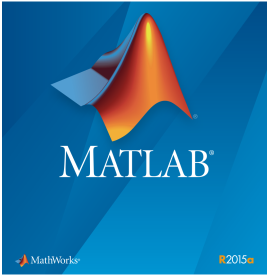
Dépannage

Patrice Courchesne

Aide **Partie 3** du devoir



Structure du dépannage

resout_equation _onde

On rappelle que la partie 2 consistait à bien programmer et analyser la fonction

```
[u,erreur]=resout_equation
_onde(c,Nt,Nx,theta,f,u0,u1tilde)
```

qui permettait de résoudre numériquement l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \forall t \in [0, T],\ u(0,t) = f(t) \text{ et } u(L,t) = 0 \\ \forall x \in [0, L],\ u(x,0) = u_0(x) \text{ et } u(x,\Delta t) = \tilde{u}_1(x) \end{cases}$$

pour un paramètre c, un nombre de noeuds de discrétisation en espace (Nx) et en temps (Nt) donnés.

resout_equation _onde

On rappelle que la partie 2 consistait à bien programmer et analyser la fonction

```
[u,erreur]=resout_equation
_onde(c,Nt,Nx,theta,f,u0,u1tilde)
```

qui permettait de résoudre numériquement l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \forall t \in [0,\, T],\;\; u(0,t) = f(t) \text{ et } u(L,t) = 0 \\ \forall x \in [0,L],\;\; u(x,0) = u_0(x) \text{ et } u(x,\Delta t) = \tilde{u}_1(x) \end{cases}$$

pour un paramètre c, un nombre de noeuds de discrétisation en espace (Nx) et en temps (Nt) donnés.

Sortie u de resout_equation _onde

On rappelle également que la sortie u est une matrice de dimension $Nx \times Nt$ de la forme :

$$u = \begin{bmatrix} u_0^0 & u_0^1 & \dots & u_0^n & \dots & u_0^{N_t-1} \\ u_1^0 & u_1^1 & \dots & u_1^n & \dots & u_1^{N_t-1} \\ u_2^0 & u_2^1 & \dots & u_2^n & \dots & u_2^{N_t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{Nx-2}^0 & u_{Nx-2}^1 & \dots & u_{Nx-2}^n & \dots & u_{Nx-2}^{N_t-1} \\ u_{Nx-1}^0 & u_{Nx-1}^1 & \dots & u_{Nx-1}^n & \dots & u_{Nx-1}^{N_t-1} \end{bmatrix}_{N_x \times N_t}$$

Sortie u de resout_equation _onde

On rappelle également que la sortie u est une matrice de dimension $Nx \times Nt$ de la forme :

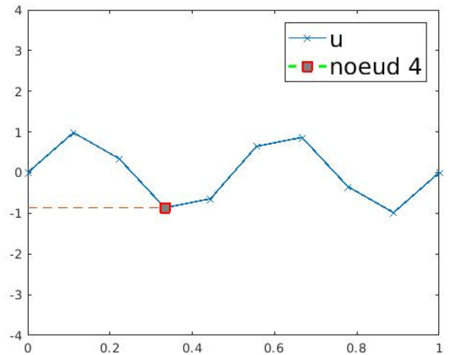
$$u = \begin{bmatrix} u_0^0 & u_0^1 & \dots & u_0^n & \dots & u_0^{N_t-1} \\ u_1^0 & u_1^1 & \dots & u_1^n & \dots & u_1^{N_t-1} \\ u_2^0 & u_2^1 & \dots & u_2^n & \dots & u_2^{N_t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{Nx-2}^0 & u_{Nx-2}^1 & \dots & u_{Nx-2}^n & \dots & u_{Nx-2}^{N_t-1} \\ u_{Nx-1}^0 & u_{Nx-1}^1 & \dots & u_{Nx-1}^n & \dots & u_{Nx-1}^{N_t-1} \end{bmatrix}_{N_x \times N_t}$$

- La n^{ieme} ligne représente l'approximation de l'évolution pendant le temps du n^{ieme} nœuds de calcul ($\text{u}(x_{n-1},\text{t})$).

Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

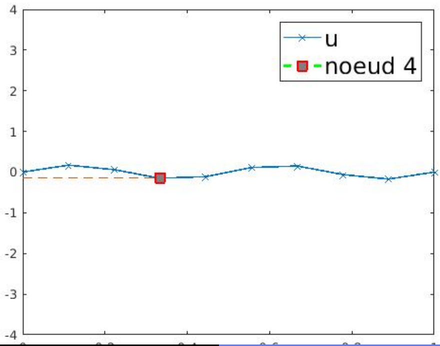
FIGURE – approximation en $t = 0$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

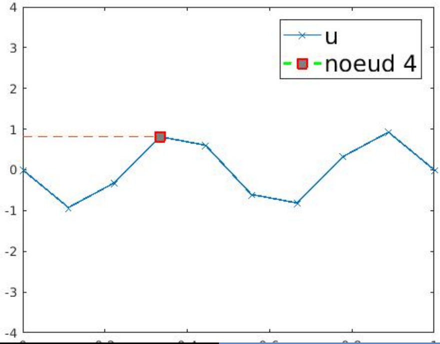
FIGURE – approximation en $t = \frac{1}{9}$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

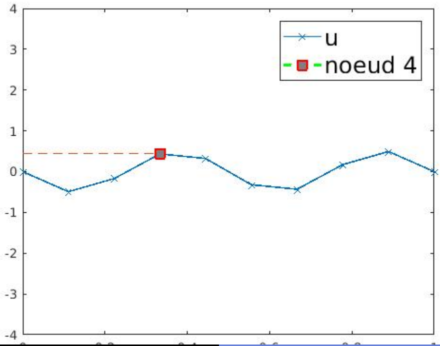
FIGURE – approximation en $t = \frac{2}{9}$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0,81 & 0,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

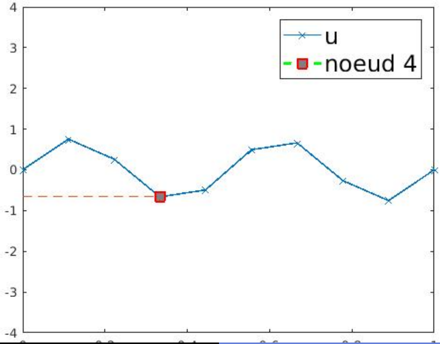
FIGURE – approximation en $t = \frac{3}{9}$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0,81 & 0,43 & -0,66 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

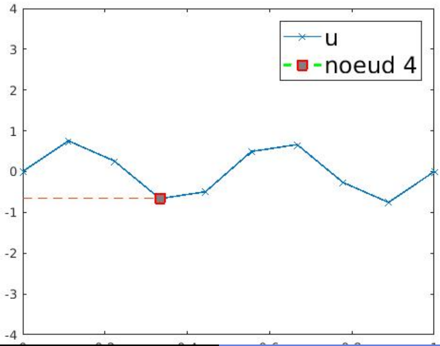
FIGURE – approximation en $t = \frac{4}{9}$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0,81 & 0,43 & -0,66 & 0-0,66 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

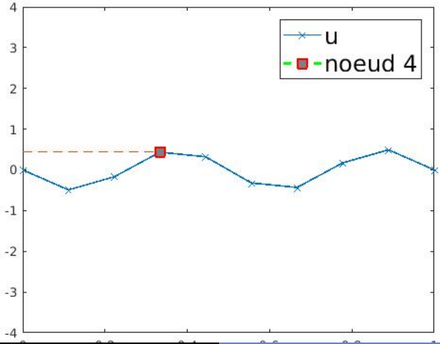
FIGURE – approximation en $t = \frac{5}{9}$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0,81 & 0,43 & -0,66 & -0,66 & 0,43 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

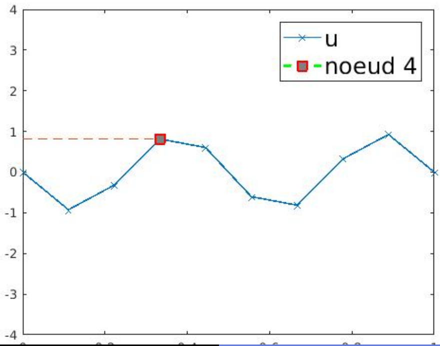
FIGURE – approximation en $t = \frac{6}{9}$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0,81 & 0,43 & -0,66 & -0,66 & 0,43 & 0,81 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

