Rozwój algebry w XIX wieku

M.Skałba

16.03.2022r.

Algebra - a co to?

Poglądy pospolite są takie:

Algebra - a co to?

Poglądy pospolite są takie:

- **arytmetyka** to nauka o działaniach na samych liczbach;

Algebra - a co to?

Poglądy pospolite są takie:

- **arytmetyka** to nauka o działaniach na samych liczbach;
- **algebra** dołącza do arytmetyki działania na literach.

Algebra - a co to?

Poglądy pospolite są takie:

- **arytmetyka** to nauka o działaniach na samych liczbach;
- **algebra** dołącza do arytmetyki działania na literach.

Wyrafinowany pogląd amatorski na algebrę dorzuca do tej wyliczanki:

Algebra - a co to?

Poglądy pospolite są takie:

- **arytmetyka** to nauka o działaniach na samych liczbach;
- **algebra** dołącza do arytmetyki działania na literach.

Wyrafinowany pogląd amatorski na algebrę dorzuca do tej wyliczanki:
Algebra to teoria i praktyka rozwiązywania równań.

Algebra - a co to?

Poglądy pospolite są takie:

- **arytmetyka** to nauka o działaniach na samych liczbach;
- **algebra** dołącza do arytmetyki działania na literach.

Wyrafinowany pogląd amatorski na algebrę dorzuca do tej wyliczanki:
Algebra to teoria i praktyka rozwiązywania równań.
To wszystko uprawiano w matematyce i jej zastosowaniach na długo przed 19 stuleciem!

Algebra - a co to?

Poglądy pospolite są takie:

- **arytmetyka** to nauka o działaniach na samych liczbach;
- **algebra** dołącza do arytmetyki działania na literach.

Wyrafinowany pogląd amatorski na algebrę dorzuca do tej wyliczanki:
Algebra to teoria i praktyka rozwiązywania równań.
To wszystko uprawiano w matematyce i jej zastosowaniach na długo przed 19 stuleciem!Aby opisać co się stało w algebrze w 19 wieku warto spojrzeć na przełom wieków 18 i 19.

Gauss

Przełom 18 i 19 wieku...

Gauss

Przełom 18 i 19 wieku... **K.F.Gauss** (1777-1855)

Gauss

Przełom 18 i 19 wieku... **K.F.Gauss** (1777-1855) dla mnie i dla wielu Gauss był najgenialniejszym matematykiem w historii.

Gauss

Przełom 18 i 19 wieku... **K.F.Gauss** (1777-1855) dla mnie i dla wielu Gauss był najgenialniejszym matematykiem w historii. Już za życia nazywany był *princeps mathematicorum*.

Gauss

Przełom 18 i 19 wieku... **K.F.Gauss** (1777-1855) dla mnie i dla wielu Gauss był najgenialniejszym matematykiem w historii. Już za życia nazywany był *princeps mathematicorum*. Książę matematyków pochodził z nizin społecznych – jego ojciec był robotnikiem sezonowym, czyli

Gauss

Przełom 18 i 19 wieku. . . **K.F.Gauss** (1777-1855) dla mnie i dla wielu Gauss był najgenialniejszym matematykiem w historii. Już za życia nazywany był *princeps mathematicorum*. Książę matematyków pochodził z nizin społecznych – jego ojciec był robotnikiem sezonowym, czyli jak słusznie demaskuje ten eufemizm profesor Kordos:

Gauss

Przełom 18 i 19 wieku... **K.F.Gauss** (1777-1855) dla mnie i dla wielu Gauss był najgenialniejszym matematykiem w historii. Już za życia nazywany był *princeps mathematicorum*. Książę matematyków pochodził z nizin społecznych – jego ojciec był robotnikiem sezonowym, czyli jak słusznie demaskuje ten eufemizm profesor Kordos: ojciec był często na bezrobociu.

Gauss

Przełom 18 i 19 wieku. . . **K.F.Gauss** (1777-1855) dla mnie i dla wielu Gauss był najgenialniejszym matematykiem w historii. Już za życia nazywany był *princeps mathematicorum*. Książę matematyków pochodził z nizin społecznych – jego ojciec był robotnikiem sezonowym, czyli jak słusznie demaskuje ten eufemizm profesor Kordos: ojciec był często na bezrobociu.

Disquisitiones Arithmeticae

Najbardziej wpływowa książka z teorii liczb (a zatem i algebry) w matematyce nowożytnej. Ukazała się dopiero w 1801 roku

Disquisitiones Arithmeticae

Najbardziej wpływowa książka z teorii liczb (a zatem i algebry) w matematyce nowożytnej. Ukazała się dopiero w 1801 roku po kilku latach zwłoki spowodowanej finansami księcia Brunszwiku,

Disquisitiones Arithmeticae

Najbardziej wpływowa książka z teorii liczb (a zatem i algebry) w matematyce nowożytnej. Ukazała się dopiero w 1801 roku po kilku latach zwłoki spowodowanej finansami księcia Brunszwiku,a konkretnie trudnością drukarską opanowania skomplikowanych czcionek użytych do reprodukcji skomplikowanych wzorów.

Disquisitiones Arithmeticae

Najbardziej wpływowa książka z teorii liczb (a zatem i algebry) w matematyce nowożytnej. Ukazała się dopiero w 1801 roku po kilku latach zwłoki spowodowanej finansami księcia Brunszwiku,a konkretnie trudnością drukarską opanowania skomplikowanych czcionek użytych do reprodukcji skomplikowanych wzorów. Szczególnie dotyczy to rozdziału 5, w którym Gauss zajmuje się kompozycją binarnych form kwadratowych i implicite przeprowadza skomplikowane rachunki w skończonych grupach abelowych, których jeszcze nie było

Disquisitiones Arithmeticae

Najbardziej wpływowa książka z teorii liczb (a zatem i algebry) w matematyce nowożytnej. Ukazała się dopiero w 1801 roku po kilku latach zwłoki spowodowanej finansami księcia Brunszwiku,a konkretnie trudnością drukarską opanowania skomplikowanych czcionek użytych do reprodukcji skomplikowanych wzorów. Szczególnie dotyczy to rozdziału 5, w którym Gauss zajmuje się kompozycją binarnych form kwadratowych i implicite przeprowadza skomplikowane rachunki w skończonych grupach abelowych, których jeszcze nie było z wyjątkiem grup reszt modulo m, które rozważył w rozdziale 1 o kongruencjach.

