Nachschreibeklausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2019**
Prof. Dr. Thomas Streicher **05.09.2019**

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	20	7	10	10	6	6	16	75	
erreichte Punktzahl									

Zweitprüfer bei Drittversuch: ....

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus **7 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Wenn Sie diese Seiten benutzen, dann kennzeichnen Sie bitte, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten. Bitte lösen Sie die Tackernadel nicht. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.** Einzelne Blätter, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden. Wenn Sie Zusatzblätter verwendet haben, dann falten Sie die Klausur am Ende der Bearbeitungszeit einmal entlang der Linie über diesem Absatz (so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben). Legen Sie dann Ihre Zusatzblätter in die gefaltete Klausur.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Bitte verwenden Sie **dokumentenechte Stifte, wie beispielsweise Kugelschreiber**. Verwenden Sie keinen Bleistift oder Stifte der Farben rot und grün.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Multiple-Choice und Fill-In) (20 Punkte)

(a) (8 Punkte) Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Zeile wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

	Wahr	Falsch
(1) Für beliebige Mengen A und B in einer Grundmenge G gilt $A \setminus (B^c) = A \cap B$. *Hinweis:* Hierbei bezeichnet B^c das Komplement von B in G.	⊗	○
(2) Die Menge $\left\{ \frac{1}{p} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ hat ein Minimum. $p = -1$	⊗	○
(3) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$.	⊗	○
(4) Sei K ein Körper und W ein K-Vektorraum mit Untervektorraum $V \subseteq W$. Dann gilt $\langle M \rangle \subseteq V$ für jede Teilmenge $M \subseteq V$. WiSe 18/19, Nr. 4	⊗	○
(5) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ hat eine endliche Basis. $1, x, x^2, x^3, \ldots$	○	⊗
(6) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$ ist linear. $\varphi\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	○	⊗
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (7) Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: Ist A negativ definit, so gilt $\det(A) < 0$.	○	⊗
(8) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ divergente Folgen reeller Zahlen, so ist stets auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. $a_n = b_n = (-1)^n$	○	⊗

(b) (12 Punkte) Füllen Sie im Folgenden die leeren Kästen aus. Es wird nur die Antwort gewertet – Sie müssen diese nicht begründen. Jeder richtig ausgefüllte Kasten wird mit 2 Punkten bewertet. Jeder leere oder fehlerhaft ausgefüllte Kasten wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(1) Für $n = \boxed{10}$ gilt $n = 10^{2019} \mod 11$ (es ist eine Antwort $n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ gefordert).

$= \sqrt{9+16}$

(2) Für $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|x\|_2 = \boxed{5}$ und $\|x\|_\infty = \boxed{4}$.

(3) Die Matrix $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\alpha \neq \boxed{1}$ gilt.

Außerdem ist die Matrix A genau dann orthogonal, wenn $\alpha = \boxed{-1}$ gilt.

(4) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = \boxed{0}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{\underbrace{2n\,(2n-1) \cdots (n+1)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot n \cdot (n-1) \cdots}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1^{>n}}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$10^{2019} = 10^1 \cdot 10^{2018}$$
$$= 10 \cdot 10^{2(1009)}$$
$$= 10 \cdot 100^{1009} \mod 11$$
$$= 10 \mod 11 \cdot (100 \mod 11)^{1009}$$
$$= 10 \cdot 1^{1009} \mod 11$$
$$= 10$$

2. Aufgabe (Ordnungsrelationen) (7 Punkte)

Es seien $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $R_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Ordnungsrelationen auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $R := R_1 \cap R_2$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ ist.

Zur Erinnerung: Eine Relation heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Reflexivität: Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(x,x) \in R_1$ und $(x,x) \in R_2$, da R_1 bzw R_2 reflexiv sind. Also gilt auch

$(x,x) \in R_1 \cap R_2 = R$

Da $x \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt wurde, ist R reflexiv.

Antisymmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N}$, so dass $(x,y), (y,x) \in R$. Dann gilt auch $(x,y), (y,x) \in R_1$. Da R_1 antisymmetrisch ist, gilt $x = y$. Da $x, y \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt wurden, ist R antisymmetrisch.

Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$, so dass $(x,y), (y,z) \in R$. Dann gilt $(x,y), (y,z) \in R_1$ und $(x,y), (y,z) \in R_2$. Da R_1 bzw R_2 transitiv sind gilt $(x,z) \in R_1$ und $(x,z) \in R_2$. Also gilt $(x,z) \in R_1 \cap R_2 = R$.

Da $x, y, z \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt wurden, ist R transitiv.

Also ist R eine Ordnungsrelation.

3. Aufgabe (Gruppen) (10 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir eine Gruppe $(G, *)$ mit neutralem Element e, sowie die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ mit neutralem Element 0 (hierbei ist $+$ die übliche Addition auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen). Weiter nehmen wir an, dass ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to \mathbb{Z}$$

gegeben ist. Für $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir g^n rekursiv durch $g^0 := e$ und $g^{n+1} := g^n * g$.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $g \in G$ und $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt $\varphi(g^n) = \varphi(g) \cdot n$ (hierbei bezieht sich $\varphi(g) \cdot n$ auf die übliche Multiplikation in $\mathbb{Z}$).

(b) (3 Punkte) Folgern Sie mithilfe von Teilaufgabe (a): Ist $\ker(\varphi) \neq G$, so ist G unendlich.
Tipp: Geben Sie unendlich viele Elemente von G an und zeigen Sie, dass diese paarweise verschieden sind.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie: Ist φ injektiv, so ist $(G, *)$ eine abelsche Gruppe (d. h. es gilt $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$).

a) Induktionsanfang: Z: Es gilt $\varphi(g^0) = \varphi(g) \cdot 0$.

