MAT193 - Algèbre Linéaire - Résumé

Étienne Pinard

12 octobre 2024

Chapitre 1: Nombres Complexes

Représentation des nombres complexes

Forme algégrique (cartésienne): $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{C}$

Forme polaire: $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad r, \theta \in \mathbb{R}$

Forme exponentielle: $z = re^{i\theta} \quad r, \theta \in \mathbb{R}$

Changement de forme

Soit $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Alors on a,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = Arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} & x = 0, \textit{même signe que } y \end{cases}$$

où r est le module et θ est l'argument de z

Opérations propres aux nombres complexes

Soit $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Conjugée: $z^* = x - iy$

Partie réel: $Re(z) = \frac{z+z^*}{2} = x, \quad Re(z) \in \mathbb{R}$

Partie imaginaire: $Im(z) = \frac{z-z^*}{2} = y, \quad Im(z) \in \mathbb{R}$

Argument (non-unique): $\arg(z) = Arg(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Propriétés des opérations

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$
$$(z^*)^* = z$$
$$zz^* = |z|^2$$
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\textit{Inégalité du triangle})$$
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Racines entières

Soit $z = re^{i\theta},\ n \in \mathbb{N}$.

Alors on a,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}\right),\ k = 0, \ldots, n-1$$

On peut aussi définir les racines de manières récursives.

Si w est une racine de z, alors on a

$$w_k = \begin{cases} w_{k-1} e^{\frac{2\pi i}{n}} & k > 0 \\ \sqrt[n]{r}\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right) & k = 0 \end{cases}$$

On remarque que deux racines entières consécutives sont séparées par un angle de $\frac{2\pi}{n}$

Exponentielle et logarithme

Soit $z = x + iy$.

Alors on a,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cos(y) + isin(y))$$

De plus,

$$\ln(z) = \log(z) = \ln(|z|e^{i(\theta+2\pi k)}) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

où $(\theta + 2\pi k) = \arg(z)$

Donc, $\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

Puissance Complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $w = x + iy$

Alors on a,

$$\begin{aligned} z^w &= \left(e^{\ln(z)}\right)^w = e^{\ln(z)w} \\ &= e^{(\ln|z| + i\arg(z))(x+iy)} \\ &= e^{x\ln|z| - y\arg(z) + i(x\arg(z) + y\ln|z|)} \\ &= e^{x\ln|z| - y\arg(z)}e^{i(x\arg(z)+y\ln|z|)} \\ &= |z|^x e^{-y(Arg(z)+2\pi k)}e^{i(y\ln|z| + xArg(z))},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Alors z^w prend une infinité de valeur.

Si $z \in \mathbb{R},\ z > 0$ et $w \in \mathbb{Q}'$, l'equation devient $z^w = z^w e^{i2\pi k w}$

Cette equation a une infinité de valeurs puisque $kw \notin \mathbb{Z} \implies e^{i2\pi kw} \neq 1, \forall z, w$

Dans ce cas la convention est de prendre $k = 0$ pour que $z^w \in \mathbb{R}$

Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

Alors on peut écrire $p(x)$ en terme de ses racines, soit

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}$$

où $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont les racines de $p(x)$ et k_j est la multiplicité de la racine x_j

Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit que $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$

On peut donc dire que $p(x)$ à exactement n racines complexes en comptant les multiplicités.

Chapitre 2: Matrices

Définition

Une matrice de type $m \times n$ sur un corp (dans notre cas sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) est noté $A_{m\times n}$ et contient m lignes et n colonnes.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matrice composé uniquement de 0 pour un certain type $m \times n$ est écrite $\mathbb{O}$

$A_{m\times n}$ est une matrice carré si $m = n$.

La matrice identité de type n est écrite $I_n = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors on dit que A est

1. triangulaire supérieur si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
2. triangulaire inférieur si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
3. triangulaire si A est triangulaire supérieur ou triangulaire inférieur
4. Diagonale si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$

   Noté que $I_n = \operatorname{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$ ainsi que $\mathbb{O}_n = \operatorname{diag}\{0, 0, \dots, 0\}$

Opérations matricielles

Addition de matrices

L'addition de deux matrices A et B existe seulement si A et B sont du même type. L'addition est commutatif, associatif, possède un élément neutre et possède un inverse.

Multiplication par un scalaire

La multication par un scalaire existe toujours pour une matrice A. La multication par un scalaire est associatif, distributif et commutatif.

