Wyrywki z Historii Topologii

.

Czym jest topologia?

Cytat z H. Poincarégo:

„Geometria jest sztuką poprawnego wnioskowania ze źle zrobionych rysunków”.

Wczesne motywacje

Motywacje do wprowadzenia pojęć topologicznych pojawiły się w związku z rozwojem Analizy Matematycznej już przed r. 1800.
Zasady rachunku różniczkowego i całkowego zostały opracowane przez Isaaca Newtona (ok. 1665 -1670) i Gottfrieda Wilhelma Leibniza (kila lat później, ok. 1672-76) i zostały w 18 i 19 w. ugruntowane przez następne pokolenia matematyków. Doprowadziło to do definiowania pochodnej funkcji w punkcie jako granicy ilorazów różnicowych, zaś całki oznaczonej jako granicy pewnych sum skończonych.

Pojęcie granicy, choćby niejawnie, pojawiało się już znacznie wcześniej (badania Archimedesa i Apolloniusza z 3 w. p.n.e. i matematyków hinduskich z 5-6 w. n.e. i późniejsze, a też Fermata, Descartesa, Wallisa, Barrowa i innych w 17w.); jednak dopiero rozpowszechnienie rachunku różniczkowego i całkowego obnażyło potrzebę znalezienia kryteriów, pozwalających stwierdzić istnienie granicy danego ciągu liczbowego.

Podobnych bodźców dostarczyły badania szerów liczbowych, a zwłaszcza szeregów trygonometrycznych $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt))$, których teoria została zapoczątkowana przez J.-B. J. Fouriera w początku 19 w. (Publikacja w 1822r.) Szeregi te i dawniej już znane szeregi potęgowe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rozważano też jako funkcje, co wytworzyło potrzebę badania granic w przestrzeniach funkcji, a nie przestrzeniach takich jak oś liczbowa $\mathbb{R}$ czy jej skończone iloczyny kartezjańskie $\mathbb{R}^n$.

Wymienię też zasadniczy rozwój teorii funkcji analitycznych, dokonany przez A. Cauchy'ego (szereg publikacji począwszy od r.1825 czy nawet wcześniejszych), z wielkim dalszym wkładem P. A. Laurenta i J. Liouville'a i innych matematyków francuskich z jednej strony, a też C. Gaussa, Dirichleta, B. Riemanna z drugiej, który to rozwój stwarzał potrzeby skodyfikowania pojęć takich jak krzywa zamknięta i jej indeks względem punktu, czy też homotopijność krzywych w obszarze płaskim, a nawet pojęcia funkcji czy jej ciągłości lub analityczności.

Podwaliny topologii osi liczbowej $\mathbb{R}$

Z tego wczesnego okresu uściślania istniejących już pojęć i stwarzania nowych, wymienić należy przede wszystkim pojawienie się kryterium Cauchy'ego:

Do tego, by istniała granica ciągu liczbowego (x_n) potrzeba i wystarcza, by spełniony był warunek

$$\operatorname{diam}(\{x_n\}_{n\geq k}) \to 0 \tag{C}$$

(Tu, $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} |x-y|$ dla $A \subset \mathbb{R}^2$.)

Zastrzec trzeba, iż to, że spełnienie warunku (C) wystarcza do zapewnienia istnienia granicy w zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych, mogło zostać udowodnione dopiero po ścisłym określeniu, czym ten zbiór jest – a to nastąpiło nie wcześniej, niż w 1872r.

Tym niemniej, sformułowanie tego kryterium we wpływowym podręczniku już w 1821r. odegrało wielką rolę w realizacji programu uściślania podstaw Analizy Matematycznej. Ciągi w przestrzeniach metrycznych, spełniające warunek (C), nazywane są obecnie „ciągami Cauchy'ego", a definicja liczb rzeczywistych, podana w 1872r. przez G. Cantora (z uzupełnieniem E. Heinego) bezpośrednio jest związana z warunkiem (C): liczbą rzeczywistą nazywał on każdy ciąg liczb wymiernych spełniający ten warunek, przy czym ciągi (x_n) i (y_n) należy uznać za przedstawiające tę samą liczbę, jeśli $\lim_n |x_n - y_n| = 0$.

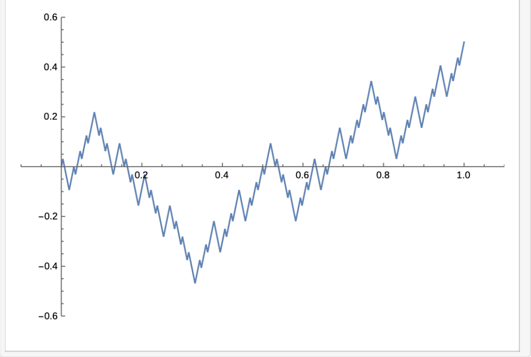
Druga definicja, w tym samym 1872r. podana przez R. Dedekinda, nawiązywała do traktatu Eudoxosa „O proporcjach'' z 4 w. pne; określała ona $\mathbb{R}$ poprzez tzw. „przekroje Dedekinda'' zbioru liczb wymiernych (które może należałoby nazywać „przekrojami Eudoxosa''). Bolzano również używał podobnych przekrojów, dowodząc w swej pracy z 1817r. twierdzenia o przyjmowaniu przez funkcję ciągłą $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wszystkich wartości z przedziału $[f(a), f(b)]$.

