Digital Image Processing HW03 Report

生機碩一 R09631007 吳乙澤

一、課本習題

3.22

(a)

According to formula 3-41, $W = vw^T$ (outer product of two vectors)

$$vw^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ vw^T is seperable ※

(b)

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} = W_1 * W_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ W is seperable ※

3.28

Let $G_1 = [\,]_{3\times3}$, $\sigma = 1.5$; $G_2 = [\,]_{5\times5}$, $= 2$; $G_3 = [\,]_{7\times7}$, $= 4$, $W = G_1 * G_2 * G_3$

(a)

Yes, I use fourier transform to prove it.

$\mathcal{F}\{G_1 * G_2\} = \mathcal{F}\{G_1\} \times \mathcal{F}\{G_2\}$ = Gaussian function

$\mathcal{F}^{-1}\{$Gaussian function$\}$ = Gaussian function ※

(b)

According to table 3.6, $\sigma_{f*g} = \sqrt{\sigma_f^2 + \sigma_g^2}$

$$\sigma_{G_1 * G_2 * G_3} = \sqrt{\left(\sqrt{1.5^2 + 2^2}\right)^2 + 4^2} = 4.71699$$ ※

(c)

Because G_3 size is 7×7, the W size is also 7×7 ※

3.44

(a)

Laplacian kernels

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

$0:1:0 \neq 1:-4:1$

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

$1:1:1 \neq 1:-8:1$

Laplacian kernels are not seperable ※

(b)

Robers cross-gradient kernels

-1	0
0	1

$-1:0 \neq 0:1$

0	-1
1	0

$0:-1 \neq 1:0$

Robers cross-gradient kernels are not seperable ※

(c)

Sobel kernels

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

$-1:0:1 = -2:0:2$

$V = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $W = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ※

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

$-1:0:1 = -2:0:2$

$V = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $W = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ※

Sobel kernels are seperable ※

4.3

(a)

$$\mathcal{F}\{\delta(t) * \delta(t-t_0)\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\}\,\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}$$

$$= e^{0} \times e^{-j2\pi\mu t_0} = \cos(2\pi\mu t_0) - j\sin(2\pi\mu t_0)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(t) * \delta(t-t_0)\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j2\pi\mu t_0}\} = \delta(t-t_0)$$ ※

(b)

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0) * \delta(t+t_0)\} = e^{-j2\pi\mu t_0} \times e^{j2\pi\mu t_0} = 1$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(t)$$ ※

4.51

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Laplacian function (3-53) $= \nabla^2 f(x,y) =$
$f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) +$
$f(x,y-1) - 4f(x,y)$

$(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$ is the center of filter)

$F\{\nabla^2 f(x,y)\}$

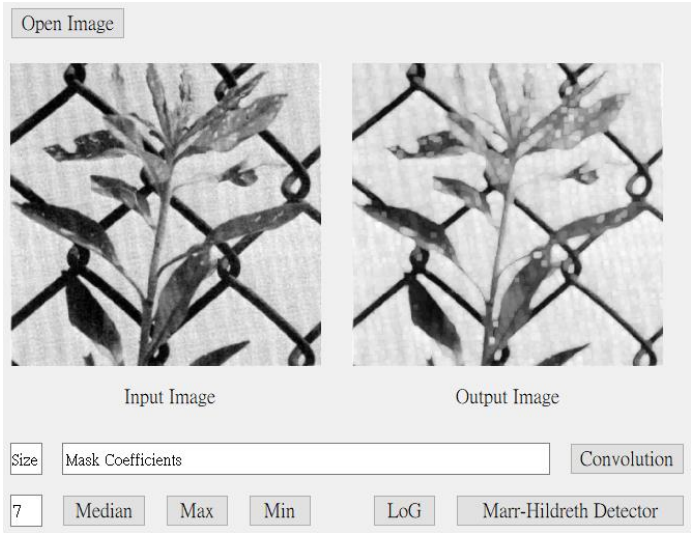
$= e^{j2\pi x/M} + e^{-j2\pi x/M} + e^{j2\pi y/N} + e^{-j2\pi y/N} - 4$

$= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{M}\right) + \cos\left(\frac{2\pi y}{N}\right) - 2\right]$

$= 2\left[\cos\left(2\pi \frac{(x-\frac{M}{2})}{M}\right) + \cos\left(2\pi \frac{(y-\frac{N}{2})}{N}\right) - 2\right]$ ※

二、軟體簡介

以下介紹本次作業所寫出的軟體及使用方法。開啟圖片後，需於 Size 處輸入濾波器大小，大小為奇數。 3 代表 3 * 3 、 5 代表 5 * 5，依此類推。若濾波器太大會導致程式當掉。Mask Coefficients 能讓使用者自訂濾波器係數，可為小數、負數，但不可以分數形式表示。注意，輸入時需在係數間插入空白，並從左至右、從上到下的順序輸入。舉例，Size 處輸入 3，Mask Coefficients 處輸入 -1 0 1 -2 0 2 -1 0 1，該係數便是一個 sobel filter。另外，下方還有個輸入框可輸入最大、最小、中值濾波的濾波器大小，輸入規則同 Convolution。右下角有 LoG 和 Marr-Hildreth Detector 按鈕可以做邊緣檢測。邊緣檢測的濾波器大小與係數是固定的，不可自訂。最後，本軟體的濾波效果不可疊加。例如，做完中值濾波後，做 LoG。則此時是 LoG 對原圖作用，而不是對中值濾波後的結果做 LoG。



三、演算法說明與結果討論

本作業有三個功能需完成。以下依序說明這些功能的演算法並討論結果。

3-1 Adjusting mask size and setting coefficients in the mask

該段我分成兩個部分說明。第一部分說明我如何達成讓使用者能自行調整濾波器係數；第二部分則說明卷積的程式碼。

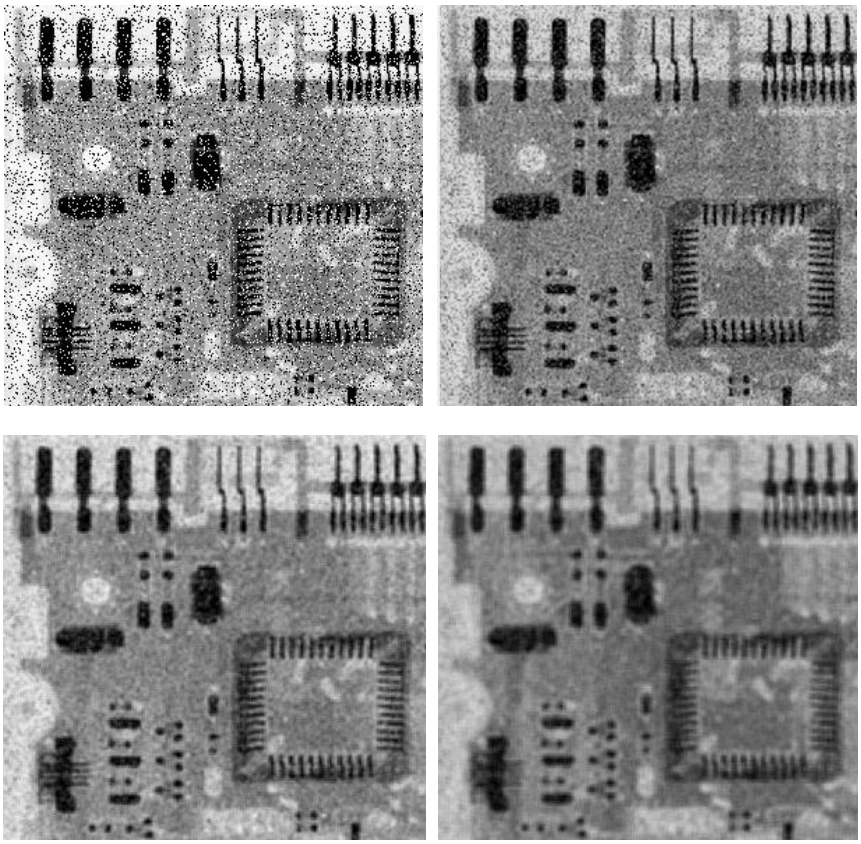
第一部分，見下方程式碼，我以字串型的變數 coefficientsString，儲存使用者輸入的濾波器係數，如「0 0 0 -4 8 -4 0 0 0」。接下來將 coefficientsString 以空格為單位，分割成各個獨立字串。最後，以 atof 函數，將字串型的變數轉為雙精度浮點數，並放到 coefficientsDouble 中。

```
coefficientsString = ui->maskCoefficients->text().toStdString();
stringstream input(coefficientsString);
coefficientsDouble.clear();
while(input>>splitResult)
   coefficientsDouble.push_back(atof(splitResult.c_str()));
```