Begründung: Da φ Gruppenhom. ist $\varphi(e) = 0$. Also gilt

$$\varphi(g^0) = \varphi(e) = 0 = \varphi(g) \cdot 0 \quad \text{für alle } g \in G.$$

Induktionshypothese: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi(g^n) = \varphi(g) \cdot n$.

Induktionsschritt: Z: $\varphi(g^{n+1}) = \varphi(g)(n+1)$

Beweis: Sei $g \in G$. Dann gilt:

$$\varphi(g^{n+1}) = \varphi(g^n * g) \overset{\text{Hom}}{=} \varphi(g^n) + \varphi(g) \overset{(IH)}{=} \varphi(g) \cdot n + \varphi(g)$$
$$= \varphi(g)(n+1) \quad \blacksquare$$

b) Annahme $\ker \varphi \neq G$. Sei $x \in G \setminus \ker \varphi$. Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$:

$$\varphi(x^n) \overset{a)}{=} \varphi(x) \cdot n \neq \varphi(x) \cdot m = \varphi(x^m), \quad \text{da } \varphi(x) \neq 0$$

$\Rightarrow x^n \neq x^m$. Also ist $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich.

c) Seien $h, g \in G$. Dann gilt:

$$\varphi(g * h) = \varphi(g) + \varphi(h) = \varphi(h) + \varphi(g) = \varphi(h * g)$$

Da φ injektiv ist, gilt also $g * h = h * g$.

Da $g, h \in G$ beliebig wurden, ist G abelsch.

4. Aufgabe (Komplexe Zahlen) (10 Punkte)

Im Folgenden bezeichne $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$, wobei

$$z_1 = 6 + 7 \cdot i \quad \text{und} \quad z_2 = 1 + 2 \cdot i.$$

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = -2 \cdot i$. Geben Sie diese jeweils in der Form $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

a) $z_1 + z_2 = 6+7i + 1+2i = 7+9i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1+z_2) = 7$

$\mathrm{Im}(z_1+z_2) = 9$

$z_1 \cdot z_2 = (6+7i)(1+2i) = 6+7i+12i-14$

$= -8+19i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = -8$

$\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2) = 19$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6+7i}{1+2i} = \frac{(6+7i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{6+7i-12i+14}{1+4} = \frac{20-5i}{5} = 4-i \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 4$$

$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -1$

b) $-2i = 2 \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i}$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i} = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -1+i$

$z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{7}{4}\pi i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 1-i$

Ansatz: $z = a+bi$

$z^2 = (a+bi)(a+bi) = a^2 + 2abi - b^2 = -2i$

Koeffizientenvergleich liefert:

$a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|$, d.h. $a, b \in \{1, -1\}$

$2ab = -2 \Leftrightarrow ab = -1$

$\Rightarrow a = 1,\ b = -1$ und $a = -1,\ b = 1$

$\Rightarrow z_1 = 1-i$

$z_2 = -1+i$

5. Aufgabe (Orthogonalität) (6 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie reelle Zahlen α_1, α_2 und α_3, sodass $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3$ gilt.

Tipp: Es kann hilfreich sein, wenn Sie sich überlegen, welchen Wert das Skalarprodukt $(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 \mid v_i)$ für $i = 1, 2, 3$ annimmt.

a) $(v_1|v_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot(1+1+1) = 1$

$(v_2|v_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}(4+1+1) = 1$

$(v_3|v_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

$(v_1|v_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{18}}(2-1-1) = 0$

$(v_2|v_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1+1) = 0$

$(v_1|v_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-1) = 0$

Also stehen v_1, v_2, v_3 senkrecht aufeinander und haben Länge 1, also bilden v_1, v_2, v_3 eine ONB.

b) $\alpha_1 = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 | v_1)\ \big(= \alpha_1(v_1|v_1) + \alpha_2(v_2|v_1) + \alpha_3(v_3|v_1)\big)$

$= \left(\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(5+1+2) = \frac{8}{\sqrt{3}}$

$\alpha_2 = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 | v_2) = \left(\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(10-1-2) = \frac{7}{\sqrt{6}}$

$\alpha_3 = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 | v_3) = \left(\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

6. Aufgabe (Gauß-Algorithmus) (6 Punkte)

Bestimmen Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$, der das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-3\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & -3 & 7 & -5 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-3\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -8 & 16 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{III}/-8}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}+2\mathrm{III}}{\rightsquigarrow_{5\mathrm{III}-\mathrm{II}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

7. Aufgabe (Eigenwerttheorie) (16 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(b) (8 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = S^{-1}DS$ gilt (Sie brauchen S^{-1} nicht zu berechnen).

a) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{nach 1. Spalte}}{\overset{\text{Entwicklung}}{=}} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-1-\lambda)$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ sind die Eigenwerte von A.

b) $E_2(A)$: $(A-2I\,|\,0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{II+III}{\overset{I/3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

zwei Nullzeilen $\Rightarrow$ 2 Freiheitsgrade. Sei $x_1 = s$, $x_3 = r$, dann gilt $x_2 = -r$. Also gilt $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ -r \\ r \end{pmatrix} : s, r \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } E_2(A)} \rangle$.

$E_{-1}(A)$: $(A+I\,|\,0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{III+II}{\overset{I/3,\ II/3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Eine Nullzeile $\Rightarrow$ 1 Freiheitsgrad. Sei $x_3 = s$. Dann gilt $x_2 = 0$, $x_1 = -s$.
Also: $E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } E_{-1}(A).} \rangle$

c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{II+III}{\overset{-II}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{I+III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$