云台控制激光笔绘制图案的数学模型（Created by EtherealTide）

1. 问题背景

- **目标**：通过云台控制激光笔在矩形屏幕上绘制指定图案（如三角形、正弦波）。
- **控制方式**：高速、开环控制，需校正屏幕坐标系与云台坐标系的映射关系。
- **校正方法**：手动控制云台标定屏幕四个角点的偏航角（yaw）和俯仰角（pitch），建立映射关系。
- **实现步骤**：
    1. 标定屏幕四个角点的云台角度。
    2. 建立屏幕坐标系到云台坐标系的映射模型。
    3. 在屏幕坐标系上对指定图案进行线性插值。
    4. 将插值后的点映射到云台坐标系，控制云台转动。

2. 坐标系定义与物理模型

2.1 坐标系定义

- **屏幕坐标系**：以矩形屏幕为参考的二维平面坐标系 (x_s, y_s)
    - 左下角为原点 $(0,0)$，右上角为 (W,H)
    - W 和 H 分别是屏幕宽度和高度（像素）
- **云台坐标系**：以云台为中心的三维坐标系
    - 偏航角 θ：绕垂直轴（Z轴）旋转的角度，正值向右
    - 俯仰角 ϕ：绕水平轴（Y轴）旋转的角度，正值向上
    - 云台到屏幕的垂直距离为 D

2.2 物理几何关系

云台位于屏幕前方距离 D 处，其在屏幕上的投影坐标为 (x_g, y_g)。

根据几何光学原理，激光从云台发出，经过角度 (θ, ϕ) 偏转后击中屏幕的位置为：

$$x_{hit} = x_g + D \cdot \tan(\theta)$$
$$y_{hit} = y_g + D \cdot \tan(\phi)$$

其中：

- D：云台到屏幕的垂直距离
- (x_g, y_g)：云台在屏幕上的投影坐标
- θ, ϕ：云台的偏航角和俯仰角（弧度）

3. 四角点标定方法

3.1 仿真标定

屏幕四个角点的云台角度计算：

- 左下角 $(0, 0)$:
  $\theta_1 = \arctan\left(\frac{0 - x_g}{D}\right), \quad \phi_1 = \arctan\left(\frac{0 - y_g}{D}\right)$
- 右下角 $(W, 0)$:
  $\theta_2 = \arctan\left(\frac{W - x_g}{D}\right), \quad \phi_2 = \arctan\left(\frac{0 - y_g}{D}\right)$
- 左上角 $(0, H)$:
  $\theta_3 = \arctan\left(\frac{0 - x_g}{D}\right), \quad \phi_3 = \arctan\left(\frac{H - y_g}{D}\right)$
- 右上角 (W, H):
  $\theta_4 = \arctan\left(\frac{W - x_g}{D}\right), \quad \phi_4 = \arctan\left(\frac{H - y_g}{D}\right)$

3.2 实际标定

实际上不知晓具体的云台到屏幕的距离、云台投影到屏幕的坐标，而是手动控制云台激光指向屏幕的四个角点，然后记录四组云台的偏航角、俯仰角，完成标定

4. 校正方法一：双线性插值映射

4.1 双线性插值原理

双线性插值假设在矩形区域内，角度变化是线性的。这种方法适用于云台相对于屏幕位置较远，透视畸变较小的情况。

4.2 归一化坐标

定义归一化坐标：

$$u = \frac{x_s}{W}, \quad v = \frac{y_s}{H}, \quad u, v \in [0, 1]$$

4.3 双线性插值公式

对于屏幕上任意点 (x_s, y_s)，对应的云台角度通过双线性插值计算：

$$\theta(u, v) = (1 - u)(1 - v)\theta_1 + u(1 - v)\theta_2 + (1 - u)v\theta_3 + uv\theta_4$$
$$\phi(u, v) = (1 - u)(1 - v)\phi_1 + u(1 - v)\phi_2 + (1 - u)v\phi_3 + uv\phi_4$$

