

MAT193 - Algèbre Linéaire - Résumé

Étienne Pinard

Compilé le 10 décembre 2024

Table des matières

1	Chapitre 1: Nombres Complexes	3
1.1	Définition des nombres complexes	3
1.2	Représentation des nombres complexes	3
1.3	Changement de forme: Algébrique à polaire/exponentielle	3
1.4	Opérations propres aux nombres complexes	3
1.4.1	Propriétés des opérations	3
1.5	Racines entières	4
1.6	Exponentielle et logarithme	4
1.7	Puissance Complexe	4
1.8	Théorème fondamental de l'algèbre	4
2	Chapitre 2: Matrices	5
2.1	Définition d'une matrice	5
2.2	Opérations matricielles	5
2.2.1	Addition de matrices	5
2.2.2	Multiplication par un scalaire	5
2.2.3	Produit matricielle	6
2.2.4	Propriétés du produit matricielle	6
2.2.5	Transposition	6
2.2.6	Conjugée hermitien	6
2.2.7	Propriétés transposé et conjugué hermitien	6
2.2.8	Commutateur de matrice	6
2.2.9	Propriétés du commutateur	7
2.2.10	Trace d'une matrice	7
2.2.11	Propriétés de la trace	7
2.3	Déterminant d'une matrice carré	7
2.3.1	Définition du déterminant par récurrence	7
2.3.2	Définition du déterminant par les permutations	7
2.3.3	Propriétés du déterminant	8
2.4	Matrice inverses	8
2.4.1	Propriétés de l'inverse	9
2.4.2	Calculer la matrice inverse	9
2.5	Systèmes d'équations linéaires	9
2.5.1	Forme échelonné d'un système	9
2.5.2	Rang d'une matrice	10
2.5.3	Calculer l'inverse d'une matrice	10
2.5.4	Système homogène	10
2.5.5	Noyau d'un système	10

3	Chapitre 3: Espace vectorielle de dimension finie	11
3.1	Base d'un espace vectorielle	11
3.1.1	Combinaison linéaire	11
3.1.2	Ensemble générateur	11
3.1.3	Indépendance linéaire	11
3.1.4	Déterminer l'indépendance linéaire de $S \subset \mathbb{R}^n$	11
3.1.5	Base d'un espace vectorielle	12
3.1.6	Représentation d'un vecteur dans une base	12
3.1.7	Propriétés d'une base d'un espace vectorielle	12

1 Chapitre 1: Nombres Complexes

1.1 Définition des nombres complexes

Rappel: les unités de \mathbb{R} sont 1 et -1

Définition 1.1. i est l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$

Alors, il est possible de former un nouveau ensemble qui a les unités 1, -1 , i et α scalaire $\in \mathbb{R}$

Définition 1.2. L'ensemble qui a les unités 1, -1 , i et α scalaire $\in \mathbb{R}$ est appelé nombre complexes et est noté \mathbb{C}

1.2 Représentation des nombres complexes

Soit $x, y, r, \theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Il a trois façons principales de représenter z

- 1) Forme algébrique (cartésienne): $z = x + iy$
- 2) Forme polaire: $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
- 3) Forme exponentielle: $z = re^{i\theta}$

1.3 Changement de forme: Algébrique à polaire/exponentielle

Soit $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Définition 1.3. On appelle r le module de z noté $|z|$ avec $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition 1.4. On appelle θ l'argument de z noté $\text{Arg}(z)$ avec

$$\theta = \text{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \\ \text{sign}(y)\frac{\pi}{2} & x = 0, \text{ sign}(y) \text{ est la signe de } y \end{cases}$$

Remarque. L'argument non unique de z est $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

1.4 Opérations propres aux nombres complexes

Soit $z \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } z = x + iy$

Définition 1.5. Les parties réel et imaginaire de z sont $\text{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$ et $\text{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$

Définition 1.6. Le conjugué de z est $z^* = \bar{z} = x - iy = \text{Re}(z) - i\text{Im}(z)$

1.4.1 Propriétés des opérations

Le conjugué et le module sont distributif sur l'addition, la multiplication et la division

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^* & (z_1 z_2)^* &= z_1^* z_2^* & \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* &= \frac{z_1^*}{z_2^*} \\ |z_1 + z_2| &= |z_1| + |z_2| & |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| & \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

Le conjugué de z^* est z , soit $(z^*)^* = z$

Le conjugué z et le module de z est relié par $zz^* = |z|^2$

L'argument de z a des propriétés semblables aux propriétés logarithmiques

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

1.5 Racines entières

Soit $z = re^{i\theta}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

On peut aussi calculer les racines de z de manières récursives.

