

1. Aufgabe

Mathe 1 SoSe 2017

a) Es gilt $14^{22} - 2^{44} = 2^{22}(7^{22} - 2^{22})$. Wir zeigen, dass $7^{22} - 2^{22}$ durch 5 teilbar ist mittels Modulrechnung. Es gilt

$$7^{22} \bmod 5 = (7 \bmod 5)^{22} \bmod 5 = 2^{22} \bmod 5.$$

Also ist $7^{22} - 2^{22} = 5k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Also gilt

$$14^{22} - 2^{44} = 10 \cdot k 2^{21}. \quad (4)$$

b) Wir benutzen den erweiterten Euklidischen Algorithmus.

m	a_m	b_m	q_m	k_m	l_m
0	61	16	3	5	$-4 - 5 \cdot 3 = -19$
1	16	13	1	-4	$1 - (-4) \cdot 1 = 5$
2	13	3	4	1	$0 - 1 \cdot 4 = -4$
3	3	1	3	0	1
4	1	0		1	0



$\text{ggT}(61, 13)$ also $\exists k, l \in \mathbb{Z}$. Es gilt also

$$61 \cdot 5 + 16 \cdot (-19) = a_0 \cdot k_0 + b_0 \cdot l_0 = \text{ggT}(a_0, b_0) = \text{ggT}(61, 16) = 1. \quad (1)$$

2. Aufgabe

Induktionsanfang

Für $n=1$ gilt $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1}$. Also gilt die (2)

Aussage für $n=1$.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Für ein beliebiges fixiertes $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (1)

Induktionsschritt

Wir betrachten die Aussage für $n+1$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \textcircled{1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \stackrel{\textcircled{1} \textcircled{IV}}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1 + n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1} \cdot \textcircled{3} \end{aligned}$$

3. Aufgabe

a.) Bestimme das charakteristische Polynom.

$$P_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 2 & -t & 2 \\ 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)(-t)(1-t) + 4 + 4 - (-t) - 4(1-t) - 4(1-t)$$

Bestimme Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$0 = P_A(\lambda) = -\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 8 + \lambda - 8 + 8\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2 \quad (3)$$

p.g.-Formel!

• $E_0(A) = \{x: Ax=0\}$, $(A|0) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} I+\frac{1}{2}II \\ -\frac{1}{4}II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

1 Nullzeile $\hat{=}$ 1 Freiheitsgrad. Wähle $x_3 = s$. Dann gilt $x_1 = -s$ und $x_2 = 0$. Also

$$E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2)$$

• $E_4(A) = \{x: (A-4I)x=0\}$, $(A-4I|0) \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -4 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} III \\ II-2III \\ I+3III \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & -8 & 8 & | & 0 \\ 0 & 8 & -8 & | & 0 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{matrix} I+\frac{1}{4}II \\ -\frac{1}{8}II \\ III+II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}. 1 \text{ Nullzeile} \hat{=}$$

$$1 \text{ Freiheitsgrad. Wähle } x_3 = s. \text{ Dann gilt } x_1 = x_2 = s. \text{ Also}$$

$$E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2)$$

• $E_{-2}(A) = \{x: (A+2I)x=0\}$, $(A+2I|0) \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} III \\ II-2III \\ I-3III \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & | & 0 \\ 0 & -4 & -8 & | & 0 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{matrix} I+II \\ -\frac{1}{2}II \\ III-2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}. 1 \text{ Nullzeile} \hat{=}$$

$$1 \text{ Freiheitsgrad. Wähle } x_3 = s. \text{ Dann gilt } x_2 = -2s, x_1 = s. \text{ Also}$$

$$E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ -2s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2)$$

b) Den Kern haben wir bereits in a) berechnet. Es gilt

$$\ker(A) = E_0(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle. \text{ Weiter gilt}$$

$$\text{Bild}(A) = \langle \{Ae_1, Ae_2, Ae_3\} \rangle = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle = \langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}_{= \mathcal{B}} \rangle.$$

\mathcal{B} bildet eine Basis von $\text{Bild}(A)$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ offensichtlich lin. unabhängig sind. Es gilt also $\text{rg}(A) = 2$.

c) Nein, da 0 EW gilt $\det(A) = 0$.

d) Ja, da A drei verschiedene EW hat ist A diagonalisierbar und ist ähnlich zu $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

e) A ist indefinit, da sie positive und negative EW hat.

f) Ist λ EW von A mit EV v , dann gilt $\lambda^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$. Also ist λ^2 EW von A^2 . Also sind $\lambda_0^2 = 0$, $\lambda_1^2 = 16$, $\lambda_2^2 = 4$ die EW von A^2 .

