MAT193 - Algèbre Linéaire - Résumé

Étienne Pinard

Compilé le 11 décembre 2024

Table des matières

1 Chapitre 1: Nombres Complexes

1.1 Définition des nombres complexes

Rappel: les unités de $\mathbb{R}$ sont 1 et -1

Définition 1.1. i est l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$

Alors, il est possible de former un nouveau ensemble qui a a les unités $1, -1, i$ et α scalaire $\in \mathbb{R}$

Définition 1.2. L'ensemble qui a a les unités $1, -1, i$ et α scalaire $\in \mathbb{R}$ est appellé nombre complexes et est noté $\mathbb{C}$

1.2 Représentation des nombres complexes

Soit $x, y, r, \theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Il a trois façons principales de représenter z

1. Forme algégrique (cartésienne): $z = x + iy$
2. Forme polaire: $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
3. Forme exponentielle: $z = re^{i\theta}$

1.3 Changement de forme: Algèbrique à polaire/exponentielle

Soit $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Définition 1.3. On appelle r le module de z noté $|z|$ avec $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition 1.4. On appelle θ l'argument de z noté $\text{Arg}(z)$ avec

$$\theta = Arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \\ \text{sign}(y)\frac{\pi}{2} & x = 0,\ \text{sign}(y) \text{ est la signe de y} \end{cases}$$

Remarque. L'argument non unique de z est $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

1.4 Opérations propres aux nombres complexes

Soit $z \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R},\ \text{t.q. } z = x + iy$

Définition 1.5. Les parties réel et imaginaire de z sont $\text{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$ et $\text{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$

Définition 1.6. Le conjugée de z est $z^* = \bar{z} = x - iy = \text{Re}(z) - i\text{Im}(z)$

1.4.1 Propriétés des opérations

Le conjugée et le module sont distributif sur l'addition, la multiplication et la division

$$\begin{array}{ccc} (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* & (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* & \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \\ |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| & |z_1 z_2| = |z_1||z_2| & \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{array}$$

Le conjugée de z^* est z, soit $(z^*)^* = z$
Le conjugée z et le module de z est relié par $zz^* = |z|^2$
L'argument de z à des propriétés semblabes aux propriétés logarithmiques

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

1.5 Racines entières

Soit $z = re^{i\theta},\ n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}\right),\ k = 0, \ldots, n-1$$

On peut aussi calculer les racines de z de manières récursives.
Si w est une racine de z, alors on a

$$w_k = \begin{cases} w_{k-1}e^{\frac{2\pi i}{n}} & k > 0 \\ \sqrt[n]{r}\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right) & k = 0 \end{cases}$$

Remarque. Deux racines entières consécutives sont séparées par un angle de $\frac{2\pi}{n}$

1.6 Exponentielle et logarithme

Soit $z \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R},\ \text{t.q. } z = x + iy$
L'exponentielle de z est

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cos(y) + isin(y))$$

Le logarithme de z est

$$\begin{aligned} \ln(z) = \log(z) &= \ln\left(|z|e^{i(\theta+2\pi k)}\right) \\ &= \ln|z| + i(\theta + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z} \\ &= \ln|z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z} \\ &= \ln|z| + i\arg(z) \end{aligned}$$

1.7 Puissance Complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $w = x + iy$

$$z^w = \left(e^{\ln(z)}\right)^w = e^{\ln(z)w} = e^{(\ln|z|+i\arg(z))(x+iy)} = |z|^x e^{-y\arg(z)} e^{i(x\arg(z)+y\ln|z|)}$$

Si $y \neq 0$ alors z^w prend une infinité de valeurs distinctes, puisque $e^{-y\arg(z)} = e^{-y\text{Arg}(z)+2\pi yk},\ k \in \mathbb{Z}$
Si $y = 0 \implies w \in \mathbb{R}$ alors le nombre de valeurs de z^w dépend dans quelle ensemble x est.
Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \implies \exists\ k \in \mathbb{Z}$ t.q. $kx \in \mathbb{Z} \implies z^w$ a n valeurs distinctes
Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \implies \nexists\ k \in \mathbb{Z}$ t.q. $kx \in \mathbb{Z} \implies z^w$ a une infinité de valeurs distinctes
Dans ce dernier cas, si $z, w \in \mathbb{R}$ alors, par convention, on prend $k = 0$ pour que $z^w \in \mathbb{R}$.