Produit matricielle

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{r\times s}(\mathbb{C})$. Alors le produit matricielle AB existe si $n = r$. Dans ce cas, on a

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$$

En gros, l'élément à la position i, j de AB est le produit scalaire entre la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

Propriétés du produit matricielle

Soit α, β des scalaires et A, B, C des matrices dont le produit matricielle entre eux existe. Alors

1. $(AB)C = A(BC)$, produit matricielle est associatif
2. $AB \neq BA$, généralement, le produit matricielle n'est pas commutatif
3. $A(B + C) = AB + AC$, distributivité par la gauche
4. $(A + B)C = AC + BC$, distributivité par la droite
5. $AI = IA = A$, l'identité est l'élément neutre du produit matricielle

Transposition

La transposé de $A = (a_{ij})_{m\times n}$ est $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$. Pour une matrice carré, c'est une rotation des anti-diagonale par rapport à la grande diagonale.

Conjugée hermitien

Le conjugué hermitien de $A = (a_{ij})_{m\times n}$ est $A^\dagger = \left(A^T\right)^\star = (A^\star)^T = (a^\star_{ji})_{n\times m}$. Le conjugué hermitien est aussi appellé la transposé conjugué.

Propriétés transposé et conjugué hermitien

$$
\begin{aligned}
\left(A^T\right)^T &= A & \left(A^\dagger\right)^\dagger &= A \\
(\alpha A)^T &= \alpha A^T & (\alpha A)^\dagger &= \alpha^\star A^\dagger \\
(A + B)^T &= A^T + B^T & (A + B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger \\
(AB)^T &= B^T A^T & (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger
\end{aligned}
$$

Définition

1. Si $A^T = A$, alors A est dite symétrique. Si $A^T = -A$, alors A est dite anti-symétrique.
2. Si A est une matrice carré tel que $AA^T = A^T A = I$, alors A est appellé orthogonal.
3. Si $A^\dagger = A$, alors A est dite hermitienne. Si $A^\dagger = -A$, alors A est dite anti-hermitienne.
4. Si A est une matrice carré tel que $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, alors A est appellé unitaire.

Commutateur de matrice

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, alors le commutateur de A et B est la matrice

$$[A, B] = AB - BA$$

Propriétés du commutateur

1. $[A, B] = -[B, A]$
2. $[\alpha A, B] = \alpha[A, B]$
3. $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$
4. $[A, B]^T = -[A^T, B^T]$
5. $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = \mathbb{O}$, l'identité de Jacobi

Trace d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Alors la trace de A est

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=0}^{n} a_{ii}$$

Propriétés de la trace

1. $\text{tr}\{AB\} = \text{tr}\{BA\}$
2. $\text{tr}\{A + B\} = \text{tr}A + \text{tr}B$
3. $\text{tr}\{\alpha A\} = \alpha \text{tr}A$
4. $\text{tr}\{A^T\} = \text{tr}A$
5. $\text{tr}\{[A, B]\} = \text{tr}\{AB - BA\} = \text{tr}\{AB\} - \text{tr}\{BA\} = \text{tr}\{AB\} - \text{tr}\{AB\} = 0$

Déterminant d'une matrice carré

Défintion du déterminant par récurrence

Le déterminant de $A \in M_n(\mathbb{C})$ noté $\det A = |A|$ est une nombre complexe qui peut-être définie par récurrence sur n comme suit

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} m_{ji} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ceci est l'expansion par la jème ligne, $1 \leq j \leq n$. Le terme m_{ji} est le déterminant de la sous-matrice qu'on obtient si on biffe la ligne j et la colonne i. Si M_{ji} est la sous-matrice obtenue en biffant la ligne j et la colonne i alors $m_{ji} = \det M_{ji}$.

Dans la première équation, le déterminant des sous-matrices était multiplié par la jème ligne. Il est équivalent de développer le déterminant suivant la jème colonne, ce qui donne cette équation

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{si } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Défintion du déterminant par les permutations

Le déterminant de A peut aussi être définie de cette façons

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{j\sigma_j}$$

Ici $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$ et représente une permutation de l'ensemble $\{1,\ 2, \dots,\ n\}$. σ_j est le jème élément de cette permutation. S_n est l'ensemble de tous ces permutations. $\text{sign}(\sigma)$ est la signature de σ et est égale à $(-1)^{\text{nb de désorde de } \sigma}$. Le désorde de σ est le nombre de couple (σ_j, σ_k) ou $j < k$ mais $\sigma_j > \sigma_k$.

