华中科技大学 2022 ~2023 学年第一学期

《数学物理方程与特殊函数》考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: 2023.02.15　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

一 **(满分 15 分)** 设 a 是正常数，用分离变量法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 2\cos\frac{3\pi x}{l} + \cos\frac{7\pi x}{l}. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

二 **(满分 10 分)** 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=r\cos 2\theta,\ 0<r<3, \\ u(3,\theta)=0, \quad |u(r,\theta)|<+\infty. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

三 **(满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin\frac{\pi x}{4}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(2,t) = t, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 利用行波法求解如下无界弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ -\infty < t < +\infty, \\ u|_{x=-t} = x, \quad u_t(x,0) = \cos x. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

五 (满分 15 分) $M > 0$ 为常数，用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 3\sin 2t, \quad |u(x,t)| < M, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$，　$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 < t < a. \end{cases}$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

六 (满分 10 分) 求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = t u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

[提示：$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.]

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (每一问5分, 如本页写不下,答案请写在背面)

[提示：带参变量积分的求导公式 $\frac{d}{dt}\iint_\Omega f(x,y,t)dxdy = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial t}f(x,y,t)dxdy.$
]

1. 记 $\Omega = \{x^2+y^2<4\}$, 请写出 Ω 上的格林第一公式。
2. 设 $u(x,y,t)$ 是一个二次连续可微函数. 若函数 $u(x,y,t)$ 满足：

$$\begin{cases} u_t = 4(u_{xx}+u_{yy}), \quad x^2+y^2<4, \\ u|_{x^2+y^2=4} = 0. \end{cases}$$

定义

$$E(t) = \iint_\Omega u^2(x,y,t)dxdy.$$

试由 u 满足的方程、边界条件及格林第一公式，证明：

$$E'(t) = -8\iint_\Omega (u_x^2+u_y^2)dxdy \le 0.$$

3. 试证明：下列问题的古典解只能是零解。

$$\begin{cases} u_t = 4(u_{xx}+u_{yy}), \quad x^2+y^2<4, \\ u|_{x^2+y^2=4} = 0, \\ u(x,y,0) = 0, \quad x^2+y^2\le 4. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

八 (满分 10 分) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，由固有函数法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=z, \quad 0<r<1, \quad 0<z<1, \\ u(1,z)=0, \quad 0<z<1 \\ u(r,0)=0, \quad u(r,1)=0. \end{cases}$$

[提示：$(xJ_1(x))'=xJ_0(x)$, $J_0'(x)=-J_1(x)$.]