华中科技大学 2023 ～2024 学年第一学期

《数学物理方程与特殊函数》考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: 2024.01.09　考试时长: 150 分钟

院(系): ____________　专业班级: ____________

学　号: ____________　姓　　名: ____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

一 **(满分 15 分)** 设 a 是正常数，用分离变量法求解如下定解问题：

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\
u_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \\
u(x, 0) = 5\cos\frac{3\pi x}{2l} + 2\cos\frac{7\pi x}{2l}.
\end{cases}
$$

得　分	
评卷人	

$A=-\frac{1}{7}$

二 (满分 10 分) 用固有函数法求解如下扇形区域上的定解问题：

$Ar^3\sin 4\theta$　　$6Ar\sin 4\theta+3Ar\sin 4\theta-16Ar\sin 4\theta=r\sin 4\theta$

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=r\sin 4\theta,\ 0<r<2,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}, & ① \\ u(r,0)=0, \quad u(r,\frac{\pi}{2})=0, & ② \\ u(2,\theta)=0, \quad |u(r,\theta)|<+\infty. & ③ \end{cases}$$

② 给了 θ 的条件和 固有函数只有一类

否则为 $\{1, \sin\theta, \cos\theta, \sin 2\theta, \cos 2\theta, \cdots\}$

解：①相应的齐次方程满足②的固有函数系为 $\{\sin(2n\theta), n=1,2,\cdots\}$

设 $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\sin 2n\theta$，代回①得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_n''(r)+\frac{1}{r}R_n'(r)-\frac{1}{r^2}\cdot 4n^2 R_n(r)\right]\sin(2n\theta)=r\sin 4\theta$$

$A_n 2^{2n}=0 \Rightarrow A_n=0$

$$\therefore \begin{cases} R_2''(r)+\frac{1}{r}R_2'(r)-\frac{1}{r^2}\cdot 4^2 R_2(r)=r & n=2 \\ R_n''(r)+\frac{1}{r}R_n'(r)-\frac{1}{r^2}(2n)^2 R_n(r)=0 & n=1,3,\cdots \end{cases} \Rightarrow R_n(r)=A_n r^{2n}+\overline{B_n r^{-2n}}$$

$B_n=0$

对于 $R_2''(r)+\frac{1}{r}R_2'(r)-\frac{1}{r^2}\cdot 4^2 R_2(r)=r$

相应齐次方程的通解为 $R_2(r)=C_1 r^4+C_2 r^{-4}$

设原方程通解为 $R_2(r)=C_1(r)r^4+C_2(r)r^{-4}$

$$\begin{cases} C_1'(r)r^4+C_2'(r)r^{-4}=0 \\ 4C_1'(r)r^3-4C_2'(r)r^{-5}=r \end{cases}$$

$C_1'(r)r^8+C_2'(r)=0$

$C_1'(r)r^8-C_2'(r)=\frac{1}{4}r^6$

$C_2'(r)=-\frac{1}{8}r^6$

$C_1'(r)=\frac{1}{8}r^{-2}$

$C_1(r)=-\frac{1}{8}r^{-1}+D_1$

$C_2(r)=-\frac{1}{56}r^7+D_2$

$R_2(r)=-\frac{1}{8}r^3+D_1 r^4+D_2 r^{-4}-\frac{1}{56}r^3$

$=\underbrace{-\frac{1}{7}r^3}_{\text{特解}}+\underbrace{D_1 r^4+D_2 r^{-4}}_{\text{齐次方程通解}}$

$D_2=0$　$R_2(2)=-\frac{8}{7}+D_1 16=0$

$\Rightarrow D_1=\frac{1}{14}$

$\therefore R_2(r)=-\frac{1}{7}r^3+\frac{1}{14}r^4$

综上，$u(r,\theta)=\left(\frac{1}{14}r^4-\frac{1}{7}r^3\right)\sin 4\theta$

得　分	
评卷人	

三 **(满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 1,\ u_x(1,t) = 3, \\ u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x + 1,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 利用行波法求解如下无界弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ -\infty < t < +\infty, \\ u|_{x=t} = 2x, \quad u_t|_{x=2t} = 3x. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

五 (满分 15 分) $M>0$ 为常数，用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=2u_{xx}+4e^{-2t}\cos x \quad x>0,\quad t>0,\\ u(0,t)=e^{-2t},\quad |u(x,t)|<M,\\ u(x,0)=\cos x,\quad u_t(x,0)=-2\cos x.\end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[t^n e^{-at}]=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$.