Propriétés du déterminant

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \alpha \in \mathbb{C}$

1. $\det A^T = \det A$
2. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
3. $\det(A^\star) = (\det A)^\star$
4. $\det A^\dagger = (\det A)^\star$
5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
6. $\det(A^m) = (\det A)^m$
7. $\det(A + B) \neq \det A + \det B$
8. $\det(\text{diag}\{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}) = a_1 a_2 \dots a_n$
9. Si A est triangulaire alors $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

Soit $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \; C_2 \; \dots \; C_n \end{pmatrix}$ ou $L_j \in M_{1\times n}(\mathbb{C}),\ C_j \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$

1. $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_k \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_k \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$

   $\det \begin{pmatrix} C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} C_1 \dots C_k \dots C_j \dots C_n \end{pmatrix}$

2. $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = 0$

   $\det \begin{pmatrix} C_1 \dots C_j \dots C_j \dots C_n \end{pmatrix} = 0$

3. $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ \alpha L_j \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$

   $\det \begin{pmatrix} C_1 \dots \alpha C_j \dots C_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} C_1 \dots C_j \dots C_n \end{pmatrix}$

4. $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j \\ \dots \\ L_k \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_j + \alpha L_k \\ \dots \\ L_k \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$

   $\det \begin{pmatrix} C_1 \dots C_j \dots C_k \dots C_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C_1 \dots C_j + \alpha C_k \dots C_k \dots C_n \end{pmatrix}$

5. $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ M + N \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ M \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ N \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$

   $\det \begin{pmatrix} C_1 \dots M + N \dots C_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C_1 \dots M \dots C_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} C_1 \dots N \dots C_n \end{pmatrix}$

Matrice inverses

$A \in M_{n\times n}$ est inversible $\iff \exists B$ t.q $AB = BA = I$. Alors B est noté A^{-1}

Propriétés de l'inverse

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ inversible

1. $AB = \mathbb{O} \implies B = \mathbb{O}$
2. Si $AC = BA = I \implies B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$, l'inverse à gauche et à droite sont égaux
3. $(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Calculer la matrice inverse

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A)$$

$\mathrm{adj}(A)$ est la matrice adjointe de A et est définie comme

$$\mathrm{adj}(A) = \left((c_{ij})_{n\times n}\right)^T$$

c_{ij} est le cofacteur d'incice ij de A et est défini comme

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

m_{ij} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en biffant la ligne i et la colonne j.
On peut donc remarquer que $\det A = \sum_{k=1}^{n} = a_{jk}c_{jk}$
On a donc ce résultat pour les matrices inverses,

$$A \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0$$

Systèmes d'équations linéaires

Chaque système d'équation linéaire peut-être représenter par une equation matricielle, soit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le système devient $AX = B \iff (A|B)$. $(A|B)$ est dit A augmenté de B et est la matrice augmenté du système.

Forme échelonné d'un système

Une matrice est de la forme échelonné si

1. La ligne qui précède une ligne non-nulle est non-nulle
2. Le premier coefficient non-nul d'une ligne non-nulle, appellé le pivot, est plus à gauche que le premier coefficient non-nul de la ligne suivante.

On peut simplifier le système si on obtient la forme échelonné de la matrice augmenté. On obtient la forme échelonné en appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de A et B. Ces opérations sont échanger deux lignes, $L_j \leftrightarrow L_k$, additionner le multiple d'une ligne à une autre, $L_j \mapsto L_j + \alpha L_k$ et multiplier une ligne par un scalaire non-nul, $L_j \mapsto \alpha L_j,\ \alpha \neq 0$.

Rang d'une matrice

rg(A) est le rang de A et est le nombre de ligne non-nulle de la forme échelonné de A. On a alors trois cas pour un système linéaire $AX = B$, soit

1. Si rg(A) $< rg(A|B)$, alors le système n'a pas de solution, il est incompatible
2. Si rg(A) $= rg(A|B) = n$, alors le système a une unique solution, il est compatible
3. Si rg(A) $= rg(A|B) < n$, alors le système a une infinité de solution, il est compatible

Dans le dernier cas, le système a une infinité de solution puisque qu'il a des variables libres, soit exactement $n - \text{rg}(A)$ variables libres.

Remarquons que si A' est la forme échelonné de A, alors $\det A = \alpha \det A',\ \alpha \in \mathbb{C}$. Cela nous permet d'arriver au résultat

$$\det A \neq 0 \iff \text{rg}(A) = n \iff A \text{ est inversible} \iff AX = B \text{ a une unique solution}$$

L'unique solution dans ce cas est $X = A^{-1}B$, puisque A est inversible.

Calculer l'inverse d'une matrice

Il est possible de calculer l'inverse de A en échelonnant le système $(A|I)$. Le système échelonné va donner $(A|I) \sim (I|B)$, avec $B = A^{-1}$.

