华中科技大学 2021 ～2022 学年第一学期

《数理方程与特殊函数》考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2022.01.10 考试时长: 150 分钟

院(系): __________ 专业班级: __________

学 号: __________ 姓 名: __________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

一 **(满分 15 分)** 用分离变量法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x(l-x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

二 **(满分 10 分)** 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\cos\frac{2\pi x}{a},\ 0<x<a,\ 0<y<b, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(a,y)=0, \\ u(x,0)=1, \quad u(x,b)=0. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

三 **(满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2x, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 1,\ u(2,t) = -1, \\ u(x,0) = -\frac{x^3}{3} + x. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 设a是正常数，利用行波法求解如下无界弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \\ u|_{x=at} = 2x, & u_t(0,t) = t^2 + 3. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

五 (满分 15 分) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_t - 4u, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = f(t), \quad \lim\limits_{x \to +\infty} u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 < t < a. \end{cases}$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

六 (满分 10 分) 求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

[提示：$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda) e^{-ia\lambda}] = f(x-a)$.]

得　分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (每1小题10分, 第2小题5分, 如本页写不下, 答案请写在背面)

1. 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $r_0<1$ 为一个正常数. 记 $\Omega=\{(x,y)|r_0<r<1\}$为二维平面上的圆环域. $a>0$, 若函数 $u(x,y)$ 满足:

$$\begin{cases} \Delta u=0, & r_0<r<1, \\ u|_{r=1}=0, & u|_{r=r_0}\le a\ln\frac{1}{r_0}. \end{cases}$$

试用极值原理或比较原理证明:

$$u(x,y)\le a\ln\frac{1}{r},\ 对任意的\ (x,y)\in\Omega.$$

2. 若 $u(x,y)$ 在 $\{(x,y)|0<r\le 1\}$ 中连续且满足

$$\begin{cases} \Delta u=0, & 0<r<1, \\ u|_{r=1}=0, & \lim\limits_{r\to 0}\frac{u(x,y)}{\ln r}=0. \end{cases}$$

试证明:

$$u(x,y)\equiv 0,\quad 0<r\le 1.$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

八 (满分 10 分) (第1小题4分，第2小题6分)

1. 设 $\mu_m^{(0)}$是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m个正零点，试将函数 $4-r^2$在区间 $[0,2]$上按函数系 $\{J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{2})\}$展开成傅里叶-贝塞尔级数。
2. 用分离变量法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = 4(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), \quad 0 < r < 2, \quad t > 0, \\ u(2,t) = 0, \\ u(r,0) = 4 - r^2, \quad |u(r,t)| < +\infty. \end{cases}$$

[提示：$(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$, $J_0'(x) = -J_1(x)$.]