

# Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Thomas Streicher

WS 2018/2019  
14.03.2019

Name: ..... Studiengang: .....  
Vorname: ..... Semester: .....  
Matrikelnummer: .....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\Sigma$	Bonus	Note
Punktzahl	20	4	10	7	6	10	23	80		
erreichte Punktzahl										

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blatts **jetzt und leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Bitte kennzeichnen Sie jeweils, welche Aufgabe Sie bearbeiten. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie Ihre Zusatzblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.**

Einzelne Zettel, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden.

Sollten Sie Zusatzblätter verwendet haben, falten Sie am Ende Ihre Klausur einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre zusätzlichen Blätter hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei eigenhandschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

**Tipp:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen und lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch!

**Viel Erfolg!**

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

---

### 1. Aufgabe (8 + 12 Punkte)

(20 Punkte)

- (a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede leere Zeile erhalten Sie  $\frac{1}{2}$  Punkt und jede fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.

Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

- |                                                                                                                                                                                                                                                                   | Wahr                  | Falsch                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1.) Seien $M$ und $N$ Mengen, dann gilt: $M \setminus N = (M \cap N)^C \cap M$ .                                                                                                                                                                                  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| 2.) $(\mathbb{Z}, -)$ ist eine Gruppe.                                                                                                                                                                                                                            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| 3.) Seien $(R, +_R)$ und $(S, +_S)$ Ringe und $f : (R, +_R) \rightarrow (S, +_S)$ ein Ringisomorphismus. Dann ist $f^{-1}$ ein Ringhomomorphismus.                                                                                                                | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| 4.) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Dann ist jeder $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit seiner Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.                                                                                                                     | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| 5.) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $V$ ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Sei $B_V$ eine Basis von $V$ .<br>Für jede Basis $B_U$ eines Untervektorräums $U \subseteq V$ gilt $B_U \subseteq B_V$ .                                                         | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| 6.) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$ . Dann ist auch $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.                                                                                                 | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| 7.) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ .<br>Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$ . | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| 8.) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{R}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .<br>Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{ a_n } = 1$ .                      | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

- (b) Füllen Sie die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet. Für jeden richtig ausgefüllten Kasten gibt es 2 Punkte. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte, für jeden leeren Kasten erhalten Sie einen Punkt und jeder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet.

Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> .                                                                                                                                                                                                          |
| 2.) Für Supremum und Infimum der Menge $M := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ gilt:<br>$\sup M = $ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> und $\inf M = $ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> .                                                                                                               |
| 3.) Seien $(G, *_G)$ , $(H, *_H)$ und $(K, *_K)$ Gruppen mit neutralen Elementen $n_G, n_H$ und $n_K$ . Weiterhin sei $f : (K, *_K) \rightarrow (H, *_H)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g : (G, *_G) \rightarrow (K, *_K)$ ein Gruppenisomorphismus.<br>Dann gilt: $f \circ g$ ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Ker } (f) = $ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> . |
| 4.) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben durch $z_1 := 1 + i$ und $z_2 := 1 - i$ . Berechnen Sie<br>$\frac{z_1}{z_2} = $ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> und $\frac{z_2}{z_1} = $ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> .                                                                                                                     |

---

**2. Aufgabe****(4 Punkte)**

Für welche  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $(7^{2n} - 4^{2n}) \bmod 33 = 0$ ?

---

**3. Aufgabe (6 + 4 Punkte)****(10 Punkte)**

Aus der Vorlesung kennen Sie die Bernoullische Ungleichung: Für jede reelle Zahl  $x \geq -1$  und beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

(a) Beweisen Sie die Ungleichung per vollständiger Induktion.

(b) Folgern Sie nun, dass für alle  $x > 0$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0$ .

---

**4. Aufgabe****(7 Punkte)**

Sei  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper,  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $M \subseteq V$  eine Teilmenge. Weiter bezeichne

$$\mathcal{M} := \{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum von } V \text{ mit } M \subseteq U\}$$

die Menge aller Untervektorräume von  $V$ , die  $M$  enthalten. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass der Untervektorraum  $\langle M \rangle$  durch  $\{\nu \in V : \nu \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M\}$  gegeben ist. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\langle M \rangle = \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U.$$

---

**5. Aufgabe (3 + 3 Punkte)****(6 Punkte)**

Entscheiden Sie bei den beiden nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten je einen Punkt für die richtige Antwort und 2 Punkte für die Begründung.

