

MAT193 - Algèbre linéaire

Note de cours abrégé

Contient toutes les définitions, théorèmes, lemmes et corollaires

Table des matières

Chapitre 1: Nombres Complexes	3
1.1 Définition des nombres complexes	3
1.2 Représentation des nombres complexes	3
1.3 Changement de forme: Algébrique à polaire/exponentielle	3
1.4 Opérations propres aux nombres complexes	3
1.4.1 Propriétés des opérations	3
1.5 Racines entières	4
1.6 Exponentielle et logarithme	4
1.7 Puissance Complexe	4
1.8 Théorème fondamental de l'algèbre	4
Chapitre 2: Matrices	5
2.1 Définition d'une matrice	5
2.2 Opérations matricielles	5
2.2.1 Addition de matrices	5
2.2.2 Multiplication par un scalaire	5
2.2.3 Produit matricielle	6
2.2.4 Propriétés du produit matricielle	6
2.2.5 Transposition	6
2.2.6 Conjugée hermitien	6
2.2.7 Propriétés transposé et conjugué hermitien	6
2.2.8 Commutateur de matrice	6
2.2.9 Propriétés du commutateur	7
2.2.10 Trace d'une matrice	7
2.2.11 Propriétés de la trace	7
2.3 Déterminant d'une matrice carré	7
2.3.1 Définition du déterminant par récurrence	7
2.3.2 Définition du déterminant par les permutations	7
2.3.3 Propriétés du déterminant	8
2.4 Matrice inverses	8
2.4.1 Propriétés de l'inverse	9
2.4.2 Calculer la matrice inverse	9
2.5 Systèmes d'équations linéaires	9
2.5.1 Forme échelonné d'un système	9
2.5.2 Rang d'une matrice	10
2.5.3 Calculer l'inverse d'une matrice	10
2.5.4 Système homogène	10
2.5.5 Noyau d'un système	10
Chapitre 3: Espace vectoriel de dimension finie	11
3.1 Base d'un espace vectoriel	11
3.1.1 Combinaison linéaire	11
3.1.2 Ensemble générateur	11
3.1.3 Indépendance linéaire	11
3.1.4 Déterminer l'indépendance linéaire de $S \subset \mathbb{R}^n$	11
3.1.5 Base d'un espace vectoriel	12
3.1.6 Représentation d'un vecteur dans une base	12
3.1.7 Propriétés d'une base d'un espace vectoriel	12

3.2	Matrice de changement de base	12
3.3	L'indépendance linéaire des fonctions	13
3.4	Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire	13
3.4.1	Produit scalaire réel	13
3.4.2	Produit scalaire complexe	13
3.4.3	Orthogonalité entre deux vecteurs	14
3.4.4	Norme d'un vecteur	14
3.4.5	Distance entre deux vecteurs	14
3.4.6	Inégalité du produit scalaire	14
3.5	Base orthonormales	14
3.6	Projection orthogonal	15
3.7	Orthonormalisation de Gram-Schmidt	15
	Valeurs et vecteurs propres d'une matrice carré	16
4.1	Valeurs et vecteurs propres	16
4.1.1	Comment calculer les vecteurs propres	16
4.1.2	Multiplicités et espace propre	16
4.2	Propriétés des valeurs propres	16
4.3	Diagonalisation d'une matrice	17
4.4	Fonctions d'une matrice	17
4.4.1	Comment calculer $f(A)$	18
4.4.2	Propriétés de l'exponentielle d'une matrice	18
	Chapitre 5: Espace dual d'un espace vectoriel	19
5.1	Fonctionnelles linéaire	19
5.2	Espace dual dans l'espace vectoriel muni d'un produit scalaire	19
5.2.1	Comment trouver le vecteur dual de $f \in V^*$	19
5.3	Notation de Dirac	19
	Chapitre 6: Opérateurs linéaires	20
6.1	La matrice d'un opérateurs linéaires	20
6.2	Représentation d'un opérateur linéaire dans une nouvelle base	20
6.3	Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur	20
	Chapitre 7: Opérateurs inverses, hermitiens et unitaires	21
7.1	Opérateurs inverses	21
7.1.1	Propriétés de l'opérateur inverse	21
7.2	Opérateurs hermitiens	21
7.2.1	Propriétés de l'opérateur hermitien	21
7.3	Opérateur unitaire	22
7.3.1	Propriétés de l'opérateur unitaire	22

Chapitre 1: Nombres Complexes

1.1 Définition des nombres complexes

Rappel: les unités de \mathbb{R} sont 1 et -1

Définition 1.1. i est l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$

Alors, il est possible de former un nouveau ensemble qui a les unités 1, -1 , i et α scalaire $\in \mathbb{R}$

Définition 1.2. L'ensemble qui a les unités 1, -1 , i et α scalaire $\in \mathbb{R}$ est appelé nombre complexes et est noté \mathbb{C}

1.2 Représentation des nombres complexes

Soit $x, y, r, \theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Il a trois façons principales de représenter z

1. Forme algébrique (cartésienne): $z = x + iy$
2. Forme polaire: $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
3. Forme exponentielle: $z = re^{i\theta}$

1.3 Changement de forme: Algébrique à polaire/exponentielle

Soit $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Définition 1.3. On appelle r le module de z noté $|z|$ avec $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition 1.4. On appelle θ l'argument de z noté $\text{Arg}(z)$ avec

$$\theta = \text{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \\ \text{sign}(y)\frac{\pi}{2} & x = 0, \text{ sign}(y) \text{ est la signe de } y \end{cases}$$

Remarque. L'argument non unique de z est $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

1.4 Opérations propres aux nombres complexes

Soit $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, t.q. $z = x + iy$

Définition 1.5. Les parties réel et imaginaire de z sont $\text{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$ et $\text{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$

Définition 1.6. Le conjugué de z est $z^* = \bar{z} = x - iy = \text{Re}(z) - i\text{Im}(z)$

1.4.1 Propriétés des opérations

Le conjugué et le module sont distributif sur l'addition, la multiplication et la division

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^* & (z_1 z_2)^* &= z_1^* z_2^* & \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* &= \frac{z_1^*}{z_2^*} \\ |z_1 + z_2| &= |z_1| + |z_2| & |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| & \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

Le conjugué de z^* est z , soit $(z^*)^* = z$

Le conjugué z et le module de z est relié par $zz^* = |z|^2$

L'argument de z a des propriétés semblables aux propriétés logarithmiques

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

1.5 Racines entières

Soit $z = re^{i\theta}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

On peut aussi calculer les racines de z de manières récursives.