Disquisitiones Arithmeticae

Najbardziej wpływowa książka z teorii liczb (a zatem i algebry) w matematyce nowożytnej. Ukazała się dopiero w 1801 roku po kilku latach zwłoki spowodowanej finansami księcia Brunszwiku,a konkretnie trudnością drukarską opanowania skomplikowanych czcionek użytych do reprodukcji skomplikowanych wzorów. Szczególnie dotyczy to rozdziału 5, w którym Gauss zajmuje się kompozycją binarnych form kwadratowych i implicite przeprowadza skomplikowane rachunki w skończonych grupach abelowych, których jeszcze nie było z wyjątkiem grup reszt modulo m, które rozważył w rozdziale 1 o kongruencjach.Proszę zwrócić uwagę na podobieństwo następujących dwóch sytuacji:

Disquisitiones Arithmeticae

Najbardziej wpływowa książka z teorii liczb (a zatem i algebry) w matematyce nowożytnej. Ukazała się dopiero w 1801 roku po kilku latach zwłoki spowodowanej finansami księcia Brunszwiku,a konkretnie trudnością drukarską opanowania skomplikowanych czcionek użytych do reprodukcji skomplikowanych wzorów. Szczególnie dotyczy to rozdziału 5, w którym Gauss zajmuje się kompozycją binarnych form kwadratowych i implicite przeprowadza skomplikowane rachunki w skończonych grupach abelowych, których jeszcze nie było z wyjątkiem grup reszt modulo m, które rozważył w rozdziale 1 o kongruencjach.Proszę zwrócić uwagę na podobieństwo następujących dwóch sytuacji:

- zapis $p + p = p$ koduje regułę *parzysta plus parzysta równa się parzysta*. Wiadomo, co kodują napisy:

$$p + n = n$$

Disquisitiones Arithmeticae

Najbardziej wpływowa książka z teorii liczb (a zatem i algebry) w matematyce nowożytnej. Ukazała się dopiero w 1801 roku po kilku latach zwłoki spowodowanej finansami księcia Brunszwiku,a konkretnie trudnością drukarską opanowania skomplikowanych czcionek użytych do reprodukcji skomplikowanych wzorów. Szczególnie dotyczy to rozdziału 5, w którym Gauss zajmuje się kompozycją binarnych form kwadratowych i implicite przeprowadza skomplikowane rachunki w skończonych grupach abelowych, których jeszcze nie było z wyjątkiem grup reszt modulo m, które rozważył w rozdziale 1 o kongruencjach.Proszę zwrócić uwagę na podobieństwo następujących dwóch sytuacji:

- zapis $p + p = p$ koduje regułę *parzysta plus parzysta równa się parzysta*. Wiadomo, co kodują napisy:

$$p + n = n \text{ oraz} \ldots n + n = p.$$

W sposób ścisły i ogólny ujmuje to pojęcie *kongruencji mod m*, które wprowadził Gauss w 1. rozdziale **DA**: nasze powyższe reguły opisują dodawanie mod 2.

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2,$$

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast n niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast n niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ mamy następujące trzy cudowne wzory

$$(x^2 + 6y^2)(z^2 + 6t^2) = (xz - 6yt)^2 + 6(xt + yz)^2,$$

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast n niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ mamy następujące trzy cudowne wzory

$$(x^2 + 6y^2)(z^2 + 6t^2) = (xz - 6yt)^2 + 6(xt + yz)^2,$$

$$(x^2 + 6y^2)(2z^2 + 3t^2) = 2(xz + 3yt)^2 + 3(xt - 2yz)^2,$$

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast n niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ mamy następujące trzy cudowne wzory

$$(x^2 + 6y^2)(z^2 + 6t^2) = (xz - 6yt)^2 + 6(xt + yz)^2,$$

$$(x^2 + 6y^2)(2z^2 + 3t^2) = 2(xz + 3yt)^2 + 3(xt - 2yz)^2,$$

$$(2x^2 + 3y^2)(2z^2 + 3t^2) = (2xz + 3yt)^2 + 6(xt - yz)^2$$

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast n niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ mamy następujące trzy cudowne wzory

$$(x^2 + 6y^2)(z^2 + 6t^2) = (xz - 6yt)^2 + 6(xt + yz)^2,$$

$$(x^2 + 6y^2)(2z^2 + 3t^2) = 2(xz + 3yt)^2 + 3(xt - 2yz)^2,$$

$$(2x^2 + 3y^2)(2z^2 + 3t^2) = (2xz + 3yt)^2 + 6(xt - yz)^2$$

DA c.d.

- oto druga sytuacja (z rozdziału 5. D.A.):niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast n niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ mamy następujące trzy cudowne wzory

$$(x^2 + 6y^2)(z^2 + 6t^2) = (xz - 6yt)^2 + 6(xt + yz)^2,$$

$$(x^2 + 6y^2)(2z^2 + 3t^2) = 2(xz + 3yt)^2 + 3(xt - 2yz)^2,$$

$$(2x^2 + 3y^2)(2z^2 + 3t^2) = (2xz + 3yt)^2 + 6(xt - yz)^2$$

więc reguły z poprzedniego slajdu obowiązują!!!

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa.

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie:

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**.

