Lecture Codes - 高仿张巍的代码dddd

课程代码的高仿版本。

3.? ？（）记不清楚了：高仿了张巍课程中的rnn代码。`sdm_rnn`

3.24：高仿了张巍课程中regressor的代码，实现了一个简单的线性回归模型。`regressor`

4.9：高仿了张巍课程中，path-planning和lqr的代码。`pathplaining` and `lqr`

数学公式不能显示？提供pdf版本

RNN

Regressor

Path Planning

Optimal Control Problem

Notation

abbr.		备注
$l(x_k, u_k)$	running cost function	步开销。
$V_j(z)$	minimized cost function	被最小化之后的代价函数值。
$g(x_N)$	ternimal cost function	终端代价函数，即结束的时候，对应的开销。
$J_N(x_0, u)$	N-horizon cost	目标函数。我们需要将它进行最小化。
x		
u		

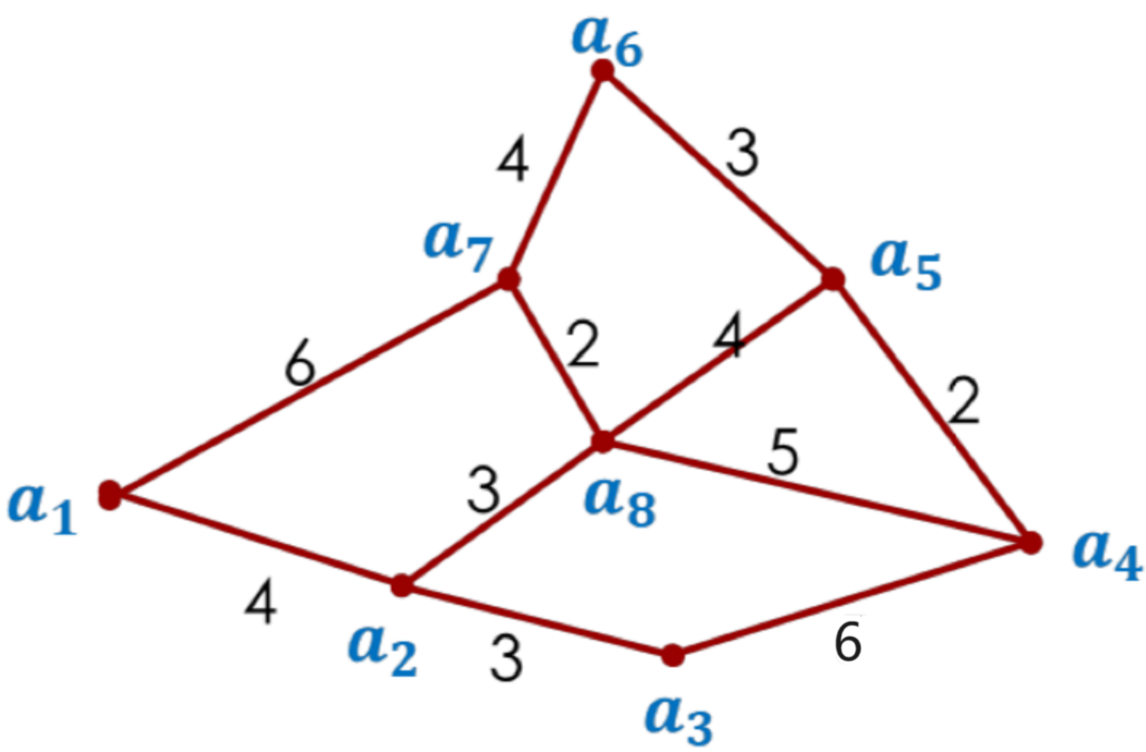
在张巍的课堂中，我们学习了：

$$J_N(x_0, u) = g(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} l(x_k, u_k)$$

