cauchyfolge in  $V$  ist. Da  $V$  nach Voraussetzung vollständig ist, ist dies also eine konvergente Folge in  $V$ , deren Grenzwert wir  $v := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  nennen.

Von diesem Grenzwert wollen wir nun natürlich zeigen, dass er ein Fixpunkt von  $f$  ist. Dazu beobachten wir, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned}\|f(v) - v\|_V &= \|f(v) - x_n + x_n - v\|_V \leq \|f(v) - x_n\|_V + \|x_n - v\|_V \\ &= \|f(v) - f(x_{n-1})\|_V + \|x_n - v\|_V \leq q\|v - x_{n-1}\|_V + \|x_n - v\|_V.\end{aligned}$$

Geht man nun in dieser Ungleichung zum Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  über, so bekommt man

$$\|f(v) - v\|_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(v) - v\|_V \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (q\|v - x_{n-1}\|_V + \|x_n - v\|_V) = q \cdot 0 + 0 = 0.$$

Die Definitheit der Norm liefert also  $f(v) = v$ .

Es bleiben noch die Eindeutigkeit des Fixpunktes und die beiden Fehlerabschätzungen zu zeigen. Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei  $w$  ein weiteres Element von  $M$  mit  $f(w) = w$ . Dann gilt nach der Voraussetzung an  $f$

$$\|v - w\|_V = \|f(v) - f(w)\|_V \leq q\|v - w\|_V.$$

Nehmen wir nun an, es wäre  $v \neq w$ , so folgt  $\|v - w\|_V > 0$  und wir können durch diesen Ausdruck teilen. Das liefert den Widerspruch  $1 \leq q$ . Der Fixpunkt ist also eindeutig.

Die A-Priori-Abschätzung haben wir schon weiter oben fast gezeigt. Geht man nämlich in der Ungleichung (5.2) zum Grenzwert für  $m \rightarrow \infty$  über, so erhält man

$$\|v - x_n\|_V = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\|_V \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|_V \right) = \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|_V.$$

Zum Beweis der A-posteriori-Abschätzung überlegen wir uns, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt

$$\|v - x_n\|_V = \|f(v) - f(x_{n-1})\|_V \leq q\|v - x_{n-1}\|_V \leq q(\|v - x_n\|_V + \|x_n - x_{n-1}\|_V).$$

Daraus folgt

$$(1 - q)\|v - x_n\|_V \leq q\|x_n - x_{n-1}\|_V,$$

was nach Division durch  $1 - q > 0$  die behauptete Abschätzung impliziert.  $\square$

## 5.7. Stetigkeit reeller Funktionen

Nach der Behandlung von Folgen und Reihen wollen wir uns nun dem Hauptuntersuchungsgegenstand der Analysis zuwenden: Funktionen von (Teilmengen von)  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , bzw. später auch von (Teilmengen von)  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ . An dieser Stelle lohnt es sich also, die elementaren Definitionen zum Thema Funktionen aus Abschnitt 1.4 wieder präsent zu haben.



### 5.7.1. Der Grenzwertbegriff für Funktionen

**Definition 5.7.1.** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  eine Menge,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- (a) Wir nennen  $x_0$  einen Häufungspunkt von  $D$ , falls es eine Folge  $(a_n)$  in  $D$  mit  $a_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt, die gegen  $x_0$  konvergiert.
- (b) Ist  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ , so sagen wir, dass  $f$  für  $x$  gegen  $x_0$  den Grenzwert  $y$  hat, wenn für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$ , die gegen  $x_0$  konvergiert und für die  $a_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, die Folge  $(f(a_n))$  gegen  $y$  konvergiert. Wir schreiben dafür

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y.$$

- (c) Ist  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D_+ := \{x \in D : x > x_0\}$ , so hat  $f$  für  $x$  gegen  $x_0$  den rechtsseitigen Grenzwert  $y$ , wenn für jede Folge  $(a_n)$  in  $D_+$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, die Folge  $(f(a_n))$  gegen  $y$  konvergiert. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y.$$

- (d) Ist  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D_- := \{x \in D : x < x_0\}$ , so hat  $f$  für  $x$  gegen  $x_0$  den linksseitigen Grenzwert  $y$ , wenn für jede Folge  $(a_n)$  in  $D_-$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, die Folge  $(f(a_n))$  gegen  $y$  konvergiert. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = y.$$

**Bemerkung 5.7.2.** (a) Der Begriff des Häufungspunkts dient hier nur der technisch nötigen Voraussetzung, dass es in (b), (c) und (d) überhaupt eine Folge wie dort gefordert gibt. Dass  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  ist, bedeutet anschaulich, dass man  $x_0$  aus  $D \setminus \{x_0\}$  heraus annähern kann.

Beispielsweise hat  $(0, 1]$  alle Punkte in  $[0, 1]$  als Häufungspunkte und die Menge  $\{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$  hat nur einen Häufungspunkt, nämlich Null.

- (b) Eine besondere Betonung sollte beim Lesen der Grenzwertdefinitionen auf den Worten „jede Folge“ liegen.

**Beispiel 5.7.3.** Wir setzen  $D = (0, 1]$  und betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Wie wir schon oben beobachtet haben, ist jedes  $x \in [0, 1]$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Wir können also Grenzwertbetrachtungen in all diesen Punkten anstellen. An den interessanten Stellen 0,  $1/2$  und 1 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 & \text{und} & \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{ nicht definiert,} \\ \lim_{x \rightarrow 1/2-} f(x) &= \frac{1}{4}, & \lim_{x \rightarrow 1/2+} f(x) &= 1 & \text{und} & \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) \text{ existiert nicht,} \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 & \text{und} & \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \text{ nicht definiert.} \end{aligned}$$

**Satz 5.7.4.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Existieren  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  und sind die beiden Werte gleich, so existiert auch  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x).$$

**Bemerkung 5.7.5.** (a) In der Situation von Satz 5.7.4 gilt im Allgemeinen nicht  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , wie man sich an dem Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

klarmachen kann.

- (b) Die folgenden Sätze und Definitionen sind jeweils nur für den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  formuliert. Sie gelten, wann immer diese Sinn machen, aber auch für die rechts- und linksseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0+}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0-}$ .

Der folgende Satz ergibt sich aus den Grenzwertsätzen für Folgen, vgl. Satz 5.3.7. Er ermöglicht genau wie dort, die Berechnung von Grenzwerten durch Zerlegen des Problems in einfachere Bausteine.

**Satz 5.7.6.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Desweiteren seien drei Funktionen  $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so dass die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existieren. Dann gilt:*

- (a) *Die Grenzwerte für  $x$  gegen  $x_0$  von  $f + g$ ,  $fg$  und  $|f|$  existieren und es gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \text{und} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| &= \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|. \end{aligned}$$

- (b) *Gilt  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in D \setminus \{x_0\}$ , so ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .*

(c) Ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  und gilt

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in D \setminus \{x_0\},$$

so gilt auch  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

(d) Ist  $y := \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , so existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $|g(x)| \geq |y|/2$  für alle  $x \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$  ist. Wir können also die Funktion

$$\frac{f}{g} : (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

definieren. Für diese existiert dann der Limes für  $x$  gegen  $x_0$  mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Mit Hilfe der bestimmten Divergenz aus Definition 5.3.13 können wir nun zum Einen auch entsprechende Grenzwerte von Funktionen definieren, und zum Anderen den Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  einen Sinn geben.

**Definition 5.7.7.** (a) Es seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty),$$

wenn für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$ , die gegen  $x_0$  konvergiert und für die  $a_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, die Folge  $(f(a_n))$  bestimmt gegen  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ ) divergiert.

(b) Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ . Wir sagen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \quad (\text{bzw. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y),$$

wenn für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$ , die bestimmt gegen  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ ) divergiert,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$  gilt.

**Beispiel 5.7.8.** (a) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

(b) Wir betrachten wieder die Exponentialfunktion  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $E(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  und bestimmen ihre Grenzwerte für  $x$  gegen  $\pm\infty$ .

Für alle  $x \geq 0$  gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^1}{1!} = x,$$

also ist auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \geq \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \quad \text{d.h. } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty.$$

Damit bekommen wir auch

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

### 5.7.2. Stetigkeit

Stetigkeit ist ein in der Analysis fundamentaler Begriff. Flapsig gesprochen, bedeutet diese, dass ein kleines Wackeln an der Variablen den Funktionswert einer Funktion auch nur wenig verändert, d.h. kleine Störungen haben auch nur kleine Wirkungen. Damit ist Stetigkeit, zumeist unbemerkt, eine häufige Grundannahme unseres Lebens.

**Definition 5.7.9.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $x_0$ , falls für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, auch die Folge  $(f(a_n))$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$  gilt.*

*Weiter heißt  $f$  stetig auf  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in D$  stetig ist.*

*Schließlich setzen wir noch*

$$C(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } D\}.$$

**Bemerkung 5.7.10.** (a) Wieder sollte die Betonung auf „jede Folge“ liegen, vgl. Bemerkung 5.7.2 (b).

(b) Anschaulich bedeutet das: Wie auch immer man sich auf der  $x$ -Achse an die Stelle  $x_0 \in D$  herantastet, die entsprechenden Funktionswerte nähern sich immer dem Wert  $f(x_0)$  an. Das heißt, um den Bogen zu obiger Beschreibung zu schlagen: Wenn man sich schon nahe herangepirscht hat, muss der Funktionswert auch nahe am Wert  $f(x_0)$  liegen.

**Beispiel 5.7.11.** (a) Die Funktion  $f(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ist stetig auf  $\mathbb{R}$ . Das sieht man folgendermaßen: Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ , die gegen  $x_0$  konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| = |x_0| = f(x_0)$$

nach Satz 5.3.7 (a).

- (b) Die Funktion  $f(x) = cx^k$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ist für jedes  $c \in \mathbb{R}$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn für jede konvergente Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \in \mathbb{R}$  gilt nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n^k = c(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^k = cx_0^k = f(x_0).$$

- (c) Dagegen ist die *Signum-Funktion*  $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

in Null nicht stetig, denn die Folge  $a_n = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , ist eine Nullfolge, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sign}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sign}(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = \text{sign}(0).$$

**Satz 5.7.12.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ist  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$ , so ist  $f$  in  $x_0$  genau dann stetig, wenn*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

*gilt.*

**Bemerkung 5.7.13.** In dieser Form ist die Stetigkeit am einprägsamsten: Damit  $f$  in  $x_0$  stetig ist, muss

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

gelten. Stetigkeit bedeutet also, dass man den Grenzübergang mit der Funktionsauswertung vertauschen kann.

**Übungsaufgabe 5.7.14.** Diese Aufgabe ist eher eine Diskussionsanregung. Auf der Menge  $D = [0, 1] \cup \{2\}$  sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 43, & \text{falls } x = 2, \end{cases}$$

gegeben. Skizzieren Sie den Graphen und diskutieren Sie, ob diese auf  $D$  stetig ist.

Der folgende Satz erlaubt wieder, wie schon Satz 5.3.7 für Folgen, Stetigkeitsuntersuchungen komplizierter Funktionen auf die Untersuchung einfacherer Bausteine zu reduzieren. Sein Beweis ergibt sich aus der Kombination der Stetigkeitsdefinition mit den entsprechenden Aussagen aus Satz 5.3.7.

**Satz 5.7.15.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig in  $x_0 \in D$ . Dann sind die Funktionen  $f + g$ ,  $fg$  und  $|f|$  stetig in  $x_0$ .*

*Ist  $x_0 \in D^* := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ , so ist die Funktion  $f/g : D^* \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .*

Genauso wichtig ist die folgende Möglichkeit durch Verkettung komplizierte stetige Funktionen zu basteln:

**Satz 5.7.16.** *Es seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow E$ , sowie  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Ist  $f$  stetig in  $x_0 \in D$  und  $g$  stetig in  $f(x_0)$ , so ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .*

*Beweis.* Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $D$ , die gegen  $x_0$  konvergiert. Da  $f$  in  $x_0$  stetig ist, gilt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$ . Also ist dank der Stetigkeitsvoraussetzung an  $g$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$$

und wir sind fertig. □

**Beispiel 5.7.17.** (a) Mit Satz 5.7.15 bekommt man in Kombination mit Beispiel 5.7.11 (b) sofort, dass jede Polynomfunktion auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig ist.

(b) In Zusammenarbeit liefern Satz 5.7.15 und Satz 5.7.16 z.B. die Stetigkeit auf  $\mathbb{R}$  der Funktion

$$f(x) = \frac{|x|^7(x-5)^3 - 15|}{x^2 + |x|^3 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Neben der Addition, Multiplikation und Verknüpfung von Funktionen, kann man (zumindest bijektive) Funktionen noch umkehren. Es erhebt sich also die Frage, ob die Umkehrfunktion einer bijektiven, stetigen Funktion wieder stetig ist. Die Antwort ist im Allgemeinen nein, doch unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen geht das gut. Um diese zu formulieren, benötigen wir jedoch noch ein paar Begriffe:

**Definition 5.7.18.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt*

- (a) *monoton wachsend, falls für alle  $x, y \in D$  gilt  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ ,*
- (b) *monoton fallend, falls für alle  $x, y \in D$  gilt  $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ ,*
- (c) *streng monoton wachsend, falls für alle  $x, y \in D$  gilt  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ ,*
- (d) *streng monoton fallend, falls für alle  $x, y \in D$  gilt  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$   
und*
- (e) *(streng) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.*

**Beispiel 5.7.19.** Die Exponentialfunktion  $e^x = E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ist streng monoton wachsend.

Um das einzusehen, bemerken wir zunächst, dass für alle  $x > 0$  gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1.$$

Da  $e^{-x} = 1/e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist, muss damit für negative  $x$  der Wert  $e^x \in (0, 1)$  liegen. Insbesondere ist  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Seien nun  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$  gegeben. Dann ist  $y - x > 0$ , d.h. wir haben

$$1 < e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}.$$

Nun ist  $e^x$  strikt positiv, wir dürfen also die Ungleichung damit multiplizieren ohne das Relationszeichen zu drehen und erhalten damit  $e^x < e^y$ .

Nun kommen wir zur Stetigkeit der Umkehrfunktion. Das entsprechende Resultat wollen wir nicht beweisen.

**Satz 5.7.20.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f \in C(I)$  streng monoton. Dann ist  $f : I \rightarrow f(I)$  bijektiv,  $f(I)$  ein Intervall und  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  ist stetig auf  $f(I)$  und streng monoton.*

Ebenfalls ohne Beweis erwähnen wir noch das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium, eine äquivalente Bedingung für Stetigkeit, die vor allem von theoretischem Interesse ist.

**Satz 5.7.21.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  genau dann stetig, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

*gilt.*

**Definition 5.7.22.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Lipschitz-stetig, falls es ein  $L > 0$  gibt mit*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Lipschitz-Stetigkeit ist ein strengerer Begriff als Stetigkeit:

**Satz 5.7.23.** *Ist  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig, so ist  $f$  stetig auf  $D$ . Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch.*

*Beweis.* Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig und  $x_0 \in D$  beliebig. Ist  $\varepsilon > 0$  und  $\delta := \varepsilon/L$ , so gilt für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  dank der Lipschitz-Stetigkeit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Also ist  $f$  mit Hilfe von Satz 5.7.21 stetig in  $x_0$ .

Zum Nachweis, dass die Umkehrung falsch ist, betrachten wir ein Gegenbeispiel mit  $D = \mathbb{R}$  und  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  nach Beispiel 5.7.11 (b) stetig auf  $\mathbb{R}$ . Wir nehmen nun an,  $f$  wäre Lipschitz-stetig, d.h. es gibt ein  $L > 0$  mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann bekommen wir mit  $x := 2L$  und  $y := L$

$$L^2 = L|2L - L| = L|x - y| \geq |f(x) - f(y)| = |(2L)^2 - L^2| = 3L^2,$$

was, dank  $L > 0$ , den Widerspruch  $1 \geq 3$  liefert.  $\square$

**Bemerkung 5.7.24.** (a) Die strikten Kontraktionen aus Satz 5.6.22 sind Lipschitz-stetig mit Konstante  $L = q \in (0, 1)$ .

(b) Anschaulich bedeutet Lipschitz-Stetigkeit, dass die Steigung des Graphen, vgl. Abschnitt 6.1, beschränkt bleibt. Wir werden später in Beispiel 6.2.5 darauf zurückkommen.

### 5.7.3. Eigenschaften stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt sammeln wir einige wichtige Sätze, die für stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$  gelten und die wir immer wieder verwenden werden. Das erste ist der Zwischenwertsatz, auf dessen Beweis wir verzichten wollen.

**Satz 5.7.25** (Zwischenwertsatz). *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  gegeben und  $f \in C([a, b])$ . Ist  $y_0$  eine reelle Zahl zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ , so gibt es ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .*

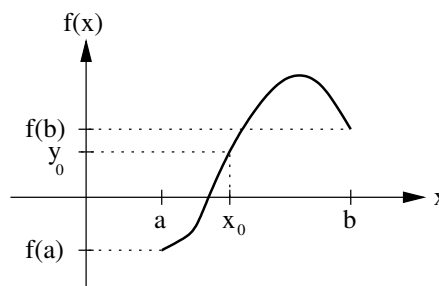


Abbildung 5.1.: Der Zwischenwertsatz

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satz ist die folgende.

**Satz 5.7.26** (Nullstellensatz von Bolzano). *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f \in C([a, b])$  erfülle  $f(a)f(b) < 0$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) = 0$ .*



## 5.7. Stetigkeit reeller Funktionen

*Beweis.* Wir müssen uns nur klarmachen, dass die Voraussetzung  $f(a)f(b) < 0$  bedeutet, dass entweder  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$  oder  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  ist. Dann folgt die Behauptung sofort aus Satz 5.7.25.  $\square$

**Definition 5.7.27.** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt, falls die Menge  $f(D)$  beschränkt ist, d.h. falls ein  $C \geq 0$  existiert, so dass  $|f(x)| \leq C$  für alle  $x \in D$  gilt.

Wir können nun den fundamentalen Satz formulieren, der das Verhalten stetiger Funktionen auf kompakten Mengen beschreibt.

**Satz 5.7.28.** Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und nicht-leer, sowie  $f \in C(K)$ . Dann gibt es  $x_*, x^* \in K$ , so dass

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \text{für alle } x \in K$$

gilt. Insbesondere ist  $f$  beschränkt.

Man beachte, dass damit insbesondere  $\max f(K) = f(x^*)$  und  $\min f(K) = f(x_*)$  existieren. In Worte gefasst lautet dieser Satz damit:

Eine stetige Funktion auf einem Kompaktum nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Kompaktum an.

Dass dabei jede der Voraussetzungen zwingend nötig ist, veranschaulichen die folgenden Beispiele.

**Beispiel 5.7.29.** (a) Ist  $K = [0, 1]$  und

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in (0, 1), \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x = 1, \end{cases}$$

so ist zwar  $f(K) = (0, 1)$ , aber es gibt keine  $x_*, x^* \in [0, 1]$  mit  $f(x_*) = 0$  und  $f(x^*) = 1$ . Wir brauchen also die Stetigkeit von  $f$ .

(b) Ist  $K = (0, 1]$  und  $f(x) = 1/x$  für  $x \in K$ , so ist  $f$  auf  $K$  stetig, aber die Menge  $f(K)$  ist nicht beschränkt, da  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$  ist. Wir brauchen also die Abgeschlossenheit von  $K$ .

(c) Ist schließlich  $K = \mathbb{R}$  und  $f(x) = E(x)$ , so ist diese Funktion wieder auf ganz  $K$  stetig und  $K$  ist abgeschlossen, aber  $f$  nicht beschränkt. Wir brauchen also die Beschränktheit von  $K$ .

*Beweis von Satz 5.7.28:* Wir zeigen zunächst, dass unter den Voraussetzungen des Satzes die Funktion  $f$  beschränkt ist. Wäre dem nicht so, gäbe es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $a_n \in K$  mit  $|f(a_n)| > n$ . Wegen der Kompaktheit von  $K$  können wir nun nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 5.6.17 aus der Folge  $(a_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in K$  auswählen. Da weiter  $f$  stetig auf  $K$  ist, muss dann die Folge  $(f(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(x_0)$  konvergieren. Insbesondere ist damit die Folge  $(f(a_{n_k}))$  beschränkt, was im Widerspruch zur Konstruktion der Folge  $(a_n)$  steht, nach der  $|f(a_{n_k})| > n_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Da nun  $f(K)$  beschränkt ist, existieren zumindest  $\sup f(K)$  und  $\inf f(K)$  nach dem Vollständigkeitsaxiom. Wir betrachten hier nur  $S := \sup f(K)$ , die Untersuchung für das Infimum verläuft analog. Zu zeigen ist, dass es ein  $x^* \in K$  gibt mit  $f(x^*) = S$ . Dazu stellen wir zunächst fest, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  die Zahl  $S - 1/n$  keine obere Schranke von  $f(K)$  sein kann. Also gibt es jeweils ein  $y_n \in f(K)$ , und damit ein  $x_n \in K$  mit  $f(x_n) = y_n$ , so dass

$$S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

gilt. Für die so gewonnene Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  gilt nach dem Sandwich-Theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = S.$$

Außerdem enthält sie wie jede Folge in  $K$  nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Wir setzen

$$x^* := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}.$$

Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von  $K$  sofort  $x^* \in K$  und dank der Stetigkeit von  $f$  haben wir  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$ . Wie wir oben gesehen haben, konvergiert aber die gesamte Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  gegen  $S$ . Nach Satz 5.3.24 (b) hat dann auch jede Teilfolge diesen Grenzwert. Das liefert schließlich

$$f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = S. \quad \square$$

## 5.8. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

Auch der Stetigkeitsbegriff überträgt sich direkt auf den Fall von normierten  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen. Zunächst müssen wir den Grenzwertbegriff für Funktionen zwischen normierten Räumen verallgemeinern.

**Definition 5.8.1.** *Es seien  $V$  und  $W$  normierte  $\mathbb{R}$ -Vektorräume,  $D \subseteq V$  und  $f : D \rightarrow W$  eine Funktion.*

- (a) *Wir nennen  $x_0 \in D$  Häufungspunkt von  $D$ , falls es eine Folge  $(a_n)$  in  $D$  mit  $a_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt, die gegen  $x_0$  konvergiert.*

## 5.8. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

(b) Sei  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y,$$

falls für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$ , die gegen  $x_0$  konvergiert und  $a_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt, die Folge  $(f(a_n))$  gegen  $y$  konvergiert.

**Bemerkung 5.8.2.** Die Begriffe links- und rechtsseitiger Grenzwert können wir nicht auf normierte Räume übertragen, da es dort nicht so eindimensional zugeht und es insofern Unmengen Richtungen gibt, aus denen sich eine Folge auf den Punkt  $x_0$  zubewegen kann, zumal sie ja noch nicht mal aus einer definierten Richtung kommen muss, sondern auch auf den Grenzwert zuspирalen kann.

**Definition 5.8.3.** Es seien  $V, W$  zwei normierte  $\mathbb{R}$ -Vektorräume,  $D \subseteq V$  und  $x_0 \in D$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  heißt stetig in  $x_0$ , wenn für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, auch die Folge  $(f(a_n))$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$  gilt.

Weiter heißt  $f$  stetig auf  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in D$  stetig ist.

Außerdem setzen wir wieder

$$C(D; W) := \{f : D \rightarrow W : f \text{ stetig auf } D\}.$$

Im Falle, dass  $W = \mathbb{R}$  ist, schreibt man oft auch einfach  $C(D)$  statt  $C(D; \mathbb{R})$ , vgl. Definition 5.7.9.

Von besonderem Interesse ist natürlich der Fall, dass  $V$  und  $W$  endlichdimensional sind, also, bis auf Isomorphie,  $V = \mathbb{R}^d$  und  $W = \mathbb{R}^p$  für irgendwelche  $d, p \in \mathbb{N}^*$  gilt und etwas anderes wollen wir vorerst auch gar nicht betrachten.

Ist also  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion, so ist  $f(x) = f((x_1, x_2, \dots, x_d)^T)$ , eine Funktion, die jedem Vektor in  $\mathbb{R}^d$  einen Vektor in  $\mathbb{R}^p$  zuordnet. Die Funktion hat also  $d$  reelle Eingabewerte, woher die Sprechweise „Funktion mehrerer Variablen“ in der Kapitelüberschrift kommt. Tatsächlich nimmt man in der Analysis meist diesen Standpunkt ein, dass die Funktion von  $d$  reellen Eingangsparametern  $x_1, x_2, \dots, x_d$  abhängt und schreibt, nicht ganz korrekt,  $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$  statt  $f((x_1, x_2, \dots, x_d)^T)$ .

Der Wert  $f(x)$  ist für jedes  $x \in D$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^p$ . Man hat also

$$f(x) = \begin{pmatrix} f(x)_1 \\ f(x)_2 \\ \vdots \\ f(x)_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix},$$

mit den  $p$  sogenannten *Koordinatenfunktionen*  $f_1, f_2, \dots, f_p : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Der nächste Satz zeigt, dass es in Bezug auf Stetigkeit sogar ausreicht den Fall  $p = 1$  zu betrachten.

**Satz 5.8.4.** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $x_0 \in D$ . Dann ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  genau dann in  $x_0$  stetig, wenn alle Koordinatenfunktionen  $f_1, f_2, \dots, f_p : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  stetig sind.*

*Beweis.* Nach Definition haben wir genau dann Stetigkeit in  $x_0$ , falls für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, die Folge  $(f(a_n))$  in  $\mathbb{R}^p$  gegen  $f(x_0)$  konvergiert. Nach Satz 5.6.5 ist diese Konvergenz äquivalent zur Konvergenz der Koordinatenfolgen  $(f(a_n)_j) = (f_j(a_n))$  gegen  $f_j(x_0)$  für alle  $j = 1, 2, \dots, p$ . Diese Bedingung ist wiederum für alle solchen Folgen  $(a_n)$  genau dann erfüllt, wenn die Koordinatenfunktionen in  $x_0$  stetig sind.  $\square$

Da wir damit Stetigkeit aus der Stetigkeit der einzelnen Koordinaten bekommen, können wir uns im folgenden Satz auf den Fall  $p = 1$  beschränken. Er enthält die Verallgemeinerung von Satz 5.7.15 und Satz 5.7.16 auf Funktionen mehrerer Variablen.

**Satz 5.8.5.** *Es seien  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $x_0 \in D$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ , sowie  $h : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $f(x_0)$ . Dann sind auch  $f + g$ ,  $fg$ ,  $|f|$  und  $h \circ f$  als Funktionen von  $D$  nach  $\mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .*

*Ist außerdem  $x_0 \in D^* := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ , so ist auch  $f/g : D^* \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .*

So einfach, zumindest auf einem formalen Level, die Übertragung des Stetigkeitsbegriffs auf Funktionen mehrerer Variablen war, so unübersichtlich können leider Stetigkeitsuntersuchungen am konkreten Beispiel werden. Wir betrachten ein paar Beispiele im für die Anschauung noch zugänglichen Fall  $d = 2$  und  $p = 1$ .

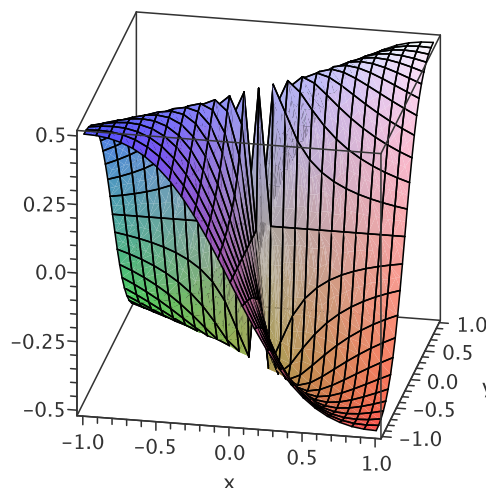


Abbildung 5.2.: Der Graph der Funktion  $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$

## 5.8. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

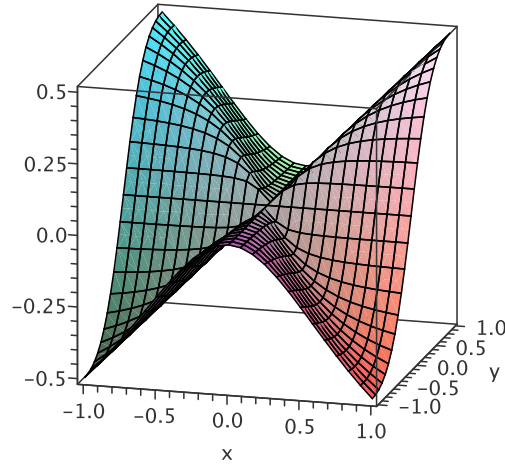


Abbildung 5.3.: Der Graph der Funktion  $(x, y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

**Beispiel 5.8.6.** Wir betrachten die beiden Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

vgl. Abbildungen 5.2 und 5.3. Zunächst ist in beiden Funktionsvorschriften der Nenner für alle  $(x, y) \neq (0, 0)$  immer ungleich Null, also sind beide Funktionen  $f$  und  $g$  in allen Punkten  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  nach Satz 5.8.5 stetig. Es bleibt uns nur die Stetigkeit in  $(0, 0)$  zu überprüfen. Hier nutzt obiger Satz nichts und wir müssen mit der Definition der Stetigkeit arbeiten.

**Zu  $f$ :** Wir betrachten die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( (1/n, 1/n)^T \right)_{n \in \mathbb{N}^*},$$

in  $\mathbb{R}^2$ . Diese konvergiert gegen  $(0, 0)^T$ , wobei  $a_n \neq (0, 0)^T$  für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt. Daher ist

$$f(a_n) = f(1/n, 1/n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}^*$ . Das liefert uns aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1/2 \neq 0 = f(0, 0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ . Also ist  $f$  in  $(0, 0)^T$  nicht stetig.

**Zu  $g$ :** Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (0, 0)^T$ . Dann ist  $a_n = (x_n, y_n)^T$  für  $n \in \mathbb{N}$  mit den beiden reellen Koordinatenfolgen  $(x_n)$  und  $(y_n)$ . Außerdem gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , für die  $x_n \neq 0$  ist,

$$|g(a_n)| = \left| \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} \right| = \frac{x_n^2 |y_n|}{x_n^2 + y_n^2} \leq \frac{x_n^2 |y_n|}{x_n^2} = |y_n|.$$

Ist  $x_n = 0$ , so gilt auf jeden Fall  $|g(a_n)| = 0 \leq |y_n|$ , also haben wir diese Ungleichung für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Da  $(y_n)$  und damit auch  $(|y_n|)$  eine Nullfolge ist, gilt damit nach dem Sandwich-Theorem  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = 0 = g(0, 0) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ , was gerade bedeutet, dass  $g$  in  $(0, 0)^T$  stetig ist.

**Übungsaufgabe 5.8.7.** Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig ist.

*Hinweis:* Dazu reicht es zu zeigen, dass für jedes  $A \in \mathbb{R}^{p \times d}$  die Abbildung  $\Phi_A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $\Phi_A x = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , stetig ist.

Wie für Funktionen in einer Variablen gilt der folgende wichtige Satz über stetige Funktionen auf kompakten Mengen, vgl. Satz 5.7.28.

**Satz 5.8.8.** *Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und nicht-leer, sowie  $f \in C(K)$ . Dann gibt es  $x_*, x^* \in K$ , so dass*

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \text{für alle } x \in K$$

*gilt. Insbesondere ist  $f$  beschränkt.*

**Übungsaufgabe 5.8.9.** Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und nicht-leer. Zeigen Sie, dass  $\|\cdot\|_\infty : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in C(K),$$

eine Norm ist. Diese heißt *Supremums-Norm*.

Mit Hilfe dieses Satzes kann nun außerdem ein Versprechen aus Bemerkung 5.6.7 eingelöst werden. Wir beweisen dazu zunächst das folgende Resultat.

**Satz 5.8.10.** *Es sei  $\|\cdot\|$  irgendeine Norm auf  $\mathbb{R}^d$  und  $\|\cdot\|_2$  die 2-Norm auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es zwei Konstanten  $c$  und  $C$  mit  $0 < c \leq C$ , so dass*

$$c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d$$

*gilt.*

## 5.8. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

*Beweis.* Es sei  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist  $x = \sum_{j=1}^d x_j e_j$  und wir bekommen mit der Dreiecksungleichung

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^d x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^d \|x_j e_j\| = \sum_{j=1}^d |x_j| \|e_j\|.$$

Auf diese Summe wenden wir nun die Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Satz 3.4.9 an und erhalten

$$\|x\| \leq \left( \sum_{j=1}^d |x_j|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^d \|e_j\|^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2 \left( \sum_{j=1}^d \|e_j\|^2 \right)^{1/2}.$$

Setzen wir nun  $C := \left( \sum_{j=1}^d \|e_j\|^2 \right)^{1/2}$ , so erhalten wir den rechten Teil der Behauptung.

Nun betrachten wir auf  $D := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\} \subseteq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$  die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \|x\|$ . Wir zeigen zunächst, dass dies eine stetige Funktion auf  $D$  ist. Sei dazu  $(a_n)$  eine Folge in  $D$ , die gegen  $x_0$  konvergiert. Damit ist gemeint, dass  $(a_n)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_2$  konvergiert, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - x_0\|_2 = 0$ . Wir müssen nun zeigen, dass  $f(a_n)$  gegen  $f(x_0)$  konvergiert. Dazu beobachten wir mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und dem ersten Teil des Beweises

$$|f(a_n) - f(x_0)| = \left| \|a_n\| - \|x_0\| \right| \leq \|a_n - x_0\| \leq C \|a_n - x_0\|_2.$$

Mit dem Sandwich-Theorem folgt nun tatsächlich, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n) - f(x_0)| = 0$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$  gilt.

