3. (15p) Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4 + n^{\alpha} x^2}.$$

(a) Wyznaczyć zbiór parametrów α, dla których funkcja s jest dobrze określona na całym $\mathbb{R}$.

(b) Wyznaczyć zbiór parametrów α, dla których s jest różniczkowalna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) Wykazać, że dla $\alpha > 2$ funkcja s jest ciągła na całym $\mathbb{R}$.

(d) Wykazać, że dla $\alpha \in (1, 2]$ funkcja s nie jest ciągła w $x_0 = 0$.

$f_n(x) = \dfrac{x}{4 + n^{\alpha} x^2}$ Szkic rozwiązania

(a) $|f_n(x)| \sim n^{-\alpha}$ dla $\alpha > 0$, skąd $\Sigma f_n(x)$

odp: $\alpha > 1$

(i) jest zbieżny dla $\alpha > 1$, (ii) rozbieżny dla $\alpha \in (0, 1]$ (szereg stałego znaku)

(iii) $\alpha \leq 0$, $x \neq 0 \Rightarrow f_n(x) \not\to 0$ (warunek konieczny zbieżności)

(b) BSO: $x > 0$, bo s jest nieparzysta.

$$f_n'(x) = \frac{4 - n^{\alpha} x^2}{(4 + n^{\alpha} x^2)^2} \Rightarrow |f_n'(x)| \leq \frac{4 + n^{\alpha} x^2}{(4 + n^{\alpha} x^2)^2} = (4 + n^{\alpha} x^2)^{-1}$$

$\forall_{x \geq a > 0}$ $|f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{4 + n^{\alpha} a^2} \Rightarrow \Sigma f_n' \rightrightarrows$ na $[a, +\infty)$ {kryt. Weierstrassa jedn. zb.} dla $\alpha > 1$

Zatem s jest różniczkowalna na $(a, +\infty)$, więc również na $(0, +\infty)$ (wobec dowolności a)

$\Downarrow$

s różn. na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (z nieparzystości s)

Odp: jak w (a), dla $\alpha > 1$.

Uwaga: Σf_n nie jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c)

$$\frac{x}{4 + n^{\alpha} x^2} \overset{x \geq 0}{\leq} \frac{x}{2\sqrt{4 n^{\alpha} x^2}} = \frac{1}{4 n^{\alpha/2}}$$

{G ≤ A}

Zatem, $\alpha > 2 \Rightarrow \Sigma \dfrac{1}{4 n^{\alpha/2}} < +\infty$, więc $\Sigma f_n \rightrightarrows s$ na $\mathbb{R}$.

f_n - ciągłe $\overset{TW}{\Rightarrow}$ s jest ciągła.

(d) $\alpha \in (1, 2]$

$$s(x) > \sum_{n=N}^{2N} \frac{x}{4 + n^{\alpha} x^2}. \qquad \text{Wstawiam } x = N^{-\alpha/2}$$

stała C

$$s(\underbrace{N^{-\alpha/2}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ przy } N\to\infty}}) > (N+1)\frac{N^{-\alpha/2}}{4 + (2N)^{\alpha}\cdot(N^{-\alpha/2})^2} = \frac{N+1}{N^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{4+4^{\alpha}} \to +\infty \ (\alpha < 2)$$

lub $\to C$ $(\alpha = 2)$

Zatem $\lim_{x\to 0^+} s(x) \geq C > 0$ (lub nie istnieje),

ale $s(0) = 0 \Rightarrow s(0) \neq \lim_{x\to 0} s(x)$.

Punktacja: 4 pkt za każdy z podpunktów (a) – (d).