Ago di Buffon

Ettore Canonici

Introduzione

L'origine del metodo Montecarlo viene solitamente associata alla nascita dei computer ed in particolare alle ricerche fatte da Fermi, Ulam e Von Neumann, nel secondo dopoguerra, sui processi di diffusione dei neutroni. Per la verità circa 150 anni prima Buffon aveva ideato un esperimento consistente nel lancio di un ago di lunghezza nota su un foglio in cui erano rappresentate rette parallele a distanza nota tra loro. Il lancio, ripetuto molte volte, dell' ago consentiva un calcolo approssimato di π. Il metodo ha potuto, visto l'elevato numero di replicazioni necessarie, affermarsi solo con la diffusione di computer sempre più veloci e a minor costo. E' sorprendente che una tecnica probabilistica, come è questo metodo, si sia rivelata utile in problemi deterministici di calcolo numerico come la stima di integrali non calcolabili in forma chiusa. Il metodo Montecarlo ha un ruolo rilevante tra i metodi di simulazione stocastica che, assieme alla simulazione dinamica, costituisce uno dei più importanti capitoli della simulazione su computer.

Dettagli

Il punto di partenza è il lancio casuale degli aghi di lunghezza $2l$ in una griglia composta da tante rette parallele distanti $2a$ l'una dall'altra.
Si introduce la coordinata x che descrive la posizione del centro dell'ago e l'angolo θ con cui è ruotato l'ago rispetto al riferimento, che sarà uniformemente distrubuito tra 0 e 2π. Supponiamo che gli aghi siano distribuiti in modo uniforme su una struttura infinita di rette parallele, in modo tale che gli aghi non interagiscano l'uno con l'altro. Di fatto quello che facciamo è simulare il lancio di n aghi generando n coppie (x, θ) con $x \in [0, a]$ e $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, dico che un ago tocca una retta se $lcos(\theta) > |x|$.
Tenendo poi conto che :

- $P(x)dx = \frac{1}{a}dx$ è la probabilità di avere una posizione nell'intervallo $[x, x + dx]$
- $P(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}d\theta$ è la probabilità di avere un anogolo nell'intervallo $[\theta, \theta + d\theta]$

la probabilità di intersezione tra ago e retta sarà:

$$I = \int_0^{+a} P(x)dx \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} P(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi a} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{lcos(\theta)} dx = \frac{2l}{\pi a}. \tag{1}$$

Tuttavia vale anche, posto N_{int} = numero di intersezioni ago-retta e N_{tot} = n = numero di aghi lanciati

$$I = \frac{N_{\text{int}}}{N_{\text{tot}}}. \tag{2}$$

Pertanto si ottiene, eguagliando la (1) e la (2) e risolvendo rispetto a π:

$$\pi = \frac{N_{\text{tot}}}{N_{\text{int}}} \frac{2l}{a}. \tag{3}$$

Il valore di π verrà ricavato proprio attraverso la (3) usando delle condizioni iniziali che ottimizzino la convergenza, ovvero facendo in modo che $\frac{N_{\text{int}}}{N_{\text{tot}}}$ sia dell'ordine di 0.5.

Risultati

Usando i seguenti parametri: $l = 1.5, a = 2, n = 1000000$ si ottiene:

- π_{misurato} : 3.141065
- $\frac{N_{\text{int}}}{N_{\text{tot}}}$: 0.477545
- scarto relativo tra π_{vero} e π_{misurato} : 0.000168

