

Distribuições de probabilidade discretas

Parte 1

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira



Exemplo: seleção de candidatos

- Uma dinâmica selecionará 5 candidatos para a próxima fase. A distribuição de probabilidade do n^o de homens escolhidos é dada por:



X = número de homens selecionados.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} 0,2^x \cdot 0,8^{5-x}, & \text{se } x \in \mathbb{N} \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

X	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.327	0.409	0.204	0.051	0.006	0.000

Exemplo: número de erros de impressão

- Suponha que o número de erros tipográficos em uma página de livro tenha a seguinte distribuição:



X = número de erros na página

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-0.5} \cdot 0.5^x}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

X	0	1	2	3	...
$P(X = x)$	0.60	0.30	0.07	0.01	...

As principais distribuições de probabilidade

Discretas

- Uniforme Discreta;
- Bernoulli;
- Binomial;
- Hipergeométrica.
- Poisson;
- Geométrica;
- Binomial negativa;

Contínuas

- Uniforme Contínua;
- Exponencial;
- Normal;
- Lognormal;
- Gama;
- Weibull;
- Beta.

Distribuição uniforme discreta

Exemplo: sorteio da Mega Sena

- Os números do próximo sorteio da Mega Sena.



Exemplo: placa de um veículo

- O último dígito da placa de um veículo.



Distribuição uniforme discreta

Definição: A v.a. discreta X , assumindo os valores x_1, \dots, x_k , tem distribuição uniforme se, e somente se:

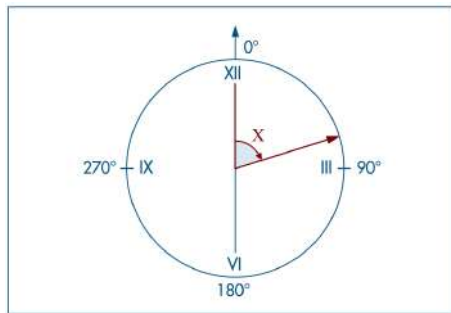
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{se } x \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U(1, 2, \dots, n)$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \quad e \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{k} \left\{ \sum_{i=1}^k X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k X_i \right)^2}{k} \right\}$$

Exemplo: relógio mecânico

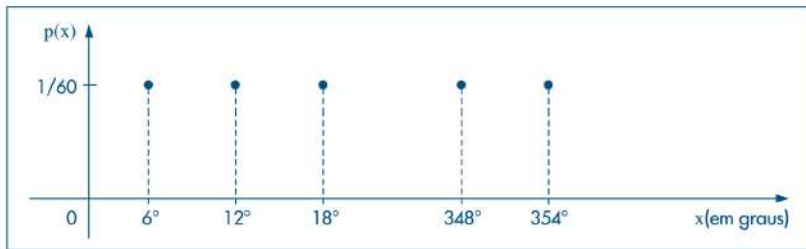
- O ponteiro dos segundos de um relógio mecânico pode parar a qualquer instante, devido a algum defeito técnico ou término da bateria.



X = ângulo entre o XII e o ponteiro dos segundos.

Exemplo: relógio mecânico

X	0°	6°	12°	18°	\dots	348°	354°
$P(X = x)$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	\dots	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$



Distribuição de Bernoulli

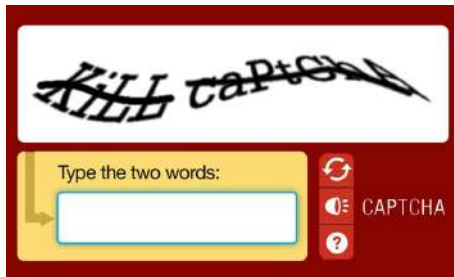
Exemplo: conversão e anúncio em venda

- Um anúncio apresentado a um cliente é convertido em venda (**sucesso**) ou não (**fracasso**).



Exemplo: resolver um CAPTCHA

- ▶ Se um robô consegue resolver um CAPTCHA, se sim = **sucesso**, se não = **fracasso**.



Distribuição de Bernoulli

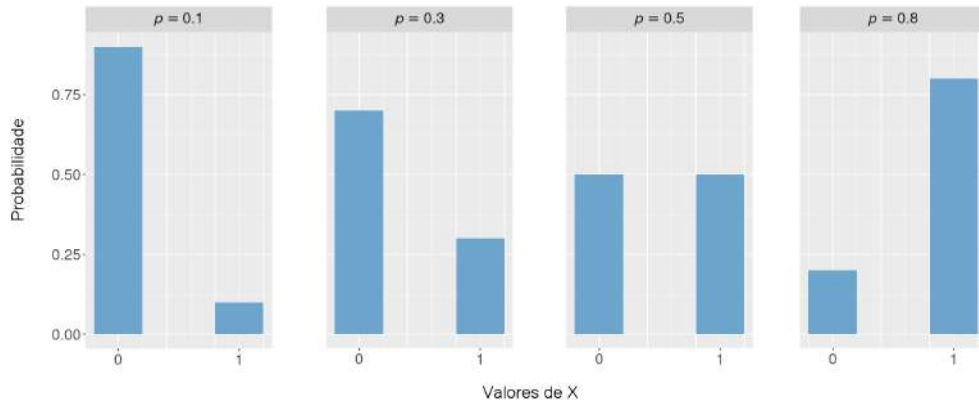
Definição: A variável aleatória tem distribuição de Bernoulli se o resultado do experimento apresenta apenas **dois desfechos possíveis**, representados por 1 (sucesso) e 0 (fracasso).