我们要做的是，最小化我们的**目标函数。**

在张巍老师的课堂上，其提出了这样几个问题：

现在以Path-planning问题，作为一个例子，来引入对这个问题的解答。（注意，原来课件中，a_3到a_4的距离是5，在这里为了稍后方便讲解，我将其改为了6）



现在，我希望，从a_1走到a_4的最短路径。

最开始的状态，我们只知道相邻两点间的距离，而不相邻两点间的最短距离我们暂时不知道。现在我们假设Running cost用来表示：$l(z,u)$代表着z到u点的最短距离。如果没有遍历到，默认设置为∞。

最终状态，我们假设，到了我们的目标点的时候，直接代价设为0，否则成本为∞。即：

$$g(z)=\begin{cases}0,\ if\ z=a_4\\ \infty,\ else\end{cases}$$

因而，我们的目的变成了，求取$J_N(x_0,u)$的最小值的时候，对应的各参数值。

Dynamic Programming (动态规划)

事实上，如果将我们的函数进行进行“动态步骤移动”，具体到这道题目，假如每次我们都更新一轮到a_4点每个点最小距离（每次只走一步，这里的一步是指基于已经知道到a_4距离最近的点，更新其相邻点到a_4的距离。例如，第一步更新了a_3 a_5 a_8到a_4的距离，第二步更新a_2到a_3，a_6到a_5，a_2 a_7到a_8的距离，从而可以更新a_2 a_6 a_7到a_4的最短距离，将这样的距离保存下来，同时更新其对应的“下一步”。），这样的思想叫做动态规划。

例如：

表3-1 动态规划迭代示例

迭代次数	$a_1/next$	$a_2/next$	$a_3/next$	$a_4/next$	...	$a_8/next$
0	$\infty/?$	$\infty/?$	$\infty/?$	$0/a_4$		$\infty/?$
1	$\infty/?$	$\infty/?$	$6/a_4$	$0/a_4$		$5/a_4$
2	$\infty/?$	$8/a_8$	$6/a_4$	$0/a_4$		$5/a_4$
3	$12/a_2$	$8/a_8$	$6/a_4$	$0/a_4$		$5/a_4$

> `$a_i/next$表示a_i到a_4的最短距离，以及它到a_4最短距离时候下一步的点。

现在，让我们接着使用张巍老师的思路，以**最优**的思路来解决这个问题。

$$J_N(x_0, u) = g(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} l(x_k, u_k)$$
$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$
$$x_k \in X$$

定义：$V_0(z) = g(z)$（瞎写一个就行，比如我们这里可以定义$V_0(z) = [\infty, \infty, \infty, 0, \infty, \infty, \infty, \infty]$）

然后，逐次更新：

$$V_{j+1} = min\{l(z, u) + V_j(f(z, u))\}$$
$$\mu_{j+1} = argmin\{l(z, u) + V_j(f(z, u))\}$$

其中，$l(z, u)$将会在这里被我们表示为地图上的相邻两点的直接距离，作为最直接的代价函数。

Coding

Notation

变量名	变量含义	详细标注
n	地图大小	这里的地图$n \times n = 8 \times 8$
J	代价函数，大小为n*1	`J[j]` 这里代表的是某个点通过a_j到达目标的代价

如何实现呢？

我们使用万能的双重for循环，遍历每两个点之间的距离，逐次更新即可。

首先，我们定义一个矩阵，用来表示**相邻两点间的距离**：

```
costMatrix = np.array([
    [0,      4,      np.inf, np.inf, np.inf, np.inf, 6,      np.inf  ],
    [4,      0,      3,      np.inf, np.inf, np.inf, np.inf, 3       ],
    [np.inf,3,       0,      6,      np.inf, np.inf, np.inf, np.inf  ],
    [np.inf,np.inf,  6,      0,      2,      np.inf, np.inf, 5       ],
    [np.inf,np.inf,  np.inf, 2,      0,      3,      np.inf, 4       ],
    [np.inf,np.inf,  np.inf, np.inf, 3,      0,      4,      np.inf  ],
    [6,      np.inf, np.inf, np.inf, np.inf, 4,      0,      2       ],
    [np.inf,3,       np.inf, 5,      4,      np.inf, 2,      0       ]
])
```

