# Чего хочет статистик?

# Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \dots, x_n$ Параметр: $\theta$

$\hat{\theta}$ → $f_{\hat{\theta}}(t)$

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

# Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: $\theta$

$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi_n^2, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

# Несмещённость

Оценка называется несмещённой, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру:

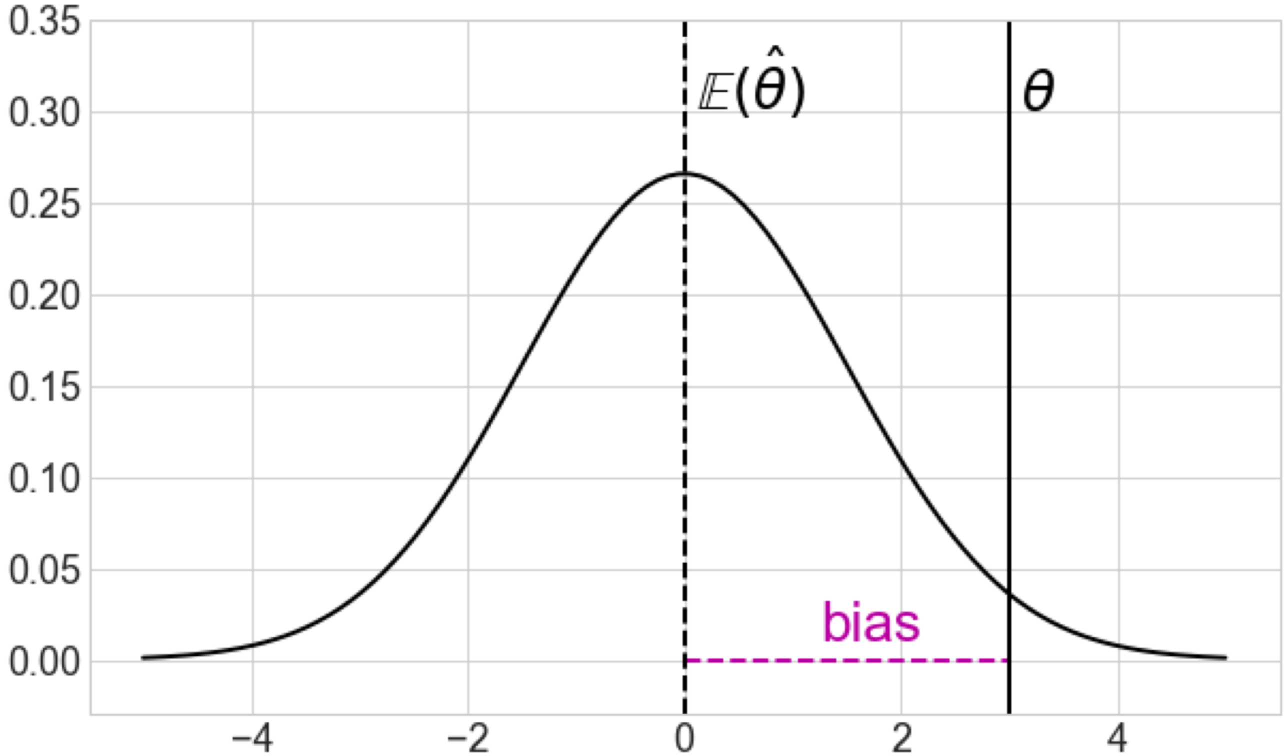
$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

Смещение оценки это разница между её математическим ожиданием и её реальным значением:

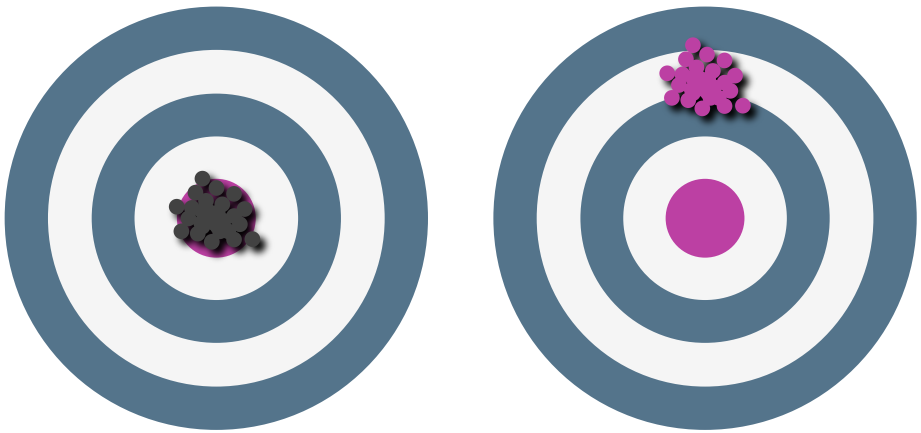
$$bias(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$$

Простым языком: если при фиксированном $n$ мы постоянно используем нашу оценку, в среднем мы не ошибаемся