Si w est une racine de z , alors on a

$$w_k = \begin{cases} w_{k-1} e^{\frac{2\pi i}{n}} & k > 0 \\ \sqrt[n]{r} \left(e^{i\frac{\theta}{n}} \right) & k = 0 \end{cases}$$

Remarque. Deux racines entières consécutives sont séparées par un angle de $\frac{2\pi}{n}$

1.6 Exponentielle et logarithme

Soit $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, t.q. $z = x + iy$

L'exponentielle de z est

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Le logarithme de z est

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \log(z) = \ln \left(|z| e^{i(\theta+2\pi k)} \right) \\ &= \ln |z| + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \ln |z| + i \arg(z) \end{aligned}$$

1.7 Puissance Complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $w = x + iy$

$$z^w = \left(e^{\ln(z)} \right)^w = e^{\ln(z)w} = e^{(\ln |z| + i \arg(z))(x+iy)} = |z|^x e^{-y \arg(z)} e^{i(x \arg(z) + y \ln |z|)}$$

Si $y \neq 0$ alors z^w prend une infinité de valeurs distinctes, puisque $e^{-y \arg(z)} = e^{-y \text{Arg}(z) + 2\pi y k}$, $k \in \mathbb{Z}$

Si $y = 0 \implies w \in \mathbb{R}$ alors le nombre de valeurs de z^w dépend dans quelle ensemble x est.

Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \implies \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $kx \in \mathbb{Z} \implies z^w$ a n valeurs distinctes

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies \nexists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $kx \in \mathbb{Z} \implies z^w$ a une infinité de valeurs distinctes

Dans ce dernier cas, si $z, w \in \mathbb{R}$ alors, par convention, on prend $k = 0$ pour que $z^w \in \mathbb{R}$.

1.8 Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

Alors on peut écrire $p(x)$ en terme de ses racines $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $x_j \in \mathbb{C}$, soit

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}$$

où k_j est la multiplicité de la racine x_j avec $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

Alors $p(x)$ a exactement n racines complexes en comptant les multiplicités.

Chapitre 2: Matrices

2.1 Définition d'une matrice

Définition 2.1. L'ensemble des matrices de type $m \times n$ sur un corps F est noté $M_{m \times n}(F)$

Si F est un corps quelconque alors $M_{m \times n}(F) = M_{m \times n}$

Définition 2.2. Soit $A \in M_{m \times n}(F)$. A est aussi noté $A_{m \times n}$ et peut-être représenté par un tableau qui contient m lignes et n colonnes ou $(A)_{kj}$ est l'élément à la ligne k et colonne j .

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, (A)_{kj} \in F \forall k, j$$

Notez que dans ce cours, on considère seulement le cas $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$

Définition 2.3. Si $m = n$ alors $A_{m \times n} = A_{nn} = A_n$ est une matrice carré.

Définition 2.4. La matrice composé uniquement de 0 pour un certain type $m \times n$ est écrite \mathbb{O}

Définition 2.5. La matrice identité de type n est écrite $I_n = I$ avec $(I)_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Soit $A \in M_n(F)$ et $a_{kj} \in F$ avec $k, j \in \{0, 1, \dots, n\}$

Définition 2.6. A est triangulaire supérieur si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } j \geq k \\ 0 & \text{si } j < k \end{cases}$

Définition 2.7. A est triangulaire inférieur si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$

Remarque. A est triangulaire si A est triangulaire supérieur ou triangulaire inférieur

Définition 2.8. A est diagonale si $(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Remarque. $I_n = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$ ainsi que $\mathbb{O}_n = \text{diag}\{0, 0, \dots, 0\}$

2.2 Opérations matricielles

2.2.1 Addition de matrices

L'addition de deux matrices A et B existe seulement si A et B sont du même type. L'addition est commutatif, associatif, possède un élément neutre et possède un inverse.

$$(AB)_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$$

2.2.2 Multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire α existe pour une matrice A de n'importe quel type. La multiplication par un scalaire est associatif, distributif, commutatif et possède un inverse si $\alpha \neq 0$.

$$(\alpha A)_{kj} = \alpha a_{kj}$$

2.2.3 Produit matricielle

Soit $A \in M_{m \times n}$ et $B \in M_{r \times t}$. Alors le produit matricielle AB existe si $n = r$. Dans ce cas, on a

$$(AB)_{kj} = \sum_{s=1}^n a_{ks} b_{sj}$$

Remarque. L'élément à la position i, j de AB est le produit scalaire canonique entre la i -ème ligne de A et la j -ème colonne de B

2.2.4 Propriétés du produit matricielle

Soit A, B, C des matrices dont le produit matricielle entre eux existe.

Le produit matricielle est associatif, distributif et possède un élément neutre, soit I .

Important: Le produit matricielle n'est, généralement, pas commutatif

$$(AB)C = A(BC) \quad AB \neq BA \quad A(B + C) = AB + AC \quad (A + B)C = AC + BC \quad AI = IA = A$$

2.2.5 Transposition

Définition 2.9. La transposé de $A \in M_{m \times n}$ est noté A^T avec $(A^T)_{kj} = a_{jk}$.

Remarque. Pour une matrice carré, la transposé est une rotation des anti-diagonale par rapport à la grande diagonale.

2.2.6 Conjugée hermitien

Définition 2.10. Le conjugué hermitien de $A \in M_{m \times n}$ est noté A^\dagger avec $A^\dagger = (A^T)^\star = (A^\star)^T$. Le conjugué hermitien est aussi appelé la transposé conjugué.

Remarque. Pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A^\dagger = A^T$

2.2.7 Propriétés transposé et conjugué hermitien

Soit $A, B \in M_n$, α scalaire. Alors on a

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A & (A^\dagger)^\dagger &= A \\ (\alpha A)^T &= \alpha A^T & (\alpha A)^\dagger &= \alpha^\star A^\dagger \\ (A + B)^T &= A^T + B^T & (A + B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger \\ (AB)^T &= B^T A^T & (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger \end{aligned}$$

Définition 2.11. Si $A^T = A$, alors A est dite symétrique. Si $A^T = -A$, alors A est dite anti-symétrique.

Définition 2.12. Si A est une matrice carré tel que $AA^T = A^T A = I$, alors A est appelé orthogonal.

Définition 2.13. Si $A^\dagger = A$, alors A est dite hermitienne. Si $A^\dagger = -A$, alors A est dite anti-hermitienne.

Définition 2.14. Si A est une matrice carré tel que $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, alors A est appelé unitaire.