其中，`costMatrix[i, j]`将表示a_{i+1}到a_{j+1}的距离。例如，$costMatrix[0, 1]$表示的是a_1到a_2的最短距离。

这将被我们用来表示我们的running cost function, $l(x, u) =$`costMatrix[x, u]`。

迭代更新代价函数的设计：

```
给定：上一步的各个点到目标点的代价函数Vfunc，地图costMatrix，终点下标xf
初始化：
n - 地图大小
mustar - 每个点到xf最近的下一步的点的下标
for i in n:
    初始化：J - 当前代价函数，初始化为一个n*1，值为无穷大的代价函数
    if i == xf(这个点是终点):
        Vnex[i] = Vfunc[i]
        mustar[i] = i
        continue
    endif

    for j in n:
        if i == j（起始点和目标点重合）:
            continue 跳转到下一步
        J[j] = costMatrix[i,j]+Vfun[j]
    endfor
    Vnex[i] = J的最小值
    mustar[i] = J最小值的下标
return Vnex, mustar
```

实现：

```python
def valueIter(Vfunc, costMatrix, xf):
    '''
    迭代计算代价函数。
    :param Vfunc: 上一步的cost
    :param costMatrix: 地图
    :param xf: 终点下标。例如张巍老师的课程中，终点是4号点，在计算机里xf=3，
    :return: 这一步的cost（各点到目标点的距离集合），和到a_xf最近的点的集合。
    '''
    n = costMatrix.shape[0]
    Vnex = np.inf*np.ones(n) # max values
    mustar = -1*np.ones(n) # target indexs
    # 遍历起点a_i
    for i in range(n):
        J = np.inf * np.ones(n)  # 点i经过8个点到目标点的新的距离
        # 如果起点就是目标点，那么代价就是上一次传进来的目标点的代价，下一步将会是它自己。
        if i == xf:
            Vnex[i] = Vfunc[i]
            mustar[i] = i
            continue
        # 否则，遍历目标点a_j
        for j in range(n):
            if i == j: # 起点和目标点相同，跳过，此时的J默认为最大值，这样可以避免选择最短路
径时选到自己，进入死循环。
                continue
            # a_i经过a_j到达目标点a_xf的代价为：a_j到a_xf的代价加上a_i到a_j的代价（距离）
            J[j] = Vfunc[j]+costMatrix[j,i]

        Vnex[i] = np.min(J)# a_i到a_xf最近的时候的cost。即i到xf的最短距离。
        mustar[i] = np.argmin(J) # a_i到a_xf最近的时候，下一步的下标。
    return Vnex, mustar
```

这样，我们通过迭代，就可以知道怎么走了。例如，经过第一轮迭代后：

```
Vnex=   [inf,inf, 6, 0, 2, inf, inf, 5]
mustar= [-1, -1,  3, 3, 3, -1,  -1,  3]
```

`mustar[i]`代表从第i点以最短的姿态走到目标点的下一步的点的下标。例如`mustar[2]=3`表示的是`a[2]`以最短路径走到`a[3]`的下一步需要走`a[3]`。