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \text{ oraz } x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod p \text{ oraz } x^2 \equiv p \pmod q.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań,

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \ \textit{oraz}\ x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań, **chyba, że** $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$*:*

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \ \textit{oraz}\ x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań, **chyba, że** $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$*: wówczas jedna z nich ma rozwiązanie, a druga nie.*

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:
Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \;\; \textit{oraz} \; x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań, **chyba, że** $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$*: wówczas jedna z nich ma rozwiązanie, a druga nie.* Ta niesamowita prawidłość długo była przypuszczeniem (m.in. Eulera);

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \;\; \textit{oraz}\; x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań, **chyba, że** $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$*: wówczas jedna z nich ma rozwiązanie, a druga nie.* Ta niesamowita prawidłość długo była przypuszczeniem (m.in. Eulera); pierwszy na świecie dowód podał jednak $<$ 20-letni Gauss;

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \ \ \textit{oraz}\ x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań, **chyba, że** $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$*: wówczas jedna z nich ma rozwiązanie, a druga nie.* Ta niesamowita prawidłość długo była przypuszczeniem (m.in. Eulera); pierwszy na świecie dowód podał jednak $<$ 20-letni Gauss; potem szybko dorzucił jeszcze 5 istotnie różnych dowodów!

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:

Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \ \textit{oraz} \ x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań, **chyba, że** $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$*: wówczas jedna z nich ma rozwiązanie, a druga nie.* Ta niesamowita prawidłość długo była przypuszczeniem (m.in. Eulera); pierwszy na świecie dowód podał jednak $<$ 20-letni Gauss; potem szybko dorzucił jeszcze 5 istotnie różnych dowodów! Do dziś opublikowano $>$

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:
Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \text{ \textit{oraz} } x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań, **chyba, że** $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$*: wówczas jedna z nich ma rozwiązanie, a druga nie.* Ta niesamowita prawidłość długo była przypuszczeniem (m.in. Eulera); pierwszy na świecie dowód podał jednak $<$ 20-letni Gauss; potem szybko dorzucił jeszcze 5 istotnie różnych dowodów! Do dziś opublikowano >150 różnych dowodów PWRK Gaussa!

Prawo wzajemności Gaussa i inne

Tytułowa belka slajdu nie może być zbyt długa. Bohaterem tego slajdu jest najważniejszy i najsłynniejszy chyba wynik Gaussa z DA; mianowicie: **das quadratische Reziprozitaetsgesetz**, czyli **prawo wzajemności dla reszt kwadratowych**. Orzeka ono co następuje:
Rozważmy dwie różne liczby nieparzyste p, q oraz następujące dwie kongruencje:

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \;\; \textit{oraz}\; x^2 \equiv p \pmod{q}.$$

Wówczas każda z tych kongruencji ma rozwiązanie x albo żadna nie ma rozwiązań, **chyba, że** $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$*: wówczas jedna z nich ma rozwiązanie, a druga nie.* Ta niesamowita prawidłość długo była przypuszczeniem (m.in. Eulera); pierwszy na świecie dowód podał jednak $<$ 20-letni Gauss; potem szybko dorzucił jeszcze 5 istotnie różnych dowodów! Do dziś opublikowano $>$150 różnych dowodów PWRK Gaussa! Ważniejsze jest jednak to, że to twierdzenie jest punktem wyjścia rozwoju **algebraicznej teorii liczb**, jednego z działów matematyki współczesnej głównego nurtu – do PWRK nawiążemy później.

Rozwiązywanie równań, czyli teoria Galois

Noerweg **Niels Henrik Abel** (1802-1829) zrobił pierwszy potężny postęp w rozwiązywaniu równań wielomianowych po renesansowych wyczynach Włochów.

Rozwiązywanie równań, czyli teoria Galois

Noerweg **Niels Henrik Abel** (1802-1829) zrobił pierwszy potężny postęp w rozwiązywaniu równań wielomianowych po renesansowych wyczynach Włochów. Wykazał mianowicie, że nie ma uniwersalnych wzorów literowych na pierwiastki wielomianu stopnia 5

Rozwiązywanie równań, czyli teoria Galois

Noerweg **Niels Henrik Abel** (1802-1829) zrobił pierwszy potężny postęp w rozwiązywaniu równań wielomianowych po renesansowych wyczynach Włochów. Wykazał mianowicie, że nie ma uniwersalnych wzorów literowych na pierwiastki wielomianu stopnia 5 (nie ma odpowiednika $\Delta = b^2 - 4ac$ dla równań postaci $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$,

Rozwiązywanie równań, czyli teoria Galois

Noerweg **Niels Henrik Abel** (1802-1829) zrobił pierwszy potężny postęp w rozwiązywaniu równań wielomianowych po renesansowych wyczynach Włochów. Wykazał mianowicie, że nie ma uniwersalnych wzorów literowych na pierwiastki wielomianu stopnia 5 (nie ma odpowiednika $\Delta = b^2 - 4ac$ dla równań postaci $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, choćby nie wiem jak skomplikowanego!).

Rozwiązywanie równań, czyli teoria Galois

Noerweg **Niels Henrik Abel** (1802-1829) zrobił pierwszy potężny postęp w rozwiązywaniu równań wielomianowych po renesansowych wyczynach Włochów. Wykazał mianowicie, że nie ma uniwersalnych wzorów literowych na pierwiastki wielomianu stopnia 5 (nie ma odpowiednika $\Delta = b^2 - 4ac$ dla równań postaci $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, choćby nie wiem jak skomplikowanego!). Trzeba uczciwie dodać, że wynik ten uzyskał Włoch **Paolo Ruffini** wcześniej, ale nie został on uznany przez środowisko matematyczne jako poprawny.

Rozwiązywanie równań, czyli teoria Galois

Noerweg **Niels Henrik Abel** (1802-1829) zrobił pierwszy potężny postęp w rozwiązywaniu równań wielomianowych po renesansowych wyczynach Włochów. Wykazał mianowicie, że nie ma uniwersalnych wzorów literowych na pierwiastki wielomianu stopnia 5 (nie ma odpowiednika $\Delta = b^2 - 4ac$ dla równań postaci $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, choćby nie wiem jak skomplikowanego!). Trzeba uczciwie dodać, że wynik ten uzyskał Włoch **Paolo Ruffini** wcześniej, ale nie został on uznany przez środowisko matematyczne jako poprawny. Póki co nie wyklucza to możliwości, że każde konkretne równanie 5. -tego stopnia daje się rozwiązać przez odpowiednie spiętrzanie działań arytmetycznych i pierwiastkowania dowolnego stopnia – od przypadku do przypadku (?)