Remarque. La symétrie et l'orthogonal s'applique au matrice réel. L'hermitien et l'unitaire s'applique au matrice complexe.

2.2.8 Commutateur de matrice

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, alors le commutateur de A et B est la matrice

$$[A, B] = AB - BA$$

2.2.9 Propriétés du commutateur

1. $[A, B] = -[B, A]$
2. $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A, B]$
3. $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$
4. $[A, B]^T = -[A^T, B^T]$
5. L'identité de Jacobi: $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = \mathbb{O}$

2.2.10 Trace d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Alors la trace de A est

$$\text{tr} A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$$

2.2.11 Propriétés de la trace

1. $\text{tr}\{AB\} = \text{tr}\{BA\}$
2. $\text{tr}\{A + B\} = \text{tr} A + \text{tr} B$
3. $\text{tr}\{\alpha A\} = \alpha \text{tr} A$
4. $\text{tr}\{A^T\} = \text{tr} A$, $\text{tr}\{A^\dagger\} = \text{tr} A^*$
5. $\text{tr}\{[A, B]\} = \text{tr}\{AB - BA\} = \text{tr}\{AB\} - \text{tr}\{BA\} = \text{tr}\{AB\} - \text{tr}\{AB\} = 0$

2.3 Déterminant d'une matrice carré

2.3.1 Définition du déterminant par récurrence

Définition 2.15. Le déterminant de $A \in M_n(\mathbb{C})$ noté $\det A = |A|$ est une nombre complexe qui peut-être définie par récurrence sur n comme suit

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ceci est l'expansion par la kème ligne, $1 \leq k \leq n$. Le terme m_{kj} est le déterminant de la sous-matrice M_{kj} qu'on obtient si on biffe la ligne k et la colonne j , alors $m_{ji} = \det M_{ji}$.

Dans la première équation, le déterminant des sous-matrices était multiplié par la kème ligne. Il est équivalent de développer le déterminant suivant la jème colonne, ce qui donne cette équation

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Remarque. La seule différence entre les deux équations est l'indice de la somme. L'indice est j si on développe par la kème ligne sinon l'indice est k si on développe par la jème colonne.

2.3.2 Définition du déterminant par les permutations

Définition 2.16. Le déterminant de A peut aussi être définie de cette façons

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i}$$

Ici $\sigma = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n)$ et représente une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
 σ_j est le jème élément de cette permutation.
 S_n est l'ensemble de tous ces permutations.
 $\text{sign}(\sigma)$ est la signature de σ et est égale à $(-1)^{\text{nb de désordre de } \sigma}$.
 Le désordre de σ est le nombre de couple (σ_j, σ_k) ou $j < k$ mais $\sigma_j > \sigma_k$.

2.3.3 Propriétés du déterminant

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}$

1. $\det A^T = \det A$
2. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
3. $\det(A^*) = (\det A)^*$
4. $\det A^\dagger = (\det A)^*$
5. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
6. $\det(A^m) = (\det A)^m$
7. $\det(A + B) \neq \det A + \det B$, généralement
8. $\det(\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = a_1 a_2 \dots a_n$
9. Si A est triangulaire alors $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

Il existe aussi des propriétés utile pour transformer le déterminant d'une matrice carré quelconque en le déterminant d'une matrice triangulaire multiplié par un facteur constant.

Soit $A = [(L_1)^T \ (L_2)^T \ \dots \ (L_n)^T] = [C_1 C_2 \dots C_n]$ ou $L_j \in M_{1 \times n}(\mathbb{C})$, $C_j \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$

Dans ce cas, L_j est la jème ligne de A et C_j est la jème colonne de A . Les lignes sont écrits avec des transposés pour sauver de l'espace.

Note: Les propriétés sont valides pour les lignes et les colonnes. Par contre, pour être concis, ils sont seulement exprimés en termes des colonnes dans ce résumé.

1. Échanger deux colonnes ou lignes change le signe du déterminant:

$$\det(C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n) = -\det(C_1 \dots C_k \dots C_j \dots C_n)$$

2. Si deux colonnes ou lignes sont pareils alors le déterminant est nulle

$$\det(C_1 \dots C_j \dots C_j \dots C_n) = 0$$

3. Multiplier une colonne ou ligne par un scalaire revient le déterminant par ce même scalaire

$$\det(C_1 \dots \alpha C_j \dots C_n) = \alpha \det(C_1 \dots C_j \dots C_n)$$

4. Ajouter une colonne ou ligne multiplié par un scalaire à une autre colonne ou ligne ne change pas le déterminant

$$\det(C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n) = \det(C_1 \dots C_j + \alpha C_k \dots C_k \dots C_n)$$

5. Si on peut décomposer une colonne ou ligne en la somme de deux colonne ou ligne alors le déterminant est la somme des déterminants des deux matrices qui ont chacune une décomposition de la colonne ou ligne

$$\det(C_1 \dots M + N \dots C_n) = \det(C_1 \dots M \dots C_n) + \det(C_1 \dots N \dots C_n)$$

2.4 Matrice inverses

Définition 2.17. $A \in M_{n \times n}$ est inversible $\iff \exists B$ t.q. $AB = BA = I$.

Alors B est noté A^{-1} et est appelé la matrice inverse de A

2.4.1 Propriétés de l'inverse

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ inversible

1. $AB = \mathbb{O} \implies B = \mathbb{O}$
2. Si $AC = BA = I \implies B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$, l'inverse à gauche et à droite sont égaux
3. $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.4.2 Calculer la matrice inverse

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

$\text{adj}(A)$ est la matrice adjointe de A et est définie comme

$$(\text{adj}(A))_{kj} = (c_{jk})$$

c_{kj} est le cofacteur d'indice kj de A et est défini comme

$$c_{kj} = (-1)^{k+j} m_{kj}$$

m_{kj} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en biffant la ligne k et la colonne j .

On peut donc remarquer que $\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} c_{kj}$

Cette manière de calculer la matrice inverse nous permet de formuler ce théorème:

Théorème 2.18. A est inversible $\iff \det A \neq 0$

2.5 Systèmes d'équations linéaires

Définition 2.19. Chaque système d'équation linéaire peut-être représenter par une equation matricielle, soit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le système devient $AX = B \iff (A|B)$. $(A|B)$ est dit A augmenté de B et est la matrice augmenté du système.

2.5.1 Forme échelonné d'un système

Une matrice est de la forme échelonné si

1. La ligne qui précède une ligne non-nulle est non-nulle
2. Le premier coefficient non-nul d'une ligne non-nulle, appelé le pivot, est plus à gauche que le premier coefficient non-nul de la ligne suivante.