其中，四个权重函数分别对应四个角点：

- $(1 - u)(1 - v)$：左下角权重
- $u(1 - v)$：右下角权重
- $(1 - u)v$：左上角权重
- uv：右上角权重

4.4 双线性插值的数学推导

双线性插值是在两个方向上分别进行线性插值：

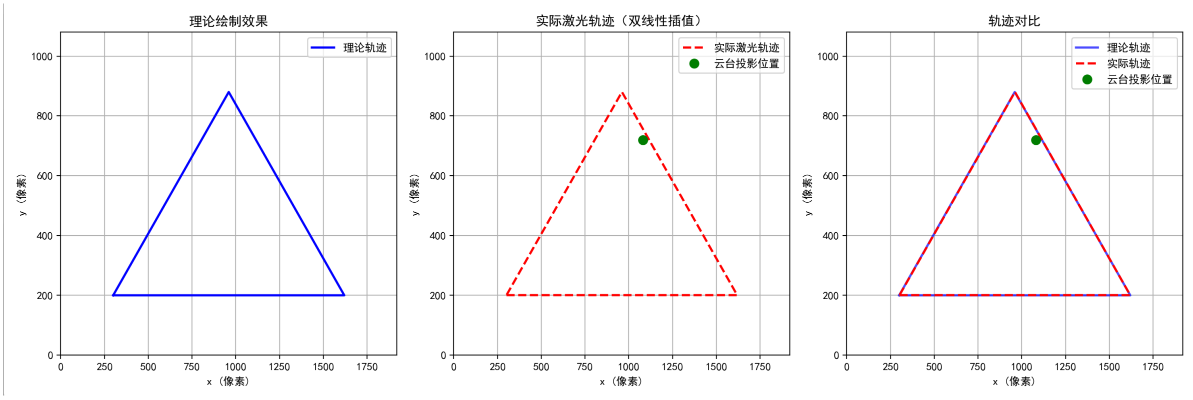
第一步：在 x 方向进行线性插值

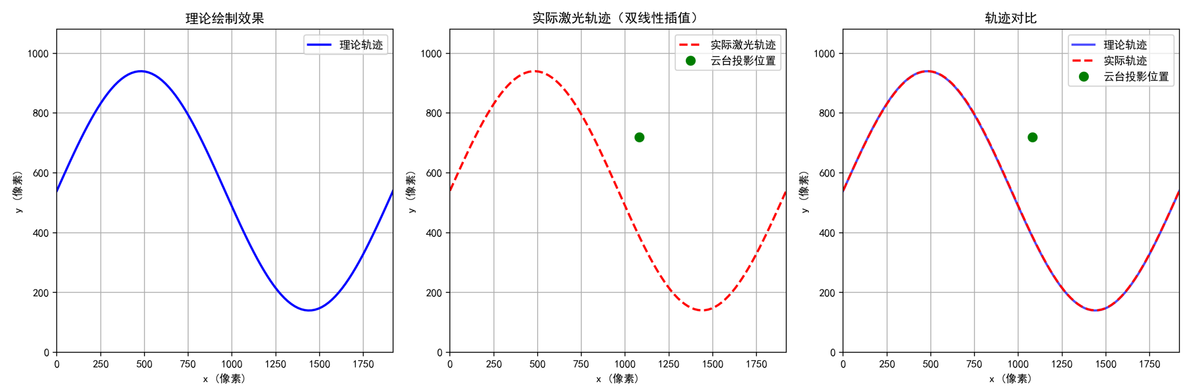
$$\theta_{bottom}(u) = (1-u)\theta_1 + u\theta_2$$
$$\theta_{top}(u) = (1-u)\theta_3 + u\theta_4$$

第二步：在 y 方向进行线性插值

$$\theta(u,v) = (1-v)\theta_{bottom}(u) + v\theta_{top}(u)$$

展开得到最终的双线性插值公式。





5. 方法二：透视变换映射

5.1 透视变换原理

透视变换使用单应矩阵（Homography Matrix）建立屏幕坐标与云台角度的映射关系，能够处理更复杂的几何畸变。

5.2 单应矩阵模型

透视变换的数学模型为：

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ 1 \end{bmatrix}$$

实际的云台角度为：

$$\theta = \frac{\theta}{w}, \quad \phi = \frac{\phi}{w}$$

5.3 单应矩阵求解

给定四对对应点：

$$
\mathbf{P}_{src} = \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & W \\ 0 & 0 & H & H \end{bmatrix}^T
$$

$$
\mathbf{P}_{dst} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}^T
$$

使用最小二乘法或RANSAC算法求解单应矩阵 $\mathbf{H}$：

$$
\mathbf{H} = \operatorname{argmin}_H \sum_{i=1}^{4} \|\mathbf{p}_{dst,i} - \mathbf{H}\mathbf{p}_{src,i}\|^2
$$

