USTNE ZADANIA DOMOWE
NA ĆWICZENIA W CZWARTEK 12.01.2023

---

1. Przeczytać przykład 6.4.4 z załączonego na końcu pliku skanu fragmentu książki R. Engelking, K. Sieklucki, Wstęp do topologii, PWN, Warszawa 1986 (dostępna w bibliotece).

2. Zadanie 3.6 ze skryptu.

3. Przestrzeń topologiczna (X, τ) jest *przestrzenią Baire'a* jeśli w X zachodzi twierdzenie Baire'a, tzn. suma przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych brzegowych jest brzegowa.

Podać przykład podprzestrzeni X płaszczyzny euklidesowej $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$, która jest przestrzenią Baire'a, ale nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

4. Zadanie 4.3 ze skryptu.

5. Zadanie 4.4 ze skryptu.

6. Czy któryś z następujących podzbiorów płaszczyzny euklidesowej $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ jest spójny?

$$\begin{aligned} A &= [\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}] \cup [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})] \\ B &= [\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})] \cup [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}] \end{aligned}$$

Uwaga. Na następnej stronie są wskazówki do zadań 3 i 6.

Wskazówka do zadania 3: Wykazać, że jeśli przestrzeń topologiczna X zawiera gęstą podprzestrzeń Y, która jest przestrzenią Baire'a, to X również jest przestrzenią Baire'a.

Wskazówka do zadania 6: Zbiór A jest spójny, a zbiór B nie.

Podobnie, korzystając z tego, że różnica $U_1 \setminus B_2$ jest niepusta i otwarta, znajdujemy taki niepusty podzbiór otwarty U_2 przestrzeni X, że zbiór $F_2 = \operatorname{cl} U_2$ spełnia warunki

$$F_2 \subset U_1 \setminus B_2 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{diam} F_2 \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Stosując indukcję można określić taki ciąg U_n, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, niepustych podzbiorów otwartych przestrzeni X, że zbiory $F_n = \operatorname{cl} U_n$ spełniają warunki

$$U \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots, \quad F_n \cap B_n = \emptyset \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{oraz} \quad \operatorname{diam} F_n \leqslant 1/n.$$

Na mocy twierdzenia Cantora (6.4.1) zbiór $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jest niepusty, a ponieważ $F \subset U$ oraz $F \cap B = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap B_n) = \emptyset$, więc $U \setminus B \neq \emptyset$. □

Następujący wniosek zawiera często używane dwoiste sformułowanie twierdzenia Baire'a:

6.4.3. Wniosek. *Jeżeli X jest przestrzenią zupełną, a zbiory $G_1, G_2, \ldots$ są gęste i otwarte w X, to iloczyn $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ jest zbiorem gęstym.* □

Podamy teraz zapowiedziany przykład zastosowania twierdzenia Baire'a.

6.4.4. Przykład. *Funkcja ciągła bez pochodnej.* Określimy funkcję ciągłą $\psi\colon I \to R$, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie przedziału I. Za pomocą takiej funkcji można bez trudu określić funkcję ciągłą $\varphi\colon R \to R$, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie prostej liczbowej R.

Niech X będzie przestrzenią funkcyjną $C(I, R)$ z metryką σ określoną wzorem $\sigma(f, g) = \sup\{|f(r) - g(r)|\colon r \in I\}$. Na mocy twierdzenia 6.2.4 przestrzeń X jest zupełna. Dla każdej funkcji $f \in C(I, R)$, liczby $r \in I$ oraz liczby dodatniej $s \leqslant \frac{1}{2}$ określona jest co najmniej jedna z liczb

$$\frac{|f(r+s) - f(r)|}{s} \quad \text{oraz} \quad \frac{|f(r-s) - f(r)|}{s};$$

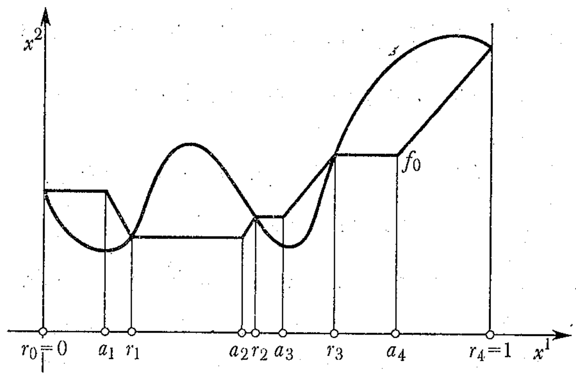
oznaczmy przez $D(f, r, s)$ nie mniejszą z tych liczb, o ile obie są określone, bądź też tę, która jest określona, w przeciwnym przypadku; niech ponadto $D(f, r, s) = 0$ dla $f \in C(I, R)$, $r \in I$ i $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Dla $n = 1, 2, \ldots$ przyjmijmy

$$G_n = \bigcup_{a > n} \bigcup_{s < 1/n} \{f \in X\colon D(f, r, s) \geqslant a \text{ dla każdego } r \in I\}.$$

