Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет Систем Управления и Робототехники

Курсовая работа
по курсу «Теория нелинейных и дискретных систем управления»

Выполнили: Московский К.А.
Алексеева Ю.В.

Группа: R34362.

Преподаватель: Зименко К.А.

Санкт-Петербург
2021 г.

1 Дискретные системы

$$A_d = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C_d = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$T = 0.5c \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x((k+1)T) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(kT) \\ \\ y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x(kT) \end{cases}$$

1.1 Переход к системе В-В

Оператор сдвига: $x_1((k+1)T) = zx_1(kT)$

$$W_d = \frac{Y(z)}{U(z)} = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d$$

$$C_d(zI - A_d)^{-1}B_d = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & z+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z^2+2z+2}{z^3-z^2-5z-7} & \frac{z}{z^3-z^2-5z-7} & \frac{z+1}{z^3-z^2-5z-7} \\ \frac{1}{z^3-z^2-5z-7} & \frac{z^2-z-7}{z^3-z^2-5z-7} & \frac{z-3}{z^3-z^2-5z-7} \\ \frac{z}{z^3-z^2-5z-7} & \frac{-2z+7}{z^3-z^2-5z-7} & \frac{z^2-3z}{z^3-z^2-5z-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z^2 - z}{z^3 - z^2 - 5z - 7}$$

Откуда:

$$Y(z)(z^3 - z^2 - 5z - 7) = U(z)(z^2 - z)$$

Тогда наша модель в системе Вход - Выход будет иметь вид:

$$y((k+3)T) - y((k+2)T) - 5y((k+1)T) - 7y(kT) = u((k+2)T) - u((k+1)T)$$

1.2 Вычисление значения $y_{\text{св}}(5)$

При свободном управлении $u(iT) \equiv 0, \forall i$

$$y_{\text{св}}((k+f)T) = C_d x_{\text{св}}((k+f)T) =$$

$$C_d A_d x((k+f-1)T) = C_d A_d^2 x((k+f-2)T) = C_d A_d^f x(kT)$$

Получаем:

$$y_{\text{св}}(5T) = C_d A_d^5 x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

1.3 Анализ системы на управляемость

Матрица управляемости:

$$U = [B|AB|...|A^{n-1}B]$$

Для нашей системы:

$$U = [B|AB|A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank\, U = n = 3; \quad det\, U = -1 \neq 0$$

Из полученных значений следует, что искомая дискретная система полностью управляема

1.4 Анализ системы на наблюдаемость

Матрица наблюдаемости:

$$O = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ C_d A_d^2 \\ ... \\ C_d A_d^{n-1} \end{bmatrix}$$

В нашем случае:

$$O = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ C_d A_d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 5 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

$$rank\, O = n = 3; \quad det\, O = 84 \neq 0$$

Из полученных значений следует, что искомая дискретная система полностью наблюдаема

1.5 Нахождение уравнения, приводящего систему в положение $x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ в момент $t = 3c$

Исходная система полность управляема и полностью наблюдаема, значит требуемое управление можно найти через грамиан управляемости.

$$W_T = \sum_{m=1}^{f} A^{f-m} B_d B_d^T (A^T)^{f-m} - \text{грамиандискретнойуправляемости}$$

$$f = \frac{t}{T} = \frac{3}{0.5} = 6$$

Получаем управление вида:

$$u(i) = B_d^f A_d^T (f - i) (\sum_{m=1}^{f} A^{f-m} B_d B_d^T (A^T)^{f-m})^{-1} x_1$$

где x_1 - конечное положение = [1 1 1].