Weiter ist  $D$  abgeschlossen. Das sieht man folgendermaßen: Für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$ , die gegen ein  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  konvergiert, haben wir

$$\|x_0\|_2 = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Also ist auch  $x_0 \in D$  und wir erhalten die Abgeschlossenheit aus Satz 5.6.11. Da  $D$  außerdem beschränkt ist (Die Norm aller Elemente übersteigt z.B.  $\sqrt{17}$  nicht), ist  $D$  kompakt.

Also ist  $f$  eine stetige Funktion auf einem Kompaktum und wir erhalten aus Satz 5.8.8, dass es ein  $y_* \in D$  gibt mit  $\|y\| = f(y) \geq f(y_*) = \|y_*\|$  für alle  $y \in D$ . Ist nun  $x \in \mathbb{R}^d$  beliebig, so ist  $x/\|x\|_2 \in D$  und es gilt also

$$\|x\| = \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq \|x\|_2 \|y_*\|.$$

Setzt man also  $c := \|y_*\|$ , so ist zum Einen  $c > 0$ , denn  $y_* \in D$  und damit kann nicht  $y_* = 0$  sein. Zum Anderen gilt damit nach dem oben gezeigten  $c\|x\|_2 \leq \|x\|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und wir sind fertig.  $\square$

Aus diesem Satz können wir nun einiges folgern.

**Satz 5.8.11.** (a) Sind  $\|\cdot\|$  und  $|||\cdot|||$  zwei Normen auf  $\mathbb{R}^d$ , so gibt es Konstanten  $0 < c \leq C$ , so dass

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d \quad (5.3)$$

gilt.

(b) Ist eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}^d$  bezüglich einer Norm konvergent, so konvergiert sie auch bezüglich jeder anderen Norm und der Grenzwert ist derselbe.

*Beweis.* (a) Nach Satz 5.8.10 gibt es Konstanten  $c_1, c_2, C_1, C_2$  mit

$$c_1\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C_1\|x\|_2 \quad \text{und} \quad c_2\|x\|_2 \leq |||x||| \leq C_2\|x\|_2$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Also ist für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  auch

$$\|x\| \leq C_1\|x\|_2 \leq \frac{C_1}{c_2}|||x||| \leq \frac{C_1}{c_2}C_2\|x\|_2 \leq \frac{C_1}{c_2}\frac{C_2}{c_1}\|x\|.$$

Das liefert

$$\frac{c_2}{C_1}\|x\| \leq |||x||| \leq \frac{C_2}{c_1}\|x\|$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ .

(b) Es sei  $(a_n)$  eine bezüglich  $\|\cdot\|$  in  $\mathbb{R}^d$  gegen  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  konvergente Folge und  $|||\cdot|||$  eine weitere Norm in  $\mathbb{R}^d$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - x_0\| = 0$  und wegen der Äquivalenz der Normen gilt

$$0 \leq |||a_n - x_0||| \leq C\|a_n - x_0\|.$$

Daraus folgt dem Sandwich-Theorem  $\lim_{n \rightarrow \infty} |||a_n - x_0||| = 0$ , d.h.  $(a_n)$  konvergiert bezüglich  $|||\cdot|||$  ebenfalls gegen  $x_0$ .  $\square$

**Bemerkung 5.8.12.** (a) Gilt für zwei Normen eine Abschätzung in beide Richtungen wie in (5.3), so nennt man die beiden Normen auch *äquivalent*.

(b) Da die Konvergenz von Reihen und die Stetigkeit von Funktionen mit Hilfe von Folgenkonvergenz definiert sind, sind damit auch diese Begriffe von der konkreten Wahl der Norm unabhängig.

(c) Ein entsprechender Satz gilt in unendlichdimensionalen Räumen nicht, z.B. sind auf dem Raum der endlichen Folgen  $c_{00}$ , die 1- und die  $\infty$ -Norm nicht äquivalent.

**Übungsaufgabe 5.8.13.** Übertragen Sie den Begriff der Lipschitz-Stetigkeit und Satz 5.7.23 in den Kontext von Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$ .



## 5.9. Potenzreihen

In Abschnitt 5.5 haben wir festgestellt, dass für die Exponentialfunktion gilt

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sie ist damit durch eine Entwicklung in ein „unendlich langes Polynom“<sup>1</sup> gegeben. Solche Reihendarstellungen gibt es für viele elementare Funktionen und wir wollen uns nun der Theorie dieser sogenannten Potenzreihen zuwenden.

In diesem Kapitel steht der Buchstabe  $\mathbb{K}$  wieder entweder für  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

**Definition 5.9.1.** Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ . Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

heißt Potenzreihe.

Arbeitet man mit Potenzreihen in  $\mathbb{C}$ , so schreibt man natürlich eher  $z$  statt  $x$ , aber das dient nur der größeren Übersichtlichkeit.

**Beispiel 5.9.2.** Neben der Exponentialreihe haben wir schon eine weitere Potenzreihe kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mit  $a_n = 1$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . In Beispiel 5.5.2 (a) haben wir gesehen, dass diese für  $|x| > 1$  divergiert und für  $|x| < 1$  konvergiert mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Die beiden Beispiele der Exponential- und der geometrischen Reihe zeigen, dass die Frage, für welche  $x$  eine Potenzreihe konvergiert, verschiedene Antworten haben kann. Das einzig offensichtliche ist, dass jede Potenzreihe für  $x = 0$  konvergiert. Zur weiteren Untersuchung der Konvergenz einer Potenzreihe verwenden wir das Wurzelkriterium.

Es sei also  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe. Wir betrachten also

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{|x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} |x|.$$

Existiert nun der Grenzwert für  $n$  gegen unendlich dieses Ausdrucks und ist dieser größer als Eins, so haben wir Divergenz und für einen Grenzwert kleiner als Eins absolute Konvergenz nach dem Wurzelkriterium. Wir formulieren diese wichtige Erkenntnis als Satz.

<sup>1</sup>Das muss in ganz großen Anführungszeichen bleiben, denn Polynome sind immer nur endliche Summen.

**Satz 5.9.3** (Satz von Hadamard). *Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ , so dass der Grenzwert  $\varrho := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  existiert oder die Folge  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  unbeschränkt ist. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ :*

- (a) *Ist die Folge  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  unbeschränkt, so konvergiert die Potenzreihe nur für  $x = 0$ .*
- (b) *Ist  $\varrho = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe für alle  $x \in \mathbb{K}$  absolut.*
- (c) *Ist  $\varrho \in (0, \infty)$ , so ist die Potenzreihe für alle  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < 1/\varrho$  absolut konvergent und für alle  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| > 1/\varrho$  divergent.*

Wir erben vom Wurzelkriterium auch die Unsicherheit, die dort für den Grenzfall auftrat, dass der betrachtete Limes den Wert 1 annimmt. Diese macht sich hier insofern bemerkbar, als wir im dritten Punkt dieses Satzes für  $|x| = 1/\varrho$ , also auf dem Rand des Konvergenzgebietes, keine Aussage treffen können.

Beachten Sie, dass der Konvergenzbereich  $K$  einer Potenzreihe damit immer entweder  $K = \{0\}$  oder  $K = \mathbb{K}$  ist, oder wir haben

$$\left\{x \in \mathbb{K} : |x| < \frac{1}{\varrho}\right\} \subseteq K \subseteq \left\{x \in \mathbb{K} : |x| \leq \frac{1}{\varrho}\right\}.$$

Der Konvergenzbereich hat also die Form eines Intervalles in  $\mathbb{R}$ , bzw. eines Kreises in  $\mathbb{C}$ . Das erklärt die folgende Begriffsbildung für die Zahl  $1/\varrho$ .

**Definition 5.9.4.** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe die die Voraussetzungen von Satz 5.9.3 erfüllt und  $\varrho$  wie in diesem Satz definiert. Dann heißt die Zahl*

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls in obigem Satz (a) gilt,} \\ \infty, & \text{falls in obigem Satz (b) gilt,} \\ \frac{1}{\varrho}, & \text{falls in obigem Satz (c) gilt,} \end{cases}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Wir betrachten einige Beispiele in  $\mathbb{R}$ , die verdeutlichen, dass am Rand des Konvergenzintervalls alles passieren kann.

**Beispiel 5.9.5.** (a) Wir beginnen mit  $a_n := 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , d.h. der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Ja genau, das ist unsere altbekannte geometrische Reihe und insofern ist es auch nicht verwunderlich, dass hier  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$  gilt und damit der Konvergenzradius 1 ist, d.h. diese Potenzreihe konvergiert absolut für  $|x| < 1$  und divergiert für  $|x| > 1$ . Über das Konvergenzverhalten am Rand des Konvergenzintervalls gibt uns der Konvergenzradius keine Auskunft. Für diese Reihe haben wir offensichtlich sowohl für  $x = -1$  als auch für  $x = 1$  eine divergente Reihe.

(b) Nun sei  $a_n = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , wir betrachten also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Auch hier ist der Konvergenzradius 1, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1,$$

vgl. Beispiel 5.3.10 (d). Damit konvergiert diese Reihe für  $x \in (-1, 1)$  absolut und divergiert für  $|x| > 1$ . An den Rändern des Intervalls  $(-1, 1)$  erhalten wir für  $x = 1$  genau die harmonische Reihe (divergent) und für  $x = -1$  die alternierende harmonische Reihe (konvergent), so dass wir also Konvergenz für alle  $x \in [-1, 1)$  und Divergenz für alle anderen  $x \in \mathbb{R}$  haben.

(c) Schließlich nehmen wir  $a_n = 1/n^2$ , d.h. die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Für diese ist ebenso der Konvergenzradius 1, aber diese Reihe konvergiert an beiden Randpunkten des Konvergenzintervalls, denn für  $x = 1$  erhalten wir die nach Beispiel 5.5.14 (b) konvergente Reihe über  $1/n^2$  und für  $x = -1$  die nach dem Leibniz-Kriterium konvergente Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/n^2$ . Also ist in diesem Fall das Konvergenzintervall der Potenzreihe  $[-1, 1]$  und wir haben Divergenz für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > 1$ .

Eigentlich haben wir bisher nur einen Spezialfall von Potenzreihen angeschaut, der allerdings repräsentativ ist, d.h. alle wesentlichen Eigenschaften lassen sich daran untersuchen und die Ergebnisse dann leicht auf den allgemeinen Fall erweitern.

Wir wollen nun also den Potenzreihen-Begriff noch einmal erweitern.

**Definition 5.9.6.** Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$  und  $x_0 \in \mathbb{K}$ . Dann nennt man eine Reihe der Form

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Potenzreihe. Der Punkt  $x_0$  wird Entwicklungspunkt der Potenzreihe genannt.

**Bemerkung 5.9.7.** Den Konvergenzradius einer solchen Potenzreihe berechnet man genauso wie oben zu 0 oder  $\infty$  oder

$$r = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

Allerdings ist zu beachten, dass dann das Konvergenzgebiet der Reihe der Kreis mit Radius  $r$  um  $x_0$  statt um 0 ist. Es ist eine gute Übung, wenn Sie sich das analog zu den Überlegungen zu Satz 5.9.3 klarmachen.

**Beispiel 5.9.8.** Wir wollen herausfinden für welche  $x \in \mathbb{R}$  die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} (x-1)^n$$

konvergiert. Dazu bemerken wir, dass hier  $a_n := \frac{(-4)^n}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , und  $x_0 = 1$  ist. Dann berechnen wir zunächst den Konvergenzradius  $r$  mittels

$$\varrho := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-4)^n}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n}} = 4.$$

zu

$$r = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{4}.$$

Also haben wir auf jeden Fall absolute Konvergenz für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x-1| < 1/4$ , also für  $x \in (3/4, 5/4)$  und Divergenz für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x-1| > 1/4$ , d.h. für  $x \in (-\infty, 3/4) \cup (5/4, \infty)$ .

Es bleiben die beiden Randpunkte  $x = 3/4$  und  $x = 5/4$  zu klären. In  $x = 5/4$  ist unsere Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Dies ist die alternierende harmonische Reihe, die nach Beispiel 5.5.8 konvergiert. Für  $x = 3/4$  bekommt man mit einer analogen Rechnung, dass die betrachtete Potenzreihe die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} \left(\frac{3}{4} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hat. Dies ist nun die harmonische Reihe, die nach Beispiel 5.5.2 (c) divergiert. Also konvergiert unsere Potenzreihe genau dann, wenn  $x \in (3/4, 5/4]$  ist und divergiert in allen anderen Fällen.

**Bemerkung 5.9.9.** Die Sätze und Definitionen im Rest dieses Abschnitts sind wieder für den Spezialfall  $x_0 = 0$  und  $n_0 = 0$  formuliert. Sie gelten aber, geeignet abgeändert, auch im allgemeinen Fall.

Natürlich kann man auch das Quotientenkriterium zur Untersuchung der Konvergenz von Potenzreihen verwenden. Das liefert das folgende Ergebnis.

**Satz 5.9.10.** Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sigma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  existiert. Dann gilt für den Konvergenzradius  $r$  von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & \text{falls } \sigma \in (0, \infty), \\ \infty, & \text{falls } \sigma = 0. \end{cases}$$

Der Beweis verbleibt als Übung. Wir betrachten noch zwei Beispiele

**Beispiel 5.9.11.** (a) Zunächst betrachten wir die Potenzreihe mit  $a_n = n^n/n!$ , also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

Für das Quotientenkriterium bestimmen wir zunächst

$$\begin{aligned} \sigma &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzradius gegeben durch

$$r = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{e}.$$

(b) Eine Falle ist bei der folgenden Reihe eingebaut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}.$$

Durch den Exponenten „ $3n$ “ sind der Satz von Hadamard 5.9.3 und der Satz 5.9.10 nicht anwendbar. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die Sache anzugehen. Die erste ist, das Wurzel- bzw. Quotientenkriterium für Reihen, d.h. Satz 5.5.16, direkt anzuwenden.

Wir verwenden die zweite Möglichkeit, nämlich die Substitution  $y := x^3$ . Dann haben wir die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2^n}$ , für die wir nach dem Satz von Hadamard wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

den Konvergenzradius 2 bekommen.

Nun müssen wir aber aufpassen: Das bedeutet Konvergenz für alle  $y = x^3 \in (-2, 2)$  und Divergenz außerhalb von  $[-2, 2]$ . Also haben wir Konvergenz für alle  $x \in (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$  und Divergenz außerhalb des abgeschlossenen Intervalls mit denselben Grenzen. Der Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe ist also  $\sqrt[3]{2}$ .

**Übungsaufgabe 5.9.12.** Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

in  $\mathbb{C}$ . Diese werden uns später noch einmal begegnen.

Im Abschnitt 5.5.2 haben wir das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen mit Hilfe des Cauchyprodukts bestimmt. Die entsprechende Rechnung für Potenzreihen ergibt das folgende Resultat, dessen Beweis als Übungsaufgabe verbleibt.

**Satz 5.9.13.** *Es seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  Potenzreihen in  $\mathbb{K}$  mit Konvergenzradien  $r_1, r_2 > 0$ . Dann hat die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n$$

*mindestens den Konvergenzradius  $r := \min\{r_1, r_2\}$  und es gilt für alle  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < r$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

Von großer Bedeutung für die Analysis ist der folgende Satz, den wir hier nicht beweisen wollen.

**Satz 5.9.14.** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{K}$  mit Konvergenzradius  $r > 0$ . Dann ist die dadurch gegebene Funktion  $f : \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\} \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  stetig auf  $\{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$ .*

**Bemerkung 5.9.15.** Damit ist insbesondere die Exponentialfunktion eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$ , bzw.  $\mathbb{C}$ . Wir können das nun nutzen um für das Bild

$$E(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

zu zeigen.

Bereits in Beispiel 5.7.19 haben wir gesehen, dass  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Also ist  $E(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$  und es bleibt die umgekehrte Inklusion zu zeigen.

Sei dazu  $y_0 \in (0, \infty)$ . Wir wissen aus Beispiel 5.7.8 (b), dass

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = \infty$$

gilt. Also gibt es ein  $a \in \mathbb{R}$ , so dass  $E(a) < y_0$  gilt und ein  $b \in \mathbb{R}$  mit  $E(b) > y_0$ . Da damit zwangsläufig  $E(a) < E(b)$  gilt und die Exponentialfunktion nach Beispiel 5.7.19 streng monoton wachsend ist, muss  $a < b$  gelten. Mit der soeben festgestellten Stetigkeit der Exponentialfunktion sind alle Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes 5.7.25 erfüllt. Es gibt also ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $E(x_0) = y_0$ . Damit ist  $y_0 \in E(\mathbb{R})$  und wir sind fertig.

**Beispiel 5.9.16.** Die Stetigkeit von Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind, kann man auch ausnutzen, um Grenzwerte zu bestimmen. Wir betrachten als Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Mit dem Quotientenkriterium stellt man leicht fest, dass die Potenzreihe, die wir so am Ende erhalten haben, ebenfalls Konvergenzradius Unendlich hat. Die dadurch gegeben Funktion ist also auf  $\mathbb{R}$  und insbesondere in Null stetig. Damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 1.$$

## 5.10. Wichtige Funktionen

### 5.10.1. Exponentialfunktion und Logarithmus

**Satz 5.10.1.** Die Exponentialfunktion  $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv.

*Beweis.* Nach Beispiel 5.7.19 ist  $E$  streng monoton wachsend. Da außerdem nach der Überlegung in Bemerkung 5.9.15  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$  ist, liefert Satz 5.7.20 die Bijektivität von  $E$ .  $\square$

**Definition 5.10.2.** Die Umkehrfunktion von  $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  wird mit  $\ln := E^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet und heißt natürlicher Logarithmus.

Der Logarithmus hat die folgenden Eigenschaften.

**Satz 5.10.3.** (a) Die Funktion  $\ln$  ist auf  $(0, \infty)$  stetig und wächst streng monoton.

(b) Es gilt  $\ln(1) = 0$  und  $\ln(e) = 1$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$ .

(d) Für alle  $x, y \in (0, \infty)$  und  $q \in \mathbb{Q}$  gilt

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \quad \ln(x^q) = q \ln(x).$$

*Beweis.* (a) Dies liefert Satz 5.7.20.

- (b) Ergibt sich aus  $e^0 = 1$  und  $e^1 = e$ , vgl. die Überlegungen nach Satz 5.5.20.
- (c) Ergibt sich aus  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , vgl. Beispiel 5.7.8 (b).
- (d) Wir setzen  $\xi := \ln(x)$  und  $\eta := \ln(y)$ . Dann gilt nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion in Satz 5.5.20

$$e^{\xi+\eta} = e^\xi e^\eta = e^{\ln(x)} e^{\ln(y)} = xy.$$

Also ist

$$\ln(xy) = \ln(e^{\xi+\eta}) = \xi + \eta = \ln(x) + \ln(y).$$

Die zwei anderen Rechenregeln verbleiben als Übungsaufgabe.  $\square$

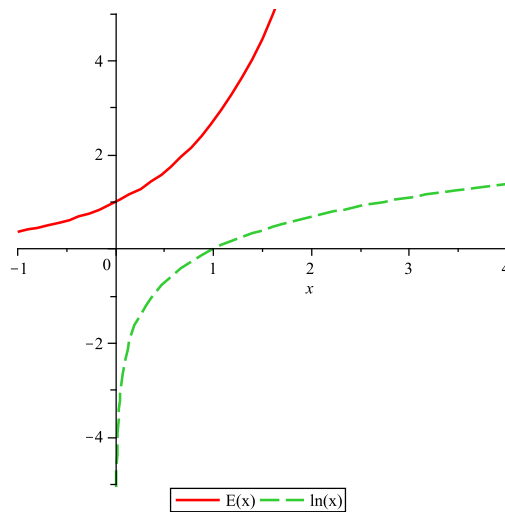


Abbildung 5.4.: Die Graphen der Exponentialfunktion und des Logarithmus

Sehen wir uns die Aussage in (d) noch einmal an, so folgt daraus insbesondere für alle  $a \in (0, \infty)$  und alle  $q \in \mathbb{Q}$  die Beziehung  $a^q = e^{\ln(a^q)} = e^{q \ln(a)}$ . Diese verwenden wir nun um die allgemeine Potenzfunktion zu definieren.

**Definition 5.10.4.** Für alle  $a \in (0, \infty)$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir die allgemeine Potenz durch

$$a^x := e^{x \cdot \ln(a)}.$$

**Satz 5.10.5.** Es sei  $a \in (0, \infty)$ . Dann ist die Funktion  $x \mapsto a^x$  stetig auf  $\mathbb{R}$  und es gelten die bekannten Rechenregeln für Potenzen wie beispielsweise

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$



*Beweis.* Wir beobachten zunächst, dass die beiden Funktionen  $x \mapsto x \cdot \ln(a)$  und  $y \mapsto e^y$  jeweils auf  $\mathbb{R}$  stetig sind, also ist auch die Potenzfunktion als deren Verkettung nach Satz 5.7.16 stetig.

Die Rechenregeln lassen sich alle direkt aus jenen für die Exponentialfunktion ableiten. Wir behandeln deshalb hier nur beispielhaft

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln(a)} = e^{x\ln(a)+y\ln(a)} = e^{x\ln(a)}e^{y\ln(a)} = a^x a^y. \quad \square$$

### 5.10.2. Trigonometrische Funktionen

In Übungsaufgabe 5.9.12 haben Sie herausgefunden, dass der Konvergenzradius der beiden dort betrachteten Potenzreihen jeweils unendlich ist. Beide definieren also je eine auf ganz  $\mathbb{C}$ , bzw.  $\mathbb{R}$ , stetige Funktion. Diese beiden bekommen jetzt (wahrscheinlich vertraute) Namen.

**Definition 5.10.6.**

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, & z \in \mathbb{C}, & \quad (\text{Sinus}) \\ \cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, & z \in \mathbb{C}, & \quad (\text{Cosinus}) \end{aligned}$$

**Bemerkung 5.10.7.** Die so definierten Funktionen stimmen natürlich mit den Ihnen bekannten Kreisfunktionen überein, die über die Verhältnisse von Dreiecksseiten definiert sind. Zumindest solange man alle Winkel im Bogenmaß ausdrückt. Dieses ist in der gesamten Mathematik üblich.

Ein Winkel wird im *Bogenmaß* durch die Länge des Bogens des Einheitskreises beschrieben, der durch diesen Winkel gebildet wird, vgl. Abbildung 5.5

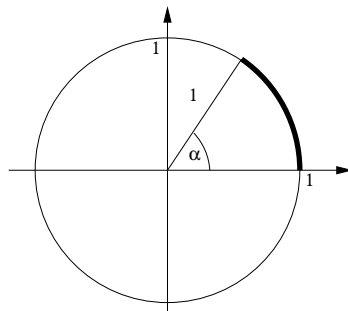


Abbildung 5.5.: Das Bogenmaß eines Winkels

In der folgenden Tabelle finden Sie die wichtigsten Werte von Sinus und Cosinus, zusammen mit den Winkeln in Grad und im Bogenmaß.

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Die Graphen von Sinus und Cosinus finden Sie in Abbildung 5.7.

Aus der geometrischen Anschauung ergibt sich sofort der folgende Zusammenhang, vgl. Abbildung 5.6.

**Satz 5.10.8** (Trigonometrischer Pythagoras).

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Einen analytischen Beweis dieser Behauptung werden wir in Bemerkung 6.2.3 sehen.

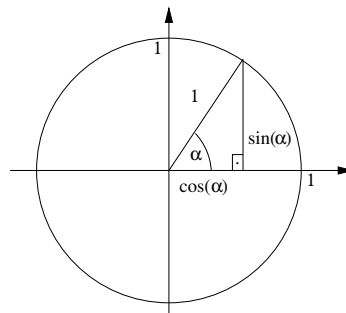


Abbildung 5.6.: Trigonometrischer Pythagoras

**Definition 5.10.9.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

- (a) ungerade, falls  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , bzw.  $\mathbb{C}$ , gilt.
- (b) gerade, falls  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , bzw.  $\mathbb{C}$ , gilt.
- (c) periodisch mit Periode  $L \in \mathbb{R}$ , bzw.  $\mathbb{C}$ , wenn  $f(x + L) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , bzw.  $\mathbb{C}$  gilt.

Betrachtet man die Definitionen von Sinus und Cosinus, so findet man für alle  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sin(-z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (-z)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= -\sin(z) \end{aligned}$$

und

$$\cos(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (-z)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z).$$

Also haben wir

**Satz 5.10.10.** *Der Cosinus ist gerade und der Sinus ist ungerade.*

Der Beweis des folgenden wichtigen Zusammenhangs zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion ergibt sich durch geradliniges Umformen der Potenzreihen. Er verbleibt als Übungsaufgabe.

**Satz 5.10.11** (Eulersche Formel). *Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt*

$$e^{iz} = \cos(z) + \sin(z)i.$$

*Insbesondere gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  damit*

$$\operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x).$$

Daraus ergeben sich nun einige wichtige Formeln für die trigonometrischen Funktionen.

**Satz 5.10.12.** *Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt*

$$(a) \quad |\sin(x)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\cos(x)| \leq 1.$$

(b) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

(c) Rechenregeln für verschobene Funktionen:

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi/2) &= \cos(x), & \cos(x+\pi/2) &= -\sin(x), \\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x), & \cos(x+\pi) &= -\cos(x), \\ \sin(x+2\pi) &= \sin(x), & \cos(x+2\pi) &= \cos(x). \end{aligned}$$

*Insbesondere sind Sinus und Cosinus periodisch mit Periode  $2\pi$ .*

*Beweis.* (a) Mit der Eulerschen Formel gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$|e^{ix}| = |\cos(x) + \sin(x)i| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$$

nach dem trigonometrischen Pythagoras, vgl. Satz 5.10.8. Insbesondere sind

$$\begin{aligned} |\cos(x)| &= |\operatorname{Re}(e^{ix})| \leq |e^{ix}| = 1 & \text{und} \\ |\sin(x)| &= |\operatorname{Im}(e^{ix})| \leq |e^{ix}| = 1. \end{aligned}$$

- (b) Es gilt mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} e^{iy} = (\cos(x) + \sin(x)i)(\cos(y) + \sin(y)i) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + (\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y))i. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun den Real- und den Imaginärteil dieser Gleichung, so findet man

$$\cos(x+y) = \operatorname{Re}(e^{i(x+y)}) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

und

$$\sin(x+y) = \operatorname{Im}(e^{i(x+y)}) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

- (c) Die Formeln ergeben sich direkt aus den Additionstheoremen und den bekannten Werten  $\cos(\pi/2) = 0$  und  $\sin(\pi/2) = 1$ . So erhält man z.B.

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi/2) &= \sin(x)\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)\cos(x) = \sin(x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(x) \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

und die Aussage für den Cosinus in einer analogen Rechnung. Damit kann man dann beispielsweise weiter machen:

$$\sin(x + \pi) = \sin(x + \pi/2 + \pi/2) = \cos(x + \pi/2) = -\sin(x).$$

Die übrigen Formeln ergeben sich auf die selbe Weise. □

Im folgenden Satz werden alle Nullstellen von Sinus und Cosinus beschrieben. Dieser bleibt hier ohne Beweis.

**Satz 5.10.13.** *Es ist*

$$\begin{aligned} \sin(z) = 0 &\iff z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}, \\ \cos(z) = 0 &\iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Neben Sinus und Cosinus taucht eine weitere trigonometrische Funktion häufiger auf, der Tangens:

**Definition 5.10.14.** *Die Funktion  $\tan : \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit*

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

*heißt Tangens.*

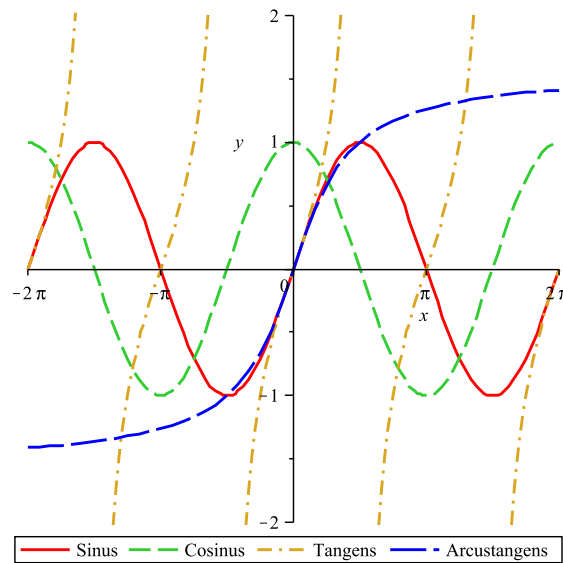


Abbildung 5.7.: Die Graphen von Sinus, Cosinus, Tangens und Arcustangens

Den Graphen der Tangens-Funktion finden Sie ebenfalls in Abbildung 5.7. In dieser Abbildung erkennt man auch, dass die folgenden Setzungen für Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens sinnvoll sind.

**Definition 5.10.15.**

$$\begin{array}{ll} \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] & (\text{Arcussinus}), \\ \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] & (\text{Arcuscosinus}), \\ \arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2) & (\text{Arcustangens}). \end{array}$$

Vor allem der Arcustangens taucht immer mal wieder auf. Sein Graph ist auch in Abbildung 5.7 dargestellt.

**Beispiel 5.10.16.** Wir wollen im  $\mathbb{R}^2$  den Winkel  $\alpha$  bestimmen, den ein Vektor  $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$  zur positiven  $x$ -Achse hat. Dazu macht man sich klar, dass mit  $r := \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$  gerade

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{r},$$

also

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{y}{x}$$

gilt. Mit der einfachen Schlussfolgerung, dann sei  $\alpha = \arctan(y/x)$  sollten wir nun allerdings vorsichtig sein, denn das gilt nur für  $\alpha$  zwischen  $-\pi/2$  und  $\pi/2$ ,

vgl. den obigen Wertebereich des Arcustangens. Die volle Wahrheit ist:

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \text{ und } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ und } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ und } y < 0. \end{cases}$$

### 5.10.3. Die Polardarstellung komplexer Zahlen

Unsere neuen Erkenntnisse geben uns ein sehr wertvolles Werkzeug zur Beschreibung von komplexen Zahlen in die Hand, das wir nun kennenlernen.

Wir haben komplexe Zahlen als Elemente der Ebene  $\mathbb{R}^2$  bisher durch ihren Real- und Imaginärteil, sozusagen in kartesischen Koordinaten, beschrieben. Einen Vektor der Ebene kann man aber auch anders beschreiben, indem man seine Länge und den in Beispiel 5.10.16 betrachteten Winkel, den er zur positiven  $x$ -Achse bildet, angibt. Das führt auf die sogenannten Polarkoordinaten.

**Definition 5.10.17.** *Es sei  $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann heißt  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  der Betrag von  $z$  und der Winkel  $\varphi$ , der zwischen  $z$  und der positiven reellen Achse eingeschlossen wird das Argument von  $z$ .*

*Beide Werte  $(r, \varphi)$  zusammen sind die Polarkoordinaten von  $z$ .*

**Bemerkung 5.10.18.** (a) Man beachte, dass das Argument so eigentlich gar nicht ordentlich definiert ist, da es mehrdeutig ist. Die Polarkoordinaten  $(1, \pi)$  und  $(1, 3\pi)$  beschreiben dieselbe komplexe Zahl, nämlich  $-1$ . Um diese Mehrdeutigkeit zu eliminieren, legt man sich üblicherweise auf ein Intervall der Länge  $2\pi$  fest, aus dem das Argument gewählt wird. Meist wird mit  $(-\pi, \pi]$  oder mit  $[0, 2\pi)$  gearbeitet.

(b) Ist das Argument auf den Bereich  $(-\pi, \pi]$  festgelegt, so gelten die folgenden Umrechnungsformeln zwischen den Darstellungen für eine komplexe Zahl  $z = x + yi$  mit Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ , vgl. Beispiel 5.10.16:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi), \\ y &= r \sin(\varphi), \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \text{ und } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ und } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ und } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- (c) Für jede komplexe Zahl  $z$  auf dem Einheitskreis, d.h.  $|z| = 1$ , gilt  $z = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$  mit einem geeigneten  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , vgl. Abbildung 5.6. Tatsächlich gilt für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$

$$z = |z| \frac{z}{|z|} = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) = re^{i\varphi}.$$

Das ist die gebräuchlichste und praktischste Art mit Polarkoordinaten zu arbeiten. Die Bedeutung sieht man z.B. im folgenden Satz.