Si w est une racine de z , alors on a

$$w_k = \begin{cases} w_{k-1} e^{\frac{2\pi i}{n}} & k > 0 \\ \sqrt[n]{r} \left(e^{i\frac{\theta}{n}} \right) & k = 0 \end{cases}$$

Remarque. Deux racines entières consécutives sont séparées par un angle de $\frac{2\pi}{n}$

1.6 Exponentielle et logarithme

Soit $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, t.q. $z = x + iy$

L'exponentielle de z est

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Le logarithme de z est

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \log(z) = \ln \left(|z| e^{i(\theta+2\pi k)} \right) \\ &= \ln |z| + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \ln |z| + i \arg(z) \end{aligned}$$

1.7 Puissance Complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $w = x + iy$

$$z^w = \left(e^{\ln(z)} \right)^w = e^{\ln(z)w} = e^{(\ln |z| + i \arg(z))(x+iy)} = |z|^x e^{-y \arg(z)} e^{i(x \arg(z) + y \ln |z|)}$$

Si $y \neq 0$ alors z^w prend une infinité de valeurs distinctes, puisque $e^{-y \arg(z)} = e^{-y \text{Arg}(z) + 2\pi y k}$, $k \in \mathbb{Z}$

Si $y = 0 \implies w \in \mathbb{R}$ alors le nombre de valeurs de z^w dépend dans quelle ensemble x est.

Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \implies \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $kx \in \mathbb{Z} \implies z^w$ a n valeurs distinctes

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies \nexists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $kx \in \mathbb{Z} \implies z^w$ a une infinité de valeurs distinctes

Dans ce dernier cas, si $z, w \in \mathbb{R}$ alors, par convention, on prend $k = 0$ pour que $z^w \in \mathbb{R}$.

1.8 Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

Alors on peut écrire $p(x)$ en terme de ses racines $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $x_j \in \mathbb{C}$, soit

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}$$

où k_j est la multiplicité de la racine x_j avec $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

Alors $p(x)$ a exactement n racines complexes en comptant les multiplicités.

2 Chapitre 2: Matrices

2.1 Définition d'une matrice

Définition 2.1. L'ensemble des matrices de type $m \times n$ sur un corps F est noté $M_{m \times n}(F)$

Si F est un corps quelconque alors $M_{m \times n}(F) = M_{m \times n}$

Définition 2.2. Soit $A \in M_{m \times n}(F)$. A est aussi noté $A_{m \times n}$ et peut-être représenté par un tableau qui contient m lignes et n colonnes ou $(A)_{kj}$ est l'élément à la ligne k et colonne j .

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, (A)_{kj} \in F \forall k, j$$

Notez que dans ce cours, on considère seulement le cas $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$

Définition 2.3. Si $m = n$ alors $A_{m \times n} = A_{nn} = A_n$ est une matrice carré.

Définition 2.4. La matrice composé uniquement de 0 pour un certain type $m \times n$ est écrite \mathbb{O}

Définition 2.5. La matrice identité de type n est écrite $I_n = I$ avec $(I)_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Soit $A \in M_n(F)$ et $a_{kj} \in F$ avec $k, j \in \{0, 1, \dots, n\}$

Définition 2.6. A est triangulaire supérieur si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } j \geq k \\ 0 & \text{si } j < k \end{cases}$

Définition 2.7. A est triangulaire inférieur si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$

Remarque. A est triangulaire si A est triangulaire supérieur ou triangulaire inférieur

Définition 2.8. A est diagonale si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Remarque. $I_n = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$ ainsi que $\mathbb{O}_n = \text{diag}\{0, 0, \dots, 0\}$

