Egzamin z AM I.2

22.VI.2019, czas pisania 160′ netto.

Zadanie 1

Funkcja $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $f(x) = \ln(x)\sin(x^a)$, gdzie $a > 0$ jest ustalonym parametrem. Znaleźć wszystkie wartości a, dla których funkcja f jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 2

Na przedziale domkniętym $[0,1]$ rozważamy szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{2k-1}(1-x)\,, & n = 3k-2\,, \\ x^{2k}(1-x)\,, & n = 3k-1\,, \\ -\,x^k(1-x)\,, & n = 3k \end{cases}$$

(k w tym wzorze jest dowolną liczbą naturalną). Innymi słowy rozważamy szereg funkcyjny

$$x(1-x)+x^2(1-x)-x(1-x)+x^3(1-x)+x^4(1-x)-x^2(1-x)+x^5(1-x)+x^6(1-x)-x^3(1-x)+\dots$$

Czy ten szereg jest zbieżny punktowo na $[0,\,1]$? Jeśli tak, to czy jest on też zbieżny jednostajnie na $[0,\,1]$?

Zadanie 3

Na przedziale domkniętym $[0,100]$ rozważamy funkcję [tak zwaną funkcję gęstości liniowego rozkładu masy] $\rho(x) = x^n$, gdzie $n = 0,\,1,\,2,\,3,\,\dots$ W takiej i podobnych sytuacjach, na ostatnim wykładzie 13.VI br zdefiniowaliśmy wielkość t_G jednoznacznie wyznaczoną przez równość

$$\int_0^{t_G} \rho(x)\,dx \;=\; \int_{t_G}^{100} \rho(x)\,dx\,,$$

a także wielokość t_H minimalizującą (dla $t = t_H$) wartość całki z parametrem rzeczywistym t

$$\int_0^{100} (x-t)^2 \rho(x)\,dx\,.$$

Należy znaleźć (z uzasadnieniem!) wszystkie $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, dla których $t_G \leqslant t_H$.

Zadanie 4

Udowodnić, że $\zeta(3/2) < 3$. Innymi słowy udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$$

jest zbieżny do liczby mniejszej od 3.

Wsk. Można (np.) użyć rachunku całkowego.

==============================

Zadanie, które można rozwiązywać ZAMIAST jednego z zadań 1 – 4

Po naszym pierwszym kolokwium w dniu 15.IV br wiemy, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \; > \; 2\,e$ dla wszystkich liczb naturalnych n. Czy szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \; 2\,e \Big)$$

jest zbieżny?