Tent map
Ettore Canonici

Introduzione

In matematica, la mappa della tenda con il parametro r è la funzione a valori reali f_{r} definita da:

$$f_{\mathrm{r}}(x) := r\min(x, 1-x). \tag{1}$$

iI nome è dovuto alla forma a tenda del grafico di f_{r}.
Per i valori del parametro r compreso tra 0 e 2, f_{r} mappa l'intervallo unitario $[0,1]$ su se stesso, definendo in tal modo un sistema dinamico a tempo discreto su di esso (equivalentemente, una relazione di ricorrenza). In particolare, iterando un punto $x_0 \in [0,1]$ si ottiene una sequenza :

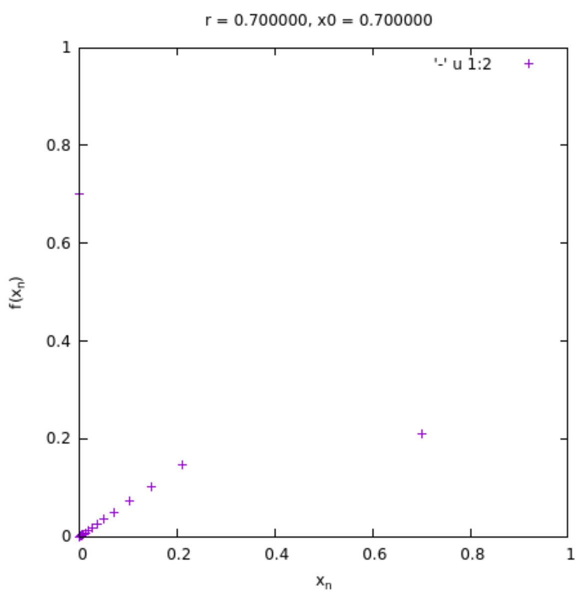
$$x_{\mathrm{n}+1} = f(x_{\mathrm{n}}) = \begin{cases} rx_{\mathrm{n}} & \text{se } 0 \le x_{\mathrm{n}} < \frac{1}{2} \\ r(1-x_{\mathrm{n}}) & \text{se } \frac{1}{2} \le x_{\mathrm{n}} \le 1 \end{cases} \tag{2}$$

dove r è una costante reale positiva.
Scegliendo ad esempio il parametro $r = 2$, l'effetto della funzione f_{r} può essere visto come il risultato dell'operazione di piegatura dell'intervallo unitario in due, quindi allungamento dell'intervallo risultante $[0, \frac{1}{2}]$ per ottenere nuovamente l'intervallo $[0,1]$. Iterando la procedura, qualsiasi punto x_0 dell'intervallo assume nuove posizioni successive come descritto sopra, generando una sequenza x_{n} in $[0,1]$.

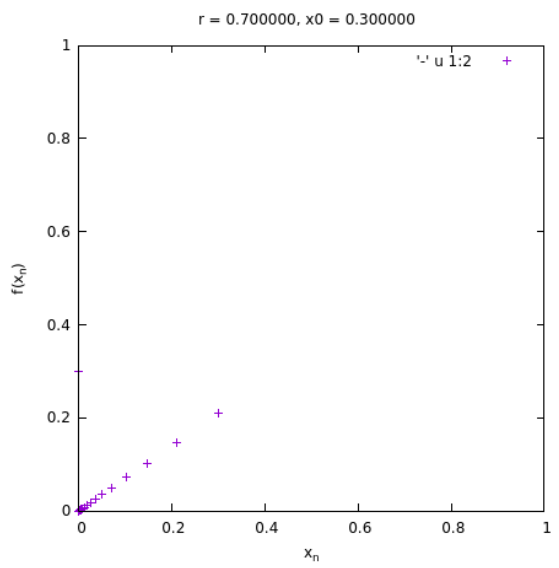
Dettagli

A seconda del valore di r, la mappa della tenda mostra una gamma di comportamenti dinamici che vanno dal prevedibile al caotico.

