Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Thomas Streicher

WiSe 2017/18
08. März 2018

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	20	20	10	10	20	20	100		
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Bitte verwenden Sie den auf der Klausur vorgesehenen Platz für Ihre Lösungen. Sollten Sie Zusatzblätter benötigen versehen Sie diese mit Ihrem **Namen und Ihrer Matrikelnummer**. Falten Sie die Klausur am Ende so, dass sie die zusätzlichen Blätter in diese hineinlegen können.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind 2 handschriftlich einseitig beschriebene DIN A4 Seiten oder ein handschriftlich zweiseitig beschriebenes DIN A4 Blatt. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle **Ergebnisse zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; **Zwischenschritte** müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

(a) Sei X eine Mengen mit Teilmengen $X_i \subseteq X$ für $i \in \mathbb{N}$ und sei $a \in X$. Dann gilt: ☒ wahr ☐ falsch

$$a \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i \iff a \in X_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

(b) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen zwischen den Mengen X, Y und Z. Dann gilt: ☐ wahr ☒ falsch

$$f \text{ surjektiv} \implies g \circ f \text{ surjektiv}.$$

$f(0)=0$, $g(0)=0$

$X=Y=\{0\}$, $Z=\{0,1\}$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt: ☒ wahr ☐ falsch

$1=\tilde{k}a+\tilde{\ell}b$

$$\operatorname{ggT}(a,b)=1 \implies \forall c \in \mathbb{Z}\ \exists k,\ell \in \mathbb{Z} : c = ka+\ell b.$$

$k=\tilde{k}c$, $\ell=\tilde{\ell}c$

(d) $\{3k+5 : k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$. ☐ wahr ☒ falsch

---

(e) $\left(\frac{1}{i}\right)^{2018} = -1$. / $\left(\frac{1}{i}\right)^{2018} = \left((i)^{-1}\right)^{2016} \cdot \left((i)^{-1}\right)^{2}$ ☒ wahr ☐ falsch

---

(f) Sei $z \in \mathbb{C}$, dann gilt ☒ wahr ☐ falsch

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

(g) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **ähnliche** Matrizen und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A, dann ist v auch ein Eigenvektor von B. ☐ wahr ☒ falsch

---

(h) Sei $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt über einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Dann gilt: ☐ wahr ☒ falsch

$$(\lambda x|\lambda x) = \lambda(x|x) \text{ für alle } x \in V \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(i) $\sup \underbrace{\left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}}_{=\{-1,\, \frac{1}{2},\, -\frac{1}{3},\, \frac{1}{4}, \dots\}} = 0.$ ☐ wahr ☒ falsch

---

(j) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Dann gilt: ☒ wahr ☐ falsch

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ und } (b_n) \text{ ist beschränkt} \right) \implies \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

$\left((i)^{-1}\right)^2 = (-i)^2 = -1$

2. Aufgabe (Fill-In) (20 Punkte)

Füllen Sie folgende Felder korrekt aus. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jedes richtig ausgefüllte Feld gibt 2 Punkte. Nicht oder falsch ausgefüllte Felder geben keine Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

(a) Geben Sie an, welche der folgenden Relationen **symmetrisch** und/oder **transitiv** sind.

i. Die Relation

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; |x-y| \leq 5 \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

ist symmetrisch (und nicht transitiv)

x = 8
y = 4
z = 0

ii. Die Relation

$$(a_n) \sim (b_n) \;:\Longleftrightarrow\; a_n \in O(b_n) \qquad \text{für reelle Folgen } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist transitiv (und nicht symmetrisch)

(b) Berechnen Sie jeweils folgende Ausdrücke

i. $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12) \mod 13 =$ 0

ii. $4+(-9-4)(3+11)^{2018} \mod 13 =$ 4

(c) Sei $V=\mathbb{R}^5$ mit Untervektorraum $U \subseteq V$ gegeben durch $U = \langle (1,0,0,0,0)^\top, (0,1,0,0,0)^\top, (0,0,1,0,0)^\top \rangle$ und der Projektion $\pi\colon V \to V/U$ wobei $\pi(v) = v + U$ ist.

i. Welche Dimension hat V/U? $\longrightarrow V/U = \{v + U : v \in V\}$

$\dim(V/U) =$ 2

ii. Geben Sie eine Basis B von V/U an, sowie $M_B^E(\pi)$, wobei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ ist.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U \right\} \qquad M_B^E(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n^4}{4^n} = \boxed{}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 6n^3}{n(5n-2n^2)+2} = \boxed{}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = \boxed{}.$$

$$\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + U = 0 \left(\quad \right)$$

3. Aufgabe (5 + 5 Punkte) (10 Punkte)

Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und sei $\varphi : G \to G$ ein **injektiver** Gruppenhomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass für $a \in G$ gilt:

$$a \neq e \Longrightarrow \varphi(a) \neq e.$$

(b) Für $a \in G$ mit $a \neq e$ definieren wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G rekursiv über $a_0 := a$ und $a_{n+1} = \varphi(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $a_n \neq e$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a.) $\boxed{Z: \varphi(a) = e \Rightarrow a = e}$ Sei $a \in G$ sodass $\varphi(a) = e$. Wir wollen zeigen, dass $a = e$. Es gilt $\varphi(e) = e = \varphi(a)$. Weil φ injektiv ist gilt $a = e$.

b.) Induktionsanfang Sei $n = 0$. Nach Wahl von a gilt $a_0 = a \neq e$.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Sei $a_n \neq e$ für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt.