Oczywiście zadanie nasze sprowadza się do wykazania, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$, bo każda funkcja $\psi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ma żądane własności. Na mocy wniosku 6.4.3 wystarczy więc wykazać, że zbiory G_n są gęste i otwarte w przestrzeni X (zob. ćwiczenie m paragrafu 7.5).

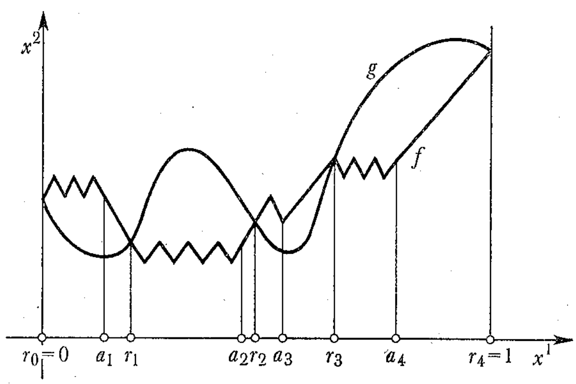
Zaczniemy od wykazania, że zbiory G_n są gęste w X. Niech g będzie dowolnym elementem przestrzeni X, a ε dowolną liczbą dodatnią. Określimy taką funkcję $f \in G_n$, że $\sigma(f, g) < \varepsilon$. Przede wszystkim, korzystając z twierdzenia Heinego (1.8.14), podzielmy przedział I punktami $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_m = 1$ w taki sposób, że $\operatorname{diam} g(\langle r_{i-1}, r_i \rangle) < \frac{1}{4}\varepsilon$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Następnie wybierzmy dla $i = 1, 2, \ldots, m$ punkt $a_i \in \langle r_{i-1}, r_i \rangle$ o tej własności, że $r_i - a_i \leqslant [1/(n+1)]|g(r_i) - g(r_{i-1})|$ i rozpatrzmy funkcję $f_0 \in X$ określoną wzorem

$$f_0(r) = \begin{cases} g(r_{i-1}) & \text{dla} \quad r \in \langle r_{i-1}, a_i \rangle, \\ g(r_{i-1}) + \dfrac{g(r_i) - g(r_{i-1})}{r_i - a_i}(r - a_i) & \text{dla} \quad r \in \langle a_i, r_i \rangle. \end{cases}$$



Rys. 135. Dowodząc, że zbiór G_n jest gęsty w X, określamy najpierw pomocniczą funkcję f_0, której wykres jest łamaną (zob. przykład 6.4.4)

Łatwo zauważyć, że wykres funkcji f_0 jest łamaną złożoną z odcinków równoległych do osi odciętych oraz z odcinków leżących na prostych o równaniu $x^2 = bx^1 + c$, gdzie $|b| \geqslant n+1$. Ponadto $\sigma(f_0, g) < \frac{1}{2}\varepsilon$, bowiem także $\operatorname{diam} f_0(\langle r_{i-1}, r_i \rangle) < \frac{1}{4}\varepsilon$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.



Rys. 136. Funkcja f powstaje z funkcji f_0 przez zastąpienie stromymi „ząbkami" każdego odcinka wykresu funkcji f_0 równoległego do osi odciętych (zob. przykład 6.4.4)

Szukana funkcja f powstaje z funkcji f_0 przez zastąpienie każdego równoległego do osi odciętych odcinka wykresu funkcji f_0 „ząbkami” o wysokości $\frac{1}{2}\varepsilon$ leżącymi na prostych o równaniu $x^2 = bx^1+c$, gdzie $|b| \geqslant n+1$. Wykres funkcji f jest również łamaną. Niech d oznacza minimum długości rzutów odcinków tej łamanej na oś odciętych; oczywiście $d>0$. Czytelnik łatwo sprawdzi, że $D(f, r, s) \geqslant n+1$ dla każdego $r \in I$ przy $s = \min[1/(n+1), d/2]$, a zatem $f \in G_n$. Ponadto oczywiście $\sigma(f, g) < \varepsilon$.