2.2 Opérations matricielles

2.2.1 Addition de matrices

L'addition de deux matrices A et B existe seulement si A et B sont du même type. L'addition est commutatif, associatif, possède un élément neutre et possède un inverse.

$$(AB)_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$$

2.2.2 Multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire α existe pour une matrice A de n'importe quel type. La multiplication par un scalaire est associatif, distributif, commutatif et possède un inverse si $\alpha \neq 0$.

$$(\alpha A)_{kj} = \alpha a_{kj}$$

2.2.3 Produit matricielle

Soit $A \in M_{m \times n}$ et $B \in M_{n \times t}$. Alors le produit matricielle AB existe si $n = r$. Dans ce cas, on a

$$(AB)_{kj} = \sum_{s=1}^n a_{ks} b_{sj}$$

Remarque. L'élément à la position i, j de AB est le produit scalaire canonique entre la i -ème ligne de A et la j -ème colonne de B

2.2.4 Propriétés du produit matricielle

Soit A, B, C des matrices dont le produit matricielle entre eux existe.

Le produit matricielle est associatif, distributif et possède un élément neutre, soit I .

Important: Le produit matricielle n'est, généralement, pas commutatif

$$(AB)C = A(BC) \quad AB \neq BA \quad A(B+C) = AB + AC \quad (A+B)C = AC + BC \quad AI = IA = A$$

2.2.5 Transposition

Définition 2.9. La transposé de $A \in M_{m \times n}$ est noté A^T avec $(A^T)_{kj} = a_{jk}$.

Remarque. Pour une matrice carré, la transposé est une rotation des anti-diagonale par rapport à la grande diagonale.

2.2.6 Conjugée hermitien

Définition 2.10. Le conjugué hermitien de $A \in M_{m \times n}$ est noté A^\dagger avec $A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T$. Le conjugué hermitien est aussi appelé la transposé conjugué.

Remarque. Pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A^\dagger = A^T$

2.2.7 Propriétés transposé et conjugué hermitien

Soit $A, B \in M_n$, α scalaire. Alors on a

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A & (A^\dagger)^\dagger &= A \\ (\alpha A)^T &= \alpha A^T & (\alpha A)^\dagger &= \alpha^* A^\dagger \\ (A+B)^T &= A^T + B^T & (A+B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger \\ (AB)^T &= B^T A^T & (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger \end{aligned}$$

Définition 2.11. Si $A^T = A$, alors A est dite symétrique. Si $A^T = -A$, alors A est dite anti-symétrique.

Définition 2.12. Si A est une matrice carré tel que $AA^T = A^T A = I$, alors A est appelé orthogonal.

Définition 2.13. Si $A^\dagger = A$, alors A est dite hermitienne. Si $A^\dagger = -A$, alors A est dite anti-hermitienne.

Définition 2.14. Si A est une matrice carré tel que $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, alors A est appelé unitaire.

Remarque. La symétrie et l'orthogonal s'applique au matrice réel. L'hermitien et l'unitaire s'applique au matrice complexe.

2.2.8 Commutateur de matrice

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, alors le commutateur de A et B est la matrice

$$[A, B] = AB - BA$$

2.2.9 Propriétés du commutateur

1. $[A, B] = -[B, A]$
2. $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A, B]$
3. $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$
4. $[A, B]^T = -[A^T, B^T]$
5. L'identité de Jacobi: $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = \mathbb{O}$

2.2.10 Trace d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Alors la trace de A est

$$\text{tr} A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$$

2.2.11 Propriétés de la trace

1. $\text{tr}\{AB\} = \text{tr}\{BA\}$
2. $\text{tr}\{A + B\} = \text{tr} A + \text{tr} B$
3. $\text{tr}\{\alpha A\} = \alpha \text{tr} A$
4. $\text{tr}\{A^T\} = \text{tr} A$, $\text{tr}\{A^\dagger\} = \overline{\text{tr} A}$
5. $\text{tr}\{[A, B]\} = \text{tr}\{AB - BA\} = \text{tr}\{AB\} - \text{tr}\{BA\} = \text{tr}\{AB\} - \text{tr}\{AB\} = 0$