# Несмещённость




Оценка 1



Оценка 2

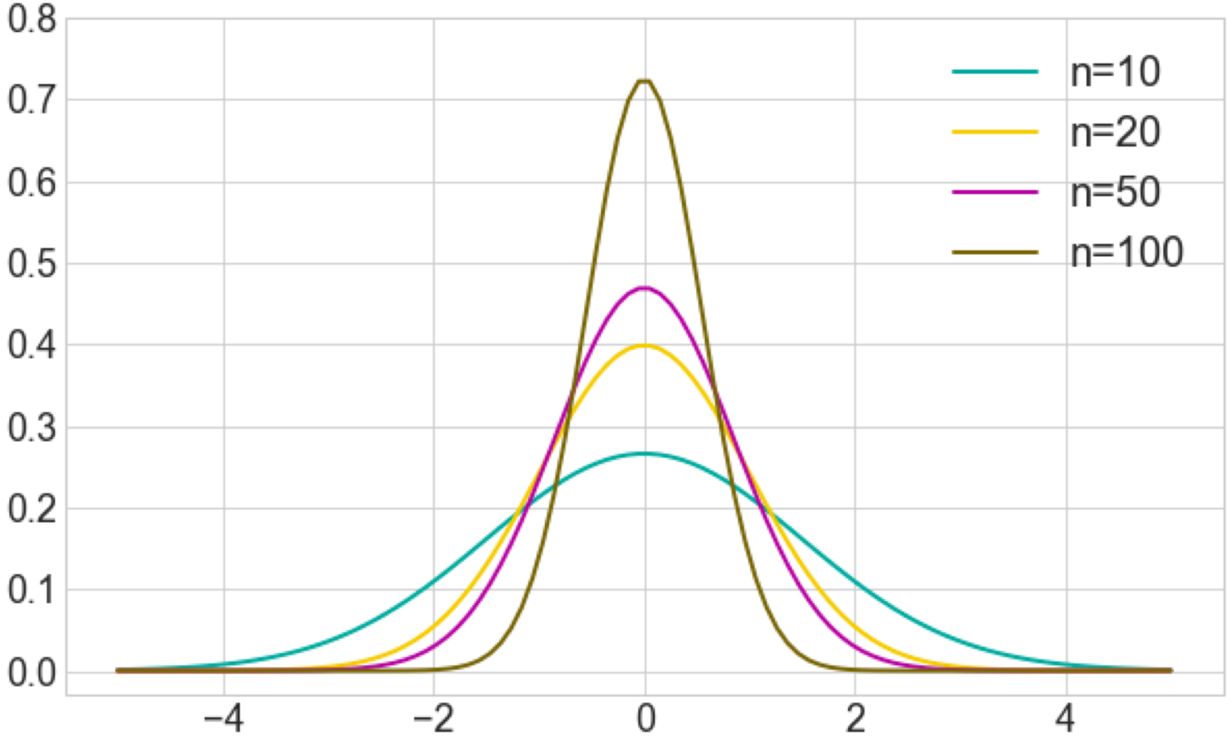
# Состоятельность

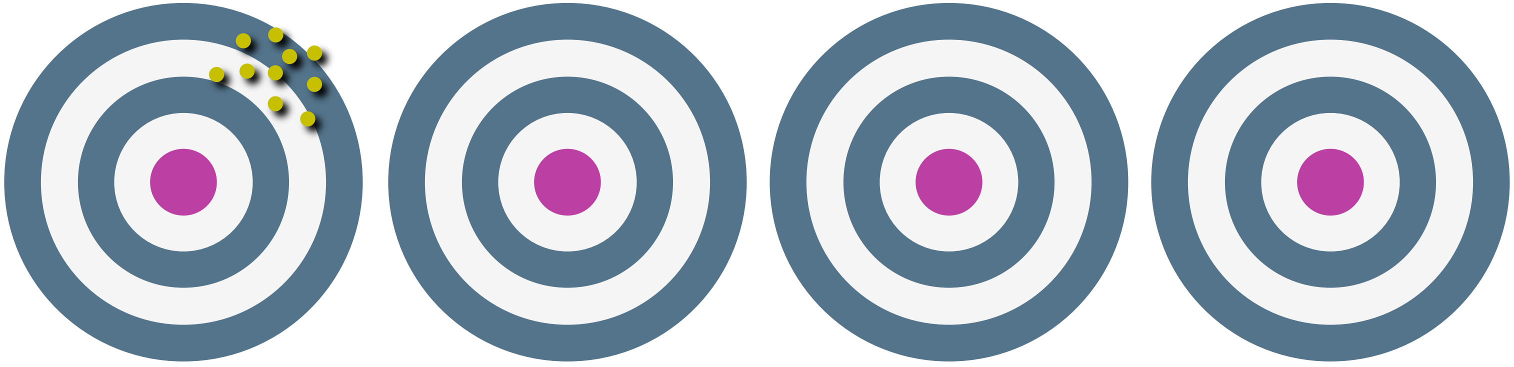
Оценка называется состоятельной, если она сходится по вероятности к истинному значению параметра при $n \to \infty$

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

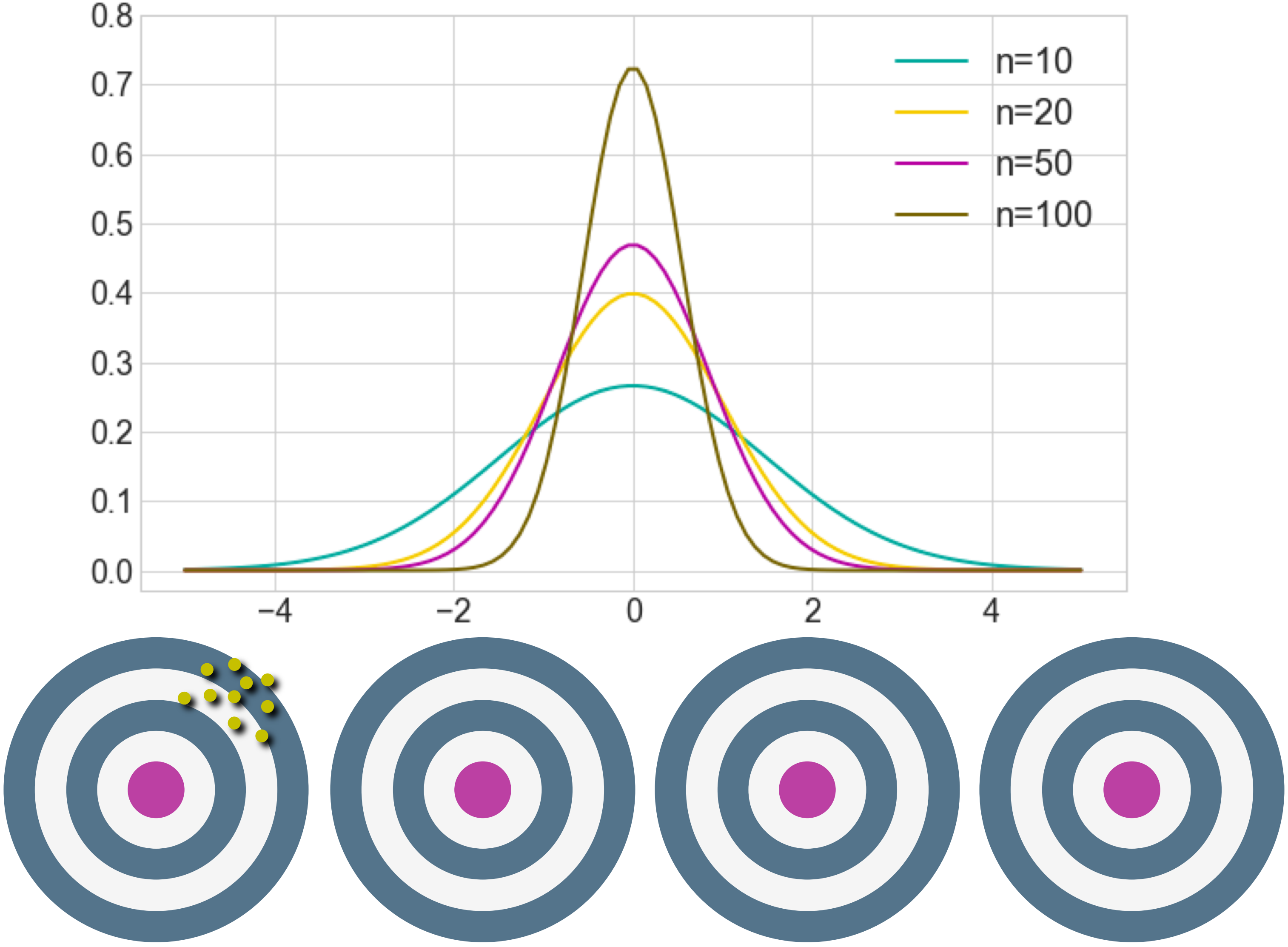
Простым языком: чем больше наблюдений, тем мы ближе к истине

