

# MAT193 - Algèbre Linéaire - Résumé

Étienne Pinard

6 octobre 2024

## Chapitre 1: Nombres Complexes

### Représentation des nombres complexes

Forme algébrique (cartésienne):  $z = x + iy$   $x, y \in \mathbb{C}$

Forme polaire:  $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$   $r, \theta \in \mathbb{R}$

Forme exponentielle:  $z = re^{i\theta}$   $r, \theta \in \mathbb{R}$

### Changement de forme

Soit  $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Alors on a,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \text{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \\ \pm \frac{\pi}{2} & x = 0, \text{ même signe que } y \end{cases}$$

où  $r$  est le module et  $\theta$  est l'argument de  $z$

### Opérations propres aux nombres complexes

Soit  $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Conjugée:  $z^* = x - iy$

Partie réel:  $\text{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2} = x$ ,  $\text{Re}(z) \in \mathbb{R}$

Partie imaginaire:  $\text{Im}(z) = \frac{z-z^*}{2i} = y$ ,  $\text{Im}(z) \in \mathbb{R}$

Argument (non-unique):  $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

## Propriétés des opérations

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

$$(z^*)^* = z$$

$$z z^* = |z|^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{Inégalité du triangle})$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

## Racines entières

Soit  $z = re^{i\theta}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors on a,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

On peut aussi définir les racines de manières récursives.

Si  $w$  est une racine de  $z$ , alors on a

$$w_k = \begin{cases} w_{k-1} e^{\frac{2\pi i}{n}} & k > 0 \\ \sqrt[n]{r} \left( e^{i\frac{\theta}{n}} \right) & k = 0 \end{cases}$$

On remarque que deux racines entières consécutives sont séparées par un angle de  $\frac{2\pi}{n}$

## Exponentielle et logarithme

Soit  $z = x + iy$ .

Alors on a,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

De plus,

$$\ln(z) = \log(z) = \ln(|z| e^{i(\theta+2\pi k)}) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

où  $(\theta + 2\pi k) = \arg(z)$

Donc,  $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$

## Puissance Complexe

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $w = x + iy$

Alors on a,

$$\begin{aligned} z^w &= \left( e^{\ln(z)} \right)^w = e^{\ln(z)w} \\ &= e^{(\ln |z| + i \arg(z))(x + iy)} \\ &= e^{x \ln |z| - y \arg(z) + i(x \arg(z) + y \ln |z|)} \\ &= e^{x \ln |z| - y \arg(z)} e^{i(x \arg(z) + y \ln |z|)} \\ &= |z|^x e^{-y(\arg(z) + 2\pi k)} e^{i(y \ln |z| + x \arg(z))}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Alors  $z^w$  prend une infinité de valeur.

Si  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z > 0$  et  $w \in \mathbb{Q}'$ , l'équation devient  $z^w = z^w e^{i2\pi kw}$

Cette équation a une infinité de valeurs puisque  $kw \notin \mathbb{Z} \implies e^{i2\pi kw} \neq 1, \forall z, w$

Dans ce cas la convention est de prendre  $k = 0$  pour que  $z^w \in \mathbb{R}$

## Théorème fondamental de l'algèbre

Soit  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Alors on peut écrire  $p(x)$  en terme de ses racines, soit

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont les racines de  $p(x)$  et  $k_j$  est la multiplicité de la racine  $x_j$

Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit que  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

On peut donc dire que  $p(x)$  à exactement  $n$  racines complexes en comptant les multiplicités.

## Chapitre 2: Matrices

### Définition

Une matrice de type  $m \times n$  sur un corp (dans notre cas sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$ ) est noté  $A_{m \times n}$  et contient  $m$  lignes et  $n$  colonnes.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matrice composé uniquement de 0 pour un certain type  $m \times n$  est écrite  $\mathbb{O}$

$A_{m \times n}$  est une matrice carré si  $m = n$ .

La matrice identité de type  $n$  est écrite  $I_n = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors on dit que  $A$  est

1. triangulaire supérieur si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

2. triangulaire inférieur si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

3. triangulaire si  $A$  est triangulaire supérieur ou triangulaire inférieur

4. Diagonale si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$

Noté que  $I_n = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$  ainsi que  $\mathbb{O}_n = \text{diag}\{0, 0, \dots, 0\}$

### Opérations matricielles

#### Addition de matrices

L'addition de deux matrices  $A$  et  $B$  existe seulement si  $A$  et  $B$  sont du même type. L'addition est commutatif, associatif, possède un élément neutre et possède un inverse.

#### Multiplication par un scalaire

La multication par un scalaire existe toujours pour une matrice  $A$ . La multication par un scalaire est associatif, distributif et commutatif.

#### Produit matricielle

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  et  $B = (b_{ij}) \in M_{r \times s}(\mathbb{C})$ . Alors le produit matricielle  $AB$  existe si  $n = r$ . Dans ce cas, on a

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}$$

En gros, l'élément à la position  $i, j$  de  $AB$  est le produit scalaire entre la  $i$ -ème ligne de  $A$  et la  $j$ -ème colonne de  $B$ .