2.3 Déterminant d'une matrice carré

2.3.1 Définition du déterminant par récurrence

Définition 2.15. Le déterminant de $A \in M_n(\mathbb{C})$ noté $\det A = |A|$ est un nombre complexe qui peut-être définie par récurrence sur n comme suit

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ceci est l'expansion par la k ème ligne, $1 \leq k \leq n$. Le terme m_{kj} est le déterminant de la sous-matrice M_{kj} qu'on obtient si on biffe la ligne k et la colonne j , alors $m_{ji} = \det M_{ji}$.

Dans la première équation, le déterminant des sous-matrices était multiplié par la k ème ligne. Il est équivalent de développer le déterminant suivant la j ème colonne, ce qui donne cette équation

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Remarque. La seule différence entre les deux équations est l'indice de la somme. L'indice est j si on développe par la k ème ligne sinon l'indice est k si on développe par la j ème colonne.

2.3.2 Définition du déterminant par les permutations

Définition 2.16. Le déterminant de A peut aussi être définie de cette façon

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i}$$

Ici $\sigma = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n)$ et représente une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
 σ_j est le jème élément de cette permutation.
 S_n est l'ensemble de tous ces permutations.
 $\text{sign}(\sigma)$ est la signature de σ et est égale à $(-1)^{\text{nb de désordre de } \sigma}$.
Le désordre de σ est le nombre de couple (σ_j, σ_k) ou $j < k$ mais $\sigma_j > \sigma_k$.

2.3.3 Propriétés du déterminant

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}$

1. $\det A^T = \det A$
2. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
3. $\det(A^*) = (\det A)^*$
4. $\det A^\dagger = (\det A)^*$
5. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
6. $\det(A^m) = (\det A)^m$
7. $\det(A + B) \neq \det A + \det B$, généralement
8. $\det(\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = a_1 a_2 \dots a_n$
9. Si A est triangulaire alors $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

Il existe aussi des propriétés utile pour transformer le déterminant d'une matrice carré quelconque en le déterminant d'une matrice triangulaire multiplié par un facteur constant.

Soit $A = [(L_1)^T \ (L_2)^T \ \dots \ (L_n)^T] = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]$ ou $L_j \in M_{1 \times n}(\mathbb{C})$, $C_j \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$

Dans ce cas, L_j est la jème ligne de A et C_j est la jème colonne de A . Les lignes sont écrits avec des transposés pour sauver de l'espace.

Note: Les propriétés sont valides pour les lignes et les colonnes. Par contre, pour être concis, ils sont seulement exprimés en termes des colonnes dans ce résumé.

1. Échanger deux colonnes ou lignes change le signe du déterminant:

$$\det(C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n) = -\det(C_1 \dots C_k \dots C_j \dots C_n)$$

2. Si deux colonnes ou lignes sont pareils alors le déterminant est nulle

$$\det(C_1 \dots C_j \dots C_j \dots C_n) = 0$$

3. Multiplier une colonne ou ligne par un scalaire revient le déterminant par ce même scalaire

$$\det(C_1 \dots \alpha C_j \dots C_n) = \alpha \det(C_1 \dots C_j \dots C_n)$$

4. Ajouter une colonne ou ligne multiplié par un scalaire à une autre colonne ou ligne ne change pas le déterminant

$$\det(C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n) = \det(C_1 \dots C_j + \alpha C_k \dots C_k \dots C_n)$$

5. Si on peut décomposer une colonne ou ligne en la somme de deux colonne ou ligne alors le déterminant est la somme des déterminants des deux matrices qui ont chacune une décomposition de la colonne ou ligne

$$\det(C_1 \dots M + N \dots C_n) = \det(C_1 \dots M \dots C_n) + \det(C_1 \dots N \dots C_n)$$

2.4 Matrice inverses

Définition 2.17. $A \in M_{n \times n}$ est inversible $\iff \exists B$ t.q. $AB = BA = I$.