On peut simplifier le système si on obtient la forme échelonné de la matrice augmenté. On obtient la forme échelonné en appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de A et B . Ces opérations sont

1. Échanger deux lignes, $L_j \leftrightarrow L_k$
2. Additionner le multiple d'une ligne à une autre $L_j \mapsto L_j + \alpha L_k$
3. Multiplier une ligne par un scalaire non-nul, $L_j \mapsto \alpha L_j$, $\alpha \neq 0$

2.5.2 Rang d'une matrice

$\text{rg}(A)$ est le rang de A et est le nombre de ligne non-nulle de la forme échelonné de A . On a alors trois cas pour un système linéaire $AX = B$, soit

1. Si $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|B)$, alors le système n'a pas de solution, il est incompatible
2. Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$, alors le système a une unique solution, il est compatible
3. Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) < n$, alors le système a une infinité de solution, il est compatible

Dans le dernier cas, le système a une infinité de solution puisque qu'il a des variables libres, soit exactement $n - \text{rg}(A)$ variables libres.

Remarque. Si A' est la forme échelonné de A , alors $\det A = \alpha \det A'$, $\alpha \in \mathbb{C}$. On peut donc étendre le théorème 2.18 avec le rang

Théorème 2.20. $\det A \neq 0 \iff \text{rg}(A) = n \iff A \text{ est inversible} \iff AX = B \text{ a une unique solution}$

Remarque. L'unique solution dans ce cas est $X = A^{-1}B$, puisque A est inversible.

2.5.3 Calculer l'inverse d'une matrice

Il est possible de calculer l'inverse de A en échelonnant le système $(A|I)$. Le système échelonné va donner $(A|I) \sim (I|B)$, avec $B = A^{-1}$.

2.5.4 Système homogène

Un système homogène est un système de la forme $AX = \mathbb{O}$. Un tel système est toujours compatible avec la solution trivial $X = \mathbb{O}$. De plus, si A est inversible le système homogène à seulement la solution trivial, sinon il a une infinité de solution, puisque c'est impossible que $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|\mathbb{O})$, et donc que le système soit incompatible.

2.5.5 Noyau d'un système

Définition 2.21. Le noyau de $A \in M_{m \times n}$, noté $N(A)$, est l'ensemble de tous les solutions du système homogène $AX = \mathbb{O}$, soit

$$N(A) = \{X \in M_{n \times 1} \mid AX = \mathbb{O}\}$$

Chapitre 3: Espace vectoriel de dimension finie

Définition 3.1. Un ensemble V est un espace vectoriel sur un corps F si

- 1) V est fermé sous l'addition c-à-d, $\forall (v_1, v_2 \in V), v_1 + v_2 \in V$
- 2) V est fermé sous la multiplication par un scalaire c-à-d, $\forall (v \in V, \alpha \in F), \alpha v \in V$

Les éléments de V sont appelés « vecteurs ».

Remarque. L'espace vectoriel le plus simple est $V = \{0_v\}$, où 0_v est l'élément nulle.

Définition 3.2. Un scalaire α est un élément du corps F associé à l'espace vectoriel.

Dans notre cas, ce corps est soit les nombres réels \mathbb{R} , ou les nombres complexes \mathbb{C} .

3.1 Base d'un espace vectoriel

Soit un espace vectoriel V et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des scalaires.

3.1.1 Combinaison linéaire

Soit $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

Définition 3.3. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ est une combinaison linéaire de v_1, v_2, \dots, v_n

3.1.2 Ensemble générateur

Définition 3.4. Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, est un ensemble générateur si

$$\forall v \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ scalaire t.q. } v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

Note: Pour prouver qu'un ensemble est un ensemble générateur, il faut habituellement prendre un élément général de l'espace vectoriel et exprimer cet élément général comme une combinaison linéaire des vecteurs dans S .

3.1.3 Indépendance linéaire

Définition 3.5. Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, est un linéaire indépendant si

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_v \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

sinon S est linéairement dépendant, ou lié.

3.1.4 Déterminer l'indépendance linéaire de $S \subset \mathbb{R}^n$

Soit $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$ avec $u_j = (u_{1j} \ u_{2j} \ \dots \ u_{nj})^T$, $u_{kj} \in \mathbb{R}$ et $|S| = m$
 Considérons la matrice $M = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m)$.

Pour déterminer l'indépendance linéaire de S à partir de M , il faut échelonner la matrice M ou la matrice M^T . En échelonnant M ou M^T , on peut arriver à deux conclusions, soit

1. $\text{rg}(M^T) < m$ ou $\text{rg}(M) < m \implies S$ est lié.
2. $\text{rg}(M^T) = m$ ou $\text{rg}(M) = m \implies S$ est linéairement indépendant.

Note: Échelonner M^T donne des résultats plus simple à interpréter puisque $0 \leq \text{rg}(M^T) \leq m$. Alors si M^T échelonné contient une ligne nulle on sait automatiquement que S est lié, ce qui n'est pas le cas si M échelonné contient une ligne nulle.

3.1.5 Base d'un espace vectoriel

Définition 3.6. Un ensemble $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, est une base de V si B est un ensemble générateur de V et B est linéairement indépendant.

Définition 3.7. La dimension de V est $\dim_F V = |B|$, ou $|B|$ est le nombre d'élément dans la base B de V et F est le corps de l'espace vectoriel.

Théorème 3.8. *Le nombre de vecteur dans une base de V ne dépend pas de la base choisi.*

Remarque. Le théorème qui précède nous permet de définir la dimension de V comme étant le nombre de vecteurs dans une base de V , puisque toutes les bases de V contiennent le même nombre de vecteurs.

Base canonique: Un espace vectoriel a souvent une base canonique, soit une base plus naturel à utiliser. Par exemple, la base canonique de \mathbb{R}^n est $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. On peut donc dire que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

3.1.6 Représentation d'un vecteur dans une base

Soit V un espace vectoriel avec $\dim_F V = n$, et $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base de V . Cela veut dire que $\forall v \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ scalaire t.q. $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

Définition 3.9. Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont appelés les coordonnées de v dans la base B .