- Se $r < 1$, il punto $x = 0$ è un punto fisso attraente del sistema per tutti i valori iniziali x_0, ovvero il sistema converge verso $x = 0$ da qualsiasi valore iniziale scelto.

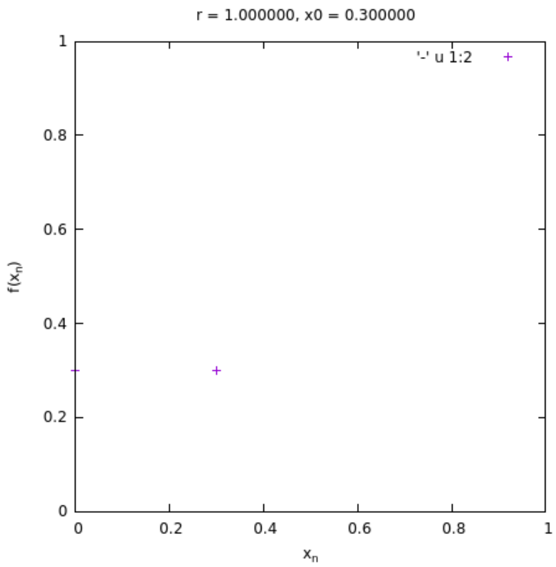


(a)

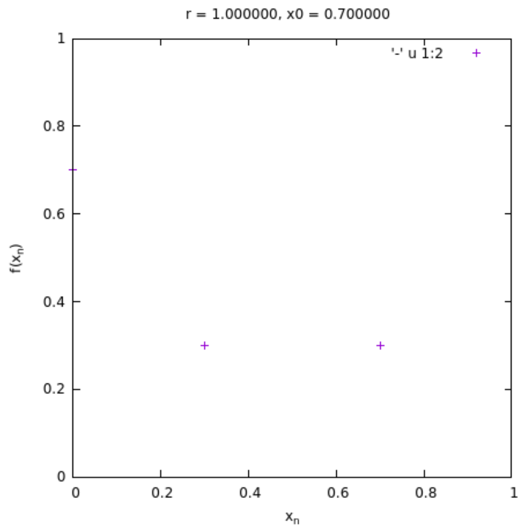


(b)

- Se $r = 1$ tutti i valori di x inferiore o uguale a $\frac{1}{2}$ sono punti fissi del sistema.

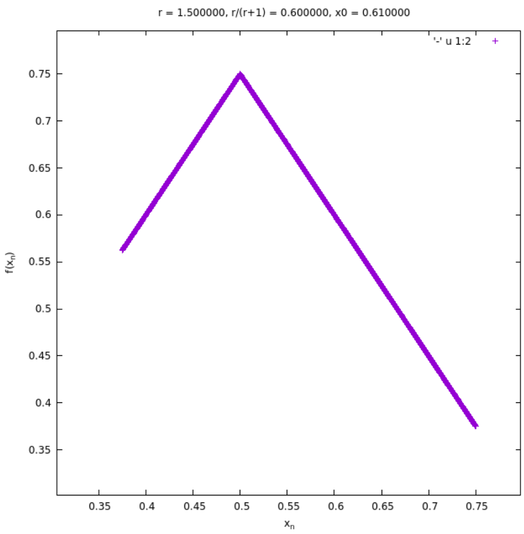


(a)

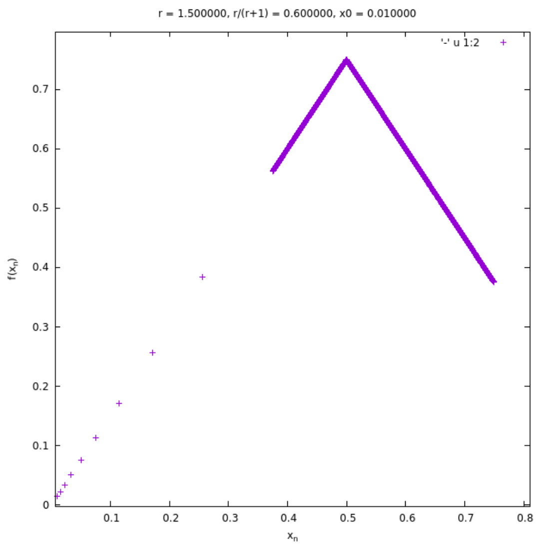


(b)

- Se r è maggiore di 1, il sistema ha due punti fissi, uno a 0 e l'altro a $\frac{r}{r+1}$. Entrambi i punti fissi sono instabili.