(a) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal. Dann gilt  $|\det(A)| = 1$ .

(b) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Falls  $A \neq 0$  ist, so gilt  $A^n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Hierbei bezeichne 0 die Nullmatrix.

---

**6. Aufgabe****(10 Punkte)**

Es bezeichne  $(\cdot| \cdot)$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ . Aus der Vorlesung wissen Sie, dass  $(x|By) = (B^T x|y)$  für alle  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt.

Sei nun  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass durch

$$(x|y)_A := (x|Ay), \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

Sei für  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Matrix  $A_\alpha \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definiert durch

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $A_\alpha$  invertierbar?
- (b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix  $D_\alpha$ , zu der  $A_\alpha$  ähnlich ist.
- (c) Bestimmen Sie Matrizen  $S$  und  $S^{-1}$ , sodass gilt:  $A_\alpha = S^{-1}D_\alpha S$ .
- (d) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:
  - 1.)  $A_\alpha$  ist positiv definit?
  - 2.)  $A_\alpha$  ist negativ definit?
  - 3.)  $A_\alpha$  ist indefinit?

- (e) Betrachten Sie nun die Matrix

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Eigenwerte von  $B_\alpha$  an. Es wird kein Rechenweg benötigt.

- (f) Überlegen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$A_\alpha \text{ ist invertierbar. } \Leftrightarrow B_\alpha \text{ ist invertierbar.}$$

## 1. Aufgabe (8 + 12 Punkte)

(20 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede leere Zeile erhalten Sie  $\frac{1}{2}$  Punkt und jede fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.

Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

1.) Seien  $M$  und  $N$  Mengen, dann gilt:  $M \setminus N = (M \cap N^c) \cap M$ .

Wahr  Falsch

$$\begin{aligned} M \setminus N &= (M \cap N^c) \cup (M \cap M^c) = M \cap (N^c \cup M^c) = M \cap (N \cap M)^c \\ &= (M \cap N)^c \cap M \end{aligned}$$

2.)  $(\mathbb{Z}, -)$  ist eine Gruppe.

Assoziativität von  $-$  gilt nicht, so ist etwa  $(3 - 1) - 2 = 0$

$$3 - (1 - 2) = 4$$

$x - 0 = x, 0 - x = -x \rightarrow 0$  ist kein neutrales Element

3.) Seien  $(R, +_R)$  und  $(S, +_S)$  Ringe und  $f : (R, +_R) \rightarrow (S, +_S)$  ein Ringisomorphismus. Dann ist  $f^{-1}$  ein Ringhomomorphismus.

$$f^{-1} : (S, +_S) \rightarrow (R, +_R)$$

$f$  Hom. + bijektiv

$$\text{z.B. } f^{-1}(s_1 + s_2) = f^{-1}(f(r_1) + f(r_2)) \stackrel{f \text{ Hom.}}{=} f^{-1}(f(r_1 + r_2)) = r_1 + r_2 = f^{-1}(s_1) + f^{-1}(s_2)$$

$$\exists! r_1, r_2 \in R: f(r_1) = s_1 \leftrightarrow r_1 = f^{-1}(s_1) \\ f(r_2) = s_2 \leftrightarrow r_2 = f^{-1}(s_2)$$

$f$  bijektiv  $\Rightarrow f^{-1}$  bijektiv

4.) Sei  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper. Dann ist jeder  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit seiner Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.

Definition eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums: u.a.  $(V, +)$  abelsche Gruppe

Erinnerung: abelsche Gruppe ist Gruppe mit kommutativer Verknüpfung\*, d.h.  $g * h = h * g$  für alle  $g, h \in G$

5.) Sei  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper und  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Sei  $B_V$  eine Basis von  $V$ .

Für jede Basis  $B_U$  eines Untervektorräums  $U \subseteq V$  gilt  $B_U \subseteq B_V$ .

Folgt, z.B.  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $U = \langle B_U \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq V = \mathbb{R}^2$ ,

$$\langle B_U \rangle = U \subseteq V = \langle B_V \rangle$$

aber  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin B_V$

6.) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergente Folgen in  $\mathbb{R}$ . Dann ist auch  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent.