# Состоятельность



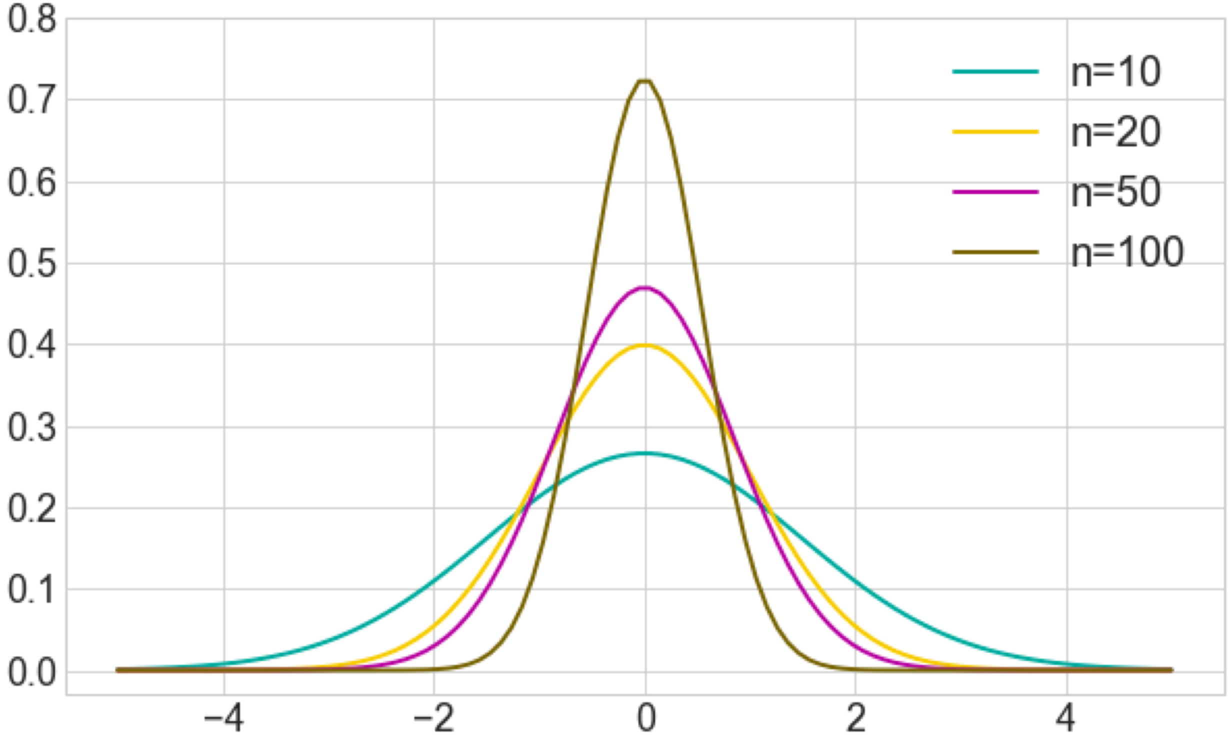



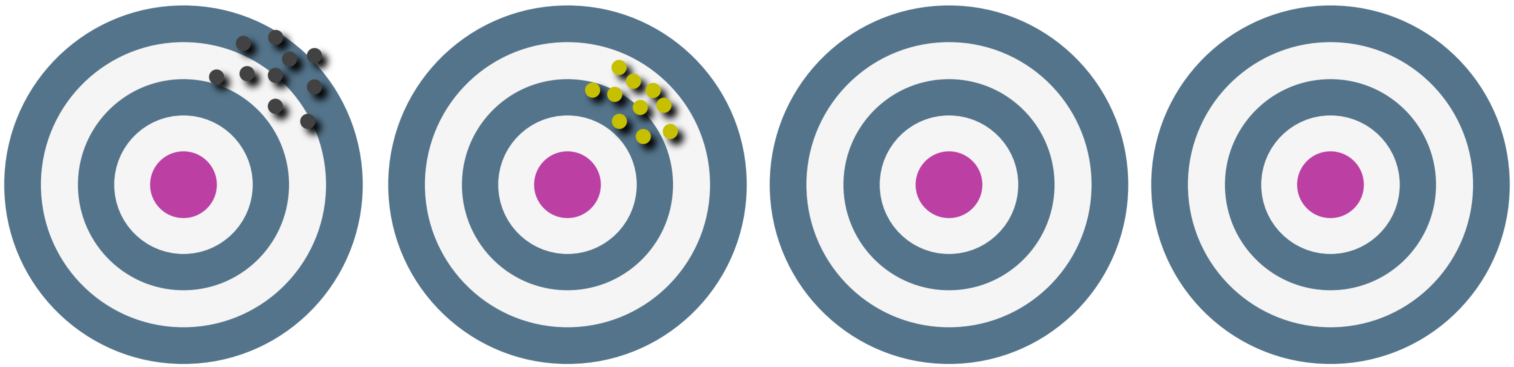
# Состоятельность




n = 10

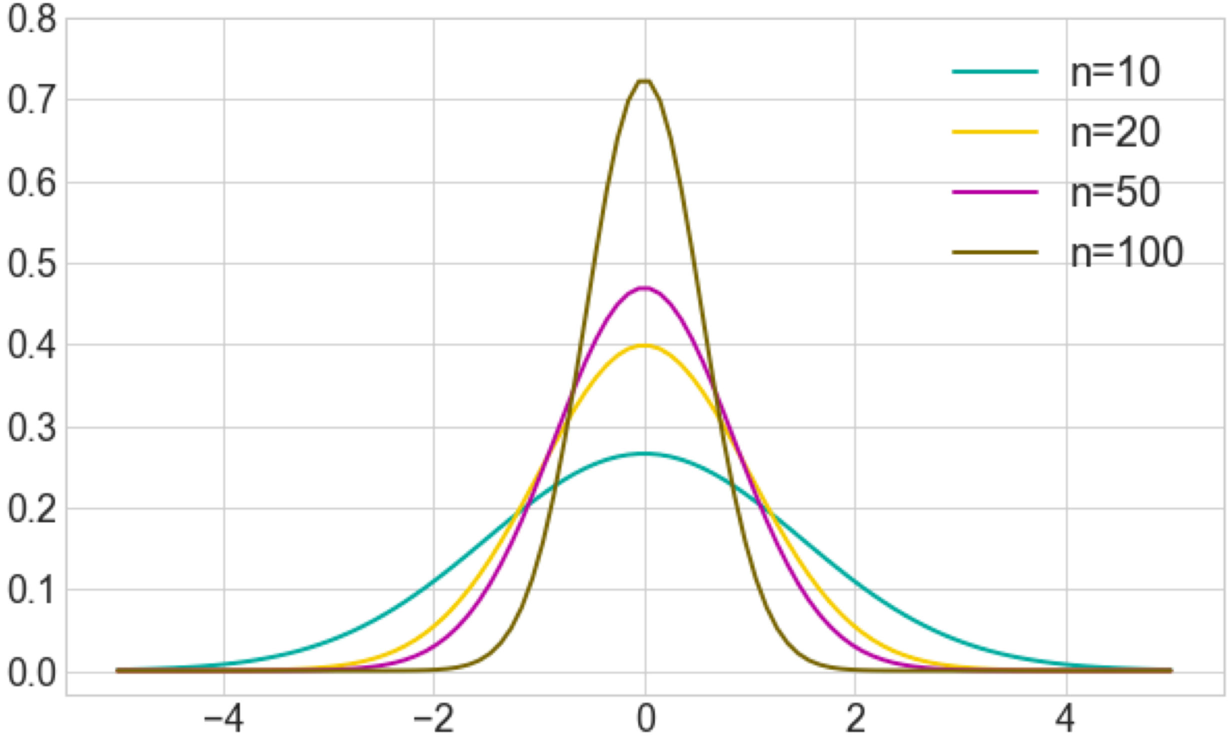
# Состоятельность

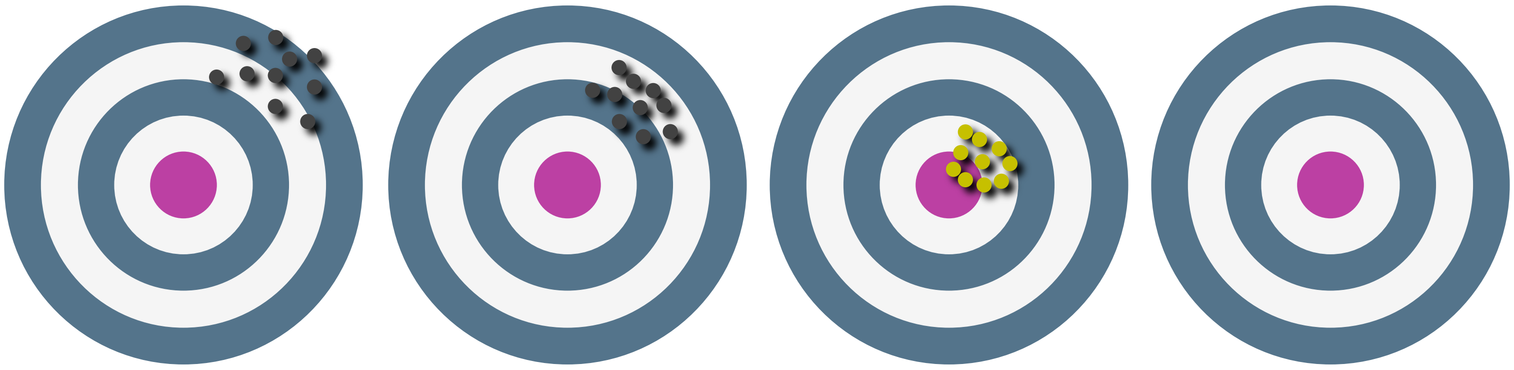


n = 10 n = 20

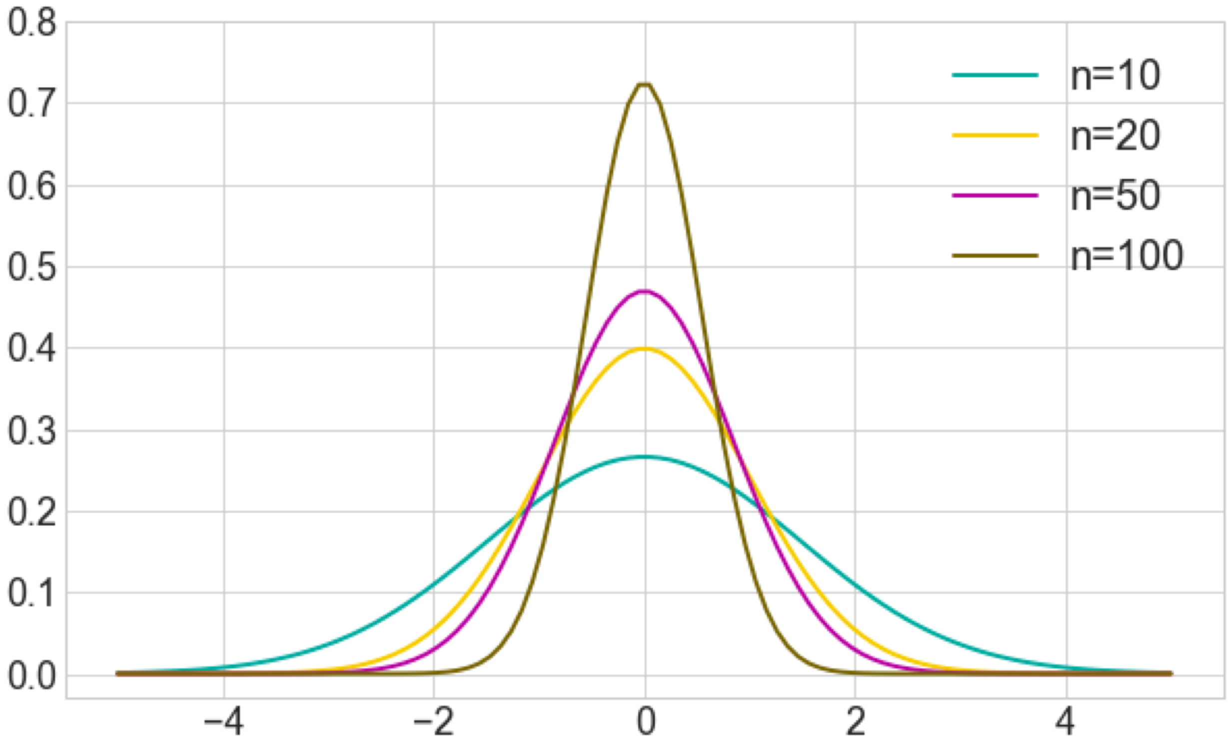
# Состоятельность

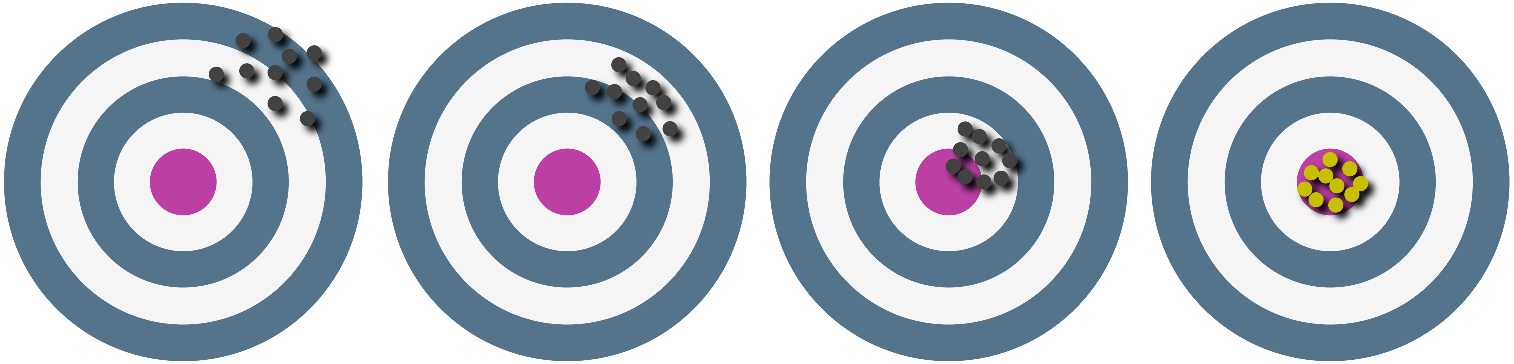


n = 10 n = 20 n = 50

