Digitaltechnik
Wintersemester 2021/2022
2. Übung

Prof. Dr.-Ing. Thomas Schneider, M.Sc. Daniel Günther, M.Sc. Amos Treiber

LÖSUNGSVORSCHLAG **KW44**

Bitte bearbeiten Sie die Übungsblätter bereits im Voraus, sodass Sie Ihre Lösungen zusammen mit Ihren Kommilitonen und Tutoren während der wöchentlichen Übungsstunde diskutieren können.
Mit der angegebenen Bearbeitungszeit für die einzelnen Aufgaben können Sie Ihren Leistungsstand besser einschätzen.

Übung 2.1 Wertebereich binärer Zahlendarstellungen [15 min]

Der Wertebereich einer Funktion $f : A \to B$ auf der Eingabemenge A wird durch die Menge $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$ charakterisiert. Diese Schreibweise wird in den folgenden beiden Teilaufgabe verwendet, um den Wertebereich der verschiedenen binären Zahlendarstellungen zu beschreiben. Die Angabe einer konkreten Binärdarstellung ist für beide Teilaufgaben nicht notwendig.

Übung 2.1.1 Minimale und maximale Werte

Tragen Sie in folgender Tabelle die minimal und maximal darstellbare Dezimalzahl ein.

	Vorzeichenlos: $\mathrm{u}_{2,k}(\mathbb{B}^k)$		Vorzeichen und Betrag: $\mathrm{vb}_{2,k}(\mathbb{B}^k)$		Zweierkomplement: $\mathrm{s}_k(\mathbb{B}^k)$	
k	min	max	min	max	min	max
6	0	$2^6 - 1 = 63$	$-(2^{6-1} - 1) = -31$	$+(2^{6-1} - 1) = 31$	$-(2^{6-1}) = -32$	$2^{6-1} - 1 = 31$
8	0	$2^8 - 1 = 255$	$-(2^{8-1} - 1) = -127$	$+(2^{8-1} - 1) = 127$	$-(2^{8-1}) = -128$	$2^{8-1} - 1 = 127$
13	0	$2^{13} - 1 = 8191$	$-(2^{13-1} - 1) = -4095$	$+(2^{13-1} - 1) = 4095$	$-(2^{13-1}) = -4096$	$2^{13-1} - 1 = 4095$

Übung 2.1.2 Notwendige Bitbreite

Tragen Sie in folgender Tabelle die minimal notwendige Bitbreite k zur binären Darstellung der Dezimalzahlen n ein. Die beiden schwarz hinterlegten Felder bleiben frei.

Dezimal n	Vorzeichenlos $\min k \in \mathbb{N} : n \in \mathrm{u}_{2,k}(\mathbb{B}^k)$	Vorzeichen und Betrag $\min k \in \mathbb{N} : n \in \mathrm{vb}_{2,k}(\mathbb{B}^k)$	Zweierkomplement $\min k \in \mathbb{N} : n \in \mathrm{s}_k(\mathbb{B}^k)$
301_{10}	9	10	10
3_{10}	2	3	3
512_{10}	10	11	11
15_{10}	4	5	5
-25_{10}		6	6
-256_{10}		10	9

Übung 2.2 Zweierpotenzen [6 min]

a) Stellen Sie die folgenden Zahlen als Summen von Zweierpotenzen dar.

1. 5_{10}
   $5_{10} = 4 + 1$
   $5_{10} = 2^2 + 2^0$

2. 42_{10}
   $42_{10} = 32 + 8 + 2$
   $42_{10} = 2^5 + 2^3 + 2^1$

3. 791_{10}
   $791_{10} = 512 + 256 + 16 + 4 + 2 + 1$
   $791_{10} = 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

b) Ergänzen Sie die Summen aus der vorherigen Teilaufgabe so, dass jede Summe alle Zweierpotenzen beinhaltet, die kleiner sind als die bereits in der Summe enthaltene höchste Zweierpotenz. Damit das Ergebnis der Summe gleich bleibt, verwenden Sie den Koeffizienten 0 für alle neu in die Summe aufgenommenen Zweierpotenzen.

