

## MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

### Dossier : Détermination d'une route aérienne.

Tout le monde le sait, le plus court chemin entre deux points, c'est la ligne droite. En êtes-vous sûrs ?

Par exemple lorsque l'on se déplace sur le globe terrestre (que l'on peut assimiler à une sphère de rayon  $R = 6371$  km en première approximation raisonnable) on ne peut pas se déplacer en ligne droite !

Pour se repérer sur le globe terrestre, on peut utiliser les méridiens et les parallèles. Tenir une route à cap constant veut dire que l'on va couper tous les méridiens (et tous les parallèles) avec un angle constant. Cette route se représente par un segment de droite sur une carte de Mercator, on l'appelle une *loxodromie*.

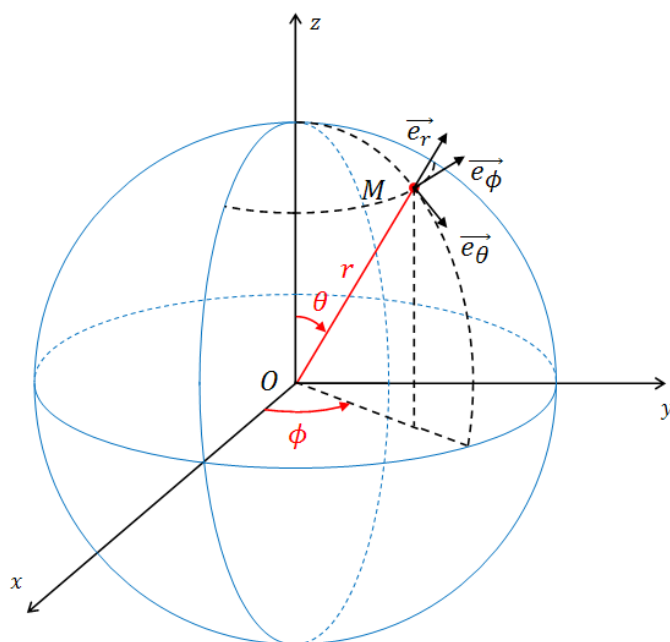


FIGURE 1 – Coordonnées sphériques. L'angle  $\theta$  mesure la colatitude. Attention selon la convention géographique usuelle la latitude est mesurée à partir de l'équateur, et varie entre  $90^\circ N$  et  $90^\circ S$ , sur cette illustration la colatitude est mesurée à partir du pôle nord et varie donc entre 0 et  $180^\circ$  - les deux conventions (latitude ou colatitude) se rencontrent dans les textes scientifiques. L'angle  $\phi$  mesure la longitude. Les parallèles sont les courbes obtenues avec  $\theta$  constant (en faisant varier  $\phi$ ), les méridiens sont les courbes obtenues avec  $\phi$  constant (en faisant varier  $\theta$ )

On peut vérifier que la loxodromie n'est pas le plus court chemin entre deux points du globe. Commençons par un exemple. Prenons deux points  $A$  et  $B$  à la même colatitude  $\theta$  et situés sur deux méridiens opposés (par exemple  $\phi = 0^\circ$  et  $\phi = 180^\circ$ ).

**Question 1 :** Quelle est la longueur du parallèle de latitude  $\theta$  ?

**Question 2 :** Que vaut la distance entre  $A$  et  $B$  lorsque l'on se déplace sur le parallèle de latitude  $\theta$  ? Et lorsque l'on se déplace sur le méridien de  $A$  jusqu'au pôle nord puis jusqu'au méridien de  $B$  vers le sud jusqu'en  $B$  ? Donner les valeurs lorsque  $\theta = 45^\circ$ .

**Question 3 :** Quel est le gain en distance entre ces deux routes ? Quelle est l'économie de carburant réalisée sachant que l'avion consomme 15 l. de kérosène par km ?

En fait, les plus courts chemins sur une sphère sont des arcs de grand-cercle. On appelle le plus court chemin entre deux points une *orthodromie*.

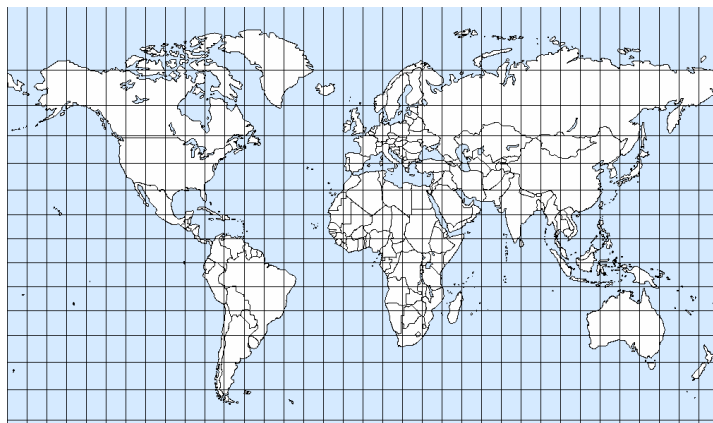


FIGURE 2 – Projection de Mercator. Prendre deux points  $A$  et  $B$ , dessiner les routes décrites dans le texte.

Etant donnés deux points  $A$  et  $B$  sur une sphère de rayon 1 et de centre  $O$ , l'angle  $\alpha = AOB$  est connu par son cosinus :

$$\cos \alpha = (OA|OB),$$

où  $(OA|OB)$  est le produit scalaire des vecteurs  $OA$  et  $OB$ .

Si les points  $A$  et  $B$  sont à la surface de la Terre et si l'angle  $AOB$  mesure  $1'$ , alors la distance entre  $A$  et  $B$  vaut (par définition) 1 mile marin. A l'aide de cette définition, retrouvez la longueur d'un mile marin.

#### TRAVAIL DEMANDÉ

- Répondre aux questions posées dans le texte.
- Vous exploiterez les documents joints ainsi que les documents que vous pourrez trouver par vous-même pour vous documenter sur les notions de loxodromie/orthodromie. Vous noterez la différence de distance parcourue entre la loxodromie et l'orthodromie, qui est non négligeable pour des points éloignés et de grandes latitudes.
- Note : le document 2 sur le calcul de la route initiale est incorrect (ou plus exactement il n'est pas valable dans tous les cas). Voir le document 4.
- Trouver un fond de carte donnant une projection cylindrique équidistante. Ecrire une procédure qui place sur ce fond de carte un point de coordonnées  $(lat, long)$  données. Tester avec les villes suivantes (dont on trouvera les coordonnées) : Paris, Tokyo, Le Cap, Mexico, Punta Arenas.
- Vous pourrez proposer un logiciel qui demande les coordonnées (longitude/latitude) de deux points et qui détermine 1) la distance orthodromique entre ces deux points 2) la route formée de tronçons de route à cap constant de longueur  $\ell$  donnée qui approche l'orthodromie.
- Vous rédigerez un rapport présentant le travail effectué et incluant les réponses aux questions.

#### DOCUMENTS JOINTS

- coordonnées sphériques
- calcul d'orthodromie
- produit scalaire dans l'espace de dimension 3
- formules pour le calcul de route