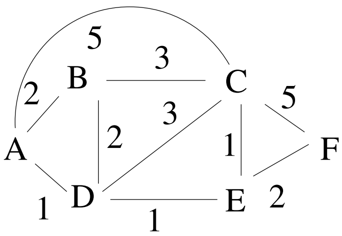
Algorithmique
Graphes – Parcours

Exercice 1 :

Exécuter l'algorithme de Dijkstra suivant sur le graphe d'en face avec $s = A$:

<u>**Entrées :**</u> Un graphe $G = (V, E)$ et une source s
Une fonction poids : $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
<u>**Sorties :**</u> un vecteur distance $d = d(s, t)$ et
une fonction père $\pi : V \to V$.
<u>**Initialisation :**</u>
pour chaque sommet v de V **faire**
    $d[v] = +\infty$; $\pi[v] = \text{NULL}$;
fin pour
$d[s] = 0$; $\pi[s] = s$;
$Q = V$; $S = \emptyset$
<u>**Boucles :**</u>
tant que $Q \neq \emptyset$ **faire**
    $u = \min(Q, d)$
    $S = S - \{u\}$
    pour chaque sommet v voisin de u faire **faire**
        si $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **alors**
            $d[v] = d[u] + w(u, v)$
            $\pi[v] = u$
        fin si
    fin pour
fin tant que
retourner (d, π).



Exercice 2 :

On note la monnaie d'un pays A par μ_A. Le taux de change entre un pays A et un second pays B est noté $a(A, B)$ et concrètement on échange 1 unité de μ_A en $a(A, B)$ μ_B (exemple $a(\text{USA, Europe}) = 0.82$ donc 1 US dollar vaut sur ce marché 0.82 euros).

1. Dans quelle(s) condition(s) peut-on espérer s'enrichir en ne faisant que des échanges et comment feriez-vous pour savoir si cela est possible ?

Exercice 3 :

Dans cet exercice, vous dévez organiser un tour en vélos pour vos clients. On a une carte de n villes connectées deux à deux par des routes cyclables directes. Une telle route entre deux villes u et v a une distance $d(u, v)$. De plus, rester une nuit dans une cité v coûte $c(v)$.
Un client a toujours ses exigences (ici 4). Le client présent veut (i) partir d'une ville s, (ii) arriver à une ville t en (iii) m étapes journalières en sachant que dans une étape ce client ne voudrait pas faire plus qu'une distance $u(k)$ avec $k \in [1, 2, \cdots, m]$.
Votre travail consiste à trouver un tour de m jours sans que le client ne reste jamais dans la même ville durant 2 nuits consécutives et sans que le client ne pédale pendant $u(k)$ le jour k. Il est à noter que le client peut voyager à vélo à travers différentes villes dans un même jour. Et vous devez minimiser les coûts des étapes du tour.

1. Donner un algorithme efficace pour ce problème, i.e. donnant explicitement un tour de longueur m :

$$s = v_0, v_1, \cdots, t = v_m$$

avec un coût minimum et telle que $d(v_{i-1}, v_i) \leq u(i)$.

Exercice 4 :

Un groupe de personnes peuvent s'envoyer des messages. Un message envoyé par une personne S est parfaitement reẹu par une personne T mais selon l'entente entre le couple S et T, T peut

- soit détruire immédiatement le message avec une probabilité p,
- soit le transmettre à une autre personne avec une probabilité $1 - p$.

1. Modéliser l'envoi de message entre deux personnes.

Les personnes sont (A)xel, (B)arbara, (C)hantal, (D)on, (E)l-Hadj, (F)ethi, (G)iulia, (H)oang, (I)gor. Un message envoyé de A à B a 80% de chance d'être détruit. De A à D, 50%. De A à E, 10%. De B à C, 50%. De C à E, 30%. De D à G, 60%. De E à D, 80%. De E à F, 20%. De E à H, 80%. De F à I, 10%. De G à E, 90%. De G à H, 30%. De H à I, 70%. De I à E, 40%.
Par ailleurs, un message de C à F ne sera jamais détruit. De même de E à B.

2. Dessiner le graphe qui reflète les probabilités qu'un message envoyé par une personne X soit retransmis par une personne Y.

Malheureusement, Axel diffame sur Igor.

3. Montrer que la probabilité qu'Igor capte le message initié par Axel est d'au moins de 50%.

4. Quel est le chemin le plus fiable que le message diffamatoire a suivi ?

5. Ecrire un algorithme adapté du cours pour trouver le chemin le plus fiable pour un message entre deux personnes quelconques.

6. Ecrire un algorithme adapté du cours pour calculer la probabilité qu'un message se retrouve partagé entre deux personnes quelconques.