**Satz 5.10.19.** *Es seien  $z = re^{i\varphi}, w = se^{i\psi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ , bzw.  $(s, \psi)$  gegeben. Dann hat  $z \cdot w$  die Polarkoordinaten  $(rs, \varphi + \psi)$  und  $z/w$  die Polarkoordinaten  $(r/s, \varphi - \psi)$*

*Beweis.* In der Exponentialschreibweise sieht man sofort

$$zw = re^{i\varphi} se^{i\psi} = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

und

$$\frac{z}{w} = \frac{re^{i\varphi}}{se^{i\psi}} = \frac{r}{s}e^{i(\varphi-\psi)},$$

woraus die Behauptung folgt. □

**Beispiel 5.10.20.** (a) Wir berechnen  $(1+i)^{2011}$ . Die Polarkoordinaten von  $1+i$  ergeben sich nach Bemerkung 5.10.18 (b) (oder durch Anschauung) zu  $r = \sqrt{2}$  und  $\varphi = \pi/4$ . Also ist

$$\begin{aligned} (1+i)^{2011} &= r^{2011} e^{i \cdot 2011 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2011} e^{i(\frac{2008\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})} = 2^{1005} \sqrt{2} \underbrace{e^{i \cdot 502\pi}}_{=1} e^{i \frac{3\pi}{4}} \\ &= 2^{1005} \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} = 2^{1005} (-1 + i). \end{aligned}$$

- (b) Wir bestimmen alle komplexen Lösungen von  $z^5 = 1$  in Polardarstellung. Ist  $z = re^{i\varphi}$ , so muss also gelten

$$1 = z^5 = (re^{i\varphi})^5 = r^5 e^{i5\varphi}.$$

Also muss  $r^5 = 1$  und damit  $r = 1$  sein, sowie  $e^{i5\varphi} = 1$ . Das ist dann der Fall, wenn  $5\varphi = 2k\pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  gilt, also falls  $\varphi = 2k\pi/5$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  ist. Das liefert fünf mögliche Argumente zwischen  $-\pi$  und  $\pi$ :

$$\varphi_1 = -\frac{4}{5}\pi, \quad \varphi_2 = -\frac{2}{5}\pi, \quad \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = \frac{2}{5}\pi \quad \text{und} \quad \varphi_5 = \frac{4}{5}\pi.$$

**Übungsaufgabe 5.10.21.** Beweisen Sie die *Formel von De Moivre*: Ist  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , so gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)i).$$

## 5.10.4. Hyperbolische Funktionen

**Definition 5.10.22.**

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (\text{Sinus hyperbolicus})$$

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (\text{Cosinus hyperbolicus})$$

$$\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \left( k\pi + \frac{\pi}{2} \right) i : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\text{Tangens hyperbolicus})$$

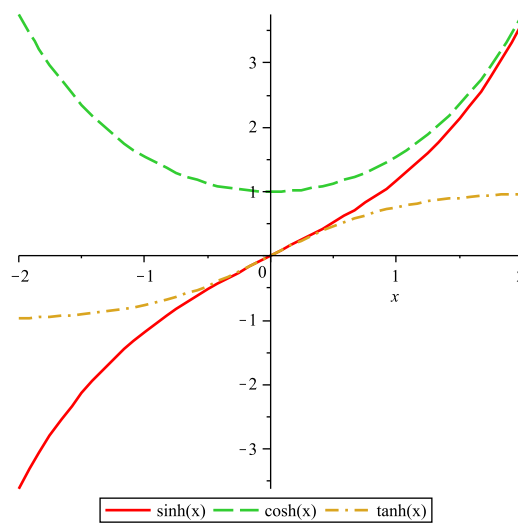


Abbildung 5.8.: Die Graphen von Sinus, Cosinus und Tangens hyperbolicus

**Übungsaufgabe 5.10.23.** Zeigen Sie die folgenden Beziehungen

(a) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

(b) Für alle  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \sin(x + yi) &= \sin(x) \cosh(y) + \cos(x) \sinh(y)i \quad \text{und} \\ \cos(x + yi) &= \cos(x) \cosh(y) - \sin(x) \sinh(y)i. \end{aligned}$$



## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

### 6.1. Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

#### 6.1.1. Der Ableitungsbegriff

Schon aus der Schule werden Sie das Thema dieses Abschnitts kennen. Man möchte das Änderungsverhalten einer Funktion in einem Punkt, d.h. anschaulich gesprochen die Steigung des Funktionsgraphen an dieser Stelle quantitativ fassen. Dazu nähert man die Tangentensteigung mit den bekannten Sekantensteigungen an und kommt auf den Differenzenquotienten. Dessen Grenzwert, die Ableitung, gibt dann die Steigung an. Auch die Differenzierbarkeit einer Funktion ist so im Grunde nichts anderes als ein Grenzwertproblem, das wir mit unseren bisherigen Erkenntnissen behandeln können.

In der Differentialrechnung gibt es sehr große Unterschiede in der Behandlung von Funktionen auf  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Wir werden in dieser Vorlesung nur den reellen Fall behandeln. Die Untersuchung der Differenzierbarkeit von Funktionen komplexer Variablen ist Gegenstand der sogenannten *Funktionentheorie*.

In diesem ganzen Kapitel sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  immer ein Intervall.

**Definition 6.1.1.** (a) Es sei  $x_0 \in I$ . Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar in  $x_0$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in  $\mathbb{R}$  existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert die Ableitung von  $f$  in  $x_0$  und wird mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

(b) Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar auf  $I$ , falls sie in allen Punkten  $x_0 \in I$  differenzierbar ist. In diesem Fall wird durch  $x \mapsto f'(x)$  für  $x \in I$  eine Funktion  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Diese Funktion heißt die Ableitung oder auch Ableitungsfunktion von  $f$  auf  $I$ .

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Bemerkung 6.1.2.** Der Grenzwert in obiger Definition existiert genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert, und die Werte der beiden stimmen dann überein. Man kann also je nachdem, was in der jeweiligen Situation übersichtlicher erscheint, den einen oder den anderen Grenzwert untersuchen.

**Beispiel 6.1.3.** (a) Es sei zunächst  $f(x) = c \in \mathbb{R}$  konstant für alle  $x \in I$ . Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0,$$

also ist  $f$  in  $I$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in I$ .

(b) Wir betrachten  $I = \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 0$  und

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0, \\ -1, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Also existiert der Grenzwert dieses Ausdrucks für  $x \rightarrow x_0 = 0$  nicht, d.h.  $f$  ist in 0 *nicht* differenzierbar. Man beachte, dass  $f$  aber in 0 stetig ist.

Wir haben soeben gesehen, dass es stetige Funktionen gibt, die nicht differenzierbar sind. Wir wollen nun zeigen, dass aber umgekehrt jede differenzierbare Funktion notwendigerweise stetig ist.

**Satz 6.1.4.** *Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar. Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$ .*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , also ist  $f$  in  $x_0$  stetig. □

**Warnung 6.1.5.** Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Umkehrung dieses Satzes falsch ist, vgl. Beispiel 6.1.3 (b).

Wir berechnen beispielhaft noch weitere Ableitungen.

## 6.1. Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

**Beispiel 6.1.6.** (a) Wir betrachten

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0.$$

Also ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Damit ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Allgemein ist für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  die Funktion  $g(x) := x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $g'(x) = nx^{n-1}$ . Das kann man mit Hilfe von Satz 5.2.9 (b) zeigen.

(b) Es sei wieder  $I = \mathbb{R}$  und jetzt

$$f(x) = E(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Mit Hilfe von Beispiel 5.9.16 folgt daraus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$

Also ist die Exponentialfunktion auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $E'(x) = e^x = E(x)$ .

Die folgende Umformulierung der Differenzierbarkeits-Definition wird uns später retten, wenn wir Funktionen in mehreren Variablen differenzieren wollen.

**Satz 6.1.7.** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0 \in I$  genau dann differenzierbar mit  $f'(x_0) = a$ , wenn

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x), \quad x \in I,$$

ist und für die Funktion  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|r(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

*Beweis.* Es gilt  $r(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$  und damit

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a. \quad (6.1)$$

„ $\Rightarrow$ “ Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar mit  $f'(x_0) = a$ , so konvergiert für  $x$  gegen  $x_0$  nach der Definition der Differenzierbarkeit die rechte Seite der Gleichung gegen Null. Also gilt dann auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|r(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

„ $\Leftarrow$ “ Gilt umgekehrt diese Grenzwertbeziehung für  $r$ , so bekommen wir aus (6.1) sofort

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| = 0$$

und das bedeutet gerade  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ , d.h. wir haben Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$  mit  $f'(x_0) = a$ .  $\square$

**Bemerkung 6.1.8.** Diesen Satz kann man auch grafisch-anschaulich interpretieren. Die Funktion  $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$  ist eine lineare Funktion, deren Graph eine Gerade durch  $(x_0, f(x_0))$  mit Steigung  $a$  ist. Der Satz sagt, dass die Ableitung von  $f$  in  $x_0$  gerade die Zahl  $a$  ist, für die der Fehler  $r$  bei Approximation der Funktion  $f$  durch die Gerade mit Steigung  $a$  am kleinsten wird und diese Gerade ist genau die Tangente an den Graphen von  $f$ , die durch  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , beschrieben wird.

### 6.1.2. Ableitungsregeln

Um kompliziertere Ableitungen berechnen zu können, brauchen wir Rechenregeln.

**Satz 6.1.9.** *Es seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt*

(a)  $\alpha f + \beta g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \quad (\text{Linearität})$$

(b)  $fg$  ist differenzierbar in  $x_0$  und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad (\text{Produktregel})$$

(c) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so existiert ein Intervall  $J \subseteq I$  mit  $x_0 \in J$  und  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in J$ . Außerdem ist die Funktion  $f/g : J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \quad (\text{Quotientenregel})$$

## 6.1. Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

*Beweis.* Die Aussagen (a) und (b) behandeln wir als Übungsaufgaben.

Zum Beweis von (c) müssen wir zuerst die Existenz von  $J$  begründen. Da  $g$  in  $x_0$  stetig ist, gibt es nach der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung der Stetigkeit in Satz 5.7.21 ein  $\delta > 0$ , so dass  $|g(x) - g(x_0)| < |g(x_0)|/2$  für alle  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) =: J$  gilt. Für diese  $x$  ist dann  $|g(x)| > |g(x_0)|/2 > 0$ , also insbesondere  $g(x) \neq 0$ .

Weiter gilt für alle  $x \in J$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \right). \end{aligned}$$

Da  $g$  in  $x_0$  differenzierbar ist, ist diese Funktion insbesondere in  $x_0$  stetig (vgl. Satz 6.1.4), also können wir in obiger Gleichung zum Grenzwert für  $x$  gegen  $x_0$  übergehen und erhalten die Behauptung.  $\square$

Es folgt sogleich die Rechenregel für die Verkettung differenzierbarer Funktionen.

**Satz 6.1.10** (Kettenregel). *Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und  $g : I \rightarrow J$  sei differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Weiter sei  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist auch die Funktion  $f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  und es gilt*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

*Beweis.* Wir betrachten die Hilfsfunktion  $\hat{f} : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}, & \text{für } y \in J \text{ mit } y \neq y_0, \\ f'(y_0), & \text{für } y = y_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\hat{f}(y)(y - y_0) = f(y) - f(y_0) \tag{6.2}$$

für alle  $y \in J$  (auch für  $y_0$ !). Da  $f$  in  $y_0$  differenzierbar ist, haben wir nun

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \hat{f}(y) = \hat{f}(y_0) = f'(y_0) = f'(g(x_0)),$$

insbesondere ist  $\hat{f}$  stetig in  $y_0$ . Nach Satz 6.1.4 ist  $g$  stetig in  $x_0$ , und da die Verkettung von stetigen Funktionen wieder stetig ist, sehen wir damit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \hat{f}(g(x)) = \hat{f}(g(x_0)) = f'(g(x_0)).$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

Daher folgt schließlich mit Hilfe von (6.2)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(g(x))(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \hat{f}(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \quad \square\end{aligned}$$

**Beispiel 6.1.11.** Es sei  $a > 0$  gegeben. Wir betrachten auf  $I = \mathbb{R}$  die allgemeine Potenzfunktion

$$\varphi(x) := a^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

vgl. Definition 5.10.4. Dann gilt  $\varphi(x) = e^{x \ln(a)}$ . Um die Kettenregel anzuwenden, setzen wir  $f(y) := e^y$ ,  $y \in \mathbb{R}$  und  $g(x) := x \ln(a)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , und haben so  $\varphi = f \circ g$ . Da sowohl  $f$  als auch  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar sind, sind die Voraussetzungen von Satz 6.1.10 erfüllt und es gilt

$$\varphi'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)} \ln(a) = e^{x \ln(a)} \ln(a) = a^x \ln(a).$$

Wir können sogar eine allgemeine Rechenregel für die Ableitung der Umkehrfunktion angeben.

**Satz 6.1.12.** Es sei  $f \in C(I)$  streng monoton und in  $x_0 \in I$  differenzierbar mit  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , diese ist differenzierbar in  $y_0 = f(x_0)$  und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Beweis.* Die Existenz der Umkehrfunktion folgt sofort aus der strengen Monotonie von  $f$ , vgl. Satz 5.7.20.

Zu gegebenem  $h \neq 0$  setzen wir

$$k := f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + h) - x_0.$$

Da  $f^{-1}$  nach Satz 5.7.20 in  $y_0$  stetig ist, folgt aus  $h \rightarrow 0$  sofort  $k \rightarrow 0$ . Außerdem ist  $x_0 + k = f^{-1}(y_0 + h)$ , d.h.  $f(x_0 + k) = y_0 + h$  und wir erhalten

$$h = f(x_0 + k) - f(x_0).$$

Nun ist damit für  $h \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} &= \frac{f^{-1}(f(x_0 + k)) - x_0}{f(x_0 + k) - f(x_0)} = \frac{x_0 + k - x_0}{f(x_0 + k) - f(x_0)} \\ &= \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)}\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

da  $f'(x_0) \neq 0$  gilt. □

## 6.1. Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

**Bemerkung 6.1.13.** Man beachte, dass die Voraussetzung  $f'(x_0) \neq 0$  notwendig ist. Als Beispiel diene hierzu  $I = [0, \infty)$  und  $f(x) = x^2$ . Dann ist  $f'(x) = 2x$  und somit  $f'(0) = 0$ . Tatsächlich ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

**Beispiel 6.1.14.** (a) Wir bestimmen die Ableitung des Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Sei dazu  $I = \mathbb{R}$  und  $f(x) = e^x$  auf  $I$ . Dann ist  $f^{-1}(x) = \ln(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ , und mit Satz 6.1.12 gilt für  $y = f(x)$  die Beziehung

$$(\ln)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}, \quad y \in (0, \infty).$$

(b) Für  $x > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f(x) := x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$  erhalten wir

$$f'(x) = e^{\alpha \ln(x)} (\alpha \ln(x))' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Die Ableitungsregel für die ganzzahlige Potenz aus Beispiel 6.1.6 (a) verallgemeinert sich also auch auf die allgemeine Potenz, solange  $x > 0$ .

Insbesondere haben wir im Fall  $\alpha = 1/2$

$$(\sqrt{\cdot})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

(c) Der Arcustangens ist die Umkehrfunktion des Tangens. Seine Ableitung ergibt sich also überall da wo die Ableitung des Tangens  $\tan'$  nicht Null ist zu

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))}$$

Unsere Aufgabe bleibt es die Ableitung des Tangens zu bestimmen. Dazu dient der folgende Satz.

**Satz 6.1.15.** Es sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{R}$  mit Konvergenzradius  $r > 0$ . Dann hat auch die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  den Konvergenzradius  $r$ , die Funktion  $f$  ist in allen  $x \in (-r, r)$  differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-r, r).$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

In Worten formuliert bedeutet dieser Satz, dass man eine Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzgebietes summandenweise, unter dem Summenzeichen differenzieren darf. Das ist nicht selbstverständlich, da dabei die Reihenfolge von zwei Grenzwertprozessen vertauscht wird, einmal bildet man die Ableitung der Reihe, im Anderen Fall die Reihe der Ableitungen.

Auf einen Beweis wollen wir hier verzichten, sondern direkt den Nutzen daraus ziehen, dass wir nun die Ableitungen unserer durch Potenzreihen gegebenen Funktionen bestimmen können.

**Beispiel 6.1.16.** (a) Die Potenzreihen von Sinus und Cosinus konvergieren beide auf ganz  $\mathbb{R}$ . Also sind beide nach Satz 6.1.15 auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und die Ableitungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n+1) x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x)\end{aligned}$$

und analog

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

(b) Damit haben wir nach der Quotientenregel für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\cos(x) \neq 0$

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \cos'(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Das lässt sich nun auf zwei verschiedene Weisen vereinfachen, durch kürzen und mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras. Damit erhält man

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Je nach Kontext sind beide Darstellungen von Nutzen.

Damit können wir nun die Ableitung des Arcustangens aus Beispiel 6.1.14 fertig bestimmen. Dort hatten wir

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Wir sammeln unseren Funktionenzoo noch einmal in einer Tabelle:



## 6.1. Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

Name	Symbol	Definitionsbereich	Bild	Ableitung
E-funktion	e	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	e
(nat.) Logarithmus	ln	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$
Sinus	sin	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	cos
Cosinus	cos	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$-\sin$
Tangens	tan	$\mathbb{R} \setminus \{(k + 1/2)\pi\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
Arcussinus	arcsin	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcuscosinus	arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcustangens	arctan	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\frac{1}{1+x^2}$
Sinus hyperbolicus	sinh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	cosh
Cosinus hyp.	cosh	$\mathbb{R}$	$[1, \infty)$	sinh
Tangens hyp.	tanh	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$

Den Satz über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen können wir aber auch andersherum gewinnbringend verwenden, um den Reihenwert von Potenzreihen auszurechnen. Wir betrachten das an einem Beispiel.

**Beispiel 6.1.17.** Wir betrachten die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ . Diese hat nach dem Satz von Hadamard den Konvergenzradius 1. Also ist auf  $(-1, 1)$  durch diese Reihe eine Funktion gegeben. Aber welche?

Dazu überlegen wir uns, dass für alle  $x \in (-1, 1)$  nach Satz 6.1.15 gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'.$$

Die Reihe, die nun ganz rechts steht, ist, bis auf den fehlenden ersten Summanden, die uns schon bekannte geometrische Reihe. Also bekommen wir für alle  $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)' = x \frac{-1}{(1-x)^2} (-1) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

### 6.1.3. Höhere Ableitungen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem abschreckenden Beispiel.

**Beispiel 6.1.18.** Wir betrachten auf  $I = [0, \infty)$  die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^{3/2} \sin(1/x), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

vgl. Abbildung 6.1.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

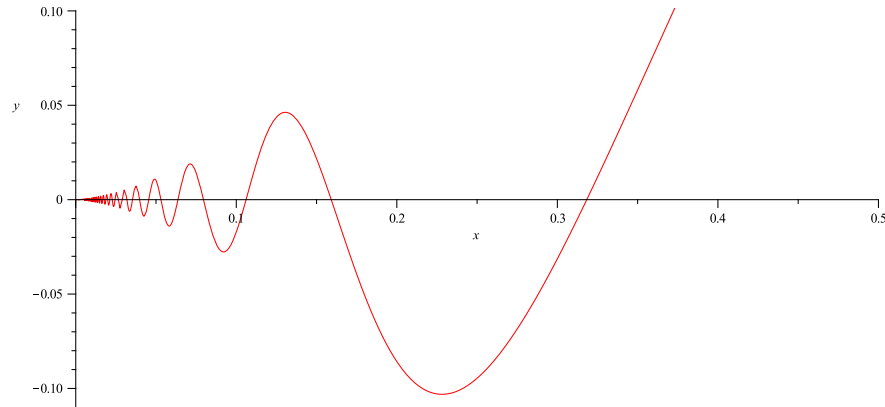


Abbildung 6.1.: Der Graph der Funktion  $f(x) = x^{3/2} \sin(1/x)$

Dann ist  $f$  in allen  $x > 0$  offensichtlich differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} \sqrt{x} \sin(1/x) + x^{3/2} \cos(1/x) \left( -\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{x} \sin(1/x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(1/x). \end{aligned}$$

Um  $f$  auf Differenzierbarkeit in 0 zu untersuchen, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| &= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^{3/2} \sin(1/x)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |\sqrt{x} \sin(1/x)| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0. \end{aligned}$$

Da der Grenzwert selbst über etwas Positives gebildet wird, muss er auch größer oder gleich Null und damit gleich Null sein. Somit ist  $f$  auf ganz  $[0, \infty)$  differenzierbar, wobei  $f'(0) = 0$  gilt.

Anhand dieses Beispiels sieht man nun, dass etwas Abstruses passieren kann. Während  $f$  in Null differenzierbar ist, ist die Funktion  $f' : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  in Null nicht einmal mehr stetig. Um das zu sehen, betrachten wir die Folge  $x_n := 1/(2n\pi)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dann gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$

$$f'(x_n) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \sin(2n\pi) - \sqrt{2n\pi} \cos(2n\pi) = -\sqrt{2n\pi} \cdot 1 = -\sqrt{2\pi} \sqrt{n}.$$

Also ist die Funktion  $f'$  auf dem kompakten Intervall  $[0, 1]$  nicht beschränkt, sie kann also nach Satz 5.7.28 nicht stetig sein.

**Definition 6.1.19.** Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $I$  differenzierbare Funktion und ist  $f'$  auf  $I$  stetig, so nennt man  $f$  stetig differenzierbar.

Man schreibt  $C^1(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig differenzierbar}\}.$

## 6.1. Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

Ist eine Funktion stetig differenzierbar, so können wir uns natürlich die Frage stellen, ob ihre Ableitungsfunktion selbst wieder differenzierbar ist. Das führt auf den Begriff der zweiten und allgemeiner  $n$ -ten Ableitung, die wir rekursiv definieren.

**Definition 6.1.20.** (a) Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $I$ ,  $x_0 \in I$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Dann heißt die Funktion  $f$  in  $x_0$  (bzw. auf  $I$ )  $n$  mal differenzierbar, falls sie auf  $I$  schon  $(n-1)$  mal differenzierbar ist und die Funktion  $f^{(n-1)}$  in  $x_0$  (bzw. auf  $I$ ) wieder differenzierbar ist.

In diesem Fall heißt  $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$  die  $n$ -te Ableitung von  $f$  in  $x_0$ , bzw.  $x \mapsto f^{(n)}(x)$  die  $n$ -te Ableitungsfunktion von  $f$  auf  $I$ .

(b) Ist die  $n$ -te Ableitung von  $f$  auf  $I$  selbst sogar wieder stetig auf  $I$ , so sagt man  $f$  sei  $n$ -mal stetig differenzierbar auf  $I$ . Man schreibt

$$C^n(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

(c) Ist  $f \in C^n(I)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so nennt man  $f$  beliebig oft differenzierbar. Man verwendet dafür auch die Bezeichnung

$$f \in C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I).$$

**Bemerkung 6.1.21.** Es ist oft praktisch die Funktion selbst als ihre nullte Ableitung aufzufassen und entsprechend  $f^{(0)} := f$  zu setzen.

**Beispiel 6.1.22.** (a) Ist  $f(x) = \sin(x)$ , so gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x), & f''(x) &= -\sin(x), \\ f'''(x) &= -\cos(x), & f^{(4)}(x) &= \sin(x) = f(x). \end{aligned}$$

(b) Betrachten wir auf  $\mathbb{R}$  die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

so ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'(x) = 2|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (nachrechnen!), aber da die Betragsfunktion in Null nicht differenzierbar ist (vgl. Beispiel 6.1.3 (b)), ist diese Funktion in Null nicht mehr differenzierbar, d.h.  $f$  ist in  $x_0 = 0$  stetig differenzierbar aber nicht zweimal differenzierbar.

(c) Es sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ , d.h.  $f$  sei durch eine Potenzreihe gegeben, von der wir annehmen wollen, dass der Konvergenzradius  $r > 0$  ist.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

In Satz 6.1.15 haben wir gesehen, dass  $f$  dann auf  $I := (x_0 - r, x_0 + r)$  differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in I,$$

und dass dies wieder eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$  ist. Also ist nach nochmaliger Anwendung dieses Satzes  $f$  sogar zweimal differenzierbar auf  $I$  mit

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x - x_0)^{n-2}, \quad x \in I.$$

Durch weitere Iteration dieses Arguments (Formalisten mögen eine saubere Induktion führen), ist dann  $f$  auf  $I$  beliebig oft differenzierbar und es gilt für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-(k-1))(x - x_0)^{n-k}, \quad x \in I.$$

Setzt man speziell  $x = x_0$  ein, so erhält man die für spätere Betrachtungen wichtige Beziehung

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 = k! a_k.$$

Diese verrät uns insbesondere die Gestalt der Koeffizienten  $a_k$  für Funktionen, die durch eine Potenzreihe dargestellt werden:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

**Übungsaufgabe 6.1.23.** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n$$

und geben Sie eine geschlossene Darstellung, der durch diese Potenzreihe gegebenen Funktion an.

## 6.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Wir sammeln wertvolle Eigenschaften differenzierbarer Funktionen. Den Start bildet der Mittelwertsatz, den wir hier nicht beweisen wollen.

## 6.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

**Satz 6.2.1** (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung). *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f \in C([a, b])$  sei differenzierbar in  $(a, b)$ . Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$ , so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \text{bzw. gleichbedeutend} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

*gilt.*

Anschaulich bedeutet dieser Satz, dass die Sekantensteigung der Funktion, die man anhand der beiden Punkte  $a$  und  $b$  erhält, irgendwann dazwischen tatsächlich als Tangentensteigung angenommen wird, vgl. Abbildung 6.2. Man kann sich das verdeutlichen, indem man versucht, eine differenzierbare Funktion zu zeichnen, für die das nicht gilt, was (hoffentlich) nicht klappen wird.

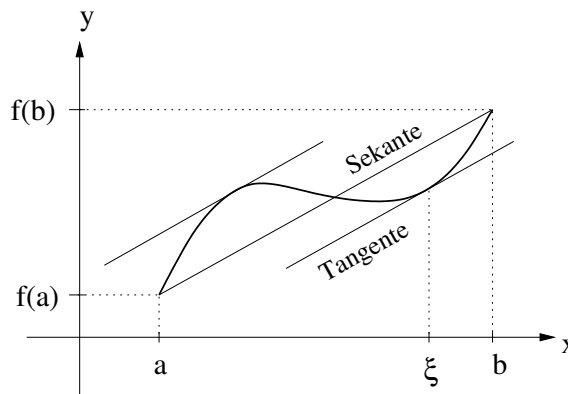


Abbildung 6.2.: Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Wir wollen nun einige Folgerungen aus dem Mittelwertsatz ziehen.

**Satz 6.2.2.** (a) (**Satz von Rolle**) *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f \in C([a, b])$ . Ist  $f$  auf  $(a, b)$  differenzierbar und gilt  $f(a) = f(b)$ , so gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .*

(b) *Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$  differenzierbar. Dann gilt*

- Ist  $f' = 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  auf  $I$  konstant.*
- Ist  $f' > 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  auf  $I$  streng monoton wachsend.*
- Ist  $f' < 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  auf  $I$  streng monoton fallend.*
- Ist  $f' \geq 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  auf  $I$  monoton wachsend.*
- Ist  $f' \leq 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  auf  $I$  monoton fallend.*

(c) *Sind  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  differenzierbare Funktionen und gilt  $f' = g'$  auf  $I$ , so gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x) = g(x) + c$  für alle  $x \in I$  gilt.*

*Beweis.* (a) folgt direkt aus dem Mittelwertsatz.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

- (b) Es seien  $a, b \in I$  mit  $a < b$ . Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$ . Ist die Ableitung von  $f$  nun konstant Null auf  $I$ , so muss also  $f(a) = f(b)$  gelten. Da  $a$  und  $b$  in  $I$  beliebig waren, ist  $f$  auf  $I$  konstant.

Weiter ist der Ausdruck  $b - a$  immer positiv, also ergibt sich das Vorzeichen von  $f(b) - f(a)$  direkt aus dem Vorzeichen von  $f'(\xi)$ . Daraus kann man die 4 restlichen Behauptungen sofort ablesen.

- (c) Wir setzen  $h := f - g$ . Dann ist  $h' = f' - g' = 0$  auf  $I$ , d.h.  $h$  ist konstant nach (b).  $\square$

**Bemerkung 6.2.3.** Mit Hilfe von Satz 6.2.2 (b) können wir nun einen schnellen Beweis des trigonometrischen Pythagoras aus Satz 5.10.8 geben. Wir berechnen die Ableitung der Funktion  $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , zu

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)(-\sin(x)) = 0,$$

also ist  $f$  konstant. Den Wert der Konstante können wir leicht bestimmen, denn es ist

$$f(0) = \sin^2(0) + \cos^2(0) = 0^2 + 1^2 = 1.$$

**Beispiel 6.2.4.** Wir haben in Beispiel 6.1.16 (b) gesehen, dass  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$  gilt. Damit ist die Ableitung des Tangens auf seinem gesamten Definitionsbereich positiv, vgl. Abbildung 5.7. Trotzdem ist er nicht auf dem ganzen Definitionsbereich strikt monoton wachsend, wie ein Blick auf die selbe Abbildung sofort zeigt.

Dieses Beispiel zeigt, dass Satz 6.2.2 (b) wirklich nur gilt, wenn das Vorzeichen der Ableitung auf einem *Intervall* die jeweilige Voraussetzung erfüllt.

**Beispiel 6.2.5.** Der Mittelwertsatz ist auch ein wertvolles Hilfsmittel um Differenzen abzuschätzen. Als Beispiel zeigen wir, dass der Arcustangens auf  $\mathbb{R}$  Lipschitz-stetig ist. Wir müssen ein  $L \geq 0$  finden, so dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq L|x - y|,$$

vgl. Definition 5.7.22. Seien also  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$  gegeben. Da der Arcustangens auf  $[x, y]$  differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz anwenden und bekommen ein  $\xi \in (x, y)$  mit

$$\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan'(\xi)(x - y) = \frac{1}{1 + \xi^2}(x - y).$$

Da für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  die Abschätzung

$$\frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

## 6.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

gilt, liefert das

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| = \left| \frac{1}{1 + \xi^2} \right| |x - y| \leq 1|x - y|,$$

wir können also  $L = 1$  wählen.

Die Differenzialrechnung liefert auch ein starkes Werkzeug zur Bestimmung von Grenzwerten, nämlich den folgenden Satz.

**Satz 6.2.6** (Satz von de l'Hospital). *Es sei  $(a, b)$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  (dabei ist hier  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  zugelassen) und  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Gilt dann*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

und existiert der Grenzwert

$$L := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(hierbei ist wieder  $L = \pm\infty$  zugelassen), dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Die Aussage dieses Satzes bleibt richtig, wenn man überall  $x \rightarrow a$  durch  $x \rightarrow b$  ersetzt.

**Warnung 6.2.7.** Dieser Satz hat viele Voraussetzungen und diese sind wirklich alle nötig! Im Eifer des Gefechts gegen einen hartnäckigen Grenzwert wird hier gerne die eine oder andere vergessen. Besonderer Beliebtheit erfreut es sich, nicht nachzuprüfen, ob es sich wirklich um einen sogenannten „uneigentlichen“ Grenzwert der Form  $0/0$  oder  $\pm\infty/\pm\infty$  handelt. Nur solche kann dieser Satz behandeln!

**Beispiel 6.2.8.** (a) Es seien  $\alpha, \beta > 0$ . Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\alpha^x - \beta^x}{x}$$

untersuchen. Wir betrachten das Intervall  $(0, 1)$  und die Funktionen  $f(x) = \alpha^x - \beta^x$  und  $g(x) = x$  auf  $(0, 1)$ . Diese sind dort beide differenzierbar und es gilt  $g'(x) = 1 \neq 0$  für alle  $x \in (0, 1)$ . Außerdem ist

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (\alpha^x - \beta^x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \alpha^x - \lim_{x \rightarrow 0+} \beta^x = 1 - 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x).$$

Wir können also den Satz von de l'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\alpha^x - \beta^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\alpha^x \ln(\alpha) - \beta^x \ln(\beta)}{1} = \ln(\alpha) - \ln(\beta),$$

was wohl nur sehr schwer zu erraten gewesen wäre.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

(b) Ebenso kann man zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

In diesem Fall hat man es mit einem uneigentlichen Grenzwert der Form  $\infty/\infty$  zu tun.

(c) Sind alle Voraussetzungen jeweils erfüllt kann man den Satz auch mehrmals anwenden. So gilt z.B.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Dabei ist die Anwendung der Regel von de l'Hospital beide Male u.a. dadurch gerechtfertigt, dass ein Grenzwert der Form  $0/0$  vorliegt.

(d) Eine kleine Umformung führt dazu, dass man mit der Regel von de l'Hospital auch Grenzwerte der Form  $0 \cdot \infty$  behandeln kann. Das geht exemplarisch so:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Man beachte, dass hier u.a. wegen  $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0+} 1/x = \infty$  die Anwendung des Satzes gerechtfertigt war.

Dieser Grenzwert ermöglicht uns nun zusammen mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion noch die Berechnung von

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

Das ist auch eine nachträgliche Rechtfertigung für die in Definition 5.2.1 (c) so willkürlich erscheinende Setzung  $0^0 = 1$ .

Wir haben in Beispiel 6.1.22 (c) gesehen, dass eine Funktion, die auf einem Intervall durch eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  gegeben ist, immer Koeffizienten  $a_n$  der Form

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

aufweist. Haben wir umgekehrt eine Funktion aus  $C^\infty(I)$  vorliegen, können wir für ein  $x_0 \in I$  obige Koeffizienten ausrechnen und die dadurch gegebene Potenzreihe betrachten. Diese bekommt zunächst einen Namen.

**Definition 6.2.9.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $x_0 \in I$  und  $f \in C^\infty(I)$ .

(a) Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

heißt Taylorreihe von  $f$  um  $x_0$ .



## 6.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

(b) Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  heißt das Polynom

$$T_{k,f}(x; x_0) := \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

das Taylorpolynom  $k$ -ten Grades von  $f$  in  $x_0$ .

**Bemerkung 6.2.10.** Das Taylorpolynom  $k$ -ten Grades von  $f$  in  $x_0$  ist das eindeutige Polynom, das an der Stelle  $x_0$  in der nullten bis  $k$ -ten Ableitung mit der Funktion  $f$  übereinstimmt. Anschaulich sollte es also so etwas wie die bestmögliche Approximation an die Funktion  $f$  sein, die durch ein Polynom vom Grad  $k$  möglich ist.

Es erhebt sich die Frage, ob die Approximation wirklich gut ist, ob sie zum Beispiel mit steigendem Grad immer besser wird und im Grenzwert die Taylorreihe wirklich die Funktion exakt darstellt, d.h. ob in einer Umgebung von  $x_0$  in der Situation obiger Definition gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Ein solches Verhalten hört sich plausibel an und wäre auch sehr wünschenswert, denn es gäbe ein Mittel an die Hand, um die Auswertung komplizierter Funktionen näherungsweise auf die Auswertung eines der Funktion angepassten Näherungspolynoms zurückzuführen.