E. Galois

Evariste Galois (1811-1832)

E. Galois

Evariste Galois (1811-1832) rozstrzygnął również ten problem.

E. Galois

Evariste Galois (1811-1832) rozstrzygnął również ten problem.Zaprzągnął do tego podstawy **teorii grup**, którą stworzył.

E. Galois

Evariste Galois (1811-1832) rozstrzygnął również ten problem.Zaprzągnął do tego podstawy **teorii grup**, którą stworzył. Okazało się, że jeśli **grupa Galois** wielomianu nie jest bardzo *szczególna*, to nie ma szans na zapisanie jego pierwiastków z użyciem działań arytmetycznych na współczynnikach a, b, c, d, e, f i operacji wyciągania pierwiastków.

E. Galois

Evariste Galois (1811-1832) rozstrzygnął również ten problem.Zaprzągnął do tego podstawy **teorii grup**, którą stworzył. Okazało się, że jeśli **grupa Galois** wielomianu nie jest bardzo *szczególna*, to nie ma szans na zapisanie jego pierwiastków z użyciem działań arytmetycznych na współczynnikach a, b, c, d, e, f i operacji wyciągania pierwiastków. Te *szczególne* grupy permutacji nazywają się dlatego **grupami rozwiązalnymi.**

E. Galois

Evariste Galois (1811-1832) rozstrzygnął również ten problem.Zaprzągnął do tego podstawy **teorii grup**, którą stworzył. Okazało się, że jeśli **grupa Galois** wielomianu nie jest bardzo *szczególna*, to nie ma szans na zapisanie jego pierwiastków z użyciem działań arytmetycznych na współczynnikach a, b, c, d, e, f i operacji wyciągania pierwiastków. Te *szczególne* grupy permutacji nazywają się dlatego **grupami rozwiązalnymi.** Jest wspaniała książka Leopolda Infelda *Wybrańcy bogów* o E. Galois!

Dirichlet

P.Lejeune-Dirichlet (1805-1859) matematyk niemiecki francuskiego pochodzenia.

Dirichlet

P.Lejeune-Dirichlet (1805-1859) matematyk niemiecki francuskiego pochodzenia. W swoim dowodzie twierdzenia o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym użył grupy charakterów zredukowanej grupy reszt mod m.

Dirichlet

P.Lejeune-Dirichlet (1805-1859) matematyk niemiecki francuskiego pochodzenia. W swoim dowodzie twierdzenia o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym użył grupy charakterów zredukowanej grupy reszt mod m. Ten dowód to nie tylko pierwociny teorii reprezentacji grup, ale przede wszystkim początek analitycznej teorii liczb!

Dirichlet

P.Lejeune-Dirichlet (1805-1859) matematyk niemiecki francuskiego pochodzenia. W swoim dowodzie twierdzenia o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym użył grupy charakterów zredukowanej grupy reszt mod m. Ten dowód to nie tylko pierwociny teorii reprezentacji grup, ale przede wszystkim początek analitycznej teorii liczb! My zilustrujemy tylko pierwszy aspekt, gdyż jest czysto algebraiczny.

Charakteria Dirichleta mod 4

Charaktery Dirichleta mod 4

Określamy dwie następujące funkcje p oraz n na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$:

$$n(4k+1)=1, n(4k+3)=-1, n(4k)=n(4k+2)=0,$$

Charaktery Dirichleta mod 4

Określamy dwie następujące funkcje p oraz n na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$:

$$n(4k+1) = 1, n(4k+3) = -1, n(4k) = n(4k+2) = 0,$$

$$p(4k+1) = 1, p(4k+3) = 1, p(4k) = p(4k+2) = 0,$$

Charaktery Dirichleta mod 4

Określamy dwie następujące funkcje p oraz n na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$:

$$n(4k+1) = 1, n(4k+3) = -1, n(4k) = n(4k+2) = 0,$$

$$p(4k+1) = 1, p(4k+3) = 1, p(4k) = p(4k+2) = 0,$$

Mamy tu trzecią emanację grupy cyklicznej dwuelementowej! Używając konsekwentnie tych funkcji i pewnych dość standardowych metod teorii szeregów udaje się Dirichletowi wyseparować liczby pierwsze q postaci $4k+3$ od tych postaci $4k+1$ i o każdym z tych podzbiorów liczb pierwszych udowodnić, że szereg ich odwrotności jest rozbieżny.

Charaktery Dirichleta mod 4

Określamy dwie następujące funkcje p oraz n na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$:

$$n(4k+1) = 1, n(4k+3) = -1, n(4k) = n(4k+2) = 0,$$

$$p(4k+1) = 1, p(4k+3) = 1, p(4k) = p(4k+2) = 0,$$

Mamy tu trzecią emanację grupy cyklicznej dwuelementowej! Używając konsekwentnie tych funkcji i pewnych dość standardowych metod teorii szeregów udaje się Dirichletowi wyseparować liczby pierwsze q postaci $4k+3$ od tych postaci $4k+1$ i o każdym z tych podzbiorów liczb pierwszych udowodnić, że szereg ich odwrotności jest rozbieżny. Jest to bardzo istotne wzmocnienie wyniku Eulera, że szereg odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest rozbieżny.

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem.

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.Nie doszedł jednak do pojęcia **ideału** (zrobił to później **R. Dedekind**), bo bardziej gustował w analizowaniu wykładników p-adycznych:

Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie zbiorem liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$.

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.Nie doszedł jednak do pojęcia **ideału** (zrobił to później **R. Dedekind**), bo bardziej gustował w analizowaniu wykładników p-adycznych:

Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie zbiorem liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli liczba $(a + bi)/(1 + i)$ też należy do $\mathbb{Z}[i]$ to możemy roboczo liczbę $a + bi$ nazywać parzystą.

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.Nie doszedł jednak do pojęcia **ideału** (zrobił to później **R. Dedekind**), bo bardziej gustował w analizowaniu wykładników p-adycznych:

Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie zbiorem liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli liczba $(a + bi)/(1 + i)$ też należy do $\mathbb{Z}[i]$ to możemy roboczo liczbę $a + bi$ nazywać parzystą. I tak np. $3 + 5i$ jest parzysta, gdyż $(3 + 5i)/(1 + i) = 4 + i \in \mathbb{Z}[i]$.