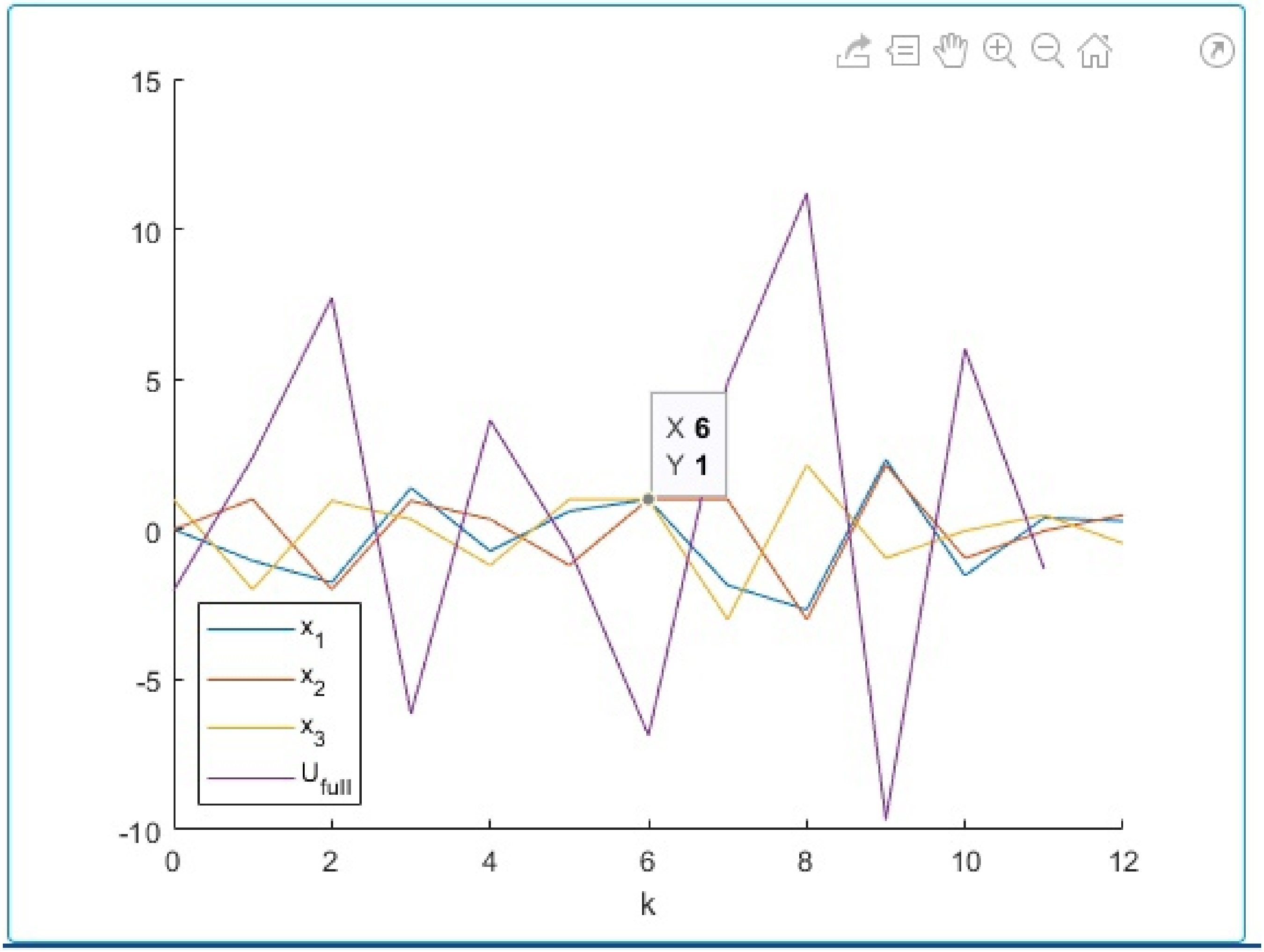

Рис. 1: Зависимость состояния системы и управления от номера такта.

1.6 Синтез стабилизируещого управления, $t_п \leq 2$

У нас есть сиситема:

$$\begin{cases} zx = A_d x + B_d u = (A_d + B_d K_d)x \\ y = C_d x \end{cases}$$

Матрица $A_d M + B_d H = M\Gamma$ должна иметь нулевые собственные числа. Создадим эталонную модель и решим уравнение Сильвестра относительно MиK_d:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma\xi \\ \nu = H\xi \end{cases}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A_d M + B_d H = M\Gamma \\ H = K_d M \end{cases}$$

$$K_d^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа замкнутой системы:

$$\sigma(A_d + B_d K_d) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

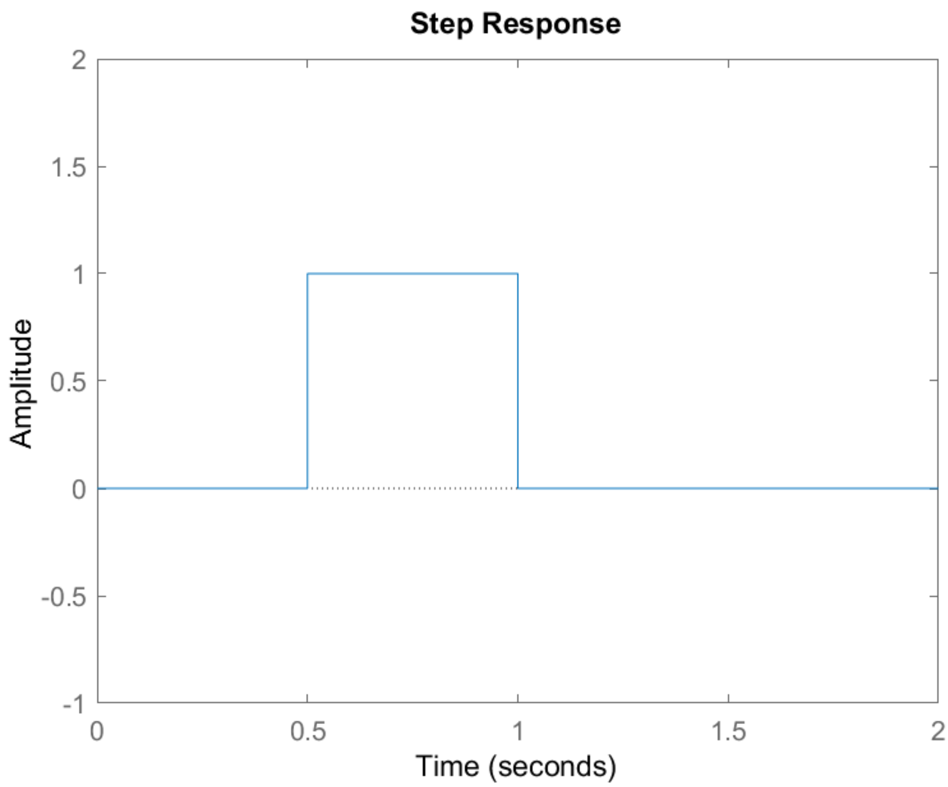

Рис. 2: Step response

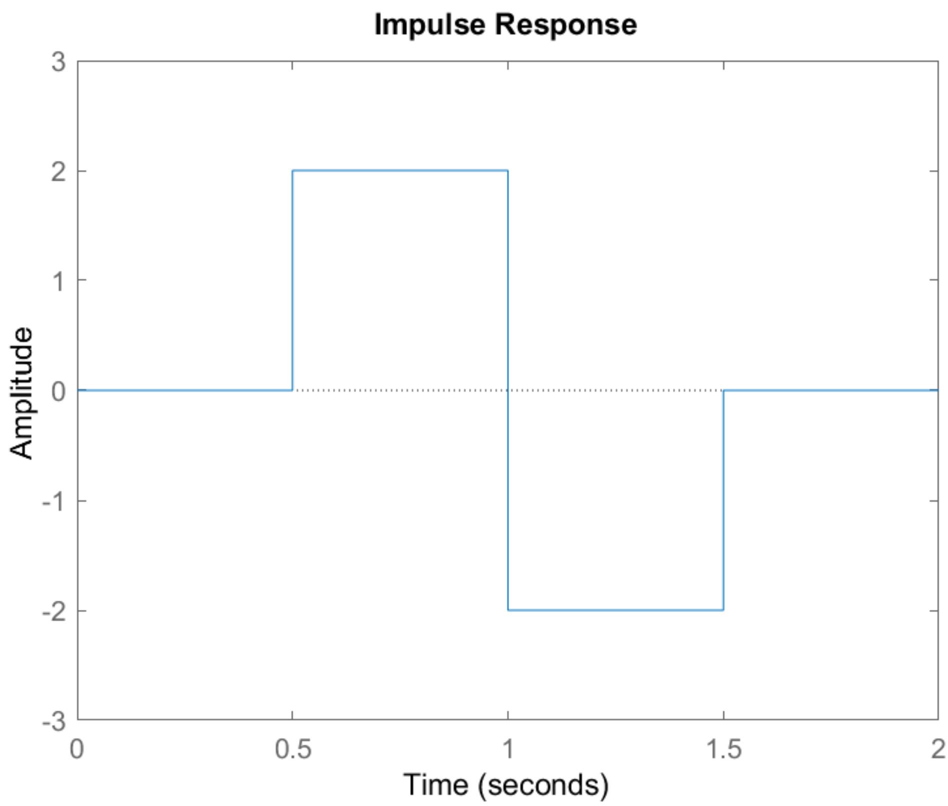

Рис. 3: Impulse response

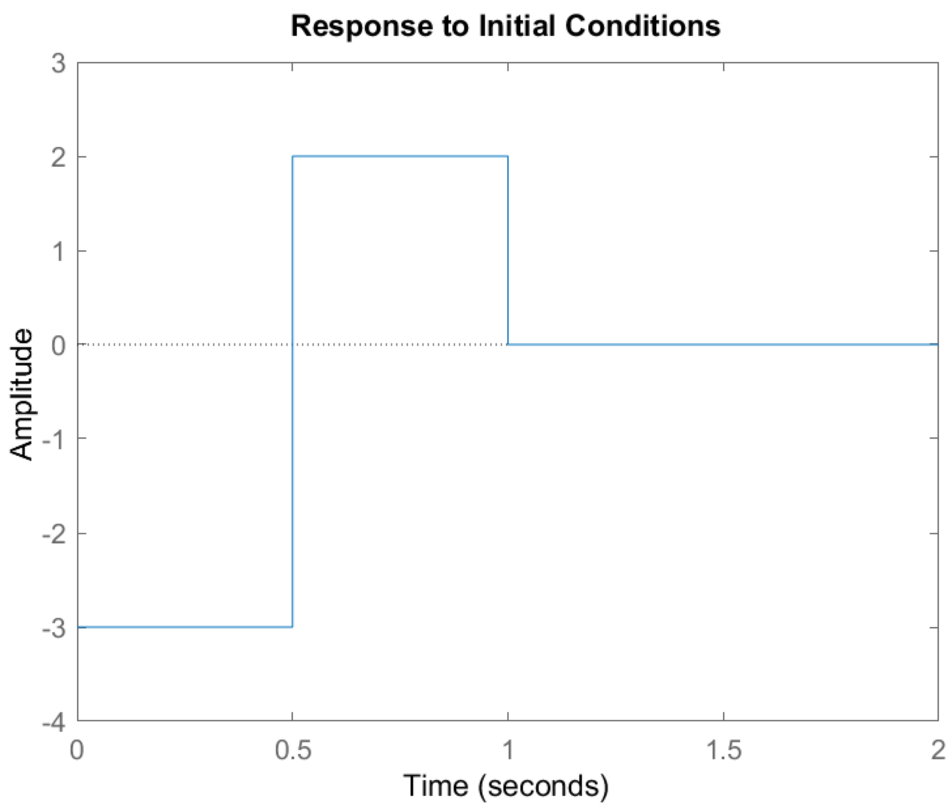

Рис. 4: Initial...

1.7 Синтез наблюдателя

Модель наблюдателя:

$$\begin{cases} z\hat{x} = A_d\hat{x} - L_d(y-\hat{y}) + B_d u \\ y = C_d x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z\hat{x} = A_d\hat{x} - L_d \mathrm{C}_d(x-\hat{x}) + B_d u \\ y = C_d x \end{cases}$$

$e = x - \hat{x}$ - ошибка наблюдения

Цель: $\lim\limits_{t\to\infty} ||e|| = \lim\limits_{t\to\infty} ||x-\hat{x}|| = 0$

$$\frac{de}{dt} = \frac{d(x-\hat{x})}{dt} = A_d x + B_d u - A_d\hat{x} + L_d\mathrm{C}_d(x-\hat{x}) - B_d u = \\ = (x-\hat{x})(A_d + L_d C_d) = (A_d + L_d C_d)e$$

Для минимизации управления берём нулевые корни эталонной модели:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma_L \xi \\ \upsilon = H_L \xi \end{cases} \quad \Gamma_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Для нахождения матрицы L_d необходимо решить уравнение Сильвестра:

$$\begin{cases} M\Gamma_L^T - A_d^T M = C_d^T H_L \\ H_L = L_d^T M \end{cases}$$

$$L_d = \begin{bmatrix} -5.4694 \\ -0.1633 \\ -1.1429 \end{bmatrix}$$

1.8 Синтез управления по выходу

Вычислим K_d с помощью LQR (Linear Quadratic Regulator):

$$K_d = \begin{bmatrix} -1.7143 & -3.4286 & -1.7143 \end{bmatrix}$$

$$L_d = \begin{bmatrix} -5.4694 \\ -0.1633 \\ -1.1429 \end{bmatrix}$$

Вычислим корни:

$$\sigma(A_d + B_d K_d) = \begin{bmatrix} 0.3102 \\ -0.5122 - 0.4452i \\ -0.5122 + 0.4452i \end{bmatrix}$$

Корни далеки от границы устойчивости.