W rozległych badaniach z 19 w. dotyczących własności osi liczbowej $\mathbb{R}$, udowodniono też podstawowe:

Twierdzenie (B. Bolzano, C. Weierstrass). Z każdego ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Twierdzenie to sformułowane było jako lemat przez Bernarda Bolzano w 1817r. i powtórzone niezależnie przez C. Weierstrassa (18??), gdyż wyniki Bolzano pozostawały nieznane przez wiele lat. Trzeba jednak zauważyć, że dowód Bolzany o tyle nie mógł być pełny, że w 1817r. nie istniała jeszcze ścisła aksjomatyka, czy też konstrukcja, zbioru liczb rzeczywistych, natomiast Weierstrass już nią dysponował.

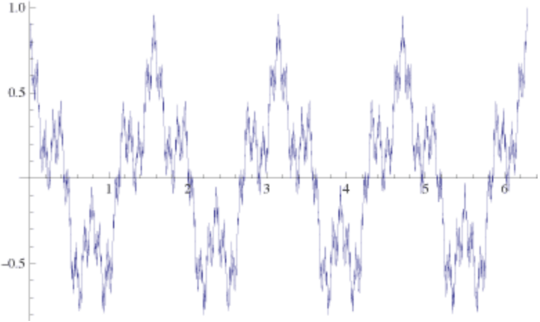
Podobnie było ze stwierdzeniem istnienia nieróżniczkowalnych funkcji ciągłych: Bolzano wskazał na to w swym przykładzie z ok. 1830r., a Weierstrass w 1875r. (Bolzano dowodził nieróżniczkowalności tylko w punktach pewnego gęstego podzbioru dziedziny, zaś Weierstrass we wszystkich jej punktach, przy czym funkcja Bolzany ma i tę silniejszą własność, co zauważono kiedy w 20 w. opublikowano jego przykład.)



Download to Desktop
Copy to Clipboard
Source

Bolzano discovered this continuous but nowhere differentiable function before 1831, but these investigations were not published until 1930. Weierstrass found an analogous function in 1875. The function is the limit of the ones graphed as

The following diagram, created using Mathematica, gives the graph of $y = \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{2^n}\cos(4^n x)$ for $0 \le x$



An approximation to Weierstrass's function.

Inne podstawowe twierdzenie dotyczące topolgii osi $\mathbb{R}$ pochodzi of G. Cantora i brzmi:

Twierdzenie Cantora o przecięciu. Gdy $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$ są domkniętymi i ograniczonymi podzbiorami osi $\mathbb{R}$, to istnieje punkt należący do każdego z nich.

Tu, zbiór A nazywany jest domkniętym, gdy należy do niego granica dowolnego zbieżnego ciągu jego punktów.

Prócz zbiorów domkniętych, Cantor używał też takich pojęć topologicznych jak zbiór otwarty, otoczenie, punkt wewnętrzny lub graniczny zbioru, podzbiór gęsty, zbiór przeliczalny czy ośrodkowy; odnotował też w 1871r, niezależnie od Weierstrassa i Bolzany, że „każdy zbiór nieskończony ma co najmniej jeden punkt skupienia”.

Dalszy rozwój tych pojęć wiąże się z rozszerzeniem pojęcia przestrzeni. Jak widać z pokazanych rysunków, przykłady niektórych ważnych funkcji otrzymane zostały jako granice ciągów prostszych funkcji, co bezpośrednio prowadzi do badania przestrzeni, których punktami (elementami) są funkcje określone na ustalonym odcinku i przyjmujące wartości w innej przestrzeni (w 19 w. była nią nadal oś $\mathbb{R}$ lub jedna z przestrzeni $\mathbb{R}^n$). Wykorzystywano też przestrzenie, których elementami były przekształcenia (np. liniowe, lub ogólniejsze). Postulowano też badanie przestrzeni, w których punktami są proste lub płaszczyzny w $\mathbb{R}^n$ (E. Borel, 1906r.).

W 1905r. M. Fréchet zdefiniował *przestrzenie metryczne* jako zbiory („przestrzenie") wyposażone w funkcję d, która każdej parze punktów zbioru przyporządkowuje ich „odległość" $d(x, y) \geq 0$, przy tym tak, by $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ i $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
(Tu, x, y, z są dowolnymi punktami rozważanej przestrzeni.)

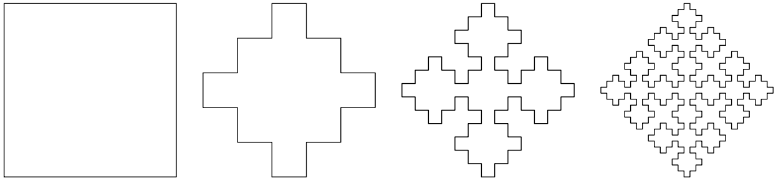
Warto odnotować, że w 1914r. Hausdorff użył podejścia Cantora do wykazania, że każdą przestrzeń metryczną można traktować jako podprzestrzeń *zupełnej przestrzeni metrycznej*, tzn. takiej, w której każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Fréchet zaproponował też badanie ogólniejszych przestrzeni, wyposażonych w możliwość przyporządkowywania granicy (niektórym) ciągom punktów, przy czym operacja ta miała spełniać pewne naturalne warunki (jak: podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy, czy: ciąg stale równy a jest do a zbieżny). W 1908r. F. Riesz proponował przyjęcie punktu skupienia zbioru jako pojęcie pierwotne, a w 1922 r. K. Kuratowski - przyjęcie jako pierwotnej operacji domykania zbiorów.