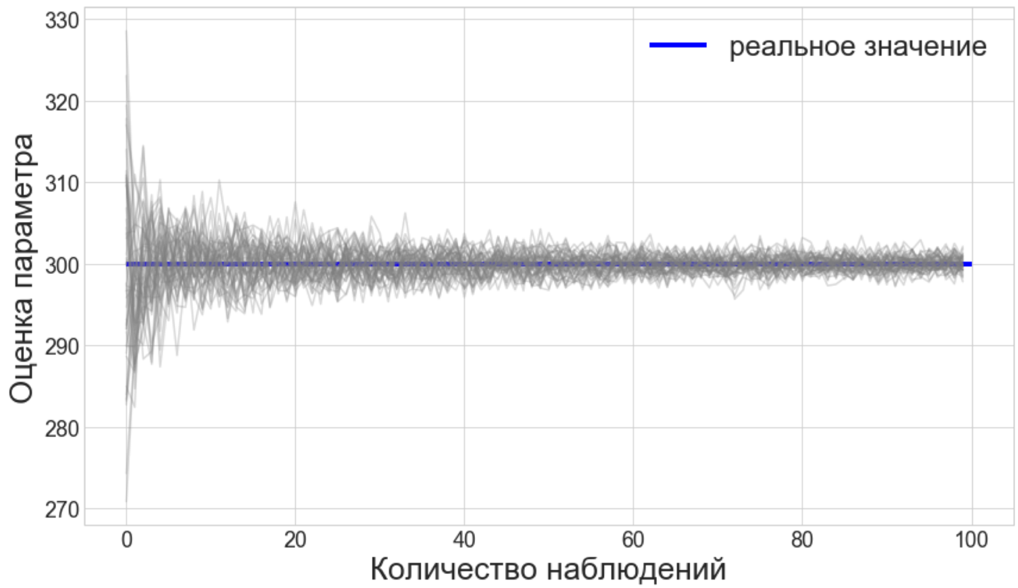
# Состоятельность



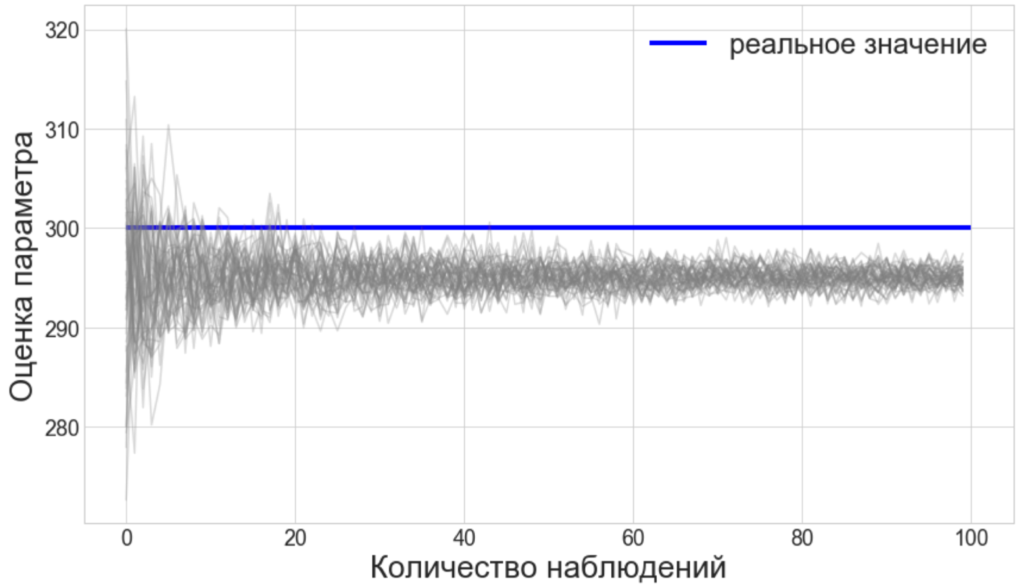



n = 10 n = 20 n = 50 n = 100

# Состоятельность




Состоятельная оценка




Несостоятельная оценка

# Асимптотическая несмещённость

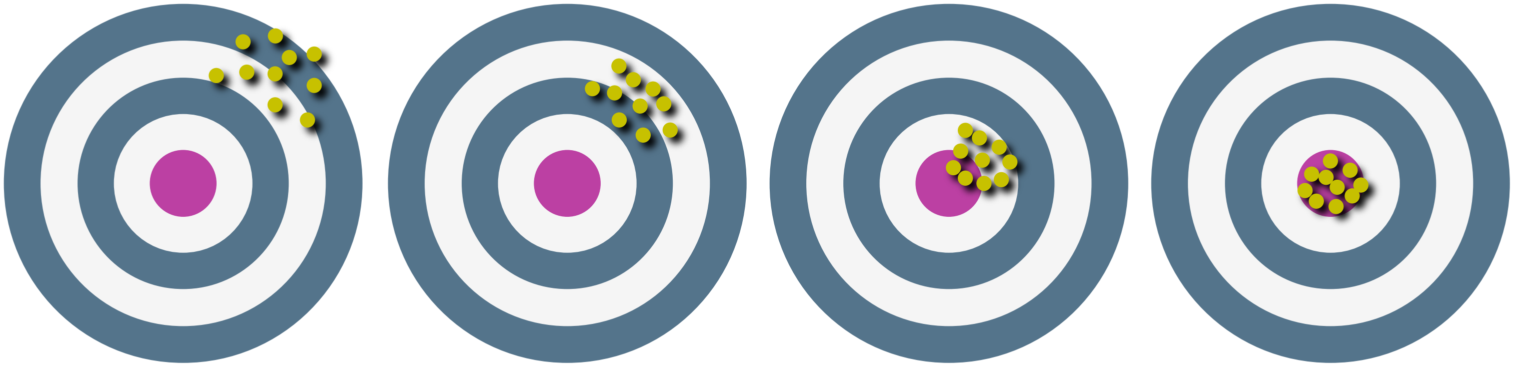
Оценка называется асимптотически несмещённой, если её математическое ожидание сходится к оцениваемому параметру при $n \to \infty$ :

