Digitaltechnik
Wintersemester 2021/2022
5. Übung

Prof. Dr.-Ing. Thomas Schneider, M.Sc. Daniel Günther, M.Sc. Amos Treiber

LÖSUNGSVORSCHLAG KW47

Bitte bearbeiten Sie die Übungsblätter bereits im Voraus, sodass Sie Ihre Lösungen zusammen mit Ihren Kommilitonen und Tutoren während der wöchentlichen Übungsstunde diskutieren können.
Mit der angegebenen Bearbeitungszeit für die einzelnen Aufgaben können Sie Ihren Leistungsstand besser einschätzen. Die mit **"Zusatzaufgabe"** gekennzeichneten Aufgaben sind zur zusätzlichen Vertiefung für interessierte Studierende gedacht und daher nicht im Zeitumfang von 90 Minuten einkalkuliert.

Übung 5.1 Normalformen und Theoreme der boole'schen Algebra – Wiederholung [15 min]

Die Funktion f bildet die vier Eingangsvariablen $A, B, C, D \in \mathbb{B}$ auf eine Ausgabevariable $Y \in \mathbb{B}$ ab. Die Ausgabe ist genau dann 1, wenn $A = 0$ gilt oder folgendes zutrifft:

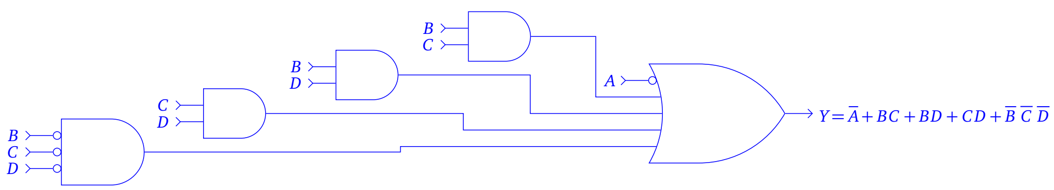
Wenn $A = 1$ gilt, dann müssen mindestens zwei oder keine der verbleibenden Eingänge gleich 1 sein.

Erstellen Sie zunächst eine Wahrheitstabelle für die Funktion f. Geben Sie anschließend die konjunktive Normalform (KNF) der Funktion an. Formen Sie dann die KNF mit Hilfe der Rechenregeln der bool'schen Algebra in die äquivalente minimale Summe der Produkte (von Literalen) um. Geben Sie dabei für jeden Umformungsschritt das verwendete Axiom bzw. Theorem an. Realisieren Sie zum Abschluss die Summe als eine Gatterschaltung.

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$\text{KNF} = (\overline{A}+B+C+\overline{D})\,(\overline{A}+B+\overline{C}+D)\,(\overline{A}+\overline{B}+C+D)$$

$$
\begin{aligned}
Y &= (\overline{A}+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+B+\overline{C}+D)(\overline{A}+B+C+\overline{D}) && \text{Distributivität}\\
&= \overline{A}+(\overline{B}+C+D)(B+\overline{C}+D)(B+C+\overline{D}) && \text{Distributivität}\\
&= \overline{A}+(\overline{B}+C+D)(B+(\overline{C}+D)(C+\overline{D})) && \text{Distributivität}\\
&= \overline{A}+(\overline{B}+C+D)(B+\overline{C}C+\overline{C}\,\overline{D}+DC+D\overline{D}) && \text{Komplement}\\
&= \overline{A}+(\overline{B}+C+D)(B+0+\overline{C}\,\overline{D}+DC+0) && \text{Neutralität}\\
&= \overline{A}+(\overline{B}+C+D)(B+\overline{C}\,\overline{D}+DC) && \text{Distributivität}\\
&= \overline{A}+\overline{B}B+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}DC+CB+C\overline{C}\,\overline{D}+CDC+DB+D\overline{D}\,\overline{C}+DDC && \text{Komplement}\\
&= \overline{A}+0+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}DC+CB+0\overline{D}+CDC+DB+0\overline{C}+DDC && \text{Extremum}\\
&= \overline{A}+0+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}DC+CB+0+CDC+DB+0+DDC && \text{Neutralität}\\
&= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}DC+CB+CDC+DB+DDC && \text{Kommutativität}\\
&= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+CB+CD\overline{B}+CCD+DB+CDD && \text{Idempotenz}\\
&= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+CB+CD\overline{B}+CD+DB+CD && \text{Idempotenz}\\
&= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+CB+CD\overline{B}+CD+DB && \text{Neutralität}\\
&= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+CB+CD\overline{B}+CD1+DB && \text{Distributivität}\\
&= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+CB+CD(1+\overline{B})+DB && \text{Extremum}\\
&= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+CB+CD1+DB && \text{Neutralität}\\
&= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+CB+CD+DB && \text{Kommutativität}\\
&= \overline{A}+BC+BD+CD+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}
\end{aligned}
$$