Système homogène

Un système homogène est un système de la forme $AX = \mathbb{O}$. Un tel système est toujours compatible avec la solution trivial $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. De plus, si A est inversible le système homogène à seulement la solution trivial, sinon il a une infinité de solution, puisque c'est impossible que $\text{rg}(A) < \text{rg}(A| \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$, et donc que le système soit incompatible.

Noyau d'un système

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Le noyau de A, noté $\text{N}(A)$, est l'ensemble de tous les solutions du système homogène $AX = \mathbb{O}$, soit

$$\text{N}(A) = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \mid AX = \mathbb{O}\}$$

Chapitre 3: Espace vectorielle de dimension finie

Définition

Un ensemble V est un espace vectorielle sur un corps ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) si

1) V est fermé sous l'addition c-à-d,

$$v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$$

2) V est fermé sous la multication par un scalaire c-à-d,

$$v \in V,\ \alpha \text{ scalaire} \implies \alpha v \in V$$

Un scalaire est un élément du corps de l'espace vectorielle. Dans notre cas, ce corps est soit les nombres réels $\mathbb{R}$, ou les nombres complexes $\mathbb{C}$.

L'espace vectorielle le plus simple est $V = \{0_v\}$, ou 0_v est l'élément nulle.

Pour vérifier si un ensemble est un espace vectorielle, il suffit de vérifier si l'ensemble respectent les deux propriétés de fermeture.

Combinaisons linéaire

Définition

Soit un espace vectorielle V avec $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des scalaires.

Alors $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Ensemble générateur

Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$, est un ensemble générateur si tout les éléments de V peuvent être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs dans S.

Pour prouver qu'un ensemble est un ensemble générateur, il faut habituellement prendre un élément général de l'espace vectorielle et exprimer cet élément général comme une combinaison linéaire des vecteurs dans S.

Indépendance linéaire

Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$, est un linéaire indépendant si

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0_v \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

en d'autres mots, que cette équation a seulement la solution nulle (trivial). Si ce n'est pas le cas, alors S est linéairement dépendant, ou lié.

Déterminer l'indépendance linéaire d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$

Soit $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$ avec $u_j = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \cdots \\ u_{nj} \end{pmatrix}$, $u_{kj} \in \mathbb{R}$

Il a m vecteurs dans S et chaque vecteur à n élément.

De plus, considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix}$

Remarquons que M à les vecteurs de S commes colonnes.

1) La première méthode consiste à échelonner la matrice $M^T = \begin{pmatrix} (u_1)^T \\ (u_2)^T \\ \dots \\ (u_m)^T \end{pmatrix}$. Ici M^T à les vecteurs de S commes lignes. En échelonnant M, on peut arriver à deux conclusions, soit

   1. La forme échelonné de M^T contient une ligne nulle, alors S est lié.
   2. La forme échelonné de M^T ne contient pas de ligne nulle, alors S est linéairement indépendant.

2) La deuxième méthode consiste à échelonner la matrice M. En échelonnant M, on peut arriver à deux conclusions, soit

   1. La forme échelonné de M contient plus ou égale de ligne nulle qu'il a de vecteur dans S, alors S est lié.
   2. La forme échelonné de M contient moins de ligne nulle qu'il a de vecteur dans S, alors S est linéairement indépendant.

Base d'un espace vectorielle

Définition

Un ensemble $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, est une base de V si S est un ensemble générateur de V et S est linéairement indépendant.

On peut aussi définir la dimension de V comme $\dim_C V = |S|$, ou $|S|$ est le nombre d'élément dans S et C est le corps que l'espace vectorielle est défini sur. Dans notre cas, $C = \mathbb{R}$ ou $C = \mathbb{C}$

De plus, un espace vectorielle a souvent une base canonique, soit une base plus naturel à utiliser. Par exemple, canonique de $\mathbb{R}^n$ est $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. On peut donc dire que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

Représentation d'un vecteur dans une base

Soit V un espace vectorielle avec $\dim V = n$

Soit $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base de V

Cela veut dire que $\forall v \in V \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ scalaire t.q. $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont appellés les coordonnées de v dans la base B.

On peut donc représenter v dans la base B comme

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Donc on peut représenter un élément de V comme un élément dans $\mathbb{R}^n$ avec l'aide d'une base

Propriétés d'une base d'un espace vectorielle

1) $v_1 = v_2 \iff [v_1]_B = [v_2]_B$
2) Soit $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$
   Si $S' = \{[u_1]_B, [u_2]_B, \dots, [u_n]_B\}$ est linéairement indépendant alors S l'est aussi