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) \to \theta$$

Простым языком: если мы постоянно используем нашу оценку, в среднем, при очень больших $n$, мы не ошибаемся

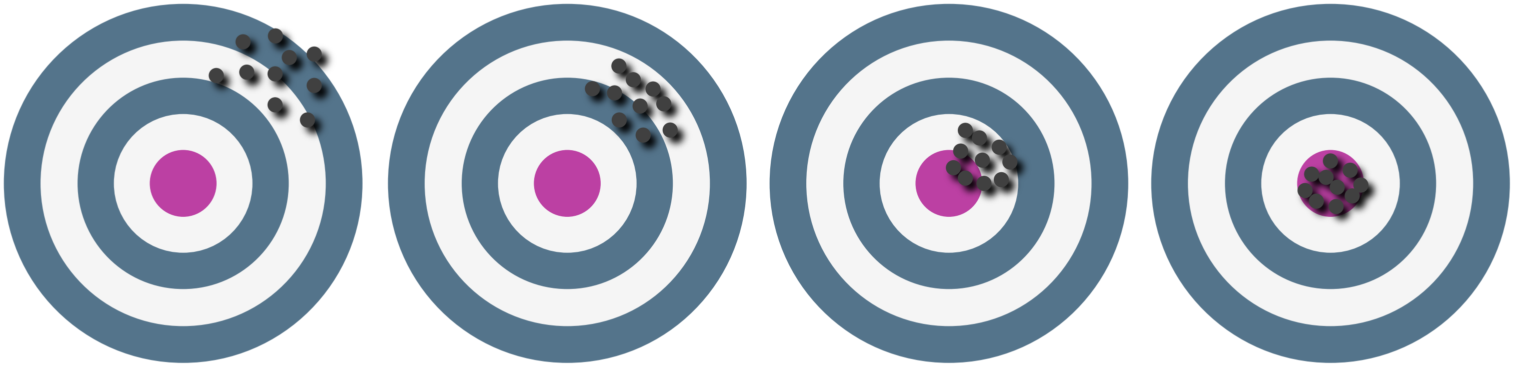
# Состоятельность VS асимптотическая несмёщенность

Асимптотически несмещённая и состоятельная оценка

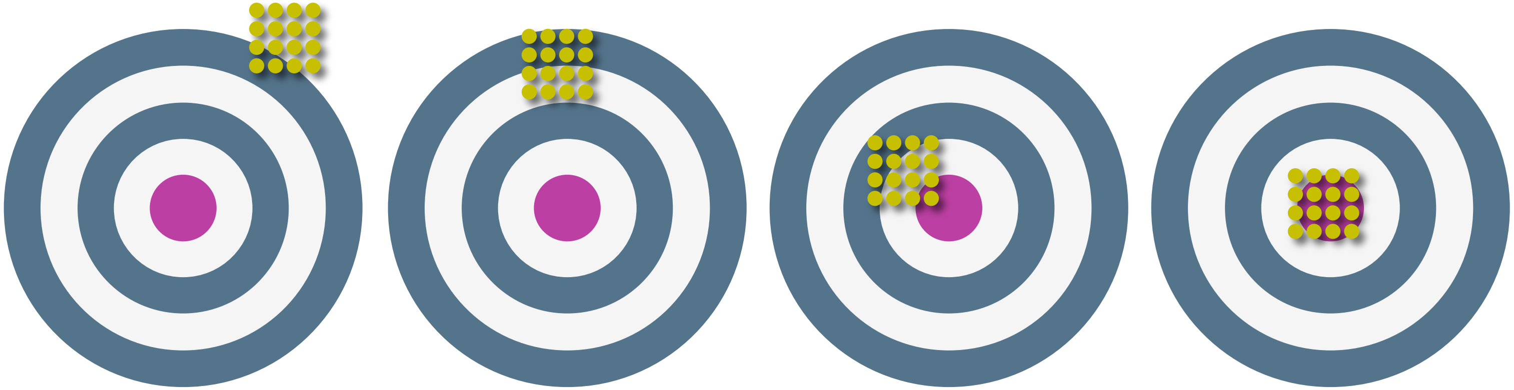


# Состоятельность VS асимптотическая несмёщенность

Асимптотически несмещённая и состоятельная оценка

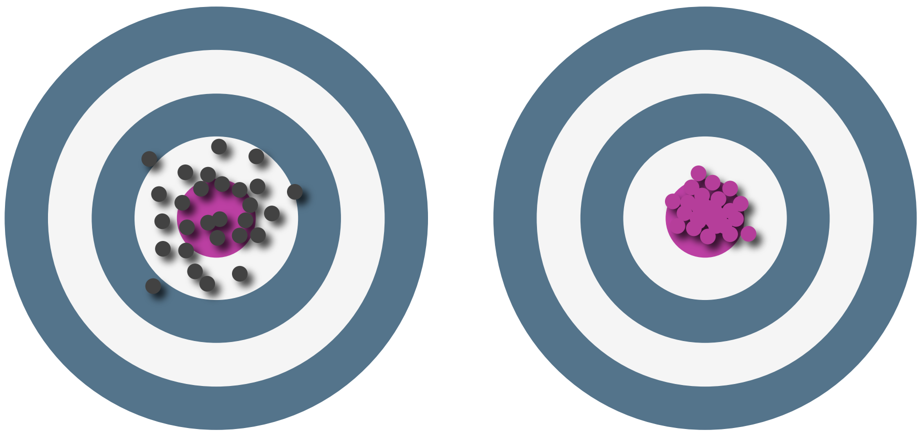


Асимптотически несмещённая, но несостоятельная оценка



# Сравнение оценок


Оценка 1



Оценка 2

# Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько $\Rightarrow$ нужно научиться их сравнивать

Обычно оценки между собой сравнивают с помощью квадратичной ошибки:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

Для несмещённых оценок $MSE$ совпадает с дисперсией оценки

Простым языком: чем более предсказуема оценка, тем точнее прогноз (уже доверительный интервал)

# Резюме

**Статистик хочет получить:**

- несмещённую оценку – хочет в среднем не ошибаться при фиксированном размере выборки
- состоятельную оценку – хочет при большом числе наблюдений быть близко к реальности
- оценку с маленькой средней квадратичной ошибкой

# Великая дилемма: смещение против разброса

# Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько $\Rightarrow$ нужно научиться их сравнивать

Обычно оценки между собой сравнивают с помощью квадратичной ошибки:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

Для несмещённых оценок $MSE$ совпадает с дисперсией оценки

Простым языком: чем более предсказуема оценка, тем точнее прогноз (уже доверительный интервал)

# Разложение на смещение и разброс

Для того, чтобы сравнить оценки можно выбрать любую другую функцию потерь, но у $MSE$ есть несколько хороших свойств

$MSE$ можно представить в виде суммы смещения и разброса:

$$MSE = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}) + \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2 + 2 \cdot \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

$$= Var(\hat{\theta}) + 2 \cdot \left(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

# Разложение на смещение и разброс

Для того, чтобы сравнить оценки можно выбрать любую другую функцию потерь, но у $MSE$ есть несколько хороших свойств

$MSE$ можно представить в виде суммы смещения и разброса:

$$MSE = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}) + \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2 + 2 \cdot \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

$$= Var(\hat{\theta}) + 2 \cdot \left(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

$$= Var(\hat{\theta}) + \text{bias}^2(\hat{\theta})$$

# Bias-variance decomposition

Между смещением и разбросом можно искать компромисс, это позволяет уменьшить среднеквадратичную ошибку

