

Работа 1.4.1*

Изучение экспериментальных погрешностей на примере
физического маятника

Тимонин Андрей

Б01-208

| | |
|---|---|
| Содержание | |
| 1) Аннотация | 3 |
| 2) Теоретические сведения | 3 |
| 3) Методика измерений | 4 |
| 4) Используемое оборудование | 4 |
| 5) Результаты измерений и обработка данных..... | 5 |
| 6) Заключение | 9 |

1) Аннотация

Цель работы: 1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; 2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения; 3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника; 4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

В работе используются: металлический стержень с опорной призмой; дополнительный груз; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения центра масс маятника; секундомер; счётчик колебаний (механический или электронный); линейки металлические различной длины; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

2) Теоретические сведения

Учёт влияния подвесной призмы*

Формула (6) получена в предположении, что подвес маятника является материальной точкой. На самом же деле маятник подвешивается с помощью треугольной призмы конечного размера, поэтому использование (6) может привести к *систематической* погрешности результата. Для более точных расчётов следовало бы воспользоваться общей формулой периода колебаний физического маятника (5), принимая во внимание наличие двух тел — стержня и призмы:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\text{ст}} + J_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}ga_{\text{ст}} - m_{\text{пр}}ga_{\text{пр}}}},$$

где $J_{\text{пр}}$, $m_{\text{пр}}$ и $a_{\text{пр}}$ — соответственно момент инерции, масса и расстояние до центра масс призмы (знак «минус» в знаменателе учитывает, что призма находится *выше* оси подвеса).

Однако призма имеет малые размеры и массу, и, возможно, эта погрешность будет мала. Проведём соответствующие оценки. В работе используется призма массой $m_{\text{пр}} \sim 70$ г, с расстоянием от ребра центра масс $a_{\text{пр}} \sim 1,5$ см. Поскольку призма находится непосредственно вблизи оси качания, её наличие мало влияет на суммарный момент инерции маятника. Действительно, по порядку величины для призмы имеем $J_{\text{пр}} \sim m_{\text{пр}}a_{\text{пр}}^2 \sim 10^{-5}$ кг·м², а при $a = 10$ см имеем $m_{\text{ст}}aa \sim 10^{-2}$ кг·м², то есть поправка на момент инерции призмы в условиях опыта составляет не более 0,1%. Поскольку такая погрешность заведомо меньше погрешности используемых нами приборов (например, линейки), ей можно спокойно пренебречь.

Сравним теперь моменты сил, действующие на призму и стержень при тех же $a = 10$ см:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}}ga_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}ga_{\text{ст}}} \sim 10^{-2}.$$

Видим, что здесь поправка может достигать 1%. Таким образом, если мы хотим (и можем) провести измерения с погрешностью менее 1%, эту поправку нельзя не учитывать†.

На практике учесть влияние призмы можно следующим образом. Поскольку расстояние $a_{\text{пр}}$ трудно поддаётся непосредственному измерению, можно исключить его, изменяя положение центра масс всей системы. Пусть $x_{\text{ц}}$ — расстояние от центра масс *системы* до точки подвеса. По определению имеем

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_{\text{ст}}a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}}a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} + m_{\text{пр}}}$$

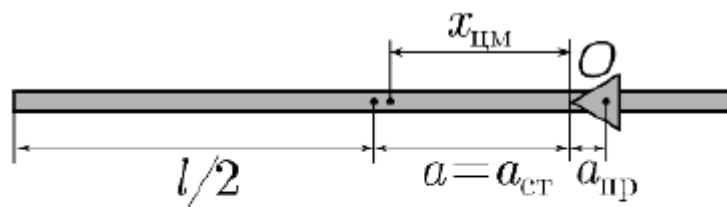


Рис. 4. Смещение центра масс из-за подвесной призмы

(«минус» учитывает положение призмы). Исключая отсюда $aa_{пр}$, получим формулу для периода с нужной нам поправкой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g \left(1 + \frac{m_{пр}}{m_{ст}}\right) x_{ц}}},$$

Таким образом, для более точного измерения g следует для каждого положения призмы измерять не только величину aa — положение призмы относительно центра масс стержня), но и расстояние $xx_{ц}$ — положение центра масс стержня с призмой относительно призмы (см. Рис. 4).