Obecnie powszechnie przyjęta jest definicja przestrzeni topologicznej jako zbioru X, wyposażonego w rodzinę $\mathcal{U}$ „zbiorów otwartych", zawierającą zbiory $\emptyset$ i X i zamkniętą ze względu na tworzenie skończonych przecięć i dowolnych sum. Jest to ujęcie równoważne zaproponowanemu przez K. Kuratowskiego, a też podejściu F. Hausdorffa z 1914r. Na rodzinę zbiorów otwartych nakładane bywają dodatkowe warunki, ujmowane w tzw. „aksjomatach oddzielania".

Przekształcenia między kostkami i twierdzenie o punkcie stałym

Teorio-mnogościowe wyniki Cantora wskazały na istnienie funkcji przekształcających $I = [0, 1]$ na $I^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in I\}$, czy ogólniej I^k na I^l. Pytanie, jakie się pojawiło, to czy funkcje takie mogą być ciągłe, a jeśli tak, to czy mogą przy tym być różnowartościowe. (Bo wg Cantora istnieją takie, które są i różnowartościowe, i „na'', lecz niekoniecznie są ciągłe.) Zaskoczeniem było skonstruowanie przez G. Peanę ciągłej funkcji przekształałacjącej I na I^2. Rok później, w 1891 r., inny przykład opublikował D. Hilbert. W 1912r. znane konstrukcje takich krzywych podał Wacław Sierpiński.



The limit of the second Sierpiński's curve illustrated above has area

Jednak pytanie o istnienie ciągłej bijekcji jednej kostki na drugą okazało się mieć negatywną odpowiedź:

Twierdzenie Brouwera Dla $k \neq l$ nie istnieje ciągła bijekcja kostki I^k na I^l.

Twierdzenie to Brouwer wywiódł z następującego:

Lemat Brouwera Niech ciągła funkcja $f : I^n \to I^n$ przemieszcza każdy punkt $x \in I^n$ na taki, który jest odległy od x o mniej, niż $1/2$. Wówczas punkt $(1/2, ..., 1/2)$ leży we wnętrzu obrazu tej funkcji.

Te wyniki Brouwera z 1910r. poprzedzały nieco jego najbardziej znane osiągnięcie, opublikowane w 1912r.:

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym Każda funkcja ciągła $f : I^n \to I^n$ ma pewien punkt stały (tzn. taki punkt $x \in I^n$, że $f(x) = x$.)

To zaś twierdzenie wiąże się z dwoma innymi, wcześniej już znanymi (o czym Brouwer nie wiedział):

Twierdzenie o wartości pośredniej dla przekształceń kostki (Poincaré 1883-86, C. Miranda 1940). Niech $J = [-1, 1]$ i niech funkcja ciągła $f : [-1, 1]^2 \to [-1, 1]^2$ ma tę własność, że

$$f(\{-1\} \times J) \subset (-\infty, 0) \times J\,, \quad f(\{1\} \times J \subset (0, \infty) \times J\,,$$
$$f(J \times \{-1\} \subset J \times (-\infty, 0)\,, \quad f(J \times \{1\} \subset J \times (0, \infty)\,.$$

Wówczas $(0, 0) \in f(I^2)$.

Twierdzenie to jest prawdziwe przy J^2 zastąpionym przez J^n, gdzie $n \geq 1$; wybrałem $n = 2$ dla ułatwienie sformułowania. Gdy $n = 1$ oznacza ono, że funkcja ciągła, przyjmująca w lewym krańcu przedziału wartość ujemną, a w prawym dodatnią, przyjmuje w tym przedziale wartość 0. Powyższy przypadek $n = 2$ orzeka, że jeśli $f : J^2 \to \mathbb{R}^2$ przeprowadza lewy bok kwadratu w „lewą część płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ " (tzn. w $\{(x, y) : x < 0\}$, prawy bok w prawą część płaszczyzny, oraz podobnie dolny bok w dolną część płaszczyzny, a górny w górną, to równanie $f(x, y) = (0, 0)$ ma rozwiązanie.

Jak widać, Miranda nie znał twierdzenia Poincaréégo 50 lat po jego udowodnieniu; pozostawało ono na uboczu innych osiągnięć tego wybitnego i bardzo płodnego matematyka i nic dziwnego, że nie znał go i Brouwer ok 30 lat wcześniej. Gdyby je znał, mógłby był z niego bez trudu wyprowadzić zarówno swój lemat, jak i twierdzenie o punkcie stałym; podobnie jak mógłby je uzyskać z twierdzenia udowodnionego przez Piersa Bohla w 1904, które również pozostawało mało znane.

Dopiero jednak twierdzenie Brouwera przykuło uwagę matematyków. Przed jego publikacją, w 1910r., inny jego dowód dał J. Hadamard, i już wtedy nazywał je „twierdzeniem Brouwera". Zarówno oryginalny dowód Bruwera (a potem dano szereg innych, w tym znany dowód elementarny przez Knastera, Kuratowskiego i Mazurkiewicza), jak i konsekwencje twierdzenia miały wielki wpływ na rozwój topologii w 20 wieku. O dowodzie wspomnę później, a teraz omówię jedną z konsekwencji.