見下方程式碼，為節省空間我把部分程式刪除，只留下較重要的片段。我利用四個 for 迴圈來完成卷積。前面的兩個迴圈，用來鎖定卷積時濾波器的中心位置。之後的兩個迴圈根據濾波器的中心位置，找到圖片要卷積的像素值。最後，從 coefficientsDouble 取出濾波器係數，再與像素值相乘後相加即可完成卷積。

```
for (int i = (maskSize+1)/2-1 ; i < imgCols-(maskSize-1)/2 ; i++)
   for (int j = (maskSize+1)/2-1 ; j < imgRows-(maskSize-1)/2 ; j++)
      for (int x = i-(maskSize-1)/2 ; x < i-(maskSize-1)/2+maskSize ; x++)
         for (int y = j-(maskSize-1)/2 ; y < j-(maskSize-1)/2+maskSize ; y++)
         {
            double B = MatImgIn.at<Vec3b>(y,x)[0];
            double G = MatImgIn.at<Vec3b>(y,x)[1];
            double R = MatImgIn.at<Vec3b>(y,x)[2];
            BGRCoefficient = coefficientsDouble.at(index);
            pixelB += (B * BGRCoefficient);
            pixelG += (G * BGRCoefficient);
            pixelR += (R * BGRCoefficient);
         }
```

以下討論濾波的結果。首先，比較不同大小的低通濾波器，對圖片所造成的不同影響及運算時間。見下圖，可以很容易地發現，越大的低通濾波器，對圖片的模糊效果越顯著。這是因為越大的濾波器，所涵蓋的運算範圍也越大所導致的。另外，運算時間的部分，在該例子中，3*3 跟 7*7 的運算時間有差異但相差不多。如果選擇更大的圖片做卷積，想必運算時間也會增加許多。