3) Методика измерений

Расстояния во всех установках измеряются линейками и штангенциркулем. Положение центра масс маятника может быть определено с помощью балансирования маятника на вспомогательной \perp -образной подставке с острой верхней гранью.

4) Используемое оборудование

| Прибор | Цена деления | Погрешность |
|------------|--------------|-------------|
| Линейка | 1 мм | 0.5 мм |
| Секундомер | 0.01 с | 0.01 с |
| Весы | 0.001 г | 0.001 г |

Экспериментальная установка

Тонкий стальной стержень длиной $ll \sim 1$ м и массой $mm \sim 1$ кг (точные параметры определяются непосредственными измерениями) подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Диаметр стержня много меньше его длины $dd \sim 12$ мм $\ll ll$. Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Острые ребра призмы образует ось качания маятника.

Возможны две схемы реализации установок.

Установка А. Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя длину aa — расстояние от центра масс до точки подвеса. Период колебаний измеряется непосредственно с помощью секундомера.

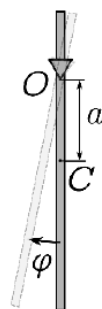


Рис. 1. Стержень
как физический
маятник

5) Результаты измерений и обработка данных

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (t_i - \bar{t})^2}.$$

Формула - 1. Формула для вычисления случайной погрешности периода

$$\sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_t^{\text{сл}})^2 + (\sigma_t^{\text{сист}})^2}.$$

Формула - 2. Формула для вычисления полной погрешности периода

| # | T |
|---|-------|
| 1 | 30.5 |
| 2 | 30.56 |
| 3 | 30.56 |
| 4 | 30.5 |

Лаб. данные - 1. Измерения 4 периодов колебаний физ. маятника

| # | T | a | x с(от острия) | n | отклонили на 5 градусов | шаг 5 | t. n | L маятника мат | T. мат. маят |
|---|-------|----|----------------|----|-------------------------|-------|--------|----------------|--------------|
| 1 | 31.9 | 40 | 37 | 20 | | | 1.595 | 0.6319 | 31.72 |
| 2 | 30.28 | 35 | 32.5 | 20 | | | 1.514 | 0.569965685 | 30.15 |
| 3 | 30.9 | 30 | 27.6 | 20 | | | 1.545 | 0.593545377 | 30.6 |
| 4 | 30.53 | 25 | 23.5 | 20 | | | 1.5265 | 0.579416124 | 30.44 |
| 5 | 31.31 | 20 | 18.6 | 20 | | | 1.5655 | 0.609400917 | 31.56 |
| 6 | 33.35 | 15 | 14 | 20 | | | 1.6675 | 0.691398837 | 31.28 |
| 7 | 38.38 | 10 | 9.7 | 20 | | | 1.919 | 0.915686706 | - |
| 8 | 52.1 | 5 | 4.5 | 20 | | | 2.605 | 1.687378125 | - |

Лаб. данные - 2. Измерения 8 периодов маятника при перемещении призмы и длины матем. маятника с тем же периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g \left(1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}\right) x_{\text{ц}}}},$$

Формула - 3. Для вычисления периода физического маятника с учетом влияния призмы

$$g = \frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{(1 + \frac{m_{prism}}{m_{sterj}}) \cdot x_y} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}$$

Формула - 4. Формула для вычисления ускорения свободного падения

$$g = \frac{\frac{1}{12} + 0.36^2}{(1 + \frac{0.075}{1.0243}) \cdot 0.335} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{1.5345^2}$$

Расчет - 1. Вычисление ускорения свободного падения

$$g = 9.929$$

Расчет - 2. Значение ускорения свободного падения для одного измерения

$$\Delta g = (\frac{9.929}{9.81} \cdot 100\%) - 100\% = 1.22\%$$

Расчет - 3. Вычисление процентного отклонения значения от истинного

$$t_{sred} = \frac{30.5 + 30.56 + 30.56 + 30.5}{4} = 30.53$$

Расчет - 4. Вычисление среднего значения периода 20 колебаний

$$\sigma_{sluch} = 0.03464101615$$

Расчет - 5. Значение случайной погрешности при вычислении периода 20 колебаний

Для более точной оценки погрешности мы возьмем в качестве систематической ошибки – время реакции человека. Будем отпускать линейку от 0 и ловить ее.