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.Nie doszedł jednak do pojęcia **ideału** (zrobił to później **R. Dedekind**), bo bardziej gustował w analizowaniu wykładników p-adycznych:

Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie zbiorem liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli liczba $(a + bi)/(1 + i)$ też należy do $\mathbb{Z}[i]$ to możemy roboczo liczbę $a + bi$ nazywać parzystą. I tak np. $3 + 5i$ jest parzysta, gdyż $(3 + 5i)/(1 + i) = 4 + i \in \mathbb{Z}[i]$. Ponieważ $(1 + i)^2 = 2i$ więc liczba 2 jest teraz jakby podwójnie parzysta (jest odpowiednikiem liczby całkowitej podzielnej przez 4).

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.Nie doszedł jednak do pojęcia **ideału** (zrobił to później **R. Dedekind**), bo bardziej gustował w analizowaniu wykładników p-adycznych:

Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie zbiorem liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli liczba $(a + bi)/(1 + i)$ też należy do $\mathbb{Z}[i]$ to możemy roboczo liczbę $a + bi$ nazywać parzystą. I tak np. $3 + 5i$ jest parzysta, gdyż $(3 + 5i)/(1 + i) = 4 + i \in \mathbb{Z}[i]$. Ponieważ $(1 + i)^2 = 2i$ więc liczba 2 jest teraz jakby podwójnie parzysta (jest odpowiednikiem liczby całkowitej podzielnej przez 4). Kummer umiał przeprowadzić tego typu konstrukcję w dowolnym zbiorze typu $\mathbb{Z}[\omega]$, gdzie ω jest ustalonym pierwiastkiem z 1 a p dowolną liczbą pierwszą (w naszym przykładzie $p = 2$ a $\omega = i$, czyli pierwiastek z 1 czwartego stopnia.)

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.Nie doszedł jednak do pojęcia **ideału** (zrobił to później **R. Dedekind**), bo bardziej gustował w analizowaniu wykładników p-adycznych:

Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie zbiorem liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli liczba $(a + bi)/(1 + i)$ też należy do $\mathbb{Z}[i]$ to możemy roboczo liczbę $a + bi$ nazywać parzystą. I tak np. $3 + 5i$ jest parzysta, gdyż $(3 + 5i)/(1 + i) = 4 + i \in \mathbb{Z}[i]$. Ponieważ $(1 + i)^2 = 2i$ więc liczba 2 jest teraz jakby podwójnie parzysta (jest odpowiednikiem liczby całkowitej podzielnej przez 4). Kummer umiał przeprowadzić tego typu konstrukcję w dowolnym zbiorze typu $\mathbb{Z}[\omega]$, gdzie ω jest ustalonym pierwiastkiem z 1 a p dowolną liczbą pierwszą (w naszym przykładzie $p = 2$ a $\omega = i$, czyli pierwiastek z 1 czwartego stopnia.) W pierścieniach $\mathbb{Z}[\omega]$ na ogół nie ma jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze i dlatego Kummer rozważał tzw. **liczby idealne**.

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.Nie doszedł jednak do pojęcia **ideału** (zrobił to później **R. Dedekind**), bo bardziej gustował w analizowaniu wykładników p-adycznych:

Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie zbiorem liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli liczba $(a + bi)/(1 + i)$ też należy do $\mathbb{Z}[i]$ to możemy roboczo liczbę $a + bi$ nazywać parzystą. I tak np. $3 + 5i$ jest parzysta, gdyż $(3 + 5i)/(1 + i) = 4 + i \in \mathbb{Z}[i]$. Ponieważ $(1 + i)^2 = 2i$ więc liczba 2 jest teraz jakby podwójnie parzysta (jest odpowiednikiem liczby całkowitej podzielnej przez 4). Kummer umiał przeprowadzić tego typu konstrukcję w dowolnym zbiorze typu $\mathbb{Z}[\omega]$, gdzie ω jest ustalonym pierwiastkiem z 1 a p dowolną liczbą pierwszą (w naszym przykładzie $p = 2$ a $\omega = i$, czyli pierwiastek z 1 czwartego stopnia.) W pierścieniach $\mathbb{Z}[\omega]$ na ogół nie ma jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze i dlatego Kummer rozważał tzw. **liczby idealne**. W naszym przypadku $\mathbb{Z}[i]$ mamy jednoznaczność rozkładu i dla $p = 2$ wzięliśmy zwykłą liczbę $1 + i$.

Kummer: WTF i WPW

Gauss nie traktował poważnie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale raczej był wyjątkiem. **Eduard Kummer** (1810-1893) interesował się bardzo WTF i udowodnił je dla szerokiej klasy wykładników.Nie doszedł jednak do pojęcia **ideału** (zrobił to później **R. Dedekind**), bo bardziej gustował w analizowaniu wykładników p-adycznych:

Niech $\mathbb{Z}[i]$ będzie zbiorem liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli liczba $(a + bi)/(1 + i)$ też należy do $\mathbb{Z}[i]$ to możemy roboczo liczbę $a + bi$ nazywać parzystą. I tak np. $3 + 5i$ jest parzysta, gdyż $(3 + 5i)/(1 + i) = 4 + i \in \mathbb{Z}[i]$. Ponieważ $(1 + i)^2 = 2i$ więc liczba 2 jest teraz jakby podwójnie parzysta (jest odpowiednikiem liczby całkowitej podzielnej przez 4). Kummer umiał przeprowadzić tego typu konstrukcję w dowolnym zbiorze typu $\mathbb{Z}[\omega]$, gdzie ω jest ustalonym pierwiastkiem z 1 a p dowolną liczbą pierwszą (w naszym przykładzie $p = 2$ a $\omega = i$, czyli pierwiastek z 1 czwartego stopnia.) W pierścieniach $\mathbb{Z}[\omega]$ na ogół nie ma jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze i dlatego Kummer rozważał tzw. **liczby idealne**. W naszym przypadku $\mathbb{Z}[i]$ mamy jednoznaczność rozkładu i dla $p = 2$ wzięliśmy zwykłą liczbę $1 + i$.

