Aufgabe 1

Mathe 1 SoSe 2018

Wir benutzen die Modulo-Rechnung und zeigen

$$n \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3.$$ Es gilt

$$n \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, 10^i\right) \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, \underbrace{(10 \bmod 3)^i}_{=1}\right) \bmod 3$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3.$$

Also gilt $3 \mid n \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \bmod 3 = n \bmod 3 = 0 \Leftrightarrow n \mid \sum_{i=0}^{k} a_i$.

Aufgabe 2

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Für $n=0$ ist die Aussage trivial, da $M \neq \emptyset$ und $N = \emptyset$

Induktionsanfang

Sei $n=1$. Dann hat M mindestens zwei Element $m_1 \neq m_2$. Es gilt $f(m_1) = f(m_2)$, da N nur ein Element hat. Also ist f nicht injektiv.

Induktionsvorraussetung (IV)

Für ein beliebiges, fixes n gilt die Aussage bereits.

Induktionsschritt

Wir betrachten die Aussage nun für $n+1$. Dann gilt $N = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.

1\. Fall $|f^{-1}(a_{n+1})| = 0$

Dann ist $f: M \to N \setminus \{a_{n+1}\}$ eine Funktion und nach (IV) nicht injektiv

2\. Fall $|f^{-1}(a_{n+1})| \geq 2$

Dann gilt es zwei verschiedene $m_1, m_2 \in f^{-1}(a_{n+1}) \subset M$, sodass $f(m_1) = a_{n+1} = f(m_2)$. Also ist f nicht injektiv.

3\. Fall $|f^{-1}(a_{n+1})| = 1$

Dann ist $f: M \setminus f^{-1}(a_{n+1}) \to N \setminus \{a_{n+1}\}$ eine Funktion und nach (IV) nicht injektiv.

also $f: M \to N$ auch nicht.

Aufgabe 3

a) $P_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$

$= (1-t)\det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)\left[(1-t)^2-1\right]$

$= (1-t)(t^2-2t) = t(1-t)(t-2)$

Also sind $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ die EW von A.

$E_0(A) = \{x : (Ax|0)$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sei $x_3 = s$. Dann folgt $x_2 = -s$ und $x_1 = 0$. Daher ist $E_0(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$

$E_1(A) = \{x : ((A-I)x|0)\}$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sei $x_3 = s$. Dann folgt $x_2 = 0, x_1 = -s$

Daher ist $E_1(A) = \left\{\begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$.

$E_2(A) = \{x : ((A-2I)x|0)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{\substack{-I \\ I+II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{II+III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $x_3 = s$. Dann folgt $x_2 = s$ und $x_1 = 0$. Also ist $E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$.

b.) $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A) = \langle\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}\rangle$ nach a).

$\mathrm{Bild}(A) = \langle\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}\rangle = \langle\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}\rangle$, also.

$\mathrm{rg}(A) = 2$, da $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ offensichtlich linear unabhängig sind

c.) nein, da 0 ein EW ist, gilt $\det(A)=0$.

d.) Ja, da es drei verschied. EW gibt gilt $\cancel{A}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix} = S^{-1}AS$ mit

$S = \begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

e.) $0, 1, 4$, da für λ EW von A und zug. EV v gilt $A^2v = \lambda Av = \lambda^2 v$

f.) Wir wollen alle $\alpha \in \mathbb{R}$ finden, sodass $\begin{pmatrix}1\\3\\\alpha\end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(A) = \langle\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}\rangle$

$= \{\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$. Es gilt

$\begin{pmatrix}1\\3\\\alpha\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2$.

Also liegt $\begin{pmatrix}1\\3\\\alpha\end{pmatrix}$ nur für $\alpha=2$ im Bild. Also ist $Ax = \begin{pmatrix}1\\3\\\alpha\end{pmatrix}$ nur für

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, also

$\alpha=2$ lösbar. Es gilt $\{x : Ax = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\} = \mathrm{Ker}\,A + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Also hat $Ax = \begin{pmatrix}1\\3\\\alpha\end{pmatrix}$ $\left\{\begin{matrix}\text{unendlich viele Lösungen}\\\text{keine Lösung}\end{matrix}\right\}$ für $\left\{\begin{matrix}\alpha=2\\\alpha\neq 2\end{matrix}\right\}$.

4. Aufgabe

Zu zeigen:

1.) $\ker(h)$ definiert Äquivalenzrelation auf A_s für alle $s \in S$.

