

Лабораторная работа 1.2.3  
Определение моментов инерции твердых тел  
с помощью трифилярного подвеса

Тимонин Андрей

Б01-208

Содержание	
1) Аннотация .....	3
2) Теоретические сведения .....	3
3) Используемое оборудование .....	6
4) Результаты измерений и обработка данных .....	8
5) Заключение .....	13

## 1) Аннотация

Цель работы: измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

В работе используются: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

## 2) Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси (см. введение к данному разделу). Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле

$$I = \int r^2 dm.$$

Здесь  $r$  - расстояние элемента массы тела  $dm$  от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела  $m$ .

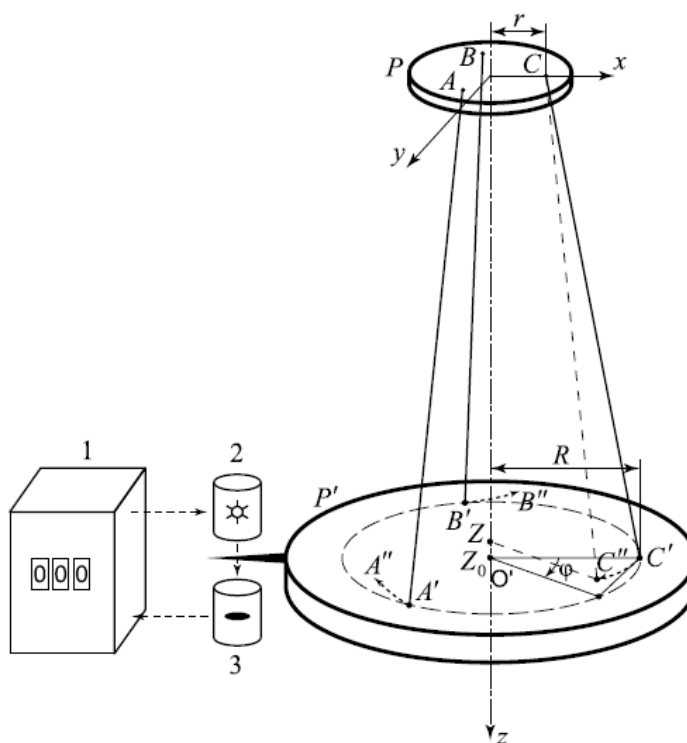


Рис. 1. Трифилярный подвес

Для однородных тел известной плотности при заданных размерах и достаточно простой форме момент инерции можно вычислить. Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно определить экспериментально. Удобно использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной плат формы Р и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA', BB' и CC' вращающейся плат формы Р'. Плат форма Р укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней плат формы. Лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси, чем подвешенную на нитях нижнюю, так как нижнюю платформу трудно закрутить не вызвав ее раскачиваний, подобных движению маятника, учет

которых сильно усложнил бы расчеты. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа Р' оказывается повернутой на угол  $\phi$  относительно верхней платформы Р, возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как имеет угловую скорость (кинетическую энергию вращения). В результате платформа совершает крутильные колебания.

Если пренебречь потерями энергии на трение (о воздух и в креплениях нитей), то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E.$$

Здесь  $I$  - момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $m$  - масса платформы с телом,  $\phi$  - угол поворота платформы от положения равновесия системы, точкой обозначена производная по времени (угловая скорость),  $z_0$  - координата по вертикали центра нижней платформы О' при равновесии ( $\phi = 0$ ),  $z$  - координата той же точки при некотором угле поворота  $\phi$ . Первый член в левой части уравнения - кинетическая энергия вращения, второй член - потенциальная энергия в поле тяжести,  $E$  - полная энергия системы (платформы с телом).

