Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет Систем Управления и Робототехники

Курсовая работа
по курсу «Теория нелинейных и дискретных систем управления»

Выполнили: Московский К.А.
Алексеева Ю.В.

Группа: R34362.

Преподаватель: Зименко К.А.

Санкт-Петербург
2021 г.

1 Нелинейные системы

1.1 Процедура бекстеппинга

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1^2 + x_1^3 + 3x_2, \quad x_1(0) = 3 \\ \dot{x_2} = x_3, \quad x_2(0) = -5 \\ \dot{x_3} = (x_1^2 + 1)u, \quad x_3(0) = -250 \end{cases}$$

Стабилизируем подсистему. $\eta = [x_1], \xi = [x_2]$
Предположим, что подсистема $\dot{x_1} = x_1^2 + x_1^3 + 3x_2$ может быть стабилизирована гладким законом управления с обратной связью по состоянию:

$$x_2 = \phi(x_1) = -\frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1) \Rightarrow \dot{x_1} = -x_1$$

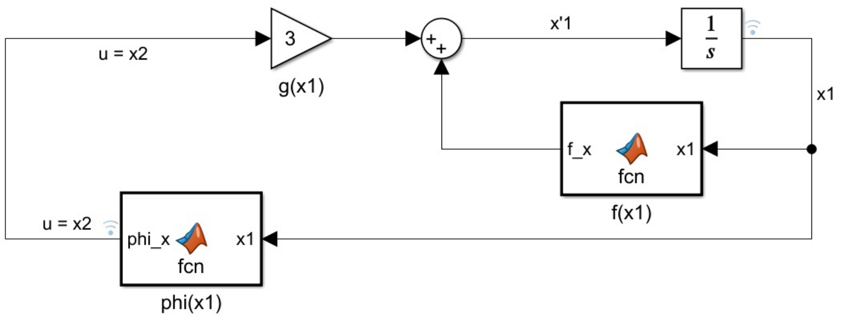

Рис. 1: Схема первой подсистемы и формирование $\phi(x_1)$

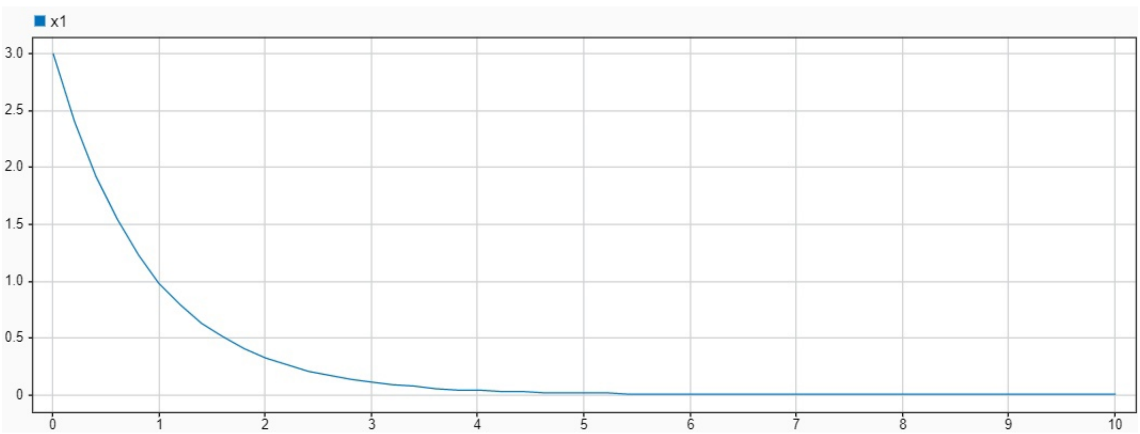

Рис. 2: Переходной процесс для первой подсистемы

Выбираем функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 \quad \text{так, что} \quad \dot{V} = x_1\dot{x_1} = -x_1^2$$