| № | Н_линейки |
|---|-----------|
| 1 | 18 |
| 2 | 22 |
| 3 | 14 |
| 4 | 17 |
| 5 | 23 |

$$h_{sred} = \frac{18 + 22 + 14 + 17 + 23}{5} = 18.8 \text{ см}$$

Расчет - 6. Вычисление среднего значения высоты схвата линейки

$$\sigma_h = 3 \text{ мм}$$

Расчет - 7. Систематическая ошибки при измерении высоты схвата линейки

$$\sigma_{t_{reak}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{h}} \cdot \sigma_h$$

Формула - 5. Формула для расчета погрешности времени реакции через частную производную

$$\sigma_h = \sqrt{(\sigma_{h_{sluch}})^2 + (\sigma_{h_{sist}})^2}$$

Формула - 6. Формула для вычисления полной погрешности высоты схвата линейки

$$\sigma_h = \sqrt{(0.03701351105)^2 + (\frac{3}{1000})^2} = 0.03713488926$$

Расчет - 8. Полная погрешность высоты схвата линейки

$$\sigma_{t_{reak}} = \sqrt{\frac{2}{9.81}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{0.188}} \cdot 0.03713488926 = 0.01933542431$$

Расчет - 9. Погрешность вычисления времени реакции

$$\sigma_{t_{total}} = \sqrt{(\sigma_{t_{reak}})^2 + (\sigma_{t_{sluch}})^2}$$

Формула - 7. Формула для полной погрешности периода 20 колебаний

$$\sigma_{t_{total}} = \sqrt{(0.01933542431)^2 + (0.3464101615)^2}$$

Расчет - 10. Полная погрешность периода 20 колебаний

$$\sigma_{t_{total}} = 0.3469493603$$

Расчет - 11. Полная погрешность периода 20 колебаний

$$\sigma_{t_i} = 0.01734746802$$

Расчет - 12. Полная погрешность периода 1 колебания

График зависимости T от a

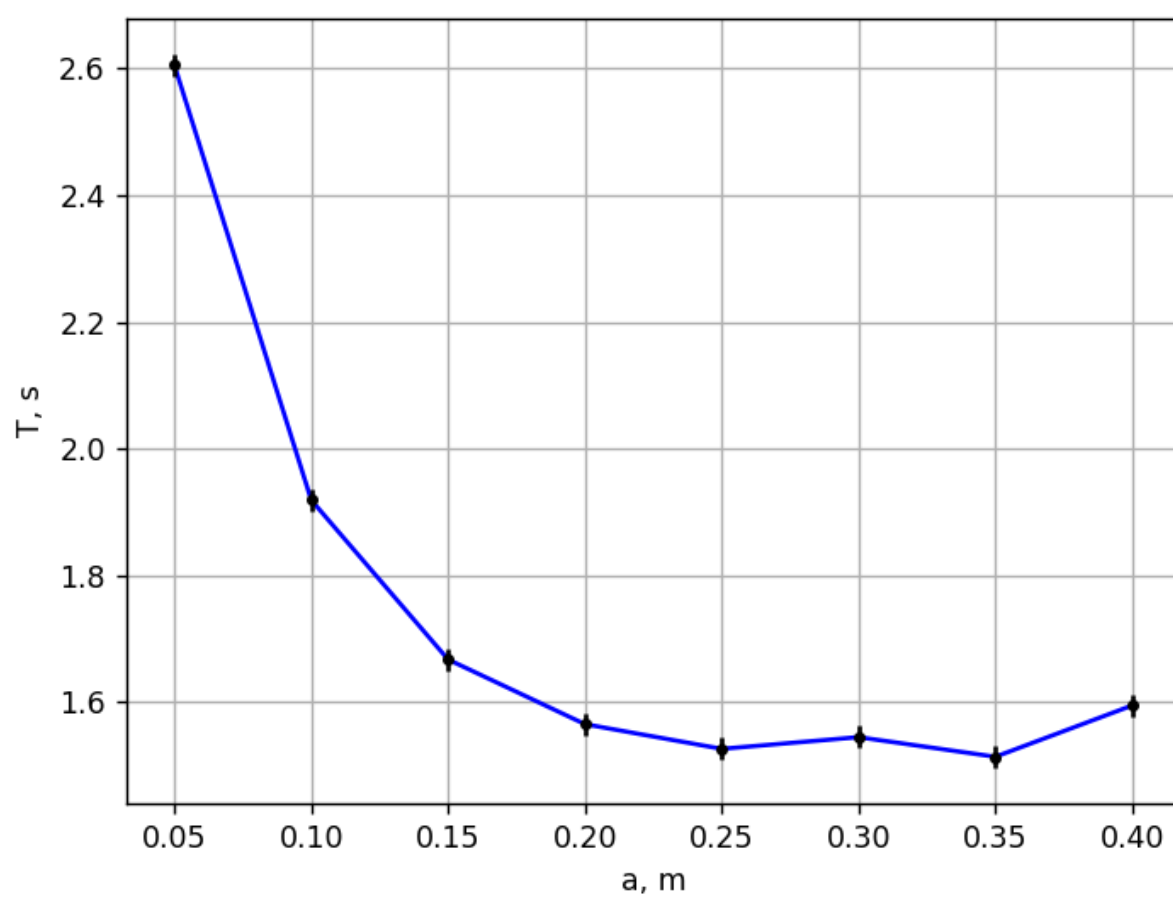
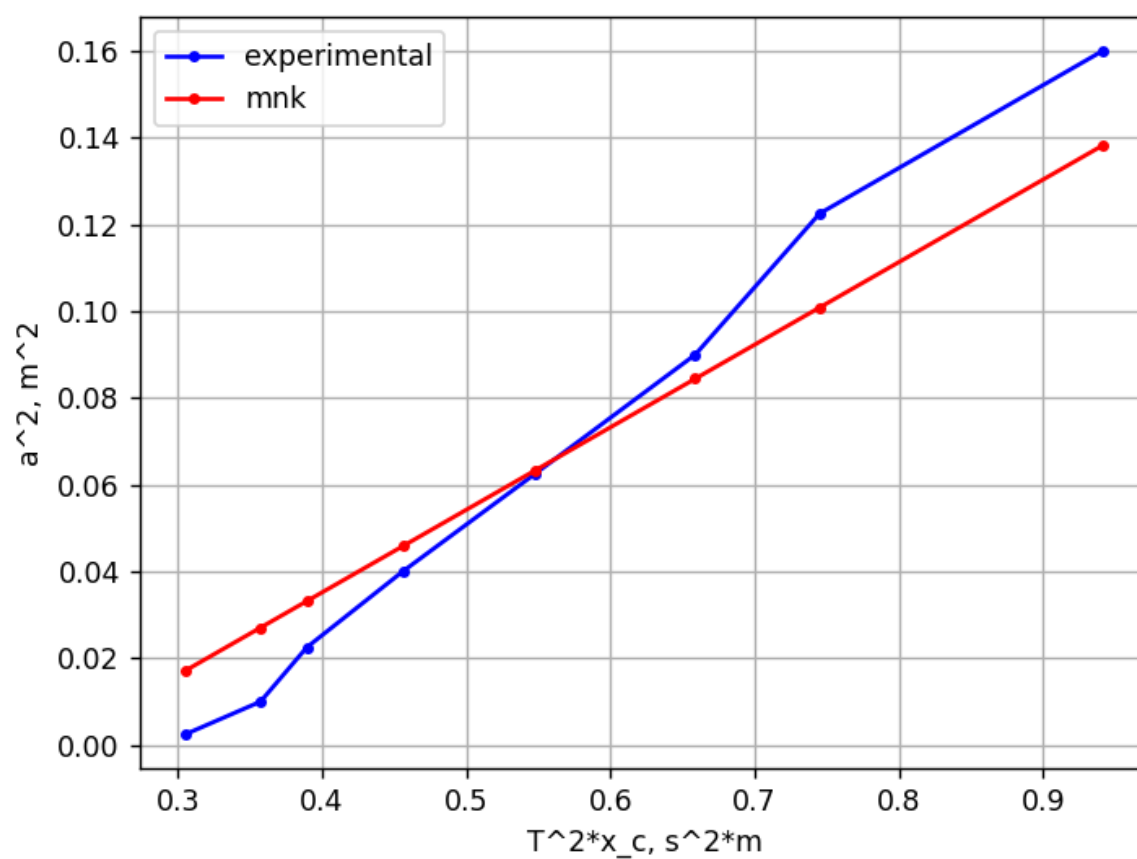


График зависимости u от v



$g_{mnk} = 12.54$

Отклонение g в процентах = +27.8 %

6) Заключение

Среднее меньше мнк => погрешность вычисления среднего меньше чем погрешность вычисления мнк