左上為原圖、右上經過 3*3 大小的低通濾波器、
左下經過 5*5 大小的低通濾波器、右下經過 7*7 大小的低通濾波器

蔬果。銳利化

3-2 Zero-crossing threshold on the Marr-Hildreth edge detection method

Marr-Hildreth Detector 先對圖片使用 LoG (Laplacian of Gaussian) 運算後，再找過零點做二值化。見下方程式碼，我將 LoG 濾波器的係數寫死，並用 3-1 部分的程式碼做卷積運算，之後把卷積結果放入 MatForZero 中。最後，再使用兩個 for 迴圈，配合 if 找出過零點並將之設為 255，若非過零點則將像素值設為 0。因此，運算後的圖片，白色處為物體邊緣，黑色處為非邊緣。

```
double log3DMask[9][9] = {{0, 0, 3, 2, 2, 2, 3, 0, 0},
                          {0, 2, 3, 5, 5, 5, 3, 2, 0},
                          {3, 3, 5, 3, 0, 3, 5, 3, 3},
                          {2, 5, 3, -12, -23, -12, 3, 5, 2},
                          {2, 5, 0, -23, -40, -23, 0, 5, 2},
                          {2, 5, 3, -12, -23, -12, 3, 5, 2},
                          {3, 3, 5, 3, 0, 3, 5, 3, 3},
                          {0, 2, 3, 5, 5, 5, 3, 2, 0},
                          {0, 0, 3, 2, 2, 2, 3, 0, 0}};

MatForZero.at<double>(i-(maskSize+1)/2+1, j-(maskSize+1)/2+1) = pixel;

// Find zero-crossing
for (int i = 1 ; i < imgCols-maskSize ; i++)
{
   for (int j = 1 ; j < imgRows-maskSize ; j++)
   {
      if ((MatForZero.at<double>(i - 1, j) * MatForZero.at<double>(i + 1, j)
<= 0) || (MatForZero.at<double>(i, j + 1) * MatForZero.at<double>(i, j - 1)
<= 0) || (MatForZero.at<double>(i + 1, j - 1) * MatForZero.at<double>(i - 1,
j + 1) <= 0) || (MatForZero.at<double>(i - 1, j - 1) * MatForZero.at <double>
(i + 1, j + 1) <= 0))
         QImgOut.setPixel(i, j, qRgb(255, 255, 255));
      else
         QImgOut.setPixel(i, j, qRgb(0, 0, 0));
   }
}
```

下圖為 Marr-Hildreth Detector 跟 Sobel Filter 的比較。可以發現，Marr-Hildreth Detector 能同時偵測直線方向跟橫線方向的邊緣，Sobel Filter 則只能一次偵測一個方向的邊緣。並且，由於 Marr-Hildreth Detector 有做二值化，因此圖片只有黑或白兩種顏色，整體看起來比 Sobel 的濾波效果乾淨許多。

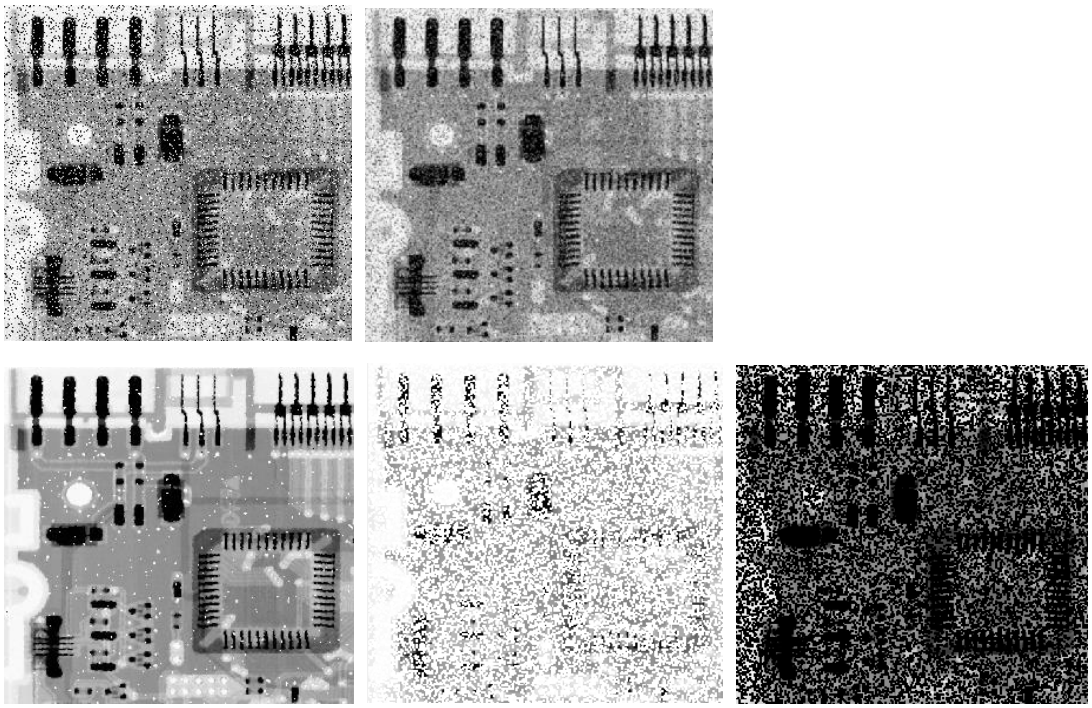
從左上到右下依序為原圖、Marr-Hildreth Detector、
3*3 直線方向的 Sobel Filter、3*3 橫線方向的 Sobel Filter