1.8 Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ n \in N$
Alors on peut écrire $p(x)$ en terme de ses racines $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\},\ x_j \in \mathbb{C}$, soit

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}$$

où k_j est la multiplicité de la racine x_j avec $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$
Alors $p(x)$ a exactement n racines complexes en comptant les multiplicités.

2 Chapitre 2: Matrices

2.1 Définition d'une matrice

Définition 2.1. L'ensemble des matrices de type $m \times n$ sur un corps F est noté $M_{m\times n}(F)$
Si F est un corps quelconque alors $M_{m\times n}(F) = M_{m\times n}$

Définition 2.2. Soit $A \in M_{m\times n}(F)$. A est aussi noté $A_{m\times n}$ et peut-être représenté par un tableau qui contient m lignes et n colonnes ou $(A)_{kj}$ est l'élément à la ligne k et colonne j.

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ (A)_{kj} \in F\ \forall\ k, j$$

Notez que dans ce cours, on considère seulement le cas $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$

Définition 2.3. Si $m = n$ alors $A_{m\times n} = A_{nn} = A_n$ est une matrice carré.

Définition 2.4. La matrice composé uniquement de 0 pour un certain type $m \times n$ est écrite $\mathbb{O}$

Définition 2.5. La matrice identité de type n est écrite $I_n = I$ avec $(I)_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Soit $A \in M_n(F)$ et $a_{kj} \in F$ avec $k, j \in \{0, 1, \dots, n\}$

Définition 2.6. A est triangulaire supérieur si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } j \geq k \\ 0 & \text{si } j < k \end{cases}$

Définition 2.7. A est triangulaire inférieur si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$

Remarque. A est triangulaire si A est triangulaire supérieur ou triangulaire inférieur

Définition 2.8. A est diagonale si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Remarque. $I_n = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$ ainsi que $\mathbb{O}_n = \text{diag}\{0, 0, \dots, 0\}$

2.2 Opérations matricielles

2.2.1 Addition de matrices

L'addition de deux matrices A et B existe seulement si A et B sont du même type. L'addition est commutatif, associatif, possède un élément neutre et possède un inverse.

$$(AB)_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$$

2.2.2 Multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire α existe pour une matrice A de n'importe quel type. La multiplication par un scalaire est associatif, distributif, commutatif et possède un inverse si $\alpha \neq 0$.

$$(\alpha A)_{kj} = \alpha a_{kj}$$

2.2.3 Produit matricielle

Soit $A \in M_{m \times n}$ et $B \in M_{r \times t}$. Alors le produit matricielle AB existe si $n = r$. Dans ce cas, on a

$$(AB)_{kj} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} b_{sj}$$

Remarque. L'élément à la position i, j de AB est le produit scalaire canonique entre la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B

2.2.4 Propriétés du produit matricielle

Soit A, B, C des matrices dont le produit matricielle entre eux existe.
Le produit matricielle est associatif, distributif et possède un élément neutre, soit I.
Important: Le produit matricielle n'est, généralement, pas commutatif

$$(AB)C = A(BC) \quad AB \neq BA \quad A(B+C) = AB + AC \quad (A+B)C = AC + BC \quad AI = IA = A$$

2.2.5 Transposition

Définition 2.9. La transposé de $A \in M_{m \times n}$ est noté A^T avec $\left(A^T\right)_{kj} = a_{jk}$.

Remarque. Pour une matrice carré, la transposé est une rotation des anti-diagonale par rapport à la grande diagonale.

2.2.6 Conjugée hermitien

Définition 2.10. Le conjugué hermitien de $A \in M_{m \times n}$ est noté $A^\dagger$ avec $A^\dagger = \left(A^T\right)^\star = (A^\star)^T$. Le conjugué hermitien est aussi appellé la transposé conjugué.