Betrachte die Aussage für $n+1$. Nach (IV) wissen wir $a_n \neq e$. Nach a.) gilt $e \neq \varphi(a_n) = a_{n+1}$.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $(h_s : A_s \to B_s)_{s \in S}$ ein Homomorphismus zweier Σ-Algebren A und B zur Signatur $\Sigma = (S, F, \mathrm{ar})$. Für $s \in S$ sei $\sim_s$ die zweistellige Relation über A_s gemäß

$$x \sim_s y \;:\Longleftrightarrow\; h_s(x) = h_s(y) \quad \text{für } x, y \in A_s.$$

Sei $f \in F$ ein Funktionssymbol mit $f : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ und seien $x_1 \in A_{s_1}, \ldots, x_n \in A_{s_n}$ und $y_1 \in A_{s_1}, \ldots, y_n \in A_{s_n}$ Elemente aus A mit $x_i \sim_{s_i} y_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
Beweisen Sie, dass

$h_{s_i}(x_i) = h_{s_i}(y_i)$

$$\boxed{f^A(x_1, \ldots, x_n) \sim_s f^A(y_1, \ldots, y_n)}$$

gilt.

Wollen zeigen $h_s(f^A(x_1, \ldots, x_n)) = h_s(f^A(y_1, \ldots, y_n))$

Es gilt

$$h_s(f^A(x_1, \ldots, x_n)) \overset{\text{Def Hom}}{=} f^B(h_{s_1}(x_1), \ldots, h_{s_n}(x_n))$$

$$\overset{x_i \sim_{s_i} y_i}{=} f^B(h_{s_1}(y_1), \ldots, h_{s_n}(y_n))$$

$$\overset{\text{Def Hom}}{=} h_s(f^A(y_1, \ldots, y_n))$$

5. Aufgabe (8 + 3 + 7 + 2 Punkte) (20 Punkte)

Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum[1] aller reellwertigen Folgen. Wir definieren die Abbildung $f : V \to V$, gemäß

$$f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie $\ker(f)$.

(c) Zeigen Sie, dass f surjektiv und **nicht** injektiv ist.

(d) Wieso steht (c) nicht im Widerpruch zu folgendem Satz?

Satz. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

- *Φ ist injektiv,*
- *Φ ist surjektiv.*

$(1, 2, 3, 4 \ldots) \longmapsto (2, 3, 4, \ldots)$

$(0, 0, 0, \ldots) \longmapsto (0, 0, 0 \ldots)$

a.) Wohldefiniertheit: Offensichtlich ist $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Linearität: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f(\lambda (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f((\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}})$$
$$= (\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= \lambda (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + \mu (b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= \lambda f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \mu f((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

[1] *Zur Erinnerung:* Vektoraddition und Skalarmultiplikation auf V sind gegeben durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

b.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker(f)$. Dann gilt

$$(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0_{Abb(\mathbb{N},\mathbb{R})}$$

Also gilt $a_{n+1} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demnach gilt $\ker(f) = \{(x, 0, 0, \dots) \in Abb(\mathbb{N},\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}\}$.

c.) Surjektivität: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Abb(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Definiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Nicht Injektiv: Sei $y_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ und $y_0 = 1$.

Dann gilt $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq 0_{Abb(\mathbb{N},\mathbb{R})}$ und

$f((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = 0_{Abb(\mathbb{N},\mathbb{R})}$. Also ist f nicht inj.

d.) Weil V nicht ~~end~~ endlichdimensional.

6. Aufgabe (6 + 6 + 3 + 3 + 2 Punkte) (20 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ wie folgt definiert

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 2$ Eigenwerte von A sind.
Hinweis: Vermeiden Sie, das charakteristische Polynom von A auszurechnen.

(b) Zeigen Sie, dass die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 jeweils zweidimensional sind und geben Sie Basen für diese an.

(c) Argumentieren Sie, dass A keine weiteren Eigenwerte hat.

(d) Bestimmen Sie $\det(A)$ und geben Sie auch eine Begründung für Ihr Ergebnis an.

(e) Geben Sie eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a.) Es gilt $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Offensichtlich sind die Zeilen $\underline{\text{II}}$ und $\underline{\text{VI}}$ linear abhängig. also ist λ_1 ein EW.

Es gilt $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & \cancel{8} & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Begründung wie oben. Also λ_2 ein EW.

b.) $\lambda_1 = -2$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{I}+2\text{III}+\text{II} \\ \text{II}-\text{IV} \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \frac{1}{8}(\text{I}-\text{II}) \\ \frac{1}{2}\text{II} \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also $\exists$ zwei Freiheitsgrad (zwei NS).

Wähle $x_4 = s$, Dann folgt $x_2 = -s$. Wähle $x_3 = r$, dann folgt $x_1 = -r$

Es gilt $E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -r \\ -s \\ r \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Basis } E_{-2}(A)} \rangle$

$$\begin{array}{l} \\ \\ I + III \\ II + IV \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\frac{1}{4}(I+II) \\ \frac{1}{2} II\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also gibt es zwei Freiheitsgrade

Wähle $x_4 = s$, dann folgt $x_2 = s$. Wähle $x_1 = r$ dann folgt $x_3 = \frac{-s-r}{2}$. Es gilt $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ \frac{-r-s}{2} \\ s \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R} \right\}$

$$\langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Basis von } E_2(A)} \rangle$$

Basis von $E_2(A)$.

c.) Eigenvektoren (auch zu versch. EW) sind linear unabhängig. Also ist auch $B_{-2} \cup B_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und es gibt keine weiteren Eigenvektoren.

d.) $\det(A) = \det\left(S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$= \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \underline{\underline{16}}$, wobei S die $(B_{-2} \cup B_2)$ f

e.)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & -2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = (B_2 \; B_{-2})$$

EV zu -2 EV zu 2