Отметим, что, как показывает соотношение (2), возвращающая сила возникает благодаря силе тяжести. Воспользуемся системой координат  $x, y, z$ , связанной с верхней платформой, как показано на рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки С в этой системе -  $(r, 0, 0)$ . Нижний конец данной нити С', находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты  $(R, 0, z_0)$ , а при повороте платформы на угол  $\phi$  эта точка переходит в С'' с координатами  $(R\cos\phi, R\sin\phi, z)$ . Расстояние между точками С и С'' равно длине нити  $L$ . Поэтому

$$(R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 = L^2.$$

Учитывая, что при малых углах поворота  $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$ , получаем

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi = z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2. \quad (4)$$

Извлекая из (4) квадратный корень и учитывая малость угла  $\phi$ , имеем

$$z \approx \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 \sqrt{1 - \frac{Rr\phi^2}{z_0^2}} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}.$$

Подставляя это значение  $z$  в уравнение (2), получаем

$$\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\phi^2 = E.$$

Дифференцируя по времени и сокращая на  $\dot{\phi}$ , находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\phi} + mg\frac{Rr}{z_0}\phi = 0.$$

Производная по времени от  $E$  равна нулю, так как потерями энергии на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем. Решение этого уравнения, как нетрудно убедиться простой подстановкой, имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right).$$

Здесь амплитуда  $\varphi_0$  и фаза  $\theta$  колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}.$$

Обратим внимание на то, что из этой формулы при  $r = R$  и  $I = mR^2$  (тонкое кольцо) получаем формулу для математического маятника. Из (9) находим формулу для определения момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0}.$$

Учитывая, что параметры установки  $R$ ,  $r$  и  $z_0$  при проведении опытов не меняются, удобно переписать последнее уравнение следующим образом:

$$I = kmT^2.$$

Здесь  $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$  — величина, постоянная для данной установки.

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний. Затем вычисляем момент инерции тела, пользуясь аддитивностью, в справедливости которой можно убедиться, проведя измерения сначала для каждого из двух тел отдельно, а затем для обоих тел вместе.

При выводе формул предполагалось, что малы необратимые потери энергии, связанные с трением, то есть мало затухание колебаний. О затухании колебаний можно судить, сравнивая время  $\tau$  уменьшения амплитуды колебаний в 2-3 раза с периодом колебаний  $T$ . Необратимыми потерями энергии можно пренебречь, если выполняется условие

$$\tau \gg T.$$

В данной работе рекомендуется период колебаний определять с относительной погрешностью 0,5%. Число колебаний, по которым надо вычислять период, определяется этой погрешностью и погрешностью измерения времени.

Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1) (см. рис. 1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

### 3) Используемое оборудование

<b>1.2.3(1)</b> $R=(114,6+0,5)\text{мм}$ $r=(30,2+0,3)\text{мм}$ $m=(1066,8+0,5)\text{г}$	<b>1.2.3(2)</b> $R=(114,6+0,5)\text{мм}$ $r=(30,5+0,3)\text{мм}$ $m=(983,2+0,5)\text{г}$
<b>1.2.3(3)</b> $R=(114,6+0,5)\text{мм}$ $r=(30,2+0,3)\text{мм}$ $m=(965,7+0,5)\text{г}$	<b>1.2.3(4)</b> $R=(114,6+0,5)\text{мм}$ $r=(30,5+0,3)\text{мм}$ $m=(934,7+0,5)\text{г}$

Лаб. данные - 1. Параметры установки (4 установка)