Remarque. Pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A^\dagger = A^T$

2.2.7 Propriétés transposé et conjugué hermitien

Soit $A, B \in M_n$, α scalaire. Alors on a

$$\begin{aligned}
\left(A^T\right)^T &= A & \left(A^\dagger\right)^\dagger &= A \\
(\alpha A)^T &= \alpha A^T & (\alpha A)^\dagger &= \alpha^\star A^\dagger \\
(A+B)^T &= A^T + B^T & (A+B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger \\
(AB)^T &= B^T A^T & (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger
\end{aligned}$$

Définition 2.11. Si $A^T = A$, alors A est dite symétrique. Si $A^T = -A$, alors A est dite anti-symétrique.

Définition 2.12. Si A est une matrice carré tel que $AA^T = A^T A = I$, alors A est appellé orthogonal.

Définition 2.13. Si $A^\dagger = A$, alors A est dite hermitienne. Si $A^\dagger = -A$, alors A est dite anti-hermitienne.

Définition 2.14. Si A est une matrice carré tel que $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, alors A est appellé unitaire.

Remarque. La symétrie et l'orthogonal s'applique au matrice réel. L'hermitien et l'unitaire s'applique au matrice complexe.

2.2.8 Commutateur de matrice

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, alors le commutateur de A et B est la matrice

$$[A, B] = AB - BA$$

2.2.9 Propriétés du commutateur

1. $[A,B] = -[B,A]$
2. $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A,B]$
3. $[A+B, C] = [A,C] + [B,C]$
4. $[A,B]^T = -[A^T, B^T]$
5. L'identité de Jacobi: $[[A,B],C] + [[C,A],B] + [[B,C],A] = \mathbb{O}$

2.2.10 Trace d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Alors la trace de A est

$$\mathrm{tr}A = \sum_{j=0}^{n} a_{jj}$$

2.2.11 Propriétés de la trace

1. $\mathrm{tr}\{AB\} = \mathrm{tr}\{BA\}$
2. $\mathrm{tr}\{A+B\} = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$
3. $\mathrm{tr}\{\alpha A\} = \alpha \mathrm{tr}A$
4. $\mathrm{tr}\{A^T\} = \mathrm{tr}A$, $\mathrm{tr}\{A^\dagger\} = \mathrm{tr}A^\star$
5. $\mathrm{tr}\{[A,B]\} = \mathrm{tr}\{AB - BA\} = \mathrm{tr}\{AB\} - \mathrm{tr}\{BA\} = \mathrm{tr}\{AB\} - \mathrm{tr}\{AB\} = 0$

2.3 Déterminant d'une matrice carré

2.3.1 Défintion du déterminant par récurrence

Définition 2.15. Le déterminant de $A \in M_n(\mathbb{C})$ noté $\det A = |A|$ est une nombre complexe qui peut-être définie par récurrence sur n comme suit

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ceci est l'expansion par la kème ligne, $1 \leq k \leq n$. Le terme m_{kj} est le déterminant de la sous-matrice M_{kj} qu'on obtient si on biffe la ligne k et la colonne j, alors $m_{ji} = \det M_{ji}$.
Dans la première équation, le déterminant des sous-matrices était multiplié par la kème ligne. Il est équivalent de développer le déterminant suivant la jème colonne, ce qui donne cette équation

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Remarque. La seule différence entre les deux équations est l'indice de la somme. L'indice est j si on développe par la kème ligne sinon l'indice est k si on développe par la jème colonne.

2.3.2 Défintion du déterminant par les permutations

Définition 2.16. Le déterminant de A peut aussi être définie de cette façons

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{j\sigma_j}$$

Ici $\sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n\end{pmatrix}$ et représente une permutation de l'ensemble $\{1,\ 2, \dots,\ n\}$.
σ_j est le jème élément de cette permutation.
S_n est l'ensemble de tous ces permutations.
$\text{sign}(\sigma)$ est la signature de σ et est égale à $(-1)^{\text{nb de désorde de } \sigma}$.
Le désorde de σ est le nombre de couple (σ_j, σ_k) ou $j < k$ mais $\sigma_j > \sigma_k$.