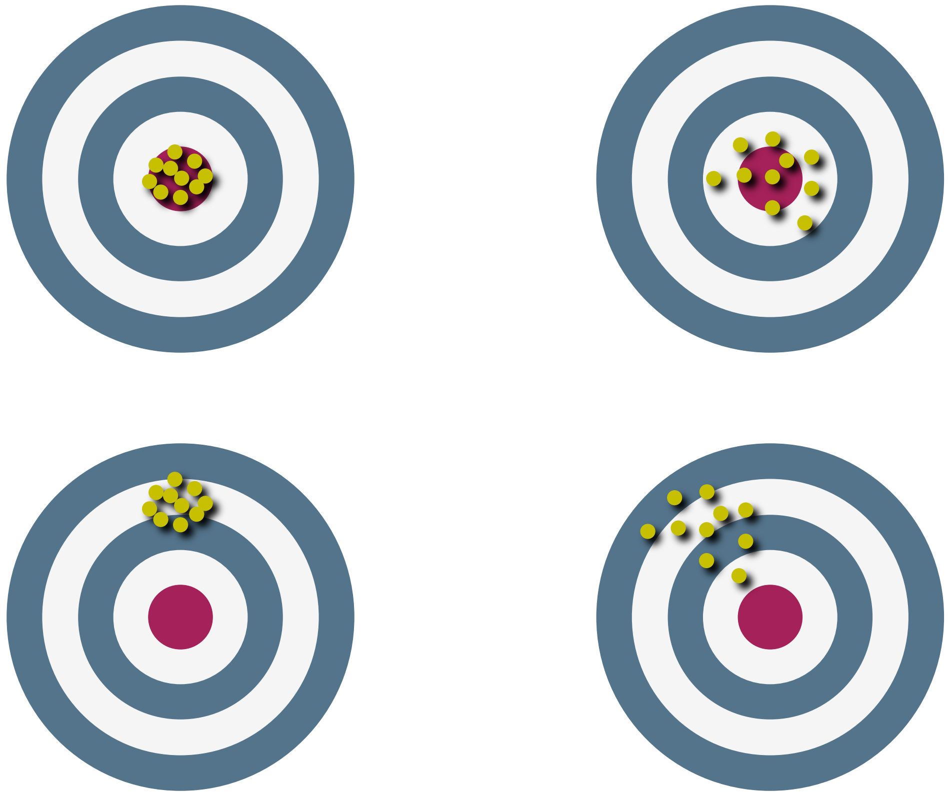
$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