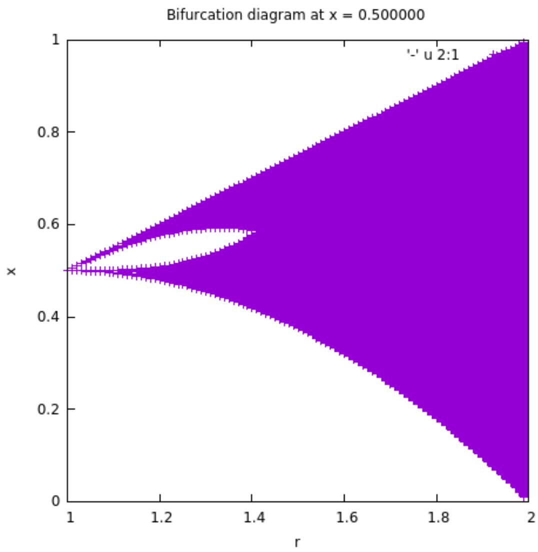


(a)

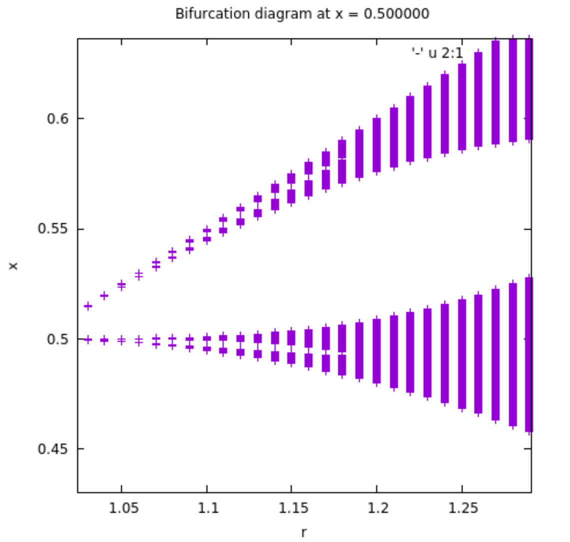


(b)

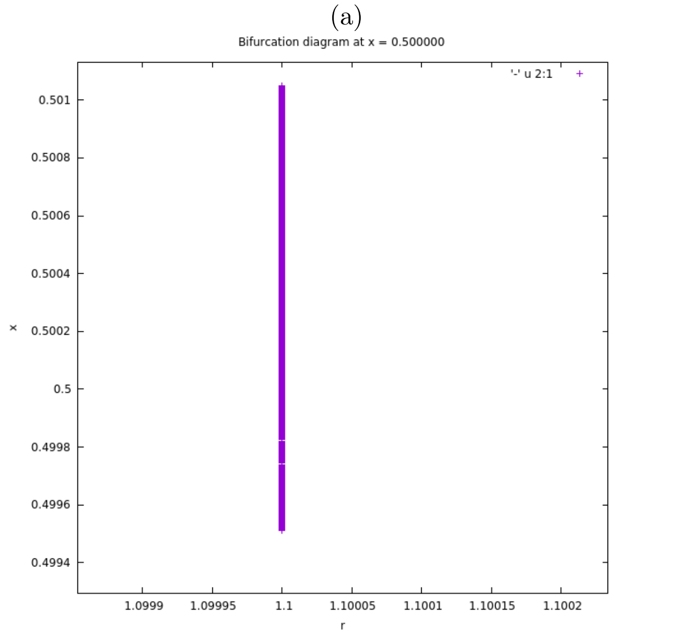
- Se r è compreso tra 1 e $\sqrt{2}$, il sistema mappa una serie di intervalli tra $\frac{r-r^2}{2}$ e $\frac{r}{2}$ su se stessi. Questo insieme di intervalli è il sottoinsieme invariante più piccolo della linea reale sotto questa mappa. Se r è maggiore di $\sqrt{2}$, questi intervalli si fondono e l'insieme è l'intero intervallo da $\frac{r-r^2}{2}$ a $\frac{r}{2}$ (vedere diagramma di biforcazione).


