Annexe 1 : Intégration numérique

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On cherche une approximation de

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Pour approcher la valeur de cette intégrale, nous présentons rapidement la méthode des trapèzes composées, qui sera vue plus rigoureusement en classe (matière traitée dans le chapitre 6 de votre manuel).

On commence par diviser l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$ ($x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$). On a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

L'intégrale sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est ensuite approchée par [1]

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \right)$$

En supposant que chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est de longueur $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, on a alors

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) + f(x_i) \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned}$$

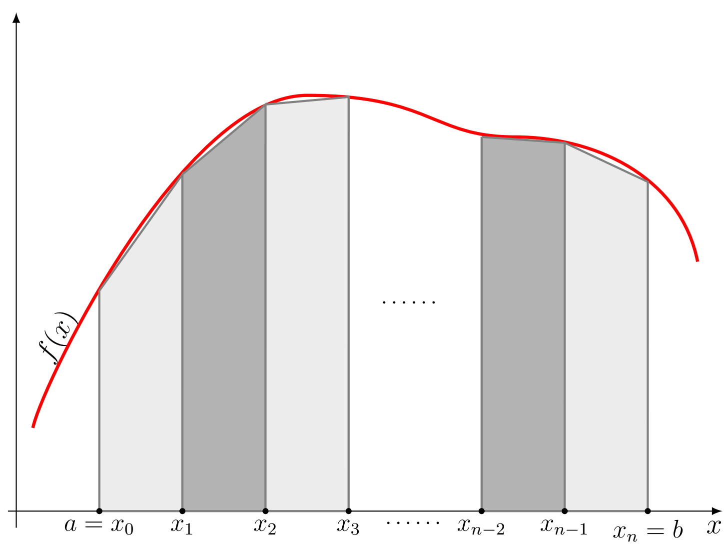

FIGURE 1 – Méthode des trapèzes composées

1. cela revient à approcher l'intégrale sur chaque sous-intervalle par l'aire du trapèze dont les sommets sont $x_i, x_{i+1}, f(x_i), f(x_{x+1})$, cf. figure 1