Leider ist die Antwort auf die Frage in obiger Bemerkung ein entschiedenes „manchmal“. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

**Beispiel 6.2.11.** Wir wählen  $I = \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 0$  und

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  offensichtlich in jedem Punkt  $x \neq 0$  differenzierbar, aber wir sind ja gerade an  $x_0 = 0$  interessiert. Um Differenzierbarkeit in Null zu untersuchen, müssen wir über den Differenzenquotienten gehen. Es ist mit  $t := 1/x$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \frac{e^{-t^2}}{1/t} = \frac{t}{e^{t^2}}.$$

Dieser Ausdruck strebt für  $x$  gegen 0, d.h.  $t$  gegen  $\pm\infty$ , gegen Null. Das sieht man z.B. mittels der Regel von de l'Hospital. Also ist  $f$  in Null differenzierbar und es gilt  $f'(0) = 0$ . Mittels Induktion kann man nun zeigen, dass  $f$  in 0 sogar beliebig oft differenzierbar ist und  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Also ist in diesem Fall die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \neq f(x) \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

Da die Taylorreihe nach einem vielversprechenden Mittel aussieht, um komplizierte Funktionen zu untersuchen und Ihre Potenzreihenentwicklungen auszurechnen, und da diese ein unverzichtbares Hilfsmittel der Analysis, der Physik, der Ingenieurwissenschaften und vieler anderer Bereiche sind, hätten wir gerne ein Kriterium, wann die Taylorreihe brav zu ihrer Funktion passt. Diese Frage ist das Thema des Satzes von Taylor.

**Satz 6.2.12** (Satz von Taylor). *Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $x, x_0 \in I$  und für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k + 1$ -mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass gilt*

$$f(x) = T_{k,f}(x; x_0) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

**Bemerkung 6.2.13.** (a) Im Fall  $k = 0$  ist dieser Satz genau der Mittelwertsatz (vgl. Satz 6.2.1).

(b) Der Fehlerterm

$$R_{k,f}(x; x_0) := \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1},$$

der die Differenz zwischen  $f(x)$  und der Näherung durch das Taylorpolynom  $k$ -ten Grades beschreibt, wird auch als *Restglied* bezeichnet.

(c) Der Wert von  $\xi$  hängt natürlich jeweils von  $x$ ,  $x_0$  und  $k$  ab und ist im Allgemeinen nicht zu bestimmen. Das wäre auch sehr erstaunlich, denn dann wäre ja die Berechnung von  $f$  auf den Schwierigkeitsgrad eines Polynoms zurückgeführt, was dann für einfach nur  $(k + 1)$ -mal differenzierbare Funktionen doch ein bisschen zu simpel wäre. Im  $\xi$  steckt sozusagen die Komplexität der Funktion  $f$ .

Trotzdem ist der Satz Gold wert, denn er übersetzt jede Information über die  $(k + 1)$ -te Ableitung in eine Information darüber wie genau das Taylorpolynom  $k$ -ten Grades die Funktion  $f$  annähert.

*Beweis von Satz 6.2.12.* Wir betrachten nur den Fall  $x_0 < x$  (der andere geht analog) und setzen

$$\varrho := \frac{(k+1)!}{(x - x_0)^{k+1}} (f(x) - T_{k,f}(x; x_0)).$$

Dann gilt

$$f(x) - T_{k,f}(x; x_0) = \varrho \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

## 6.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

und unsere Aufgabe ist es ein  $\xi \in (a, b)$  zu finden, so dass  $\varrho = f^{(k+1)}(\xi)$  ist. Dazu schreiben wir die letzte Gleichung so um, dass auf der rechten Seite Null steht und definieren dann die Hilfsfunktion

$$g(t) := f(x) - T_{k,f}(x; t) - \varrho \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} = f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n - \varrho \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

für  $t \in [x_0, x]$ . Da in  $g$  höchstens die  $k$ -te Ableitung von  $f$  auftaucht ist nach den Voraussetzungen  $g$  noch einmal differenzierbar auf  $[x_0, x]$ . Außerdem gilt direkt  $g(x) = f(x) - f(x) = 0$  und so wie wir  $\varrho$  gewählt haben gilt auch  $g(x_0) = 0$ . Nach dem Satz von Rolle 6.2.2 (a) gibt es also ein  $\xi \in (x_0, x)$ , so dass  $g'(\xi) = 0$  gilt. Andererseits ist (nachrechnen!)

$$g'(t) = \varrho \frac{(x-t)^k}{k!} - f^{(k+1)}(t) \frac{(x-t)^k}{k!},$$

womit

$$0 = g'(\xi) = \varrho \frac{(x-\xi)^k}{k!} - f^{(k+1)}(\xi) \frac{(x-\xi)^k}{k!}$$

und schließlich  $\varrho = f^{(k+1)}(\xi)$  folgt.  $\square$

**Beispiel 6.2.14.** Wir betrachten die Funktion  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \ln(1+x)$  um  $x_0 = 0$ . Zur Aufstellung der Taylor-Polynome und der Taylor-Reihe müssen wir alle Ableitungen von  $f$  bestimmen. Es ist für  $x > -1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

und per Induktion allgemein

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Insbesondere ist also für alle  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Da  $f(0) = 0$  gilt, ist damit das  $k$ -te Taylorpolynom von  $f$  um Null

$$T_{k,f}(x; 0) = \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

und die Taylorreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

Die spannende Frage ist nun natürlich, ob diese zumindest in der Nähe der Null eine brauchbare Näherung des Logarithmus liefern. Zunächst sieht man mit dem Satz von Hadamard, dass die Taylorreihe Konvergenzradius Eins hat, wir müssen uns also auf jeden Fall auf  $x \in (-1, 1]$  beschränken und wir werden, um den Rechenaufwand einzudämmen ab jetzt nur noch  $x \in [0, 1]$  behandeln.

Die Graphen der ersten Taylorpolynome in Abbildung 6.3 sehen ja schon mal sehr ermutigend aus, aber das ist natürlich noch kein Beweis.

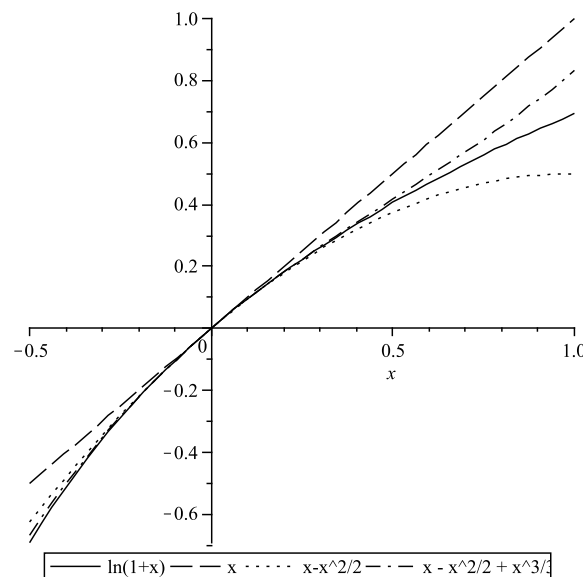


Abbildung 6.3.: Die Funktion  $x \mapsto \ln(1+x)$  mit den Taylorpolynomen 1., 2. und 3. Grades um Null

Wir schlachten nun den Satz von Taylor aus. Dieser besagt, dass es für jedes  $x > -1$  ein  $\xi$  zwischen Null und  $x$  gibt mit

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= f(x) = T_{k,f}(x; 0) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &= T_{k,f}(x; 0) + \frac{(-1)^k}{(1+\xi)^{k+1}(k+1)} x^{k+1}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass das Taylorpolynom tatsächlich eine Näherung der Funktion  $f$  darstellt, d.h. dass die Taylorreihe von  $f$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleich  $f$  ist, müssen wir das Restglied

$$R_{k,f}(x; 0) = \frac{(-1)^k}{(1+\xi)^{k+1}(k+1)} x^{k+1}$$

untersuchen und zeigen, dass dieses für  $k$  gegen unendlich gegen Null geht. Im von uns behandelten Fall  $x \in [0, 1]$  muss  $0 \leq \xi < x \leq 1$  gelten und wir bekommen

## 6.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

deshalb für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq |R_{k,f}(x; 0)| = \frac{x^{k+1}}{(1+\xi)^{k+1}(k+1)} \leq \frac{x^{k+1}}{k+1} \leq \frac{1}{k+1},$$

was mit dem Sandwich-Theorem für jedes  $x \in [0, 1]$  bedeutet, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{k,f}(x; 0) = 0$$

ist.

Damit haben wir nun für alle  $x \in [0, 1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

und es sei der Vollständigkeit halber erwähnt, dass diese Darstellung tatsächlich für alle  $x \in (-1, 1]$  gilt.

Damit haben wir zum Einen die für uns neue Potenzreihendarstellung des Logarithmus gewonnen, zum Anderen finden wir im Spezialfall  $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

den Reihenwert der alternierenden harmonischen Reihe (vgl. Beispiel 5.5.8).

Um etwaigen Mäkeleien zuvorzukommen: Wer meint, dass das aber viel Aufwand für so einen mickrigen Reihenwert war, hat noch nie selbst versucht einen Reihenwert zu bestimmen.

**Beispiel 6.2.15.** Als zweites Taylor-Beispiel noch ein klassisches Näherungsproblem: Man bestimme den Wert  $1,05^{1,02}$  mit einer Genauigkeit von mindestens  $10^{-4}$ .

Wir verwenden die Funktion  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^{1,02}$  und betrachten ihr Taylorpolynom 1. Ordnung mit Entwicklungsstelle 1. Dazu berechnen wir

$$f'(x) = 1,02 \cdot x^{0,02} \quad f''(x) = 1,02 \cdot 0,02 \cdot x^{-0,98}$$

und  $f(1) = 1$ , sowie  $f'(1) = 1,02$ . Damit gilt

$$T_{1,f}(x; 1) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 1,02(x-1).$$

Für den Näherungsfehler  $R_{1,f}(1,05; 1)$ , der uns interessiert, erhalten wir

$$R_{1,f}(1,05; 1) = \frac{1}{2} f''(\xi)(1,05-1)^2 = 1,02 \cdot 0,01 \cdot \xi^{-0,98} \cdot 0,05^2 = 2,55 \cdot 10^{-5} \cdot \xi^{-0,98}$$

mit einem  $\xi$  zwischen 1 und 1,05. Nun ist die Funktion  $g(t) := t^{-0,98}$  auf dem Intervall  $(1; 1,05)$  monoton fallend, denn für die Ableitung gilt auf diesem Intervall

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

$g'(t) = -0,98 \cdot t^{-1,98} < 0$ . Also nimmt  $g$  auf dem Intervall  $(1; 1,05)$  maximal den Wert  $g(1) = 1$  an und wir können

$$|R_{1,f}(1,05;1)| = 2,55 \cdot 10^{-5} \cdot \xi^{-0,98} \leq 2,55 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

abschätzen. Damit ist der Wert

$$T_{1,f}(1,05;1) = 1 + 1,02(1,05 - 1) = 1 + 1,02 \cdot 0,05 = 1,051$$

ein für die Aufgabenstellung ausreichend exakter Näherungswert von  $1,05^{1,02}$ .

### 6.3. Extremwerte

**Definition 6.3.1.** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- (a) Man sagt, dass  $f$  in  $x_0 \in D$  ein globales Maximum (bzw. globales Minimum) hat, falls  $f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in D$  gilt.
- (b)  $f$  hat in  $x_0 \in D$  ein relatives Maximum (bzw. relatives Minimum), falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt.
- (c) Allgemein spricht man von einem globalen bzw. relativen Extremum in  $x_0$ , wenn  $f$  dort ein entsprechendes Maximum oder Minimum hat.

**Bemerkung 6.3.2.** Statt „relatives“ Extremum/Maximum/Minimum ist auch die Bezeichnung *lokales Extremum/Maximum/Minimum* üblich.

**Satz 6.3.3.** Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Ist  $x_0$  ein innerer Punkt von  $I$  und hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Extremum, so gilt  $f'(x_0) = 0$ .

**Warnung 6.3.4.** Da dieser Satz so oft verwendet wird, wird er auch gerne falsch verwendet. Darum hier (aus vielfach gegebenem Anlass) zwei Warnungen.

- (a) Die Voraussetzung „ $x_0$  ist innerer Punkt“ ist wesentlich. Ein einfaches Beispiel ist die Funktion  $f(x) = x$  auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Diese hat ein relatives Minimum in  $x_0 = 0$ , aber  $f'(0) = 1$ .
- (b) Die Umkehrung gilt nicht! Das sieht man sofort an dem Beispiel  $f(x) = x^3$  auf  $I = \mathbb{R}$ . Dann ist nämlich  $f'(x) = 3x^2$ , also  $f'(0) = 0$ , aber diese Funktion hat in 0 kein Extremum, denn für jedes  $\varepsilon > 0$  finden sich im Intervall  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  Punkte mit  $f(x) > 0 = f(0)$ , z.B.  $x = 1/(2\varepsilon)$ , und mit  $f(x) < 0 = f(0)$ , z.B.  $x = -1/(2\varepsilon)$ .

*Beweis von Satz 6.3.3.* Wir gehen zunächst davon aus, dass  $f$  in  $x_0$  ein relatives Maximum hat. Dann existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  gleichzeitig  $x \in I$  und  $f(x) \leq f(x_0)$  gilt. Die erste Bedingung können wir erfüllen, weil  $x_0$  innerer Punkt von  $I$  ist, die zweite ist genau die Definition des relativen Maximums. Für alle solchen  $x$  außer  $x = x_0$  ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, & \text{falls } x > x_0, \\ \geq 0, & \text{falls } x < x_0. \end{cases}$$

Da  $f$  außerdem in  $x_0$  differenzierbar ist, muss damit gelten

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Also ist  $f'(x_0) = 0$ .

Wir widmen uns nun dem Fall, dass  $f$  ein relatives Minimum in  $x_0$  hat. Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in I$  mit  $|x - x_0| < \delta$  die Ungleichung  $f(x) \geq f(x_0)$  erfüllt ist. Also ist für alle diese  $x$  auch  $-f(x) \leq -f(x_0)$  und wir sehen, dass die Funktion  $-f$  in  $x_0$  ein relatives Maximum hat. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt also  $f'(x_0) = -(-f)'(x_0) = -0 = 0$ .  $\square$

Mögliche Extremstellen finden wir also an den Nullstellen der Ableitungen, aber wie können wir nun klären, ob an einer solchen kritischen Stelle tatsächlich ein Extremum vorliegt und wenn das der Fall ist, ob es ein Minimum oder ein Maximum ist?

Wenn unsere Funktion zumindest zweimal stetig differenzierbar ist, hilft dabei wieder der Satz von Taylor. Wir betrachten also eine Funktion  $f \in C^2(I)$  auf einem Intervall  $I$  und nehmen an, dass in einem  $x_0 \in I^\circ$ , also einem inneren Punkt,  $f'(x_0) = 0$  gilt. Dann sagt der Satz von Taylor 6.2.12 mit  $k = 1$ , dass es für jedes  $x \in I$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$  gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

Also ist

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

Ist nun  $f''(x_0) > 0$ , so gilt dieses Vorzeichen dank der Stetigkeit von  $f''$  auch in einer ganzen Umgebung von  $x_0$ . Für alle  $x$  in dieser Umgebung muss auch das zugehörige  $\xi$  in der Umgebung sein, es gilt also dann  $f(x) - f(x_0) > 0$ , denn  $(x - x_0)^2$  ist ja immer positiv. Also ist dann  $f(x) > f(x_0)$  für alle  $x$  in dieser Umgebung, was gerade bedeutet, dass in  $x_0$  ein lokales Minimum vorliegt.

Mit einer analogen Vorzeichenbetrachtung kann man auch den Fall eines Maximums erledigen.

Ist auch die zweite Ableitung an der kritischen Stelle Null, so kann man, genügende Differenzierbarkeit vorausgesetzt, die Ordnung des betrachteten Taylorpolynoms weiter nach oben treiben und erhält dann das folgenden Resultat.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Satz 6.3.5.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I^\circ$  und  $f \in C^n(I)$  für ein  $n \geq 2$ . Weiter gelte  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ , aber  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Ist nun  $n$  ungerade, so hat  $f$  in  $x_0$  kein Extremum, ist  $n$  gerade, so liegt in  $x_0$  ein Extremum vor, und zwar falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$  ein Minimum und falls  $f^{(n)}(x_0) < 0$  ein Maximum.

**Beispiel 6.3.6.** Wir bestimmen die lokalen und globalen Extrema der Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = xe^{-x}$ . Es ist  $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ ,  $x \in [0, \infty)$ , also haben wir genau dann  $f'(x_0) = 0$ , wenn  $e^{-x_0} = x_0 e^{-x_0}$ , d.h.  $x_0 = 1$  ist. Wegen  $f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x} - 2e^{-x}$ , ist  $f''(x_0) = 1/e - 2/e = -1/e < 0$ , wir haben also nach obigem Satz in  $x_0 = 1$  ein lokales Maximum.

Um festzustellen, ob dieses auch ein globales Maximum ist, müssen wir noch die Ränder des Definitionsbereiches betrachten. Es gilt  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1/e$  und nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0.$$

Also liegt in  $x_0 = 1$  tatsächlich das globale Maximum vor. Das globale Minimum findet sich in Null, denn es ist  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [0, \infty)$ . Dieses ist dann natürlich auch ein lokales Minimum.

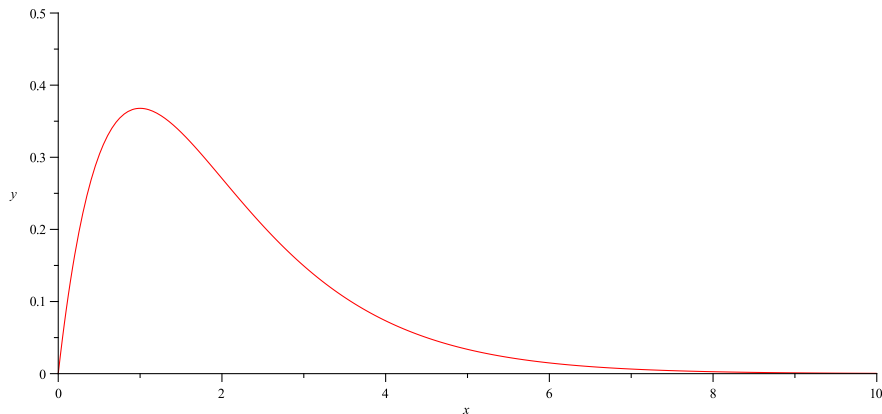


Abbildung 6.4.: Der Graph der Funktion  $x \mapsto xe^{-x}$  auf  $[0, 10]$

## 6.4. Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen – Partielle Ableitungen

Wir betrachten nun wieder Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  und wollen den Ableitungsbegriff und die Differentialrechnung auf diese erweitern.



Die direkte Übertragung der Definition über den Differenzenquotienten, vgl. Definition 6.1.1 und Bemerkung 6.1.2,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ist nicht möglich, denn nun sind ja  $x, x_0 \in G \subseteq \mathbb{R}^d$  und damit Vektoren und durch Vektoren kann man nicht teilen. Wir haben hier also ein strukturelles Problem. In diesem und dem nächsten Abschnitt werden wir zwei Ansätze kennenlernen, um dieses Problem zu umgehen, die beide im Wesentlichen zum selben Ergebnis führen. Trotzdem sind beide Zugänge wichtig, da der erste ohne den zweiten keine vernünftige Theorie ergibt und der zweite ohne den ersten zu einer nicht praktikabel zu berechnenden Ableitung führt.

Wir versuchen zunächst den Differenzenquotienten zu retten, indem wir uns darauf beschränken mehrere eindimensionale Ableitungen zu berechnen, die zusammen das Verhalten der Funktion  $f$  beschreiben sollen. Dazu berechnen wir die Ableitung zunächst nur in eine Richtung.

**Definition 6.4.1.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion,  $x_0 \in G$  und  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Existiert dann der Grenzwert

$$(\partial_v f)(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h},$$

so heißt  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $v$  differenzierbar und  $(\partial_v f)(x_0)$  die Richtungsableitung von  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $v$ .

Anschaulich bedeutet diese Definition, dass wir uns nur die Funktionswerte von  $f$  entlang der Geraden  $\{x_0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$  in  $G$  anschauen und den Schnitt von  $f$  entlang dieser Geraden im eindimensionalen Sinne differenzieren. Wir bestimmen die Steigung am Hang, wenn wir stur in Richtung  $v$  laufen. Dies ist in Abbildung 6.5 angedeutet.

**Übungsaufgabe 6.4.2.** Definiert man  $g_v(h) := f(x_0 + hv)$  für alle  $h \in \mathbb{R}$ , für die  $x_0 + hv$  in  $G$  liegt, so gilt

$$(\partial_v f)(x_0) = g'_v(0).$$

Im Normalfall werden wir den  $\mathbb{R}^d$  mit der Standardbasis ausstatten. Die Ableitungen in Richtung der Standardbasisvektoren bekommen einen eigenen Namen.

**Definition 6.4.3.** Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion und  $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^d$ .

- (a) Existieren in einem  $x_0 \in G$  die Richtungsableitungen von  $f$  in alle Richtungen  $e_1, e_2, \dots, e_d$ , so heißt  $f$  in  $x_0$  partiell differenzierbar. Man schreibt dann für  $j = 1, 2, \dots, d$  auch

$$\partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := f_{x_j}(x_0) := (\partial_{e_j} f)(x_0)$$

für die partielle Ableitung von  $f$  in  $x_0$  nach der  $j$ -ten Koordinate.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

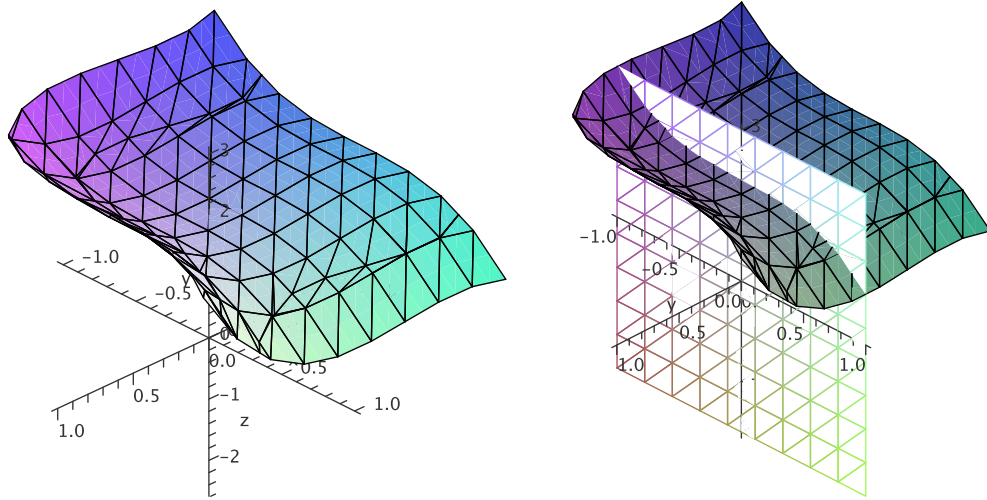


Abbildung 6.5.: Eine Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  und der Schnitt, der zu einer partiellen Ableitung führt

- (b) Ist  $f$  in allen  $x_0 \in G$  partiell differenzierbar, so sagt man  $f$  ist in  $G$  partiell differenzierbar und schreibt  $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  für die partielle Ableitung(sfunktion).
- (c) Ist  $f$  in  $G$  partiell differenzierbar und sind sämtliche partiellen Ableitungen  $\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_d f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig, so nennt man  $f$  stetig partiell differenzierbar in  $G$ .

**Bemerkung 6.4.4.** Die Notation ist im Bereich der partiellen Ableitungen leider ziemlich vielfältig. Alle oben angeführten Bezeichnungen sind synonym und in der Literatur üblich, so dass man sich wohl oder übel an alle gewöhnen muss.

**Beispiel 6.4.5.** Wir betrachten die Identität  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $f(x) = x$ . Dann gilt für jede Richtung  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  und jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$(\partial_v f)(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + hv - x_0}{h} = v.$$

Damit gilt für die partiellen Ableitungen

$$\partial_j f(x_0) = e_j \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, d.$$

**Bemerkung 6.4.6.** Die praktische Berechnung der partiellen Ableitungen ist einfach: Will man die  $j$ -te partielle Ableitung von  $f$  bestimmen, so behandelt man die anderen Variablen  $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d$  als konstante Parameter und leitet ganz wie gewohnt nach der einen Variablen  $x_j$  ab. Das sieht man z.B. für

$j = 1$  an der Rechnung

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x_1, \dots, x_d) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1, \dots, x_d)^T + h(1, 0, \dots, 0)^T) - f(x_1, \dots, x_d)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_d)}{h}.\end{aligned}$$

**Beispiel 6.4.7.** Für die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = xe^{xz+y^2}$  gilt nach obiger Bemerkung damit

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y, z) &= e^{xz+y^2} + xe^{xz+y^2} \cdot z = (1 + xz)e^{xz+y^2}, \\ \partial_2 f(x, y, z) &= xe^{xz+y^2} \cdot 2y = 2xye^{xz+y^2}, \\ \partial_3 f(x, y, z) &= xe^{xz+y^2} \cdot x = x^2e^{xz+y^2}.\end{aligned}$$

Der Fall einer Funktion mit Vektoren als Werten lässt sich wie schon bei der Stetigkeit auf den Fall  $p = 1$  zurückspielen.

**Satz 6.4.8.** Ist  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion und  $x_0 \in G$ , so ist  $f$  in  $x_0$  genau dann partiell differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen  $f_1, f_2, \dots, f_p : G \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  partiell differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\partial_j f(x_0) = (\partial_j f_1(x_0), \partial_j f_2(x_0), \dots, \partial_j f_p(x_0))^T.$$

*Beweis.* Die Funktion  $f$  ist in  $x_0$  genau dann partiell nach der  $j$ -ten Koordinaten differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h}$$

in  $\mathbb{R}^p$  existiert und der Wert ist dann die partielle Ableitung. Da Konvergenz in  $\mathbb{R}^p$  das selbe wie koordinatenweise Konvergenz ist, vgl. die Sätze 5.6.5 und 5.8.4, existiert dieser Grenzwert genau dann, wenn der entsprechende Grenzwert für jede Koordinatenfunktion existiert und der Grenzwert ist dann der Vektor der Grenzwerte.  $\square$

**Bemerkung 6.4.9.** Mit Bemerkung 6.4.6 und diesem Satz haben wir das Problem der konkreten Berechnung von partiellen Ableitungen auf den Fall von Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  zurückgespielt. Wir brauchen also keine neuen Ableitungsregeln, sondern können mit unserem bisherigen Wissen alle partiellen Ableitungen berechnen, sofern diese existieren.

**Definition 6.4.10.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  in  $x_0 \in G$  partiell differenzierbar. Die  $p \times d$ -Matrix aller partiellen Ableitungen

$$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \dots & \partial_d f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \dots & \partial_d f_p(x_0) \end{pmatrix}$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

heißt Jacobi-Matrix von  $f$ .

Im Spezialfall  $p = 1$  nennt man die  $1 \times d$ -Matrix, d.h. den  $\mathbb{R}^d$ -Zeilenvektor

$$\nabla f(x_0) := J_f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), \dots, \partial_d f(x_0))$$

den Gradient von  $f$ .

**Bemerkung 6.4.11.** (a) Es gilt in dieser Notation

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_p(x) \end{pmatrix}.$$

- (b) Der Gradient einer Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  hat auch eine anschauliche Bedeutung. Ist  $f$  glatt genug, so gibt der Vektor  $\nabla f(x_0)$  die Richtung an, in der der Graph von  $f$  an der Stelle  $x_0$  am stärksten ansteigt und seine Länge entspricht dieser maximalen Steigung. Einen Beweis dieser Aussage können wir erst in Bemerkung 6.5.11 geben.

Auf dieser Eigenschaft beruhen viele numerische Optimierungsverfahren, die zum Suchen des Optimums in Richtung des Gradienten der zu optimierenden Größe gehen („Gradientenmethoden“), getreu dem Motto: Der schnellste Weg zum Gipfel ist immer in die steilste Richtung den Hang hinauf und das ist eben die Richtung des Gradienten.

Wir veranschaulichen uns das am Graph der Funktion  $f : \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)^T\|_2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , deren Graph die obere Halbkugelschale mit Radius 1 beschreibt. Der Gradient ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) = \left( \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{-2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}(x, y). \end{aligned}$$

An den Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  angeklebt zeigt der Vektor  $-(x, y)^T$  genau in Richtung des Ursprungs und das ist auf der Kugeloberfläche die Richtung des steilsten Anstiegs. Der Betrag des Gradienten, also die Stärke dieses Anstiegs wird Null, wenn wir uns in den Ursprung bewegen und unendlich groß, wenn wir uns dem Rand des Definitionsbereiches nähern.

Da wir jede Richtung  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  durch die Standardbasis darstellen können, liegt die Hoffnung nahe, dass wir durch die Kenntnis aller partiellen Ableitungen jede Richtungsableitung bestimmen können, dass uns also die Jacobi-Matrix ausreicht. Dass es dabei ein Problem gibt, zeigt das nächste Beispiel.

**Beispiel 6.4.12.** Wir betrachten wieder die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

vgl. Beispiel 5.8.6. Außerhalb von  $(0, 0)^T$  ist diese offensichtlich partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \\ \partial_2 f(x, y) &= \frac{x(x^2 + y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen im Ursprung berechnen sich über den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0, \quad \text{und} \\ \partial_2 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ .

Versuchen wir nun die Richtungsableitung im Ursprung in eine Richtung  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  zu bestimmen, so bekommen wir den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + hv) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hv_1 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2}{h(v_1^2 + v_2^2)}.$$

Sobald  $v_1$  und  $v_2$  beide nicht Null sind, wir uns also nicht in Richtung einer Koordinatenachse bewegen, existiert dieser Grenzwert aber gar nicht. Die einzigen Richtungen in die hier Richtungsableitungen existieren, sind also gerade die Richtungen der Standardbasis, die zu den partiellen Ableitungen gehören. Betrachten Sie dazu auch noch einmal den Graphen der Funktion  $f$  in Abbildung 5.2

Damit sieht man, dass man aus der Existenz der partiellen Ableitungen alleine nicht auf irgendwelche anderen Richtungsableitungen schließen kann.

Das Beispiel zeigt darüber hinaus auch aus einem anderen Grund, dass alleine mit dem Begriff der partiellen Differenzierbarkeit kein Staat zu machen ist. Wir haben hier nämlich eine im Ursprung partiell differenzierbare Funktion, die dort aber noch nicht einmal stetig ist wie wir in Beispiel 5.8.6 gesehen haben.

Beachten Sie, dass  $f$  im vorstehenden Beispiel nicht *stetig* partiell differenzierbar ist. Tatsächlich ist dies ein entscheidendes Detail, denn wenn die partiellen Ableitungen stetig sind, können solche Sauereien nicht passieren. Bis wir das exakter formulieren können brauchen wir aber noch einen Stapel Theorie.

Wir definieren zunächst die partiellen Ableitungen höherer Ordnung. Die Definition dürfte keine große Überraschung sein.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Definition 6.4.13.** Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $n \in \mathbb{N}^*$  mit  $n \geq 2$ ,  $x_0 \in G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion. Diese nennt man  $n$ -mal (stetig) partiell differenzierbar in  $x_0$ , wenn sie schon  $(n-1)$ -mal (stetig) partiell differenzierbar auf  $G$  ist und alle  $(n-1)$ -ten partiellen Ableitungen in  $x_0$  wieder (stetig) partiell differenzierbar sind.

Notiert werden mehrfache partielle Ableitungen durch Hintereinanderschreiben der einzelnen Ableitungen, also z.B.

$$\partial_1 \partial_3 \partial_1 f, \quad \partial_2^3 \partial_1 f, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} \quad \text{oder} \quad f_{x_1 x_2 x_3},$$

je nach der verwendeten Notation. Wie wir gleich sehen werden, ist die Reihenfolge der Ableitungen dabei meist egal, sollte das nicht der Fall sein, ist mit obigen Schreibweisen die folgende Klammerung gemeint:

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_1(\partial_2 f), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \quad f_{x_2 x_1} = (f_{x_2})_{x_1}.$$

**Beispiel 6.4.14.** Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^3 y + x e^y$ . Dann haben wir für die partiellen Ableitungen erster Ordnung

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 y + e^y \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = x^3 + x e^y.$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} \partial_1^2 f(x, y) &= 6xy & \partial_1 \partial_2 f(x, y) &= 3x^2 + e^y \\ \partial_2 \partial_1 f(x, y) &= 3x^2 + e^y & \partial_2^2 f(x, y) &= x e^y. \end{aligned}$$

So kann man nun natürlich ewig weitermachen. Hier ist noch die dritte Ordnung:

$$\begin{aligned} \partial_1^3 f(x, y) &= 6y & \partial_1 \partial_2^2 f(x, y) &= e^y \\ \partial_1 \partial_2 \partial_1 f(x, y) &= 6x & \partial_2^2 \partial_1 f(x, y) &= e^y \\ \partial_1^2 \partial_2 f(x, y) &= 6x & \partial_2 \partial_1 \partial_2 f(x, y) &= e^y \\ \partial_2 \partial_1^2 f(x, y) &= 6x & \partial_2^3 f(x, y) &= x e^y \end{aligned}$$

Betrachtet man die partiellen Ableitungen in obigem Beispiel noch einmal genauer, so stellt man fest, dass das Ergebnis der Ableiterei nicht von der Reihenfolge der Differenziationen, sondern nur von der Anzahl abzuhängen scheint, wie oft jeweils nach der ersten bzw. der zweiten Koordinaten differenziert wird. So ist in obigem Beispiel z.B.  $\partial_1 \partial_2 f(x, y) = \partial_2 \partial_1 f(x, y)$ . Das ist tatsächlich kein Zufall, denn es gilt der folgende Satz, den wir hier nicht beweisen wollen.

