Mathe 1: Klausur # 1

1. Aufgabe

Reflexiv: Sei $a \in G$, dann ist $a^{-1} * a = n \in H$, weil H UG ist. Also ist $a \sim a$.

Symmetrisch: Seien $a, b \in G$ mit $a \sim b$, d.h. $a^{-1} * b \in H$. Allgemein gilt:

1. $(X * Y)^{-1} = Y^{-1} * X^{-1}$

2. $(X^{-1})^{-1} = X$.

Daraus folgt $(a^{-1} * b)^{-1} \in H$ (da H UG)

$$(a^{-1} * b)^{-1} \overset{1.}{=} b^{-1} * (a^{-1})^{-1} \overset{2.}{=} b^{-1} * a$$

Transitiv: Seien $a, b, c \in G$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$, d.h. es gilt $a^{-1} * b \in H$ und $b^{-1} * c \in H$. Da H UG ist, gilt $\underbrace{(a^{-1} * b) * (b^{-1} * c)}_{\text{Assoziativ.}} \in H$

$$= a^{-1} * (b * b^{-1}) * c$$

$$= a^{-1} * n * c = a^{-1} * c.$$ Also ist $a \sim c$.

2. Aufgabe

(a) $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ -7 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{nach 3. Spalte}}{\overset{\text{Entwicklung}}{=}} 2\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 2-\lambda \\ -7 & 3 \end{pmatrix} + (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot(-6-7\cdot(2-\lambda)) + (4-\lambda)\cdot((-5-\lambda)\cdot(2-\lambda)+6)$$

$$= 2\cdot(-6+14-7\lambda)$$
$$+ (4-\lambda)\cdot(-10-2\lambda+5\lambda+\lambda^2+6)$$

$$= 16-14\lambda+(4-\lambda)\cdot(\lambda^2+3\lambda-4)$$

$$= \cancel{16} - 14\lambda + 4\lambda^2 + 12\lambda - \cancel{16} - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda$$

$$= 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda\cdot(\lambda^2-\lambda-2)$$
$$= -\lambda\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda+1)$$
$$\overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$ sind die Eigenwerte von A

(b) Invertierbar: Wegen $\lambda_1 = 0$ ist A nicht invertierbar.
(Allgemein gilt: A inv. $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ nach Satz 3.10.9. und EW $0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$.)

<u>Diagonalisierbar:</u> Drei verschiedene EW und A ist (3×3)-Matrix $\Rightarrow$ diagonalisierbar nach Satz 3.11.11. (c).

<u>Positiv definit:</u> Eigentlich nur für symmetrische Matrix A definiert. Nicht alle EW sind positiv, also ist A nicht positiv definit.

<u>Orthogonal:</u> A orthogonal $\Rightarrow |\lambda| = 1$ oder A invertierbar.

Beides ist falsch, also ist A nicht orthogonal.

(c) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $Ax = b$ lösbar ist und $\ker(A) = \{0\}$ gilt. (siehe Satz 3.8.4. (b))

Wegen $\lambda_1 = 0$ ist $\ker(A) \neq \{0\}$, so dass für keine Wahl von $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutige Lösbarkeit gegeben ist.

(d) Aus $\det(B \cdot C) = \det(B) \cdot \det(C)$ folgt

$$\det(B^n) = (\det(B))^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

~~Also~~ Weiter ist $\det(A+I) = \det(A-(-1)I) = 0$,

weil (-1) nach (a) ein EW von A ist.

Es folgt

$$\det\left((A+I)^{2015}\right) = \left(\det(A+I)\right)^{2015}$$

$$= 0^{2015} = 0.$$

3. Aufgabe

(a) Es gilt

$$M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(\phi) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{e}(\phi) \cdot \overbrace{M_{e}^{\mathcal{E}_3}(id_{\mathbb{R}^3})}^{=\left(M_{\mathcal{E}_3}^{e}(id_{\mathbb{R}^3})\right)^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | \\ b_1 & b_2 \\ | & | \end{pmatrix} \cdot M_{\mathcal{B}}^{e}(\phi) \cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Extrarechnung } (*)}$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Extrarechnung (*):

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ -\mathrm{II} \\ \frac{1}{2}(\mathrm{II}+\mathrm{III}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(b) Es gilt:

1. $[\Phi(v)]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\phi) \cdot [v]_{\mathcal{C}}$

2. $[v]_{\mathcal{C}} = M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot [v]_{\mathcal{E}_3}$

Also ist

$$[\Phi(v)]_{\mathcal{B}} \overset{1.\text{ und } 2.}{=} M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\phi) \cdot M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot [v]_{\mathcal{E}_3}$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 74 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe

(a) Wahr

(b) Falsch: Supremum wäre $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(c) Falsch: $g: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) := x$ und

$f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) := x^2$

(d) Falsch: $U_1 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 0, 0, 0)^T : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \}$

und $U_2 = \{ (0,0,0,0,0,x_6,x_7,x_8)^T : x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{R} \}$

sind UVR von $\mathbb{R}^8$ mit $\dim(U_1) = 5$, $\dim(U_2) = 3$,

aber $U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$ ist 0-dimensional.

(g) Falsch: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, aber

$$\det(A) = (-1)^2 = 1 > 0.$$

(h) Wahr: Wähle $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Wahr: A orthogonal $\Rightarrow A^T = A^{-1}$ und

somit $A \cdot A^T = I$ und $\det(A \cdot A^T) = \det(I)$
$= 1 \neq 0$.

(j) Wahr