

Algorithmique avancée

Série d'exercices n° 2 – Algorithmes randomisés

Exercice 1 : Election dans un système anonymes

Dans les systèmes distribués, il y a un modèle appelé *réseau radio sans détecteur de collision* (“*radio networks without collision detection*”). Dans un tel modèle, le temps est discret et à chaque instant t , une station peut décider d'émettre un message ou d'écouter. Un message d'une station s peut être instantanément transmis à tous les voisins et il est correctement reçu par un voisin v de la station (ou processeur) émettrice s si et seulement si s est l'unique voisin de v à lui transmettre un message à cet instant. Dans le cas contraire, v ne distingue pas l'absence totale de message et la collision de plusieurs messages (d'où le terme “sans détecteur de collision”).

Un des problèmes fondamentaux dans les systèmes distribués consiste à casser la symétrie d'un système anonyme (toutes les stations sont anonymes) via une élection. Au début de l'algorithme, toutes les stations sont anonymes et à la fin de l'algorithme une unique station est élue (et elle le sait) et les $n - 1$ autres stations ne sont pas élues (et elles le savent). On se place dans un cadre où chaque processeur peut transmettre à tous les autres (graphe sous-jacent complet).

1. Montrer que si le nombre de participants n est connu d'avance par toutes les stations alors il existe un algorithme d'élection en temps moyen constant. Ecrire un tel algorithme.
2. Dans le scénario où le nombre total de stations n n'est pas connu, écrire un algorithme d'élection.

Exercice 2 : Sous-graphe biparti d'un graphe et MAX-CUT

1. Montrer que dans un graphe avec m arêtes il y a toujours un sous-graphe biparti (colorable avec 2 couleurs) avec au moins $m/2$ arêtes.

Le problème MAXCUT consiste à partitionner les sommets d'un graphe $G = (V, E)$ en deux sous-ensembles A et B (i.e. $A \cup B = V$ et $A \cap B = \emptyset$) telle que le nombre d'arêtes reliant les sommets de A à ceux de B soient maximum. Ce problème est NP-difficile et on veut un algorithme randomisé d'approximation.

2. Montrer la relation entre MAXCUT et les sous-graphes bipartis.
3. Elaborer un algorithme FPRAS pour le problème MAXCUT

Exercice 3 : 2-SAT est “polynomial”

Dans cet exercice, on va analyser un algorithme randomisé qui s'exécute en temps moyen quadratique pour décider si une formule 2-SAT peut être satisfaite.

1. Rappeler le problème de décision 2-SAT.
2. Soit l'algorithme suivant :

Data : Une formule 2-SAT construite sur n variables

Result :

Prendre une affectation A aléatoire des variables ;

while A ne satisfait pas la formule **do**

 Soit C une clause non satisfaite de A ;

 Choisir l'une des deux variables et changer son affectation;

end

Montrer que sur une instance qui peut être satisfaite cet algorithme renvoie une affectation satisfaisante en un temps moyen $O(n^2)$.