**Satz 6.4.15** (Satz von Schwarz). Ist  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine  $n$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion, so ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  vertauschbar.

Kein Satz bleibt ohne die Warnung auf die Voraussetzungen zu achten. Ist  $f$  nur partiell differenzierbar, aber sind die partiellen Ableitungen nicht stetig, so gilt der Satz von Schwarz nicht, wie das nächste Beispiel zeigt.

**Beispiel 6.4.16.** Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \begin{cases} y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ \partial_2 f(x, y) &= \begin{cases} x \frac{x^4 - 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \frac{-h^4}{h^4} - 0}{h} = -1 \quad \text{und} \\ \partial_1 \partial_2 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \frac{h^4}{h^4}}{h} = 1. \end{aligned}$$

## 6.5. Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen – Totale Differenzierbarkeit

Wir wollen nun die unbefriedigenden Anteile des vorigen Abschnittes auflösen und das Differenzierungsproblem im  $\mathbb{R}^d$  noch mal ein wenig abstrakter anschauen. Dazu erinnern wir uns daran, dass die Ableitung über die Tangente eine lineare Approximation der Funktion darstellt. Dieser Gedanke kam in Satz 6.1.7 schon einmal vor.

Wir können nun natürlich nicht mehr durch eine Gerade approximieren, aber weiterhin durch eine lineare Abbildung. Schauen wir uns die Umformulierung der Differenzierbarkeit in dem gerade erwähnten Satz an, so stellen wir tatsächlich fest, dass dort nicht mehr durch das Argument geteilt wird und wir diese Charakterisierung der Differenzierbarkeit tatsächlich auf mehrere Variablen verallgemeinern können.

**Definition 6.5.1.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $x_0 \in G$ . Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  heißt (total) differenzierbar in  $x_0$ , wenn es eine lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$  gibt, so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + \Phi(x - x_0) + r(x), \quad x \in G,$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

mit einer Funktion  $r : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ , die

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|r(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

erfüllt.

Die lineare Abbildung  $Df(x_0) := \Phi$  heißt dann (totale) Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .

Ist  $f$  in allen  $x_0 \in G$  total differenzierbar, so nennt man die Funktion  $Df : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$  die Ableitung(sfunktion) von  $f$ .

**Bemerkung 6.5.2.** (a) Bei den beiden Normen in obiger Definition müsste man eigentlich dazu sagen, welche hier gemeint sind. Wir haben jedoch in Satz 5.8.11 (b) gesehen, dass es in  $\mathbb{R}^d$  für die Konvergenz einer Folge unerheblich ist mit welcher Norm man misst. Man kann sich hier also immer die Norm aussuchen, die gerade am besten passt, bzw. am leichtesten zu bestimmen ist.

In diesem Sinne werden wir auch in allen weiteren Betrachtungen in  $\mathbb{R}^d$  einfach  $\|\cdot\|$  schreiben, wenn die konkrete Wahl der Norm unerheblich ist.

(b) Eigentlich müssten wir obige Definition noch insofern rechtfertigen als nicht klar ist, dass die Bedingung, wenn sie zutrifft, die lineare Abbildung  $\Phi$  eindeutig festlegt. Wir glauben das jedoch einfach und betrachten lieber ein Beispiel.

**Beispiel 6.5.3.** Es sei  $y \in \mathbb{R}^d$  fest gewählt,  $(\cdot|\cdot)$  das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^d$  und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = (y|x)$ . Dann gilt für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  dank der Linearität des Skalarprodukts

$$f(x) = (y|x) = (y|x_0) + (y|x - x_0) = f(x_0) + y^T(x - x_0).$$

Die Abbildung  $w \mapsto y^T w$ ,  $w \in \mathbb{R}^d$  ist linear. Man kann  $y^T$  z.B. als eine  $1 \times d$ -Matrix auffassen. Wir haben also eine Darstellung für  $f(x)$  wie in Definition 6.5.1 gefunden, sogar mit  $r(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , womit die Grenzwertbedingung sicher erfüllt ist. Die Ableitung  $Df(x)$  ist also die konstante Funktion mit der linearen Abbildung, die durch die Multiplikation mit  $y^T$  gegeben ist, als Wert.

**Bemerkung 6.5.4.** Allgemein gilt, dass die Ableitung einer linearen Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$  in jedem Punkt die Abbildung  $\Phi$  selbst ist. Rechnen Sie das doch mal nach!

**Übungsaufgabe 6.5.5.** Diskutieren Sie, eine Abbildung von wo nach wo die zweite totale Ableitung  $D(Df)$  ist.

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass die totale Differenzierbarkeit Stetigkeit der Funktion impliziert, im Gegensatz zur partiellen Differenzierbarkeit, vgl. Beispiel 6.4.12.



**Satz 6.5.6.** Ist  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  in  $x_0 \in G$  total differenzierbar, so ist  $f$  auch stetig in  $x_0$ .

*Beweis.* Für alle  $x \in G$  gilt nach der Definition der totalen Differenzierbarkeit

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + r(x).$$

Ist nun  $(a_n)$  eine Folge in  $G$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, so gilt dank Übungsaufgabe 5.8.7 auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Df(x_0)(a_n - x_0) = Df(x_0)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - x_0)\right) = Df(x_0)(0) = 0.$$

Weiter impliziert die totale Differenzierbarkeit von  $f$  insbesondere  $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$ . Also haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_0) + Df(x_0)(a_n - x_0) + r(a_n)) = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0)$$

und das bedeutet gerade Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$ .  $\square$

Im Abschnitt zur linearen Algebra haben wir lineare Abbildungen sehr erfolgreich durch Matrizen beschrieben. Dazu müssen wir zunächst in den beiden beteiligten Räumen Basen wählen und die Standardbasis ist die natürliche Wahl. Tatsächlich gilt der folgende Satz, der die Brücke zu den Richtungsableitungen und damit auch zu den partiellen Ableitungen schlägt.

**Satz 6.5.7.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine in  $x_0 \in G$  total differenzierbare Funktion und  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Dann existiert in  $x_0$  die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$  und es gilt

$$(\partial_v f)(x_0) = Df(x_0)(v).$$

*Beweis.* Wir wenden für  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Definition der totalen Differenzierbarkeit mit  $x = x_0 + hv$  an. Das ergibt

$$f(x_0 + hv) = f(x_0) + Df(x_0)(x_0 + hv - x_0) + r(x)$$

mit einer Funktion  $r : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ , für die

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x - x_0\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{\|hv\|} = \frac{1}{\|v\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{|h|} = \frac{1}{\|v\|} \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{r(x)}{h} \right\|$$

gilt. Also ist  $\lim_{h \rightarrow 0} r(x)/h = 0$  und damit dank der Linearität von  $Df(x_0)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Df(x_0)(hv) + r(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ Df(x_0)(v) + \frac{r(x)}{h} \right] = Df(x_0)(v), \end{aligned}$$

was nach der Definition der Richtungsableitung genau die Behauptung ist.  $\square$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

Damit können wir nun den folgenden zentralen Zusammenhang zwischen der totalen Ableitung und den partiellen Ableitungen beweisen.

**Satz 6.5.8.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $x_0 \in G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion. Ist  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar, so ist  $f$  in  $x_0$  auch partiell differenzierbar und die Abbildungsmatrix von  $Df(x_0)$  bezüglich der Standardbasen von  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{R}^p$  ist die Jacobi-Matrix  $J_f(x_0)$ .*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{B}_d := \{e_1, e_2, \dots, e_d\}$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathcal{B}_p$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^p$ . Wir müssen nun die Bilder der Basisvektoren  $e_1, e_2, \dots, e_d$  unter der linearen Abbildung  $Df(x_0)$  bestimmen. Das ergibt nach Satz 6.5.7 für  $j = 1, 2, \dots, d$

$$Df(x_0)(e_j) = (\partial_{e_j} f)(x_0) = \partial_j f(x_0),$$

also enthält die  $j$ -te Spalte von  $M_{\mathcal{B}_p}^{\mathcal{B}_d}(Df(x_0))$  die Koordinaten der partiellen Ableitung  $\partial_j f(x_0)$  bezüglich  $\mathcal{B}_p$ . Da dies aber die Standardbasis ist, sind die Vektoren ihre eigenen Koordinatenvektoren und die  $j$ -te Spalte ist  $\partial_j f(x_0)$  genau wie in der Jacobi-Matrix.  $\square$

**Bemerkung 6.5.9.** (a) Man beachte, dass die Umkehrung dieses Satzes falsch ist. Das folgt aus Beispiel 6.4.12 und Satz 6.5.6.

(b) Im Folgenden werden wir oft  $Df(x_0)$  mit der Jacobi-Matrix identifizieren, d.h. wir trennen nicht sauber zwischen der linearen Abbildung und der Abbildungsmatrix. Was in der linearen Algebra noch strikt verboten war, ist hier opportun, um unnötige Haarspaltereien zu vermeiden. Das geht gut, weil wir im Folgenden nie von der oben getroffenen Wahl der Standardbasen abweichen werden.

Unter der Voraussetzung totaler Differenzierbarkeit bekommen wir nun auch den Zusammenhang wie man aus den partiellen Ableitungen jede Richtungsableitung bestimmen kann, den wir im letzten Abschnitt noch so vermisst haben.

**Korollar 6.5.10.** *Ist  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  in  $x_0 \in G$  total differenzierbar, so gilt für jedes  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$*

$$\partial_v f(x_0) = J_f(x_0)v.$$

**Bemerkung 6.5.11.** Nun können wir auch einen Beweis für die Behauptung in Bemerkung 6.4.11 (b) geben, dass der Gradient in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. Es sei also  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $x_0 \in G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  total differenzierbar mit  $\nabla f(x_0) \neq 0$ . Dann gilt für die Richtungsableitung mit Richtung  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  in  $x_0$  nach Korollar 6.5.10 und mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, vgl. Satz 3.4.9,

$$|\partial_v f(x_0)| = |\nabla f(x_0)v| = |((\nabla f(x_0))^T |v)| \leq \|\nabla f(x_0)\|_2 \|v\|_2$$

und wenn Gleichheit gilt, so müssen  $\nabla f(x_0)$  und  $v$  linear abhängig sein, d.h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\nabla f(x_0)^T = \lambda v$ . Nehmen wir an  $\lambda$  wäre negativ, so ist

$$\partial_v f(x_0) = \nabla f(x_0)v = \lambda v \cdot v = \lambda \|v\|^2 < 0$$

und damit ganz sicher nicht maximal. Also müssen  $\nabla f(x_0)$  und  $v$  die gleiche Richtung haben, wenn  $\partial_v f(x_0)$  maximal ist.

Wir sind damit schon in einer ziemlich komfortablen Situation. Die totale Differenzierbarkeit verallgemeinert unser Konzept der Differenzierbarkeit in einer Variablen ins mehrdimensionale und wenn wir die Ableitungen konkret ausrechnen müssen, können wir uns an die einfach zu berechnenden partiellen Ableitungen halten, denn die totale Ableitung ergibt sich ja aus der Jacobi-Matrix. Es bleibt noch eine Frage zu klären: Können wir irgendwie an den partiellen Ableitungen auch schon sehen, ob eine Funktion total differenzierbar ist? Ja, es gibt ein sehr brauchbares hinreichendes Kriterium:

**Satz 6.5.12.** *Ist  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  in  $x_0 \in G$  stetig partiell differenzierbar, so ist  $f$  in  $x_0$  sogar total differenzierbar.*

Den Beweis schenken wir uns, es lohnt sich aber die verschiedenen Beziehungen zwischen totaler, partieller und Richtungs-Differenzierbarkeit noch mal zusammenzufassen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{stetig partiell differenzierbar} & \implies & \text{total differenzierbar} & \implies & \text{stetig} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{partiell differenzierbar} & \iff & \text{alle Richtungsabl. existieren} & & \end{array}$$

Wichtig ist noch zu bemerken, dass bei *allen* Implikationen in diesem Diagramm die Rückrichtung falsch ist.

Auch wenn wir die praktische Berechnung der Ableitungen durch die partiellen Ableitungen schon auf den eindimensionalen Fall zurückgespielt haben und damit von dort alle Ableitungsregeln übernehmen können, ist es eine gute Idee zumindest die Kettenregel noch einmal in Matrixschreibweise zu formulieren, da man sie immer wieder gewinnbringend in dieser Form nutzen kann.

**Satz 6.5.13** (Kettenregel). *Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $H \subseteq \mathbb{R}^p$  offen, sowie  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $g(G) \subseteq H$  und  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  Funktionen, so dass  $g$  in  $x_0 \in G$  und  $f$  in  $g(x_0)$  total differenzierbar sind. Dann ist auch die Funktion  $f \circ g : G \rightarrow \mathbb{R}^q$  in  $x_0$  total differenzierbar und es gilt*

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0).$$

**Bemerkung 6.5.14.** Man beachte, dass obige Gleichung eine brav definierte Matrixmultiplikation enthält, denn  $D(f \circ g)(x_0) \in \mathbb{R}^{q \times d}$ , während  $Df(g(x_0)) \in \mathbb{R}^{q \times p}$  und  $Dg(x_0) \in \mathbb{R}^{p \times d}$  sind.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Beispiel 6.5.15.** Wir betrachten  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^3y + xe^y$ , vgl. Beispiel 6.4.14, und interessieren uns für

$$\frac{d}{dt}(f(t^2, t^3)).$$

Damit ist gemeint, dass wir die ganz normale eindimensionale Ableitung der Funktion  $t \mapsto f(t^2, t^3)$  suchen. Wir setzen also  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   $g(t) = (t^2, t^3)^T$  und berechnen mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(f(t^2, t^3)) = (f \circ g)'(t) = D(f \circ g)(t) = Df(g(t)) \cdot Dg(t) = \nabla f(g(t)) \cdot Dg(t).$$

Es ist  $Dg(t) = (2t, 3t^2)^T$  und in Beispiel 6.4.14 haben wir

$$\nabla f(x, y) = (3x^2y + e^y, x^3 + xe^y)$$

berechnet. Das liefert zusammen mit  $(x, y) = g(t) = (t^2, t^3)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t^2, t^3)) &= (3t^4t^3 + e^{t^3}, t^6 + t^2e^{t^3}) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = 6t^8 + 2te^{t^3} + 3t^8 + 3t^4e^{t^3} \\ &= 9t^8 + (2t + 3t^4)e^{t^3}. \end{aligned}$$

Um den Mittelwertsatz, vgl. Satz 6.2.1, auf Funktionen mehrerer Veränderlicher zu übertragen, müssen wir ein wenig tricksen. So ist z.B. nicht klar was es bedeuten soll, dass ein Vektor zwischen zwei anderen liegen soll. Dazu definieren wir für  $a, b \in \mathbb{R}^d$  die Schreibweise

$$\overline{ab} := \{a + \lambda(b - a) : \lambda \in [0, 1]\}$$

für die *Verbindungsstrecke* von  $a$  nach  $b$ .

Damit gilt nun der folgende Satz.

**Satz 6.5.16** (Mittelwertsatz). *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine total differenzierbare Funktion. Sind  $a, b \in G$  so gewählt, dass  $\overline{ab} \subseteq G$ , so gibt es ein  $\xi \in \overline{ab}$  mit*

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)(b - a).$$

*Beweis.* Wir definieren  $g : [0, 1] \rightarrow G$  durch  $g(\lambda) = a + \lambda(b - a)$  und  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  als  $f \circ g$ . Da  $g$  mit  $Dg(\lambda) = b - a$  stetig partiell differenzierbar und damit auch total differenzierbar ist, vgl. Satz 6.5.12, ist auch  $F$  total differenzierbar und es gilt nach der Kettenregel in Satz 6.5.13

$$F'(\lambda) = \nabla f(g(\lambda)) \cdot Dg(\lambda), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Auf diese Funktion können wir nun den Mittelwertsatz für Funktionen in einer Variablen, Satz 6.2.1, anwenden. Es gibt also ein  $\tau \in (0, 1)$ , für das

$$f(b) - f(a) = f(g(1)) - f(g(0)) = F(1) - F(0) = F'(\tau)(1 - 0) = \nabla f(g(\tau))(b - a)$$

gilt. Mit  $\xi := g(\tau)$  folgt also die Behauptung.  $\square$

Man beachte die geometrische Einschränkung, dass die Verbindungslinie von  $a$  und  $b$  ganz in  $G$  liegen muss. Das führt uns auf folgenden Begriff.

**Definition 6.5.17.** Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt konvex, wenn für alle  $a, b \in M$  auch  $\overline{ab} \subseteq M$  gilt.

**Satz 6.5.18** (Schränkensatz). Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und konvex, sowie  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar. Gibt es ein  $L \geq 0$  mit  $\|\nabla f(x)\|_2 \leq L$  für alle  $x \in G$ , so gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_2 \quad \text{für alle } x, y \in G,$$

d.h.  $f$  ist Lipschitz-stetig auf  $G$ .

*Beweis.* Es seien  $x, y \in G$ . Dann ist dank der Konvexität von  $G$  die Verbindungsstrecke  $\overline{xy}$  in  $G$  enthalten und wir bekommen aus dem Mittelwertsatz 6.5.16 ein  $\xi \in \overline{xy}$  mit

$$|f(x) - f(y)| = |\nabla f(\xi)(x - y)|$$

Man beachte, dass das Produkt auf der rechten Seite nun ein Skalarprodukt ist. Also können wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, vgl. Satz 3.4.9, anwenden und erhalten

$$|f(x) - f(y)| \leq \|\nabla f(\xi)\|_2 \|x - y\|_2 \leq L\|x - y\|_2. \quad \square$$

**Beispiel 6.5.19.** Wir betrachten die Abbildung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\arctan(x_1)}{(\sin(x_2) + 3)^2} \\ \frac{1}{4} e^{\sin(x_1+x_2)/3} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Koordinatenfunktionen  $F_1$  und  $F_2$

$$\nabla F_1(x_1, x_2) = \left( \frac{1}{(\sin(x_2) + 3)^2} \frac{1}{1 + x_1^2}, \frac{-2 \arctan(x_1) \cos(x_2)}{(\sin(x_2) + 3)^3} \right)$$

und

$$\begin{aligned} \nabla F_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{4} \left( e^{\sin(x_1+x_2)/3} \frac{1}{3} \cos(x_1 + x_2), e^{\sin(x_1+x_2)/3} \frac{1}{3} \cos(x_1 + x_2) \right) \\ &= \frac{1}{12} e^{\sin(x_1+x_2)/3} \cos(x_1 + x_2) (1, 1). \end{aligned}$$

Nun gilt für alle  $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\nabla F_1(x_1, x_2)\|_2^2 &= \left[ \frac{1}{(\sin(x_2) + 3)^2} \frac{1}{1 + x_1^2} \right]^2 + \left[ \frac{2 \arctan(x_1) \cos(x_2)}{(\sin(x_2) + 3)^3} \right]^2 \\ &\leq \left[ \frac{1}{(-1 + 3)^2} \cdot 1 \right]^2 + \left[ \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1}{(-1 + 3)^3} \right]^2 = \frac{1}{16} + \left( \frac{\pi}{8} \right)^2 \leq \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}, \end{aligned}$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

da  $\pi \leq 4$  gilt. Also ist

$$\|\nabla F_1(x_1, x_2)\|_2 \leq \frac{\sqrt{5}}{4} =: L_1.$$

Weiter ist für alle  $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\nabla F_2(x_1, x_2)\|_2 &= \frac{1}{12} e^{\sin(x_1+x_2)/3} |\cos(x_1+x_2)| \|(1, 1)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{12} e^{1/3} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \leq \frac{1}{12} 8^{1/3} \cdot 2 = \frac{1}{3} =: L_2. \end{aligned}$$

Nun ist  $\mathbb{R}^2$  offen und konvex und  $F_1$  und  $F_2$  sind wie gerade gesehen total differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2$ . Also können wir auf beide den Schrankensatz anwenden und erhalten so für alle  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_2^2 &= |F_1(x) - F_1(y)|^2 + |F_2(x) - F_2(y)|^2 \\ &\leq (L_1 \|x - y\|_2)^2 + (L_2 \|x - y\|_2)^2 = \frac{5}{16} \|x - y\|_2^2 + \frac{1}{9} \|x - y\|_2^2 \\ &\leq \left(\frac{5}{16} + \frac{4}{16}\right) \|x - y\|_2^2 = \frac{9}{16} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass  $F$  auf  $\mathbb{R}^2$  Lipschitz-stetig ist mit  $L = 3/4 < 1$ . Und was soll das nun? Damit ist  $F$  eine strikte Kontraktion auf  $\mathbb{R}^2$ , also hat  $F$  nach dem Banachschen Fixpunktsatz 5.6.22 genau einen Fixpunkt in  $\mathbb{R}^2$ . Wir haben also gezeigt, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 (\sin(x_2) + 3)^2 &= \arctan(x_1) \\ 4x_2 &= e^{\sin(x_1+x_2)/3} \end{aligned}$$

genau eine Lösung in  $\mathbb{R}^2$  hat. Hätten Sie das dem Gleichungssystem angesehen?

Wir wollen nun noch den Satz von Taylor in mehreren Variablen betrachten. Diese Verallgemeinerung ist sehr weitreichend möglich, benötigt aber eine Menge an neuen Notationen. Im Sinne eines Kompromisses zwischen Allgemeinheit und Darstellbarkeit beschränken wir uns auf den Fall einer Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  und auf die Betrachtung des Taylor-Polynoms erster Ordnung.

Dazu definieren wir uns zunächst die Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen, die auch im nächsten Abschnitt noch einmal Verwendung finden wird.

**Definition 6.5.20.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in G$  zweimal partiell differenzierbar. Dann heißt die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$H_f(x_0) := (\partial_j \partial_k f(x_0))_{j,k=1,\dots,d}$$

Hesse-Matrix von  $f$  in  $x_0$ .

## 6.6. Extremwertprobleme in mehreren Variablen

**Bemerkung 6.5.21.** (a) Man beachte, dass die Hesse-Matrix immer eine quadratische Matrix ist. Ist  $f$  sogar stetig partiell differenzierbar in  $x_0$ , so ist die Hesse-Matrix nach dem Satz von Schwarz 6.4.15 symmetrisch.

(b) Machen Sie sich klar, dass  $H_f(x_0) = J_{(\nabla f)^T}(x_0)$  ist.

**Satz 6.5.22** (Satz von Taylor). *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  eine offene und konvexe Menge und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  sei zweimal stetig partiell differenzierbar (und damit auch zweimal total differenzierbar, vgl. Satz 6.5.12) in  $G$ . Zu jeder Wahl von  $x_0, x \in G$  gibt es dann ein  $\xi \in \overline{x_0 x}$  mit*

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0).$$

**Definition 6.5.23.** *Den Ausdruck*

$$T_{1,f}(x; x_0) := f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

*bezeichnen wir wieder als das Taylorpolynom ersten Grades von  $f$  in  $x_0$ .*

## 6.6. Extremwertprobleme in mehreren Variablen

Die Fragestellung ist nun die selbe wie in Abschnitt 6.3: Gegeben eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G \subseteq \mathbb{R}^d$ , finde die Stellen  $x \in G$ , an denen die Werte von  $f$  maximal, bzw. minimal werden. Der einzige Unterschied ist nun, dass  $f$  von mehreren Variablen abhängt. Wir werden aber sehen, dass die Lösung des Problems im Prinzip genauso aussieht wie in einer Variablen.

Noch ein Wort zum betrachteten Zielbereich. Wir betrachten hier nur Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$ , denn Vektoren in  $\mathbb{R}^p$  sind nicht vergleichbar, die Frage nach maximalen, bzw. minimalen Werten hat dort also einfach keinen Sinn.

Die Definition von relativen, bzw. globalen Extrema bekommen wir per Copy&Paste:

**Definition 6.6.1.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.*

- (a) *Man sagt, dass  $f$  in  $x_0 \in G$  ein globales Maximum (bzw. globales Minimum) hat, falls  $f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in G$  gilt.*
- (b)  *$f$  hat in  $x_0 \in G$  ein relatives Maximum (bzw. relatives Minimum), falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in G$  mit  $\|x - x_0\| < \delta$  gilt.*
- (c) *Allgemein spricht man von einem globalen bzw. relativen Extremum in  $x_0$ , wenn  $f$  dort ein entsprechendes Maximum oder Minimum hat.*

Wie in einer Dimension gilt das folgende notwendige Kriterium. Die Warnungen dazu aus Warnung 6.3.4 bleiben alle auch hier gültig!

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Satz 6.6.2.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $x_0$  ein innerer Punkt von  $G$ , sowie  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar in  $x_0$ . Hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Extremum, so gilt  $\nabla f(x_0) = 0$ .*

*Beweis.* Da  $x_0$  ein innerer Punkt von  $G$  ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(x_0) \subseteq G$  ist. Für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$  betrachten wir nun die Funktion  $g_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_j(t) = f(x_0 + te_j)$ , wobei  $e_j$  der  $j$ -te Basisvektor der Standardbasis ist. Dann ist nach der Kettenregel jedes  $g_j$  eine in Null differenzierbare Funktion (in einer Variablen) und da  $f$  ein lokales Extremum in  $x_0$  hat, hat  $g_j$  ein lokales Extremum in Null.

Nun liefert uns der entsprechende eindimensionale Satz 6.3.3 sofort

$$0 = g'_j(0) = \nabla f(x_0 + 0e_j)e_j = \partial_j f(x_0).$$

Da  $j$  beliebig war, liefert das  $\nabla f(x_0) = 0$ . □

Ein Beispiel einer Funktion mit einer Nullstelle des Gradienten, die keine Extremalstelle ist, ist der sogenannte Affensattel, der durch die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ , vgl. Abbildung 6.6, gegeben ist.

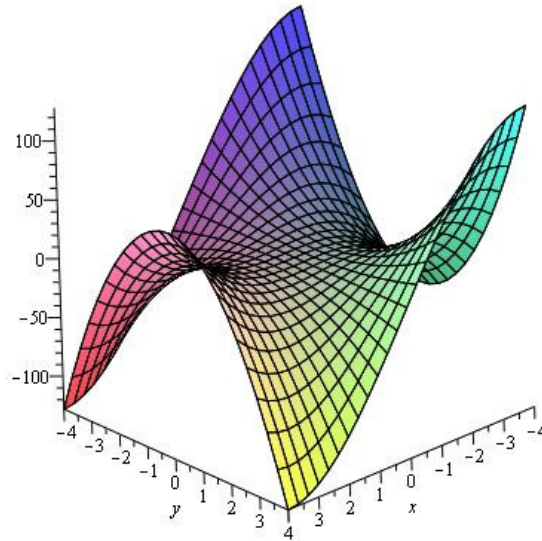


Abbildung 6.6.: Der Graph der „Affensattel“-Funktion  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

Um ein hinreichendes Kriterium zu erreichen, können wir nun wie im eindimensionalen Fall den Satz von Taylor bemühen. Es sei also nun  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $G \subseteq \mathbb{R}^d$ , die in einem inneren Punkt  $x_0 \in G$  eine Nullstelle ihres Gradienten habe. Dann gibt es für jedes  $x$  in einer kleinen Kugel um  $x_0$  nach dem Satz von Taylor 6.5.22 ein  $\xi \in \overline{xx_0}$  mit

$$f(x) = f(x_0) + 0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0).$$



## 6.6. Extremwertprobleme in mehreren Variablen

Damit wir ein relatives Maximum haben, muss also der Ausdruck

$$(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0) = ((x - x_0) | H_f(\xi)(x - x_0))$$

für alle  $\xi$  nahe bei  $x_0$  negativ sein. Nun müssen wir tief im Gedächtnis kramen und Definition 3.11.20 finden, in der die Begriffe positiv/negativ definit eingeführt wurden. Genau das brauchen wir hier!

Man beachte, dass für zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $f$  die Hesse-Matrix immer symmetrisch ist, es macht also Sinn von positiver Definitheit zu sprechen.

Tatsächlich gilt folgender Satz, vgl. Satz 6.3.5 für  $n = 2$ .

**Satz 6.6.3.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar und für  $x_0 \in G$  gelte  $\nabla f(x_0) = 0$ . Ist dann die Hesse-Matrix  $H_f(x_0)$*

- (a) *positiv definit, so hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Minimum.*
- (b) *negativ definit, so hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Maximum.*
- (c) *indefinit, so hat  $f$  in  $x_0$  kein relatives Extremum.*

Für Methoden zum Nachweis der (In-)Definitheit sei an Satz 3.11.22 erinnert.

**Beispiel 6.6.4.** Wir bestimmen die relativen Extrema von  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2},$$

vgl. Abbildung 6.7.

Wir bestimmen die kritischen Punkte mit  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ . Da

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (2xe^{-x^2-y^2} - 2x(x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}, 4ye^{-x^2-y^2} - 2y(x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}) \\ &= 2e^{-x^2-y^2}(x(1 - x^2 - 2y^2), y(2 - x^2 - 2y^2)), \end{aligned}$$

ist, bekommen wir die kritischen Punkte als die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x(1 - x^2 - 2y^2) &= 0 \\ y(2 - x^2 - 2y^2) &= 0. \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst den Fall  $x = 0$ . Dann ist die erste Gleichung erfüllt und die zweite vereinfacht sich zu  $y(2 - 2y^2) = 0$ . Diese hat die drei Lösungen 0, 1 und  $-1$ . Also haben wir bereits die drei Nullstellen des Gradienten  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(0, -1)$ .

Im Fall  $x \neq 0$  können wir die erste Gleichung durch  $x$  dividieren und verbleiben mit  $-x^2 - 2y^2 = -1$ . Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir  $0 = y(2 - 1) = y$ . In diesem Fall muss also  $y = 0$  sein. Dann ist die zweite Gleichung auf jeden Fall erfüllt und nun vereinfacht sich die erste Gleichung zu  $1 - x^2 = 0$ , also muss dann  $x = 1$  oder  $x = -1$  sein.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

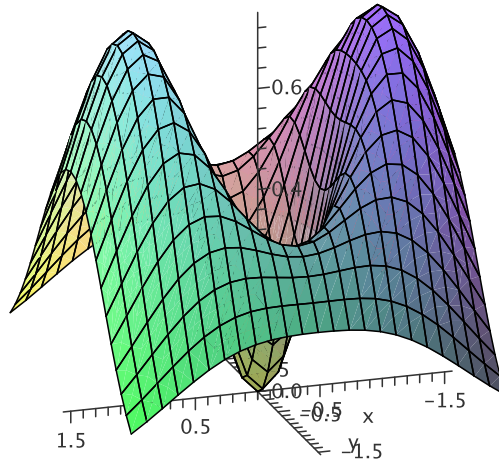


Abbildung 6.7.: Der Graph der Funktion  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$

Insgesamt haben wir fünf kritische Stellen  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$ .

Wir bestimmen nun die Hesse-Matrix zu

$$H_f(x, y) = 2e^{-x^2 - y^2} \begin{pmatrix} 1 - 5x^2 - 2y^2 + 2x^4 + 4x^2y^2 & -2xy(3 - x^2 - 2y^2) \\ -2xy(3 - x^2 - 2y^2) & 2 - x^2 - 10y^2 + 2x^2y^2 + 4y^4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$H_f(0, 0) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte: } 2, 4 \rightsquigarrow \text{pos. def.} \quad \rightsquigarrow \text{Minimum,}$$

$$H_f(0, 1) = \frac{2}{e} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte: } \frac{-2}{e}, \frac{-8}{e} \rightsquigarrow \text{neg. def.} \quad \rightsquigarrow \text{Maximum,}$$

$$H_f(0, -1) = H_f(0, 1) \quad \rightsquigarrow \text{Maximum,}$$

$$H_f(1, 0) = \frac{2}{e} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte: } \frac{-4}{e}, \frac{2}{e} \rightsquigarrow \text{indefinit} \quad \rightsquigarrow \text{kein Extr.},$$

$$H_f(-1, 0) = H_f(1, 0) \quad \rightsquigarrow \text{kein Extr.}$$

**Bemerkung 6.6.5.** In  $\mathbb{R}^d$  können ein paar Dinge passieren, die im eindimensionalen nicht vorkommen, z.B. kann eine auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definierte Funktion zwei relative Maxima haben, ohne ein relatives Minimum zu besitzen, vgl. Abbildung 6.8. Hüten Sie sich also vor eindimensionalem Denken!

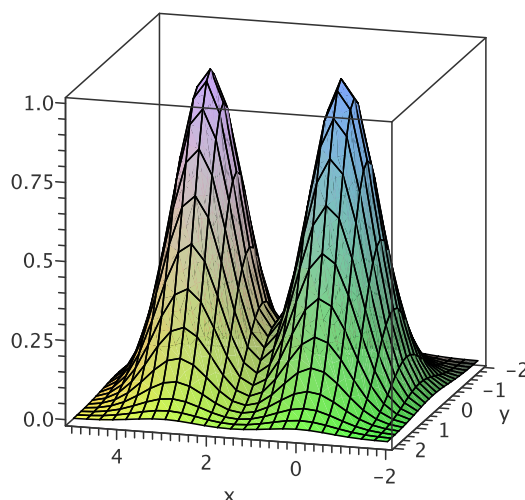


Abbildung 6.8.: Der Graph der Funktion  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} + e^{-(x-3)^2-y^2}$

## 6.7. Integration in $\mathbb{R}$

### 6.7.1. Definition des bestimmten Integrals

Wir haben nun zunächst unsere Betrachtungen zur Differenziation abgeschlossen und wollen uns einem auf den ersten Blick ganz anderen Problem zuwenden, der Berechnung von Flächeninhalten von krummlinig begrenzten Flächen. Wir werden jedoch feststellen, dass sich uns dabei ein sehr überraschender Zusammenhang zur Differenziation offenbart.