5.4 透视变换的数学推导

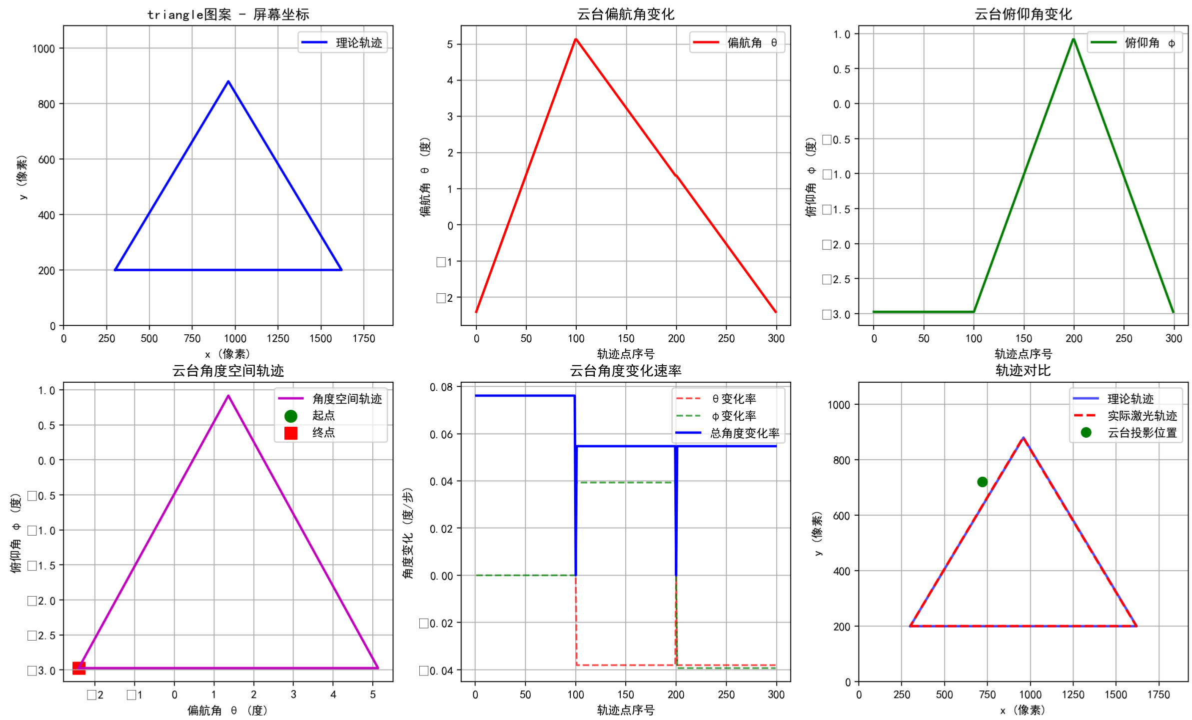
对于齐次坐标点 $\mathbf{p} = [x_s, y_s, 1]^T$，透视变换为：