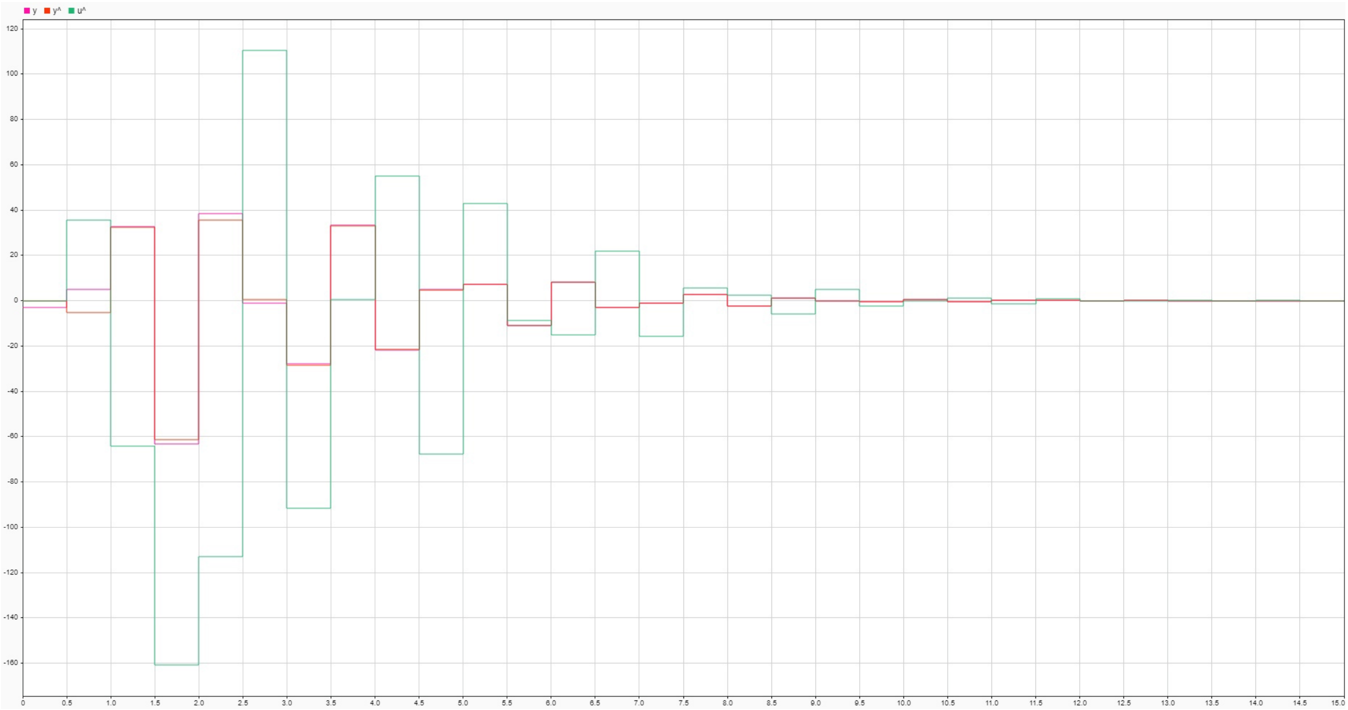

Рис. 5: Моделирование управления по выходу системы с устойчивыми полюсами

Таким образом мы получили устойчивость замкнутой системы при данных начальных условиях и различных неточностях в матрице наблюдателя.

