MAT120 - Algèbre Linéaire - Résumé

Étienne Pinard

30 septembre 2024

Chapitre 1: Nombres Complexes

Représentation des nombres complexes

Forme algégrique (cartésienne): $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{C}$

Forme polaire: $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad r, \theta \in \mathbb{R}$

Forme exponentielle: $z = re^{i\theta} \quad r, \theta \in \mathbb{R}$

Changement de forme

Soit $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Alors on a,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = Arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} & x = 0, \textit{même signe que } y \end{cases}$$

où r est le module et θ est l'argument de z

Opérations propres aux nombres complexes

Soit $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Conjugée: $z^* = x - iy$

Partie réel: $Re(z) = \frac{z+z^*}{2} = x, \quad Re(z) \in \mathbb{R}$

Partie imaginaire: $Im(z) = \frac{z-z^*}{2} = y, \quad Im(z) \in \mathbb{R}$

Argument (non-unique): $\arg(z) = Arg(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Propriétés des opérations

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

$$(z^*)^* = z$$

$$zz^* = |z|^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\textit{Inégalité du triangle})$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Racines entières

Soit $z = re^{i\theta},\ n \in \mathbb{N}$.

Alors on a,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}\right),\ k = 0, \ldots, n-1$$

On peut aussi définir les racines de manières récursives.

Si w est une racine de z, alors on a

$$w_k = \begin{cases} w_{k-1}e^{\frac{2\pi i}{n}} & k > 0 \\ \sqrt[n]{r}\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right) & k = 0 \end{cases}$$

On remarque que deux racines entières consécutives sont séparées par un angle de $\frac{2\pi}{n}$

Exponentielle et logarithme

Soit $z = x + iy$.

Alors on a,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cos(y) + isin(y))$$

De plus,

$$\ln(z) = \log(z) = \ln(|z|e^{i(\theta+2\pi k)}) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

où $(\theta + 2\pi k) = \arg(z)$

Donc, $\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

Puissance Complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $w = x + iy$

Alors on a,

$$\begin{aligned} z^w &= \left(e^{\ln(z)}\right)^w = e^{\ln(z)w} \\ &= e^{(\ln|z| + i\arg(z))(x+iy)} \\ &= e^{x\ln|z| - y\arg(z) + i(x\arg(z) + y\ln|z|)} \\ &= e^{x\ln|z| - y\arg(z)} e^{i(x\arg(z) + y\ln|z|)} \\ &= |z|^x e^{-y(Arg(z)+2\pi k)} e^{i(y\ln|z| + xArg(z))},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Alors z^w prend une infinité de valeur.

Si $z \in \mathbb{R},\ z > 0$ et $w \in \mathbb{Q}'$, l'equation devient $z^w = z^w e^{i2\pi kw}$

Cette equation a une infinité de valeurs puisque $kw \notin \mathbb{Z} \implies e^{i2\pi kw} \neq 1, \forall z, w$

Dans ce cas la convention est de prendre $k = 0$ pour que $z^w \in \mathbb{R}$

Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

Alors on peut écrire $p(x)$ en terme de ses racines, soit

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont les racines de $p(x)$ et k_j est la multiplicité de la racine x_j

Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit que $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$

On peut donc dire que $p(x)$ à exactement n racines complexes en comptant les multiplicités.