假设我们迭代四次（这样相当于最多可以走四步），让我们来试试效果。

```
if __name__ == "__main__":
    N = 4 # Max steps
    n = 8 # size of the graph (cost matrix)
    xf = 3 # final place index, we want to go to a_4, so the index is 3.

    # step cost function
    # V[xi] represents the minimum distance from a_xi to a_xf
    # i.e. V[0] represents the minimum distance from a_0 to a_3
    V = np.inf * np.ones(n)
    V[xf] = 0 # a_xf to a_xf: distance is 0. else, are inf.
    path = []
    lastStep = 0
    steps = -1 * np.ones(n)
    x0 = -1*np.zeros(N)
    for i in range(N-1):
        V, steps = pl.valueIter(V, pl.costMatrix, xf)
    # start to go, from a_0.
    path.append(lastStep)
    for i in range(N-1):
        target = int(steps[lastStep])
        path.append(target)
        lastStep = target
    print(path)
```

result: `0, 1, 7, 3`

它实现的，就是如表3-1的过程。例如，经过几轮迭代后，代价函数和下一步的走向为：

第一轮循环已经展示过了。

第二轮循环：

```
Vnex=   [inf,8, 6, 0, 2, 5, 5, 7]
mustar= [-1, 7, 3, 3, 3, 4, 7, 3]
```

第三轮循环：

```
Vnex=   [12,8, 6, 0, 2, 5, 5, 7]
mustar= [1, 7, 3, 3, 3, 4, 7, 3] # 例如，mustar[0]表示a[0]到a[3]最近的话，下一个点是a[1].
```

我们找到了几个点之后，我们的起点是a_1（a[0]），然后下一步根据`mustar[0]=1`将会是a_2（a[1]），再下一步根据`mustar[1]=7`得知是a_8（a[7]），最后根据`mustar[7]=3`得知下一步是a_4（a[3]），到达终点。

LQR

Notation

abbr.	含义	备注
L		
Q	状态参数惩罚项系数	正定矩阵
R		正定矩阵
x		
u		
P_j	第j次的全状态参数惩罚项	正定矩阵
Q_f	最终状态参数的惩罚项系数	
V_j	某一步的cost	

Concepts

考虑离散状态空间矩阵（很多节课前，$A_{discrate} = A_{continue} - I$），假设我们设计的控制器有 $u_k = -Kx_k$

$$\begin{aligned} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k = (A - BK)x_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{aligned} \tag{4-1}$$

我们对过程进行"惩罚"，设定惩罚项。

$$l(x,u) = x^T Q x + u^T R u \tag{4-2}$$

Q，R需要是正定矩阵。这个式子告诉我们，只有x，u趋近于零的时候，l才能取到最小值。此外，惩罚项的大小也对对应的被惩罚项衰减速率造成影响。例如，如果$Q > R$，那么x的衰减会比u更快，因为若每次希望降低相同的l，那么需要降低更多的x才能使l相对降低。

我们定义，经过N步之后：

$$J_N(x_0, u) = x_N^T Q_f x_N + \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k] \tag{4-3}$$

我们需要完成的，便是最小化代价函数，求出此时的参数x，u。离散空间中，我将会使用z而不是x。所以接下来的推到中将出现的状态变量是z。我们假定我们每一步的cost function为：

$$V_j(z) = z^T P_j z \tag{4-4}$$

并定义迭代到下一步的cost为：

$$\begin{aligned} V_{j+1}(z) = min\{l(z,u) + V_j(f(z,u))\} \\ = min\{z^T Q z + u^T R u + (Az + Bu)^T P_j (Az + Bu)\} \\ = min\{u^T(R + B^T P_j B)u + 2z^T A^T P_j B u + z^T(Q + A^T P_j A)z\} \end{aligned} \tag{4-5}$$

如果$V_{j+1}(z)$对u的偏导数为0，那么将会取得它关于u的极小值（证明略）。

$$\frac{\partial h(u)}{\partial u} = 2u^T(R + B^T P_j B) + 2z^T A^T P_j B = 0 \\ u^T = -z^T A^T P_j B(R + B^T P_j B)^{-1} \tag{4-6}$$