解：关于变量t作Laplace变换

$\mathcal{L}[u(x,t)]=U(x,s)$

$\mathcal{L}[4e^{-2t}\cos x]=\frac{4}{s+2}\cos x$

$$\begin{cases} \underline{s^2U(x,s)-u(x,0)-u_t(x,0)}=2U_{xx}(x,s)+\frac{4}{s+2}\cos x\\ U(0,s)=\frac{1}{s+2}\end{cases}$$

$s^2U(x,s)-\underline{2U_{xx}(x,s)}=\left(\frac{4}{s+2}-1\right)\cos x$

$U_{xx}(x,s)-\frac{s^2}{2}U(x,s)=\underbrace{\frac{1}{s^2}\left(\frac{4}{s+2}-1\right)}_{}\cos x$　　$F(s)$

$\frac{2-s}{(s+2)s^2}$

$r^2-\frac{s^2}{2}=0$

$r_{1,2}=\pm\frac{s}{\sqrt2}$

$\bar U(x,s)=c_1e^{\frac{s}{\sqrt2}x}+c_2e^{-\frac{s}{\sqrt2}x}$

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{\frac{s}{\sqrt2}x}+c_2'(x)e^{-\frac{s}{\sqrt2}x}=0\\ c_1'(x)\cdot\frac{s}{\sqrt2}e^{\frac{s}{\sqrt2}x}-c_2'(x)\frac{s}{\sqrt2}e^{-\frac{s}{\sqrt2}x}=F(s)\cos x\end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

六 (满分 10 分) 求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = 2tu_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

[提示：$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\lambda|a}] = \frac{a}{\pi}\frac{1}{(a^2+x^2)},\ a > 0,\ \mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},\ t > 0.$]

得　分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (每一问5分, 如本页写不下,答案请写在背面)

记 B_r 是以原点为球心, r 为半径的球体, S_r 是以原点为球心, r 为半径的球面. 设 Γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界光滑闭曲面, Γ 的外部区域记为 Ω. 给定常数 $r_0>0$, 满足 Γ 包含在球体 B_{r_0} 中, 即 $\Gamma\subset B_{r_0}$. 假设 u 在 $\Omega+\Gamma$ 上连续可微. 证明:

1. 若 u 满足如下的狄氏外问题:

$$\begin{cases} \Delta u=0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u|_{\Gamma}=0, \\ \lim\limits_{r\to\infty} u(x,y,z)=0, \end{cases}$$

   试由极值原理证明: $u\equiv 0$.

2. 若 u 是 Ω 上的调和函数(无穷远点除外), 证明:对任意的 $r\ge r_0$, 有

$$\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial n}dS_r=C \text{ (常数, 与 } r\text{无关)},$$

   并给出常数 C 的(积分)表达式. 其中 n 为球面的单位外法方向.

3. 若 u 是 Ω 上的调和函数(无穷远点除外), 对 $r>r_0$, 记 $\bar u(r):=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}u dS_r$, 证明:存在常数 C_2(与 r无关), 使得

$$\bar u(r)=-\frac{C}{4\pi r}+C_2, \quad \text{对任意的 } r\ge r_0.$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

八 (满分 10 分) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，由分离变量法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r, \quad 0 < r < 2, \quad t > 0, \\ u|_{r=2} = 0, \quad |u(r,t)| < \infty, \\ u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 4 - r^2. \end{cases}$$

[提示：$(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$, $J_0'(x) = -J_1(x)$.]