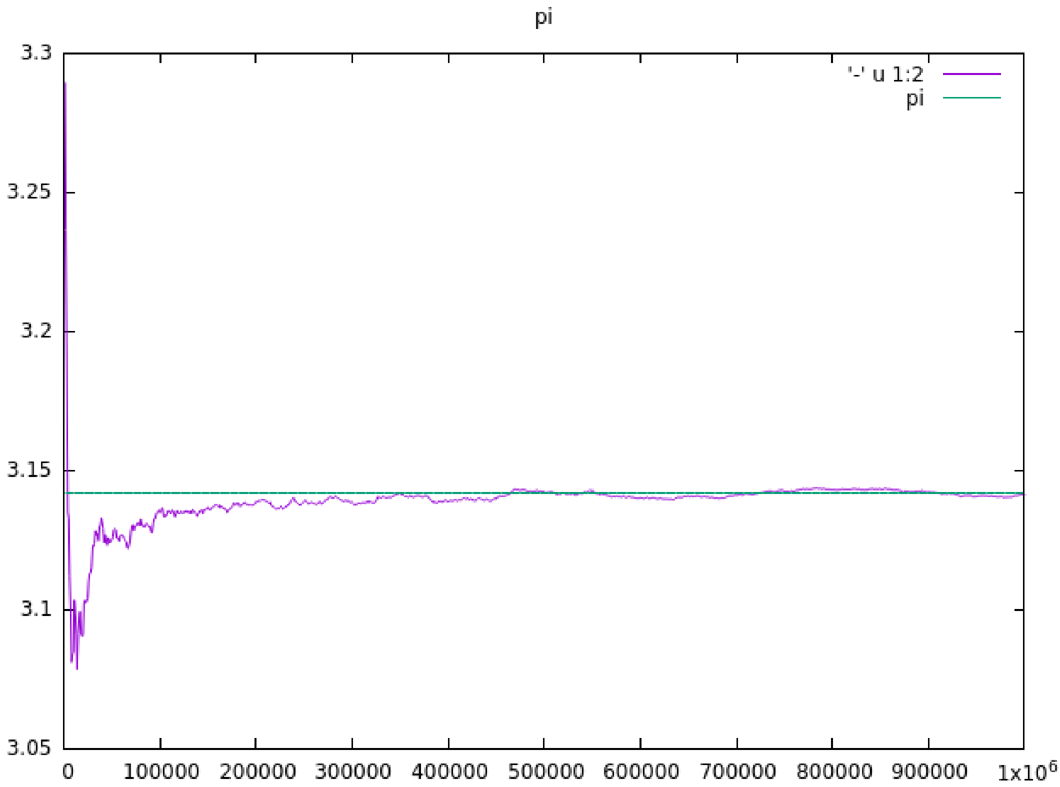

Figura 1: Valore di π_{misurato} in funzione del numero di aghi lanciati

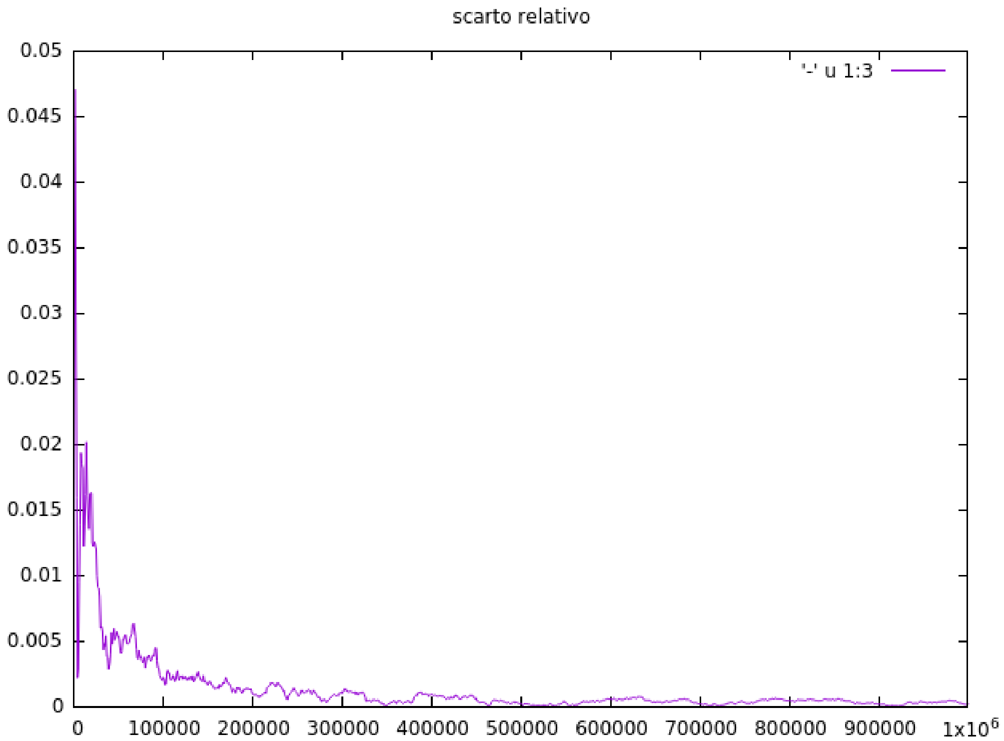

Figura 2: scarto relativo tra π_{vero} e π_{misurato} in funzione del numero di aghi lanciati