$x_1^2 = W(x_1)$ - положительно определенная функция. Замена переменных $z_1 = x_2 - \phi(x_1)$ приводит к получению системы:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 3z \\ \dot{z_1} = x_3 - \dot{\phi}(x_1) = x_3 - (\dot{x_1}(-\frac{2}{3}x_1 - x_1^2 - \frac{1}{3})) = x_3 - ((3z - x_1)(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})) \end{cases}$$

Положив $\upsilon = x_3 - \dot{\phi}(x_1)$, где υ - виртуальное управление, можно преобразовать систему в каскадное соединение двух подсистем:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 3z \\ \dot{z_1} = \upsilon \end{cases}$$

Вводим комбинированную функцию Ляпунова:

$$\begin{aligned} V_c = V + \frac{1}{2}z^2 \quad \text{так, что} \quad \dot{V_c} = x_1\dot{x_1} + z\dot{z} = \\ = x_1(3z - x_1) + z(x_3 + ((3z - x_1)(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3}))) = \\ = -x_1^2 + z(x_3 + ((3z - x_1)(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})) + 3x_1) \end{aligned}$$

Закон управления с обратной связью по состоянию для подсистемы:

$$x_3 = -(3z - x_1)(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3}) - 3x_1 - kz =$$

$$= -(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})(3x_2 + x_1^2 + x_1^3) - 3x_1 - k(x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1))$$