2.3.3 Propriétés du déterminant

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \alpha \in \mathbb{C}$

1. $\det A^T = \det A$
2. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
3. $\det(A^\star) = (\det A)^\star$
4. $\det A^\dagger = (\det A)^\star$
5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
6. $\det(A^m) = (\det A)^m$
7. $\det(A + B) \neq \det A + \det B$, généralement
8. $\det(\text{diag}\{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}) = a_1 a_2 \dots a_n$
9. Si A est triangulaire alors $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

Il existe aussi des propriétés utile pour transformer le déterminant d'une matrice carré quelconque en le déterminant d'une matrice triangulaire multiplié par un facteur constant.
Soit $A = \begin{bmatrix}(L_1)^T & (L_2)^T & \dots & (L_n)^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_1 C_2 \dots C_n\end{bmatrix}$ ou $L_j \in M_{1\times n}(\mathbb{C}),\ C_j \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$
Dans ce cas, L_j est la jème ligne de A et C_j est la jème colonne de A. Les lignes sont écris avec des transposés pour sauver de l'espace.
Note: Les propriétés sont valides pour les lignes et les colonnes. Par contre, pour être concis, ils sont seulement exprimés en termes des colonnes dans ce résumé.

1. Échanger deux colonnes ou lignes change le signe du déterminant:
$$\det\begin{pmatrix}C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}C_1 \dots C_k \dots C_j \dots C_n\end{pmatrix}$$
2. Si deux colonnes ou lignes sont pareils alors le déterminant est nulle
$$\det\begin{pmatrix}C_1 \dots C_j \dots C_j \dots C_n\end{pmatrix} = 0$$
3. Multiplier une colonne ou ligne par un scalaire revient le déterminant par ce même scalaire
$$\det\begin{pmatrix}C_1 \dots \alpha C_j \dots C_n\end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix}C_1 \dots C_j \dots C_n\end{pmatrix}$$
4. Ajouter une colonne ou ligne multiplié par un scalaire à une autre colonne ou ligne ne change pas le déterminant
$$\det\begin{pmatrix}C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}C_1 \dots C_j + \alpha C_k \dots C_k \dots C_n\end{pmatrix}$$
5. Si on peut décomposer une colonne ou ligne en la somme de deux colonne ou ligne alors le déterminant est la somme des déterminants des deux matrices qui ont chacune une décomposition de la colonne ou ligne
$$\det\begin{pmatrix}C_1 \dots M + N \dots C_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}C_1 \dots M \dots C_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}C_1 \dots N \dots C_n\end{pmatrix}$$

2.4 Matrice inverses

Définition 2.17. $A \in M_{n\times n}$ est inversible $\iff \exists\ B$ t.q. $AB = BA = I$.
Alors B est noté A^{-1} et est appellé la matrice inverse de A

2.4.1 Propriétés de l'inverse

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ inversible

1. $AB = \mathbb{O} \implies B = \mathbb{O}$
2. Si $AC = BA = I \implies B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$, l'inverse à gauche et à droite sont égaux
3. $(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.4.2 Calculer la matrice inverse

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$$

$\operatorname{adj}(A)$ est la matrice adjointe de A et est définie comme

$$(\operatorname{adj}(A))_{kj} = (c_{jk})$$

c_{kj} est le cofacteur d'incice kj de A et est défini comme

$$c_{kj} = (-1)^{k+j} m_{kj}$$

m_{kj} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en biffant la ligne k et la colonne j.
On peut donc remarquer que $\det A = \sum_{j=1}^{n} = a_{kj}c_{kj}$
Cette manière de calculer la matrice inverse nous permet de formuler ce théorème:

Théorème 2.1. A est inversible $\iff \det A \neq 0$

2.5 Systèmes d'équations linéaires

Définition 2.18. Chaque système d'équation linéaire peut-être représenter par une equation matricielle, soit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le système devient $AX = B \iff (A|B)$. $(A|B)$ est dit A augmenté de B et est la matrice augmenté du système.