Définition 3.10. La représentation de v dans la base B est noté $[v]_B$ et est exprimé

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n$$

3.1.7 Propriétés d'une base d'un espace vectoriel

- a) Soit $v_1, v_2 \in V$, alors $v_1 = v_2 \iff [v_1]_B = [v_2]_B$
- b) La représentation dans une base est linaire, ce qui veut dire qu'elle satisfait ces deux propriétés:
 - 1. $[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$
 - 2. $[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$
- c) Soit $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$
Si $S' = \{[u_1]_B, [u_2]_B, \dots, [u_n]_B\}$ est linéairement indépendant alors S l'est aussi

3.2 Matrice de changement de base

Soit V un espace vectoriel avec $\dim_F V = n$
Soit $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $B' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ deux bases de V

Définition 3.11. La matrice de changement (ou de passage) de la base B' à B est noté $P_B^{B'}$ et est donné par $P_B^{B'} = [[u'_1]_B \quad [u'_2]_B \quad \dots \quad [u'_n]_B]$. Les bases sont liées par la matrice de passage par l'équation

$$P_B^{B'} [v]_{B'} = [v]_B$$

Note: Il a plusieurs notation pour la matrice de passage. La notation utilisée dans cette définition est équivalente à $P_{B' \rightarrow B}$

Lemme 3.12. *La matrice de passage de B à B' est l'inverse de la matrice de passage de B' à B , soit*

$$P_{B'}^B = \left(P_B^{B'}\right)^{-1}$$

Lemme 3.13. *La matrice de passage est unique.*

3.3 L'indépendance linéaire des fonctions

Soit V l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec des scalaire réels

La dimensions de V est infinie et il n'y a pas de bases dans V

Soit $v_1, v_2, \dots, v_n \subset V$ et $S = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Pour déterminer l'indépendance linéaire de S , considérons $F(x) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

Supposons que S est linéairement indépendant, c-à-d que $F(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Il faut ensuite prendre x_1, x_2, \dots, x_n valeurs et évaluer $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$.

Le résultats va être n équations de la forme $\alpha_1 v_1(x_j) + \alpha_2 v_2(x_j) + \dots + \alpha_n v_n(x_j) = 0$

Important: Pour que la méthode fonctionne, il faut que les n équations soit uniques. En d'autres termes, si $F(a) = F(b)$ alors a et b ne peuvent pas les deux faire parties des n valeurs choisis.

$$\text{Maintenant, il faut résoudre le système homogène } \begin{cases} \alpha_1 v_1(x_1) + \alpha_2 v_2(x_1) + \dots + \alpha_n v_n(x_1) = 0 \\ \alpha_1 v_1(x_2) + \alpha_2 v_2(x_2) + \dots + \alpha_n v_n(x_2) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_1(x_n) + \alpha_2 v_2(x_n) + \dots + \alpha_n v_n(x_n) = 0 \end{cases}$$

La résolution du système va aboutir à deux possibilités:

1. Le système homogène à seulement la solution nulle $\implies S$ est linéairement indépendant
2. Le système homogène à seulement une infinité de solution. Dans ce cas, on doit construire une nouvelle fonction $\hat{F}(x) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$ ou $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ est une solution non-nulle du système. Il faut alors démontrer que $\hat{F}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Si c'est le cas, alors on peut conclure que S est lié.

3.4 Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire

3.4.1 Produit scalaire réel

Soit V un espace vectoriel réel

Définition 3.14. Un produit scalaire dans V est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, t.q.
 $u, v \in V \mapsto \langle u | v \rangle$

$$1. \quad \langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle \quad 2. \quad \langle u | v + \alpha w \rangle = \langle u | v \rangle + \alpha \langle u | w \rangle \quad 3. \quad \langle u | u \rangle \geq 0 \text{ et } \langle u | u \rangle = 0 \iff u = 0$$

Remarque. Le produit scalaire réel n'est pas unique.

Définition 3.15. Une matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est définie positif si $x^T A x > 0 \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$

Lemme 3.16. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symétrique et définie positif, alors tout produit scalaire dans \mathbb{R}^n peut être écrits comme tel, $\langle x | y \rangle = x^T A y$. On note ce produit scalaire modifié $\langle u | v \rangle_A$

Définition 3.17. Le cas ou $A = I \implies \langle x | y \rangle = x^T I y = x^T y$ est appelé le produit scalaire canonique (ou euclidien) dans \mathbb{R}^n

3.4.2 Produit scalaire complexe

Soit V un espace vectoriel complexe. Le produit scalaire complexe est défini de manière similaire au produit scalaire réel [3.14] à l'exception d'une restriction de plus.

Définition 3.18. Un produit scalaire dans V est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, t.q.
 $u, v \in V \mapsto \langle u | v \rangle$

$$1. \quad \langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^* \quad 2. \quad \langle u | v + \alpha w \rangle = \langle u | v \rangle + \alpha \langle u | w \rangle \quad 3. \quad \langle u | u \rangle \geq 0 \text{ et } \langle u | u \rangle = 0 \iff u = 0$$

Remarque. La définition implique que $\langle \alpha v + \beta u | w \rangle = \alpha^* \langle v | w \rangle + \beta^* \langle u | w \rangle$

Lemme 3.19. Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$ et $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitienne et définie positif, alors tout produit scalaire dans \mathbb{C}^n peut être écrit comme tel, $\langle x | y \rangle_A = x^\dagger A y$.

Définition 3.20. Le produit scalaire canonique dans \mathbb{C}^n est $\langle x | y \rangle = x^\dagger y$

3.4.3 Orthogonalité entre deux vecteurs

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Définition 3.21. $x, y \in V$ sont orthogonales $\iff \langle x | y \rangle = 0$. Alors on note $x \perp y$.

Remarque. L'orthogonalité entre deux vecteurs est toujours par rapport au produit scalaire utilisé

3.4.4 Norme d'un vecteur

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Définition 3.22. La norme de $x \in V$ par rapport au produit scalaire dans V est $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$

Remarque. La norme d'un vecteur change par rapport au produit scalaire utilisé

Définition 3.23. Un vecteur de norme 1 est dit un vecteur unitaire.

Lemme 3.24. Tout vecteur x peut être transformé en vecteur unitaire avec la formule $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$

3.4.5 Distance entre deux vecteurs

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Définition 3.25. La distance entre $x, y \in V$ est $\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$

Remarque. Encore une fois, la distance entre deux vecteurs change par rapport au produit scalaire utilisé

3.4.6 Inégalité du produit scalaire

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $u, v \in V$

Théorème 3.26. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est $|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

Théorème 3.27. L'inégalité du triangle est $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

3.5 Base orthonormales

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $\dim V = n$

Soit $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset V$

Définition 3.28. S orthonormale $\iff u_{k_1} \perp u_{k_2} \forall k_1 \neq k_2$ et $\|u_k\| = 1 \forall k = 1, 2, \dots, m$

Définition 3.29. Le delta de Kronecker est $\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$

Remarque. Le delta de Kronecker pour $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ est la matrice identité $n \times n$. De plus, on peut utiliser le delta de Kronecker pour simplifier la définition d'un ensemble orthonormé.

