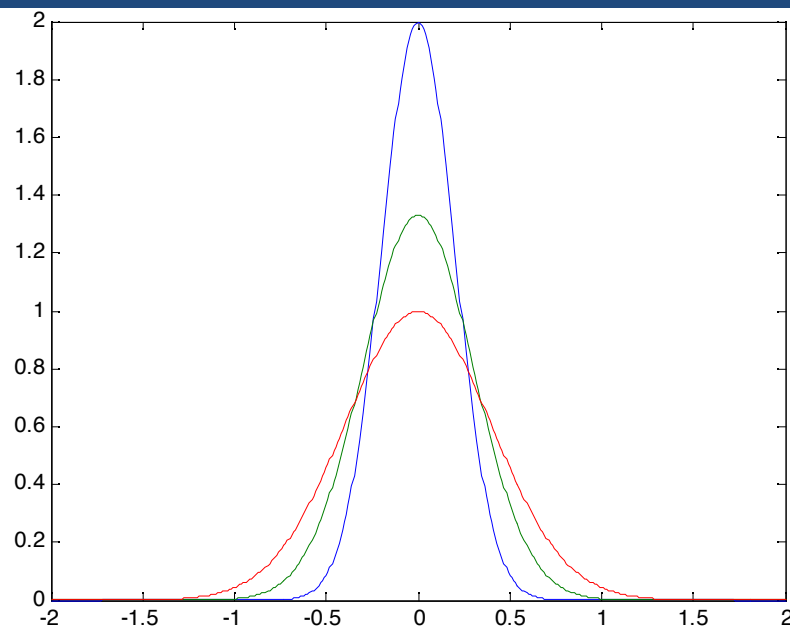


平稳过程的概念  
平稳过程的数字特征及性质  
随机分析  
平稳过程的遍历性

# 平稳随机过程





# 严平稳过程

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程，如果对任意常数 $\tau$ 和正整数 $n$ ， $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ， $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau \in T$ ， $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 与 $(X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau))$ 有相同的联合分布，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**严平稳过程**或**狭义平稳过程**。

严平稳过程的统计特征是由有限维分布函数决定的，在实际应用中难以确定。

## 3.宽平稳过程（简称平稳过程）

设  $\{X(t), t \in T\}$  的一、二阶矩存在，且 有

①  $E[X(t)] = m_X$  为常数；

②  $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$  仅与  $\tau$  有关；

③  $E[X^2(t)] < +\infty$  (二阶矩存在)。

则称  $\{X(t), t \in T\}$  为宽平稳过程。

# 严平稳过程与宽平稳过程的关系

严平稳过程不一定是宽平稳的，因为严平稳只涉及有限维分布，而并不要求一、二阶矩存在，但二阶矩过程严平稳必是宽平稳。

反过来，宽平稳也不一定是严平稳，因为宽平稳只要求均值函数与 $t$ 无关，导不出一维分布与 $t$ 无关，又相关函数 $R(t, t+\tau)$ 与 $t$ 无关，导不出二维分布 $(x_1, x_2; t, t+\tau)$ 与 $t$ 无关。

但对于正态平稳过程是例外，由于正态过程的概率密度是由均值和相关函数完全确定，另外正态过程的二阶矩总是存在的。

均值:  $m_X(t) = E[X(t)];$

均方值:  $\varphi_X(t) = E[X^2(t)];$

方差:  $D[X(t)] = E[X^2(t)] - [E(X(t))]^2 = \varphi_X(t) - m_X^2(t);$

自相关函数:  $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)];$

协方差函数:  $\text{Cov}(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$

对于严平稳随机过程 $\mathbf{X}(t)$ 的一维分布 $F_1(\mathbf{X}_1, t_1) = F_1(\mathbf{X}_1, t_1 + \varepsilon)$ ,  
若令 $\varepsilon = -t_1$ , 则

$$F_1(\mathbf{X}_1, t_1) = F_1(\mathbf{X}_1, 0) = F_1(\mathbf{X}_1)$$

因此严平稳随机过程的一维分布函数与时间无关, 其在任何时刻的统计规律相等。

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = m_X$$

$$\phi(X(t)) = E[X^2(t)] = \sigma_X^2 + m_x^2$$

若随机过程 $\mathbf{X}(t)$ 平稳, 则其均值、均方值和方差均为常数。

对于严平稳随机过程 $X(t)$ 的二维分布

$F_2(X_1, X_2; t_1, t_2) = F_2(X_1, X_2; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon)$ , 若令 $\varepsilon = -t_1$ , 则