2.5.1 Forme échelonné d'un système

Une matrice est de la forme échelonné si

1. La ligne qui précède une ligne non-nulle est non-nulle
2. Le premier coefficient non-nul d'une ligne non-nulle, appellé le pivot, est plus à gauche que le premier coefficient non-nul de la ligne suivante.

On peut simplifier le système si on obtient la forme échelonné de la matrice augmenté. On obtient la forme échelonné en appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de A et B. Ces opérations sont

1. Échanger deux lignes, $L_j \leftrightarrow L_k$
2. Additionner le multiple d'une ligne à une autre $L_j \mapsto L_j + \alpha L_k$
3. Multiplier une ligne par un scalaire non-nul, $L_j \mapsto \alpha L_j,\ \alpha \neq 0$

2.5.2 Rang d'une matrice

$\mathrm{rg}(A)$ est le rang de A et est le nombre de ligne non-nulle de la forme échelonné de A. On a alors trois cas pour un système linéaire $AX = B$, soit

1. Si $\mathrm{rg}(A) < rg(A|B)$, alors le système n'a pas de solution, il est incompatible
2. Si $\mathrm{rg}(A) = rg(A|B) = n$, alors le système a une unique solution, il est compatible
3. Si $\mathrm{rg}(A) = rg(A|B) < n$, alors le système a une infinité de solution, il est compatible

Dans le dernier cas, le système a une infinité de solution puisque qu'il a des variables libres, soit exactement $n - \mathrm{rg}(A)$ variables libres.

Remarque. Si A' est la forme échelonné de A, alors $\det A = \alpha \det A',\ \alpha \in \mathbb{C}$. On peut donc étendre le théorème 2.1 avec le rang

Théorème 2.2. $\det A \neq 0 \iff \mathrm{rg}(A) = n \iff A$ est inversible $\iff AX = B$ a une unique solution

Remarque. L'unique solution dans ce cas est $X = A^{-1}B$, puisque A est inversible.

2.5.3 Calculer l'inverse d'une matrice

Il est possible de calculer l'inverse de A en échelonnant le système $(A|I)$. Le système échelonné va donner $(A|I) \sim (I|B)$, avec $B = A^{-1}$.

2.5.4 Système homogène

Un système homogène est un système de la forme $AX = \mathbb{O}$. Un tel système est toujours compatible avec la solution trivial $X = \mathbb{O}$. De plus, si A est inversible le système homogène à seulement la solution trivial, sinon il a une infinité de solution, puisque c'est impossible que $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|\mathbb{O})$, et donc que le système soit incompatible.

2.5.5 Noyau d'un système

Définition 2.19. Le noyau de $A \in M_{m\times n}$, noté $\mathrm{N}(A)$, est l'ensemble de tous les solutions du système homogène $AX = \mathbb{O}$, soit

$$\mathrm{N}(A) = \{X \in M_{n\times 1} \mid AX = \mathbb{O}\}$$

3 Chapitre 3: Espace vectoriel de dimension finie

Définition 3.1. Un ensemble V est un espace vectoriel sur un corps F si

1) V est fermé sous l'addition c-à-d, $\forall\ (v_1, v_2 \in V),\ v_1 + v_2 \in V$
2) V est fermé sous la multication par un scalaire c-à-d, $\forall\ (v \in V,\ \alpha \in F),\ \alpha v \in V$

Les éléments de V sont appellés « vecteurs ».

Remarque. L'espace vectoriel le plus simple est $V = \{0_v\}$, ou 0_v est l'élément nulle.

Définition 3.2. Un scalaire α est un élément du corps F associé à l'espace vectoriel.

Dans notre cas, ce corps est soit les nombres réels $\mathbb{R}$, ou les nombres complexes $\mathbb{C}$.

3.1 Base d'un espace vectoriel

Soit un espace vectoriel V et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des scalaires.

3.1.1 Combinaison linéaire

Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$

Définition 3.3. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_n$

3.1.2 Ensemble générateur

Définition 3.4. Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$, est un ensemble générateur si

$$\forall v \in V\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ scalaire t.q. } v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

Note: Pour prouver qu'un ensemble est un ensemble générateur, il faut habituellement prendre un élément général de l'espace vectoriel et exprimer cet élément général comme une combinaison linéaire des vecteurs dans S.