Wir betrachten das Problem der Flächenberechnung unter einem Funktionsgraphen, d.h. für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und eine gegebene beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wollen wir den Flächeninhalt der Fläche bestimmen, die von der  $x$ -Achse, den beiden Geraden  $x = a$  und  $x = b$  und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird.

Die grundlegende Idee der Integration nach Riemann ist es, die Fläche unter dem Graphen durch die Summation der Flächeninhalte von Rechtecken anzunähern, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen und deren Höhe sich nach dem größten bzw kleinsten Funktionswert der Funktion im Rechteck richtet. Damit bekommt man eine Annäherung von oben und von unten, an den wahren Flächeninhalt, die man durch Verfeinerung der Rechtecke (Gutmütigkeit der Funktion sei erst einmal unterstellt) beliebig gut machen kann. Die Stärke der analytischen Betrachtung ist, dass wir durch den Grenzwertbegriff diese „beliebig gute Annäherung“ mathematisch exakt fassen und formalisieren können. Dabei werden wir den oben schon angedeuteten Zusammenhang zur Differentialrechnung

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

entdecken, und so schließlich tatsächlich in der Lage sein, den Flächeninhalt unter Umständen exakt angeben zu können.

Für die oben angedeutete Konstruktion brauchen wir ein paar Begriffe.

**Definition 6.7.1.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Eine endliche Menge  $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$  heißt Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$ , wenn gilt

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Für eine solche Zerlegung und eine gegebene beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  setzen wir nun für jedes  $j = 1, \dots, n$

$$I_j := [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1} \quad m_j := \inf f(I_j) \quad M_j := \sup f(I_j).$$

Mit Hilfe dieser Notationen können wir nun unsere Summen über die Rechtecke definieren.

**Definition 6.7.2.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann heißt der Wert

$$\underline{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j |I_j| \quad \text{die Untersumme von } f \text{ zu } Z \text{ und}$$

$$\overline{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j |I_j| \quad \text{die Obersumme von } f \text{ zu } Z.$$

**Bemerkung 6.7.3.** Offensichtlich ist jeder Summand der Untersumme kleiner oder gleich dem entsprechenden Summanden der Obersumme, d.h. wir haben immer  $\underline{s}_f(Z) \leq \overline{s}_f(Z)$ .

**Definition 6.7.4.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt. Wir nennen

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, dx := \sup \{ \underline{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \}$$

unteres Integral von  $f$  auf  $[a, b]$  und

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx := \inf \{ \overline{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \}$$

oberes Integral von  $f$  auf  $[a, b]$ .

Weiter heißt  $f$  auf  $[a, b]$  (Riemann-)integrierbar, wenn

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, dx = \overline{\int_a^b} f(x) \, dx$$

gilt. In diesem Fall nennen wir

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b f(x) \, dx$$

das (Riemann-)Integral von  $f$  auf  $[a, b]$ .

**Bemerkung 6.7.5.** (a) Auch für das obere und das untere Integral gilt analog zu Bemerkung 6.7.3 immer die Ungleichung

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \overline{\int_a^b f(x) \, dx}.$$

- (b) Das Integral von  $f$  auf  $[a, b]$  gibt nun also, falls es existiert, den exakten Flächeninhalt unter dem Graphen an. Dabei wird allerdings das Vorzeichen beachtet: Flächenanteile unter der  $x$ -Achse zählen negativ. Will man auch diese positiv rechnen, muss man statt über  $f$  über die Funktion  $|f|$  integrieren. Machen Sie sich das an einem Bild klar!

Wir betrachten einige einfache Beispiele.

**Beispiel 6.7.6.** (a) Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine konstante Funktion mit  $f(x) = c$  auf  $[a, b]$ . Dann gilt für jede Zerlegung  $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  von  $[a, b]$  und jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  natürlich  $m_j = M_j = c$  und damit

$$\underline{s}_f(Z) = \overline{s}_f(Z) = \sum_{j=1}^n M_j |I_j| = c \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a).$$

Also haben auch das obere und das untere Integral diesen Wert, woraus

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a)$$

folgt.

- (b) Wir untersuchen auf dem Intervall  $[0, 1]$  die etwas gewöhnungsbedürftige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1] \text{ und } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

die sogenannte *Dirichletsche Sprungfunktion*. Sei also  $Z$  eine beliebige Zerlegung von  $[0, 1]$ . Dann liegt in jedem Teilintervall je eine irrationale und eine rationale Zahl, also gilt immer  $m_j = 0$  und  $M_j = 1$ . Damit ist jede Untersumme Null und damit auch das untere Integral

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 0.$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

Jede Obersumme ist

$$\bar{s}_f(Z) = \sum_{j=1}^n 1|I_j| = \sum_{j=1}^n |I_j| = 1 - 0 = 1$$

und damit gilt für das obere Integral

$$\overline{\int_0^1 f(x) \, dx} = 1.$$

Wir haben damit also ein Beispiel einer beschränkten aber nicht Riemann-integrierbaren Funktion.

(c) Auf dem Intervall  $[0, 1]$  sei die Funktion

$$f(x) = x$$

gegeben. Wir betrachten zunächst den Spezialfall einer äquidistanten Zerlegung, d.h. wir setzen  $Z_n := \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$ , d.h.  $x_j = j/n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Dann ist  $|I_j| = 1/n$  für jedes  $j = 1, \dots, n$  und Dank der Monotonie von  $f$  gilt

$$m_j = f(x_{j-1}) = \frac{j-1}{n} \quad \text{und} \quad M_j = f(x_j) = \frac{j}{n}.$$

Damit gilt wegen  $\sum_{j=1}^n j = n(n+1)/2$ , vgl. Beispiel 1.5.5,

$$\begin{aligned} \underline{s}_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^n m_j |I_j| = \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (j-1) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n}{2n^2}. \end{aligned}$$

und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{s}_f(Z_n) = 1/2$ . Für die Obersummen bekommen wir genauso wegen

$$\bar{s}_f(Z_n) = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2n^2}$$

den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_f(Z_n) = 1/2$ .

Das schöne daran, dass schon diese beiden Grenzwerte übereinstimmen, ist nun, dass wir damit gar keine anderen Zerlegungen mehr betrachten müssen, denn nun gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  mit Hilfe von Bemerkung 6.7.5 (a)

$$\underline{s}_f(Z_n) \leq \underline{\int_0^1 x \, dx} \leq \overline{\int_0^1 x \, dx} \leq \bar{s}_f(Z_n).$$

Da die Untersumme links und die Obersumme rechts beide gegen  $1/2$  gehen, müssen das obere und das untere Integral in der Mitte beide den Wert  $1/2$  haben und es gilt

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Die Flächeninhalte in den Beispielen (a) und (c) sind natürlich auch mit einfachen geometrischen Überlegungen bestimmbar. Die Bestimmung von Integralen für kompliziertere Funktionen über das obere und untere Integral ist offensichtlich nicht praktikabel, wir müssen also nach weiteren Methoden suchen. Für den Moment vertagen wir diese Frage noch und sammeln zunächst einige elementare Rechenregeln für Integrale.

**Satz 6.7.7.** *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und integrierbare Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) (Monotonie) *Ist  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , so ist auch*

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

(b) (Homogenität) *Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $\alpha f$  integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx.$$

(c) (Additivität) *Auch die Funktion  $f + g$  ist integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

(d) (Dreiecksungleichung) *Die Funktion  $|f|$  ist ebenfalls integrierbar und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

(e) *Ist  $c \in (a, b)$ , so ist  $f$  auch integrierbar auf  $[a, c]$  und  $[c, b]$  und es gilt*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

*Beweis.* Wir führen nur exemplarisch den Teil (a) aus.

Es sei  $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $I_j$ ,  $|I_j|$  und  $m_j$  für die Funktion  $f$  wie in den vorherigen Nummern. Weiter setzen wir für  $g$  analog  $\hat{m}_j := \inf g(I_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Da  $f(x) \leq g(x)$  auf ganz  $[a, b]$  gilt, gilt das auch

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

auf jedem Intervall  $I_j$  und wir bekommen  $m_j \leq \hat{m}_j$  für alle  $j = 1, 2, \dots, n$ . Das liefert für die Untersummen

$$\underline{s}_f(Z) = \sum_{j=1}^n m_j |I_j| \leq \sum_{j=1}^n \hat{m}_j |I_j| = \underline{s}_g(Z).$$

Also ist dank der Integrierbarkeit von  $f$  und  $g$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx = \sup \{ \underline{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \} \\ &\leq \sup \{ \underline{s}_g(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \} = \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx. \square \end{aligned}$$

Die folgende Abschätzung für den Wert eines Integrals ist zwar äußerst grob, aber trotzdem häufig hilfreich.

**Satz 6.7.8** (Standardabschätzung). *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann ist*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = (b-a) \|f\|_\infty.$$

*Beweis.* Zunächst gilt mit der Dreiecksungleichung in Satz 6.7.7 (d)

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Die konstante Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = \sup_{y \in [a, b]} |f(y)|$ ,  $x \in [a, b]$ , ist nach Beispiel 6.7.6 (a) integrierbar mit Integral  $(b-a) \sup_{y \in [a, b]} |f(y)|$ . Außerdem gilt  $|f(x)| \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Also liefert die Monotonie des Integrals aus Satz 6.7.7 (a)

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b g(x) \, dx = (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad \square$$

**Definition 6.7.9.** *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei integrierbar. Dann setzt man für jedes  $c \in [a, b]$*

$$\int_c^c f(x) \, dx := 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch sicherstellen, dass die Menge der integrierbaren Funktionen groß ist. Dazu dient der folgende Satz, den wir mal wieder nicht beweisen wollen.



**Satz 6.7.10.** *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Jede stetige und jede monotone Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar.*

**Bemerkung 6.7.11.** Man beachte, dass sowohl stetige als auch monotone Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  automatisch beschränkt sind. Für stetige Funktionen folgt das aus Satz 5.7.28, für monotone Funktionen ist einfach einer der beiden Werte am Rand am größten bzw. kleinsten.

**Übungsaufgabe 6.7.12.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  gegeben.

- (a) Weisen Sie nach, dass  $C([a, b])$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.
- (b) Zeigen Sie, dass durch

$$(f|g) := \int_a^b f(x)g(x) \, dx, \quad f, g \in C([a, b]),$$

auf  $C([a, b])$  ein Skalarprodukt gegeben ist.

- (c) Begründen Sie, warum die Abbildung  $\|\cdot\|_2 : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\|f\|_2 := \left( \int_a^b f(x)^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad f \in C([a, b]),$$

eine Norm ist.

- (d) Ist die Norm  $\|\cdot\|_2$  auf  $C([a, b])$  äquivalent zur Supremumsnorm, vgl. Übungsaufgabe 5.8.9?

## 6.7.2. Stammfunktionen und der Hauptsatz

**Definition 6.7.13.** *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Man sagt  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$ , wenn  $F$  auf  $[a, b]$  differenzierbar ist und  $F' = f$  auf  $[a, b]$  gilt.*

**Bemerkung 6.7.14.** Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so ist für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$  auch  $F + c$  eine Stammfunktion, denn es ist auch  $(F + c)' = F' + 0 = f$ . Sind umgekehrt  $F$  und  $G$  zwei Stammfunktionen von  $f$ , so gilt  $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ , also gibt es nach Satz 6.2.2 (c) eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $F - G = c$ . Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich also nur um eine Konstante.

Wir kommen nun zum zentralen Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation

**Satz 6.7.15** (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung).

*Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $c \in [a, b]$ , sowie eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

(a) Die Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x) := \int_c^x f(s) \, ds$ ,  $x \in I$ , ist eine Stammfunktion von  $f$ .

(b) Ist  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ , so gilt

$$\Phi(x) = \Phi(c) + \int_c^x f(s) \, ds \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

*Beweis.* (a) Wir müssen zeigen, dass  $F$  auf  $[a, b]$  differenzierbar ist. Dazu sei  $x_0 \in [a, b]$  und  $h \in \mathbb{R}$  mit  $x_0 + h \in [a, b]$ . Dann gilt nach Definition von  $F$

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_c^{x_0+h} f(s) \, ds - \int_c^{x_0} f(s) \, ds \right) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s) \, ds.$$

Weiter gilt  $f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) \, ds$ . Also haben wir mit Hilfe der Standardabschätzung aus Satz 6.7.8

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(s) \, ds - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) \, ds \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(s) - f(x_0)) \, ds \right| \leq \sup_{s \in [x_0-|h|, x_0+|h|]} |f(s) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Da  $f$  in  $x_0$  stetig ist, geht nun dieses Supremum gegen Null, wenn  $h$  gegen Null strebt (warum?). Damit ist gezeigt, dass  $F$  in  $x_0$  differenzierbar ist mit  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

(b) Sei  $F$  wie in (a) mit  $c = a$ . Dann gilt mit Hilfe von (a) und der Voraussetzung für jedes  $x \in [a, b]$

$$(F - \Phi)'(x) = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Also gibt es eine Konstante  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $F(x) = \Phi(x) + \alpha$ . Damit erhalten wir schließlich für jede Wahl von  $x$  aus  $[a, b]$

$$\begin{aligned} \int_c^x f(s) \, ds &= \int_a^x f(s) \, ds - \int_a^c f(s) \, ds = F(x) - F(c) \\ &= \Phi(x) - \alpha - \Phi(c) + \alpha = \Phi(x) - \Phi(c), \end{aligned}$$

woraus durch Umstellen der Gleichung die Behauptung folgt.  $\square$

**Bemerkung 6.7.16.** (a) Der Hauptsatz verknüpft auf verblüffend einfache Weise die Integral- mit der Differenzialrechnung und ermöglicht so die explizite Berechnung von vielen Integralen, indem er unsere Erkenntnisse über die Differentiation zur Integralberechnung nutzbar macht.

Nach Teil (b) des Hauptsatzes können wir den Wert eines Integrals über  $f$  leicht bestimmen, sobald wir eine Stammfunktion  $F$  finden können. Damit ist das Problem der Integration darauf zurückgeführt den Vorgang der Differentiation umzukehren.

(b) Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so erhält man sofort

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Letzteres ist dabei eine praktische Schreibweise.

Wir berechnen einige Integrale mit dem Hauptsatz.

**Beispiel 6.7.17.** (a) Für  $0 < a < b$  betrachten wir die Funktion  $f(x) = 1/x$  auf dem Intervall  $[a, b]$ . Diese ist stetig und damit integrierbar. Überdies ist  $F(x) := \ln(x)$ ,  $x \in [a, b]$  eine Stammfunktion von  $f$ , denn es gilt  $F' = f$  auf  $[a, b]$ . Also bekommen wir mit dem Hauptsatz

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \ln(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = \ln(b) - \ln(a).$$

Ist  $a < b < 0$ , so sieht man analog

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \ln(-x) \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

(b) Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \cos(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ . Diese ist wieder stetig und damit integrierbar. Eine Stammfunktion ist  $F(x) := \sin(x)$ , also gilt

$$\int_0^\pi \cos(x) \, dx = \sin(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0.$$

Man merkt anhand dieses Beispiels noch einmal, dass nach der Definition des Integrals Flächen unter der  $x$ -Achse negativ gezählt werden. Beim Cosinus heben sich nun der positive und der negative Beitrag genau auf. Will man, dass auch Flächen unter der  $x$ -Achse positiv gerechnet werden, so integriert man über den Betrag der Funktion.

**Definition 6.7.18.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Besitzt  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  eine Stammfunktion, so schreibt man für die Menge aller Stammfunktionen auch das sogenannte unbestimmte Integral

$$\int f(x) \, dx.$$

Man beachte dabei, dass nun das Symbol  $\int f(x) \, dx$  eine Menge von Funktionen bezeichnet, während das bestimmte Integral  $\int_a^b f$  für vorgegebene  $a, b \in \mathbb{R}$  eine Zahl ist.

**Beispiel 6.7.19.** (a)  $\int e^x \, dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

$$(b) \int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$(c) \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \text{ und}$$

$$(d) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen gegeben sind, sind im Inneren des Konvergenzbereichs stetig, also auch integrierbar. Freundlicherweise lassen sie sich sogar summandenweise integrieren:

**Satz 6.7.20.** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{R}$  mit Konvergenzradius größer Null. Dann hat die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  denselben Konvergenzradius und es gilt*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c$$

*innerhalb des Konvergenzbereichs.*

**Beispiel 6.7.21.** Mit Hilfe dieses Satzes können wir wieder zu einigen Potenzreihen geschlossene Darstellungen für die durch sie gegebene Funktion bestimmen. Als Beispiel betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Diese hat den Konvergenzradius 1 und es gilt im Konvergenzkreis, also für  $|x| < 1$  nach obigem Satz und mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} \, dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n \, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt \\ &= -\ln(1-t) \Big|_{t=0}^{t=x} = -\ln(1-x) + \ln(1-0) = -\ln(1-x). \end{aligned}$$

## 6.8. Integrationstechniken

Zur Integration von Funktionen ist das Auffinden von Stammfunktionen von zentraler Bedeutung. Leider gibt es dazu nicht wie bei der Differenziation einen kompletten Satz von Regeln, mit dessen Hilfe, genug Zeit und Konzentration vorausgesetzt, im Prinzip jede Funktion differenziert werden kann. Statt dessen müssen wir uns mit Rechenregeln begnügen, die meist das Problem der Integration einer Funktion auf das entsprechende Problem für eine andere Funktion zurückspielen, die dann hoffentlich einfacher ist.

Das liegt nicht daran, dass uns im Moment noch starke mathematische Hilfsmittel fehlen, sondern ist ein prinzipielles Problem. Es gibt einfache stetige (sogar beliebig oft differenzierbare) Funktionen, die nach dem Hauptsatz eine Stammfunktion haben, die aber nicht in einer geschlossenen Form angebbbar ist.

Zusammengefasst ist dies in dem Spruch:

*Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst.*

Wir wollen uns dieser Kunst nun nähern, indem wir aus den bekannten Differenzierungsregeln, Rechenregeln für Integrale ableiten. Wir beginnen mit der Produktregel.

Im gesamten Abschnitt seien wieder  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  gegeben.

**Satz 6.8.1** (Partielle Integration). *Es seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

*Beweis.* Zunächst einmal existieren alle in der Behauptung auftretenden Integrale, denn nach Voraussetzung sind  $f'g$  und  $fg'$  stetige Funktionen.

Nach der Produktregel gilt nun

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Also haben wir mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Theorem 6.7.15, vgl. Bemerkung 6.7.16 (b),

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) \, dx = \int_a^b (fg)'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_{x=a}^{x=b},$$

d.h.

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx. \quad \square$$

**Bemerkung 6.8.2.** Dieselbe Regel kann man auch für unbestimmte Integrale formulieren. Dann lautet sie für zwei Funktionen  $f, g \in C^1([a, b])$

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx.$$

**Beispiel 6.8.3.** (a) Wir betrachten das Integral

$$\int_0^1 xe^x \, dx,$$

d.h. wir wenden unseren Satz mit  $g(x) = x$  und  $f'(x) = e^x$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  an. Dann ist  $f(x) = e^x$  eine mögliche Wahl für die Funktion  $f$  und wir erhalten mit partieller Integration:

$$\int_0^1 xe^x \, dx = xe^x \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x \, dx = e - \left( e^x \Big|_{x=0}^{x=1} \right) = e - (e - 1) = 1.$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

- (b) Die Wahl von  $f$  und  $g$  kann für den Erfolg einer Anwendung dieser Regel sehr entscheidend sein. Wenn wir beispielsweise im Integral aus (a) umgekehrt  $g(x) = e^x$  und  $f'(x) = x$  genommen hätten, wären wir bei

$$\int_0^1 x e^x \, dx = \frac{1}{2} x^2 e^x \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 e^x \, dx$$

gelandet. Diese Umformung ist natürlich auch richtig, aber von dem nun entstandenen Integral weiß man erst recht nicht wie man es berechnen soll.

- (c) Manchmal muss man sich die zweite Funktion zur partiellen Integration erst künstlich schaffen:

$$\begin{aligned} \int \ln(x) \, dx &= \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln(x) - x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei wir  $g(x) = \ln(x)$  und  $f'(x) = 1$  gewählt haben.

- (d) Wir wollen

$$I := \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \, dx$$

bestimmen. Dazu wählen wir  $f'(x) = g(x) = \sin(x)$  und berechnen

$$I = -\cos(x) \sin(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos(x)(-\cos(x)) \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \, dx.$$

Wenden wir nun mit  $f'(x) = g(x) = \cos(x)$  noch einmal partielle Integration an, so erhalten wir

$$I = \sin(x) \cos(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)(-\sin(x)) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \, dx = I$$

und damit außer der Gewissheit, dass wir uns unterwegs nicht verrechnet haben, nichts neues. Wir müssen also einen anderen Weg suchen: Mit dem Ergebnis unserer ersten partiellen Integration und dem trigonometrischen Pythagoras  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , finden wir

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2} - I,$$

woraus  $2I = \pi/2$  und schließlich

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{4}$$

folgt.

Die zweite wichtige Integrationsregel ergibt sich aus der Kettenregel der Differenzialrechnung.

**Satz 6.8.4** (Substitutionsregel). *Es seien  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$  kompakte Intervalle, sowie  $f \in C([a, b])$  und  $g \in C^1([c, d])$  mit  $g([c, d]) \subseteq [a, b]$ . Dann ist*

$$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x) \, dx.$$

*Beweis.* Als stetige Funktion besitzt  $f$  auf  $[a, b]$  eine Stammfunktion  $F$ . Wir betrachten die Funktion  $H := F \circ g$  auf  $[c, d]$ . Dann gilt für alle  $t \in [c, d]$  nach der Kettenregel

$$H'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t).$$

Also können wir mit zweimaliger Anwendung des Hauptsatzes folgern:

$$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = H(d) - H(c) = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x) \, dx. \quad \square$$

**Bemerkung 6.8.5.** (a) Die Version für unbestimmte Integrale ist in diesem Fall:

Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und  $f \in C(I)$ , sowie  $g \in C^1(J)$  seien Funktionen mit  $g(J) = I$ . Dann gilt

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int f(x) \, dx \Big|_{x=g(t)} \quad \text{auf } J.$$

Die Schreibweise „ $|_{x=g(t)}$ “ auf der rechten Seite bedeutet dabei, dass man zunächst das gesamte Integral auszurechnen hat und dann am Ende überall für die Variable  $x$  den Wert  $g(t)$  einsetzt.

- (b) Häufig behilft man sich bei der Anwendung der Substitutionsregel einer intuitiven, aber nicht rigorosen Schreibweise. Diese leitet sich aus der alternativen Notation  $\frac{dy}{dx}$  (gesprochen „dy nach dx“) statt  $y'$  für eine differenzierbare Funktion  $y$  ab. Man fasst dann in der Substitutionsregel die Setzung  $x = g(t)$  so auf, als sei  $x$  eine Funktion von  $t$  und rechnet mit den Differenzialen  $dx$  und  $dt$  wie gewohnt:

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{,,} \Rightarrow dx = g'(t) \, dt. \quad \text{“}$$

Dabei erhält man genau die in der Substitutionsformel stehende Ersetzung von  $dx$  durch  $g'(t)dt$ .

Dieser Formalismus ist sehr übersichtlich und praktisch, es sollte dabei aber nicht in Vergessenheit geraten, dass das *keine* saubere Mathematik ist.

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Beispiel 6.8.6.** (a) Wir berechnen das Integral

$$\int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx$$

mit unserer Schmierrechnungsmethode. Dazu setzen wir  $x = \ln(t)$ , d.h. wir wenden die Substitutionsregel mit  $g(t) = \ln(t)$  an. Weiter ist bei der Anwendung des Satzes  $c = e$  und  $d = e^2$ , denn dann ist  $g(c) = 1$  und  $g(d) = 2$ . Die natürliche Wahl für  $[a, b]$  ist  $[1, 2]$ , aber auch  $[a, b] = [-3, 15]$  ist in Ordnung. Nun wenden wir die Substitutionsregel an. Es ist  $\frac{dx}{dt} = 1/t$ , also „ $dx = dt/t$ “. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx &= \int_e^{e^2} \frac{t^2 + 1}{t} \cdot \frac{dt}{t} = \int_e^{e^2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \left(t - \frac{1}{t}\right) \Big|_{t=e}^{t=e^2} \\ &= e^2 - e^{-2} - (e - e^{-1}). \end{aligned}$$

(b) Als zweites Beispiel wollen wir das Integral

$$I := \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

bestimmen. Dieses hat auch eine anschauliche Bedeutung, denn der Graph der Funktion  $\sqrt{1-x^2}$  ist für  $x \in [0, 1]$  der Viertelkreisbogen des Kreises mit Radius 1 um 0 zwischen den Punkten  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ . Wir bestimmen mit diesem Integral also die Fläche dieses Viertelkreises, es sollte also bitteschön  $\pi/4$  herauskommen.

Wir substituieren  $x = \cos(t)$ . Dann gilt z.B.  $x = 0$  für  $t = \pi/2$  und  $x = 1$  für  $t = 0$ . Wir wählen also  $c = \pi/2$  und  $d = 0$ . Die Schmierrechnung gibt uns wegen  $\frac{dx}{dt} = \cos'(t) = -\sin(t)$  die Ersetzung  $dx = -\sin(t) dt$ . Nun gilt für alle  $t \in [0, \pi/2]$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{\sin^2(t)} = |\sin(t)| = \sin(t).$$

Setzen wir das nun alles zusammen, ergibt sich mit Beispiel 6.8.3 (d) tatsächlich

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin(t)(-\sin(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Schließlich noch ein Beispiel eines unbestimmten Integrals. Für eine stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  betrachten wir

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$



Mit  $f(x) := 1/x$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , gilt dann dank der Substitutionsregel aus Bemerkung 6.8.5 (a)

$$\begin{aligned} \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt &= \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int \frac{1}{x} dx \Big|_{x=\varphi(t)} \\ &= (\ln(|x|) + c) \Big|_{x=\varphi(t)} = \ln(|\varphi(t)|) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Übungsaufgabe 6.8.7.** Zeigen Sie:

(a) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade, so gilt für jedes  $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

(b) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade, so gilt für jedes  $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

**Übungsaufgabe 6.8.8.** Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{falls } n = m = 0 \\ \pi, & \text{falls } n = m \neq 0 \\ 0, & \text{falls } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } n = m \neq 0 \\ 0, & \text{falls } n \neq m \text{ oder } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir uns mit dem Problem des Differenzierens unter dem Integralzeichen beschäftigen. Die Problematik ergibt sich aus dem folgenden Beispiel: Ist die Funktion

$$g(x) := \int_1^2 \frac{e^{xy} - e^y}{y} dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.3)$$

differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  und wenn ja, was ist die Ableitung?

Eine befriedigende Antwort gibt der folgende Satz.

**Satz 6.8.9** (Differenzieren von Parameter-Integralen). *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  offen mit  $[\alpha, \beta] \times [a, b] \subseteq G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  sei (total) differenzierbar, sowie die partielle Ableitung  $\partial_1 f$  stetig. Dann ist die Funktion*

$$g(x) := \int_a^b f(x, y) dy, \quad x \in [\alpha, \beta],$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \frac{dg}{dx}(x) = \int_a^b \partial_1 f(x, y) \, dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Damit beantworten wir nun obige Frage.

**Beispiel 6.8.10.** Die Funktion  $f(x, y) := (e^{xy} - e^y)/y$  ist auf  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  total differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen, also ist nach obigem Satz die Funktion  $g$  aus (6.3) tatsächlich differenzierbar und ihre Ableitung berechnet sich zu

$$g'(x) = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{e^{xy} - e^y}{y} \right] \, dy = \int_1^2 \frac{ye^{xy}}{y} \, dy = \int_1^2 e^{xy} \, dy.$$

Dieses Integral hat nun den Wert 1, wenn  $x = 0$  ist und für  $x \neq 0$  gilt

$$g'(x) = \frac{1}{x} e^{xy} \Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{1}{x} (e^{2x} - e^x).$$

**Beispiel 6.8.11.** Was machen wir nun aber, wenn nach der Ableitung folgender Funktion gesucht ist:

$$g(x) := \int_{x+1}^{x^2} \frac{e^{xy} - e^y}{y} \, dy, \quad x \in (0, \infty)?$$

Wir definieren  $G : (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$G(x, u, v) := \int_u^v \frac{e^{xy} - e^y}{y} \, dy,$$

dann ist  $g(x) = G(x, x+1, x^2)$  und wir bekommen mit der mehrdimensionalen Kettenregel, vgl. Satz 6.5.13,

$$g'(x) = \frac{dg}{dx}(x) = \nabla G(x, x+1, x^2) \cdot Df(x),$$

wobei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch  $f(x) := (x, x+1, x^2)^T$  gegeben ist.

Nun ist nach obigem Beispiel und Teil (a) von Satz 6.7.15

$$\begin{aligned} \nabla G(x, u, v) &= \left( \frac{1}{x} e^{xy} \Big|_{y=u}^{y=v}, -\frac{e^{xu} - e^u}{u}, \frac{e^{xv} - e^v}{v} \right) \\ &= \left( \frac{1}{x} (e^{xv} - e^{xu}), \frac{e^u - e^{xu}}{u}, \frac{e^{xv} - e^v}{v} \right), \quad x, u, v \in (0, \infty), \end{aligned}$$

und wir haben

$$Df(x) = (1, 1, 2x)^T, \quad x \in (0, \infty).$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \left( \frac{1}{x} (e^{x \cdot x^2} - e^{x(x+1)}), \frac{e^{x+1} - e^{x(x+1)}}{x+1}, \frac{e^{x \cdot x^2} - e^{x^2}}{x^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{x} (e^{x^3} - e^{x^2} e^x) + \frac{e^x e - e^{x^2} e^x}{x+1} + 2x \frac{e^{x^3} - e^{x^2}}{x^2} \\
 &= \frac{1}{x} (3e^{x^3} - e^{x^2} (e^x + 2)) + \frac{e^x}{x+1} (e - e^{x^2}).
 \end{aligned}$$

**Übungsaufgabe 6.8.12.** Es seien  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) := e^x y^2 \quad \text{und} \quad F(y, \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) \, dx.$$

Weiter seien  $\alpha(y) = \ln(y)$  und  $\beta(y) = 2 \ln(y)$ . Bestimmen Sie

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y, \alpha(y), \beta(y)) \quad \text{und} \quad \frac{dF}{dy}(y, \alpha(y), \beta(y)).$$

## 6.9. Fourierreihen

Wie speichert man eine Funktion, die man z.B. als Funksignal empfangen oder über Messwerte abgegriffen hat, effektiv ab? Man kann natürlich einfach alle Messwerte speichern, bzw. das Funksignal an diversen Stützstellen abtasten und diese Messwerte speichern, das kann allerdings eine ziemliche Datenmenge werden. In diesem Abschnitt wollen wir ein Werkzeug kennenlernen, dass neben vielen anderen Anwendungen dazu dienen kann, diese Datenmenge erheblich zu reduzieren.

Eine erste Idee wäre die ersten  $k$  Koeffizienten einer geeigneten Taylorreihe zu speichern, das hat allerdings zwei Nachteile, die diese Methode unbrauchbar machen. Erstens liefert eine Taylorreihe immer nur lokal um den Entwicklungspunkt eine gute Näherung und nicht über die gesamte Länge des Signals. Zweitens, was noch schwerer wiegt, man braucht dafür die Ableitungen der unbekannten Funktion und an die kommt man nur aus der Kenntnis der Messwerte nicht heran.

Wir werden sehen, dass man statt Polynomen Linearkombinationen von Sinus- und Cosinus-Funktionen nehmen kann, um dieses Problem zu lösen.

**Definition 6.9.1.** Seien  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\omega > 0$  und  $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$  mit  $a_N \neq 0$  oder  $b_N \neq 0$ . Dann heißt

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

trigonometrisches Polynom vom Grad  $N$  mit Frequenz  $\omega$ .

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Beispiel 6.9.2.** Trigonometrische Polynome sind z.B.

$$2, \quad \sin(x), \quad \cos(x) + 2 \sin(x), \quad 3 + e \cos(2\pi x) - 4 \sin(5\pi x) + 2 \cos(7\pi x).$$

**Bemerkung 6.9.3.** (a) Jedes trigonometrische Polynom ist eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte, periodische Funktion mit Periode  $2\pi/\omega$ , denn es gilt

$$P\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \cos(n\omega x + 2n\pi) + b_n \sin(n\omega x + 2n\pi) \right] = P(x).$$

In den folgenden Nummern bezeichnet immer  $T := \frac{2\pi}{\omega}$  diese Periode.

(b) Allgemein gilt: Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodisch mit Periode  $L$ , so ist  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\hat{f}(x) = f\left(\frac{L}{N}x\right)$  periodisch mit Periode  $N$ , denn dann gilt

$$\hat{f}(x + N) = f\left(\frac{L}{N}(x + N)\right) = f\left(\frac{L}{N}x + L\right) = f\left(\frac{L}{N}x\right) = \hat{f}(x).$$

Wir werden uns das im Folgenden zu Nutze machen und viele Resultate nur für  $T = 2\pi$  betrachten. Auf diese Weise wird die Darstellung durch den Wegfall einiger Größen übersichtlicher und obige Skalierung erlaubt dann eine direkte Behandlung des allgemeinen Falls.