$F_2(X_1, X_2; t_1, t_2) = F_2(X_1, X_2; 0, t_2 - t_1)$ , 令 $t_2 - t_1 = \tau$ , 则

$$F_2(X_1, X_2; t_1, t_2) = F_2(X_1, X_2; \tau)$$

随机过程 $X(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E[X(t), X(t + \tau)] \\ &= \iint x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t, t + \tau) dx_1 dx_2 \\ &= \iint x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \\ &= R_X(\tau) \end{aligned}$$

平稳过程的自相关函数是时间  $\tau$  的单变量函数。



# 例题

## 例题1:

设 $Y$ 是随机变量，试分别考虑 $X(t)=Y$ 和 $X(t)=tY$ 的平稳性。

$$E[X_1(t)] = E[Y] = \text{常数}$$

$$R_{X_1}(t, t + \tau) = E[X_1(t)X_1(t + \tau)] = E[Y^2] - \text{常数}$$

$X_1(t)$  为宽平稳过程

$$E[X_2(t)] = E[tY] = tE[Y] \rightarrow \text{均值与}t\text{有关，不是常数}$$

$X_2(t)$  不是宽平稳过程

# 例题

## 例题2:

设 $\{X_n, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是实的互不相关随机变量序列，且 $E[X_n]=0, D[X_n]=\sigma^2$ 。试讨论随机序列的平稳性。

$$E[X_n] = 0 \quad \text{--- 常数} \quad \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} R_X(n, n - \tau) &= E[X_n X_{n-\tau}] = \text{Cov}(n, n - \tau) + E[X_n] * E[X_{n-\tau}] \\ &= \text{Cov}(n, n - \tau) \end{aligned}$$

$$\tau \neq 0 \text{ 时, } X_n X_{n-\tau} \text{ 互不相关} \quad \longrightarrow \quad \text{Cov}(n, n - \tau) = 0$$

$$\tau = 0 \text{ 时, } \text{Cov}(n, n - \tau) = E[X_n X_n] = D[X_n] = \sigma^2$$

$\longrightarrow R_X(n, n - \tau)$  仅与  $\tau$  有关，所以  $\{X_n\}$  是平稳随机序列

## 例题3

设 $S(t)$ 是一周期为 $T$ 的函数， $\theta$ 在 $(0, T)$ 上均匀分布，称 $X(t) = S(t + \theta)$ 为随机相位周期过程，讨论其平稳性。

$$\begin{aligned}
 E[X(t)] &= \int_0^T \frac{1}{T} S(t + \theta) d\theta \xrightarrow{u=t+\theta} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} S(u) du \\
 &= \underbrace{\frac{1}{T} \int_t^T S(u) du}_{\text{---}} + \frac{1}{T} \int_T^{T+t} S(u) du \quad \begin{array}{l} v = u - T \\ S(v) = S(v + T) \end{array} \\
 &\quad \frac{1}{T} \int_0^t S(v + T) dv \\
 &\quad \frac{1}{T} \int_0^t S(v + T) dv \quad \text{---} \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T S(u) du \quad \text{--- 常数}
 \end{aligned}$$

## 例题3

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= \int_0^T \frac{1}{T} S(t + \theta)S(t + \theta + \tau) d\theta \xrightarrow{u=t+\theta} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} S(u)S(u + \tau) du \\ &= \frac{1}{T} \int_t^T S(u)S(u + \tau) du + \frac{1}{T} \int_T^{T+t} S(u)S(u + \tau) du \\ &\quad \frac{1}{T} \int_0^t S(v + T)S(v + T + \tau) dv \quad v = u - T \\ &\quad \frac{1}{T} \int_0^t S(v)S(v + \tau) du \quad S(v) = S(v + T) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T S(u)S(u + \tau) du \quad \text{--- 仅与}\tau\text{有关} \end{aligned}$$

所以， $X(t)$ 是  
平稳过程

## 例题4

例：设  $Z(t) = X \sin \omega_0 t + Y \cos \omega_0 t$ ，其中  $X, Y$  为相互独立同分布的随机变量，具分布律为：