Alors B est noté A^{-1} et est appelé la matrice inverse de A

2.4.1 Propriétés de l'inverse

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ inversible

1. $AB = \mathbb{O} \implies B = \mathbb{O}$
2. Si $AC = BA = I \implies B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$, l'inverse à gauche et à droite sont égaux
3. $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.4.2 Calculer la matrice inverse

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

$\text{adj}(A)$ est la matrice adjointe de A et est définie comme

$$(\text{adj}(A))_{kj} = (c_{jk})$$

c_{kj} est le cofacteur d'indice kj de A et est défini comme

$$c_{kj} = (-1)^{k+j} m_{kj}$$

m_{kj} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en biffant la ligne k et la colonne j .

On peut donc remarquer que $\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} c_{kj}$

Cette manière de calculer la matrice inverse nous permet de formuler ce théorème:

Théorème 2.1. A est inversible $\iff \det A \neq 0$

2.5 Systèmes d'équations linéaires

Définition 2.18. Chaque système d'équation linéaire peut-être représenter par une equation matricielle, soit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le système devient $AX = B \iff (A|B)$. $(A|B)$ est dit A augmenté de B et est la matrice augmenté du système.

2.5.1 Forme échelonné d'un système

Une matrice est de la forme échelonné si

1. La ligne qui précède une ligne non-nulle est non-nulle
2. Le premier coefficient non-nul d'une ligne non-nulle, appelé le pivot, est plus à gauche que le premier coefficient non-nul de la ligne suivante.

On peut simplifier le système si on obtient la forme échelonné de la matrice augmenté. On obtient la forme échelonné en appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de A et B . Ces opérations sont

1. Échanger deux lignes, $L_j \leftrightarrow L_k$
2. Additionner le multiple d'une ligne à une autre $L_j \mapsto L_j + \alpha L_k$
3. Multiplier une ligne par un scalaire non-nul, $L_j \mapsto \alpha L_j$, $\alpha \neq 0$

2.5.2 Rang d'une matrice

$\text{rg}(A)$ est le rang de A et est le nombre de ligne non-nulle de la forme échelonné de A . On a alors trois cas pour un système linéaire $AX = B$, soit

1. Si $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|B)$, alors le système n'a pas de solution, il est incompatible
2. Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$, alors le système a une unique solution, il est compatible
3. Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) < n$, alors le système a une infinité de solution, il est compatible

Dans le dernier cas, le système a une infinité de solution puisque qu'il a des variables libres, soit exactement $n - \text{rg}(A)$ variables libres.

Remarque. Si A' est la forme échelonné de A , alors $\det A = \alpha \det A'$, $\alpha \in \mathbb{C}$. On peut donc étendre le théorème 2.1 avec le rang

Théorème 2.2. $\det A \neq 0 \iff \text{rg}(A) = n \iff A$ est inversible $\iff AX = B$ a une unique solution

Remarque. L'unique solution dans ce cas est $X = A^{-1}B$, puisque A est inversible.

2.5.3 Calculer l'inverse d'une matrice

Il est possible de calculer l'inverse de A en échelonnant le système $(A|I)$. Le système échelonné va donner $(A|I) \sim (I|B)$, avec $B = A^{-1}$.

2.5.4 Système homogène

Un système homogène est un système de la forme $AX = \mathbb{O}$. Un tel système est toujours compatible avec la solution trivial $X = \mathbb{O}$. De plus, si A est inversible le système homogène à seulement la solution trivial, sinon il a une infinité de solution, puisque c'est impossible que $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|\mathbb{O})$, et donc que le système soit incompatible.

2.5.5 Noyau d'un système

Soit $A \in M_{m \times n}$

Définition 2.19. Le noyau de A , noté $N(A)$, est l'ensemble de tous les solutions du système homogène $AX = \mathbb{O}$, soit

$$N(A) = \{X \in M_{n \times 1} \mid AX = \mathbb{O}\}$$

3 Chapitre 3: Espace vectorielle de dimension finie

Définition 3.1. Un ensemble V est un espace vectorielle sur un corps F si

- 1) V est fermé sous l'addition c-à-d, $\forall (v_1, v_2 \in V), v_1 + v_2 \in V$
- 2) V est fermé sous la multication par un scalaire c-à-d, $\forall (v \in V, \alpha \in F), \alpha v \in V$

Les éléments de V sont appelés « vecteurs ».