Zagadnienie określenia wymiaru

Istnienie funkcji typu Peany postawiło na prządku dziennym pytanie: jak należy definiować wymiar topologiczny przestrzeni X, by był on równy n gdy $X = I^n$? Zacytuję późniejszy fragment ksążki Hurewicza i Wallmana o teorii wymiaru:

"Of all the theorems of analysis situs, the most important is that which we express by saying that space has 3 dimensions. It is this proposition that we are about to consider, and we shall put the question in these terms: when we say that the space has 3 dimesnions, what do we mean?"

Późniejszy rozwój topologii doprowadził do powstania kilku pojęć wymiaru, dających jednak ten sam wynik dla najważniejszych przestrzeni; będę więc je wspólnie oznaczał przez $\dim$. Powiem więc kilka słów tylko o jednym z nich. Równość $\dim(I^n) = n$ sprowadza się do następującego stwierdzenia:

Twierdzenie o wymiarze kostki I^n. a) Dla każdej liczby $\epsilon > 0$ można kostkę I^n pokryć skończenie wieloma zbiorami domkniętymi o średnicy $< \epsilon$ w taki sposób, by każdy punkt kostki należał do $n+1$ lub mniej z tych zbiorów.
b) Przy $n+1$ zastąpionym przez n, zdanie powyższe nie jest prawdziwe

Definicja. Wymiarem Lebesgue'a $\dim(X)$ zwartej przestrzeni metrycznej X nazywana jest najmniejsza liczba n, dla której zdanie z a) pozostanie prawdziwe przy I^n zastąpionym przez X.

Henri Lebesgue used closed "bricks" to study covering dimension in 1921.[3]

Twierdzenie o indukcyjnym charakterze wymiaru Zwarta przestrzeń metryczna X jest wymiaru $\leq n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej punkt ma dowolnie małe otoczenie, którego brzeg jest wymiaru $\leq n-1$.

Oba te twierdzenia znamy dzięki pracom Brouwera i Lebesgue'a z lat 1911, 1913 i wczesnych lat dwudziestych ub. w. Dowody obu z nich opierają się na twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym. Dowód zaś tego twierdzenia Brouwer uzyskał dzięki wprowadzeniu *stopnia przekształcenia sfery* i zbadaniu jego własności. Jedna z nich jest następująca (przyjmuję dla uproszczenia $n = 2$):

Jeśli stopień przekształcenia $f : S^2 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ jest różny od 0, to dla każdego przedłużenia $\overline{f} : B^3 \to \mathbb{R}^3$ tego przekształcenia, równanie $\overline{f}(x) = (0,0,0)$ ma rozwiązanie.

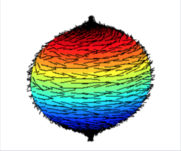
(Tu, B^3 to kula $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, a S^2 to sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.)

Jak więc widać, wyniki związane z twierdzeniem o punkcie stałym umożliwiają stwierdzenie, że pewne równania mają rozwiązanie. Jest to ważny obszar potencjalnych zastosowań tego twierdzenia i jego uogólnień. M. in., Juliusz Schauder, znakomity przedstawiciel przedwojennej lwowskiej szkoły matematycznej, dał uogólnienie zamierzone na zastosowania w teorii równań różniczkowych.

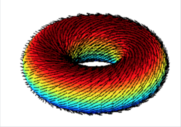
Inne twierdzenia, których dowód oparty jest o własności stopnia odwzorowania:

Twierdzenie Poincarégo-Brouwera o zaczesywaniu.
Parzysto-wymiarowej sfery S^{2n} nie da się zaczesać w sposób ciągły (zaś sferę S^{2n+1} da się tak zaczesać).

Ściślejsze sformułowanie: na sferze S^k istnieje niezerowe pole wektorów stycznych wtedy i tylko wtedy, gdy k jest liczbą nieparzystą.



A failed attempt to comb a hairy 3-ball (2-sphere), leaving a tuft at each pole



A hairy doughnut (2-torus), on the other hand, is quite easily combable.

Twierdzenie Borsuka–Ulama o antypodach (Borsuk 1933). Niech funkcja $f : S^k \to \mathbb{R}^k$ będzie ciągła. Wówczas istnieje taki punkt $x \in S^k$, że $f(x) = f(-x)$.

Np. na powierzchni (kulistej) Ziemi istnieją w każdej chwili dwa punkty, położone przeciwlegle względem jej środka, w których zarówno pomiar temperatury powietrza, jak i pomiar ciśnienia atmosferycznego da wspólny wynik.

Twierdzenie Borsuka-Ulama ma szczególnie dużo zastosowań, w tym kombinatorycznych. Omawia je książka
J. Matoušek, "Using the Borsuk-Ulam Theorem".

Powrócę teraz do „twierdzenia Cantora o przecięciu" i jego konsekwencjach

Konstrukcje typu Cantora

Cantor podał następujące zastosowanie swego twierdzenia. Niech $C_0 = I$. Przedział ten dzielimy na 3 równe części, z których wyjmujemy środkową. Pozostaje zbiór C_1, który jest sumą (dwóch) rozłącznych przedziałów domkniętych. Z każdym z nich postępujemy w opisany wyżej sposób; otrzymamy zbiór C_2, znów będący sumą (czterech) rozłącznych przedziałów domkniętych. Iterujemy to postępowanie, otrzymując nieskończony ciąg $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset ...$ zbiorów domkniętych; szukany zbiór Cantora to $C = \bigcap_i C_i$.

.

