

Algorithmique II

Programmation Dynamique

Exercice 1 :

Distance d'édition Nous disposons de trois opérations élémentaires : SUBS, INS, DEL qui consistent respectivement à *substituer* une lettre par une autre, à *insérer* une lettre et à *supprimer* une lettre le tout dans un mot.

Par exemple, pour aller de ACGT à CGCT on peut substituer *A* par *C* pour avoir CCGT, puis supprimer le second *C* pour l'insérer à la 3-ième place après *G*. On sait alors que la distance est

$$d(\text{ACGT}, \text{CGCT}) \leq 3.$$

Dans ce qui suit, ε dénote le mot vide et $|m|$ est le nombre de caractères du mot m ($|\varepsilon| = 0$). On notera par $m = ua$ le mot composé par la concaténation des mots u et de a .

1. Calculer $d(\varepsilon, u)$ et $d(v, \varepsilon)$ en fonction de $|u|$ et $|v|$.
2. Calculer $d(ua, va)$ en fonction de $d(u, v)$.
3. Si a et b sont deux différentes lettres montrer que $d(ua, vb) = 1 + \min(d(u, v), d(ua, v), d(u, vb))$
4. En déduire une fonction récursive simple mais exacte pour calculer la distance de deux chaînes de caractères données en entrée.
5. Quelle est la complexité en temps de la fonction précédente ?
6. En utilisant une espace mémoire en $O(n^2)$, on peut accélérer l'algorithme précédent. En ne considérant que les "préfixes", que mettriez-vous en mémoire ?
7. En déduire un nouveau algorithme dynamique calculant une borne sur la distance d'édition entre deux chaînes. En quoi c'est une borne et pas la valeur exacte ?

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on s'intéresse au nombre de manières de partitionner un entier.

1. Montrer qu'il y a 6 manières d'écrire 5 comme somme d'entiers strictement plus petit que 5
2. Soit D_n le nombre de manières d'écrire n comme somme de 1, 3 et 4. Trouver une formule de récurrence pour D_n
3. En déduire un algorithme en quelques lignes pour calculer D_n . Quelle est sa complexité ?
4. Montrer comment on peut calculer en temps logarithmique D_n .

Exercice 3 :

Etant donné deux chaînes de caractères, x et y on veut trouver la plus longue sous-suites notée $\text{LCS}(x, y)$ des deux et l'imprimer.

Ex : $x = \text{ABCBDAB}$ et $y = \text{BDCABC}$, $\text{LCS}(x, y) = \text{BCAB}$

1. Donner une solution dynamique à ce problème.