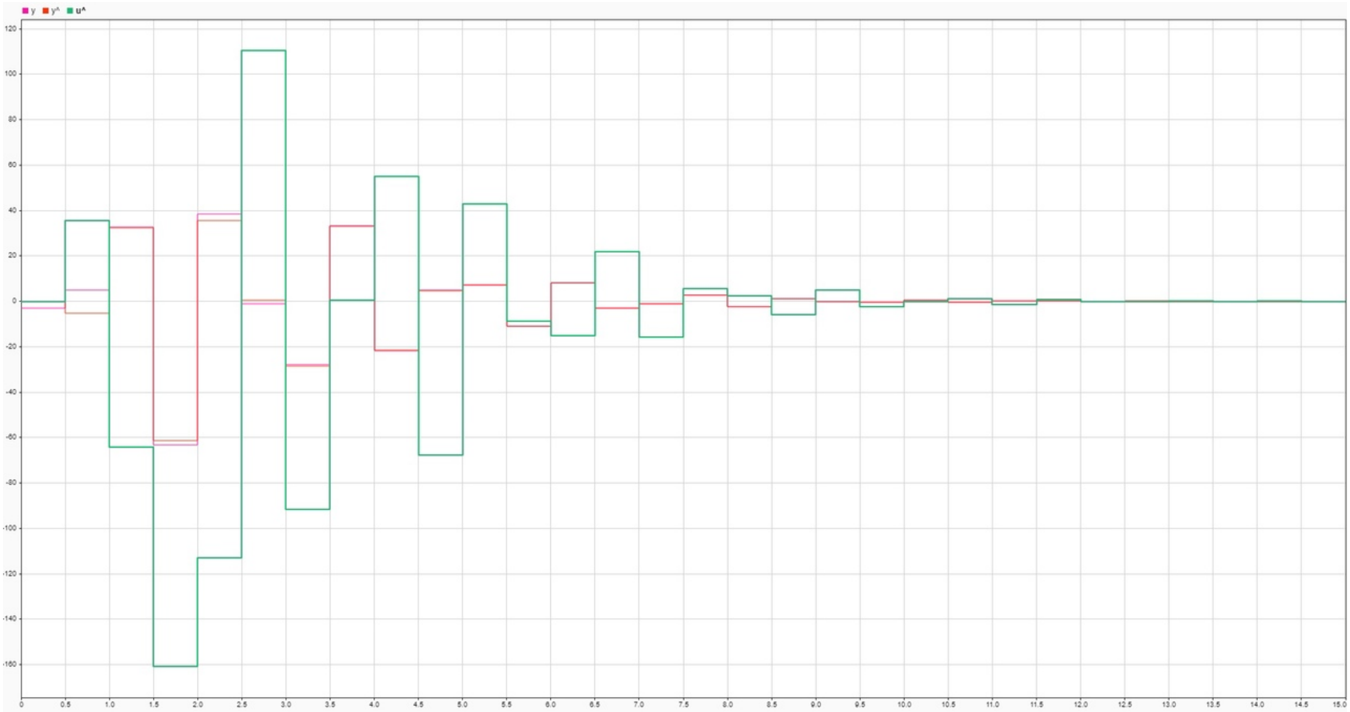

Рис. 6: Моделирование управления по выходу системы с устойчивыми полюсами и отклонением в 1 процент

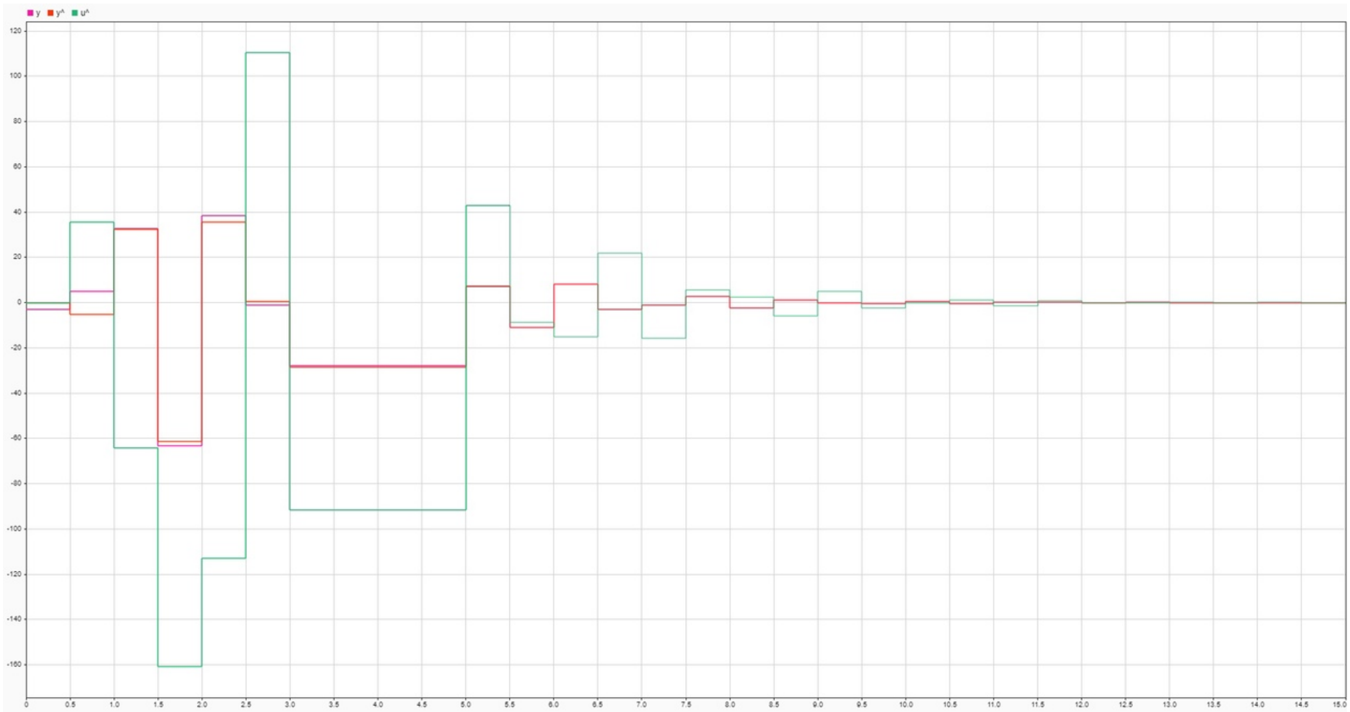

Рис. 7: Моделирование управления по выходу системы с устойчивыми полюсами и отклонением в 10 процентов