Kummer zajmował się jeszcze intensywniej Wyższymi Prawami Wzajemności. Objaśnimy na kolejnym przykładzie o co chodzi.

W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Bikwadratowe prawo wzajemności, czyli twierdzenie dotyczące kongruencji:

$$x^4 \equiv q \pmod{p}$$

wymaga uogólnienia symbolu Legendre'a dla reszt kwadratowych.

W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Bikwadratowe prawo wzajemności, czyli twierdzenie dotyczące kongruencji:

$$x^4 \equiv q \pmod{p}$$

wymaga uogólnienia symbolu Legendre'a dla reszt kwadratowych.
Najprościej rzecz ujmując teraz nie ma dychotomi typu: reszta kwadratowa (R) a niereszta kwadratowa (N) i brak najprostszych praw rachunkowych typu:

W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Bikwadratowe prawo wzajemności, czyli twierdzenie dotyczące kongruencji:

$$x^4 \equiv q \pmod{p}$$

wymaga uogólnienia symbolu Legendre'a dla reszt kwadratowych. Najprościej rzecz ujmując teraz nie ma dychotomi typu: reszta kwadratowa (R) a niereszta kwadratowa (N) i brak najprostszych praw rachunkowych typu: $N \times N = R$, $N \times R = N \ldots$.

W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Bikwadratowe prawo wzajemności, czyli twierdzenie dotyczące kongruencji:

$$x^4 \equiv q \pmod{p}$$

wymaga uogólnienia symbolu Legendre'a dla reszt kwadratowych. Najprościej rzecz ujmując teraz nie ma dychotomi typu: reszta kwadratowa (R) a niereszta kwadratowa (N) i brak najprostszych praw rachunkowych typu: $N \times N = R$, $N \times R = N \ldots$. Tym razem na wykładnikach obowiązuje rachunek mod 4:

W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Bikwadratowe prawo wzajemności, czyli twierdzenie dotyczące kongruencji:

$$x^4 \equiv q \pmod{p}$$

wymaga uogólnienia symbolu Legendre'a dla reszt kwadratowych. Najprościej rzecz ujmując teraz nie ma dychotomi typu: reszta kwadratowa (R) a niereszta kwadratowa (N) i brak najprostszych praw rachunkowych typu: $N \times N = R$, $N \times R = N \dots$. Tym razem na wykładnikach obowiązuje rachunek mod 4: są trzy rodzaje niereszt bikwadratowych (gdyż są cztery niezerowe reszty mod 4: 1,2,3).

W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Bikwadratowe prawo wzajemności, czyli twierdzenie dotyczące kongruencji:

$$x^4 \equiv q \pmod{p}$$

wymaga uogólnienia symbolu Legendre'a dla reszt kwadratowych. Najprościej rzecz ujmując teraz nie ma dychotomi typu: reszta kwadratowa (R) a niereszta kwadratowa (N) i brak najprostszych praw rachunkowych typu: $N \times N = R$, $N \times R = N \ldots$. Tym razem na wykładnikach obowiązuje rachunek mod 4: są trzy rodzaje niereszt bikwadratowych (gdyż są cztery niezerowe reszty mod 4: 1,2,3). Ponieważ jednak chcemy, aby bikwadratowy symbol Legendre'a był multyplikatywny, więc przyjmuje on wartości ze zbioru $\{1, i, -1, -i\}$, który jest grupą cykliczną rzędu 4, podobnie jak reszty $\{0, 1, 2, 3\}$ z dodawaniem reszt mod 4.

W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Bikwadratowe prawo wzajemności, czyli twierdzenie dotyczące kongruencji:

$$x^4 \equiv q \pmod p$$

wymaga uogólnienia symbolu Legendre'a dla reszt kwadratowych. Najprościej rzecz ujmując teraz nie ma dychotomi typu: reszta kwadratowa (R) a niereszta kwadratowa (N) i brak najprostszych praw rachunkowych typu: $N \times N = R$, $N \times R = N \dots$. Tym razem na wykładnikach obowiązuje rachunek mod 4: są trzy rodzaje niereszt bikwadratowych (gdyż są cztery niezerowe reszty mod 4: 1,2,3). Ponieważ jednak chcemy, aby bikwadratowy symbol Legendre'a był multyplikatywny, więc przyjmuje on wartości ze zbioru $\{1, i, -1, -i\}$, który jest grupą cykliczną rzędu 4, podobnie jak reszty $\{0, 1, 2, 3\}$ z dodawaniem reszt mod 4. Tak więc już pojawia się praktyczna konieczność rachunków w $\mathbb{Z}[i]$ – zwanym pierścieniem Gaussa,

W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Bikwadratowe prawo wzajemności, czyli twierdzenie dotyczące kongruencji:

$$x^4 \equiv q \pmod{p}$$

wymaga uogólnienia symbolu Legendre'a dla reszt kwadratowych. Najprościej rzecz ujmując teraz nie ma dychotomi typu: reszta kwadratowa (R) a niereszta kwadratowa (N) i brak najprostszych praw rachunkowych typu: $N \times N = R$, $N \times R = N \dots$. Tym razem na wykładnikach obowiązuje rachunek mod 4: są trzy rodzaje niereszt bikwadratowych (gdyż są cztery niezerowe reszty mod 4: 1,2,3). Ponieważ jednak chcemy, aby bikwadratowy symbol Legendre'a był multyplikatywny, więc przyjmuje on wartości ze zbioru $\{1, i, -1, -i\}$, który jest grupą cykliczną rzędu 4, podobnie jak reszty $\{0, 1, 2, 3\}$ z dodawaniem reszt mod 4. Tak więc już pojawia się praktyczna konieczność rachunków w $\mathbb{Z}[i]$ – zwanym pierścieniem Gaussa, który pierwszy zauważył, że aby badać reszty bikwadratowe, trzeba koniecznie wyjść poza zwykłe liczby całkowite.