(Ilustracja z Wikipedii)

Cantor tylko wspomniał o tej konstrukcji, której celem było uzyskanie zwartego zbioru 0-wymiarowego bez punktów izolowanych (tzn. takich, w pewnym otoczeniu których nie ma innych punktów zbioru). Ma ona jednak niezliczone modyfikacje, prowadząc m.in. do konstrukcji tzw. zbiorów fraktalnych. M.in. wykorzystując ją, Zygmunt Janiszewski w swej pracy doktorskiej z 1912r, podał konstrukcję płaskiego zbioru spójnego, nie zawierającego łuku. Tu opiszę tylko trzy bardzo znane przykłady zbiorów płaskich, uzyskanych na sposób cantorowski.

"Jeziora Wady"

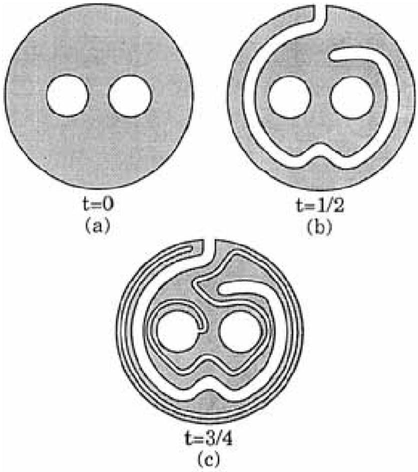
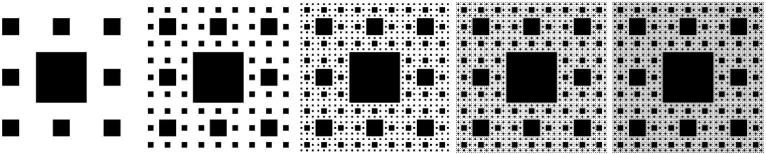
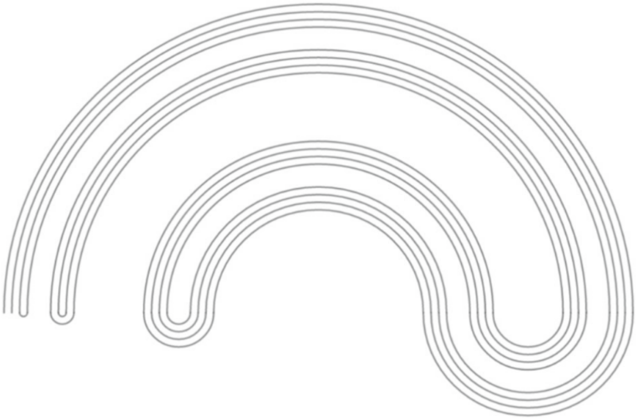


FIGURE 1. Lakes of Wada constuction.

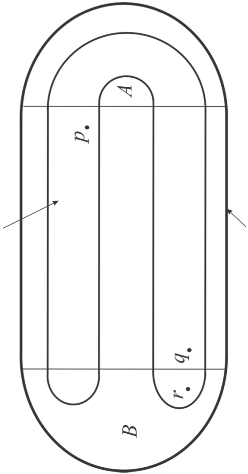
Dywan Sierpińskiego.



(Ilistracja z Wikipedii)



The Knaster bucket handle


A
p
q
r
B

Zbiory podobnego typu pojawiają się bardzo często w badaniach układów dynamicznych.

Rysunki i wyjaśnienia można znaleźć n.p. w poniższych pracach:

Coudene, Yves, Pictures of hyperbolic dynamical systems. Notices Amer. Math. Soc. 53 (2006), no. 1, 8–13.
Kennedy, Judy, How indecomposable continua arise in dynamical systems. Ann. New York Acad. Sci., 704, New York Acad. Sci., New York, 1993.

Przytoczę też informację zauważoną w Wikipedii przy okazji szukania ilustracji do tego wykładu:

"Mobile phone and Wi-Fi fractal antennas have been produced in the form of few iterations of the Sierpiński carpet. Due to their self-similarity and scale invariance, they easily accommodate multiple frequencies. They are also easy to fabricate and smaller than conventional antennas of similar performance, thus being optimal for pocket-sized mobile phones."

Przypomnę jeszcze dwie konstrukcje przestrzenne:
„Naszyjnik Antoine'a":

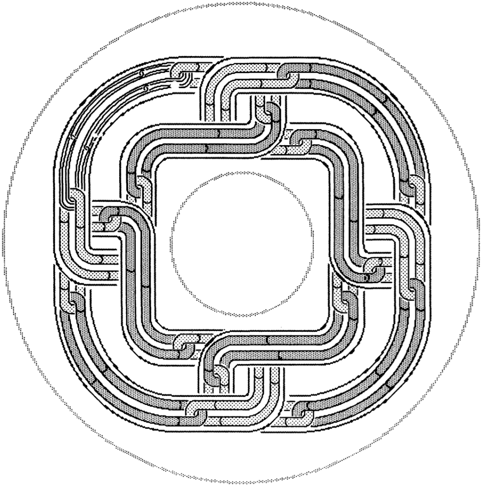
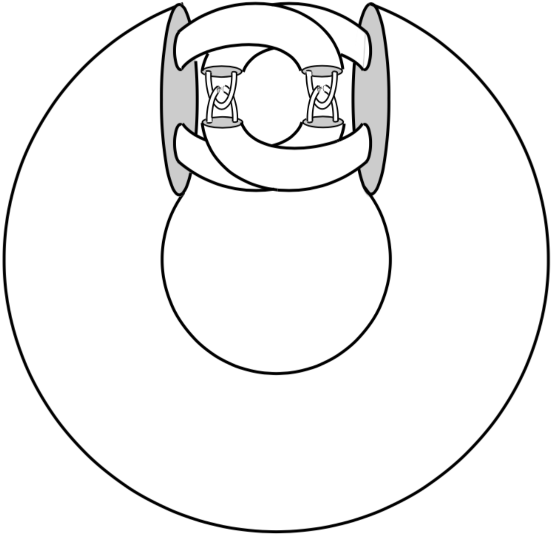


Figure 7. First four stages in the construction of Antoine's Necklace.

