华中科技大学 2024 ～2025 学年第一学期

“数理方程与特殊函数”考试试卷(B卷)

考试方式: 闭卷　考试时间: 2025年1月9日上午　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

装

订

线

一、(简答题，本题有三小题，共 **13 分**)

1. (**3 分**) 极小曲面方程 $(1+u_x^2)u_{yy}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_y^2)u_{xx}=0$ 是几阶偏微分方程？是否是线性方程？是否是齐次方程？
2. (**4 分**) 考虑圆心在坐标原点、半径为 R 的圆形膜的自由振动，假设边界固定在 xOy 平面上，初始位移为 $R^2-x^2-y^2$，初始速度为零。试给出位移函数 $u(x,y,t)$ 满足的定解问题。
3. (**6 分**) 给出下列固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} X''(x)+2X'(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<l, \\ X(0)=0,\ X(l)=0. \end{cases}$$

二、(**12 分**) 用固有函数法求解定解问题：

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+2u_x+e^{-x}\sin x, \quad 0<x<\pi, \quad t>0, \\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0, \\ u(x,0)=0. \end{cases}$$

三、(**13 分**) 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=4\sin 2x, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \quad 0<y<\frac{\pi}{2}, \\ u(0,y)=-1,\ u_x(\frac{\pi}{2},y)=2, \\ u(x,0)=-\sin 2x-1,\ u(x,\frac{\pi}{2})=\sin 3x-\sin 2x-1. \end{cases}$$

1. (**5 分**) 求辅助函数 $w(x)$，通过代换 $u(x,y)=v(x,y)+w(x)$ 将方程和一组边界条件转化为齐次，并给出 $v(x,y)$ 满足的定解问题；
2. (**8 分**) 求原定解问题的解。

四、(**12 分**) 设a是正常数，用行波法求解如下弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<at, \\ u_x(x,\frac{x}{a})=\phi(x), \quad u(0,t)=h(t). \end{cases}$$

五、(**13 分**) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t + u_x = e^{-x}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$，$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 \leq t < a. \end{cases}$

六、(**12 分**) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u\cos 2t, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

提示：$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$，$t > 0$.

七、(**10 分**) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，用分离变量法求解：

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - 2u, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u|_{r=1} = 0, \quad |u(r,t)| < \infty, \\ u|_{t=0} = 1 - r^2. \end{cases}$$

提示：$(x^n J_n(x))' = x^n J_{n-1}(x)$, $J_0'(x) = -J_1(x)$.

八、(本题有三小题，共 **15 分**)

1. (**5 分**) 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域，其边界 Γ 为光滑封闭曲面，Laplace方程第一边值问题在点 $M_0 \in \Omega$ 的格林函数为 $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v(M)$ ，请写出调和函数 v 满足的定解问题。

2. (**5 分**) 用试探法求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{20}{9}, \quad 1 < x^2 + \frac{y^2}{9} < 9, \\ u\big|_{x^2+\frac{y^2}{9}=1} = 2, \quad u\big|_{x^2+\frac{y^2}{9}=9} = 10. \end{cases}$$

3. (**5 分**) 设 D 为平面有界区域，其边界 C 为光滑封闭曲线，n 为边界 C 上的单位外法向，$f(x,y)$ 为 D 上的已知连续函数。若泊松方程第二边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_C = 0 \end{cases}$$

存在一个经典解 u，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0.$$