KOLOKWIUM, TOPOLOGIA I, 01.12.22.

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami należy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

1. Znaleźć wnętrze i domknięcie zbiorów:

(A)

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x,y) \in R^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ \frac{1}{2n+1} < \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2n}\}$$

w przestrzeni $(R^2, \tau(d_r))$, gdzie $\tau(d_r)$ oznacza topologię na płaszczyźnie R^2 generowaną przez metrykę "rzeka".

(B)

$$B = [1/3, 2/3] \times [0, 1/2)$$

w kwadracie leksykograficznym.

2. Niech $\tau(d_k)$ i $\tau(d_r)$ będą topologiami generowanymi przez metryki "kolejową" i "rzeka" na płaszczyźnie R^2, odpowiednio. Niech τ_S oznacza topologię strzałki na prostej R, tj. topologię generowaną przez bazę złożoną z przedziałów $(a, b]$.

(A) Znaleźć zbiór A wszystkich punktów ciągłości przekształcenia $f : (R, \tau_e) \to (R^2, \tau(d_r))$ określonego formułą

$$f(t) = (t, \sin t) \quad \text{dla} \quad t \in R.$$

(B) Znaleźć zbiór B wszystkich punktów ciągłości przekształcenia $f : (R^2, \tau(d_k)) \to (R, \tau_S)$ określonego formułą

$$f(s,t) = s \quad \text{dla} \quad s, t \in R.$$

3. Niech (X, τ_X), (Y, τ_Y) będą niepustymi przestrzeniami topologicznymi. Niech τ oznacza topologię produktową w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$.

(A) Udowodnić, że jeśli $(X \times Y, \tau)$ jest przestrzenią ośrodkową to (X, τ_X) i (Y, τ_Y) są ośrodkowe.

(B) Udowodnić, że jeśli $(X \times Y, \tau)$ jest przestrzenią zwartą to (X, τ_X) i (Y, τ_Y) są zwarte.

4. Niech U będzie podzbiorem otwartym płaszczyzny euklidesowej R^2 takim, że

$$[-1, 1] \times [-1, 1] \subset U.$$

Udowodnić, że istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$[-1-\delta, 1+\delta] \times [-1-\delta, 1+\delta] \subset U.$$