由于R是对称矩阵（正定矩阵一定对称），$B^T P_j B$这个形式也是对称矩阵的标准形式，那么必然，$(R + B^T P_j B)$一定是对称矩阵，因此，$(R + B^T P_j B)^{-1} = (R + B^T P_j B)^{-T}$。同样，$P_j$也是对称矩阵。

$$u_{j+1} = -(R + B^T P_j B)^{-1} B^T P_j Az = -K_{j+1} z \tag{4-6*}$$

通过上式我们可以知道我们的控制器$u = -Kz$的反馈增益矩阵K应该如何设计了。这样设计的控制器可以保证每一步迭代都能使每一步的代价函数$V_j(z)$达到最小（根据(4-6)，这样设计的控制器可以让代价函数对输入的偏导数为0，从而达到它的极小值）。现在，让我们把$u = -Kz$代入（todo）：

$$V_{j+1}(z) = min\{h(u^*)\} \\ = (-K_j z)^T (R + B^T P_j B)(-K_j z) + 2z^T A^T P_j B(-K_j z) + z^T (Q + A^T P_j A)z \\ = z^T (Q + A^T P_j A - A^T P_j B(R + B^T P_j B)^{-1} B^T P_j A)z \tag{4-7}$$

让我们对比（4-4）我们定义的代价函数，$V_{j+1}(z) = z^T P_{j+1} z$，我们震惊地发现，$P_j$和$P_{j+1}$之间存在迭代关系：

$$P_{j+1} = Q + A^T P_j A - A^T P_j B(R + B^T P_j B)^{-1} B^T P_j A \tag{4-8}$$

经过蛮长的迭代之后，我们可以得到最终的P_N。根据式(4-6*)，写出最终的输入和状态参数的表达关系式：

$$u = -(R + B^T P_N B)^{-1} B^T P_N Az = -K_N z \\ K_N = (R + B^T P_N B)^{-1} B^T P_N A \tag{4-9}$$

tips: (4-8)可以也被表示为：（不然代码太长了，物理意义））））

Coding

```
define N
define A, B, Q, R
initialize P0=0

for i in N:
    update Pi according to (4-8)
end
define KN according to (4-9)
return KN
```

根据这样的思路，在python中可以这样写：

```
def getKN(A, B, Q, R, N, nx, nu):
    '''
    计算KN反馈增益矩阵。
    :param A: 状态空间矩阵A
    :param B: 状态输入矩阵B
    :param Q: 状态空间权重矩阵Q
    :param R: 状态输入权重矩阵R
    :param N: 迭代次数
    :param nx: 状态空间维度
    :param nu: 输入空间维度
```

```
    :return: 反馈增益矩阵KN
    '''
    P = np.zeros((nx,nx,N))
    # K = np.zeros((nu,nx,N))
    for j in range(N-1):
        P[:, :, j + 1] = Q + A.T @ P[:, :, j] @ A - A.T @ P[:, :, j] @ B @ 
la.inv(R + B.T @ P[:, :, j] @ B) @ B.T @ P[:,:,j] @ A
    KN = la.inv(R + B.T @ P[:, :, N - 1] @ B) @ B.T @ P[:, :, N - 1] @ A
    return KN
```