**Satz 6.9.4.** Ist

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

ein trigonometrisches Polynom, so gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \sin(kx) \, dx, \quad k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir kümmern uns zunächst separat um  $a_0$ . Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx \right] \\ &= 2\pi \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + b_n \frac{1}{n} (-\cos(nx)) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right] \\ &= \pi a_0 + \sum_{n=1}^N \left[ 0 + \frac{b_n}{n} ((-1)^n - (-1)^n) \right] = \pi a_0. \end{aligned}$$

Für die weiteren Koeffizienten verwenden wir die Ergebnisse von Übungsaufgabe 6.8.8. Damit bekommen wir für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos(kx) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] \cos(kx) \, dx \\
 &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \, dx}_{=0 \text{ wie oben}} + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) \, dx \right] \\
 &= 0 + \sum_{n=1}^N (a_n \delta_{nk} \pi + b_n \cdot 0) = a_k \pi.
 \end{aligned}$$

Die Rechnung für die  $b_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , verläuft analog.  $\square$

**Bemerkung 6.9.5.** (a) Das Ergebnis dieses Satzes erklärt auch die bis jetzt willkürlich seltsame Setzung, dass das  $a_0$  in der Definition eines trigonometrischen Polynoms noch durch zwei geteilt wird. Täte man das nicht, träte hier eine Fallunterscheidung auf.

(b) Im Sinne von Bemerkung 6.9.3 (b) bekommen wir für trigonometrische Polynome mit beliebiger Periode  $T$  das folgende Resultat:

Ist

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

ein trigonometrisches Polynom, so gilt mit  $T := 2\pi/\omega$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(x) \cos(n\omega x) \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(x) \sin(n\omega x) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.
 \end{aligned}$$

Das sieht man so: Das trigonometrische Polynom

$$\hat{P}(x) := P\left(\frac{x}{\omega}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

hat nach ebendieser Bemerkung Periode  $\omega T = 2\pi$ . Also gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}(x) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P\left(\frac{x}{\omega}\right) \cos(nx) \, dx.$$

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

Substituieren wir nun  $y = x/\omega$ , so erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} P(y) \cos(n\omega y) \omega \, dy = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(x) \cos(n\omega x) \, dx,$$

da  $\pi/\omega = \pi T/(2\pi) = T/2$  ist.

Die Rechnung für die  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , geht wieder analog.

**Bemerkung 6.9.6.** Obiges Resultat wollen wir noch einmal von einer abstrakteren Warte aus beleuchten. Nach Übungsaufgabe 6.7.12 ist die Bildung

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx, \quad f, g \in C([-\pi, \pi]),$$

ein Skalarprodukt und die Ergebnisse der Integrale aus Übungsaufgabe 6.8.8 bedeuten dann gerade, dass die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},$$

bezüglich dieses Skalarproduktes ein Orthonormalsystem bilden, also eine Menge von auf Länge Eins normierten Vektoren, die paarweise orthogonal sind.

Weiter sind die trigonometrischen Polynome genau der von diesen Funktionen als Orthonormalbasis erzeugte Vektorraum. In diesem bekommt man nach Bemerkung 3.4.15 die Koordinaten eines Vektors  $P$  gerade, indem man das Skalarprodukt von  $P$  mit den Basisfunktionen bildet. Nichts anderes sagt Satz 6.9.4.

Die Idee für das folgende ist nun so zu beschreiben: Wir wollen eine gegebene (nicht allzu wilde) Funktion  $f$  durch ein bestmögliches trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$  nähern. Wie bekommen wir dieses? Durch die orthogonale Projektion unserer Funktion  $f$  auf den von den entsprechenden Basisfunktionen aufgespannten Unterraum! Wie man die berechnet, finden wir in Übungsaufgabe 3.4.16. Wir definieren also dementsprechend

**Definition 6.9.7.** Es sei  $T > 0$  und  $f : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- (a) Die Funktion  $f$  heißt stückweise stetig, wenn eine Zerlegung  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  von  $[-T/2, T/2]$  existiert, so dass  $f$  auf jedem der Intervalle  $(x_{j-1}, x_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , stetig ist und jeweils die rechts- und linksseitigen Grenzwerte von  $f$  in  $x_0, x_1, \dots, x_n$  existieren.

Ist  $f$  stückweise stetig und zusätzlich auf jedem der Intervalle  $(x_{j-1}, x_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  stetig differenzierbar, so dass auch die rechts- und linksseitigen Grenzwerte von  $f'$  in  $x_0, x_1, \dots, x_n$  existieren, so nennt man  $f$  stückweise glatt.

(b) Ist  $f$  stückweise stetig und setzt man für  $\omega = 2\pi/T$

$$a_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{und}$$

$$b_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

so heißt für  $N \in \mathbb{N}^*$

$$F_{N,f}(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Fourierpolynom von  $f$  vom Grad  $N$ .

Die Werte  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , heißen Fourierkoeffizienten von  $f$ .

(c) Ist  $f$  stückweise stetig mit Fourierkoeffizienten wie in (b), so heißt die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Fourierreihe von  $f$ .

**Bemerkung 6.9.8.** Die Fourierpolynome und auch die Fourierreihe, wenn sie denn auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergiert, sind jeweils periodische Funktionen mit Periode  $T$ .

**Satz 6.9.9.** Sei  $f : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stückweise stetig. Für die Fourierkoeffizienten von  $f$  gilt dann:

$$f \text{ gerade} \implies b_n = 0 \text{ und } a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) \, dx \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$f \text{ ungerade} \implies a_n = 0 \text{ und } b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) \, dx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Ist  $f$  gerade, so ist die Funktion  $x \mapsto f(x) \sin(n\omega x)$  ungerade, denn

$$f(-x) \sin(n\omega(-x)) = f(x) \sin(-n\omega x) = -f(x) \sin(n\omega x),$$

also ist  $b_n = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  nach Übungsaufgabe 6.8.7 (a). Da mit einer analogen Berechnung in diesem Fall  $x \mapsto f(x) \cos(n\omega x)$  gerade ist, folgt die Formel für  $a_n$  aus Teil (b) der selben Übungsaufgabe.

Der Beweis im Falle einer ungeraden Funktion  $f$  geht analog. □

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Beispiel 6.9.10.** (a) Wir bestimmen alle Fourierpolynome und die Fourierreihe der Funktion  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$ . Dazu beobachten wir, dass dieses eine ungerade Funktion ist, es gilt also schon mal  $a_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also berechnen wir mit Hilfe obigen Satzes und mit partieller Integration für  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-1}{n} \cos(nx) \, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right] = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Das Fourierpolynom  $N$ -ten Grades ergibt sich also zu

$$F_{N,f}(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) = 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

und die Fourierreihe dementsprechend

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

- (b) Was ist die Fourierreihe von  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \cos(x)$ ? Das ist nicht schwer:  $\cos(x)$ .
- (c) Wir betrachten noch ein ernsteres Beispiel, nämlich die Signum-Funktion  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x \in [-\pi, 0), \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Auch diese Funktion ist ungerade, wir haben es also wieder mit einer reinen Sinusreihe zu tun und müssen nur die Fourierkoeffizienten  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , ausrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ - \int_{-\pi}^0 \sin(nx) \, dx + \int_0^{\pi} \sin(nx) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_{x=-\pi}^{x=0} - \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right] = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n - ((-1)^n - 1)). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist  $4/(n\pi)$ , falls  $n$  ungerade ist und für gerades  $n \in \mathbb{N}$  ist er Null. also ist die Fourierreihe dieser Funktion gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x).$$



Die periodische Fortsetzung der Funktion  $f$  zusammen mit einigen ihrer Fourierpolynome ist in Abbildung 6.9 dargestellt. Man sieht, dass sogar für solch hässliche Funktionen, die trigonometrischen Polynome eine zunehmend bessere Näherung zu bieten scheinen.

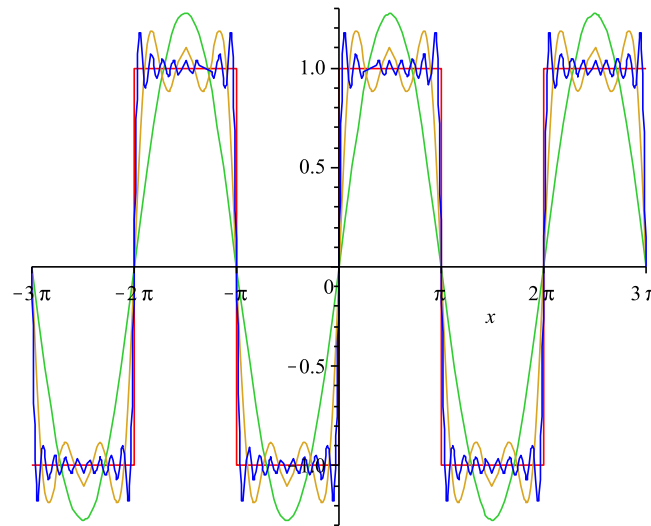


Abbildung 6.9.: Die periodische Fortsetzung der Signum-Funktion  $f$  (rot) zusammen mit ihrem 1. (grün), 5. (gelb) und 17. (blau) Fourierpolynom.

**Definition 6.9.11.** Es sei  $T > 0$  und  $f : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gibt es nun eindeutige Zahlen  $k(x) \in \mathbb{Z}$  und  $y(x) \in (-T/2, T/2]$ , für die  $x = k(x)T + y(x)$  gilt. Damit definieren wir die periodische Fortsetzung von  $f$  als die Funktion  $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_p(x) = f(y(x))$ .

Der folgende Satz gibt ein Kriterium, wann die Fourierreihe konvergiert und was ihr Grenzwert ist. Die Aussage kann man sich gut an Abbildung 6.9 verdeutlichen.

**Satz 6.9.12** (Konvergenzsatz für Fourierreihen). Es seien  $T > 0$  sowie eine stückweise glatte Funktion  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  mit Fourierkoeffizienten  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  gegeben. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  und es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = \frac{\lim_{y \rightarrow x+} f_p(y) + \lim_{y \rightarrow x-} f_p(y)}{2}.$$

Insbesondere konvergiert die Fourierreihe also an allen Punkten  $x_0 \in \mathbb{R}$ , an denen  $f_p$  stetig ist, gegen  $f_p(x_0)$ .

## 6. Analysis – Teil II: Differential- und Integralrechnung

**Beispiel 6.9.13.** Es sei  $f : [-\pi, \pi]$  gegeben durch  $f(x) = x^2$  und  $f_p$  wieder deren periodische Fortsetzung. Wir wollen die Fourier-Reihe dieser Funktion bestimmen und stellen wieder zuerst fest, dass  $f$  gerade ist, so dass wir eine reine Cosinus-Reihe bekommen, d.h. alle  $b_n$  sind Null. Weiter gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2,$$

sowie mit zweimaliger partieller Integration für  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} x^2 \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) \, dx \\ &= 0 + \frac{4}{k^2 \pi} x \cos(kx) \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k^2 \pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) - \frac{4}{k^3 \pi} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{k^2} (-1)^k. \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von  $f$  ist also

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) = \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da die periodische Fortsetzung  $f_p$  von  $f$  stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe nach dem Konvergenzsatz 6.9.12 für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Funktion  $f_p$  dar, es gilt also für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$f_p(x) = \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx).$$

Setzt man speziell  $x = 0$  ein, so erhält man

$$f_p(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \text{d.h.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Noch interessanter ist allerdings der spezielle Wert für  $x = \pi$ :

$$f_p(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

aus dem dann folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

# 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 7.1. Problemstellung und Motivation

Viele Probleme aus den Natur- und Ingenieurwissenschaften, aber z.B. auch der Wirtschaftswissenschaften, führen auf Fragestellungen, in denen, mathematisch formuliert, ein Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen bekannt ist. Wir wollen uns nun mit dem Lösen solcher „Differentialgleichungen“ beschäftigen. Wir starten mit einem Beispiel.

**Beispiel 7.1.1.** Im einfachst möglichen Wachstumsmodell kann man postulieren, dass der Zuwachs einer Population (von Bakterien, Geld, Menschen, Festplatten-defekten, . . .) proportional dazu ist, wie groß die Population schon ist. Bezeichnen wir mit  $y(t)$  die Populationsgröße zum Zeitpunkt  $t \geq 0$ , so führt dieses Modell auf die Gleichung

$$y'(t) = \mu y(t), \quad t \geq 0,$$

wobei  $\mu$  die Proportionalitätskonstante, die in diesem Fall *Wachstumsrate* heißt, ist.

**Definition 7.1.2.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt die Gleichung

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in I,$$

gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) der Ordnung  $n$ .

Hängt die Funktion  $F$  nicht von der ersten Variablen  $t$  ab, so nennt man die Differentialgleichung *autonom*.

**Beispiel 7.1.3.** Beispiele für gewöhnliche Differentialgleichungen sind neben der schon in Beispiel 7.1.1 genannten:

(a)  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \sin(t)$ .

Hier ist  $n = 2$  und  $F(t, y(t), y'(t)) = \sin(t) - 2y'(t) - y(t)$ .

(b)  $y'(t) = t^2 + 1$  mit  $n = 1$  und  $F(t, y(t)) = t^2 + 1$ .

(c)  $y'(t) = e^{\arctan[\sqrt{y(t)}]} |\cos(y(t)^4 - 3)|$ .

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Dabei sind die in Beispiel 7.1.1 und in (c) gegebenen Gleichungen autonom.

**Bemerkung 7.1.4.** Wir werden später sehen, dass man die Behandlung von Differentialgleichungen der Ordnung  $n$  immer auf den Fall von (mehreren) gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückspielen kann. Deshalb widmen wir uns zunächst nur solchen Gleichungen, d.h. wir haben  $n = 1$ . In diesem Fall ist die allgemeine Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I,$$

wobei  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene stetige Funktion ist und  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  die gesuchte Funktion.

Eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung schreibt sich also als

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t \in I.$$

Eine stetig differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Differentialgleichung erfüllt, nennt man eine *Lösung* der Differentialgleichung.

**Beispiel 7.1.5.** Wir betrachten noch einmal die Gleichung aus Beispiel 7.1.1. Da die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist, ist es naheliegend eine Lösung in diesem Dunstkreis zu suchen. Tatsächlich löst die Funktion  $y(t) = e^{\mu t}$  die Gleichung, wie man durch einfaches Nachrechnen verifiziert. Eine weitere offensichtliche Lösung ist die konstante Funktion  $y(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Tatsächlich sind alle Funktionen der Form  $y(t) = Ce^{\mu t}$  mit  $C \in \mathbb{R}$  beliebig Lösungen. Sind das nun alle? Ja, denn für jede Lösung  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-\mu t}) = y'(t)e^{-\mu t} - y(t)\mu e^{-\mu t} = \mu y(t)e^{-\mu t} - y(t)\mu e^{-\mu t} = 0.$$

Also gibt es eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  mit  $y(t)e^{-\mu t} = C$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , d.h. es gilt  $y(t) = Ce^{\mu t}$ .

Denken wir an unser Wachstumsmodell, das durch die Differentialgleichung beschrieben werden soll, so hat die Größe  $C$  auch eine anschauliche Bedeutung: Es gilt für jede Lösung  $y(0) = Ce^{\mu \cdot 0} = C$ , damit ist  $C$  also die Größe der Population zum (Start-)Zeitpunkt Null.

**Bemerkung 7.1.6.** Obiges Beispiel ist in dem Sinne typisch, dass Differentialgleichungen im Allgemeinen mehrere Lösungen haben und es ist auch meist so wie oben, dass die Anzahl der frei wählbaren Konstanten gleich der Ordnung der Gleichung ist. Das macht man sich am besten an den einfachst möglichen Differentialgleichungen, wie z.B. (b) aus Beispiel 7.1.3 klar. Hier ist die Aufgabe einfach eine Stammfunktion der Funktion  $t \mapsto t^2 + 1$  zu finden und dabei fängt man eben eine frei wählbare Konstante ein, da sich alle Lösungen zu  $y(t) = t^3/3 + t + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , ergeben.

## 7.1. Problemstellung und Motivation

Betrachtet man z.B.  $u''(t) = t^2 + 1$ , so ist die allgemeine Lösung nach zweimaligem Integrieren gegeben durch  $u(t) = t^4/12 + t^2/2 + ct + d$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ , mit zwei frei wählbaren Konstanten usw.

**Beispiel 7.1.7.** Das Wachstumsmodell in Beispiel 7.1.1 lässt unendliches Wachstum zu, was im Allgemeinen unrealistisch ist. Wir wollen nun davon ausgehen, dass es eine maximale Grenzpopulation gibt, die wir auf Eins (= 100%) setzen. Dann ist es naheliegend anzunehmen, dass das Wachstum nun zum Einen weiterhin proportional zur Größe der schon vorhandenen Population ist, aber zum Anderen auch zur verbleibenden Kapazität, also dem Abstand  $1 - y(t)$  von der Grenzpopulation. Das führt auf das sogenannte *logistische Wachstumsmodell*

$$y'(t) = \mu y(t)(1 - y(t)).$$

Mit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $f(x) = \mu x(1 - x)$ , lautet unsere Differentialgleichung also  $y'(t) = f(y(t))$ .

Eine explizite Lösung ist nun nicht mehr „durch Draufschauen“ möglich, aber auch die Betrachtung der Differentialgleichung kann viele interessante Eigenschaften der Lösung verraten, ohne dass man diese explizit kennt.

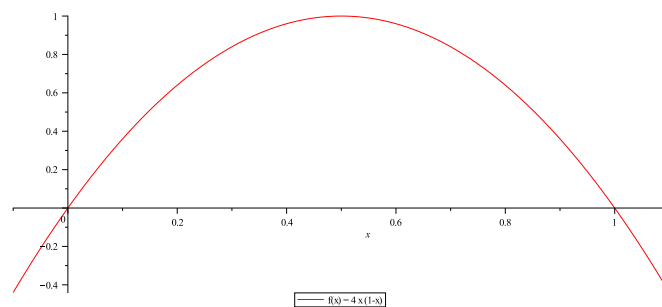


Abbildung 7.1.: Die Funktion  $f(x)$  aus dem logistischen Wachstum für  $\mu = 4$

Die Dynamik der Differentialgleichung wird durch die Funktion  $f$  bestimmt, die in Abbildung 7.1 dargestellt ist. Diese gibt wegen  $y'(t) = f(y(t))$  die Änderung  $y'(t)$  der Population an, wenn die Größe der Population  $y(t)$  eingegeben wird. Ein positiver Wert  $f(y)$  bedeutet so z.B., dass eine Population dieser Größe wächst, ein negativer bedeutet Schrumpfung der Population.

Starten wir mit einer positiven Population, die echt kleiner als unsere Grenzpopulation ist, also  $y(0) \in (0, 1)$ , so wird die Population also zunehmen. Diese Zunahme verlangsamt sich aber umso mehr, je näher die Population an die Kapazitätsgrenze Eins kommt. Tatsächlich wird die Population den Wert Eins nicht in endlicher Zeit erreichen, sondern für die Lösung gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$ .

Startet man umgekehrt mit einer Überbevölkerung, also  $y(0) > 1$ , so ist  $f(y(0))$  negativ und die Population wird sinken, auch das tut sie wieder umso langsamer je näher man der Grenzpopulation Eins kommt. In diesem Fall wird die Lösung also

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

eine strikt monoton fallende Funktion mit Grenzwert Eins für  $t$  gegen Unendlich sein.

**Übungsaufgabe 7.1.8.** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist jede Lösung der autonomen Differentialgleichung  $y'(t) = f(y(t))$  entweder monoton fallend oder monoton wachsend.

Eine wichtige Rolle bei gewöhnlichen Differentialgleichungen spielen, wie wir bereits gesehen haben, die Startwerte. Das führt auf den folgenden Begriff.

**Definition 7.1.9.** Es seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $t_0 \in I$ ,  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ .

(a) Dann heißt

$$(AWP) \quad \begin{cases} y^{(n)}(t) &= F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), & t \in I, \\ y^{(j)}(t_0) &= y_j, & j = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

ein Anfangswertproblem mit Anfangswerten  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ .

(b) Jede Funktion  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ , die

- auf einem offenen Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$  definiert ist,
- auf  $J$   $n$ -mal stetig differenzierbar ist und
- die  $n+1$  Gleichungen in (AWP) erfüllt,

heißt Lösung des Anfangswertproblems.

(c) Ist die Lösung sogar auf dem ganzen Intervall  $I$  eine Lösung der Gleichung, so nennt man sie eine globale Lösung.

**Bemerkung 7.1.10.** Es kommt immer wieder vor, dass Lösungen der Differentialgleichung nicht auf dem ganzen Intervall  $I$ , auf dem die Funktion  $F$  gegeben ist, existieren, vgl. Beispiel 7.2.3 (b). Deshalb begnügt man sich in der obigen Definition mit der Existenz eines Intervalls  $J$ .

## 7.2. Elementare Lösungsmethoden

### 7.2.1. Getrennte Veränderliche

**Beispiel 7.2.1.** Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung des logistischen Wachstumsmodells aus Beispiel 7.1.7, also

$$y'(t) = \mu y(t)(1 - y(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

mit einer Konstanten  $\mu \in \mathbb{R}$ . Wir setzen nun voraus, dass es eine Lösung  $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dieser Gleichung gibt, für die  $y(t) \in (0, 1)$  für alle  $t \geq 0$  gilt. Es ist

zwar plausibel, dass es eine solche Lösung gibt, aber das wissen wir im Moment natürlich noch nicht, die weitere Rechnung bleibt also zunächst unter diesem Vorbehalt.

Haben wir aber eine solche Lösung, so gilt

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = \mu.$$

Integrieren wir diese Gleichung von 0 bis  $t$  so erhalten wir

$$\mu t = \int_0^t \mu \, d\tau = \int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)(1-y(\tau))} \, d\tau = \int_0^t f(y(\tau))y'(\tau) \, d\tau,$$

wobei wir  $f(x) := 1/[x(1-x)]$  gesetzt haben. Nach der Substitutionsregel aus Satz 6.8.4 erhalten wir mit der Substitution  $x = y(\tau)$

$$\mu t = \int_{y(0)}^{y(t)} f(x) \, dx = \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{x(1-x)} \, dx = \int_{y(0)}^{y(t)} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) \, dx.$$

Die Stammfunktionen von  $1/x$  und  $1/(1-x)$  sind  $\ln(|x|)$ , bzw.  $-\ln(|1-x|)$ . Da nach unserer Voraussetzung  $x = y(\tau) \in (0, 1)$  liegen wird, können wir die Beträge allerdings weglassen. Damit bekommen wir mit  $y_0 := y(0)$

$$\begin{aligned} \mu t &= \left( \ln(x) - \ln(1-x) \right) \Big|_{x=y_0}^{x=y(t)} = \ln(y(t)) - \ln(y_0) - (\ln(1-y(t)) - \ln(1-y_0)) \\ &= \ln \left( \frac{y(t)(1-y_0)}{y_0(1-y(t))} \right) \end{aligned}$$

Dies können wir nun nach  $y(t)$  auflösen:

$$\begin{aligned} e^{\mu t} y_0 (1-y(t)) &= y(t)(1-y_0) \iff e^{\mu t} y_0 = y(t)(1-y_0 + e^{\mu t} y_0) \\ &\iff y(t) = \frac{e^{\mu t} y_0}{1 + (e^{\mu t} - 1)y_0}. \end{aligned}$$

Diese Berechnungsmethode kann stark verallgemeinert werden zur sogenannten Methode der Trennung der Variablen. Diese sollte man immer dann versuchen, wenn eine Differentialgleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  zu lösen ist, bei der die rechte Seite  $f$  von der Form  $f(t, y) = g(t)h(y)$  ist, die Abhängigkeit nach den beiden Variablen  $t$  und  $y$  also multiplikativ getrennt ist.

**Satz 7.2.2** (Trennung der Variablen). *Auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  sei mit stetigen Funktionen  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) &= g(t)h(y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (7.1)$$

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

gegeben. Ist  $h(y_0) \neq 0$ , so existiert ein offenes Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$ , auf dem das Anfangswertproblem (7.1) genau eine Lösung besitzt. Diese ist gegeben durch

$$y = H^{-1} \circ G \quad \text{mit} \quad G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau) \, d\tau \quad \text{und} \quad H(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{h(\eta)} \, d\eta.$$

**Beispiel 7.2.3.** (a) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= ty(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Hier ist  $g(t) = t$  und  $h(y) = y$ , sowie  $t_0 = 0$  und  $y_0 = 1$ . Also ist tatsächlich  $h(y_0) = h(1) = 1 \neq 0$  und für die Formel aus obigem Satz berechnen wir

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) \, d\tau = \int_0^t \tau \, d\tau = \frac{t^2}{2}$$

und

$$H(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{h(\eta)} \, d\eta = \int_1^y \frac{1}{\eta} \, d\eta = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y),$$

sowie  $H^{-1}(x) = e^x$ . Damit ist

$$y(t) = H^{-1}(G(t)) = e^{t^2/2}.$$

Meist rechnet man mit der folgenden Schmierrechnung kürzer:

$$\frac{dy}{dt} = ty \implies \frac{1}{y} dy = t dt \implies \int \frac{1}{y} dy = \int t dt \implies \ln(y) = \frac{t^2}{2} + c.$$

Also ist  $y(t) = e^{t^2/2+c}$  und die Konstante stellt man dann über die Anfangsbedingung  $y(0) = e^c = 1$  zu  $c = 0$  ein.

Bei dieser Methode ist allerdings wie schon beim Substituieren zu beachten, dass dieses Herumgeschiebe von  $dy$  und  $dt$  keine saubere Mathematik ist. Das Ergebnis ist dann also auf jeden Fall durch eine Probe zu verifizieren!

(b) Nun behandeln wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \cos(t)e^{y(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

Mit obiger Schmierrechnung erhalten wir

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t)e^y \implies e^{-y} dy = \cos(t) dt \implies \int e^{-y} dy = \int \cos(t) dt$$



Das liefert  $-e^{-y} = \sin(t) + c$  und damit

$$-y(t) = \ln(-\sin(t) - c), \quad \text{d.h.} \quad y(t) = -\ln(-\sin(t) - c).$$

Mit dem Anfangswert erhalten wir

$$2 = y(0) = -\ln(-c), \quad \text{also } e^{-2} = -c, \quad \text{d.h. } c = -e^{-2}.$$

Zusammen haben wir also

$$y(t) = -\ln(-\sin(t) + e^{-2}).$$

Nun müssen wir eine Probe machen. Für unseren Lösungskandidaten gilt  $y(0) = -\ln(e^{-2}) = -(-2) = 2$  und

$$y'(t) = -\frac{1}{-\sin(t) + e^{-2}}(-\cos(t)) = \frac{\cos(t)}{-\sin(t) + e^{-2}},$$

sowie

$$\cos(t)e^{y(t)} = \cos(t)e^{-\ln(-\sin(t) + e^{-2})} = \frac{\cos(t)}{-\sin(t) + e^{-2}},$$

also passt alles.

Dieses Beispiel zeigt auch den schon in Bemerkung 7.1.10 angesprochenen Effekt, denn, obwohl die rechte Seite dieser Differentialgleichung für alle  $t \in \mathbb{R}$  sinnvoll und beliebig „glatt“ ist, existiert diese Lösung nur solange, wie  $e^{-2} - \sin(t) > 0$  ist, das ergibt nur ein sehr kleines Existenzintervall  $J$  um Null herum.

### 7.2.2. Homogene Differentialgleichungen

In einer *homogenen Differentialgleichung* hängt die rechte Seite nur vom Quotienten  $y/t$  ab, es gibt also eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mit der die Gleichung als

$$y'(t) = f(t, y(t)) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

geschrieben werden kann.

Diesen Typ behandeln wir beispielhaft als eine Sorte von Differentialgleichungen, die durch eine Substitution gelöst werden können. Wir setzen

$$u(t) := \frac{y(t)}{t},$$

und schauen, welche Gleichung nun von der Funktion  $u$  gelöst wird, wenn  $y$  eine Lösung der Ausgangsgleichung ist. Es gilt nach der Quotientenregel

$$u'(t) = \frac{ty'(t) - y(t)}{t^2} = \frac{y'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}(g(y(t)/t) - u(t)) = \frac{1}{t}(g(u(t)) - u(t)).$$

Also erfüllt dieses  $u$  eine Gleichung, die nach der Methoden der getrennten Veränderlichen aus Satz 7.2.2 gelöst werden kann.

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

**Beispiel 7.2.4.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{y(t)}{t} - \frac{t^2}{y(t)^2}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(1) &= 1. \end{cases}$$

Die obige Substitution  $u(t) = y(t)/t$  liefert hier, vgl. die obige Rechnung:

$$u'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t} \left( u(t) - \frac{1}{u(t)^2} - u(t) \right) = -\frac{1}{t} \frac{1}{u(t)^2}$$

Mit der Methode der getrennten Veränderlichen finden wir

$$u^2 \, du = -\frac{1}{t} \, dt, \quad \text{also} \quad \int u^2 \, du = -\int \frac{1}{t} \, dt.$$

Das liefert nach Integration

$$\frac{u^3}{3} = -\ln(t) + c, \quad \text{d.h.} \quad u(t) = \sqrt[3]{-3\ln(t) + 3c},$$

was schließlich zu

$$y(t) = tu(t) = t \sqrt[3]{-3\ln(t) + 3c}$$

führt. Mit dem Anfangswert bekommen wir wegen

$$1 = y(1) = \sqrt[3]{3c} \implies 3c = 1 \implies c = \frac{1}{3}$$

die Lösung

$$y(t) = t \sqrt[3]{1 - 3\ln(t)},$$

die man leicht in einer Probe verifiziert.

### 7.2.3. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

**Definition 7.2.5.** Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die allgemeine Form

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad t \in I,$$

wobei  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind.

Ist  $b = 0$ , so nennt man die Gleichung homogen, sonst inhomogen.

**Satz 7.2.6** (Superpositionsprinzip). Es seien  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Lösungen der homogenen linearen Gleichung  $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ . Dann ist auch jede Linearkombination  $y = \alpha y_1 + \beta y_2$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  eine Lösung dieser Gleichung.

*Beweis.* Der Beweis ist simples Nachrechnen:

$$\begin{aligned} y'(t) + a(t)y(t) &= \alpha y_1'(t) + \beta y_2'(t) + \alpha a(t)y_1(t) + \beta a(t)y_2(t) \\ &= \alpha (y_1'(t) + a(t)y_1(t)) + \beta (y_2'(t) + a(t)y_2(t)) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 7.2.7.** (a) Eine homogene lineare Differentialgleichung ist von getrennten Veränderlichen, denn sie lautet  $y'(t) = -a(t)y(t)$ . Betrachten wir also das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= -a(t)y(t), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

so erhalten wir mit unserer Methode aus Abschnitt 7.2.1

$$\frac{1}{y} dy = -a(t) dt, \text{ also } \int \frac{1}{y} dy = \int -a(t) dt, \text{ d.h. } \ln(|y|) = - \int a(t) dt$$

Wir wählen nun eine Stammfunktion  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  von  $a$ , indem wir

$$A(t) := \int_{t_0}^t a(s) ds$$

setzen. Damit ist für jedes  $c \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$y(t) = \pm e^{-A(t)+c} = \pm e^c e^{-A(t)}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Setzt man  $C = \pm e^c$  erhält man die Lösungen

$$y(t) = C e^{-A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, dass auch  $C = 0$  zugelassen ist, da auch die konstante Nullfunktion eine Lösung der Gleichung darstellt.

Als Übungsaufgabe verbleibt nun zu zeigen, dass das alle Lösungen dieser Gleichung sind. Sie können sich dabei von den Betrachtungen in Beispiel 7.1.5 inspirieren lassen.

Für die Einstellung des Anfangswertes berechnet man

$$y_0 = y(t_0) = C e^{-A(t_0)} = C e^0 = C,$$

also ist

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} \quad \text{mit} \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

die eindeutige Lösung des obigen Anfangswertproblems.

(b) Auf die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad t \in I,$$

kommt man nun mit einem frechen Trick, der ein universelles Mittel bei inhomogenen linearen Differentialgleichungen, auch allgemeinerer Art ist, der sogenannten *Variation der Konstanten*.

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Ja, der Name ist ein Widerspruch in sich, aber er beschreibt was passiert und das Verfahren geht gut. Wir betrachten den Ansatz

$$y(t) = c(t)e^{-A(t)},$$

wobei die Funktion  $A(t)$  wie im Teil (a) definiert ist.

Setzen wir den Ansatz in die Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} b(t) &= y'(t) + a(t)y(t) = c'(t)e^{-A(t)} - c(t)A'(t)e^{-A(t)} + a(t)c(t)e^{-A(t)} \\ &= c'(t)e^{-A(t)}, \end{aligned}$$

da  $A' = a$  gilt. Umgestellt muss für die Funktion  $c(t)$  also  $c'(t) = b(t)e^{A(t)}$  gelten. Diese Gleichung lässt sich nun durch Hochintegrieren lösen, vgl. Satz 6.7.15 (b),

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} \, ds.$$

Wegen  $y(t) = c(t)e^{-A(t)}$  gilt für den Anfangswert

$$y_0 = y(t_0) = c(t_0)e^0 = c(t_0),$$

also ist die Lösung insgesamt gegeben durch

$$y(t) = c(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)}y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} \, ds.$$

Wir fassen diese Überlegungen zusammen:

**Satz 7.2.8** (Variation-der-Konstanten-Formel). *Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b \in C(I)$  und  $t_0 \in I$ , sowie  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Das lineare Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) &= b(t), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

*besitzt genau eine globale Lösung, die durch*

$$y(t) = e^{-A(t)}y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} \, ds \quad \text{mit} \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) \, ds$$

*gegeben ist.*

Diese Formel wird in der Literatur auch manchmal als *Duhamelsche Formel* bezeichnet.