3-3 Compare order-statistic filter function and gaussian filter

最大、最小、中值等三個濾波器的程式碼和 3-1 的部分雷同，一樣是使用四個 for 迴圈。唯一的差別在於，不需要拿濾波器係數跟圖片像素相乘，只要找出濾波器遮罩內的最大值、最小值、中值即可。見下方程式碼，我使用 Vector 的 sort 方法進行排序，再以適當的索引值從 Vector 中取出最大值、最小值、中值後，放入 QImgOut 即可完成該題。

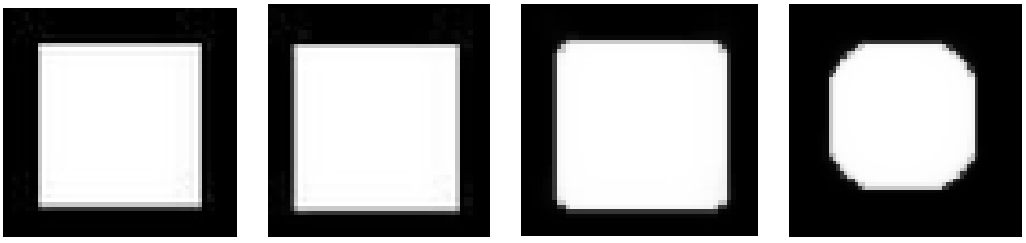
```
sort(pixelSeriesR.begin(), pixelSeriesR.end());
sort(pixelSeriesG.begin(), pixelSeriesG.end());
sort(pixelSeriesB.begin(), pixelSeriesB.end());
// Set pixel
pixelB = pixelSeriesB.at((pixelSeriesB.size()+1)/2);
pixelG = pixelSeriesG.at((pixelSeriesG.size()+1)/2);
pixelR = pixelSeriesR.at((pixelSeriesR.size()+1)/2);
QImgOut.setPixel(i-(orderMaskSize+1)/2+1, j-(orderMaskSize+1)/2+1, qRgb
(pixelR, pixelG, pixelB));
```

見下圖，這些圖片都是經過 3*3 大小的濾波器濾波而成的。比較高斯跟中值濾波，可以看出高斯濾波後的圖片，仍有許多黑白點存留，中值濾波後的黑白點卻少得多，表示中值濾波去椒鹽雜訊的能力，比高斯濾波強。



由左上到右下依序為原圖、高斯濾波、中值濾波、最大濾波、最小濾波

見下圖，比較中值濾波器的大小對圖片造成的影響。該圖的中間為白色的正方形，背景為黑色。仔細觀察圖片，可以從 3*3 中值濾波到 31*31 中值濾波的圖形變化，發現越大的濾波器越會將正方形的邊角吃掉，但是正方形的中心卻始終保持白色。這個現象的原因，可以從濾波的運算和該張圖片的特性來看。由於方形中心部分的像素值單一，因此濾波後的結果和原來圖片的像素值沒有差異。有差異的部分只出現在像素值不一致的地方，也就是方形的邊緣。



由左到右依序為原圖、3*3 中值濾波、11*11 中值濾波、31*31 中值濾波