Annexe 2 : Minimisation/méthodes de descentes

Soit f une fonction continue, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le but est de trouver le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$, à partir d'un point de départ x_0. Pour ce genre de problème, on fait souvent appel à des algorithmes dit de «descentes», consistant à trouver un scalaire $d_0 \in \mathbb{R}$, dit de direction, et un pas $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, d'avancement dans cette direction tels que

$$f(x_0 + \alpha_0 d_0) < f(x_0)$$

Une fois α_0 et d_0 déterminés (nous verrons par la suite comment), on peut alors remplacer x_0 par $x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0$, et recommencer la procédure de recherche d'une direction de descente et d'un pas d'avancement à partir de x_1. L'étape de recherche du pas d'avancement s'appelle la recherche linéaire. Le schéma général d'un algorithme de descente est donc le suivant

Algorithme 1 : Algorithme de descente «général», pseudo-code

Données :

— Une fonction f et un point de départ x_0.

— Un critère d'arrêt et un nombre max d'itérations n_{max}

Résultat : Une approximation de la solution du problème : $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

$k = 0$;
tant que *"test d'arrêt non satisfait" et* $k \leq n_{max}$ **faire**
  Trouver une direction de descente d_k ;
  Recherche linéaire : trouver un pas α_k tel que $f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k)$;
  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$;
  $k = k + 1$;
fin

Il est connu que pour une direction d_k, un choix pertinent est d'aller dans la direction opposée à la dérivée de la fonction f en x_k, *i.e* prendre $d_k = -f'(x_k)$. Le problème à chaque itération consiste alors à trouver $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) < f(x_k)$$

L'idée la plus simple est de prendre un pas fixe, $\alpha_k = s$, $\forall\, k$. Pour faire un peu plus élaboré, on fera la chose suivante :

— Choisir un pas α_k de départ (par exemple $\alpha_k = \frac{0.01}{|f'(x_k)|}$),

— Si $f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) <= f(x_k)$ alors, $\alpha_k = 1.1\alpha_k$

— Si $f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) > f(x_k)$ alors, $\alpha_k = \frac{\alpha_k}{2}$

Notons qu'avec ce type d'approche, il est toujours possible de rester bloqué dans un minimum local de la fonction f. D'autres approches sont possibles pour éviter de rester piégé dans un minimum local. L'annexe suivant détaille une approche totalement différente afin de trouver le minimum global d'une fonction.