Bifurcation diagram at x = 0.500000
'-' u 2:1
x
r
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1.2
1.4
1.6
1.8
2

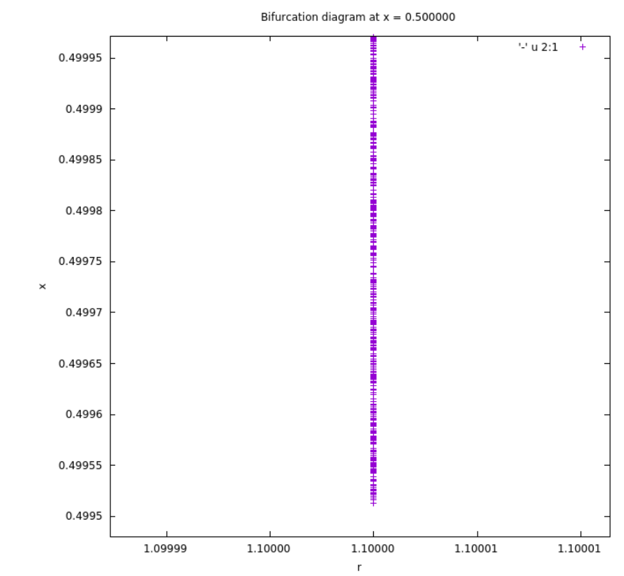
(a)


Bifurcation diagram at x = 0.500000
'-' u 2:1
x
r
0.6
0.55
0.5
0.45
1.05
1.1
1.15
1.2
1.25

(b)

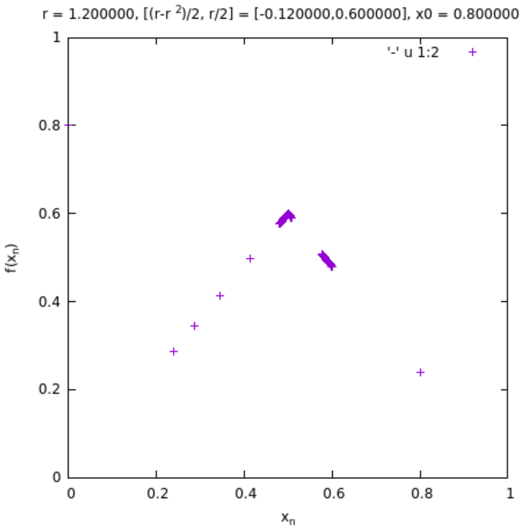

Bifurcation diagram at x = 0.500000
'-' u 2:1
x
r
0.501
0.5008
0.5006
0.5004
0.5002
0.5
0.4998
0.4996
0.4994
1.0999
1.09995
1.1
1.10005
1.1001
1.10015
1.1002

(c)

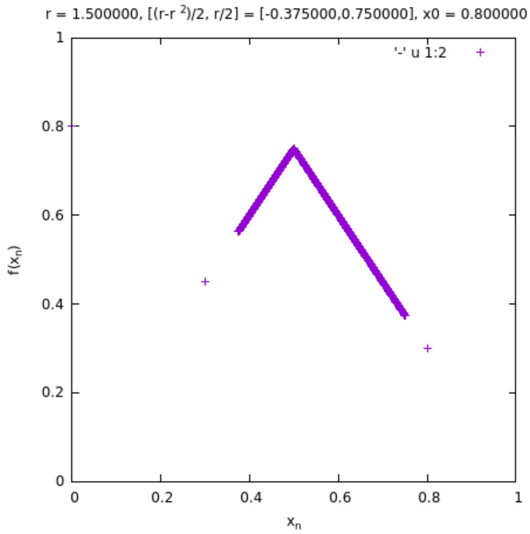

Bifurcation diagram at x = 0.500000
'-' u 2:1
x
r
0.49995
0.4999
0.49985
0.4998
0.49975
0.4997
0.49965
0.4996
0.49955
0.4995
1.09999
1.10000
1.10000
1.10001
1.10001