或者，观察到P_{j+1}和P_j的关系，所以我们直接更新P：

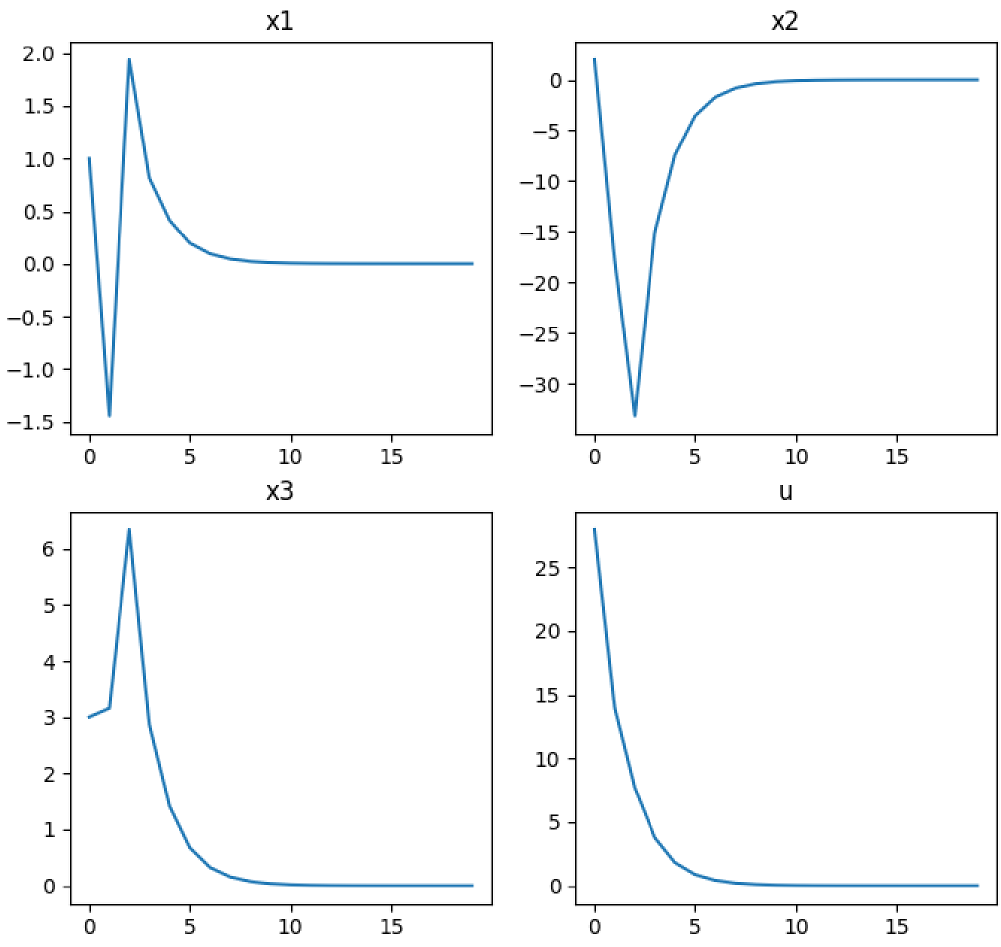
```
def getSlideKN(A, B, Q, R, N, nx, nu):
    P = np.zeros((nx,nx))
    K = np.zeros((nu,nx))
    for j in range(N):
        K = la.inv(R + B.T @ P @ B) @ B.T @ P @ A
        P = Q + A.T @ P @ A - A.T @ P @ B @ K
    KN = la.inv(R + B.T @ P @ B) @ B.T @ P @ A
    return KN
```