Początki algebry liniowej i nieprzemiennej

Hermann Grassmann w Niemczech

Początki algebry liniowej i nieprzemiennej

Hermann Grassmann w Niemczech tzn.najpierw w Szczecinie, gdzie był nauczycielem a potem w Berlinie, gdzie był profesorem, stworzył pierwsze podstawy teorii **przestrzeni wektorowych**.

Początki algebry liniowej i nieprzemiennej

Hermann Grassmann w Niemczech tzn.najpierw w Szczecinie, gdzie był nauczycielem a potem w Berlinie, gdzie był profesorem, stworzył pierwsze podstawy teorii **przestrzeni wektorowych**. Zrozumiał podstawowe znaczenie pojęć liniowej niezależności i generowania podprzestrzeni przez układ wektorów. Był zadowolony z możliwości uprawiania geometrii niezależnie od **wymiaru** przestrzeni!

Początki algebry liniowej i nieprzemiennej

Hermann Grassmann w Niemczech tzn.najpierw w Szczecinie, gdzie był nauczycielem a potem w Berlinie, gdzie był profesorem, stworzył pierwsze podstawy teorii **przestrzeni wektorowych**. Zrozumiał podstawowe znaczenie pojęć liniowej niezależności i generowania podprzestrzeni przez układ wektorów. Był zadowolony z możliwości uprawiania geometrii niezależnie od **wymiaru** przestrzeni! **William Hamilton** w Irlandii stworzył **kwaterniony**. Są to czterowymiarowe wyrażenia $a + bi + cj + dk$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a i, j, k są specjalnymi symbolami, które mnoży się następująco:

$$ii = jj = kk = -1, \; ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

Początki algebry liniowej i nieprzemiennej

Hermann Grassmann w Niemczech tzn.najpierw w Szczecinie, gdzie był nauczycielem a potem w Berlinie, gdzie był profesorem, stworzył pierwsze podstawy teorii **przestrzeni wektorowych**. Zrozumiał podstawowe znaczenie pojęć liniowej niezależności i generowania podprzestrzeni przez układ wektorów. Był zadowolony z możliwości uprawiania geometrii niezależnie od **wymiaru** przestrzeni! **William Hamilton** w Irlandii stworzył **kwaterniony**. Są to czterowymiarowe wyrażenia $a + bi + cj + dk$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a i, j, k są specjalnymi symbolami, które mnoży się następująco:

$$ii = jj = kk = -1, \; ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

Zwykłe liczby rzeczywiste a, b, c, d są przemienne ze wszystkim.

Początki algebry liniowej i nieprzemiennej

Hermann Grassmann w Niemczech tzn.najpierw w Szczecinie, gdzie był nauczycielem a potem w Berlinie, gdzie był profesorem, stworzył pierwsze podstawy teorii **przestrzeni wektorowych**. Zrozumiał podstawowe znaczenie pojęć liniowej niezależności i generowania podprzestrzeni przez układ wektorów. Był zadowolony z możliwości uprawiania geometrii niezależnie od **wymiaru** przestrzeni! **William Hamilton** w Irlandii stworzył **kwaterniony**. Są to czterowymiarowe wyrażenia $a + bi + cj + dk$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a i, j, k są specjalnymi symbolami, które mnoży się następująco:

$$ii = jj = kk = -1, \; ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

Zwykłe liczby rzeczywiste a, b, c, d są przemienne ze wszystkim. Zbiór kwaternionów jest pierwszym przykładem **ciała nieprzemiennego**, czyli takiej struktury algebraicznej, gdzie wykonalne są cztery działania arytmetyczne, ale nie wymagamy koniecznie, aby mnożenie było przemienne.

Początki algebry liniowej i nieprzemiennej

Hermann Grassmann w Niemczech tzn.najpierw w Szczecinie, gdzie był nauczycielem a potem w Berlinie, gdzie był profesorem, stworzył pierwsze podstawy teorii **przestrzeni wektorowych**. Zrozumiał podstawowe znaczenie pojęć liniowej niezależności i generowania podprzestrzeni przez układ wektorów. Był zadowolony z możliwości uprawiania geometrii niezależnie od **wymiaru** przestrzeni! **William Hamilton** w Irlandii stworzył **kwaterniony**. Są to czterowymiarowe wyrażenia $a + bi + cj + dk$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a i, j, k są specjalnymi symbolami, które mnoży się następująco:

$$ii = jj = kk = -1, \; ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

Zwykłe liczby rzeczywiste a, b, c, d są przemienne ze wszystkim. Zbiór kwaternionów jest pierwszym przykładem **ciała nieprzemiennego**, czyli takiej struktury algebraicznej, gdzie wykonalne są cztery działania arytmetyczne, ale nie wymagamy koniecznie, aby mnożenie było przemienne. W procesie uogólniania pojęcia liczby kwaterniony są najbliższym kuzynem liczb zespolonych – trójek liczb nie da się sensownie mnożyć (Frobenius).

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein.

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji:

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji:*każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.*

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji: *każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.* Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej.

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji:*każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.* Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej *grupy przekształceń*.

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji: *każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.*
Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej *grupy przekształceń*.
Niech $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ przy czym działaniem jest mnożenie modulo 5.

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji: *każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.*
Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej *grupy przekształceń*.
Niech $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ przy czym działaniem jest mnożenie modulo 5.
Natomiast niech $G_2 = \{1, 3, 5, 7\}$;

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji: *każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.*
Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej *grupy przekształceń*.
Niech $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ przy czym działaniem jest mnożenie modulo 5.
Natomiast niech $G_2 = \{1, 3, 5, 7\}$; tym razem działanie to mnożenie modulo 8.

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji:*każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.*
Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej *grupy przekształceń*.
Niech $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ przy czym działaniem jest mnożenie modulo 5. Natomiast niech $G_2 = \{1, 3, 5, 7\}$; tym razem działanie to mnożenie modulo 8.W grupie G_1 potęgi elementu 2 to: $2, 4, 8 = 3, 6 = 1$ dają wszystkie elementy G_1.