Wykażemy teraz, że zbiory G_n są otwarte. Rozpatrzmy dowolną funkcję $f \in G_n$ i ustalmy takie $a>n$ oraz $s<1/n$, że $D(f, r, s) \geqslant a$ dla każdego $r \in I$. Czytelnik łatwo sprawdzi, że jeżeli $\sigma(f, g) < \varepsilon = s(a-n)/4$, to $D(g, r, s) \geqslant (a+n)/2$ dla każdego $r \in I$, a zatem kula $B(f;\ \varepsilon)$ jest zawarta w zbiorze G_n.

Zauważmy na zakończenie, że stosowanie twierdzenia Baire'a prowadzi do wyników „ilościowych”: dowodząc istnienia osobliwej funkcji $\psi\colon I \to R$ wykazaliśmy, że zbiór funkcji mających rozpatrywaną osobliwość jest gęsty w przestrzeni $C(I, R)$. □

Następne twierdzenie ma, podobnie jak twierdzenie Baire'a, szerokie zastosowanie w analizie. Należy ono do twierdzeń o punkcie stałym, a więc orzeka o istnieniu pewnego punktu. Stosowane do odpowiednio dobranej przestrzeni funkcyjnej prowadzi do funkcji spełniających pewne warunki, np. do rozwiązań równań funkcyjnych specjalnej postaci. Dla przykładu pokażemy poniżej, w jaki sposób pozwala ono uzyskać twierdzenie o funkcjach uwikłanych; inne zastosowanie podajemy w zadaniu 6.Z.16. Przypomnijmy, że przekształcenie f przestrzeni metrycznej X w siebie nazywamy zbliżającym (zob. uzupełnienie 1.U.8), jeżeli f jest przekształceniem Lipschitza o stałej $c<1$, tj. jeżeli istnieje taka liczba $c \in \langle 0, 1)$, że $\varrho(f(x), f(y)) \leqslant c\varrho(x, y)$ dla każdych dwu punktów $x, y \in X$.

6.4.5. TWIERDZENIE (Banach). *Każde przekształcenie zbliżające f przestrzeni zupełnej X w siebie ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Niech f będzie przekształceniem Lipschitza o stałej $c \in \langle 0, 1)$. Rozpatrzmy dowolny punkt $x \in X$ oraz ciąg $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1) = f^2(x)$, $x_3 = f(x_2) = f^3(x)$, ... obrazów punktu x przy kolejnych iteracjach przekształcenia f. Nietrudno sprawdzić, że $\varrho(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leqslant c^n\varrho(x, f(x))$, a zatem dla $n' \geqslant n \geqslant k$ mamy

$$\begin{aligned}\varrho(x_n, x_{n'}) &= \varrho(f^n(x), f^{n'}(x)) \leqslant \\ &\leqslant \varrho(f^n(x), f^{n+1}(x)) + \varrho(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)) + \ldots + \varrho(f^{n'-1}(x), f^{n'}(x)) \leqslant \\ &\leqslant (c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n'-1})\varrho(x, f(x)) \leqslant \\ &\leqslant [c^k/(1-c)]\varrho(x, f(x)).\end{aligned}$$

Ponieważ $c<1$, więc z nierówności $\varrho(x_n, x_{n'}) \leqslant [c^k/(1-c)]\varrho(x, f(x))$ uzyskanej powyżej wynika, że ciąg $x_1, x_2, \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wykażemy, że granica $x_0 \in X$ tego ciągu jest punktem stałym przekształcenia f. Z ciągłości f wynika, że $\lim\limits_n f(x_n) = f(x_0)$, ale ponieważ $f(x_n) = x_{n+1}$, więc $\lim\limits_n f(x_n) = \lim\limits_n x_{n+1} = x_0$. Zatem $f(x_0) = x_0$. Dla wykazania jednoznaczności punktu stałego x_0 zauważmy, że jeżeli $f(y_0) = y_0$, to $\varrho(x_0, y_0) \leqslant c\varrho(f(x_0), f(y_0)) = c\varrho(x_0, y_0)$, a więc $\varrho(x_0, y_0) = 0$, tzn. $x_0 = y_0$. □