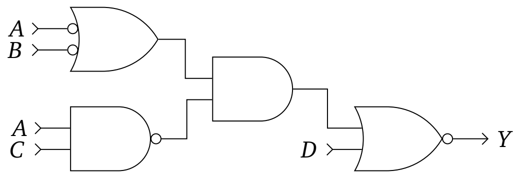


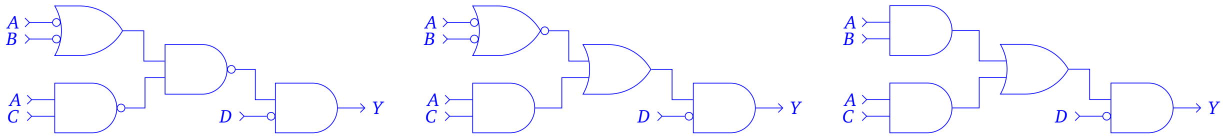
Übung 5.2 Bubble Pushing [15 min]

Verschieben Sie die Invertierungsblasen in den folgenden Schaltungen so weit wie möglich in die jeweils angegebene Richtung. Geben Sie die Funktion der umgeformten Schaltung zusätzlich als boole'schen Ausdruck an.

Übung 5.2.1 Vom Ausgang zu den Eingängen

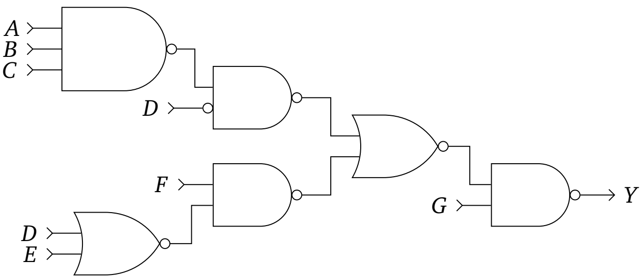
a)

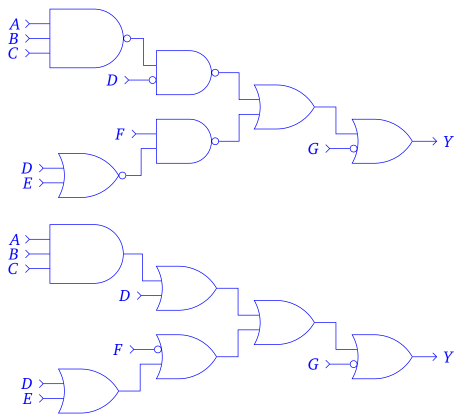




$$Y = (AB + AC)\,\overline{D}$$

b)

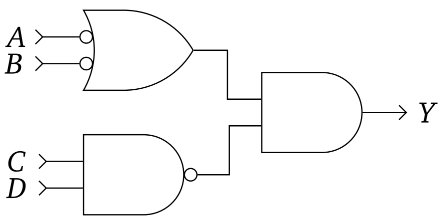


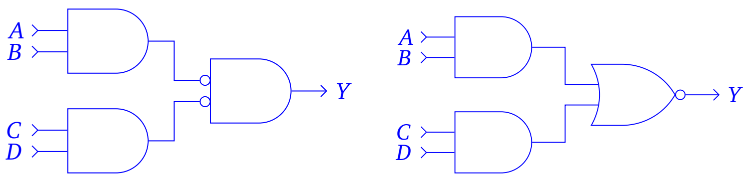


$$Y = (ABC + D) + D + E + \overline{F} + \overline{G} = ABC + D + E + \overline{F} + \overline{G}$$

Übung 5.2.2 Von den Eingängen zum Ausgang

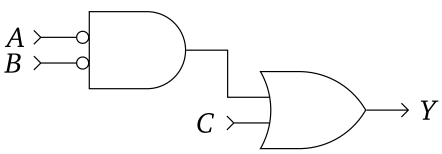
a)

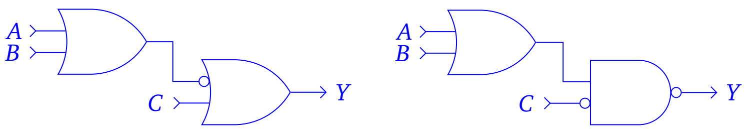




$$Y = \overline{AB + CD}$$

b)