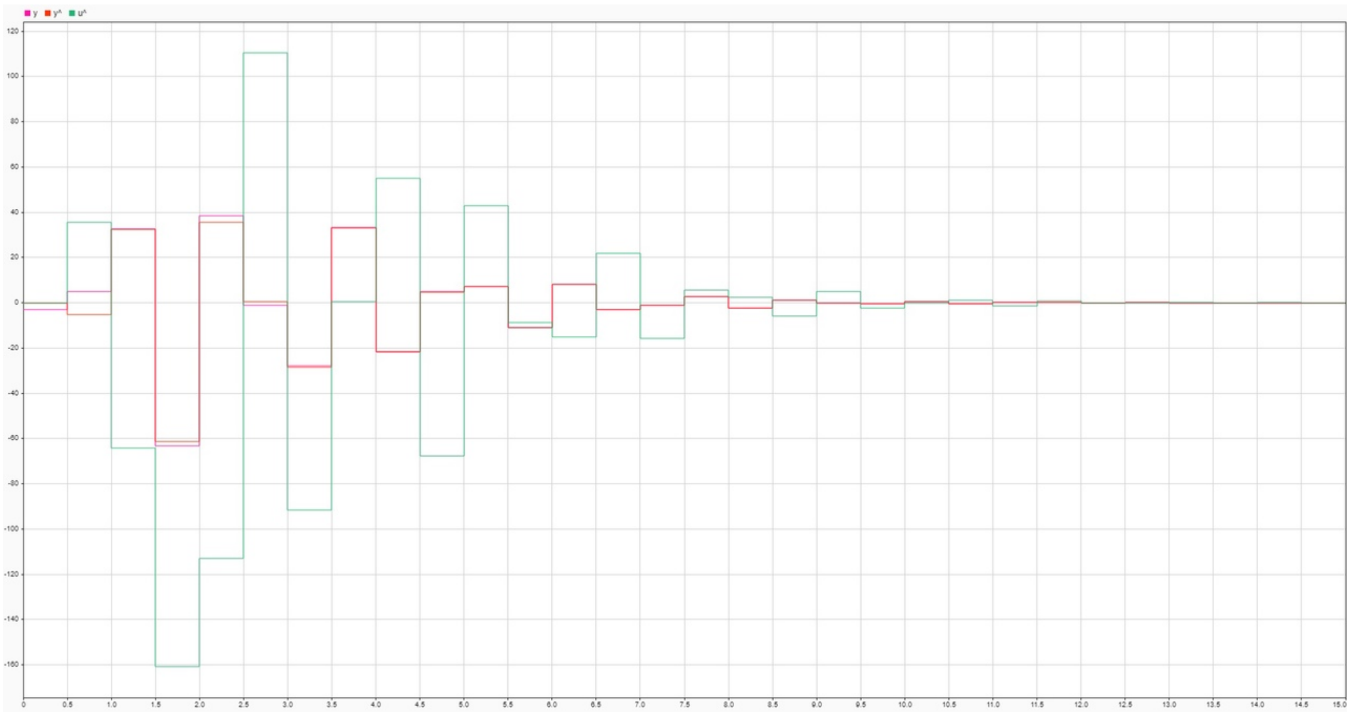

Рис. 8: Моделирование управления по выходу системы с устойчивыми полюсами и отклонением в 50 процентов

2 Нелинейные системы

2.1 Процедура бекстеппинга

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1^2 + x_1^3 + 3x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ \dot{x_3} = (x_1^2 + 1)u \end{cases}$$

Стабилизируем подсистему. $\eta = [x_1], \xi = [x_2]$
Предположим, что подсистема $\dot{x_1} = x_1^2 + x_1^3 + 3x_2$ может быть стабилизирована гладким законом управления с обратной связью по состоянию:

$$x_2 = \phi(x_1) = -\frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1) \Rightarrow \dot{x_1} = -x_1$$