(d)

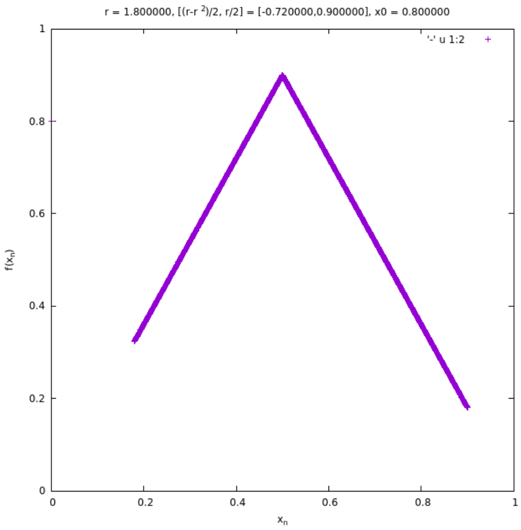
- Se r è compreso tra 1 e 2, l'intervallo $[\frac{r-r^2}{2}, \frac{r}{2}]$ contiene punti sia periodici che non periodici, sebbene tutte le orbite siano instabili (ovvero i punti vicini si allontanano dalle orbite anziché verso di loro) . Orbite con lunghezze più lunghe appaiono all'aumentare di r.



(a)

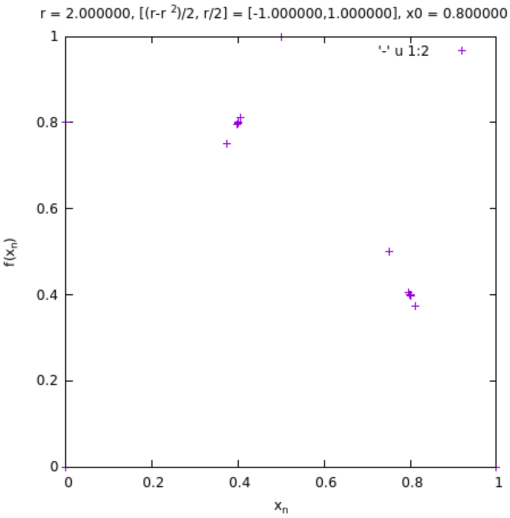


(b)

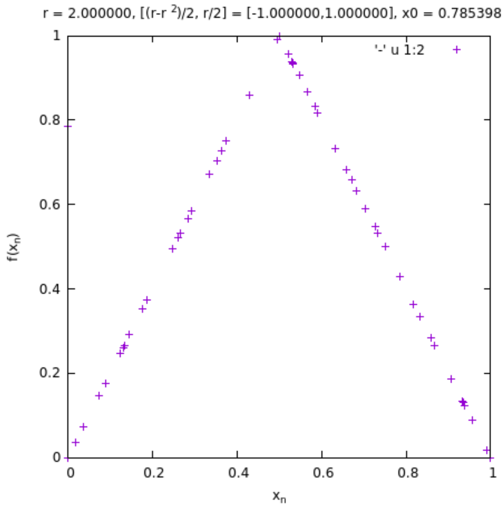


(c)

- Se r è uguale a 2, il sistema mappa l'intervallo $[0, 1]$ su se stesso. Ora ci sono punti periodici con ogni lunghezza dell'orbita all'interno di questo intervallo, nonché punti non periodici. I punti periodici sono densi in $[0, 1]$, quindi la mappa è diventata caotica. Inoltre la dinamica sarà non periodica se e solo se x_0 è irrazionale.



(a) Caso $x_0 = 0.8$, razionale.



(b) Caso $x_0 = \pi/4$, irrazionale.