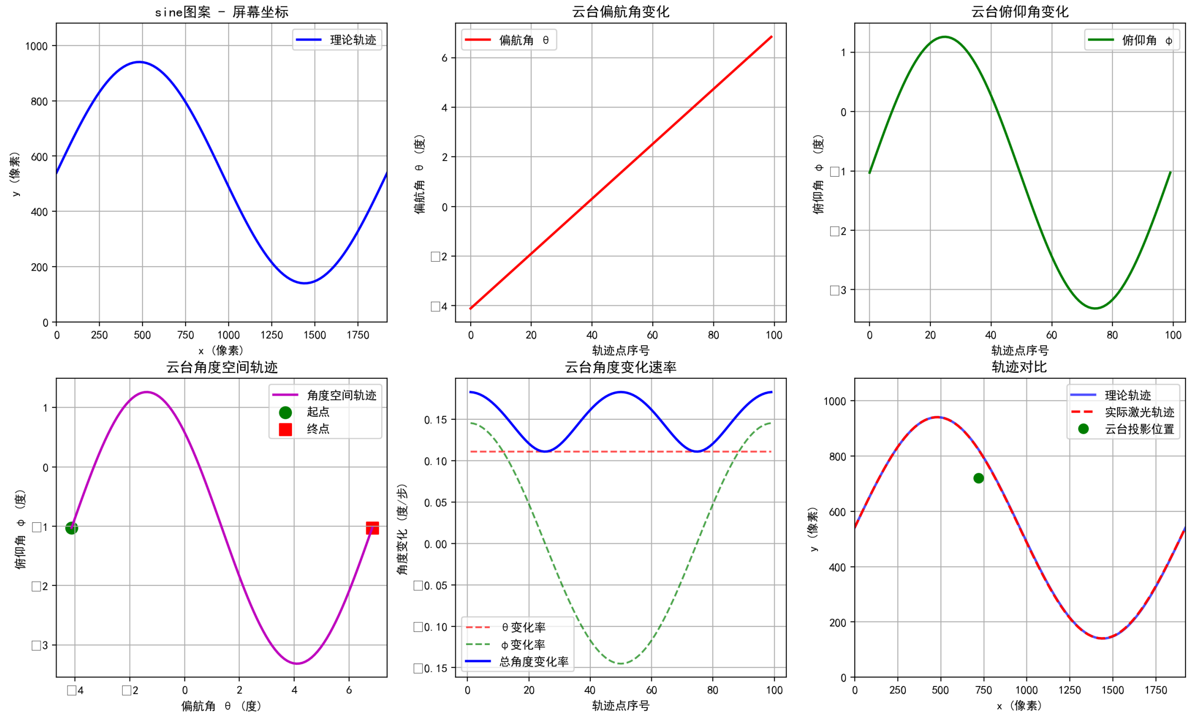
$$
\mathbf{p}' = \mathbf{H}\mathbf{p}
$$

其中 $\mathbf{p}' = [\theta', \phi', w]^T$，实际坐标为：

$$
\theta = \frac{\theta'}{w}, \quad \phi = \frac{\phi'}{w}
$$

透视变换能够处理投影畸变，但计算复杂度较高。





6. 图案生成与插值

6.1 三角形图案

三角形由三个顶点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 定义。

边界参数化:
对于三角形的每条边，使用参数 $t \in [0, 1]$ 进行线性插值:

$$\begin{aligned}
\text{边}1: &\quad x_s(t) = (1-t)x_1 + tx_2, \quad y_s(t) = (1-t)y_1 + ty_2 \\
\text{边}2: &\quad x_s(t) = (1-t)x_2 + tx_3, \quad y_s(t) = (1-t)y_2 + ty_3 \\
\text{边}3: &\quad x_s(t) = (1-t)x_3 + tx_1, \quad y_s(t) = (1-t)y_3 + ty_1
\end{aligned}$$

6.2 正弦波图案

一周期正弦波的数学表达式:

$$y_s = A \sin\left(2\pi \frac{x_s}{W}\right) + y_0$$

其中:

- A: 振幅
- y_0: 垂直偏移
- W: 屏幕宽度（一个周期）

采样策略:
在 $x_s \in [0, W]$ 范围内等间隔采样，生成点序列 $\{(x_{s,i}, y_{s,i})\}$。

7. 激光轨迹仿真与实践

7.1 概述

实际轨迹的计算过程：

1. 理论坐标 $(x_s, y_s) \to$ 映射函数 $\to$ 云台角度 (θ, ϕ)
2. 云台角度 $(\theta, \phi) \to$ 物理投射 $\to$ 实际击中位置 (x_{hit}, y_{hit})

7.2 物理投射模型

激光实际击中屏幕的位置：

$$
\begin{aligned}
x_{hit} &= x_g + D\tan(\theta) \\
y_{hit} &= y_g + D\tan(\phi)
\end{aligned}
$$

实际不知道具体的x_g, y_g, D，但其实也不需要知道，因为激光的位置并不是根据这个公式计算的，而是由映射关系确定的，这个公式只是为了仿真时绘制激光实际打到屏幕的位置。

8. 两种方法的比较

双线性插值法：

- 适用于云台距离屏幕较远，透视效应较小的情况
- 计算简单，实时性好
- 假设角度变化线性，对复杂几何关系处理能力有限

透视变换法：

- 适用于复杂的几何配置和显著的透视畸变
- 能处理任意四边形到矩形的映射
- 计算复杂度较高，但精度更好