○

Z.B.  $a_n = (-1)^n$ ,  $b_n = (-1)^{n+1}$

$$a_n + b_n = (-1)^n \cdot (1 + (-1)) = 0$$

$$\begin{aligned} a &= (-1, 1, -1, 1, \dots) \\ b &= (1, -1, 1, -1, \dots) \end{aligned} \Rightarrow a+b = (0, 0, 0, \dots)$$

7.) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergente Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ .  
Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$ .

○

Z.B.  $a_n = n$ ,  $b_n = -n^2$

$$\begin{array}{c} \downarrow n \rightarrow \infty \\ +\infty \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow n \rightarrow \infty \\ -\infty \end{array} \Rightarrow a_n + b_n = n - n^2 = n \cdot (1-n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

8.) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{R}}$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \neq a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{|a_n|} = 1$ .

○

Z.B.  $a_n = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$ , jedoch  $\frac{a_n}{|a_n|} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \neq 1$

- (b) Füllen Sie die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet. Für jeden richtig ausgefüllten Kasten gibt es 2 Punkte. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte, für jeden leeren Kasten erhalten Sie einen Punkt und jeder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet.  
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

1.) Die Eigenwerte der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  sind gegeben durch 1, 2, 3.

*BER*<sup>ber</sup>

char. Polynom  $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$$\det(-B) = (-1)^n \det(B)$$

$$\det(\lambda I - A) = (-1)^n \cdot \det(A - \lambda I)$$

2.) Für Supremum und Infimum der Menge  $M := \{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  gilt:

$$\sup M = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \inf M = -1$$

$\frac{3}{2} \in M$ , also  $\max M = \sup M = \frac{3}{2}$   $-1 \notin M$ , also  $\inf M = -1$

$$M = \left\{ (-1)^1 + \frac{1}{1}, (-1)^2 + \frac{1}{2}, (-1)^3 + \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ 0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \dots \right\}$$

$n$  gerade:  $(-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$  wachsen fallend in  $n \in 2\mathbb{N}$

$n$  ungerade:  $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n}$  fallend in  $n \in 2\mathbb{N} + 1$

*b*

3.) Seien  $(G, *_G)$ ,  $(H, *_H)$  und  $(K, *_K)$  Gruppen mit neutralen Elementen  $n_G, n_H$  und  $n_K$ . Weiterhin sei  $f : (K, *_K) \rightarrow (H, *_H)$  ein Gruppenhomomorphismus und  $g : (G, *_G) \rightarrow (K, *_K)$  ein Gruppenisomorphismus.

Dann gilt:  $f \circ g$  ist injektiv  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{n_K\}$ .  $f \circ g : G \rightarrow H$

$$\begin{array}{c} f \circ g \text{ ist injektiv} \xleftarrow{g \text{ Isom.}} f \text{ injektiv} \xleftarrow{f \text{ hom.}} \text{Ker}(f) = \{n_K\}. \\ \parallel \\ \{k \in K : f(k) = 0_H\} \end{array}$$

Falls  $g$  nur Hom.,  $(f \circ g)$  injektiv  $\Leftrightarrow \text{Bild}(g) \cap \text{Ker}(f) = \{n_K\}$  und  $g$  ist injektiv

4.) Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gegeben durch  $z_1 := 1 + i$  und  $z_2 := 1 - i$ . Berechnen Sie

$$\frac{z_1}{z_2} = \begin{array}{c} \bullet \\ i \end{array} \quad \text{und} \quad \frac{z_2}{z_1} = \begin{array}{c} -\bullet \\ i \end{array}.$$

$$\begin{array}{l} f : K \rightarrow H \\ \text{Ker}(f) \subseteq K \\ \text{Bild}(f) \subseteq H \end{array}$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), x \in G$$

$$a + ib$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(1+i)(1-i)}{1^2 + (-1)^2} = \frac{1+2i+\cancel{i^2}}{2} = \frac{1+2i-\cancel{-1}}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \begin{array}{c} \bullet^{-1} \\ i \end{array} = \frac{1}{\bullet} = -\bullet$$

## 2. Aufgabe

(4 Punkte)

Für welche  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $(7^{2n} - 4^{2n}) \bmod 33 = 0$ ?

$$\forall n \in \mathbb{N}: 7^{2n} \bmod 33 = (7^2)^n \bmod 33 = 49^n \bmod 33 = 16^n \bmod 33$$

$$4^{2n} \bmod 33 = (4^2)^n \bmod 33 = 16^n \bmod 33$$

$$\Rightarrow (7^{2n} - 4^{2n}) \bmod 33 = (16^n - 16^n) \bmod 33 = 0 \bmod 33.$$