Définition 3.30. S orthonormale $\iff \langle u_k | u_j \rangle = \delta_{kj} \forall u_k, u_j \in S$

Définition 3.31. B est une base orthonormale (ou orthonormé) dans V si B est une base dans V et B est un ensemble orthonormal.

Soit B une base orthonormale de V . Notons le produit scalaire dans V comme $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$

Théorème 3.32. Pour $x, y \in V$, on a $\langle x | y \rangle_V = [x]_B^\dagger [y]_B = \langle [x]_B | [y]_B \rangle_{\mathbb{C}^n}$

Remarque. Il est possible de traduire tout produit scalaire dans V au produit scalaire canonique de \mathbb{C}^n à l'aide d'une base orthonormale de V .

3.6 Projection orthogonal

Soit $R = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset V$ un ensemble orthonormal avec $\dim V = n > m$
Considérons le sous-espace $W = \text{span}\{R\} \subset V$ qui a R comme base orthonormale

Définition 3.33. Soit $v \in V$, alors $S_W(v) = \sum_{k=1}^m \langle u_k | v \rangle u_k$

Théorème 3.34. Le vecteur $S_W(v) \in W$ et $S_W(v) \perp w \ \forall v \in V, w \in W$

3.7 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ un ensemble linéairement indépendant. L'orthonormalisation de Gram-Schmidt va produire un ensemble orthonormal $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ à partir des vecteurs de W .

- | | |
|--|---|
| Étape 1. Posons $u_1 = \frac{w_1}{\ w_1\ }$ | Alors u_1 est unitaire |
| Étape 2. Posons $v_2 = w_2 - S_{\langle u_1 \rangle}(w_2)$ | Alors $v_2 \perp u_1$ |
| Étape 3. Posons $u_2 = \frac{v_2}{\ v_2\ }$ | Alors u_2 est unitaire et $u_2 \perp u_1$ |
| ⋮ | |
| Étape $2m - 2$. Posons $v_m = w_m - S_{\langle u_1, \dots, u_{m-1} \rangle}(w_m)$ | Alors $v_m \perp \{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ |
| Étape $2m - 1$. Posons $u_m = \frac{v_m}{\ v_m\ }$ | Alors u_m est unitaire et $u_m \perp \{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ |

Le procédé va se terminer quand toutes les $2m - 1$ étapes seront faites.

Note: La notation $\langle u_1, \dots, u_j \rangle$ est une façon plus courte d'écrire $\text{span}\{u_1, \dots, u_j\}$

Valeurs et vecteurs propres d'une matrice carrée

4.1 Valeurs et vecteurs propres

Soit $A \in M_{n \times n}(F)$

Définition 4.1. $\lambda \in F$ valeur propre de $A \iff \exists u \in M_{n \times 1}(F), u \neq 0$ t.q. $Au = \lambda u$
 Dans ce cas u est dit le vecteur propre de A associé à λ

Remarque. Un vecteur propre est jamais nulle, mais une valeur propre peut être nulle

Définition 4.2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Théorème 4.3. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A , c-à-d

$$\lambda_0 \text{ valeur propre de } A \iff \chi_A(\lambda_0) = 0$$

4.1.1 Comment calculer les vecteurs propres

1. Trouver les racines de $\chi_A(\lambda)$
2. Trouver toutes les solutions linéairement indépendantes du système homogène $(A - \lambda_0 I)X = \mathbb{O}$ pour tout λ_0 valeurs propres de A .

Note: Il se peut qu'une valeur propre ait plusieurs vecteurs propres linéairement indépendants.

4.1.2 Multiplicités et espace propre

Grâce au théorème fondamentale de l'algèbre [1.8] on peut exprimer le polynôme caractéristique à l'aide de ces racines, qui sont les valeurs propres de A . Posons que A a m uniques valeurs propres. Alors $\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$ $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, $k_j \in \mathbb{N}$

Définition 4.4. La multiplicité algébrique de la valeur propre λ_j est le k_j associé à λ_j

Définition 4.5. L'espace propre associé à λ_j est $L_{\lambda_j} = \{v \in M_{n \times 1} \mid Av = \lambda_j v\} \cup \{\mathbb{O} \in M_{n \times 1}\}$

Définition 4.6. La dimension de l'espace propre L_{λ_j} est la multiplicité géométrique de λ_j

Lemme 4.7. $1 \leq \text{multiplicité géométrique de } \lambda_j \leq \text{multiplicité algébrique de } \lambda_j \leq n$

4.2 Propriétés des valeurs propres

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

Propriété 1: Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ est un ensemble de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distincts alors B est linéairement indépendant.

Propriété 2: Si λ_0 est une valeur propre de A alors $(\lambda_0)^k$ est une valeur propre de A^k , $k \in \mathbb{N}$

Propriété 3: Si λ_0 est une valeur propre de A et A est inversible alors $\frac{1}{\lambda_0}$ est une valeur propre de A^{-1}

Propriété 4: Si $\det A = 0$ alors $\lambda_0 = 0$ est une valeur propre de A

Propriété 5: $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$ ou λ_j est une valeur propre de A

Propriété 6: $\text{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ ou λ_j est une valeur propre de A

Propriété 7: A et A^T ont les même valeurs propres.

Propriété 8: Si A est triangulaire alors les valeurs propres de A sont sa diagonale.

Propriété 9: Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réels

Propriété 10: Si A est hermitienne et que v_1, v_2 sont deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres de A distincts, soit λ_1 et λ_2 , alors $v_1 \perp v_2$ et $L_{\lambda_1} \perp L_{\lambda_2}$ par rapport au produit scalaire canonique dans \mathbb{C}^n

Propriété 11: Si A hermitienne, alors les vecteurs propres de A forment une base orthonormale de \mathbb{C}^n

4.3 Diagonalisation d'une matrice

Définition 4.8. Soit $A, P \in M_{n \times n}$ t.q. P inversible, alors A et $P^{-1}AP$ (ou PAP^{-1}) sont appelé semblables

Remarque. $\det(P^{-1}AP) = \det(PAP^{-1}) = \det A$
De plus, les valeurs propres de A et $P^{-1}AP$ coïncident.