1. $5_{10} = (1) \cdot 2^2 + (0) \cdot 2^1 + (1) \cdot 2^0$

2. $42_{10} = (1) \cdot 2^5 + (0) \cdot 2^4 + (1) \cdot 2^3 + (0) \cdot 2^2 + (1) \cdot 2^1 + (0) \cdot 2^0$

3. $791_{10} = (1) \cdot 2^9 + (1) \cdot 2^8 + (0) \cdot 2^7 + (0) \cdot 2^6 + (0) \cdot 2^5 + (1) \cdot 2^4 + (0) \cdot 2^3 + (1) \cdot 2^2 + (1) \cdot 2^1 + (1) \cdot 2^0$

c) Verwenden Sie die Summen aus der vorherigen Teilaufgabe, um jeder der folgenden Zahlen ihre binäre vorzeichenlose Darstellung zuzuweisen.

1. 5_{10}
   $5_{10} = 101_2$

2. 42_{10}
   $42_{10} = 10\ 1010_2$

3. 791_{10}
   $791_{10} = 11\ 0001\ 0111_2$

Übung 2.3 Konvertierung zwischen Zahlendarstellungen EX5-10-1 EX5-10-3 [15 min]

Vervollständigen Sie die folgenden Tabellen. Nutzen Sie für die Konvertierung von der Dezimaldarstellung in die Binärdarstellung jeweils beide in der Vorlesung vorgestellten Konvertierungsverfahren. Geben Sie alle Ziffernfolgen jeweils mit der minimal möglichen Länge an.

Übung 2.3.1 Vorzeichenlose Zahlendarstellungen $u_{b,k}$

Dezimal	Binär	Hexadezimal	Octal
234_{10}	$1110\ 1010_2$	EA_{16}	352_8
148_{10}	$1001\ 0100_2$	94_{16}	224_8
508_{10}	$1\ 1111\ 1100_2$	$1FC_{16}$	774_8
125_{10}	$111\ 1101_2$	$7D_{16}$	175_8

Übung 2.3.2 Zweierkomplement Darstellung s_k EX5-5

In der Vorlesung wurde die hexadezimale Darstellung für vorzeichenlose Zahlen behandelt. Die binäre Ziffernfolge der Darstellung mit Vorzeichen und Betrag und der Zweierkomplementdarstellung kann aber ebenfalls hexadezimal dargestellt werden. Ist die Bitbreite nicht festgelegt, muss man dabei eine “sign extension” auf eine durch 4 teilbare Bitbreite durchführen.
Zum Umrechnen von Dezimal- zu Zweierkomplement-Zahlen verwenden Sie die Methode “maximale Zweierpotenzen abziehen”.

Dezimal	Binär	Hexadezimal
15_{10}	$\mathbf{0}1111_2$	$0F_{16}$
-45_{10}	$101\ 0011_2$	$D3_{16}$
508_{10}	$\mathbf{0}1\ 1111\ 1100_2$	$1FC_{16}$
-148_{10}	$1\ 0110\ 1100_2$	$F6C_{16}$
33_{10}	$010\ 0001_2$	21_{16}
-59_{10}	$1100\ 0101_2$	$C5_{16}$

Bei der binären Darstellung nicht-negativer Zahlen ist ein führendes Null-Bit erforderlich.

Übung 2.4 Addition von Zweierkomplement-Zahlen EX5-6 [3 min]

Addieren Sie die folgenden Zweierkomplement-Zahlen. Geben Sie Summe und Summanden auch dezimal an. Tritt ein Überlauf auf?

