华中科技大学 2023 ~2024 学年第二学期

“数理方程与特殊函数”考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷　考试时间: 2024年5月26日上午　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

一、(简答题，本题有三小题，共 **13** 分)

1. (**3** 分) $u_{tt}+4u_{xxxx}+x^2u_{xx}=x^2t$ 是几阶偏微分方程？它是否为线性偏微分方程？它是否为齐次偏微分方程？
2. (**4** 分) 考虑一个由导体壁构成的空腔圆柱体，圆柱的半径为2，柱高为5。圆柱的下底面接地，上底面的电势为$\frac{5(x^2+y^2)}{2}$，导体壁侧面所在位置的电势与该处的柱高成正比(比例常数为k)。试给出圆柱空腔内的电势 $u(x,y,z)$ 满足的定解问题。
3. (**6** 分) 给出下列固有值问题的固有值与固有函数：

$$\begin{cases} X''+(\lambda+2)X=0, \\ X(0)=0, \quad X'(5)=0. \end{cases}$$

装

订

线

二、(**12** 分) 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}+t,\ 0<x<1,\ t>0, \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0, \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0. \end{cases}$$

三、(**13** 分) 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+3\sin x, \quad 0<x<\pi, \quad t>0 \\ u_x(0,t)=1,\ u(\pi,t)=0, \\ u(x,0)=\cos\frac{x}{2}+3\sin x-2x+2\pi. \end{cases}$$

四、(**12** 分) 利用行波法求解如下无界弦的自由振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, \quad -\infty<x<\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=\cos 2x. \end{cases}$$

五、(**13 分**) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_x + xu_t = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = t, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$，$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 \leq t < a. \end{cases}$

六、(**12 分**) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + u, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{F}[\sin ax] = \frac{\pi}{i}(\delta(\lambda - a) - \delta(\lambda + a))$，$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$，$t > 0$.

七、(**10 分**) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，用分离变量法求解：

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < z < 2, \\ u|_{r=1} = 0, \quad |u(r,z)| < \infty, \\ u(r,0) = 0, \quad u(r,2) = 1 - r^2. \end{cases}$$

提示：$(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$, $J_0'(x) = -J_1(x)$.

八、(本题有三小题，共 **15 分**)

1. (**5 分**) 写出拉普拉斯方程在上半平面($y > 0$)内的第一边值问题的格林函数。
2. (**5 分**) 设 $u(x,y)$ 是定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1, \\ u|_{x^2+y^2=1} = x^2 + y \end{cases}$$

的解，求 $u(x,y)$ 在闭圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上的最大值与最小值。

3. (**5 分**) 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域，其边界 Γ 为光滑封闭曲面，记$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$。若对某个实数$\lambda$，固有值问题：

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } \Omega, \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

存在非零解 u，则称 λ 是其**固有值**，该非零解 u 称为固有值 λ 的**固有函数**。设 u_1, u_2 分别是固有值 λ_1, λ_2 的固有函数且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，试用格林公式证明：

$$\iiint_\Omega u_1 u_2 dxdydz = 0.$$