Métodos de interpolación y aproximación polinómica

Datos del Censo

1940	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**
40,056	**45135**	**60256**	**80150**	**90542**	**100456**	**106123**

¿qué población existía en los años 1964,1976,1988,1992?

La forma de conocer el dato correspondiente a esos años, haciendo un cálculo entre los datos de dos censos, a esto le llamamos interpolar.

En esta capítulo usaremos los polinomios como curvas de aproximación

Teorema de aproximación de Weierstrass

Suponga que *f* está definida y es continua en [*a*,*b*]. ε Para cada $\varepsilon > 0$

Existe un polinomio *P(x)*, con la propiedad de que

$$| f(x) - P(x) | < \varepsilon$$

Para todo *x* en [*a*,*b*]

Método de interpolación

Las ventajas de usar polinomios son:

- La derivada existe
- Es continua
- La integral existe también

Método de interpolación

La interpolación es la estimación de un valor dentro de un conjunto de datos.

Método de interpolación lineal

En este método se nos dan dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), y deseamos conocer el valor que tendrá y_0, cuando tenemos x_0. Lo que podremos hacer con una función lineal de la forma:

$$f(x)=a_0+a_1x$$

Método de interpolación

Existe varios métodos:

- Polinomios de Lagrange
- Polinomio cúbico de Hermite
- Spline

Método de interpolación

Se usan polinomios de aproximación que se determinan con sólo específicar los puntos en el plano por donde debe pasar el polinomio $P(x)$.

Para una recta $P(x)=a_0(x-x_1)+a_1(x-x_0)$ donde vamos a determinar a_0 y a_1. Para encontrar el valor de a_0, se hace $x=x_0$ y despejando

$$a_0 = \frac{P(x_0)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

Método de interpolación

- Para encontrar el valor de a_1, se hace $x=x_1$ y despejando

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x1)}{x_1 - x_0}$$

De tal modo que al sustituir en $P(x)$ queda

$$P(x) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}(x - x_1) +$$

$$\frac{f(x1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Polinomios de Interpolación de Lagrange

Definimos las funciones:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Se define entonces:

$$P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

Polinomios de Interpolación de Lagrange

Con: $$L_0(x_0)=\frac{x_0-x_1}{x_0-x_1}=1,\ L_0(x_1)=\frac{x_1-x_1}{x_0-x_1}=0$$

y $$L_1(x_0)=\frac{x_0-x_0}{x_1-x_0}=0,\ L_1(x_1)=\frac{x_1-x_0}{x_1-x_0}=1$$

Polinomios de Interpolación de Lagrange

Tenemos:

$$P(x_0) = L_0(x_0)f(x_0) + L_1(x_0)f(x_0) = f(x_0)$$

y $$P(x_1) = L_0(x_1)f(x_1) + L_1(x_1)f(x_1) = f(x_1)$$

Así pues es la única función que pasa por (x_0, y_0) y (x_1, y_1)

Polinomios de Interpolación de Lagrange

Aplicar el método con un polinomio de 1er, otro de 2o y finalmente uno de 3er. grado a los siguientes datos:

X	0	1	2	3	4	5
Y	1	-0.624	-1.47	3.24	-0.73	-6.37

Polinomios de Interpolación de Lagrange

Para los polinomios de interpolación de Lagrange de 2o. Grado tenemos

$$P_2(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

Donde

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}$$

Polinomios de Interpolación de Lagrange

Para los polinomios de interpolación de Lagrange de 3o. Grado tenemos

$$P_3(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3)$$

Polinomios de Interpolación de Lagrange

Donde

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Polinomios de Interpolación de Lagrange

A continuación debemos elaborar el programa que calcule numéricamente la interpolación para un conjunto de datos. El programa requiere:

- los puntos a interpolar, dados en dos vectores x,y.

- losvalores donde deseamos interpolar.