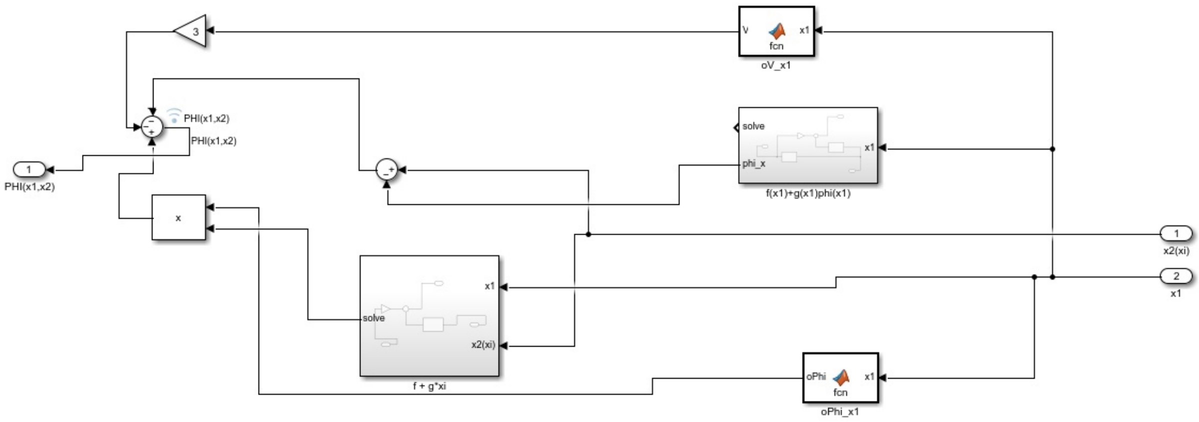

Рис. 3: Схема формирования $\phi(x_1, x_2)$

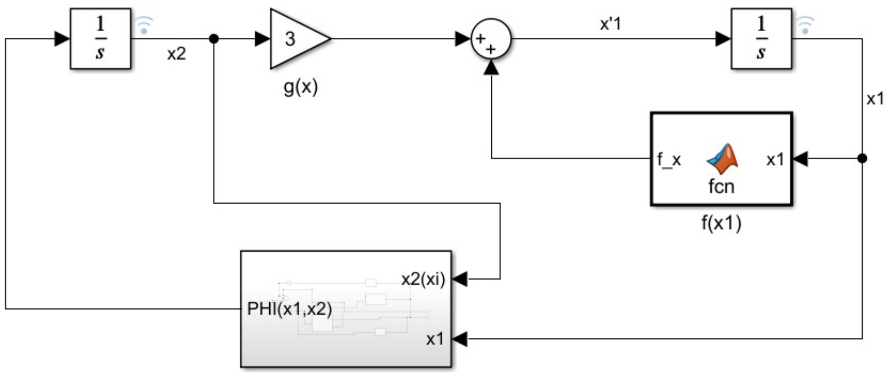

Рис. 4: Схема второй подсистемы

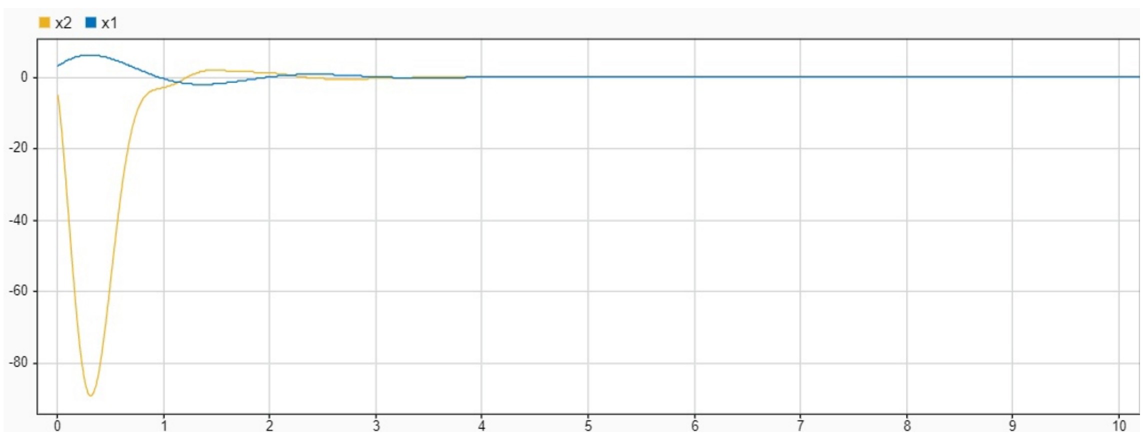

Рис. 5: Переходный процесс второй подсистемы

2) Стабилизация всей системы:

$x_3 = -(\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})(3x_2 + x_1^2 + x_1^3) - 3x_1 - (x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1)) \stackrel{def}{=} \phi(x_1, x_2)$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1))^2$

Для выполнения следующего шага процедуры бекстеппинга выполним замену переменных $z_2 = x_3 - \phi(x_1, x_2)$

Замена входа $u = \frac{1}{(x_1^2+1)}[u_a]$ приводит подсистему к виду $\dot{x_3} = u_a$

В результате чего получаем подсистему :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1^2 + x_1^3 + 3x_2 \\ \dot{x_2} = z_2 + \phi(x_1, x_2) \\ \dot{z_2} = u_a - \dot{\phi}(x_1, x_2) = u_a - \frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2 + x_1^3 + 3x_2) - \frac{\delta\phi}{\delta x_2}(z_2 + \phi(x_1, x_2)) \end{cases}$$

Используя $V_c = V + \frac{z_2^2}{2}$ в качестве композитной функции Ляпунова, получаем:

$$\dot{V_c} = \frac{\delta V}{\delta x_1}(x_1^2+x_1^3+3x_2)+\frac{\delta V}{\delta x_2}(z_2+\phi)+z_2[u_a-\frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2+x_1^3+3x_2)-\frac{\delta\phi}{\delta x_2}(z_2+\phi(x_1, x_2))] =$$
$$= -x_1^2-2x_1^4-(x_2-x_1+x_1^2)^2+z_2[u_a-\frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2+x_1^3+3x_2)-\frac{\delta\phi}{\delta x_2}(z_2+\phi(x_1, x_2))+\frac{\delta V}{\delta x_2}]$$