g) Damit $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ lösbar ist, muss $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im Bild von A liegen, es gilt

$$\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ liefert } \mu_1 = \frac{1}{2} \text{ und somit } \mu_2 = \frac{1}{4}. \text{ Dann gilt}$$

$$\lambda = \mu_1 + 2\mu_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \text{ Also ist das Gleichungssystem nur für } \lambda = 1 \text{ lösbar.}$$

$$\text{und es gilt } A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Weiterhin gilt } \{x : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \ker(A).$$

$$\text{Also hat } Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{cases} \text{unendlich} \\ \text{keine} \end{cases} \text{ Lösungen für } \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda \neq 1 \end{cases}. \quad \textcircled{3}$$

4. Aufgabe

Wähle $U = \langle v_0 - v_1 \rangle$. (2)

(i) Der Spann von Vektoren $v \in V$ ist immer ein Untervektorraum. (1)

(ii) offensichtlich gilt $v_0 - v_1 \in U$. Also $v_0 \sim_U v_1$. (1)

(iii) Sei U' ein UVR von V , sodass $v_0 \sim_{U'} v_1$ gilt. Dann gilt $v_0 - v_1 \in U'$. Also auch

$U = \langle v_0 - v_1 \rangle \subseteq \langle U' \rangle = U'$. Damit ist U der kleinste mögliche UVR. (1)

Nach der Dimensionsformel gilt für die Projektion $\pi_U: V \rightarrow U$ das

$$n = \operatorname{rg}(\pi_U) + \dim(\ker(\pi_U)) = 1 + \dim(\ker(\pi_U)). \text{ Also } \dim(V/U) = \dim(\pi_U) = n - 1. \quad (1)$$

5. Aufgabe

a.) falsch. (1) $X = \{0\}$, $Y = Z = \{0, 1\}$, $\phi(0) = 0$, $\psi(x) = x$. Dann ist $\psi \circ \phi(0) = 0 \neq 1$ also ist $\psi \circ \phi$ nicht surjektiv also auch nicht bijektiv. (3)

b.) wahr. (1) Seien $a, b \in G$. Es gilt:

$$a * b = a^{-1} * a * a * b * b * b^{-1} = a^{-1} * f(a) * f(b) * b^{-1} = a^{-1} * f(a * b) * b^{-1} = a^{-1} * a * b * a * b * b^{-1} = b * a. \quad (2)$$

c.) wahr. (1) Da v und w linear abhängig sind gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $w = \lambda v$. Dann gilt

$$|(v|w)| = |(v|\lambda v)| = |\lambda| |(v|v)| = |\lambda| \|v\| \cdot \|v\| = \|v\| \cdot \|\lambda v\| = \|v\| \cdot \|w\| \quad (3)$$

d.) wahr. (1) Da A und B ähnlich sind existiert $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $A = S^{-1}BS$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(S^{-1}BS - \lambda I) = \det(S^{-1}(B - \lambda I)S) = \det(S^{-1}) \det(B - \lambda I) \det(S) \\ &= \det(S^{-1}) \det(S) \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}S) \det(B - \lambda I) \\ &= \det(I) \det(B - \lambda I) = \det(B - \lambda I) \quad (3) \end{aligned}$$

6. Aufgabe

a) wahr.

p	q	$\neg(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \neg q)$
w	w	f	f
w	f	w	w
f	w	f	f
f	f	f	f

b) falsch. Für $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ gilt

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \neq \emptyset = (A \cap B) \setminus (A \cup B)$$

c) wahr. Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(z - \bar{z})\bar{z}}{\bar{z}^2 \cdot z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(z - \bar{z})}{|z|^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{a + bi - a - bi}{a^2 + b^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2bi}{a^2 + b^2}\right) = 0$$

d) wahr. $U = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$. Dann ist $\mathbb{R}^6 / U = \langle e_5 + U, e_6 + U \rangle$

e) wahr. $x = 0 \in V$ löst stets $Ax = 0 \in W$ für lineare Funktionen $A: V \rightarrow W$.

f) falsch. Die Hesse-Normalform von E ist $H = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

$$\text{Also ist } \operatorname{dist}(0, H) = |(0|v)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

g) wahr. Offensichtlich ist $\mathcal{L}(V, W)$ (punktweise) additive kommutative Gruppe. Mit der punktweisen definierten Skalarmultiplikation gelten die Distributivgesetze.

h) falsch. Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Also für $n=2$, $\lambda=2$ gilt mit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\det(2I) = 4 \neq 2 = 2 \det(I)$.

i) falsch. Ist $\lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $v \in \mathbb{C}^3$, sodass $\lambda v = i v$. Dann gilt $\lambda \bar{v} = \overline{\lambda v} = \overline{i v} = -i \bar{v}$. Also ist $-i$ auch ein EW.

j) wahr. Gilt $\dim(\ker(\lambda - \lambda I)) = 0$ dann ist $\ker(\lambda - \lambda I) = \{0\}$ und damit
 $P_\lambda(\lambda) = \det(\lambda - \lambda I) \neq 0$. Also ist λ kein EW von A .