接下来，我们的主函数可以这样完成（示例）（`lqr`是自己创建的一个py文件）

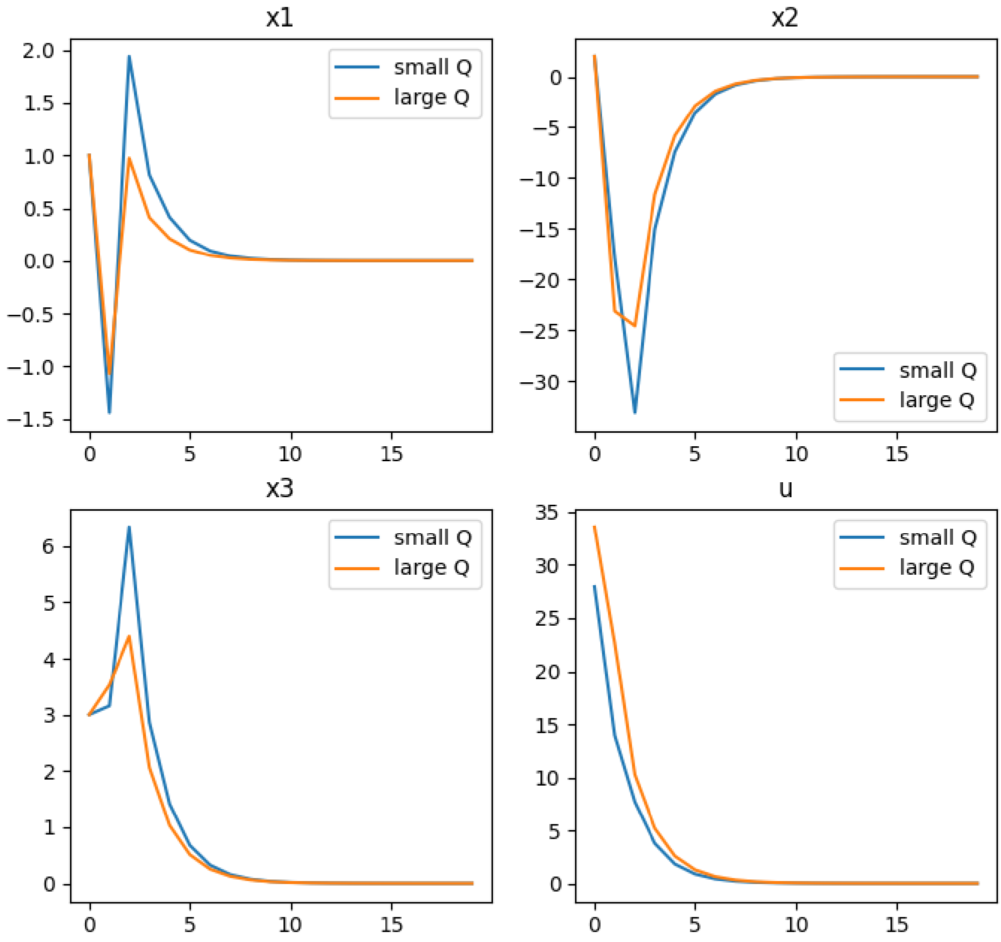
```
import numpy as np
import lqr
import scipy.linalg as la
import matplotlib.pyplot as plt

if __name__ == '__main__':
    #给定矩阵。
    A = np.mat('1.95,-0.025,-1.6;16,1.1,-3.2;0.425,0.1875,0.3')
    B = np.mat('0 1 0;1 1 1').T
    nx = 3
    nu = 2
    Q = np.eye(nx)
    R = np.eye(nu)

    Nr = 20 #迭代20步，看反馈矩阵的设计。
    K = lqr.getSlideKN(A, B, Q, R, Nr, nx, nu)
    print('K:', K)

    N = 30
    x = np.zeros((nx,N))
    x[:,0] = np.array([1,2,3])
    u = np.zeros((nu,N))
    u_norm = np.zeros(N)

    # 根据公式（4-1）计算x。
    for k in np.arange(0,N-1):
        u[:,k] = -K @ x[:,k] # u = -Kx
        x[:,k+1] = A @ x[:,k] + B @ u[:,k] # x = Ax+Bu
        u_norm[k] = la.norm(u[:,k]) # 单纯方便画图（）

    # 若低于python3.10版本，请将subplot参数更改为(2,2,i)。
```

```
    time = np.arange(N)
    plt.figure()
    plt.subplot(221)
    plt.plot(time,x1[0,:].T)
    plt.plot(time,x2[0,:].T)
    plt.title('x1')
    plt.subplot(222)
    plt.plot(time,x1[1,:].T)
    plt.title('x2')
    plt.subplot(223)
    plt.plot(time,x1[2,:].T)
    plt.title('x3')
    plt.subplot(224)
    plt.plot(time,u1_norm)
    plt.title('u')
    plt.show()
```

图像:



将Q改为3*Q，对比得:


x1
small Q
large Q
x2
small Q
large Q
x3
small Q
large Q
u
small Q
large Q