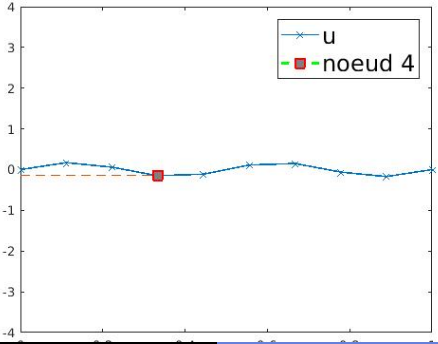
FIGURE – approximation en $t = \frac{7}{9}$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0,81 & 0,43 & -0,66 & -0,66 & 0,43 & 0,41 & -0,15 & 0 \end{bmatrix}$$

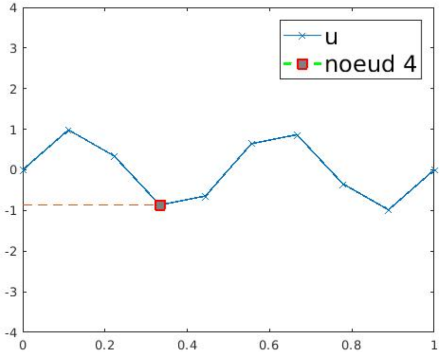
FIGURE – approximation en $t = \frac{8}{9}$



Par exemple, en prenant $Nx = 10$ et $Nt = 10$ avec un exemple particulier, on obtient la quatrième ligne suivante (construite avec itérations pour aider à bien visualiser) :

$$\begin{bmatrix} -0,87 & -0,15 & 0,81 & 0,43 & -0,66 & -0,66 & 0,43 & 0,41 & 0,81 & -0,87 \end{bmatrix}$$

FIGURE – approximation en $t = 1$



Conclusion

Nous utiliserons à notre avantage cette propriété de la matrice u pour la partie 3.

Description de la partie 3

Situation hypothétique regardée

- Pour une corde modélisant l'équation des ondes, on veut retrouver la valeur de c_{exp} intervenant dans l'équation des ondes avec les données initiales et les paramètres de discrétisation suivant :

$$f(t) = 0.1\cos(5t) \quad u_0(x) = 0.1(1-x) \quad \tilde{u_1}(x) = 0.1cos(5\Delta t)(1-x)$$

$$L = 1 \quad Nx = 100 \quad T = 1 \quad Nt = 500 \quad \theta = 0.5$$

Description de la partie 3

Situation hypothétique regardée

- Pour une corde modélisant l'équation des ondes, on veut retrouver la valeur de c_{exp} intervenant dans l'équation des ondes avec les données initiales et les paramètres de discrétisation suivant :

$$f(t) = 0.1\cos(5t) \quad u_0(x) = 0.1(1-x) \quad \tilde{u}_1(x) = 0.1cos(5\Delta t)(1-x)$$

$$L = 1 \quad Nx = 100 \quad T = 1 \quad Nt = 500 \quad \theta = 0.5$$

- On pose donc un capteur au quatrième nœud de discrétisation ($x_{capteur} = 3\Delta x$).

Description de la partie 3

Situation hypothétique regardée

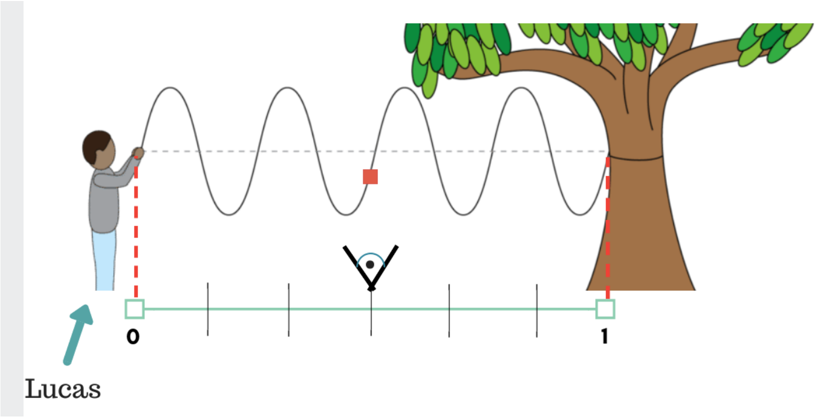
- Pour une corde modélisant l'équation des ondes, on veut retrouver la valeur de c_{exp} intervenant dans l'équation des ondes avec les données initiales et les paramètres de discrétisation suivant :