Damit ist die Aussage für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr.

$$= (7^{2n} \bmod 33 - 4^{2n} \bmod 33) \stackrel{\bmod 33}{=} (16^n \bmod 33 - 16^n \bmod 33) \stackrel{\bmod 33}{=} \dots$$

$$7^{2n} \bmod 33 = (7^2 \bmod 33)^n$$

$$1 \bmod 33 - 14 \bmod 33 = -13 \bmod 33 = 20 \bmod 33$$

Aus der Vorlesung kennen Sie die Bernoullische Ungleichung: Für jede reelle Zahl  $x \geq -1$  und beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ 1+x \geq 0 \end{matrix}$

(a) Beweisen Sie die Ungleichung per vollständiger Induktion.

(b) Folgern Sie nun, dass für alle  $x > 0$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 0$ .

Sei  $x \geq -1$  fest geählt.  
(a)  $A(u) : (1+x)^u \geq 1+ux$

Induktionsanfang ( $u=0$ )  $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0 \cdot x$  ist wahr.

Induktionshypothese:  $A(u)$  gilt für ein  $u \in \mathbb{N}$ .

Induktionsschritt: Dann gilt

$$(1+x)^{u+1} = (1+x)^u \cdot (1+x) \stackrel{\text{IH}}{\geq} (1+ux) \cdot (1+x) = (1+ux) \cdot 1 = 1+ux$$

$$(1+ux) \cdot x = x+ux^2$$

$$= 1+ux + x + ux^2 \geq 1+(u+1)x$$

$$= (u+1)x$$

d.h.  $A(u+1)$  gilt.

(b) Für  $x > 0$   $0 < \frac{1}{(1+x)^u} \stackrel{(a)}{\leq} \frac{1}{1+ux} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$

$$(1+x)^u \geq 1+ux$$

$$\frac{1}{(1+x)^u} \leq \frac{1}{1+ux}$$

Mit dem Sandwichprinzip folgt  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)^u} = 0$ .

Sei  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper,  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $M \subseteq V$  eine Teilmenge. Weiter bezeichne

$$\mathcal{M} := \{U \subseteq V : U \text{ ist ein Untervektorraum von } V \text{ mit } M \subseteq U\}$$

die Menge aller Untervektorräume von  $V$ , die  $M$  enthalten. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass der Untervektorraum  $\langle M \rangle$  durch  $\{v \in V : v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M\}$  gegeben ist. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\langle M \rangle = \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U.$$

- Idee: Zeige
- 1.)  $\bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$  ist ein UNR von  $V$
  - 2.)  $M \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$
  - 3.)  $\langle M \rangle = \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$

Zu 1.)  $\bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$  ist ein UNR:

Klar:  $\emptyset \subsetneq M \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$  wird aus 2.) folgen. (Alternativ:  $0 \in \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$ )

(U1) Für alle  $u, v \in \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$  ist  $u, v \in U$  für jedes  $U \in \mathcal{M}$   $\xrightarrow[U \text{ UNR}]{} u + v \in U$  für jedes  $U \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$$

(U2) Für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $u \in \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$  ist  $\lambda u \in U$  für jedes  $U \in \mathcal{M}$   $\xrightarrow[U \text{ UNR}]{} \lambda u \in U$  für alle  $U \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U.$$

Zu 2.) Da  $M \subseteq U$  für alle  $U \in \mathcal{M}$  gilt  $M \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$ .

Zu 3.) Somit ist  $\bigcap_{U \in \mathcal{M}} U \in \mathcal{M}$  und da  $\bigcap_{U \in \mathcal{M}} U \subseteq U'$  für alle  $U' \in \mathcal{M}$ , folgt, dass

$\bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$  der kleinste UNR von  $V$  ist, der  $M$  enthält, also gilt nach Def.  $\langle M \rangle = \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$ . □

## 5. Aufgabe (3 + 3 Punkte)

(6 Punkte)

Entscheiden Sie bei den beiden nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten je einen Punkt für die richtige Antwort und 2 Punkte für die Begründung.

(a) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal. Dann gilt  $|\det(A)| = 1$ .

(b) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Falls  $A \neq 0$  ist, so gilt  $A^n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Hierbei bezeichne 0 die Nullmatrix.