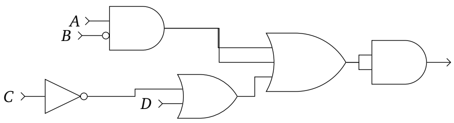




$$Y = \overline{(A+B)\,\overline{C}}$$

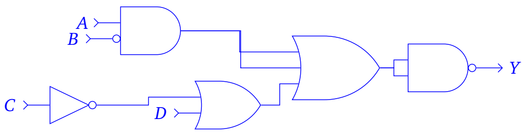
Übung 5.2.3 Invertierung mittles Bubble Pushing

Geben Sie zunächst einen bool'schen Ausdruck an, welcher die folgende Gatterschaltung repräsentiert. Ermitteln Sie anschließend das Komplement dieser Funktion, indem Sie Bubble Pushing auf die Schaltung anwenden.

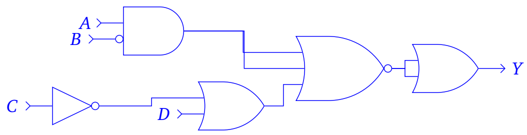


$Y = (A\overline{B} + A\overline{B} + (\overline{C} + D))(A\overline{B} + A\overline{B} + (\overline{C} + D))$

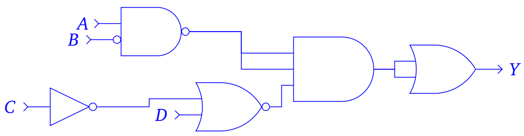
Wir ergänzen zunächst einen Inverter am Ausgang. Dies gibt uns das Komplement der Funktion in Form einer Gatterschaltung.



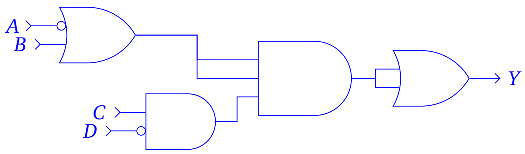
Nun verschieben wir die Invertierungsblasen in Richtung der Eingänge, sodass maximal ein Inverter direkt an einem Literal steht. Schritt 1:



Schritt 2:



Schritt 3:



Verfahren wir auf diese Weise, bekommen wir also folgenden bool'schen Audruck für das Komplement, in dem maximal die Literale negiert sind:

$$Y = (\overline{A} + B)(\overline{A} + B)(C\,\overline{D}) + (\overline{A} + B)(\overline{A} + B)(C\,\overline{D})$$

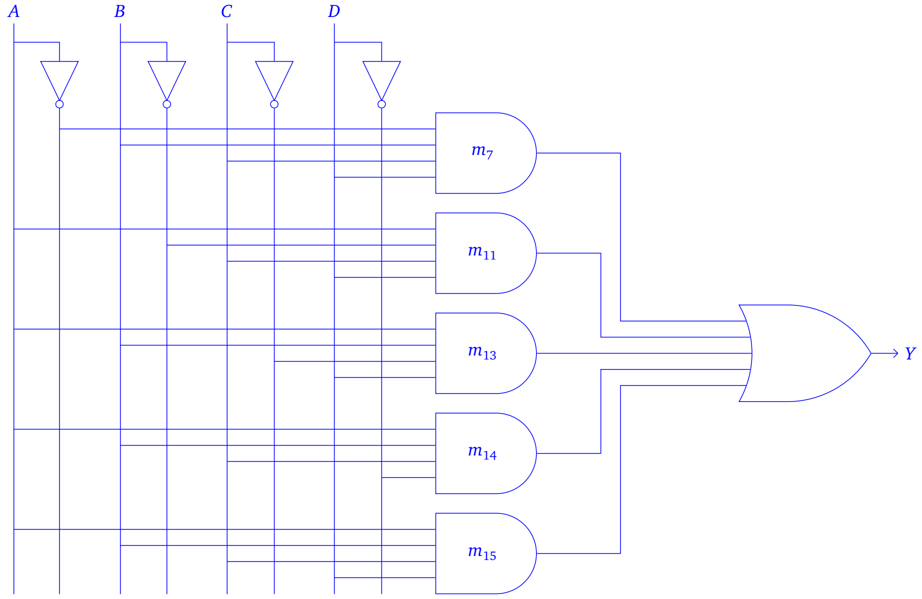
Übung 5.3 Logikrealisierung am Beispiel einer Majoritätsschaltung [20 min]

Übung 5.3.1 Zweistufige Logik EX2-2-9 EX2-2-10

Die Ausgabe der Funktion Y mit Inputs A, B, C, und D ist genau dann 1, wenn die Mehrheit ihrer Eingänge den Wert 1 haben. Geben Sie die DNF der Funktion f an und realisieren Sie diese mit zweistufiger Logik.