L – 2.16 м – длина нитей

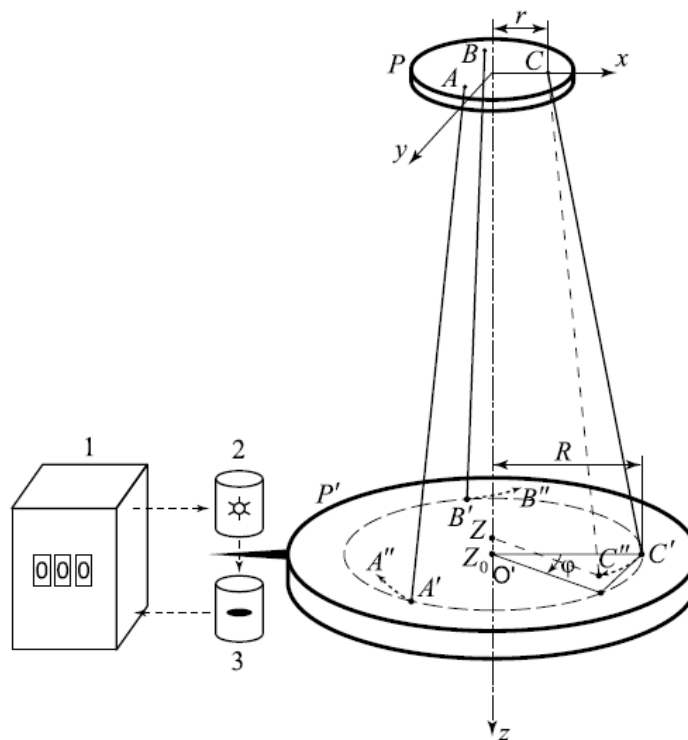


Рис. 1. Трифилярный подвес

Для однородных тел известной плотности при заданных размерах и достаточно простой форме момент инерции можно вычислить. Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно определить экспериментально. Удобно использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной плат формы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  вращающейся плат формы  $P'$ . Плат форма  $P$  укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней плат формы. Лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси, чем подвешенную на нитях нижнюю, так как нижнюю платформу трудно закрутить не вызвав ее раскачиваний, подобных движению маятника, учет которых сильно усложнил бы расчеты. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа  $P'$  оказывается повернутой на угол  $\phi$  относительно верхней платформы  $P$ , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как имеет угловую скорость (кинетическую энергию вращения). В результате платформа совершает крутильные колебания.

Таблица погрешностей измерительных приборов

Название прибора	Цена деления	Погрешность
Линейка	0,5 мм	0,25 мм
Штангенциркуль	0,1 мм	0,05 мм
Таймер	0,01 с	0,01 с

#### 4) Результаты измерений и обработка данных

Брус				
№	N	T10	I, кг * м <sup>2</sup>	I_сред, кг * м <sup>2</sup>
1	10	37,13	0,011805592	0,01178443
2	10	37,02	0,011735746	
3	10	37,14	0,011811952	

Расчет - 1. Момент инерции установки с Брусом

Полый цилиндр				
№	N	T10, с	I, кг * м <sup>2</sup>	I_сред, кг * м <sup>2</sup>
1	10	41,49	0,011864276	0,011770055
2	10	41,66	0,011961699	
3	10	40,82	0,01148419	

Расчет - 2. Момент инерции установки с Полым цилиндром

Две половинки в центре				
№	N	T10, с	I, кг * м <sup>2</sup>	I_сред, кг * м <sup>2</sup>
1	10	30,98	0,008780581	0,008780596
2	10	31,03	0,008808946	
3	10	30,93	0,008752261	

Расчет - 3. Момент инерции установки с Двумя половинками

Крышка				
№	N	T10, с	I, кг * м <sup>2</sup>	I_сред, кг * м <sup>2</sup>
1	10	39,01	0,009341818	0,009349808
2	10	39	0,009337029	
3	10	39,07	0,009370577	

Расчет - 4. Момент инерции установки с Крышкой

Крышка + полый цилиндр				
№	N	T10, с	I, кг * м <sup>2</sup>	I_сред, кг * м <sup>2</sup>
1	10	38,95	0,014059152	0,01406638
2	10	39	0,01409527	
3	10	38,93	0,014044717	

Расчет - 5. Момент инерции установки с Крышкой + полый цилиндр



Две половинки + полый цилиндр				
№	N	T10	I, кг * м^2	I_сред, кг * м^2
1	10	34,13	0,014301047	0,014038595
2	10	35,38	0,015367772	
3	10	33,1	0,013450897	
4	10	33,06	0,013418407	
5	10	33,35	0,01365485	

Расчет - 6. Момент инерции установки с Двумя половинками + полый цилиндр

Две половинки + крышка				
№	N	T10	I, кг * м^2	I_сред, кг * м^2
1	10	30,74	0,010889278	0,010890705
2	10	30,76	0,010903452	
3	10	30,69	0,010853883	
4	10	30,74	0,010889278	
5	10	30,78	0,010917635	

Расчет - 7. Момент инерции установки с Двумя половинками + крышка

Две половинки + полый цилиндр + крышка				
№	N	T10	I, кг * м^2	I_сред, кг * м^2
1	10	32,56	0,015533421	0,015552516
2	10	32,57	0,015542964	
3	10	32,56	0,015533421	
4	10	32,6	0,01557161	
5	10	32,61	0,015581165	