Выбираем функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 \quad \text{так, что} \quad \dot{V} = x_1\dot{x_1} = -x_1^2$$

$x_1^2 = W(x_1)$ - положительно определенная функция. Замена переменных $z_1 = x_2 - \phi(x_1)$ приводит к получению системы:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 3z \\ \dot{z_1} = x_3 - \dot{\phi}(x_1) = x_3 - (\dot{x_1}(-\frac{2}{3}x_1 - x_1^2 - \frac{1}{3})) = x_3 - ((3z - x_1)(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})) \end{cases}$$

Положив $\upsilon = x_3 - \dot{\phi}(x_1)$, где υ - виртуальное управление, можно преобразовать систему в каскадное соединение двух подсистем:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 3z \\ \dot{z_1} = \upsilon \end{cases}$$

Вводим комбинированную функцию Ляпунова:

$$V_c = V + \frac{1}{2}z^2 \quad \text{так, что} \quad \dot{V_c} = x_1\dot{x_1} + z\dot{z} =$$
$$= x_1(3z - x_1) + z(x_3 + ((3z - x_1)(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3}))) =$$
$$= -x_1^2 + z(x_3 + ((3z - x_1)(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})) + 3x_1)$$

Закон управления с обратной связью по состоянию для подсистемы:

$$x_3 = -(3z - x_1)(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3}) - 3x_1 - kz =$$

$$= -(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})(3x_2 + x_1^2 + x_1^3) - 3x_1 - k(x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1))$$

2) Стабилизация всей системы:

$x_3 = -(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})(3x_2 + x_1^2 + x_1^3) - 3x_1 - (x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1)) \overset{def}{=} \phi(x_1, x_2)$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1))^2$

Для выполнения следующего шага процедуры бекстеппинга выполним замену переменных $z_2 = x_3 - \phi(x_1, x_2)$

Замена входа $u = \frac{1}{(x_1^2+1)}[u_a]$ приводит подсистему к виду $\dot{x_3} = u_a$

В результате чего получаем подсистему :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1^2 + x_1^3 + 3x_2 \\ \dot{x_2} = z_2 + \phi(x_1, x_2) \\ \dot{z_2} = u_a - \dot{\phi}(x_1, x_2) = u_a - \frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2 + x_1^3 + 3x_2) - \frac{\delta\phi}{\delta x_2}(z_2 + \phi(x_1, x_2)) \end{cases}$$

Используя $V_c = V + \frac{z_2^2}{2}$ в качестве композитной функции Ляпунова, получаем:

$$\dot{V_c} = \frac{\delta V}{\delta x_1}(x_1^2+x_1^3+3x_2)+\frac{\delta V}{\delta x_2}(z_2+\phi)+z_2[u_a-\frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2+x_1^3+3x_2)-\frac{\delta\phi}{\delta x_2}(z_2+\phi(x_1, x_2))] =$$

$$= -x_1^2-2x_1^4-(x_2-x_1+x_1^2)^2+z_2[u_a-\frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2+x_1^3+3x_2)-\frac{\delta\phi}{\delta x_2}(z_2+\phi(x_1, x_2))+\frac{\delta V}{\delta x_2}]$$

Полагая $u_a = \frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2 + x_1^3 + 3x_2) + \frac{\delta\phi}{\delta x_2}(z_2 + \phi(x_1, x_2)) - \frac{\delta V}{\delta x_2} - z_2$ получаем:

$$\dot{V_c} = -x_1^2 - 2x_1^4 - (x_2 - x_1 + x_1^2)^2 - z_2^2$$

Следовательно, начало координат глобально асимптотически устойчиво. Исходя из того, что $z_2 = x_3 - \phi(x_1, x_2)$ и $u = \frac{1}{(x_1^2+1)}[u_a]$, получаем, что

$$u = \frac{1}{(x_1^2+1)}[\frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2 + x_1^3 + 3x_2) + \frac{\delta\phi}{\delta x_2}([x_3 + (\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})(3x_2 + x_1^2 + x_1^3) +$$
$$+3x_1 + (x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1))] + \phi(x_1, x_2)) - \frac{\delta V}{\delta x_2} - x_3 - (\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})(3x_2 + x_1^2 + x_1^3) -$$
$$- 3x_1 - (x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1))]]$$

2.2 Анализ устойчивости

$$\dot{x_1} = x_2 + cos(x_1)x_1$$
$$\dot{x_2} = -2sin(x_1) + x_2 + u$$

2.3 Синтез управления на основе линеаризации обратной связью