# Bias-variance decomposition

**Низкий разброс** **Высокий разброс**

**Низкое смещение**

**Высокое смещение**

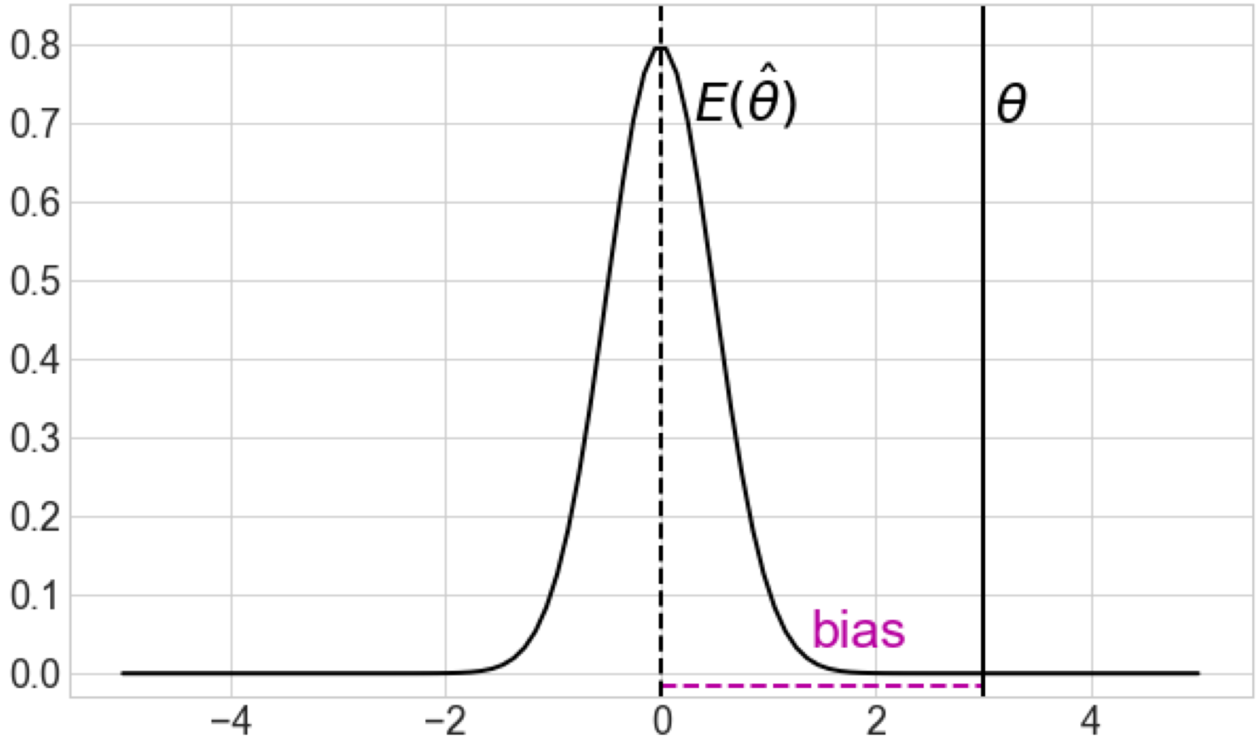


$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

# Bias-variance decomposition

Высокое смещение
сильно снизило разброс

Низкое MSE

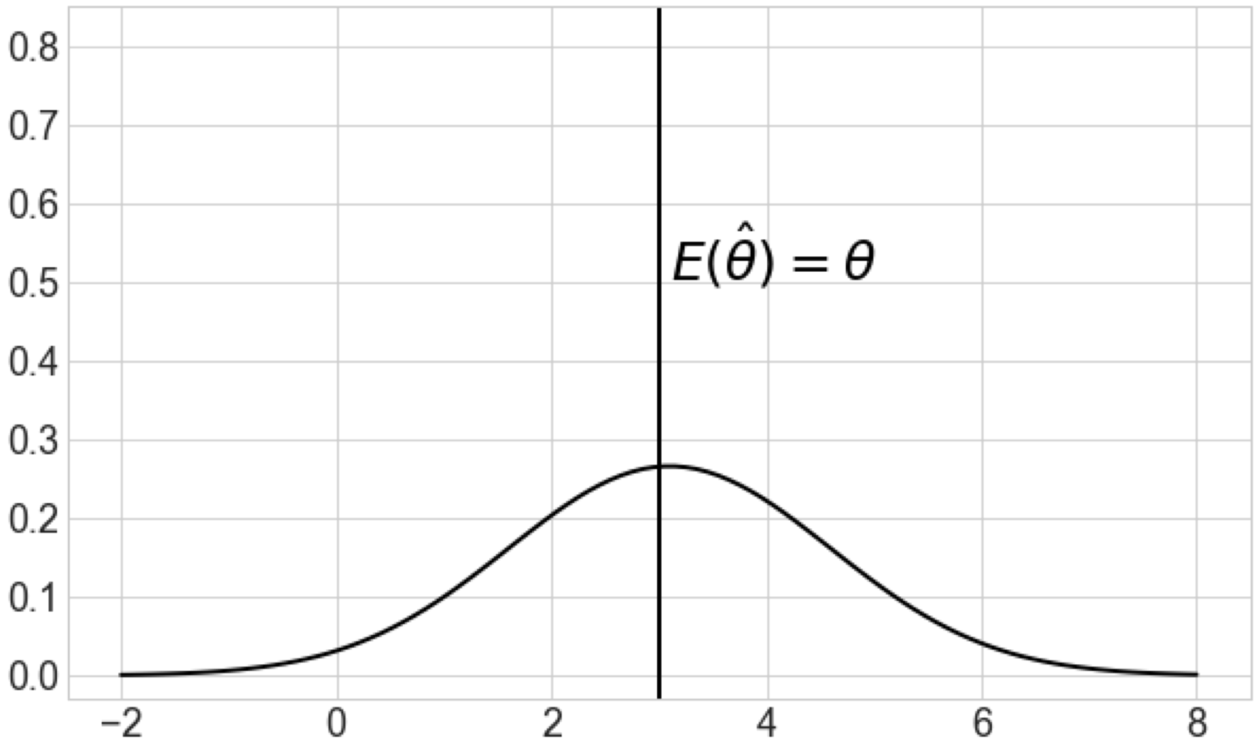



$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

# Bias-variance decomposition

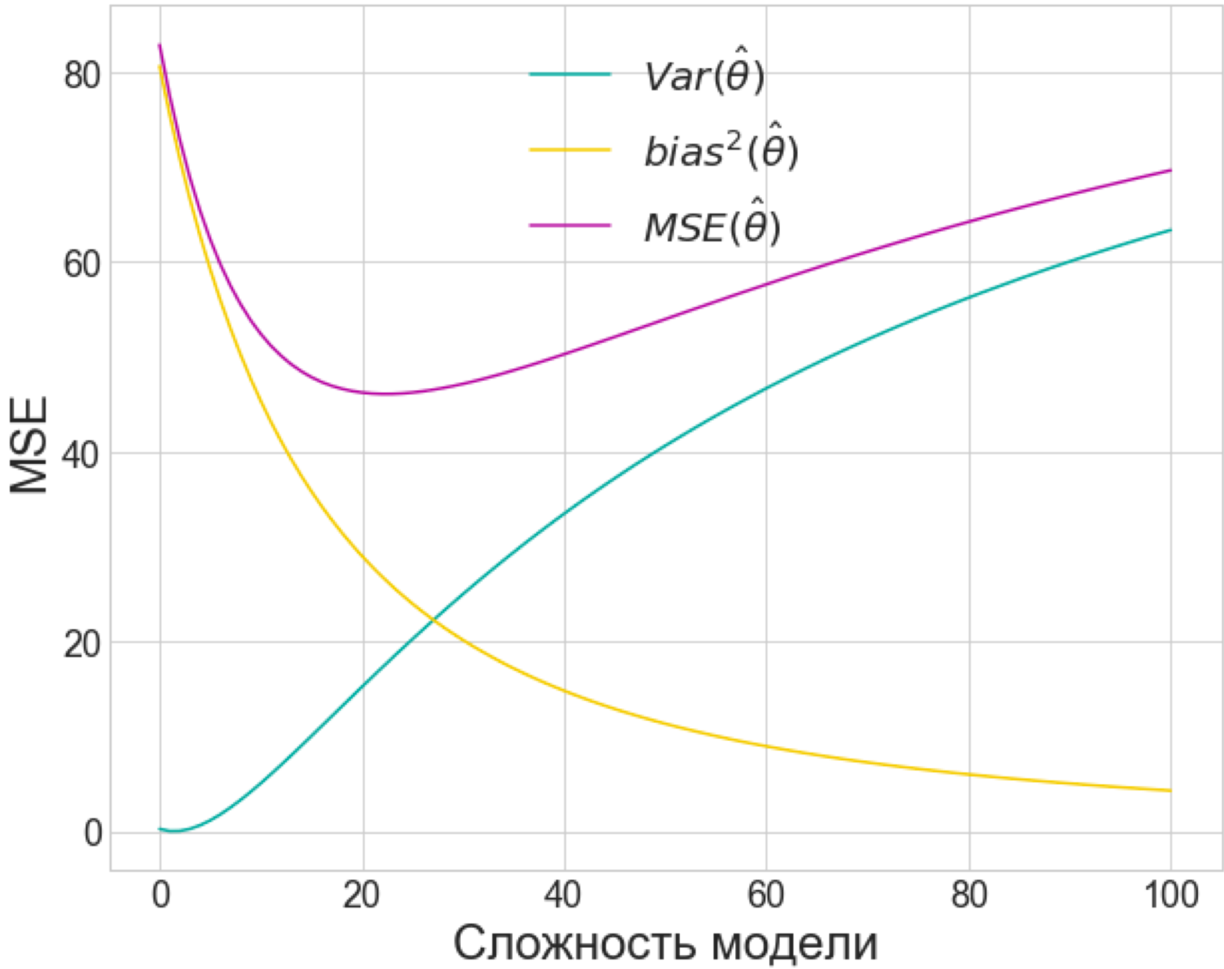
Несмещённая оценка
с высокой дисперсией

Высокое MSE




$$MSE = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = Var(\hat{\theta}) + \text{bias}^2(\hat{\theta})$$

# Bias-variance decomposition




$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

# Эффективность оценок

# Эффективность

Между смещением и разбросом можно искать компромисс, это позволяет уменьшить среднеквадратичную ошибку

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \text{bias}^2(\hat{\theta})$$

В классе всех возможных оценок наилучшей в смысле среднеквадратического подхода не существует

Можно попробовать зафиксировать смещение и найти оценку с наименьшей дисперсией

# Эффективность

Можно попробовать зафиксировать смещение и найти оценку с наименьшей дисперсией

Такая оценка называется эффективной в классе со смещением $\mathrm{bias}(\hat{\theta})$

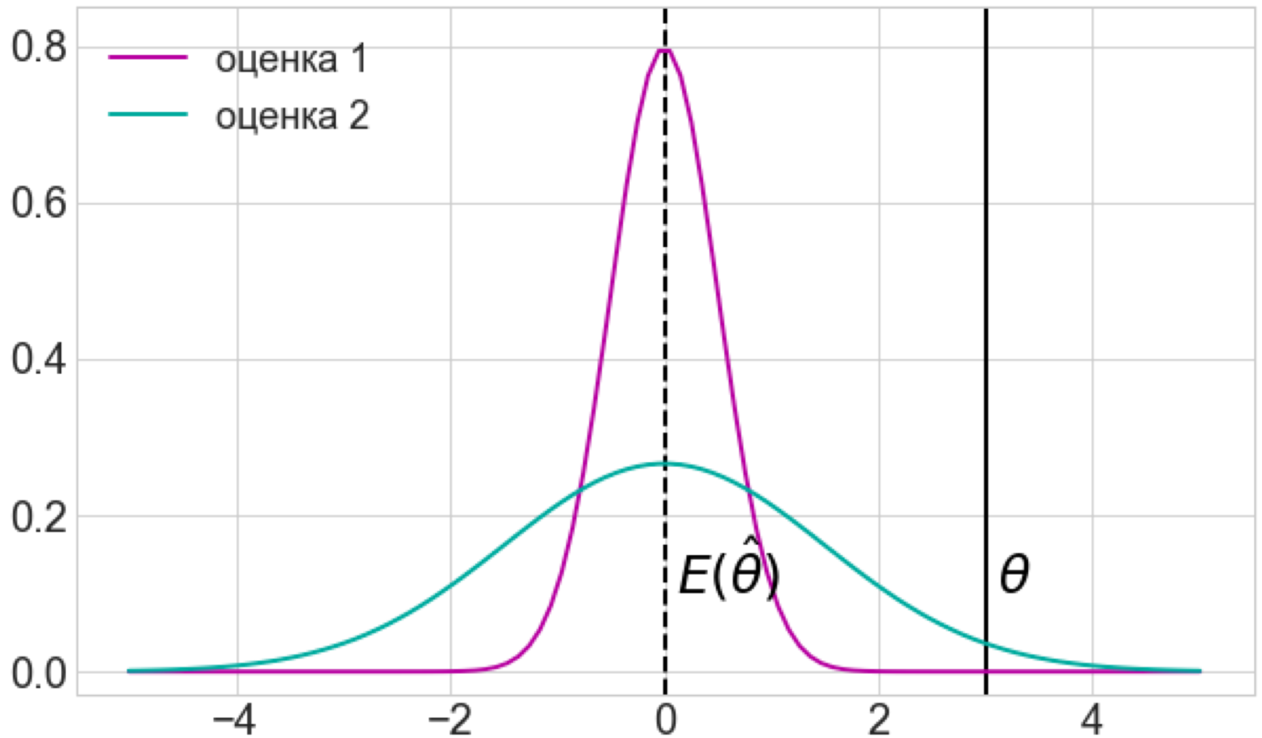
Нас будут интересовать несмещённые эффективные оценки

Простым языком: эффективная оценка обладает самым узким доверительным интервалов в своём классе