### Propriétés du produit matricielle

Soit  $\alpha, \beta$  des scalaires et  $A, B, C$  des matrices dont le produit matricielle entre eux existe. Alors

1.  $(AB)C = A(BC)$ , produit matricielle est associatif
2.  $AB \neq BA$ , généralement, le produit matricielle n'est pas commutatif
3.  $A(B + C) = AB + AC$ , distributivité par la gauche
4.  $(A + B)C = AC + BC$ , distributivité par la droite
5.  $AI = IA = A$ , l'identité est l'élément neutre du produit matricielle

### Transposition

La transposé de  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  est  $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ . Pour une matrice carré, c'est une rotation des anti-diagonale par rapport à la grande diagonale.

### Conjugué hermitien

Le conjugué hermitien de  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  est  $A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T = (a_{ji}^*)_{n \times m}$ . Le conjugué hermitien est aussi appelé la transposé conjugué.

### Propriétés transposé et conjugué hermitien

$$\begin{array}{ll} (A^T)^T = A & (A^\dagger)^\dagger = A \\ (\alpha A)^T = \alpha A^T & (\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger \\ (A + B)^T = A^T + B^T & (A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger \\ (AB)^T = B^T A^T & (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \end{array}$$

### Définition

1. Si  $A^T = A$ , alors  $A$  est dite symétrique. Si  $A^T = -A$ , alors  $A$  est dite anti-symétrique.
2. Si  $A$  est une matrice carré tel que  $AA^T = A^T A = I$ , alors  $A$  est appelé orthogonal.
3. Si  $A^\dagger = A$ , alors  $A$  est dite hermitienne. Si  $A^\dagger = -A$ , alors  $A$  est dite anti-hermitienne.
4. Si  $A$  est une matrice carré tel que  $AA^\dagger = A^\dagger A = I$ , alors  $A$  est appelé unitaire.

### Commutateur de matrice

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , alors le commutateur de  $A$  et  $B$  est la matrice

$$[A, B] = AB - BA$$

### Propriétés du commutateur

1.  $[A, B] = -[B, A]$
2.  $[\alpha A, B] = \alpha[A, B]$
3.  $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$
4.  $[A, B]^T = -[A^T, B^T]$
5.  $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = \mathbb{O}$ , l'identité de Jacobi

### Trace d'une matrice

Soit  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ . Alors la trace de  $A$  est

$$\text{tr} A = \sum_{i=0}^n a_{ii}$$

## Propriétés de la trace

1.  $\text{tr}\{AB\} = \text{tr}\{BA\}$
2.  $\text{tr}\{A + B\} = \text{tr}A + \text{tr}B$
3.  $\text{tr}\{\alpha A\} = \alpha \text{tr}A$
4.  $\text{tr}\{A^T\} = \text{tr}A$
5.  $\text{tr}\{[A, B]\} = \text{tr}\{AB - BA\} = \text{tr}\{AB\} - \text{tr}\{BA\} = \text{tr}\{AB\} - \text{tr}\{AB\} = 0$

## Déterminant d'une matrice carré

### Définition du déterminant par récurrence

Le déterminant de  $A \in M_n(\mathbb{C})$  noté  $\det A = |A|$  est une nombre complexe qui peut-être définie par récurrence sur  $n$  comme suit

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{ji} m_{ji} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ceci est l'expansion par la jème ligne,  $1 \leq j \leq n$ . Le terme  $m_{ji}$  est le déterminant de la sous-matrice qu'on obtient si on biffe la ligne  $j$  et la colonne  $i$ . Si  $M_{ji}$  est la sous-matrice obtenue en biffant la ligne  $j$  et la colonne  $i$  alors  $m_{ji} = \det M_{ji}$ .

Dans la première équation, le déterminant des sous-matrices était multiplié par la jème ligne. Il est équivalent de développer le déterminant suivant la jème colonne, ce qui donne cette équation

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

### Définition du déterminant par les permutations

Le déterminant de  $A$  peut aussi être définie de cette façons

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i}$$

Ici  $\sigma = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n)$  et représente une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  $\sigma_j$  est le jème élément de cette permutation.  $S_n$  est l'ensemble de tous ces permutations.  $\text{sign}(\sigma)$  est la signature de  $\sigma$  et est égale à  $(-1)^{\text{nb de désordre de } \sigma}$ . Le désordre de  $\sigma$  est le nombre de couple  $(\sigma_j, \sigma_k)$  ou  $j < k$  mais  $\sigma_j > \sigma_k$ .