	1			1					Übertrag
	0	1	0	0	1	0	0	0	(72_{10})
+	1	1	1	0	1	0	0	1	(-23_{10})
	0	0	1	1	0	0	0	1	(49_{10})
									kein Überlauf

	1	1	1	1			1		Übertrag
	0	1	1	1	1	1	0	1	(125_{10})
+	0	0	0	1	1	0	0	1	(25_{10})
	1	0	0	1	0	1	1	0	(-106_{10})
									Überlauf

Übung 2.5 Subtraktion von Zweierkomplement-Zahlen [6 min]

Wandeln Sie die folgenden Dezimalzahlen in 1 Byte breite Zweierkomplement-Zahlen um. Subtrahieren Sie die Binärdarstellungen voneinander, indem Sie den Minuend mit dem negierten Subtrahend addieren. Wandeln Sie das Ergebnis wieder ins Dezimalformat um. Hat die Subtraktion einen Überlauf verursacht?

a) $45_{10} - 70_{10}$

1. Umrechnung ins Zweierkomplement:
   $45_{10} = 0010\ 1101_2$
   $70_{10} = 0100\ 0110_2$
2. Subtrahend negieren:
   $-(0100\ 0110_2) = \overline{0100\ 0110_2} + 1 = 1011\ 1001_2 + 1 = 1011\ 1010_2$
3. Addition:
   $$\begin{aligned} &0010\ 1101_2 \\ +&1011\ 1010_2 \\ =&1110\ 0111_2 \end{aligned}$$
4. Umrechnen ins Dezimalformat:
   $1110\ 0111_2 = -(\overline{1110\ 0111_2} + 1) = -(0001\ 1000_2 + 1) = -0001\ 1001_2 = -25_{10} = 45_{10} - 70_{10}$ ✓
   kein Überlauf

b) $-76_{10} - 57_{10}$

1. Umrechnung ins Zweierkomplement:
   $-76_{10} = \overline{0100\ 1100_2} + 1 = 1011\ 0011_2 + 1 = 1011\ 0100_2$
   $57_{10} = 0011\ 1001_2$
2. Subtrahend negieren:
   $-(0011\ 1001_2) = \overline{0011\ 1001_2} + 1 = 1100\ 0110_2 + 1 = 1100\ 0111_2$

3. Addition:

$$\begin{array}{r} 1011\ 0100_2 \\ +1100\ 0111_2 \\ =0111\ 1011_2 \end{array}$$

4. Umrechnen ins Dezimalformat:
   $0111\ 1011_2 = 123_{10} \neq -76_{10} - 57_{10}$ ↯(Überlauf)

Übung 2.6 Eigenschaften von Zweierkomplement-Zahlen [4 min]

Beurteilen Sie die Korrektheit der folgenden Aussagen.

a) Gegeben eine positive Zahl in Zweierkomplement-Darstellung (s_k), so ist ihre Darstellung als vorzeichenlose Binärzahl ($u_{2,k}$) identisch.
   Richtig

b) Gegeben eine positive Zahl als vorzeichenlose Binärzahl ($u_{2,k}$), so ist ihre Zweierkomplement-Darstellung (s_k) identisch.
   Falsch
   Für feste Bitbreite k gibt es positive Zahlen (alle mit MSB 1), die nicht in s_k dargestellt werden können.

c) Gegeben eine positive Zahl in Zweierkomplement-Darstellung (s_k), so ist ihre Darstellung mit Vorzeichen und Betrag ($vb_{2,k}$) identisch.
   Richtig

d) Im Gegensatz zur Vorzeichen und Betrag-Darstellung ($vb_{2,k}$) kann bei Zweierkomplementzahlen (s_k) das MSB nicht als Vorzeichen betrachtet werden.
   Falsch
   Bei positiven Zweierkomplementzahlen ist das MSB ist immer 0 und bei negativen immer 1.
   Daher kann dieses als Vorzeichen betrachtet werden.

e) In Zweierkomplement-Darstellung (s_k) wird die Zahl -1_{10} unabhängig von der Bitbereite immer durch eine Bitfolge dargestellt, in der alle Bits gesetzt sind.
   Richtig