Расчет - 8. Момент инерции установки со всеми телами

Две смещаем					
Шаг	№	N	T10, с	I, кг * м^2	I_сред, кг * м^2
1	1	10	31,06	0,008826	0,00882789
	2	10	31,1	0,0088487	
	3	10	31,03	0,0088089	
2	1	10	31,14	0,0088715	0,008873412
	2	10	31,16	0,0088829	
	3	10	31,13	0,0088658	
3	1	10	31,4	0,0090203	0,009041371
	2	10	31,41	0,009026	
	3	10	31,5	0,0090778	
4	1	10	31,87	0,0092923	0,009272911
	2	10	31,85	0,0092807	
	3	10	31,79	0,0092457	
5	1	10	32,36	0,0095803	0,009548724
	2	10	32,29	0,0095389	
	3	10	32,27	0,009527	
6	1	10	32,96	0,0099388	0,009906697
	2	10	32,9	0,0099027	
	3	10	32,86	0,0098786	
7	1	10	33,77	0,0104333	0,010404524
	2	10	33,66	0,0103655	
	3	10	33,74	0,0104148	
8	1	10	34,39	0,0108199	0,010815765
	2	10	34,44	0,0108514	
	3	10	34,32	0,0107759	
9	1	10	35,25	0,0113679	0,011398026
	2	10	35,24	0,0113614	
	3	10	35,4	0,0114648	
10	1	10	36,37	0,0121017	0,012095082
	2	10	36,41	0,0121284	
	3	10	36,3	0,0120552	
11	1	10	37,27	0,0127081	0,012705789
	2	10	37,29	0,0127217	
	3	10	37,24	0,0126876	

Лаб. данные - 2. Моменты инерции при смещении двух тел

Одна зафиксирована					
Шаг	№	N	T10, с	I, кг * м^2	I_сред, кг * м^2
1	1	10	30,9	0,008735291	0,008763596
	2	10	30,96	0,008769247	
	3	10	30,99	0,00878625	
2	1	10	31,13	0,008865815	0,008967641
	2	10	31,04	0,008814625	
	3	10	31,75	0,009222483	
3	1	10	31,41	0,00902602	0,009082806
	2	10	31,13	0,008865815	
	3	10	31,98	0,009356584	
4	1	10	31,35	0,008991569	0,008982014
	2	10	31,34	0,008985834	
	3	10	31,31	0,008968639	
5	1	10	31,47	0,009060536	0,009073983
	2	10	31,48	0,009066295	
	3	10	31,53	0,009095118	
6	1	10	31,74	0,009216675	0,009216677
	2	10	31,76	0,009228293	
	3	10	31,72	0,009205063	
7	1	10	32,03	0,009385865	0,009618465
	2	10	33,18	0,010071941	
	3	10	32,05	0,00939759	
8	1	10	33,08	0,010011321	0,009718033
	2	10	32,37	0,009586185	
	3	10	32,32	0,009556593	
9	1	10	32,71	0,009788621	0,009800597
	2	10	32,75	0,009812576	
	3	10	32,73	0,009800594	
10	1	10	33,22	0,01009624	0,010080041
	2	10	33,17	0,010065871	
	3	10	33,19	0,010078013	
11	1	10	33,69	0,010383946	0,010347012
	2	10	33,58	0,010316248	
	3	10	33,62	0,01034084	
12	1	10	34,11	0,010644465	0,010646546
	2	10	34,11	0,010644465	
	3	10	34,12	0,010650707	
13	1	10	34,57	0,010933499	0,010935609
	2	10	34,59	0,010946153	
	3	10	34,56	0,010927174	
14	1	10	35,3	0,01140013	0,011382917
	2	10	35,27	0,011380762	
	3	10	35,25	0,011367858	

Лаб. данные - 3. Моменты инерций при смещении одной половинки

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} = \frac{9.81 \cdot \frac{114.6}{1000} \cdot \frac{30.5}{1000}}{4 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{L^2 - R^2}} = 0.0004026726$$