Ilustracja z pracy B. Brechner, J. Mayer z College Math. J. 19 (1988)

Sfera rogata Alexandera



Ilustracja z WolframMathWorld

Ostatnia ilustracja niejawnie nawiązuje do wyników z 19w., dotyczących topologii płaszczyzny.

Topologia płaszczyzny: twierdzenia Jordana i Schoenfliesa, indeks krzywej względem punktu

Położenie przez Cauchy'ego podstaw pod analizę zespoloną (lata dwudzieste 19w.) i wykorzystywanie przez niego i innych matematyków całek krzywoliniowych stworzyło potrzebę uściślenia pojęcia krzywej oraz wyjaśnienia własności krzywych na płaszczyźnie. Na plan pierwszy wysunęły się dwa pytania
* Czy krzywa zwykła zamknięta na płaszczyźnie rozcina ją na dwa obszary?
* Czy każda taka krzywa jest tak samo położona w $\mathbb{R}^2$, jak okrąg $x^2 + y^2 = 1$, tzn. czy istnieje homeomorfizm płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, przeprowadzający tę krzywą na okrąg?
Pozornie, pytania te są bardzo proste. Poniższe dwa rysunki tuszem F. Ross i W.T. Ross z Journal of Mathematics and the Arts nawiązują do tego, że tak nie jest.

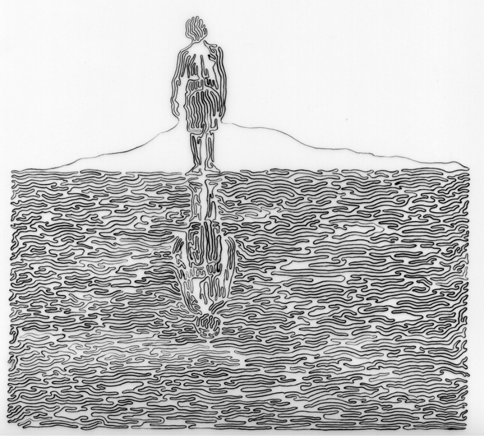


Figure 2. *A thread in the labyrinth*, 6" x 6", 2011, Micron ink on Denril paper.

(Ilustracja z pracy F. Ross i W.T. Ross, J. Mathematics and the Arts)

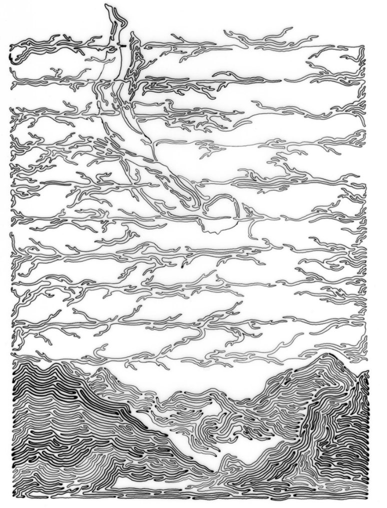
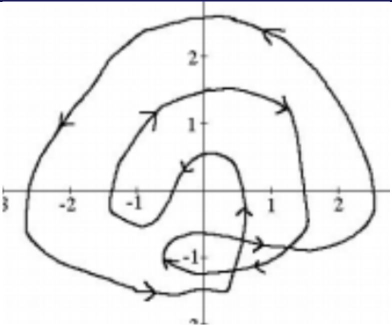


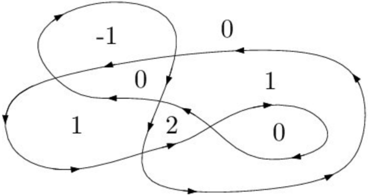
Figure 1. *When we could be diving for pearls*, 9 3/4" x 6", 2011, Micron ink on Denril paper.

(Ilustracja z pracy F. Ross i W.T. Ross, J. Mathematics and the Arts)

Pozytywnej odpowiedzi na pierwsze pytanie udzielił Camille Jordan w 1887r. Dowód jego był później kwestionowany, lecz być może bezzasadnie. W każdym razie uzupełnione lub odmienne dowody były potem podawane przez wielu matematyków, w tym bardzo wybitnych. Dłużej czekać trzeba było na odpowiedź na drugie pytanie. Udzielił jej Arthur M. Schoenflies w 1906r, i również była poztywna. Warto wspomnieć, że w wymiarze 2 byłaby ona negatywna: rogata sfera Aleksandera nie jest w $\mathbb{R}^3$ położona tak, jak sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Wynika to z tego, że istnieje okrąg „zaczepiony" ze sferą rogatą, zaś nie istnieje taki, który zaczepiony byłby ze „zwykłą" sferą. Ale by ująć ściśle, co to „zaczepienie" oznacza, należało zdefiniować grupę podstawową.