- Se r è maggiore di 2, il set Julia della mappa viene disconnesso e si rompe in un set Cantor nell'intervallo $[0, 1]$. Il set Julia contiene ancora un numero infinito di punti non periodici e periodici (comprese le orbite per qualsiasi lunghezza dell'orbita) ma quasi ogni punto entro $[0, 1]$ ora divergerà all'infinito. Il set canonico Cantor (ottenuto eliminando successivamente i terzi centrali dai sottoinsiemi della linea unitaria) è il set Julia della mappa tenda per $r = 3$.

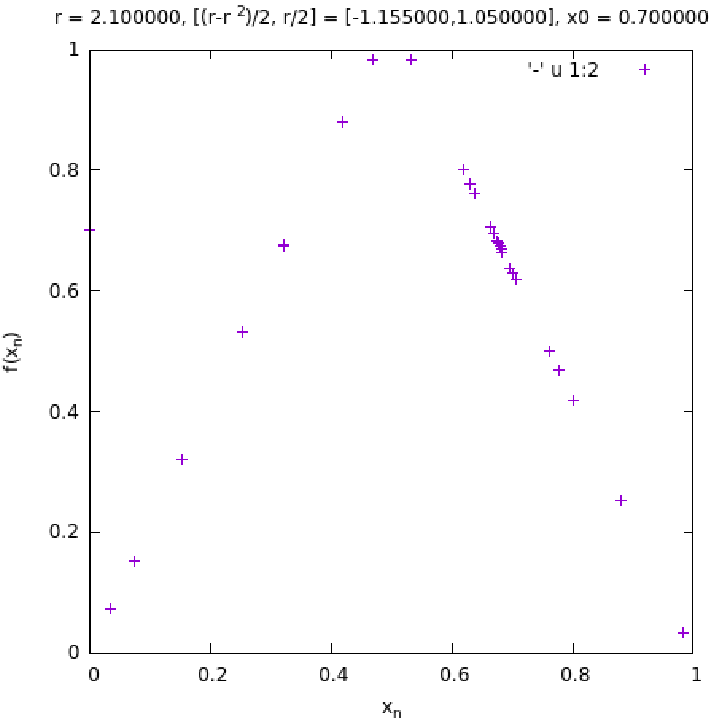


Figura 7

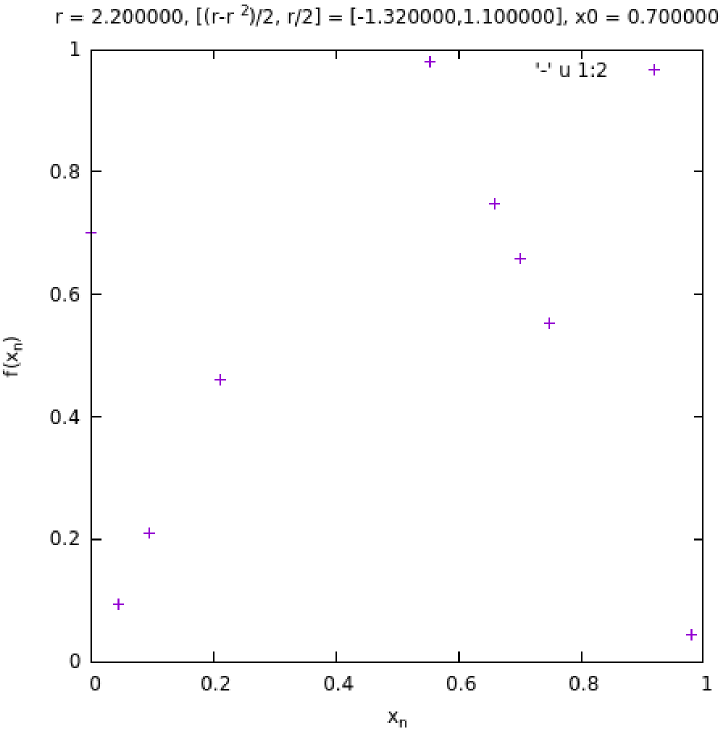
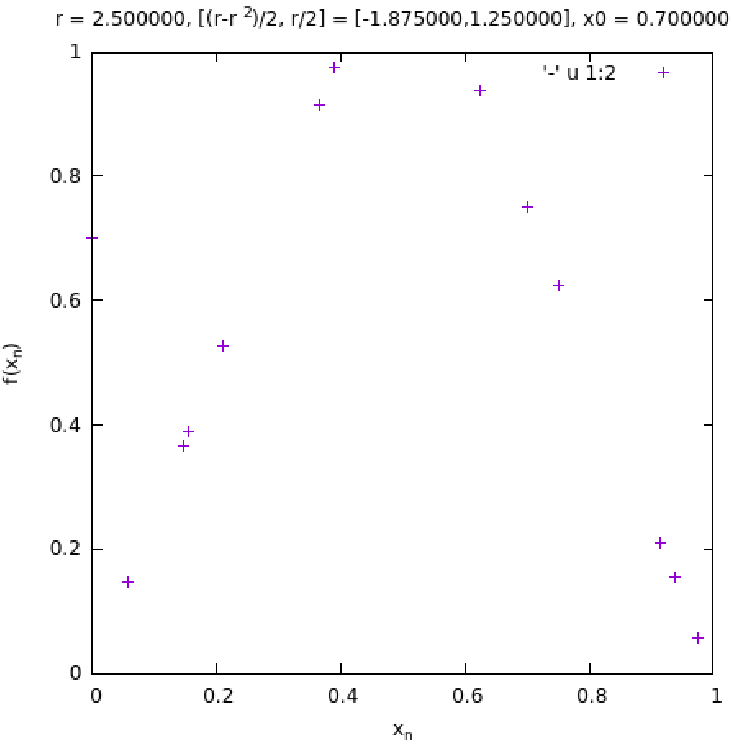
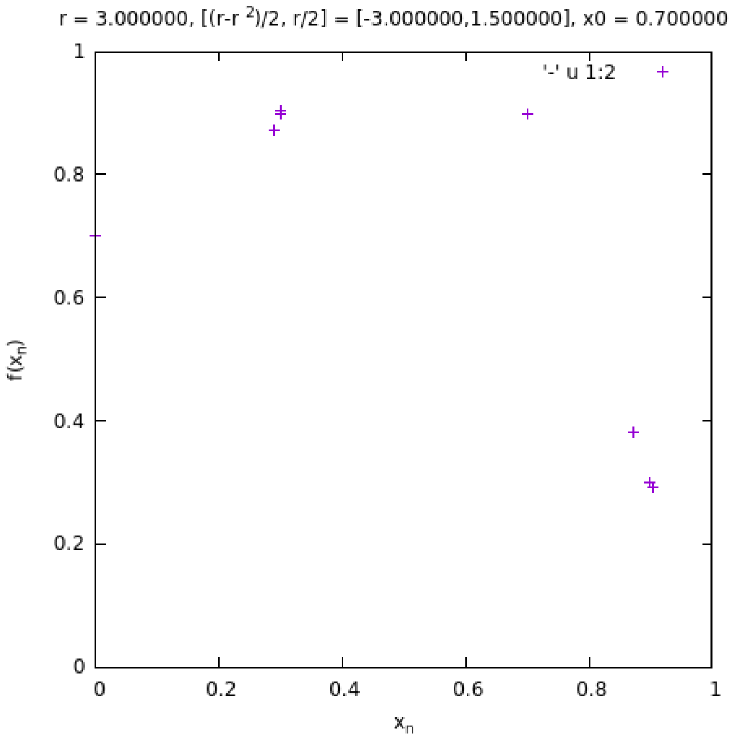

r = 2.200000, [(r-r 2)/2, r/2] = [-1.320000,1.100000], x0 = 0.700000
'-' u 1:2
f(xn)
xn

Figura 8


r = 2.500000, [(r-r 2)/2, r/2] = [-1.875000,1.250000], x0 = 0.700000
'-' u 1:2
f(xn)
xn


r = 3.000000, [(r-r 2)/2, r/2] = [-3.000000,1.500000], x0 = 0.700000
'-' u 1:2
f(xn)
xn
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1