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji:*każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.*
Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej *grupy przekształceń*.
Niech $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ przy czym działaniem jest mnożenie modulo 5. Natomiast niech $G_2 = \{1, 3, 5, 7\}$; tym razem działanie to mnożenie modulo 8.W grupie G_1 potęgi elementu 2 to: $2, 4, 8 = 3, 6 = 1$ dają wszystkie elementy G_1. Natomiast potęgi dowlnego elementu $g \in G_2$ dają tylko $g, 1$.

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji:*każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.*
Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej *grupy przekształceń*.
Niech $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ przy czym działaniem jest mnożenie modulo 5. Natomiast niech $G_2 = \{1, 3, 5, 7\}$; tym razem działanie to mnożenie modulo 8.W grupie G_1 potęgi elementu 2 to: $2, 4, 8 = 3, 6 = 1$ dają wszystkie elementy G_1. Natomiast potęgi dowlnego elementu $g \in G_2$ dają tylko $g, 1$. Obie grupy mają po 4 elementy, ale są algebraicznie różne:

Rozwój teorii grup

Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. **A. Cayley** pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji:*każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru.*
Natomiast **F. Klein** znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej *grupy przekształceń*.
Niech $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ przy czym działaniem jest mnożenie modulo 5. Natomiast niech $G_2 = \{1, 3, 5, 7\}$; tym razem działanie to mnożenie modulo 8.W grupie G_1 potęgi elementu 2 to: $2, 4, 8 = 3, 6 = 1$ dają wszystkie elementy G_1. Natomiast potęgi dowlnego elementu $g \in G_2$ dają tylko $g, 1$. Obie grupy mają po 4 elementy, ale są algebraicznie różne: G_1 jest **cykliczna** , a G_2 to **czwórkowa grupa Kleina**.

Koniec 19. wieku – twierdzenia Hilberta...

Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $\neq 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne:

Koniec 19. wieku – twierdzenia Hilberta...

Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $\neq 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$,

Koniec 19. wieku – twierdzenia Hilberta...

Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $\neq 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$, to wyjściowy układ równań też nie ma żadnych rozwiązań.

Koniec 19. wieku – twierdzenia Hilberta...

Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $\neq 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$, to wyjściowy układ równań też nie ma żadnych rozwiązań. Jeśli uzyskanie tak ewidentnej sprzeczności nie jest możliwe to wyjściowy układ ma rozwiązania.

Koniec 19. wieku – twierdzenia Hilberta...

Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $\neq 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$, to wyjściowy układ równań też nie ma żadnych rozwiązań. Jeśli uzyskanie tak ewidentnej sprzeczności nie jest możliwe to wyjściowy układ ma rozwiązania.
Twierdzenia Hilberta o zerach (Nullstellensatz) uogólnia to następująco:

Koniec 19. wieku – twierdzenia Hilberta...

Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $\neq 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$, to wyjściowy układ równań też nie ma żadnych rozwiązań. Jeśli uzyskanie tak ewidentnej sprzeczności nie jest możliwe to wyjściowy układ ma rozwiązania.
Twierdzenia Hilberta o zerach (Nullstellensatz) uogólnia to następująco: *Dowolny układ równań wielomianowych (wielu zmiennych):*

Koniec 19. wieku – twierdzenia Hilberta...

Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $\neq 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$, to wyjściowy układ równań też nie ma żadnych rozwiązań. Jeśli uzyskanie tak ewidentnej sprzeczności nie jest możliwe to wyjściowy układ ma rozwiązania.
Twierdzenia Hilberta o zerach (Nullstellensatz) uogólnia to następująco: *Dowolny układ równań wielomianowych (wielu zmiennych):*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

o współczynnikach z ciała liczb zespolonych nie ma rozwiązań tylko w sytuacji,

Koniec 19. wieku – twierdzenia Hilberta...

Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $\neq 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$, to wyjściowy układ równań też nie ma żadnych rozwiązań. Jeśli uzyskanie tak ewidentnej sprzeczności nie jest możliwe to wyjściowy układ ma rozwiązania.
Twierdzenia Hilberta o zerach (Nullstellensatz) uogólnia to następująco: *Dowolny układ równań wielomianowych (wielu zmiennych):*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

o współczynnikach z ciała liczb zespolonych nie ma rozwiązań tylko w sytuacji, gdy istnieją wielomiany $g_1, g_2, \ldots, g_k$ takie, że zachodzi tożsamość

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \ldots + g_k f_k = 1.$$

. . . i koniec teorii niezmienników

Drugie z fundamentalnych twierdzeń Hilberta w algebrze to **twierdzenie Hilberta o bazie**.

. . . i koniec teorii niezmienników

Drugie z fundamentalnych twierdzeń Hilberta w algebrze to **twierdzenie Hilberta o bazie**. Stwierdza ono w zasadzie, że każdy układ równań wielomianowych (**również o nieskończenie wielu równaniach!**) jest równoważny układowi równań ze skończoną liczbą równań.

. . . i koniec teorii niezmienników

Drugie z fundamentalnych twierdzeń Hilberta w algebrze to **twierdzenie Hilberta o bazie**. Stwierdza ono w zasadzie, że każdy układ równań wielomianowych (**również o nieskończenie wielu równaniach!**) jest równoważny układowi równań ze skończoną liczbą równań. Oba powyższe twierdzenia wyniosły geometrię algebraiczną na istotnie wyższy poziom, niż zostawili ją włoscy geometrzy algebraiczni 19. wieku.

...i koniec teorii niezmienników

Drugie z fundamentalnych twierdzeń Hilberta w algebrze to **twierdzenie Hilberta o bazie**. Stwierdza ono w zasadzie, że każdy układ równań wielomianowych (**również o nieskończenie wielu równaniach!**) jest równoważny układowi równań ze skończoną liczbą równań. Oba powyższe twierdzenia wyniosły geometrię algebraiczną na istotnie wyższy poziom, niż zostawili ją włoscy geometrzy algebraiczni 19. wieku. Twierdzenie to zdetronizowało w pewnym sensie wiodącą **teorię niezmienników**.

Dziękuję