**Algebra I, 25.11. 2022**

Wszystkie rozwiązania powinny być dokładnie uzasadnione

$D_n$ oznacza grupę dihedralną rzędu $2n$.

1. Niech $\sigma = (6,13)(7,8)(2,3,11,4,12,9)(1,2,3,4,5,6,7,8,9) \in S_{13}$.
   Uwaga: permutacje składamy "od prawej do lewej".
   (a) Zapisać $\sigma^{-1}$ w postaci iloczynu parami rozłącznych cykli.
   (b) Określić parzystość permutacji $\sigma$.
   (c) Zbadać, czy w $S_{13}$ istnieje permutacja parzysta rzędu 28.

2. Niech $H$ będzie podgrupą grupy $G$ indeksu $[G:H] = n < \infty$ i niech $a \in G$.
   Wykazać, że:
   (a) istnieje $k$ takie, że $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz $a^k \in H$,
   (b) jeżeli $H$ jest podgrupą normalną, to $a^n \in H$.

3. Podaj przykład dwóch nietrywialnych homomorfizmów $f_i : D_4 \longrightarrow S_3 \times C_2, i = 1,2$, takich, że $|\ker(f_1)| \neq |\ker(f_2)|$. (W każdym przypadku należy podać obrazy wszystkich elementów grupy $D_4$ i uzasadnić, że otrzymane przekształcenie jest homomorfizmem.)

4. (a) Wyznacz wszystkie podgrupy indeksu 2 w grupie $D_6$.
   (b) Sprawdź, czy $D_6$ jest iloczynem prostym swoich dwóch podgrup właściwych.

5. Załóżmy, że $G$ jest grupą skończoną, a $p$ jest najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą rząd grupy $G$. Niech $H \trianglelefteq G$ i $|H| = p$. Udowodnij, że $H \subseteq Z(G)$.