2.) $\forall f^A \in A_f$, $ar(f) = (s_1 \dots s_n, s)$ gilt $\forall\, x_1, y_1 \in A_{s_1}, \dots, x_n, y_n \in A_{s_n}$:

$$x_1 \ker(h)\, y_1, \dots, x_n \ker(h)\, y_n \Rightarrow f^A(x_1, \dots, x_n) \ker(h)\, f^A(y_1, \dots, y_n)$$

Zu 1) Refl. Offensichtlich gilt $h(x) = h(x)$ $\forall x \in A_s$ $\forall s \in S$

Sym —"— $h(x) = h(y) \Rightarrow h(y) = h(x)$ $\forall x, y \in A_s$ $\forall s \in S$

Trans —"— $h(x) = h(y) \wedge h(y) = h(z) \Rightarrow h(x) = h(z)$ $\forall x, y, z \in A_s$ $\forall s \in S$ ✓

Zu 2) Sei $f^A \in A_f$ mit $ar(f) = (s_1 \dots s_n, s)$ und $x_1, y_1 \in A_{s_1}, \dots, x_n, y_n \in A_{s_n}$ mit $h(x_1) = h(y_1), \dots, h(x_n) = h(y_n)$. $(*)$

Wir wollen zeigen $h(f^A(x_1, \dots, x_n)) = h(f^A(y_1, \dots, y_n))$.

Es gilt $h(f^A(x_1, \dots, x_n)) = f^B(h(x_1), \dots, h(x_n)) \overset{(*)}{=} f^B(h(y_1), \dots, h(y_n))$

$= h(f^A(y_1, \dots, y_n))$.

5. Aufgabe

a) Falsch: Bsp.: $A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist offensichtlich orthogonal, aber $\det(A) = 1$

b). Falsch. $\varphi: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, $\varphi(x) = 0$ ist offensichtlich Gruppenhom. außerdem gilt $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 0 = \varphi(x \cdot y)$ $\forall x,y \in \mathbb{Z}_2$. Aber φ ist offensichtlich nicht injektiv

c) Richtig. Def.: $\|x\| = 0 \Rightarrow \max\{|x_i| : i \in \{1,\dots,n\}\} = 0$

$\Rightarrow |x_i| = 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\} \Rightarrow x = 0$

außerdem gilt $\|0\| = \max\{0\} = 0$

Hom. $\|\lambda x\| = \max\{|\lambda x_i| \ i \in \{1,\dots,n\}\} = |\lambda| \max\{|x_i| : i \in \{1,\dots,n\}\} = |\lambda| \|x\|$

Δ-Ungl.: $\|x+y\| = \max\{|x_i + y_i| : i \in \{1,\dots,n\}\} \leq \max\{|x_i| + |y_i| : i \in \{1,\dots,n\}\}$

$\leq \max\{|x_i| : i \in \{1,\dots,n\}\} + \max\{|y_i| : i \in \{1,\dots,n\}\}$.

$= \|x\| + \|y\|$

d.) Falsch. Sei $b_n = 2$ und $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 2 & n \text{ ungerade} \end{cases}$.

Dann sind $(a_n), (b_n) \in F_+$ und es gilt $|a_n| \leq 1 \cdot |b_n|$ also auch $a_n \in O(b_n)$ aber

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ divergiert offensichtlich.

6. Aufgabe

a.) Richtig

A	B	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

Da die letzten beiden Spalten übereinstimmen sind die Ausdrücke äquivalent.

b.) Falsch. $A = B = \emptyset$

c.) Falsch. $a = 2, n = 4$ liefert $a^n = 16 \equiv 0 \bmod 4 \neq 2 \bmod 4$

d.) Falsch. Für $x = 7$ und $y = 13$ gilt $x \cdot y = 0$ in $\mathbb{Z}_{91}$

e.) Richtig. Abg.: $|s_1 \cdot s_2| = |s_1| \cdot |s_2| = 1 \cdot 1 = 1$. Also $s_1 \cdot s_2 \in S$, für $s_1, s_2 \in S$.
Assoz: ✓, da mult. assoz ist
neutr. Elt: $1 \in S$, da $|1| = 1$
inv. Elmt: $\left|\frac{1}{s}\right| = \frac{1}{|s|} = \frac{1}{1} = 1$ Also $\frac{1}{s} \in S$ für $s \in S$

f.) Richtig. $v, w, v \times w$ sind linear unabhängig

g) Falsch. Für $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $AA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

h) Falsch: $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

i) Falsch: Wenn $\operatorname{rg}(A) < n$ gibt es $b \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{bild}(A)$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat dann keine Lösung.

j) Richtig. Sind w und v linear abhängig, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $w = \lambda v$. Es gilt

$$|\langle v, w \rangle| = |\langle v, \lambda v \rangle| = |\lambda \|v\|^2| = \|v\| \cdot \|\lambda v\| = \|v\| \cdot \|w\|$$