3.1.3 Indépendance linéaire

Définition 3.5. Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$, est un linéaire indépendant si

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0_v \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

sinon S est linéairement dépendant, ou lié.

3.1.4 Déterminer l'indépendance linéaire de $S \subset \mathbb{R}^n$

Soit $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$ avec $u_j = \begin{pmatrix} u_{1j} & u_{2j} & \ldots & u_{nj} \end{pmatrix}^T$, $u_{kj} \in \mathbb{R}$ et $|S| = m$
Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix}$.
Pour déterminer l'indépendance linéaire de S à partir de M, il faut échelonner la matrice M ou la matrice M^T. En échelonnant M ou M^T, on peut arriver à deux conclusions, soit

1. $\mathrm{rg}(M^T) < m$ ou $\mathrm{rg}(M) < m \implies S$ est lié.
2. $\mathrm{rg}(M^T) = m$ ou $\mathrm{rg}(M^T) = m \implies S$ est linéairement indépendant.

Note: Échelonner M^T donne des résultats plus simple à interpréter puisque $0 \leq \mathrm{rg}(M^T) \leq m$. Alors si M^T échelonné contient une ligne nulle on sait automatiquement que S est lié, ce qui n'est pas le cas si M échelonné contient une ligne nulle.

3.1.5 Base d'un espace vectoriel

Définition 3.6. Un ensemble $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$, est une base de V si B est un ensemble générateur de V et B est linéairement indépendant.

Définition 3.7. La dimension de V est $\dim_F V = |B|$, ou $|B|$ est le nombre d'élément dans la base B de V et F est le corps de l'espace vectoriel.

Théorème 3.1. Le nombre de vecteur dans une base de V ne dépend pas de la base choisi.

Remarque. Le théorème qui précède nous permet de définir la dimension de V comme étant le nombre de vecteurs dans une base de V, puisque toutes les bases de V contiennent le même nombre de vecteurs.

Base canonique: Un espace vectoriel a souvent une base canonique, soit une base plus naturel à utiliser. Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. On peut donc dire que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

3.1.6 Représentation d'un vecteur dans une base

Soit V un espace vectoriel avec $\dim_F V = n$, et $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ une base de V.
Cela veut dire que $\forall\ v \in V\ \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ scalaire t.q. $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$

Définition 3.8. Les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont appellés les coordonnées de v dans la base B.

Définition 3.9. La représentation de v dans la base B est noté $[v]_B$ et est exprimé

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n$$

3.1.7 Propriétés d'une base d'un espace vectoriel

a) Soit $v_1, v_2 \in V$, alors $v_1 = v_2 \iff [v_1]_B = [v_2]_B$

b) La représentation dans une base est linaire, ce qui veut dire qu'elle satisfait ces deux propriétés:
   1. $[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$
   2. $[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$

c) Soit $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$
   Si $S' = \{[u_1]_B, [u_2]_B, \ldots, [u_n]_B\}$ est linéairement indépendant alors S l'est aussi

3.2 Matrice de changement de base

Soit V un espace vectoriel avec $\dim_F V = n$
Soit $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et $B' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ deux bases de V

Définition 3.10. La matrice de changement (ou de passage) de la base B' à B est noté $P_B^{B'}$ et est donné par $P_B^{B'} = \begin{bmatrix} [u'_1]_B & [u'_2]_B & \ldots & [u'_n]_B \end{bmatrix}$. Les bases sont liées par la matrice de passage par l'équation

$$P_B^{B'} [v]_{B'} = [v]_B$$

Note: Il a plusieurs notation pour la matrice de passage. La notation utilisée dans cette définition est équivalente à $\underset{B' \to B}{P}$

Lemme 3.10.1. La matrice de passage de B à B' est l'inverse de la matrice de passage de B' à B, soit

$$P_{B'}^{B} = \left(P_B^{B'}\right)^{-1}$$

Lemme 3.10.2. La matrice de passage est unique.