Indeks płaskiej krzywej zamkniętej względem punktu
Gdy $f : I \to \mathbb{R}^2$ jest ścieżką zamkniętą, tzn. jest funkcją ciągłą i $f(0) = f(1)$, to dla każdego punktu $z \in \mathbb{R}^2$, nie leżącego na obrazie tej ścieżki, określić można, ile razy jest on przez tę ścieżkę okrążony. Tę liczbę okrążeń nazywamy *indeksem ścieżki f względem punktu z* (czy punktu z względem ścieżki f, jak kto woli); oznaczę ją $\mathrm{ind}_z(f)$

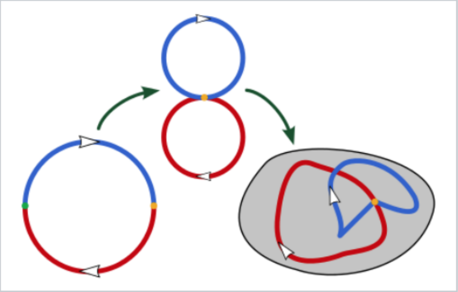




(Ilustracje dostępne w internecie.)

Twierdzenie (o roli indeksu krzywej płaskiej). Niech $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ będą dwiema ścieżkami zamkniętymi, zaś z punktem nie leżącym na obrazie żadnej z nich. Jeśli $\mathrm{ind}_z(f) = \mathrm{ind}_z(g)$, to ścieżkę f można poza punktem z w sposób ciągły zdeformować do ścieżki g.
(Określamy to mówiąc: ścieżki te są ze sobą homotopijne w dopełnieniu punktu z.)
Twierdzenie to, znane w 19w. (choć nie wiem, przez kogo udowodnione) odgrywa wielką rolę w związku z tzw. twierdzeniem o residuach, znacznie ułatwiającym całkowanie funkcji zespolonych wzdłuż ścieżek zamkniętych. Jednak jego znaczenie wykracza poza wymienione zastosowanie. W przypadku $k = 1$, to właśnie indeks $\mathrm{ind}_0(f)$ jest stopniem odwzorowanie $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, którego potrzebował Brouwer, by dowieść swego lematu. Narzędzia, umożliwiające takie przeniesienie pojęcia indeksu (=stopnia) przekształcenia sfery S^n w $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, stworzyły badania Poincarégo, i o nich chcę na zakończenie powiedzieć.

Powyższe twierdzenie i twierdzenie o residuach uwypuklają rolę homotopijności ścieżek zamkniętych. Poincaré pokazał, gdy każde dwie homotopijne takie ścieżki uznać za równoważne, to w zbiorze otrzymanych klas ścieżek wprowadzić można strukturę grupy, czyli można te klasy sensownie mnożyć. (Chodzi o ścieżki zamknięte, *zaczepione* w ustalonym punkcie.)

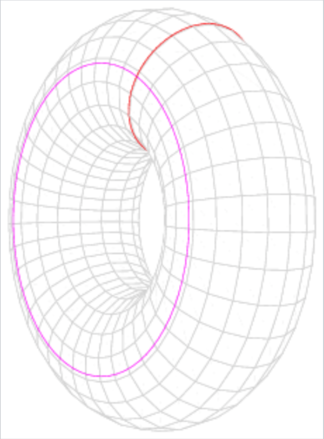


Addition of loops

Z takim mnożeniem, zbiór opisanych klas tworzył grupę. Ważne jest to, że prócz podzbiorów płaszczyzny Poincaré rozważał przestrzenie bardziej ogólne. W ten sposób każdej takiej przestrzeni (z wyróżnionym punktem „bazowym”) przyporządkować mógł jej *grupę podstawową*. Wspomnieć warto, że abstrakcyjne pojęcie grupy niedługo wcześniej dopiero się skrystalizowało (Cayley 1854 i 1878) i odnoszono je przede wszystkim do grup przekształceń (najczęściej podgrup grupy permutacji). Przestrzeń, której grupa podstawowa była trywialna, nazywał *jednospójną*. (Inna dygresja: Riemann już w 1851r. używał pojęć „jednospójność” i „n–spójność” w odniesieniu do powierzchni.)

Jakie przestrzenie Poincaré rozważał? Używając obecnych pojęć, były to otwarte podzbiory rozmaitości gładkich, zanurzonych w pewnej przestrzeni $\mathbb{R}^N$. Tzn. obiektem jego zainteresowania były zbiory rozwiązań układu równań $F_i(x_1, ..., x_N) = 0$ ($i = 1, ..., k$), gdzie $F_1, ..., F_k$ są funkcjami klasy C^1 swych zmiennych $x_1, ..., x_N$, lub też otwarte podzbiory takich zbiorów, zadane dodatkowymi warunkami $\phi_j(x_1, ..., x_N) > 0$, gdzie $\phi_1, ..., \phi_l$ jest układem takich funkcji. Rozważał też *podrozmaitości* takich rozmaitości, a też rozmaitości z brzegiem (otrzymane gdy niektore równania $F_i(x) = 0$ zastąpimy nierównościami $F_i(x) \geq 0$).