$$f(t) = 0.1\cos(5t) \quad u_0(x) = 0.1(1-x) \quad \tilde{u_1}(x) = 0.1cos(5\Delta t)(1-x)$$

$$L = 1 \quad Nx = 100 \quad T = 1 \quad Nt = 500 \quad \theta = 0.5$$

- On pose donc un capteur au quatrième nœud de discrétisation ($x_{capteur} = 3\Delta x$).
- On obtient alors expérimentalement $u_{c_{exp}}(x_{capteur}, t)$ approximé en quelques valeurs de t (dépend de la rapidité du capteur)

Visualtion de la situation hypothétique



La fonction J

On introduit alors :

$$J(c) = \int_0^T \left| u_c(3\Delta x, t) - u_{c_{exp}}(3\Delta x, t) \right|^2 dt$$

Remarque sur la fonction J

- Elle prend en **entrée** des valeurs de c (induisant des fonctions u_c obtenu grâce à `resout_equation _onde`)

La fonction J

On introduit alors :

$$J(c) = \int_0^T |u_c(3\Delta x, t) - u_{c_{exp}}(3\Delta x, t)|^2 dt$$

Remarque sur la fonction J

- Elle prend en **entrée** des valeurs de c (induisant des fonctions u_c obtenu grâce à `resout_equation _onde`)
- Elle donne en **sortie** un nombre **réel** qui est la valeur de l'intégrale.

La fonction J

On introduit alors :

$$J(c) = \int_0^T |u_c(3\Delta x, t) - u_{c_{exp}}(3\Delta x, t)|^2 dt$$

Remarque sur la fonction J

- Elle prend en **entrée** des valeurs de c (induisant des fonctions u_c obtenu grâce à `resout_equation _onde`)
- Elle donne en **sortie** un nombre **réel** qui est la valeur de l'intégrale.
- L'intégrale ne dépend que de t

La fonction J

On introduit alors :

$$J(c) = \int_0^T |u_c(3\Delta x, t) - u_{c_{exp}}(3\Delta x, t)|^2 dt$$

Remarque sur la fonction J

- Elle prend en **entrée** des valeurs de c (induisant des fonctions u_c obtenu grâce à `resout_equation _onde`)
- Elle donne en **sortie** un nombre **réel** qui est la valeur de l'intégrale.
- L'intégrale ne dépend que de t
- La valeur de la fonction J est toujours positive

La fonction J

On introduit alors :

$$J(c) = \int_0^T |u_c(3\Delta x, t) - u_{c_{exp}}(3\Delta x, t)|^2 dt$$

Remarque sur la fonction J

- Elle prend en **entrée** des valeurs de c (induisant des fonctions u_c obtenu grâce à `resout_equation _onde`)
- Elle donne en **sortie** un nombre **réel** qui est la valeur de l'intégrale.
- L'intégrale ne dépend que de t
- La valeur de la fonction J est toujours positive
- La fonction J atteint sa **valeur minimale de zéro** en $c = c_{exp}$

Résumé de la partie 3

Moral

Le problème s'est donc ramené à résoudre un problème de minimisation d'une fonction à valeur réelle. Trouver c_{exp} t.q :

$$J(c_{exp}) = \min_{c \in \mathbb{R}} J(c)$$

Ainsi, la partie 3 se divise en trois questions :

1. Créer une fonction Matlab qui, pour c donnée, calcule la valeur $J(c)$ (par intégration numérique)
2. Résoudre le problème de minimisation avec la méthode de la sécante **ou** la méthode du gradient
3. Résoudre le problème de minimisation avec la méthode de «*Recuit Simulé*»

Comment obtient-on les données expérimentales

On se donne une valeur de c_{exp} pour tout le devoir ($c_{exp} = 10$). On génère avec cette valeur de c et la fonction `resout_equation_onde`, les données «expérimentales». Avec les méthodes du devoir, **on tentera de retrouver** c_{exp}.

Notez bien

Connaissant la valeur que l'on cherche, cela vous donne une excellente méthode pour VÉRIFIER vos fonctions Maltab.

Toutes les méthodes qui ne sont pas abordées en cours (gradient, recuit) sont amplement détaillées en annexe !

Fin de la présentation

Fin

Questions ? :)