3.3 L'indépendance linéaire des functions

Soit V l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec des scalaire réels
La dimensions de V est infinie et il n'y a pas de bases dans V
Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n \subset V$ et $S = \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Pour déterminer l'indépendance linéaire de S, considérons $F(x) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$
Supposons que S est linéairement indépendant, c-à-d que $F(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$
Il faut ensuite prendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valeurs et évaluer $F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_n)$.
Le résultats va être n équations de la forme $\alpha_1 v_1(x_j) + \alpha_2 v_2(x_j) + \cdots + \alpha_n v_n(x_j) = 0$
Important: Pour que la méthode fonctionne, il faut que les n équations soit uniques. En d'autres termes, si $F(a) = F(b)$ alors a et b ne peuvent pas les deux faire parties des n valeurs choisis.

Maintenant, il faut résoudre le système homogène $\begin{cases} \alpha_1 v_1(x_1) + \alpha_2 v_2(x_1) + \cdots + \alpha_n v_n(x_1) = 0 \\ \alpha_1 v_1(x_2) + \alpha_2 v_2(x_2) + \cdots + \alpha_n v_n(x_2) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_1(x_n) + \alpha_2 v_2(x_n) + \cdots + \alpha_n v_n(x_n) = 0 \end{cases}$

La résolution du système va aboutir à deux possibilitées:

1. Le système homogène à seulement la solution nulle $\implies S$ est linéairement indépendant
2. Le système homogène à seulement une infinité de solution. Dans ce cas, on doit construire une nouvelle fonction $\hat{F}(x) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$ ou $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ est une solution non-nulle du système. Il faut alors démontrer que $\hat{F}(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Si c'est le cas, alors on peut conclure que S est lié.

3.4 Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire

3.4.1 Produit scalaire réel

Soit V un espace vectoriel réel

Définition 3.11. Un produit scalaire dans V est une application $\langle\cdot|\cdot\rangle \colon \begin{array}{rcl} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ u, v \in V & \mapsto & \langle u|v\rangle \end{array}$, t.q.

1. $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle$ 2. $\langle u|v + \alpha w\rangle = \langle u|v\rangle + \alpha\langle u|w\rangle$ 3. $\langle u|u\rangle \geq 0$ et $\langle u|u\rangle = 0 \iff u = 0$

Remarque. Le produit scalaire réel n'est pas unique.

Définition 3.12. Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est définie positif si $x^T A x > 0 \ \forall \ x \neq 0, \ x \in R^n$

Lemme 3.12.1. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symétrique et définie positif, alors tout produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ peut être écris comme tel, $\langle x|y\rangle = x^T A y$. On note ce produit scalaire modifié $\langle u|v\rangle_A$

Définition 3.13. Le cas ou $A = I \implies \langle x|y\rangle = x^T I y = x^T y$ est appellé le produit scalaire canonique (ou euclédien) dans $\mathbb{R}^n$

3.4.2 Produit scalaire complexe

Soit V un espace vectoriel complexe. Le produit scalaire complexe est défini de manière similaire au produit scalaire réel [3.11] à l'exception d'une restriction de plus.

Définition 3.14. Un produit scalaire dans V est une application $\langle\cdot|\cdot\rangle \colon \begin{array}{rcl} V \times V & \to & \mathbb{C} \\ u, v \in V & \mapsto & \langle u|v\rangle \end{array}$, t.q.

1. $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$ 2. $\langle u|v + \alpha w\rangle = \langle u|v\rangle + \alpha\langle u|w\rangle$ 3. $\langle u|u\rangle \geq 0$ et $\langle u|u\rangle = 0 \iff u = 0$

Remarque. La définition implique que $\langle \alpha v + \beta u | w \rangle = \alpha^* \langle v | w \rangle + \beta^* \langle u | w \rangle$

Lemme 3.14.1. Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$ et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitienne et définie positif, alors tout produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$ peut être écris comme tel, $\langle x|y\rangle_A = x^\dagger A y$.