### Propriétés du déterminant

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$

1.  $\det A^T = \det A$
2.  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
3.  $\det(A^*) = (\det A)^*$
4.  $\det A^\dagger = (\det A)^*$
5.  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
6.  $\det(A^m) = (\det A)^m$
7.  $\det(A + B) \neq \det A + \det B$
8.  $\det(\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = a_1 a_2 \dots a_n$
9. Si  $A$  est triangulaire alors  $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

Soit  $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)$  ou  $L_j \in M_{1 \times n}(\mathbb{C})$ ,  $C_j \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$

1.  $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_k \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_k \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$

$$\det (C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n) = - \det (C_1 \dots C_k \dots C_j \dots C_n)$$

2.  $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = 0$

$$\det (C_1 \dots C_j \dots C_j \dots C_n) = 0$$

3.  $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ \alpha L_j \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$

$$\det (C_1 \dots \alpha C_j \dots C_n) = \alpha \det (C_1 \dots C_j \dots C_n)$$

4.  $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_k \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j + \alpha L_k \\ \dots \\ L_k \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$

$$\det (C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n) = \det (C_1 \dots C_j + \alpha C_k \dots C_k \dots C_n)$$

5.  $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ M + N \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ M \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ N \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$

$$\det (C_1 \dots M + N \dots C_n) = \det (C_1 \dots M \dots C_n) + \det (C_1 \dots N \dots C_n)$$

## Matrice inverses

$A \in M_{n \times n}$  est inversible  $\iff \exists B$  t.q  $AB = BA = I$ . Alors  $B$  est noté  $A^{-1}$

### Propriétés de l'inverse

Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  inversible

1.  $AB = \mathbb{O} \implies B = \mathbb{O}$
2. Si  $AC = BA = I \implies B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$ , l'inverse à gauche et à droite sont égaux
3.  $(A^{-1})^{-1} = A$ ,  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ,  $(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$
4.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

### Calculer la matrice inverse

Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

$\text{adj}(A)$  est la matrice adjointe de  $A$  et est définie comme

$$\text{adj}(A) = ((c_{ij})_{n \times n})^T$$

$c_{ij}$  est le cofacteur d'indice  $ij$  de  $A$  et est défini comme

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

$m_{ij}$  est le déterminant de la sous-matrice obtenue en biffant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

On peut donc remarquer que  $\det A = \sum_{k=1}^n a_{jk} c_{jk}$

On a donc ce résultat pour les matrices inverses,

$$A \text{ est inversible } \iff \det A \neq 0$$

## Systèmes d'équations linéaires

Chaque système d'équation linéaire peut-être représenter par une equation matricielle, soit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le système devient  $AX = B \iff (A|B)$ .  $(A|B)$  est dit  $A$  augmenté de  $B$  et est la matrice augmenté du système.

### Forme échelonné d'un système

Une matrice est de la forme échelonné si

1. La ligne qui précède une ligne non-nulle est non-nulle
2. Le premier coefficient non-nul d'une ligne non-nulle, appelé le pivot, est plus à gauche que le premier coefficient non-nul de la ligne suivante.

On peut simplifier le système si on obtient la forme échelonné de la matrice augmenté. On obtient la forme échelonné en appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  et  $B$ . Ces opérations sont échanger deux lignes,  $L_j \leftrightarrow L_k$ , additionner le multiple d'une ligne à une autre,  $L_j \mapsto L_j + \alpha L_k$  et multiplier une ligne par un scalaire non-nul,  $L_j \mapsto \alpha L_j$ ,  $\alpha \neq 0$ .



## Rang d'une matrice

$\text{rg}(A)$  est le rang de  $A$  et est le nombre de ligne non-nulle de la forme échelonné de  $A$ . On a alors trois cas pour un système linéaire  $AX = B$ , soit

1. Si  $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|B)$ , alors le système n'a pas de solution, il est incompatible
2. Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$ , alors le système a une unique solution, il est compatible
3. Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) < n$ , alors le système a une infinité de solution, il est compatible

Dans le dernier cas, le système a une infinité de solution puisque qu'il a des variables libres, soit exactement  $n - \text{rg}(A)$  variables libres.

Remarquons que si  $A'$  est la forme échelonné de  $A$ , alors  $\det A = \alpha \det A'$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Cela nous permet d'arriver au résultat

$$\det A \neq 0 \iff \text{rg}(A) = n \iff A \text{ est inversible} \iff AX = B \text{ a une unique solution}$$

L'unique solution dans ce cas est  $X = A^{-1}B$ , puisque  $A$  est inversible.

## Calculer l'inverse d'une matrice

Il est possible de calculer l'inverse de  $A$  en échelonnant le système  $(A|I)$ . Le système échelonné va donner  $(A|I) \sim (I|B)$ , avec  $B = A^{-1}$ .

## Système homogène

Un système homogène est un système de la forme  $AX = \mathbb{O}$ . Un tel système est toujours compatible avec la solution trivial  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . De plus, si  $A$  est inversible le système homogène à seulement la solution trivial, sinon il a une infinité de solution, puisque c'est impossible que  $\text{rg}(A) < \text{rg}(A| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix})$ , et donc que le système soit incompatible.

## Noyau d'un système

Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ . Le noyau de  $A$ , noté  $N(A)$ , est l'ensemble de tous les solutions du système homogène  $AX = \mathbb{O}$ , soit

$$N(A) = \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{C}) \mid AX = \mathbb{O}\}$$