$Y = \overline{A}\,B\,C\,D + A\,\overline{B}\,C\,D + A\,B\,\overline{C}\,D + A\,B\,C\,\overline{D} + A\,B\,C\,D$

A	B	C	D	Y	
0	0	0	0	0	m_0
0	0	0	1	0	m_1
0	0	1	0	0	m_2
0	0	1	1	0	m_3
0	1	0	0	0	m_4
0	1	0	1	0	m_5
0	1	1	0	0	m_6
0	1	1	1	1	m_7
1	0	0	0	0	m_8
1	0	0	1	0	m_9
1	0	1	0	0	m_{10}
1	0	1	1	1	m_{11}
1	1	0	0	0	m_{12}
1	1	0	1	1	m_{13}
1	1	1	0	1	m_{14}
1	1	1	1	1	m_{15}

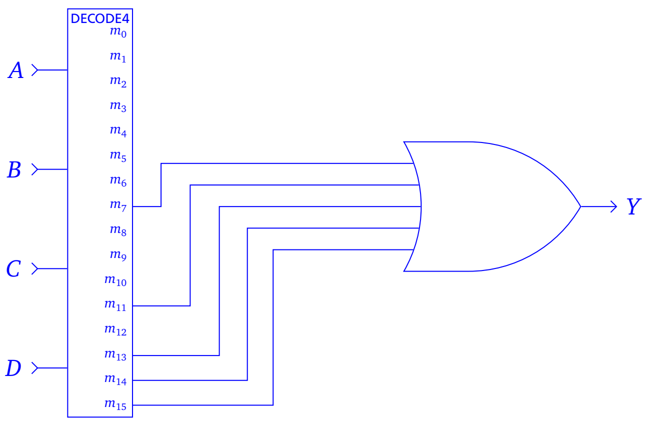


Übung 5.3.2 Multiplexer und Decoder EX7-1-2 EX7-1-3 EX7-1-6

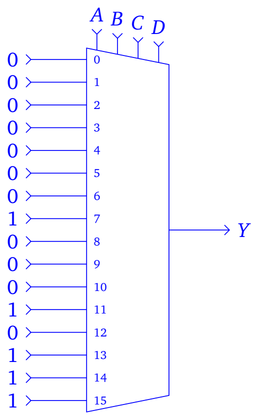
a) Welchen Teil der zweistufigen Schaltung können Sie durch einen Decoder ersetzen? Setzen Sie die Schaltung mithilfe eines Decoders um.

b) Anstelle zahlreicher einzeln verdrahteter Gatter, werden in Rechnersystemen häufig Multiplexer (bzw. Look-Up-Tabellen) verwendet. Setzen Sie die Schaltung nun auch mithilfe eines Multiplexers um.

a) Der Decoder DECODE4 : $\mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}^{16}$ erzeugt eine One-Hot Codierung aller Minterme mit vier Eingangsvariablen und kann damit die erste Stufe der zweistufigen Realisierung ersetzen.



b) Der MUX16 : $\mathbb{B}^{20} \rightarrow \mathbb{B}$ hat vier Steuersignale. An den anderen 16 Eingängen werden konstante Werte entsprechend der Wahrheitswertetabelle angelegt.



Übung 5.4 Karnaugh Diagramme EX4-2-1 EX4-2-2 EX4-2-3 EX4-2-4 [10 min]

Übung 5.4.1 Grafisch unterstützte Logikminimierung EX4-2-5 EX4-2-6 EX4-2-7

Minimieren Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe von Karnaugh Diagrammen.

a) $Y = A\,\overline{C} + C\,A\,B + \overline{C}\,(\overline{B}\,\overline{A} + B) = \overline{C} + A\,B$

Y:

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	1
C 1			1	

(A: columns 11, 10; B: columns 01, 11)

b) $Y = A\,\overline{D}\,\overline{B} + D(B\,A + \overline{B}\,\overline{A}) + \overline{A}\,\overline{B}\,(C\,\overline{D} + \overline{C}\,\overline{D}) = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{D} + A\,B\,D = \overline{B}\,(\overline{A} + \overline{D}) + A\,B\,D$

Y:

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1		1	
11	1		1	
10	1			1

(A: columns 11, 10; B: columns 01, 11; C: rows 11, 10; D: rows 01, 11)

c) $Y = C(B\overline{D} + A(BD + \overline{D}\,\overline{B}) + D\,\overline{A}\,\overline{B}) + B\,\overline{A}\,\overline{D}\,\overline{C}$

Verwenden Sie "Don't Cares" spezifiziert durch die Funktion $X = A\,B\,\overline{D}\,\overline{C} + C(\overline{B}(\overline{A}\,\overline{D} + AD) + B\,D\,\overline{A})$.