Définition 3.15. Le produit scalaire canonique dans $\mathbb{C}^n$ est $\langle x|y\rangle = x^\dagger y$

3.4.3 Orthogonalité entre deux vecteurs

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Définition 3.16. $x, y \in V$ sont orthogonales $\iff \langle x|y\rangle = 0$. Alors on note $x \perp y$.

Remarque. L'orthogonalité entre deux vecteurs est toujours par rapport au produit scalaire utilisé

3.4.4 Norme d'un vecteur

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Définition 3.17. La norme de $x \in V$ par rapport au produit scalaire dans V est $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$

Remarque. La norme d'un vecteur change par rapport au produit scalaire utilisé

Définition 3.18. Un vecteur de norme 1 est dit un vecteur unitaire.

Lemme 3.18.1. Tout vecteur x peut être transformé en vecteur unitaire avec la formule $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$

3.4.5 Distance entre deux vecteurs

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Définition 3.19. La distance entre $x, y \in V$ est $\mathrm{dist}(x, y) = \|x - y\|$

Remarque. Encore une fois, la distance entre deux vecteurs change par rapport au produit scalaire utilisé

3.4.6 Inégalité du produit scalaire

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $u, u \in V$

Théorème 3.2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est $|\langle u|v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$

Théorème 3.3. L'inégalité du triangle est $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

3.5 Base orthonormales

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $\dim V = n$
Soit $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset V$

Définition 3.20. S orthonormale $\iff u_{k_1} \perp u_{k_2} \;\forall\; k_1 \neq k_2$ et $\|u_k\| = 1 \;\forall\; k = 1, 2, \ldots, m$

Définition 3.21. Le delta de Kronecker est $\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$

Remarque. Le delta de Kronecker pour $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ est la matrice identité $n \times n$. De plus, on peut utiliser le delta de Kronecker pour simplifier la définition d'un ensemble orthonormé.

Définition 3.22. S orthonormale $\iff \langle u_k|u_j\rangle = \delta_{kj} \;\forall\; u_k, u_j \in S$

Définition 3.23. B est une base orthonormale (ou orthonormé) dans V si B est une base dans V et B est un ensemble orthonormale.

Soit B une base orthonormale de V. Notons le produit scalaire dans V comme $\langle\cdot|\cdot\rangle_V$

Théorème 3.4. Pour $x, y \in V$, on a $\langle x|y\rangle_V = [x]_B^\dagger [y]_B = \langle [x]_B | [y]_B \rangle_{\mathbb{C}^n}$

Remarque. Il est possible de traduire tout produit scalaire dans V au produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$ à l'aide d'une base orthonormale de V.

3.6 Projection orthogonal

Soit $R = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset V$ un ensemble orthonormale avec $\dim V = n > m$
Considérons le sous-espace $W = \operatorname{span}\{R\} \subset V$ qui a R comme base orthonormale

Définition 3.24. Soit $v \in V$, alors $S_W(v) = \sum_{k=1}^{m} \langle u_k|v\rangle u_k$

Théorème 3.5. Le vecteur $S_W(v) \in W$ et $S_W(v) \perp w \;\forall\; v \in V,\; w \in W$

3.7 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ un ensemble linéairement indépendant. L'orthonormalisation de Gram-Schmidt va produire un ensemble orthonormale $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ à partir des vecteurs de W.

Étape 1.	Posons $u_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|}$	Alors u_1 est unitaire
Étape 2.	Posons $v_2 = w_2 - S_{<u_1>}(w_2)$	Alors $v_2 \perp u_1$
Étape 3.	Posons $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$	Alors u_2 est unitaire et $u_2 \perp u_1$
$\vdots$		
Étape $2m-2$.	Posons $v_m = w_m - S_{<u_1,\ldots,u_{m-1}>}(w_m)$	Alors $v_m \perp \{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$
Étape $2m-1$.	Posons $u_m = \dfrac{v_m}{\|v_m\|}$	Alors u_m est unitaire et $u_m \perp \{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$

Le procédé va se terminer quand toutes les $2m-1$ étapes seront faites.
Note: La notation $< u_1, \ldots, u_j >$ est une façons plus courte d'écrire $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_j\}$