**Beispiel 7.2.9.** Wir lösen

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Zunächst betrachtet man die zugehörige homogene Gleichung  $y'(t) = y(t)$ . Diese hat die Lösungen  $y(t) = ce^t$  mit  $c \in \mathbb{R}$ , vgl. Beispiel 7.1.1.

Für die Lösung des inhomogenen Problems machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten  $y(t) = c(t)e^t$ . Dann muss gelten

$$t + c(t)e^t = t + y(t) = y'(t) = c'(t)e^t + c(t)e^t, \quad \text{also} \quad c'(t) = te^{-t}.$$

Damit ist mittels partieller Integration

$$c(t) = \int te^{-t} dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zusammen haben wir also

$$y(t) = (-te^{-t} - e^{-t} + C)e^t = -t - 1 + Ce^t.$$

Mit Hilfe des Anfangswertes stellen wir nun noch die Konstante ein. Es muss gelten

$$1 = y(0) = -0 - 1 + Ce^0, \quad \text{also} \quad C = 2.$$

Die Lösung unseres Anfangswertproblems lautet also

$$y(t) = 2e^t - t - 1,$$

was man auch leicht durch eine Probe verifiziert.

## 7.3. Systeme von Differentialgleichungen

Häufig hat man mehrere Größen, die durch Differentialgleichungen beschrieben sind, und die sich gegenseitig beeinflussen, z.B.

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1(t) + y_2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y_2'(t) &= y_1(t) + 3y_2(t), & t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

oder die sogenannten *Volterra-Lotka-Gleichungen*, die ein einfaches Räuber-Beute-Modell darstellen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (\alpha - \beta y(t))x(t) \\ y'(t) &= -(\gamma - \delta x(t))y(t), \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Dabei ist ersteres ein System von linearen Differentialgleichungen, das zweite System ist nichtlinear, da die beiden Größen  $x(t)$  und  $y(t)$  auf der rechten Seite als Produkt eingehen. Wir wollen uns hier nur mit der linearen Variante beschäftigen.

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 7.3.1. Lineare Systeme

**Definition 7.3.1.** Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $N \in \mathbb{N}^*$  und für jede Wahl von  $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$  stetige Funktionen  $a_{jk} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie  $b_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben.

(a) Dann heißt

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1N}(t)y_N(t) & + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \dots + a_{2N}(t)y_N(t) & + b_2(t) \\ \vdots & \vdots \\ y_N'(t) = a_{N1}(t)y_1(t) + a_{N2}(t)y_2(t) + \dots + a_{NN}(t)y_N(t) & + b_N(t), \end{cases}$$

$t \in I$ , ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(b) Das dazugehörige Anfangswertproblem ergibt sich, indem für ein  $t_0 \in I$  und vorgegebene  $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{N,0} \in \mathbb{R}$  noch

$$y_1(t_0) = y_{1,0}, \quad y_2(t_0) = y_{2,0}, \quad \dots, \quad y_N(t_0) = y_{N,0}$$

gefordert wird.

(c) Ist  $b = 0$ , so heißt das System homogen, sonst inhomogen.

**Bemerkung 7.3.2.** Wie man an der Schreibweise in obiger Definition schon sieht, kann man solche Systeme mit einer Matrixnotation viel übersichtlicher schreiben. Setzt man

$$y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}, \quad y_0 := \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{N,0} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1N}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2N}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}(t) & a_{N2}(t) & \dots & a_{NN}(t) \end{pmatrix},$$

so schreibt sich das Anfangswertproblem aus Definition 7.3.1 als

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

wobei der Ableitungsstrich komponentenweise zu verstehen ist.

### 7.3. Systeme von Differentialgleichungen

Wir betrachten wie schon im Fall von linearen Gleichungen erster Ordnung, vgl. Abschnitt 7.2.3, zunächst den Spezialfall von homogenen Gleichungen. Es gelte also nun  $b = 0$  und wir betrachten das System linearer Differentialgleichungen

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad t \in I, \quad (7.2)$$

auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit einer gegebenen stetigen Funktion  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ .

**Satz 7.3.3.** *Die Menge  $L$  aller Lösungen der Gleichung (7.2) ist ein  $N$ -dimensionaler Untervektorraum von  $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ .*

*Beweis.* Wir zeigen hier, dass  $L$  das Untervektorraumkriterium, Satz 3.2.3, erfüllt. Die genaue Dimension können wir erst mit Werkzeugen aus Abschnitt 7.5 nachweisen.

Zunächst ist offensichtlich die konstante Nullfunktion eine Lösung, d.h. die Menge  $L$  ist nicht leer. Zum Nachweis von (UVR2) seien  $y_1, y_2 \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$  Lösungen der Gleichung (7.2) und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)' = \alpha y_1' + \beta y_2' = \alpha A y_1 + \beta A y_2 = A(\alpha y_1 + \beta y_2),$$

also ist auch  $\alpha y_1 + \beta y_2$  eine Lösung. □

**Definition 7.3.4.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  stetig. Jede Basis des Lösungsraums aller Lösungen von Gleichung (7.2) nennt man ein Fundamentalsystem dieser Gleichung.*

**Satz 7.3.5.** *Es seien  $y_1, y_2, \dots, y_N \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$  Lösungen der Gleichung (7.2). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $y_1, y_2, \dots, y_N$  sind linear unabhängig in  $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ , d.h.  $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  ist ein Fundamentalsystem der Gleichung.
- (ii) Für alle  $t \in I$  ist die Menge  $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)\}$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^N$ .
- (iii) Es gibt ein  $t \in I$ , für das die Menge  $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)\}$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^N$  ist.

Betrachten wir nun zusätzlich mit einer stetigen Funktion  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  das inhomogene Problem

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I, \quad (7.3)$$

so erhalten wir das folgende allgemeine Resultat.

**Satz 7.3.6.** *Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, sowie  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetige Funktionen. Ist  $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung der Gleichung (7.3), so ist jede Lösung dieser Gleichung gegeben durch  $y = y_p + y_h$ , wobei  $y_h$  eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems (7.2) ist.*

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

*Beweis.* Ist  $y = y_p + y_h$  mit einer Lösung  $y_h$  des homogenen Systems, so gilt

$$y' = y_p' + y_h' = Ay_p + b + Ay_h = A(y_p + y_h) + b,$$

also ist dann  $y$  eine Lösung des inhomogenen Problems.

Ist umgekehrt  $y$  eine Lösung von (7.3), so gilt

$$(y - y_p)' = y' - y_p' = Ay + b - Ay_p - b = A(y - y_p),$$

d.h.  $y_h := y - y_p$  ist eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems (7.2) und wir haben  $y = y_p + y_h$ .  $\square$

**Bemerkung 7.3.7.** (a) Man beachte die Parallele dieses Resultats mit den Resultaten über die Lösungen von linearen Gleichungssystemen in Satz 3.8.3.

(b) Ebenso wie in der Lösbarkeitstheorie der linearen Gleichungssysteme wird die Lösung  $y_p$  des inhomogenen Problems als *spezielle Lösung* oder *Partikulärlösung* des inhomogenen Systems bezeichnet.

### 7.3.2. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Das Problem an Satz 7.3.6 ist, dass wir nicht wissen, wie wir an die spezielle Lösung des inhomogenen Problems kommen sollen. Im Prinzip geht das wieder mit der Variation-der-Konstanten-Formel, vgl. Satz 7.2.8. Um den Notationsaufwand in Grenzen zu halten, wollen wir dazu noch einmal spezialisieren und Systeme mit konstanten Koeffizienten anschauen, d.h. wir nehmen von nun an an, dass die Funktion  $A$  in der Differentialgleichung (7.3) konstant durch eine feste Matrix gegeben ist. Wir betrachten also das Problem

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad t \in I, \quad (7.4)$$

auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit einer stetigen Funktion  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  und einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .

Der Vorteil von konstanten Koeffizienten ist, dass man dann relativ leicht ein Fundamentalsystem für das homogene System angeben kann.

**Definition 7.3.8.** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Dann heißt

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

die Matrix-Exponentialfunktion von  $A$ .



**Bemerkung 7.3.9.** Man beachte, dass die Reihe in obiger Definition tatsächlich für jede Matrix konvergent ist. Dazu verwendet man, dass für eine geeignete Norm auf  $\mathbb{R}^{N \times N}$  gilt  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ . Das liefert dann wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$$

die absolute Konvergenz der Reihe.

**Satz 7.3.10.** Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen über die Matrix-Exponentialfunktion:

- (a) Für die Nullmatrix  $O$  gilt  $e^O = I$ .
- (b) Kommutieren  $A$  und  $B$ , d.h. gilt  $AB = BA$ , so ist  $e^A e^B = e^{A+B}$ .
- (c) Die Matrix  $e^A$  ist invertierbar mit  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .
- (d) Ist  $A$  eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , so ist  $e^A$  ebenfalls eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen  $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_N}$ .

*Beweis.* (a) Es ist

$$e^O = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{O^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} O = I.$$

- (b) Der Beweis geht analog zum Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion in  $\mathbb{C}$  aus Satz 5.5.20 mit Hilfe auf Matrizen verallgemeinerter Versionen des Cauchy-Produkts und der Binomialformel. Da zum Zusammenfassen der Terme die Reihenfolge der Multiplikation von Matrizen vertauscht werden muss, geht das nur wenn  $A$  und  $B$  vertauschbar sind. Im Allgemeinen ist die Formel in (b) schlicht falsch.
- (c) Dies folgt direkt aus Teil (b), denn für die Matrizen  $A$  und  $-A$  gilt  $A(-A) = -AA = (-A)A$ , also kommutieren die beiden und wir sehen mit zusätzlicher Hilfe aus Teil (a)

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^O = I \quad \text{und} \quad e^{-A} e^A = e^O = I.$$

- (d) Man zeigt, z.B. per Induktion, dass

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_N^n \end{pmatrix}$$

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

ist. Dann folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_N^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & & 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_N^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 7.3.11.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Dann bilden die Spalten der Matrix  $e^{tA}$ ,  $t \in I$ , ein Fundamentalsystem der Gleichung  $y'(t) = Ay(t)$ ,  $t \in I$ .

*Beweis.* Wir bezeichnen für  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  mit  $e_j$  den  $j$ -ten Standardeinheitsvektor in  $\mathbb{R}^N$ . Dann ist  $y(t) := e^{tA}e_j$  die  $j$ -te Spalte von  $e^{tA}$  und wegen

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} e^{tA} e_j = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} e_j = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n e_j}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n A^n e_j}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{t^{n-1} A^n e_j}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n e_j}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n e_j}{n!} = A e^{tA} e_j = Ay(t) \end{aligned}$$

ist jede solche Spalte eine Lösung der untersuchten Gleichung.

Außerdem sind die Spalten von  $e^{tA}$  dank Satz 7.3.10 (c) für jedes  $t \in I$  linear unabhängig, also bilden sie dank Satz 7.3.5 ein Fundamentalsystem von  $y'(t) = Ay(t)$ .  $\square$

**Bemerkung 7.3.12.** Leitet man die gesamte Matrix  $e^{tA}$  komponentenweise nach  $t$  ab, so bedeutet obiger Satz die eingängige Matrixgleichheit

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

**Beispiel 7.3.13.** Wir gehen mit dieser Methode das System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1(t) + y_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y_2'(t) &= y_1(t) + 3y_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

vom Anfang dieses Abschnitts an. In Matrixform lautet dieses

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y(t) =: Ay(t).$$

### 7.3. Systeme von Differentialgleichungen

Für die Berechnung von  $e^{tA}$  erinnern wir uns an die Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen, vgl. Abschnitt 3.11. Berechnet man die Eigenwerte und die Eigenvektoren von  $A$ , so findet man, dass

$$A = SDS^{-1} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Damit gilt nun

$$A^n = (SDS^{-1})^n = SDS^{-1}SDS^{-1}SD \dots S^{-1}SDS^{-1} = SD^nS^{-1}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SD^n S^{-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} S \frac{t^n D^n}{n!} S^{-1} \\ &= S \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n D^n}{n!} \right) S^{-1} = S e^{tD} S^{-1}. \end{aligned}$$

Nach Satz 7.3.10 (d) gilt

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix},$$

d.h.

$$e^{tA} = S e^{tD} S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\{y_1(t), y_2(t)\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} + e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des Raums aller Lösungen von (7.5).

Diese Basis kann man noch vereinfachen, z.B. ist mit  $\{y_1, y_2\}$  auch die Menge

$$\{y_1 + y_2, y_1 - y_2\} = \left\{ e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ein Fundamentalsystem.

Allgemein gilt für diagonalisierbare Matrizen entsprechend

**Satz 7.3.14.** *Es sei  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  und zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, v_2, \dots, v_N$ . Dann ist*

$$\{e^{t\lambda_1} v_1, e^{t\lambda_2} v_2, \dots, e^{t\lambda_N} v_N\}$$

*ein Fundamentalsystem der Gleichung  $y'(t) = Ay(t)$ .*

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Natürlich ist nicht jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  diagonalisierbar. Dennoch hat das charakteristische Polynom von  $A$  auch  $N$  möglicherweise komplexe Nullstellen sofern man ihre Vielfachheit berücksichtigt. Es gilt dann folgender Satz für allgemeine  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .

**Satz 7.3.15.** *Sei  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Dann kann man ein Fundamentalsystem für  $y'(t) = Ay(t)$  folgendermaßen konstruieren. Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ , d.h.  $\det(A - \lambda I) = 0$ , und  $m$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$ . Dann hat  $(A - \lambda I)^m$  einen  $m$ -dimensionalen Kern. Sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis dieses Kerns. Sei*

$$u_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{t\lambda} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k v_j$$

für  $j = 1, \dots, m$ .

*Wenn  $\lambda$  reell ist, dann sind  $u_1, \dots, u_m$  die Beiträge von  $\lambda$  zum Fundamentalsystem.*

*Wenn  $\lambda$  komplex ist und  $\operatorname{Im} \lambda > 0$ , dann sind  $\operatorname{Re} u_1, \operatorname{Im} u_1, \dots, \operatorname{Re} u_m, \operatorname{Im} u_m$  die Beiträge von  $\lambda$  zum Fundamentalsystem, wobei der konjugierte Eigenwert  $\bar{\lambda}$  keinen Beitrag liefert.*

Wir wenden uns nun dem inhomogenen Problem (7.4) zu. Nach Satz 7.3.6 fehlt uns zur Angabe aller Lösungen dieses Problems nur noch eine spezielle Lösung. Jede Lösung  $y(t)$  des zugehörigen homogenen Problems ist nach den obigen Ergebnissen eine Linearkombinationen der Spalten des Fundamentalsystems  $e^{tA}$ , d.h.

$$y(t) = e^{tA} c, \quad \text{mit einem } c \in \mathbb{R}^N.$$

Damit starten wir wieder die Variation-der-Konstanten-Methode, vgl. Bemerkung 7.2.7 (b), d.h. wir setzen  $y_p(t) := e^{tA} c(t)$  an und setzen dieses in das inhomogene Problem ein. Das liefert mit Bemerkung 7.3.12

$$Ay_p(t) + b(t) = y_p'(t) = Ae^{tA} c(t) + e^{tA} c'(t) = Ay_p(t) + e^{tA} c'(t),$$

also

$$c'(t) = e^{-tA} b(t).$$

Integrieren der Gleichung liefert als ein mögliches  $c$  die Funktion

$$c(t) = \int_{t_0}^t e^{-sA} b(s) \, ds,$$

wobei  $t_0 \in I$  beliebig gewählt werden kann. Hierbei ist die Integration des Vektors  $e^{-sA} b(s)$ , genauso wie oben schon die Differentiation von Vektoren, komponentenweise zu verstehen. Wir erhalten also

$$y_p(t) = e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} b(s) \, ds.$$

### 7.3. Systeme von Differentialgleichungen

Diese Lösung erweist sich nach einer Probe als richtig und stellt man auch noch alle Konstanten anhand der Anfangsbedingung richtig ein, so erhält man folgendes Resultat.

**Satz 7.3.16** (Variation-der-Konstanten-Formel, bzw. Duhamelsche Formel). *Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  eine Matrix und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine stetige Funktion, sowie  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^N$ . Dann hat das lineare Anfangswertproblem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) + b(t), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

die eindeutige globale Lösung

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} b(s) \, ds = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) \, ds.$$

**Beispiel 7.3.17.** Wir versehen unser Problem aus Beispiel 7.3.13 noch mit einer Inhomogenität und einem Anfangswert und betrachten

$$\begin{cases} y'(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dann ist

$$e^{tA} y_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) \, ds &= \int_0^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4(t-s)} + e^{2(t-s)} & e^{4(t-s)} - e^{2(t-s)} \\ e^{4(t-s)} - e^{2(t-s)} & e^{4(t-s)} + e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{pmatrix} \, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{4t} e^{-2s} + e^{2t} \\ e^{4t} e^{-2s} - e^{2t} \end{pmatrix} \, ds = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{4t} e^{-2s}/2 \Big|_{s=0}^{s=t} + t e^{2t} \\ -e^{4t} e^{-2s}/2 \Big|_{s=0}^{s=t} - t e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{4t} + (2t-1)e^{2t} \\ e^{4t} - (2t+1)e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also

$$y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \left[ e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ -2t-1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \left[ e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 2t+3 \\ -2t-5 \end{pmatrix} \right].$$

## 7.4. Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung  $n$  mit  $n \geq 2$  lässt sich immer auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung reduzieren. Dieses Verfahren soll in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Gegeben sei also eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in I, \quad (7.6)$$

wie in Definition 7.1.2. Hierbei sind  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Wir definieren nun die Funktion  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$v_1 = y, \quad v_2 = y', \quad v_3 = y'', \quad \dots, \quad v_n = y^{(n-1)}.$$

Für diese gilt dann

$$v'(t) = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \\ \vdots \\ v_{n-1}'(t) \\ v_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \\ F(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung ist ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  und es gilt der folgende Satz

**Satz 7.4.1.** *Es seien  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann eine Lösung der Differentialgleichung in (7.6), wenn  $v = (y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})^T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung des Systems  $v'(t) = G(t, v(t))$  mit*

$$G(t, v(t)) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \\ F(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

ist.

*Beweis.* Es sei zunächst  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung in (7.6). Dann ist  $y$  nach Definition des Begriffs Lösung eine  $n$  mal stetig differenzierbare Funktion auf  $I$ . Also ist  $v$  noch einmal stetig differenzierbar und die gerade durchgeführte Rechnung zeigt, dass  $v$  eine Lösung des Systems (7.7) ist.

#### 7.4. Differentialgleichungen höherer Ordnung

Ist umgekehrt  $v$  eine Lösung des Systems (7.7), so ist mit  $v$  auch jede Koordinatenfunktion von  $v$  stetig differenzierbar. Also können wir  $y := v_1$  noch einmal ableiten und erhalten dank der speziellen Form der Funktion  $G$  die Beziehung  $y' = v'_1 = v_2$ . Da  $v_2$  ebenfalls stetig differenzierbar ist, gilt selbiges für  $y$  sogar zweimal und wir finden  $y'' = v'_2 = v_3$ , da  $v$  eine Lösung des Systems (7.7) ist. Indem wir dieses Argument noch  $n - 1$  Mal wiederholen, sehen wir, dass  $y$  sogar  $n$  Mal stetig differenzierbar ist und

$$y^{(n)} = v'_n = F(t, v_1, v_2, \dots, v_n) = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

gilt. Damit ist  $y$  eine Lösung der Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in (7.6) und wir sind fertig.  $\square$

Damit ist (zumindest in der Theorie) das Problem von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf solche von erster Ordnung reduziert. Um den Gewinn dieses Verfahrens zu sehen, wollen wir uns nun eine besonders wichtige Klasse solcher Gleichungen anschauen, die *linearen Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Deren allgemeine Form ist

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = g(t), \quad t \in I, \quad (7.8)$$

wobei  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  die sogenannten Koeffizienten der Gleichung sind und  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Inhomogenität.

Zum Umschreiben dieser Gleichung in ein System erster Ordnung definieren wir also die Funktion  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$v(t) := (y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))^T, \quad t \in I,$$

und finden

$$\begin{aligned} v'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \\ -a_0v_1(t) - a_1v_2(t) - \dots - a_{n-1}v_n(t) + g(t) \end{pmatrix} \\ &= Av(t) + b(t) \end{aligned}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unsere Differentialgleichung (7.8) erweist sich also als äquivalent zu einem System von linearen Gleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, vgl. Abschnitt 7.3.2. Damit können wir auch die gesamte Lösbarkeits- und Lösungstheorie von dort übersetzen. Das ergibt das folgende Resultat.

**Satz 7.4.2.** *Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  und  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Ist  $g = 0$ , so ist die Menge aller Lösungen der Gleichung (7.8) ein Untervektorraum der Dimension  $n$  von  $C^n(I)$ .*
- (b) *Ist  $y_p$  eine Lösung der Gleichung (7.8), so ist jede Lösung dieser Gleichung gegeben durch  $y = y_p + y_h$ , wobei  $y_h$  eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems (d.h. mit  $g = 0$ ) ist.*

Die Zurückführung dieser Aussagen auf die entsprechenden Resultate für Systeme aus Abschnitt 7.3.2 verbleibt als Übungsaufgabe.

**Definition 7.4.3.** (a) *Jede Basis des Raums aller Lösungen in Satz 7.4.2 (a) nennt man ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.*

- (b) *Die Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung in Satz 7.4.2 (b) heißt spezielle Lösung, oder auch Partikulärlösung der Gleichung (7.8).*

**Beispiel 7.4.4.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Mit obigen Überlegungen gilt für die Funktion  $v(t) = (y(t), y'(t))^T$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , die Differentialgleichung

$$v'(t) = Av(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v(t)$$

Die Eigenwerte der Matrix  $A$  sind 1 und  $-2$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $(1, 1)^T$ , bzw.  $(1, -2)^T$ . Also ist nach Satz 7.3.14 ein Fundamentalsystem dieses Systems gegeben durch

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit sind alle Lösungen gegeben durch

$$v(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Davon interessiert uns allerdings nur die erste Zeile und wir erhalten alle Lösungen der Differentialgleichung unseres Anfangswertproblems zu

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$



## 7.4. Differentialgleichungen höherer Ordnung

Es bleiben noch die Anfangswerte einzustellen. Wegen  $y'(t) = c_1 e^t - c_2 2e^{-2t}$  muss für die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  gelten:

$$3 = y(0) = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad 0 = c_1 - 2c_2.$$

Löst man das Gleichungssystem auf, so erhält man  $c_1 = 2$  und  $c_2 = 1$ , also ist die Lösung unseres Anfangswertproblems

$$y(t) = 2e^t + e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dank der speziellen Form der Matrix  $A$  in (7.9) lassen sich selbst im allgemeinen Fall die Eigenwerte und Eigenvektoren und damit die Matrix-Exponentialfunktion  $e^{tA}$  bestimmen. So bekommt man das charakteristische Polynom durch Entwickeln nach der letzten Zeile zu

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n [a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n] \end{aligned}$$

**Definition 7.4.5.** *Es sei*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

*eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung  $n$  mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$$

*charakteristisches Polynom der Differentialgleichung.*

**Satz 7.4.6.** *Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $n \geq 2$ . Mit  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  sei die Differentialgleichung*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0, \quad t \in I, \quad (7.10)$$

*gegeben und es seien  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  paarweise verschiedene Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms mit  $\operatorname{Im}(\lambda_i) \geq 0$ , sowie  $m_j$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda_j$  für  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .*

*Dann ist ein Fundamentalsystem für (7.10) gegeben durch*

$$F = F_1 \cup \dots \cup F_k,$$

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

wobei  $F_j$  im Falle  $\lambda_j = \lambda \in \mathbb{R}$  als

$$\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m_j-1}e^{\lambda t}\}$$

und im Falle  $\lambda_j = \lambda + i\omega$  mit  $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega > 0$  als

$$\{e^{\lambda t} \cos(\omega t), e^{\lambda t} \sin(\omega t), te^{\lambda t} \cos(\omega t), te^{\lambda t} \sin(\omega t), \dots, t^{m_j-1}e^{\lambda t} \cos(\omega t), t^{m_j-1}e^{\lambda t} \sin(\omega t)\}$$

definiert ist.

**Beispiel 7.4.7.** Wir bestimmen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 2y'''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0, \quad t \in I.$$

Dazu zerlegen wir das zugehörige charakteristische Polynom in Linearfaktoren:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1).$$

Also ist 1 eine Nullstelle mit Vielfachheit drei und  $-1$  mit Vielfachheit eins. Nach Satz 7.4.6 ist also

$$\{e^t, te^t, t^2e^t, e^{-t}\}$$

ein Fundamentalsystem.

**Beispiel 7.4.8.** Wir bestimmen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dazu zerlegen wir das zugehörige charakteristische Polynom in Linearfaktoren:

$$\lambda^2 + \omega^2 = (\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega).$$

Nach Satz 7.4.6 ist also

$$\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$$

ein Fundamentalsystem für die Differenzialgleichung  $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$ , die in der Physik als die Beschreibung des *harmonischen Oszillators* bekannt ist.

## 7.5. Existenz- und Eindeutigkeitsresultate

In diesem Abschnitt werden kurz die beiden wichtigsten Sätze vorgestellt, die die Lösbarkeit, bzw. eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen garantieren. Wir formulieren diese Sätze jeweils für Systeme von Gleichungen erster Ordnung. Damit ist dann nach den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts auch der Fall von Gleichungen höherer Ordnung abgedeckt.

## 7.5. Existenz- und Eindeutigkeitsresultate

**Satz 7.5.1** (Satz von Peano). *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann hat für jedes  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

*eine Lösung, d.h. es gibt ein offenes Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$  und eine Funktion  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ , die das Anfangswertproblem auf  $J$  löst.*

Die reine Stetigkeit der Funktion  $f$  reicht jedoch nicht aus, um die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems zu garantieren, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 7.5.2.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= |y(t)|^{2/3}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Die rechte Seite  $f(t, y(t)) = |y(t)|^{2/3}$  ist stetig, nach dem Satz von Peano ist das Anfangswertproblem also lösbar. Eine Lösung ist auch schnell gefunden, denn offensichtlich löst  $y(t) = 0$ ,  $t \in I$ . Aber das ist leider nicht die einzige Lösung, denn auch

$$y(t) = \frac{1}{27}t^3$$

ist eine, wie man leicht nachrechnet.

**Satz 7.5.3** (Satz von Picard-Lindelöf). *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Genügt dann  $f$  einer Lipschitzbedingung, d.h. existiert ein  $L > 0$  mit*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n,$$

*dann existiert ein kompaktes Intervall  $J$  mit  $t_0 \in J \subseteq I$ , sodass das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), & t \in J, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (7.11)$$

*eindeutig lösbar ist.*

Der Beweis dieses für die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen fundamentalen Resultats beruht auf einer Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes 5.6.22. Wir wollen hier nur die grundsätzliche Beweisidee vorstellen und auf die Ausführung von Details verzichten.

## 7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

*Beweisidee.* Sei  $J$  ein kompaktes Intervall mit  $t_0 \in J \subseteq I$ . Man beobachtet zunächst, dass eine Funktion  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann eine Lösung des betrachteten Anfangswertproblems (7.11) ist, wenn sie die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds, \quad t \in J,$$

erfüllt. Das folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralgleichung 6.7.15, denn nach diesem gilt für jede Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) - y_0 = y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(s) \, ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds.$$

Wir betrachten nun die Abbildung  $T : C(J) \rightarrow C(J)$ , die jeder Funktion  $u \in C(J)$  die Funktion

$$[T(u)](t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds$$

zuordnet. Obige Überlegungen bedeuten dann, dass eine Funktion  $y$  genau dann eine Lösung von (7.11) ist, wenn sie ein Fixpunkt der Abbildung  $T$  ist.

Im nächsten Schritt zeigt man, dass bei Wahl eines genügend kleinen Intervalls  $J$  mit  $t_0 \in J \subseteq I$  bzgl. der Supremumsnorm auf  $C(J)$

$$\|T(v) - T(u)\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \quad \text{für alle } u, v \in C(J)$$

gilt, womit die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes 5.6.22 erfüllt sind. Also hat  $T$  genau einen Fixpunkt, d.h. das Anfangswertproblem (7.11) hat genau eine Lösung, wenn man  $J$  genügend klein wählt.  $\square$

**Bemerkung 7.5.4.** Erinnern wir uns noch einmal an den Banach'schen Fixpunktsatz 5.6.22, so liefert dieser noch mehr, nämlich eine konstruktive Iterationsvorschrift zur Näherung des Fixpunktes, d.h. der Lösung des Anfangswertproblems. Für jede Startfunktion  $u_0 \in C(J)$  konvergiert nämlich die rekursiv definierte Folge mit

$$u_{n+1} := T(u_n) = t \mapsto \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) \, ds \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

gegen die Lösung  $y$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \|u_n - y\| &\leq \frac{q^n}{1-q} \|u_1 - u_0\| && \text{(A-priori-Abschätzung),} \\ \|u_n - y\| &\leq \frac{q}{1-q} \|u_n - u_{n-1}\| && \text{(A-posteriori-Abschätzung),} \end{aligned}$$

wobei hier  $q = \frac{1}{2}$  ist.

Dieses Näherungsverfahren wird dementsprechend *Picard-Iteration* genannt. In der Realität wird es allerdings eher selten verwendet, da bessere numerische Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen zur Verfügung stehen.

**Beispiel 7.5.5.** Wir betrachten noch einmal das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= ty(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

vgl. Beispiel 7.2.3 (a). Dort hatten wir gesehen, dass die Lösung gegeben ist durch  $y(t) = e^{t^2/2}$ . Wir starten die Picard-Iteration beispielhaft mit der konstanten Funktion, die durch den Anfangswert gegeben ist, also  $u_0(t) = y_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Berechnen wir die ersten beiden Schritte der Picard-Iteration, so finden wir

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_0(s)) \, ds = 1 + \int_0^t s \cdot 1 \, ds = 1 + \frac{t^2}{2}, \\ u_2(t) &= 1 + \int_0^t f(s, u_1(s)) \, ds = 1 + \int_0^t s \left(1 + \frac{s^2}{2}\right) \, ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}, \end{aligned}$$

was genau dem Anfang der Taylorentwicklung der Lösung entspricht:

$$e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \dots$$

**Bemerkung 7.5.6.** Mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf können wir nun auch den Beweis von Satz 7.3.3 vervollständigen. Dort ging es um den Untervektorraum  $L$  aller Lösungen des linearen Systems von Differentialgleichungen  $y'(t) = A(t)y(t)$ ,  $t \in I$ , mit einer stetigen Funktion  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  und es blieb noch zu zeigen, dass die Dimension des Raums  $N$  ist.

Dazu betrachten wir zu einem fest gewählten  $t_0 \in I$  die Abbildung  $\Phi : L \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit  $\Phi(y) = y(t_0)$  und zeigen, dass diese eine bijektive lineare Abbildung, also ein Isomorphismus ist. Dann gilt nach Satz 3.6.10 (c)  $\dim(L) = \dim(\mathbb{R}^N) = N$ .

Für die Linearität seien  $y_1, y_2 \in L$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\Phi(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)(t_0) = \alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0) = \alpha \Phi(y_1) + \beta \Phi(y_2).$$

Für die Bijektivität überlegen wir uns folgendes: Auf jedem kompakten Teilintervall  $J$  von  $I$  ist die Funktion  $t \mapsto A(t)$  als stetige Funktion beschränkt, vgl. Satz 5.8.8. Also gilt für alle  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N$

$$\|A(t)y_1 - A(t)y_2\| = \|A(t)(y_1 - y_2)\| \leq \|A(t)\| \|y_1 - y_2\| \leq M \|y_1 - y_2\|,$$

wobei  $M := \max_{t \in J} \|A(t)\|$  ist. Das heißt, dass die rechte Seite der betrachteten Differenzialgleichung  $y'(t) = A(t)y(t)$  die Lipschitzbedingung aus dem Satz von Picard-Lindelöf erfüllt, d.h. das Anfangswertproblem  $y'(t) = A(t)y(t)$  mit  $y(t_0) = y_0$  ist für jedes  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  eindeutig lösbar. Andersherum formuliert bedeutet das, dass es für jedes  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  genau eine Funktion  $y \in L$  gibt mit  $\Phi(y) = y(t_0) = y_0$ , also ist  $\Phi$  bijektiv.



# Tabelle der griechischen Buchstaben

groß	klein	Name
$A$	$\alpha$	Alpha
$B$	$\beta$	Beta
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma
$\Delta$	$\delta$	Delta
$E$	$\epsilon, \varepsilon$	Epsilon
$Z$	$\zeta$	Zeta
$H$	$\eta$	Eta
$\Theta$	$\theta, \vartheta$	Theta
$I$	$\iota$	Iota
$K$	$\kappa, \varkappa$	Kappa
$\Lambda$	$\lambda$	Lambda
$M$	$\mu$	My
$N$	$\nu$	Ny
$\Xi$	$\xi$	Xi
$O$	$o$	Omikron
$\Pi$	$\pi, \varpi$	Pi
$P$	$\rho, \varrho$	Rho
$\Sigma$	$\sigma, \varsigma$	Sigma
$T$	$\tau$	Tau
$Y$	$\upsilon$	Ypsilon
$\Phi$	$\phi, \varphi$	Phi
$X$	$\chi$	Chi
$\Psi$	$\psi$	Psi
$\Omega$	$\omega$	Omega