# Эффективность

У оценок одинаковое смещение (класс), но при этом у оценки 1 дисперсия меньше

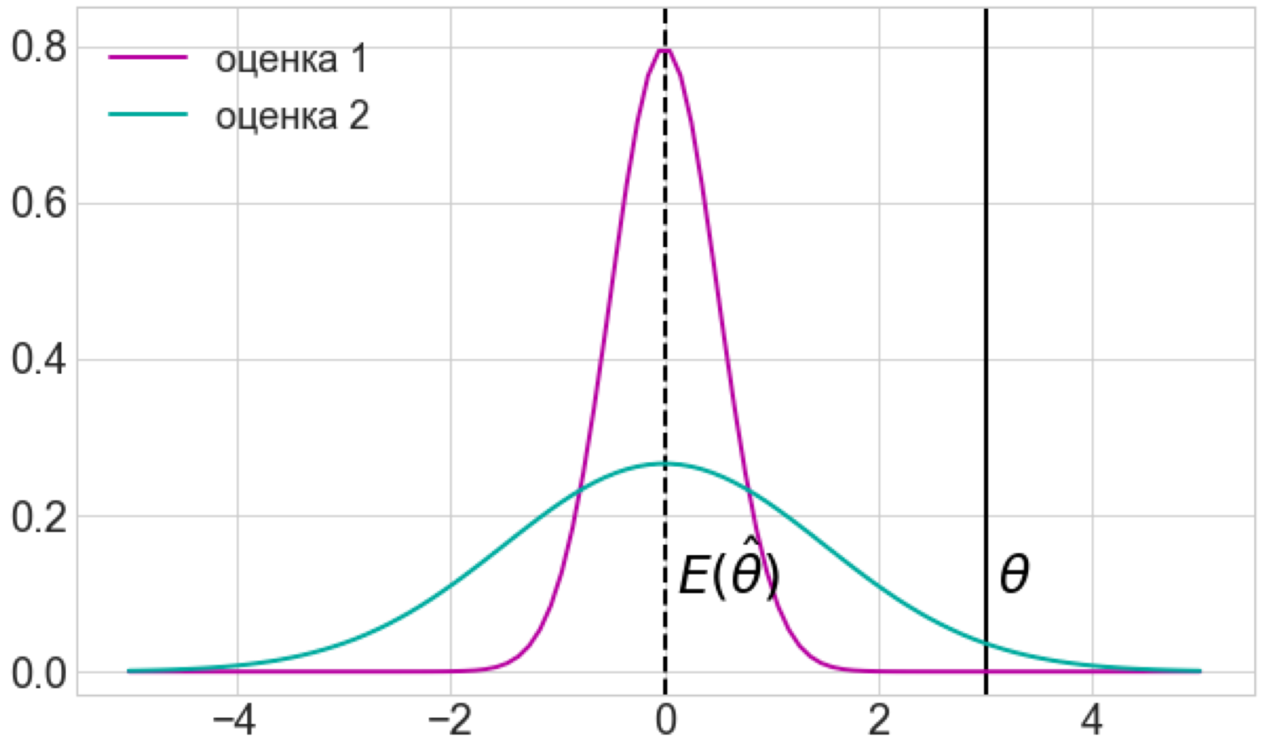
Если у оценки 1 самая маленькая дисперсия из всех существующих ⇒ она для нас самая предпочтительная



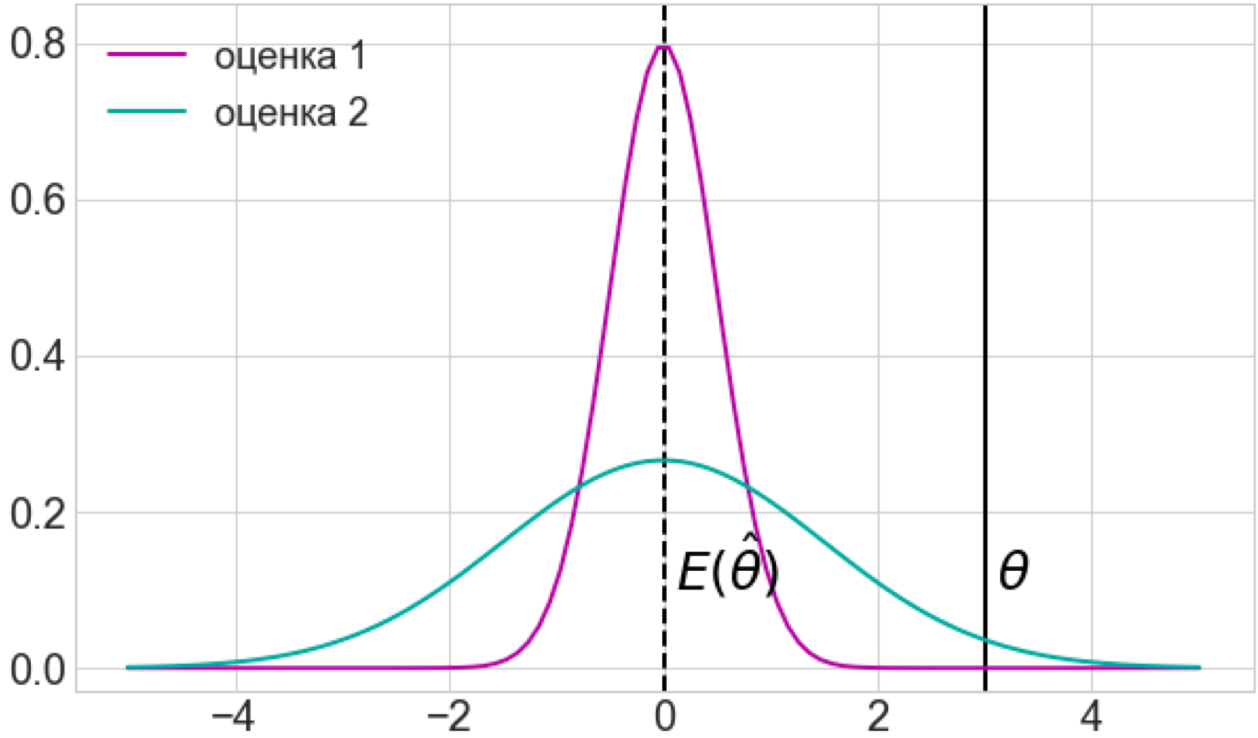
# Эффективность

То есть оценка 1 эффективная в классе с таким смещением

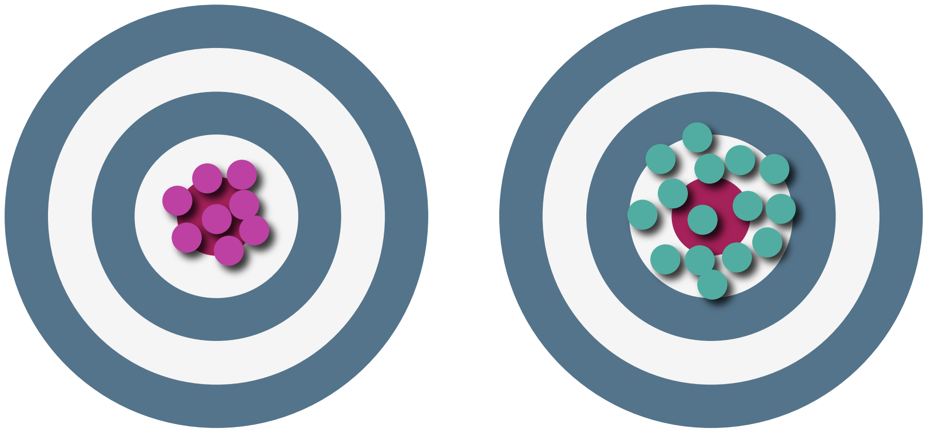
Нас будут интересовать несмещённые эффективные оценки



# Эффективность




Оценка 1



Оценка 2

# Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Для функции потерь $MSE$ существует теоретическая нижняя граница, её называют неравенством Рао Фреше Крамера

# Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Если оценка параметра несмещена и выполнены условия регулярности:

1. Область определения случайной величины не зависит от параметра $\theta$
2. Сложное техническое условие, разрешающее брать производные (обычно формулируется по-разному)
3. Существует конечная положительная информация Фишера

$$J(\theta) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2$$

$f(x,\theta)$ – плотность распределения для непрерывных случайных величин и вероятность для дискретных

# Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Тогда для дисперсии оценки выполняется неравенство Рао Фреше Крамера:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$$

Если оказалось, что $Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$, тогда оценка эффективна

Точно такое же неравенство можно выписать для смещённых оценок:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{(1 + bias'_{\theta})^2}{n \cdot J(\theta)}$$

# Резюме

# Резюме

Несмещённость – много раз используя оценку, при фиксированном размере выборки, в среднем, мы не ошибаемся

Как проверить:

По-честному найти $\mathbb{E}(\hat{\theta})$ и сравнить его с $\theta$

# Резюме

Состоятельность – последовательность оценок при увеличении числа наблюдений сходится к истинному значению параметра

Как проверить:

- используя ЗБЧ найти к чему сходится оценка
- использовать условие Чебышёва:

Если оценка несмещённая и её дисперсия при росте n стремится к нулю ⇒ она состоятельная:

$$\mathbb{E}(\bar{x}) = \mu$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

# Резюме

Оценки можно сравнивать между собой с помощью различных функций потерь, обычно используют $MSE$:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Поиск компромисса между смещением и разбросом позволяет уменьшить $MSE$, этим часто пользуются в машинном обучении **(регуляризация)**

В классе всех возможных оценок наилучшей в смысле $MSE$ оценки не существует

Обычно нас интересуют несмещённые оценки

# Резюме

Эффективность – хотим самый узкий доверительный интервал ⇒ ищем оценку с самой маленькой дисперсией в каком-то классе

Как проверить:

- иногда помогает неравенство Рао-Фреше-Крамера

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$$

Если мы получили равенство, оценка эффективна.
Если нет, мы не можем сказать про неё ничего конкретного, и нужна более мощная процедура для проверки