(a) Wahr, denn ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal, so gilt  $AA^T = A^T A = I_n$ , also  $A$  orthogonal:  $A$  invertierbar mit  $A^{-1} = A^T$ .

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^T) = \det(A) \underbrace{\det(A^T)}_{=\det(A)} = \det(A)^2$$

$$\Rightarrow |\det(A)| = \sqrt{\det(A)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Bsp.:  $n=1$ :  $A = -1$ ,  $A^T = -1 = A^{-1}$   
 $\det(A) = -1$

(b) Falsch, denn betrachte etwas  $n=2$  und  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Dann ist } A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ jedoch } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 6. Aufgabe

(10 Punkte)

Es bezeichne  $(\cdot|\cdot)$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ . Aus der Vorlesung wissen Sie, dass  $(x|By) = (B^T x|y)$  für alle  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt.

Sei nun  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  <sup>alle Elw str. positiv</sup> symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass durch

$$A = A^T$$

$$(x|y)_A := (x|Ay), \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

(SP1) Positive Definitheit:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: (x|x)_A \stackrel{\text{Def}}{=} (x|Ax) \geq 0 \quad \text{und}$$

$$(x|x)_A = (x|Ax) = 0 \quad \text{gerau dann, wenn } x=0.$$

(SP2) Symmetrie:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: (x|y)_A \stackrel{\text{Def}}{=} (x|Ay) \stackrel{\substack{\text{Sym.} \\ (\cdot|\cdot)}}{=} (y|Ax) \stackrel{\text{VL}}{=} (y|A^T x) \stackrel{\substack{\text{Sym.} \\ A=A^T}}{=} (y|Ax) \stackrel{\text{A sym.}}{=} (Ax|y).$$

$$\stackrel{\substack{\text{Sym.} \\ \text{ver.}(\cdot|\cdot)}}{=} (y|Ax) \stackrel{\text{Def}}{=} (y|x)_A.$$

(SP3) Linearität im 2. Argument:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}: (x|\lambda y)_A \stackrel{\text{Def}}{=} (x|A(\lambda y)) \stackrel{\substack{\text{def.} \\ y \mapsto Ay}}{=} (x|\lambda(Ay)) = \lambda (x|Ay) \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda (x|y)_A.$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n: (x|y+z)_A \stackrel{\text{Def}}{=} (x|A(y+z)) \stackrel{\substack{\text{def.} \\ y \mapsto Ay, z \mapsto Az}}{=} (x|Ay + Ax) = (x|Ay) + (x|Az) \stackrel{\text{Def}}{=} (x|y)_A + (x|z)_A.$$

Sei für  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Matrix  $A_\alpha \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definiert durch

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $A_\alpha$  invertierbar?
- (b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix  $D_\alpha$ , zu der  $A_\alpha$  ähnlich ist.
- (c) Bestimmen Sie Matrizen  $S$  und  $S^{-1}$ , sodass gilt:  $A_\alpha = S^{-1}D_\alpha S$ .
- (d) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:
  - 1.)  $A_\alpha$  ist positiv definit?
  - 2.)  $A_\alpha$  ist negativ definit?
  - 3.)  $A_\alpha$  ist indefinit?

- (e) Betrachten Sie nun die Matrix

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} A_\alpha & & \\ & 0 & \\ & 0 & 1 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Eigenwerte von  $B_\alpha$  an. Es wird kein Rechenweg benötigt.

- (f) Überlegen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$A_\alpha \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow B_\alpha \text{ ist invertierbar.}$$

$$(a) \quad A_\alpha \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow \det(A_\alpha) \neq 0$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\begin{aligned} \det(A_\alpha) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - (\alpha - \frac{1}{2}) \cdot (\alpha - \frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right) = \alpha \cdot (1 - \alpha) \end{aligned}$$

Also ist  $\det(A_\alpha) = 0$  genau dann, wenn  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = 1$  gilt.

Dann ist  $A_\alpha$  invertierbar, genau falls  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

(b)  $D_\alpha$  ist Diagonalmatrix mit Eigenwerten von  $A_\alpha$  als Diagonalelementen.

$$\text{Charakteristisches Polynom: } \det(\lambda I - A_\alpha) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \alpha \\ \frac{1}{2} - \alpha & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2$$

$$= \left( \lambda - \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \right) = (\lambda - \alpha)(\lambda - (1-\alpha))$$

$\Rightarrow$  Eigenwerte von  $A_\alpha$  sind gegeben durch  $\lambda = \alpha$  und  $\lambda = 1 - \alpha$ .