$Y = C + B\,\overline{D}$

$Y:$

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	*	
01				
11	1	*	1	*
10	*	1	1	1

Übung 5.4.2 Extraktion einer KNF aus einem Karnaugh Diagramm

In der Vorlesung haben Sie bereits gelernt, wie Sie aus Karnaugh Diagrammen eine minimierte disjunktive Normalform extrahieren können. Überlegen Sie nun, wie Sie aus folgendem Karnaugh Diagramm eine entsprechend minimale konjunktive Normalform extrahieren könnten. Klären Sie auch die Rolle von Don't Cares in diesem Fall.

$Y:$

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	*	0	0	1
01	1	0	0	*
11	0	*	0	1
10	0	0	0	1

Analog zum bekannten Verfahren versuchen wir zunächst mit möglichst wenigen Primimplikanten alle Nullen zu überdecken. Don't Cares können hierbei ebenso zur Bildung der Primimplikanten genutzt werden.

$Y:$

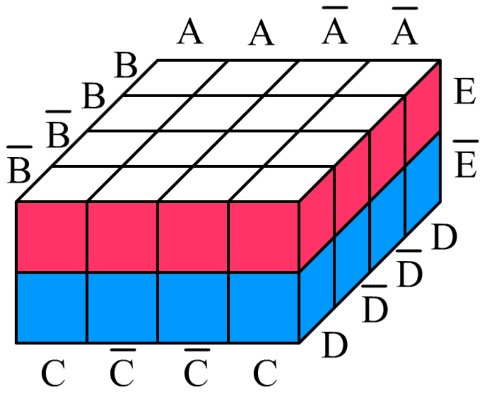
$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	*	0	0	1
01	1	0	0	*
11	0	*	0	1
10	0	0	0	1

Nun bilden wir die Maxterme der gesuchten KNF, indem wir für jeden Primimplikanten die negierten Variablen per Disjunktion verknüpfen (analog zum Vorgehen bei der Synthese der KNF aus einer Wahrheitstabelle). Verbinden wir anschließend die Disjunktionsterme per Konjunktion, erhalten wir die KNF:

$$Y = \boxed{\overline{B}}\ \boxed{(\overline{C} + A)}$$

Übung 5.5 Karnaugh Diagramm für 5 Variablen – **Zusatzaufgabe**

Bisher haben wir gelernt, wie wir mittels Karnaugh Diagrammen bool'sche Gleichungen mit bis zu vier Variablen minimieren können. Tatsächlich bieten Karnaugh Diagramme auch die Möglichkeit, Ausdrücke mit mehr als vier Variablen zu minimieren. Exemplarisch wollen wir dies nun für einen bool'schen Ausdruck mit 5 Variablen durchführen. Hierzu müssen wir das Karnaugh Diagramm um eine weitere Schicht erweitern. Zwangsweise führt dies zu einer dreidimensionalen Struktur. Diese könnte etwa folgendermaßen aussehen:



Quelle: `https://de.wikibooks.org/wiki/Karnaugh-Veitch-Diagramm`

Wir versuchen in diesem Block nun Quader mit 2^k Einträgen zu finden, die nur 1 und * enthalten. Die Quader müssen, wie auch die Rechtecke bei Karnaugh Diagrammen, hierbei so groß wie möglich sein. Unser Ziel ist es, alle Einsen mit so wenigen Quadern wie möglich zu überdecken.

Minimieren Sie mit diesem Verfahren die folgende Gleichung. Nutzen sie dafür die gegebenen Karnaugh Diagramme.

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,D\,E\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{D}\,E + A\,\overline{C}\,D\,E + B\,D\,\overline{E}$$

Verwenden Sie auch folgende Don't Cares:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,\overline{E} + A\,B\,D\,C\,E + \overline{A}\,B\,D\,E$$

Y:

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1			1
01		*	1	1
11		*	*	1
10	1			1

Für E

Y:

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1			
01	*	1	1	
11		1	1	
10	1			

Für $\overline{E}$

Es ergibt sich folgender minimaler Ausdruck:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + B\,D + A\,E\,\overline{B}$$