Définition 4.9. $A \in M_{n \times n}$ est diagonalisable $\iff \exists P \in M_{n \times n}$ inversible t.q. $P^{-1}AP$ diagonale

Théorème 4.10. $A \in M_{n \times n}$ est diagonalisable $\iff A$ admet n vecteurs propres linéairement indépendant
Dans ce cas on a que

$$P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \text{ avec } v_1, v_2, \dots, v_n \text{ les vecteurs propres de } A$$

De plus, on a que

$$P^{-1}AP = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ les valeurs propres de } A$$

Corollaires 4.11. Si A a n valeurs propres distincts, alors A est diagonalisable

Corollaires 4.12. Une matrice hermitienne est toujours diagonalisable à cause de 4.2

Corollaires 4.13. Si A hermitienne alors $\exists P$ unitaire t.q. $P^{-1}AP = P^\dagger AP$ diagonale

Remarque. La preuve de 4.13 utilise cette équivalence, soit

$$P \text{ unitaire} \iff \text{les colonnes de } P \text{ forment une base orthonormale dans } \mathbb{C}^n \text{ par rapport au produit scalaire canonique}$$

4.4 Fonctions d'une matrice

Soit $f(x) \in \mathbb{C}_n[x]$, ou $\mathbb{C}_n[x]$ est l'espace des polynômes complexes à exposant au plus n

Définition 4.14. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, alors $f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n$

Un autre cas considéré dans ce cours est $f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Définition 4.15. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, alors $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$

4.4.1 Comment calculer $f(A)$

Il a quatre choses qui peut nous aider pour calculer $f(A)$

1. A est nilpotente d'indice k , c-à-d que $A^k = \mathbb{O}$, donc on doit seulement calculer les $k + 1$ premiers termes de $f(A)$
2. Il existe une formule pour les puissances de A (souvent prouver par récurrence), alors il est possible d'utiliser cette formule pour simplifier le calcul
3. $A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \implies f(A) = \text{diag}\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\}$
4. Si A est diagonalisable alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$
Alors $f(A) = Pf(D)P^{-1} = P\text{diag}\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\}P^{-1}$

Remarque. Si A est non diagonalisable et qu'il n'existe pas de formule pour les puissances de A , il faut calculer tout les termes de $f(A)$ pour obtenir la réponse.

4.4.2 Propriétés de l'exponentielle d'une matrice

1. Comme A commute avec $A^k \forall k \in \mathbb{N}$ alors A commute avec e^A
2. Si $AB = BA$, soit que A et B commute alors $e^{A+B} = e^A e^B$
3. e^A inversible $\forall A \in M_{n \times n}$ avec $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
4. Si A est hermitienne alors e^{iA} est unitaire

Chapitre 5: Espace dual d'un espace vectoriel

5.1 Fonctionnelles linéaire

Soit V un espace vectoriel avec les scalaires F

Définition 5.1. Une forme, ou une fonctionnelle linéaire est une application $f: V \rightarrow F$ qui, pour tout $u, v \in V$, α scalaire, satisfait les deux propriétés suivantes

$$1. \quad f(u + v) = f(u) + f(v) \qquad 2. \quad f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

Remarque. La fonctionnelle linéaire la plus simple est $f: V \rightarrow F$
 $v \mapsto 0$

Définition 5.2. Soit f_1, f_2 deux fonctionnelles linéaires.

Définissons leur somme $f_1 + f_2$ comme tel: $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) \quad \forall v \in V$

Définissons la multiplication par un scalaire αf_1 comme tel: $(\alpha f_1)(v) = \alpha f_1(v) \quad \forall v \in V$

Lemme 5.3. L'ensemble des fonctionnelles linéaires sur V est lui-même un espace vectoriel

Définition 5.4. L'espace des fonctionnelles sur V est appelé l'espace dual de V et est noté V^*

Théorème 5.5. Soit $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ une base dans V avec $[v]_B = (v_1 \dots v_n)^T \quad v \in V$. Alors la base de V^* est $B^* = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ avec $\epsilon_j: V \rightarrow F$, ou v_j est le j ème coordonné de v dans la base B .
 $v \mapsto v_j$

Remarque. La définition de ϵ implique que $\epsilon_j(b_k) = \delta_{jk} \quad \forall b_k \in B$

Corollaires 5.6. $\dim V = n \implies \dim V^* = n$

Corollaires 5.7. $(\mathbb{C}^n)^* = \mathbb{C}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$

5.2 Espace dual dans l'espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Soit V un espace vectoriel. Pour $x \in V$ posons $\hat{x} = f_x$ ou $f_x: V \rightarrow F$
 $v \mapsto \langle x | v \rangle$

Définition 5.8. On appelle $x = f_x \in V^*$ le vecteur dual de x

Théorème 5.9. $\forall f \in V^* \exists! x \in V$ t.q. $f = f_x$

5.2.1 Comment trouver le vecteur dual de $f \in V^*$

Soit $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ une base orthonormale par rapport à $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ dans V et $f \in V^*$

Posons $f(b_j) = a_j \in \mathbb{C}^n$, alors la représentation du vecteur dual x à f dans la base B est donné par

$$[x]_B = ((a_1)^* \dots (a_n)^*)^T$$

Prendre note que dans le cas où le produit scalaire dans V n'est pas le produit scalaire canonique, il est souvent plus simple d'utiliser une méthode plus directe que de trouver une base orthonormale par rapport au produit scalaire dans V .

Définition 5.10. Soit $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base dans V , alors une base $B^* = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ dans V^* est dite base dual à $B \iff \epsilon_j(u_k) = \delta_{jk}$

5.3 Notation de Dirac

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Définition 5.11. Dans la notation de Dirac, un élément $v \in V$ est noté $|v\rangle \in V$ et $|\cdot\rangle$ est appelé un ket. Le vecteur dual de $|v\rangle$ est noté $\langle v|$ et $\langle \cdot|$ est appelé un bra. L'évaluation du vecteur dual $f_v = |v\rangle$ avec un vecteur $x \in V$ est noté $f_v(x) = f_v(|x\rangle) = \langle v | x \rangle$

Chapitre 6: Opérateurs linéaires

Définition 6.1. Un opérateur T est une application $T: V \rightarrow W$ avec V et W des espaces vectoriels

Définition 6.2. Un opérateur T est linéaire $\iff T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \forall u, v \in V, \alpha, \beta$ scalaire

Définition 6.3. Soit $T_1: V \rightarrow W$ et $T_2: W \rightarrow U$. La composition de T_1 et T_2 est noté $T_2 T_1$ et l'évaluation est $T_2 T_1(v) = T_2(T_1(v))$ avec $T_1 T_2: V \rightarrow U$