$\Rightarrow A_\alpha$  ist diagonalisierbar zu Doppelmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

(c) Gedacht:  $S \in \mathbb{R}^{2x2}$ :  $A_\alpha = S^{-1} D_\alpha S \Leftrightarrow S A_\alpha S^{-1} = D_\alpha$

$\uparrow$   
 $S^{-1}$ : Matrix bestehend aus Eigenbasis von  $\mathbb{R}^2$ .

Berechnung Eigenräume  $\text{Eig}(A_\alpha, \alpha)$  und  $\text{Eig}(A_\alpha, 1-\alpha)$

$$\text{Ker}(A_\alpha - \alpha I) \quad \text{Ker}(A_\alpha - (1-\alpha)I)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}}_{A_\alpha - \alpha I} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha & \alpha - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{:\frac{1-2\alpha}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

falls  $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Falls  $\underline{\alpha \neq \frac{1}{2}}$  gilt  $\text{Eig}(A_\alpha, \alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\alpha) & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(1-\alpha) \end{pmatrix} \xrightarrow{-} \begin{pmatrix} \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{-} \begin{pmatrix} \alpha - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{|:(\alpha - \frac{1}{2})}$$

falls  $\alpha \neq \frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Falls  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , gilt  $Eig(A_\alpha, 1-\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow \text{Für } \alpha \neq \frac{1}{2} \text{ gilt: } A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \\ & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$\downarrow 2\alpha$        $\downarrow 2-2\alpha$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Im Fall  $\alpha = \frac{1}{2}$  gilt  $A_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , d.h. wäre  $S = S^{-1} = I$ ,  $D_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{1}{2}}$ .

(d)

1.)  $A_\alpha$  ist positiv definit  $\Leftrightarrow$  alle Eigenwerte von  $A_\alpha$  sind echt positiv

$$\Leftrightarrow \alpha > 0 \text{ und } 1-\alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$$

2.)  $A_\alpha$  ist negativ definit  $\Leftrightarrow$  alle Eigenwerte von  $A_\alpha$  sind echt negativ

$$\Leftrightarrow \alpha < 0 \text{ und } 1-\alpha < 0$$

Dies ist nie der Fall.

3.)  $A_\alpha$  ist indefinit  $\Leftrightarrow A_\alpha$  hat sowohl echt positive als auch echt negative Eigenwerte

$$\Leftrightarrow [\alpha > 0 \text{ und } 1-\alpha < 0] \text{ oder } [\alpha < 0 \text{ und } 1-\alpha > 0]$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 1 \quad \text{oder} \quad \alpha < 0.$$

e)

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Eigenwerte von  $B_\alpha$  sind Eigenwerte von  $A_\alpha$  (dl.  $\alpha, 1-\alpha$ ) sowie  $1-\alpha^2$ .

$$\det(\lambda I_3 - B_\alpha) = \begin{vmatrix} \lambda I_2 - A_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha^2 \end{vmatrix} = (\lambda - (1-\alpha^2)) \cdot \det(\lambda I_2 - A_\alpha)$$

↑  
Entfernt 3. Spalte

f)

$A_\alpha$  ist invertierbar

$$\Leftrightarrow \text{Tel}(A_\alpha)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$B_\alpha$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow 0$  ist kein Eigenwert von  $B_\alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ und } 1-\alpha \neq 0 \text{ und } 1-\alpha^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}.$$

$\Rightarrow$  Für  $\alpha = -1$  ist  $B_{-1}$  nicht invertierbar, jedoch  $A_{-1}$  ist invertierbar. Die Aussage ist falsch.

Für Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n,n}$  sind äquivalent

$\underbrace{C \text{ invertierbar}}_{\text{dl. } C \text{ bijektiv}}$

$\Leftrightarrow C \text{ surjektiv}$

$\Leftrightarrow$

$C \text{ injektiv}$



$$\ker(C) = \{0\}$$



$\lambda = 0$  ist keine Nullstelle des charakt. Polyn.  $\Leftrightarrow p_C(\lambda)$

$0$  ist kein Eigenwert von  $C$