Полагая $u_a = \frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2 + x_1^3 + 3x_2) + \frac{\delta\phi}{\delta x_2}(z_2 + \phi(x_1, x_2)) - \frac{\delta V}{\delta x_2} - z_2$ получаем:

$$\dot{V_c} = -x_1^2 - 2x_1^4 - (x_2 - x_1 + x_1^2)^2 - z_2^2$$

Следовательно, начало координат глобально асимптотически устойчиво. Исходя из того, что $z_2 = x_3 - \phi(x_1, x_2)$ и $u = \frac{1}{(x_1^2+1)}[u_a]$, получаем, что

$$u = \frac{1}{(x_1^2+1)}[\frac{\delta\phi}{\delta x_1}(x_1^2 + x_1^3 + 3x_2) + \frac{\delta\phi}{\delta x_2}([x_3 + (\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})(3x_2 + x_1^2 + x_1^3) + \\ + 3x_1 + (x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1))] + \phi(x_1, x_2)) - \frac{\delta V}{\delta x_2} - x_3 - (\frac{2}{3}x_1 + x_1^2 + \frac{1}{3})(3x_2 + x_1^2 + x_1^3) - \\ - 3x_1 - (x_2 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^3 + x_1))]]$$

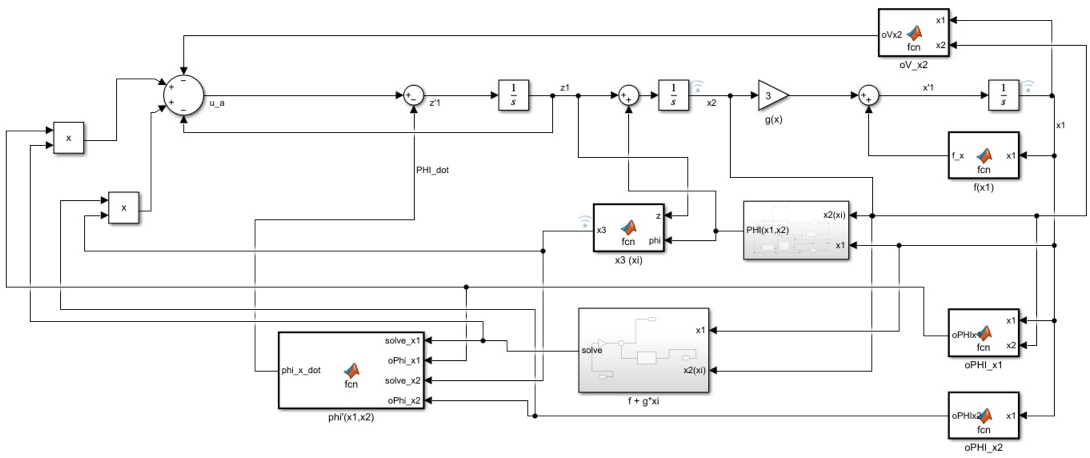

Рис. 6: Схема формирования $\phi(x_1, x_2, z_2)$

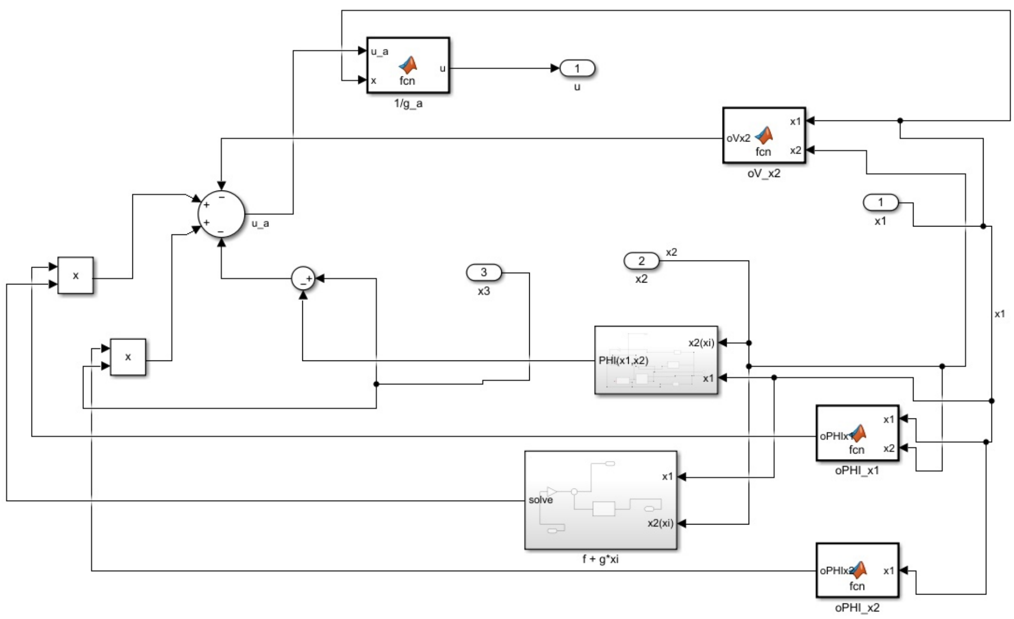

Рис. 7: Схема формирования $\phi(x_1, x_2, x_3)$

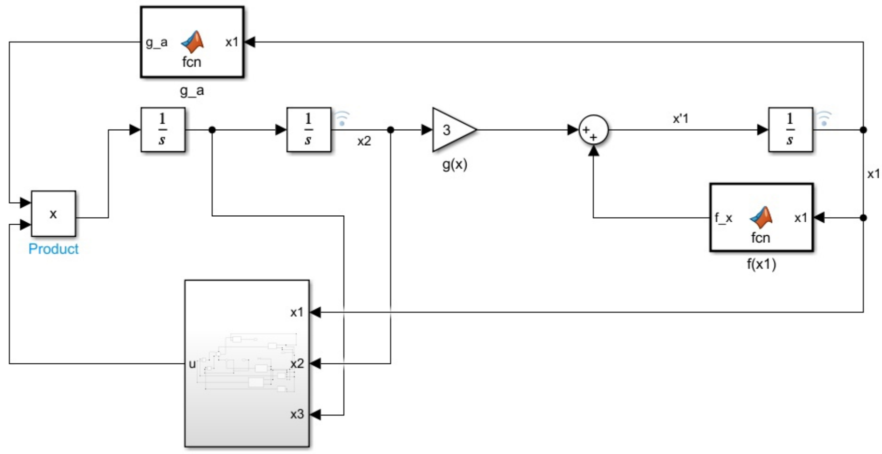

Рис. 8: Модель полной системы

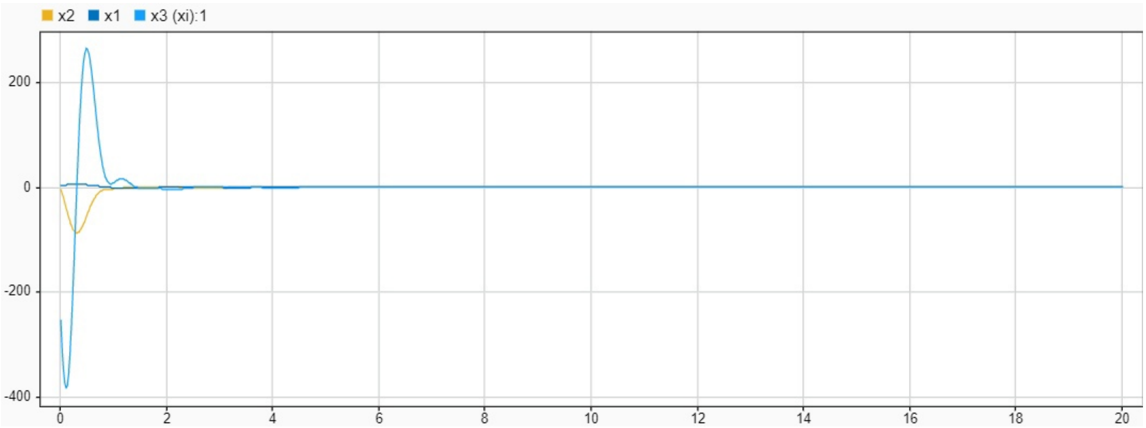

Рис. 9: Переходный процесс системы

1.2 Анализ устойчивости

$$\dot{x_1} = x_2 + cos(x_1)x_1$$
$$\dot{x_2} = -2sin(x_1) + x_2 + u$$

Промоделируем данную систему:

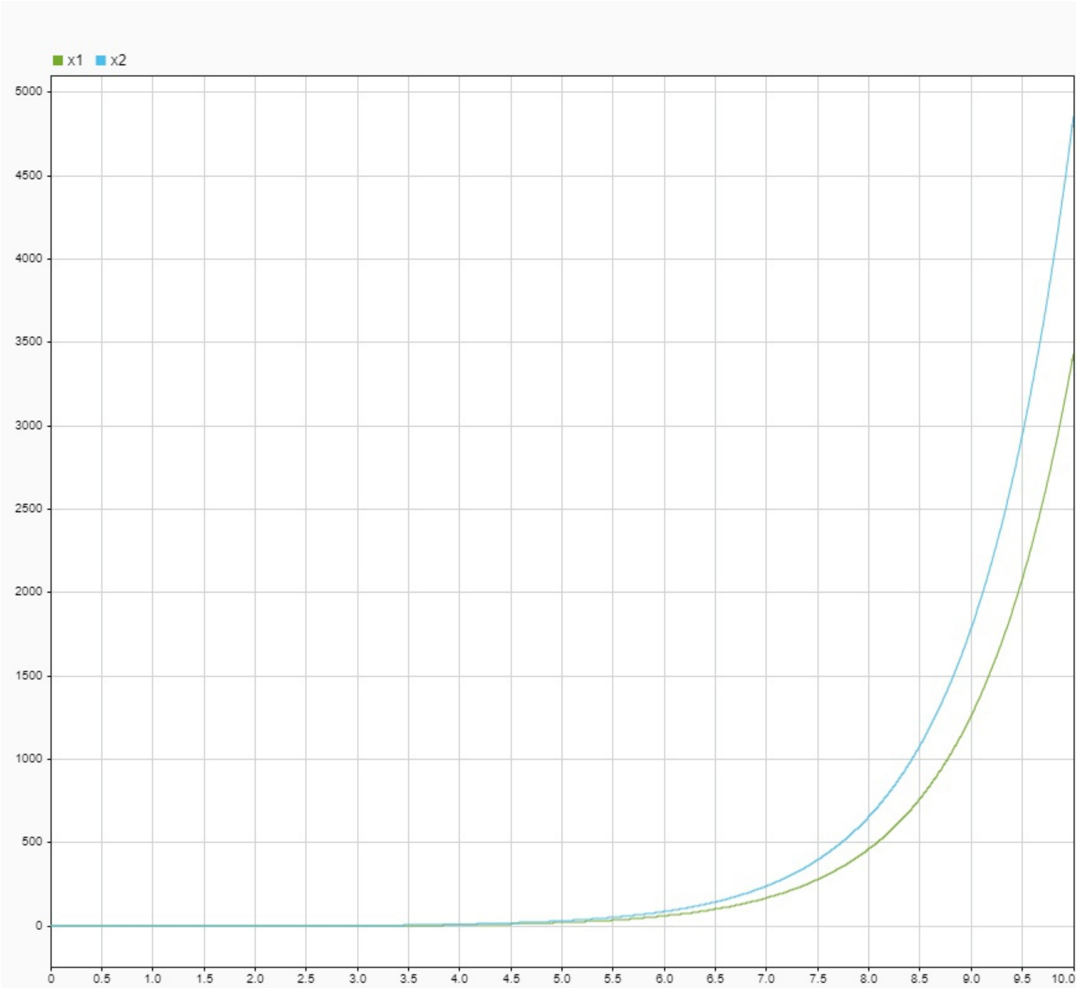

Рис. 10: График вектора состояния системы при нулевом управлении

Из графика на рисунке 10 можно увидеть, что система неустойчива.

1.3 Синтез управления на основе линеаризации обратной связью

$$\dot{x_1} = x_2 + cos(x_1)x_1$$

$$\dot{x_2} = -2sin(x_1) + x_2 + u$$

Выполним замену переменных:

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = \dot{x_1} = x_2 + cos(x_1)x_1$$

$$\dot{z_1} = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -2sin(z_1) + z_2 - sin(z_1)z_1z_2 + u$$

Получим управление:

$$u = 2sin(z_1) + sin(z_1)z_1z_2 + (-k_1z_1 - k_2z_2)$$

Отсюда получаем систему:

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = z_2 - k_1z_1 - k_2z_2$$

Промоделируем получившуюся систему:

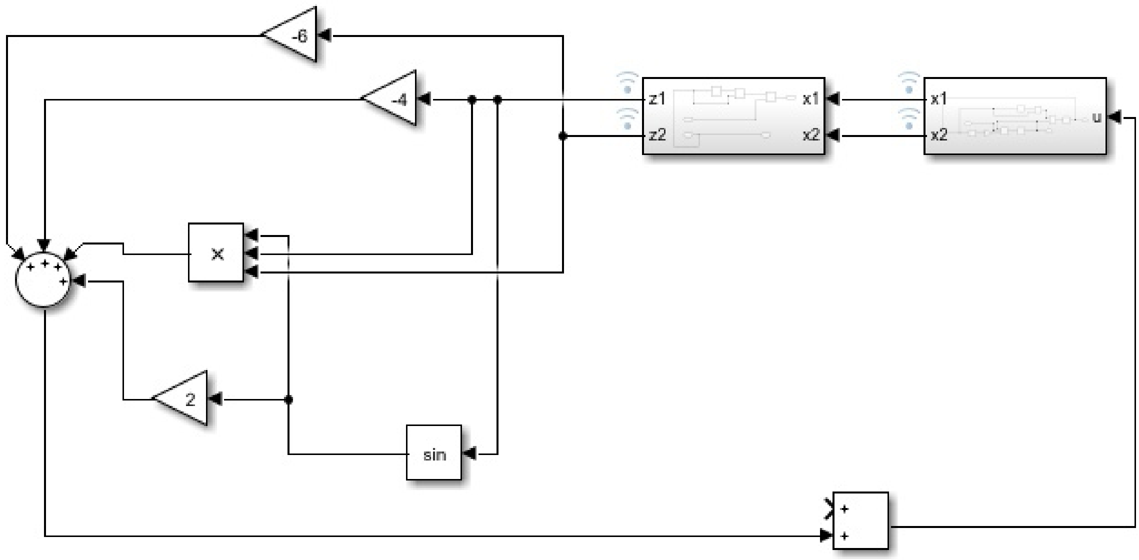

Рис. 11: Схема моделирования Simulink

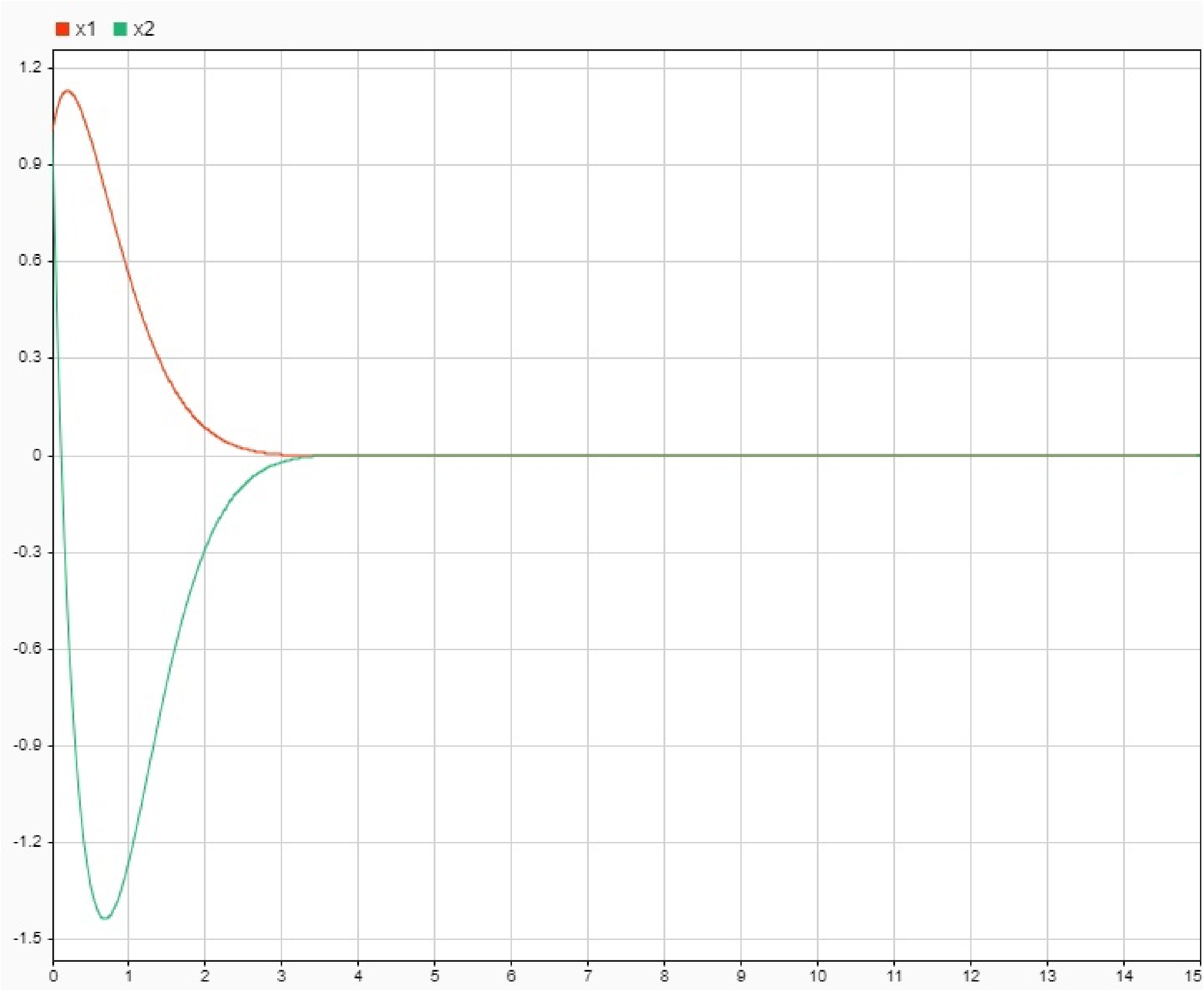

Рис. 12: Модель системы

2 Вывод

В ходе данной лабораторной работы была стабилизирована система из трех состояний методом бекспенига. По полученным результатам можно сделать вывод, что модели построены верно. Также вторая система была проверена на устойчивость, после чего для нее было синтезировано управление на основе линеаризации обратной связи. Система оказалась неустойчивой, но сошлась после синтеза.