$$p(x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1 \text{ (sucesso)} \\ 1 - p, & \text{se } x = 0 \text{ (fracasso)} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Ber(p)$.

$$\mathbb{E}(X) = p \quad e \quad \mathbb{V}ar(X) = p \cdot (1 - p)$$

Gráficos da distribuição de Bernoulli



Outros exemplos

1. O paciente ser diagnosticado com Covid-19:

$$p(x) = \begin{cases} 0.23, & \text{se } x = 1 \text{ (positivo)} \\ 0.77, & \text{se } x = 0 \text{ (negativo)} \end{cases}$$



2. O réu ser condenado após o julgamento.

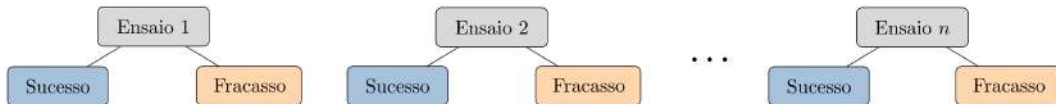
$$p(x) = \begin{cases} 0.8, & \text{se } x = 1 \text{ (culpado)} \\ 0.2, & \text{se } x = 0 \text{ (inocente)} \end{cases}$$



Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

- Temos n tentativas independentes, cada uma com probabilidade de sucesso p e de fracasso $1 - p$, tq:



1. Os ensaios sejam independentes;
2. Apresentem apenas dois resultados possíveis;
3. A probabilidade em cada ensaio permanece constante.

Exemplo: lances livre

- ▶ De três arremessos livre, soma-se o número de acertos.



1. São lances independentes;
2. Dois resultados possíveis;
3. Mesma probabilidade de acerto.

Distribuição Binomial

Definição: A variável aleatória X , que corresponde ao número total de sucessos em n ensaios de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p , $0 < p < 1$, tem f.p dada por:

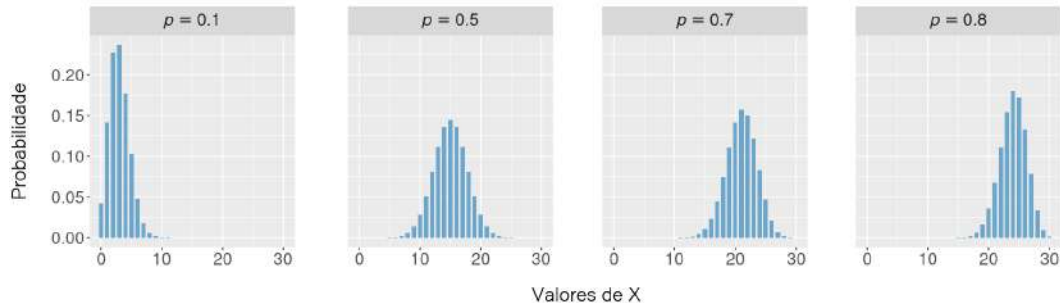
$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \text{se } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p \quad e \quad \mathbb{V}ar(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Gráficos da distribuição Binomial

X = número de sucesso em 30 realizações.



Exemplo: seleção de candidatos

- Uma dinâmica selecionará 5 candidatos para a próxima fase. A distribuição de probabilidade do n^o de homens escolhidos é dada por:



X = número de homens selecionados.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} 0,2^x \cdot 0,8^{5-x}, & \text{se } x \in \mathbb{N} \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

X	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.327	0.409	0.204	0.051	0.006	0.000

Exemplo: carretéis com avaria

- Um inspetor de qualidade escolhe 10 carretéis aleatoriamente para avaliação. Sabe-se que:



$X = n^o$ de carretéis defeituosos dos 10 disponíveis.

$\begin{cases} 72\% \text{ dos carretéis não tem avaria } (\text{fracasso}) \\ 28\% \text{ dos carretéis têm algum problema } (\text{sucesso}). \end{cases}$

1. Qual a probabilidade de que menos de 2 tubos tenham problema?

$$P(X < 2) = \binom{10}{0} 0.28^0 (1 - 0.28)^{10-0} + \binom{10}{1} 0.28^1 (1 - 0.28)^{10-1}$$

Exemplo: ovos danificados

- Número de ovos danificados em uma caixa com meia dúzia de ovos.



$X = \text{n}^{\text{o}}$ de ovos danificados de 6 disponíveis.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{6}{x} p^x (1-p)^{6-x}, & \text{se } x = 0, 1, \dots, 6 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo: ovos danificados

- Número de ovos danificados em uma caixa com meia dúzia de ovos.



1. Os ovos tem a mesma resistência a impactos?
2. Todas as posições na caixa oferecem mesmo risco de quebrar?
3. Eles quebram de forma independente ou existe dependência espacial?

Referências

- ▶ Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- ▶ Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.