Расчет - 9. Константа для данной установки

$$\sigma_{z_0} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2}$$

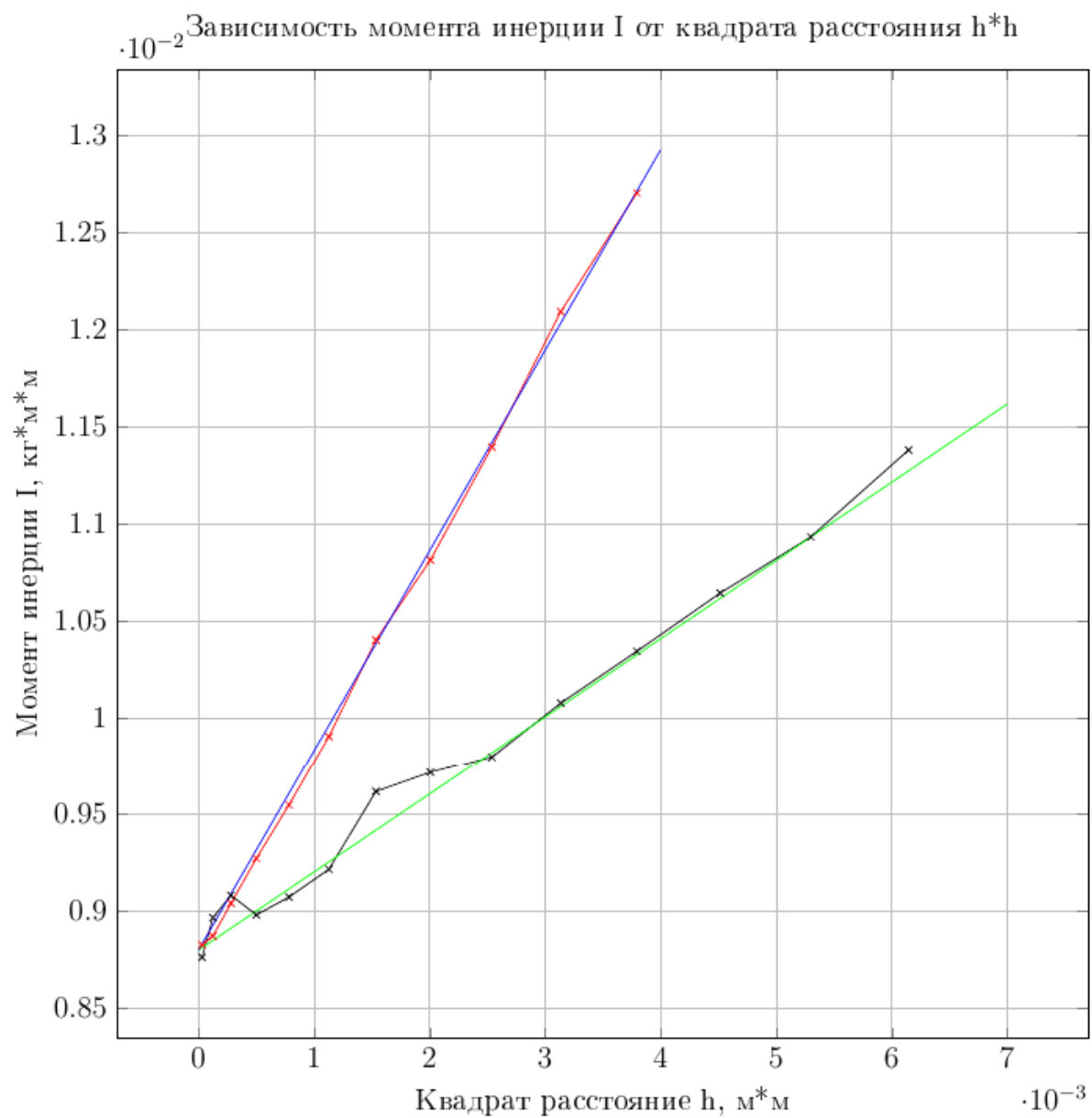
Расчет - 10. Погрешность расчета расстояния между дисками

<b>I_измер</b>	<b>I_1 + I_2</b>			
0,01555252	0,017625	<b>Две половинки + полый цилиндр + крышка</b>		
0,01406638	0,014982	<b>Крышка + полый цилиндр</b>		
0,01089071	0,011993	<b>Две половинки + крышка</b>		
0,01403859	0,014413	<b>Две половинки + полый цилиндр</b>		

Расчет - 11. Проверка аддитивности

<b>I пустой установки</b>
0,012275565

Расчет - 12. Момент инерции пустой установки



##### 5) Заключение

Аддитивность момента инерции тел выполняется с точностью до погрешностей измеренных величин.