Remarque. La composition de deux opérateurs n'est généralement pas commutatif, mais est associatif

Définition 6.4. Soit $T_1, T_2: V \rightarrow V$. Le commutateur de T_1 et T_2 est $[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$ avec $[T_1, T_2](v) = T_1 T_2 v - T_2 T_1 v$

6.1 La matrice d'un opérateurs linéaires

Théorème 6.5. Soit V, W deux espaces vectoriels avec $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ et $\dim_{\mathbb{C}} W = m$
Soit B_V, B_W deux bases respectives de V et W , alors

$$T: V \rightarrow W \text{ est linéaire } \iff \exists M \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \forall v \in V \ M[v]_{B_V} = [Tv]_{B_W}$$

De plus, si $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ alors la matrice M est donnée par

$$M = \left[[Tv_1]_{B_W}, \dots, [Tv_n]_{B_W} \right]$$

Définition 6.6. La matrice M t.q. $M[v]_{B_V} = [Tv]_{B_W}$ est dite la matrice de l'opérateur T dans les deux base B_V, B_W , notée $M = [T]_{B_V, B_W}$. Si $V = W$ et $B_V = B_W$ alors on note $M = [T]_{B_V}$

6.2 Représentation d'un opérateur linéaire dans une nouvelle base

Théorème 6.7. Soit $T: V \rightarrow W$ un opérateur linéaire.

Soit B_V, B'_V deux bases dans V et B_W, B'_W deux bases dans W , alors $[T]_{B'_V, B'_W} = P_{B'_W}^{B_W} [T]_{B_V, B_W} P_{B_V}^{B'_V}$

Si $V = W$ et $B_V = B_W$, alors $[T]_{B_V} = P_{B'_V}^{B_V} [T]_{B_V} P_{B_V}^{B'_V}$

Théorème 6.8. Soit $T_1, T_2: V \rightarrow V$ des opérateurs linéaires, B_V une base dans V et α scalaire, alors les opérateurs suivant sont linéaires, soit $T_1 + T_2, \alpha T_1, T_1 T_2, [T_1, T_2]$. Les matrices des opérateurs suivants sont

- | | |
|--|--|
| 1) $[T_1 + T_2]_{B_V} = [T_1]_{B_V} + [T_2]_{B_V}$ | 2) $[\alpha T_1]_{B_V} = \alpha [T_1]_{B_V}$ |
| 3) $[T_1 T_2]_{B_V} = [T_1]_{B_V} [T_2]_{B_V}$ | 4) $[[T_1, T_2]]_{B_V} = [[T_1]_{B_V}, [T_2]_{B_V}]$ |

6.3 Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur

Définition 6.9. Soit $T: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire, alors

$$v \in V \text{ vecteur propre de } T \iff \exists \lambda \text{ scalaire t.q. } Tv = \lambda v$$

λ est appelé la valeur propre de T

Théorème 6.10. Si $\dim V \in \mathbb{N}$, alors $\forall v \in V$ vecteur propre de T , $[v]_B$ vecteur propre de $[T]_B$
Cela va de même pour les valeurs propres de T

Définition 6.11. L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur s'appelle le spectre de l'opérateur

Théorème 6.12. $\text{Ker}(T) \neq \{0_V\} \iff \lambda = 0$ valeur propre de T , ou $\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid Tv = 0_W\}$

Chapitre 7: Opérateurs inverses, hermitiens et unitaires

7.1 Opérateurs inverses

Soit $T: V \rightarrow W$ un opérateur linéaire

Définition 7.1. T inversible $\iff \forall w \in W \exists! v \in V$ t.q. $Tv = w$

Définition 7.2. L'opérateur inverse de T est $T^{-1}: W \rightarrow V$
 $w \mapsto v$

Soit B_V, B_W des bases dans V, W respectivement

Théorème 7.3. T inversible $\iff \dim V = \dim W$ et $[T]_{B_V, B_W}$ inversible
 Dans ce cas, $T^{-1} = [T^{-1}]_{B_W, B_V} = ([T]_{B_V, B_W})^{-1}$

Corollaires 7.4. T inversible $\iff [T]_{B_V, B_W}$ carré

Remarque. $[T]_{B_V, B_W}$ carré $\implies \dim V = \dim W$

7.1.1 Propriétés de l'opérateur inverse

Soit $T, S: V \rightarrow W$ des opérateurs linéaires inversibles

1. $T^{-1}: W \rightarrow V$ est linéaire
2. $[T^{-1}]_{B_W, B_V} = ([T]_{B_V, B_W})^{-1}$
3. $(T^{-1})^{-1} = T$
4. $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$
5. T inversible $\iff \text{Ker}(T) = \{0_W\}$

7.2 Opérateurs hermitiens

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$

Soit B une base orthonormale dans V par rapport au produit scalaire dans V

Soit $A: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire

Définition 7.5. A hermitien $\iff [A]_B$ hermitien

Théorème 7.6. Peut importe la base B choisi, si A hermitien alors $[A]_B$ hermitien

Remarque. Le théorème nous permet de justifier la définition d'un opérateur hermitien, puisque le théorème prouve que la définition ne dépend pas de la base choisi

7.2.1 Propriétés de l'opérateur hermitien

Soit $A, T: V \rightarrow V$. Les opérateurs suivants sont hermitiens

1. $A + T$
2. αA si $\alpha \in \mathbb{R}$
3. AT si A, T commute
4. A^n, T^n
5. A^{-1} si A inversible

De plus, un opérateur hermitien est indépendant dans le produit scalaire.

Lemme 7.7. Soit $v_1, v_2 \in V$, alors $\langle v_1 | Av_2 \rangle_V = \langle Av_1 | v_2 \rangle_V$

Dans la notation de Dirac, on note cette propriété comme tel: $\langle v_1 | A | v_2 \rangle$, ce qui indique que A peut être appliqué à $\langle v_1 |$ ou $| v_2 \rangle$

7.3 Opérateur unitaire

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$

Soit B une base orthonormale dans V par rapport au produit scalaire dans V

Soit $A: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire

Définition 7.8. A unitaire $\iff [A]_B$ unitaire

Remarque. Comme dans le cas de l'opérateur hermitien, cette définition ne dépend pas de la base B choisi

7.3.1 Propriétés de l'opérateur unitaire

Lemme 7.9. Si $A: V \rightarrow V$ unitaire et $v_1, v_2 \in V$, alors $\langle v_1 | v_2 \rangle_V = \langle Av_1 | Av_2 \rangle_V$