Prócz grupy podstawowej, Poincaré przyporządkowywał rozmaitościom inne niezmienniki topologiczne, które nazywał *liczbami Bettiego*, na cześć Enrico Bettiego, matematyka włoskiego. Definicje tych liczb są zbyt techniczne, bym je tu przytaczał; lecz jeden z wyników Poincaré'go może dać pewne wyobrażenie o nich. Mianowicie, gdy w $\mathbb{R}^3$ rozmaitość V jest ograniczona powierzchniami $S_1, ..., S_n$, to Poincaré dowodzi, że $b_2(V) = n - 1$, $b_1(V) = (\sum_i b_1(S_i))/2$. Jako przykłady szczególne rozważa przypadki, gdy rozmaitość V jest ograniczona torusem, lub dwoma torusami, lub sferą czy dwiema sferami. Zaś dla powierzchni S liczby Bettiego są wyznaczone wg zasady, że $b_m(S)$ jest maksymalną liczbą „liniowo niezależnych m-podrozmaitości" tej powierzchni. (Ta zsada, przy odpowiednim jej rozumieniu, obowiązuje dla wszystkich rozmaitości.)
Poincaré ustanowił swą dualność (1882 i 1895): dla zwartej n-rozmaitosci zamkniętej, $P_i = P_{n-i}$ dla $i = 0, ..., n$; stwierdził przy tym, że „równość ta jest znana i była wykorzystywana".



For a torus, the first Betti number is $b_1 = 2$, which can be intuitively thought of as the number of circular "holes"

Poincarégo interesowały też przestrzenie otrzymane z wypukłych wielościanów przez dokonanie naturalnych zlepień wzdłuż ich brzegu. By i takim przestrzeniom przyporządkowywać niezmienniki topologiczne, Poincaré rozważał ich podziały, później nazwane triangulacjami (Weyl 1913). Określenie przez Brouwera stopnia przekształcenia między rozmaitościami zamkniętymi tego samego wymiaru można widzieć jako kontynuację badań Poincarégo: Brouwer zakładał, że rozmaitości te mają swe triangulacje, przy czym spełniające pewien dodatkowy warunek. (Triangulacje takie który potem nazwano PL-triangulacjami.). Przez dokonanie należytego podziału triangulacji i aproksymacji badanego przekształcenia, Brouwer definiował jego stopień.

Idee te nasuwały wiele ważnych pytań (czy hipotez); niektóre z nich zostały przez Poincarégo czy Brouwera wprost zadane, zaś inne formułowano później. Wspomnę o trzech i o odpowiedziach, które na nie udzielono.

* Czy każda rozmaitość ma pewną triangulację? Czy ma PL-triangulację?

Dla rozmaitości klasy C^1 (a takie rozpatrywał Poincaré i o nie pytał w 1899r.) PL-triangulowalność rozmaitości została dowiedziona w 1934r. przez Cairnsa, a dla rozmaitości topologicznych wymiaru 3 – przez Moise'a w 1952r.
Podano przykłady triangulacji przestrzeni $\mathbb{R}^n$, które nie są PL, lecz mają podpodział będący PL.
Około 1970r. Kirby i Siebenmann podali warunek konieczny i dostateczny na to, by dana rozmaitość topologiczna wymiaru $n \geq 4$ dopuszczała PL-triangulację. C. Manolescu dowiódł w 2015r., że w każdym wymiarze $n \geq 5$ isnieje rozmairość zwarta, nie mająca triangulacji.

* Poincaré wyrażał grupę podstawową rozmaitości przy pomocy jej generatorów i relacji między nimi. Powstało pytanie (Tietze 1906), czy mając takie „prezentacje" dwóch rozmaitości można algorytmicznie ustalić, czy ich grupy podstawowe „są takie same" (tzn. są izomorficzne jako grupy). W publikacji z 1958r. P.S. Novikov dowiódł, że taki algorytm nie istnieje.

* Hipoteza Poincarégo: 3-rozmaitość zamknięta, mająca takie liczby Bettiego jak sfera, jest z nią homeomorficzna.

Takie przypuszczenie wysunął Poincaré i pewien czas później stwierdził, że jest on błędne. Podany przez niego kontrprzykład nie był jednak jednospójny. Hipoteza została więc uzupełniona o założenie jednospójności rozmaitości (1904); potem rozszerzono ją na rozmaitości dowolnego wymiaru $n \geq 3$. Stała się ona przedmiotem wielu bardzo ważnych prac. W 1963r. Stephen Smale dowiódł tej hipotezy dla $n \geq 5$, zaś Michael Freedman dowiódł jej w 1982r. dla $n = 4$.
Richard Hamilton w 1982r. zainicjował swój program ataku na pozostały przypadek $n = 3$, a w 2003r. Grisha Perelman doprowadza do jego realizacji - niemal równo 100 lat po sformułowaniu hipotezy.

Ostatnie przytoczone wyniki dotyczyły „porządnych" przestrzeni, takich jak rozmaitości czy wielościany. Czy przestrzenie mniej regularne, jak naszyjnik Antoine'a czy „rogata sfera" nie odgrywają już dawnej roli? Nie tak się tak twierdzić. M. Freedman w swym dowodzie hipotezy Poincarégo dla $n = 4$ wykorzystywał „rączki Cassona", prowadzące do zbiorów bardzo podobnych do rogatej sfery.

.

Nie ulega też zapomnieniu ustanowiony przez Cantora związek topologii z teorią zbiorów, ukazuje się o tym bardzo wiele prac. Z drugiej strony należy mieć na uwadze, że zasadnicze narzędzia w pracach Smale'a, a potem też Hamiltona i Perelmana, pochodziły z topologii różniczkowej, bliskiej Analizie Matematycznej.

Tak więc przedstawiony wyrywkowy przegląd wybranych wyników nie prowadzi do określenia zakresu topologii, a raczej skłania do poprzestania na stwierdzeniu Poincarégo, że jest ona sztuką wyciągania poprawnych wniosków z niepoprawnych rysunków.