Remarque. L'espace vectorielle le plus simple est $V = \{0_v\}$, ou 0_v est l'élément nulle.

Définition 3.2. Un scalaire α est un élément du corps F associé à l'espace vectorielle.

Dans notre cas, ce corps est soit les nombres réels \mathbb{R} , ou les nombres complexes \mathbb{C} .

3.1 Base d'un espace vectorielle

Soit un espace vectorielle V et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des scalaires.

3.1.1 Combinaison linéaire

Soit $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

Définition 3.3. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ est une combinaison linéaire de v_1, v_2, \dots, v_n

3.1.2 Ensemble générateur

Définition 3.4. Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, est un ensemble générateur si

$$\forall v \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ scalaire t.q. } v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

Note: Pour prouver qu'un ensemble est un ensemble générateur, il faut habituellement prendre un élément général de l'espace vectorielle et exprimer cet élément général comme une combinaison linéaire des vecteurs dans S .

3.1.3 Indépendance linéaire

Définition 3.5. Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, est un linéaire indépendant si

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_v \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

sinon S est linéairement dépendant, ou lié.

3.1.4 Déterminer l'indépendance linéaire de $S \subset \mathbb{R}^n$

Soit $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$ avec $u_j = (u_{1j} \ u_{2j} \ \dots \ u_{nj})^T$, $u_{kj} \in \mathbb{R}$ et $|S| = m$

Considérons la matrice $M = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m)$.

Pour déterminer l'indépendance linéaire de S à partir de M , il faut échelonner la matrice M ou la matrice M^T . En échelonnant M ou M^T , on peut arriver à deux conclusions, soit

1. $\text{rg}(M^T) < m$ ou $\text{rg}(M) < m \implies S$ est lié.
2. $\text{rg}(M^T) = m$ ou $\text{rg}(M) = m \implies S$ est linéairement indépendant.

Note: Échelonner M^T donne des résultats plus simple à interpréter puisque $0 \leq \text{rg}(M^T) \leq m$. Alors si M^T échelonné contient une ligne nulle on sait automatiquement que S est lié, ce qui n'est pas le cas si M échelonné contient une ligne nulle.

3.1.5 Base d'un espace vectorielle

Définition 3.6. Un ensemble $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, est une base de V si B est un ensemble générateur de V et B est linéairement indépendant.

Définition 3.7. La dimension de V est $\dim_F V = |B|$, ou $|B|$ est le nombre d'élément dans la base B de V et F est le corps de l'espace vectorielle.

Théorème 3.1. Le nombre de vecteur dans une base de V ne dépend pas de la base choisi.

Remarque. Le théorème qui précède nous permet de définir la dimension de V comme étant le nombre de vecteurs dans une base de V , puisque toutes les bases de V contiennent le même nombre de vecteurs.

Base canonique: Un espace vectorielle a souvent une base canonique, soit une base plus naturel à utiliser. Par exemple, la base canonique de \mathbb{R}^n est $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. On peut donc dire que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

3.1.6 Représentation d'un vecteur dans une base

Soit V un espace vectorielle avec $\dim_F V = n$, et $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base de V .

Cela veut dire que $\forall v \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ scalaire t.q. $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

Définition 3.8. Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont appelés les coordonnées de v dans la base B .

Définition 3.9. La représentation de v dans la base B est noté $[v]_B$ et est exprimé

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n$$

3.1.7 Propriétés d'une base d'un espace vectorielle

- a) Soit $v_1, v_2 \in V$, alors $v_1 = v_2 \iff [v_1]_B = [v_2]_B$
- b) Soit $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$
Si $S' = \{[u_1]_B, [u_2]_B, \dots, [u_n]_B\}$ est linéairement indépendant alors S l'est aussi
- c) La représentation dans une base est linéaire, ce qui veut dire qu'elle satisfait ces deux propriétés:
 - 1. $[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$
 - 2. $[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$