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) 求  $Z(t)$  的均值和自相关函数；

(ii) 证明  $Z(t)$  是宽平稳过程，但非严平稳。

## 例题4-续

解：

$$(i) E[Z(t)] = EX \cdot \sin \omega_0 t + EY \cos \omega_0 t = 0$$

$$R_Z(t, t + \tau)$$

$$= E\{[X \sin \omega_0 t + Y \cos \omega_0 t][X \sin \omega_0(t + \tau) + Y \cos \omega_0(t + \tau)]\}$$

$$= EX^2 \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t + \tau)$$

$$+ E(XY) \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t + \tau) + E(YX) \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t + \tau)$$

$$+ EY^2 \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t + \tau)$$

## 例题4-续

$$X \text{ 与 } Y \text{ 独立}, E(XY) = EX \cdot EY = 0$$

$$EX^2 = EY^2 = (-1)^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} = 2$$

$$\therefore R_Z(t, t + \tau) = 2 \cos \omega_0 \tau$$

(ii) 由(i)知 $Z(t)$ 为宽平稳的, 但非严平稳。

事实上, 可以证明:

$$EZ^3(t) = 2(\sin^3 \omega_0 t + \cos^3 \omega_0 t)$$

与 $t$ 的取值有关, 故非严平稳。

## 例题5

例：随机电报信号

若随机过程 $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 满足下列条件，  
则称为随机电报信号。

①相继取值  $+1$  或  $-1$ ，且

$$P\{X(t) = 1\} = P\{X(t) = -1\} = \frac{1}{2};$$

②在任意区间 $[t, t + \tau)$ 内变号的次数 $N(t, t + \tau)$ 服从  
泊松分布。

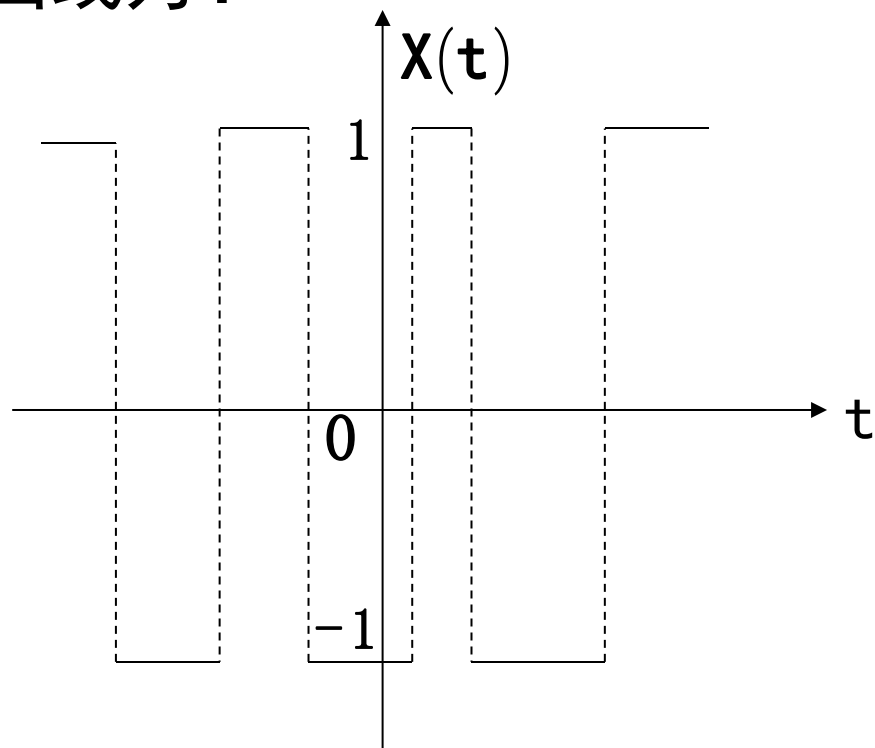
$$\text{即： } P\{N(t, t + \tau) = k\} = \frac{(\lambda|\tau|)^k}{k!} e^{-\lambda|\tau|}, \quad k = 0, 1, 2,$$

试讨论其平稳性。



## 例题5-续

其一条样本函数曲线为：



先计算均值函数

$$E[X(t)] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0. \quad \text{为常数}$$

## 例题5-续

再计算自相关函数：

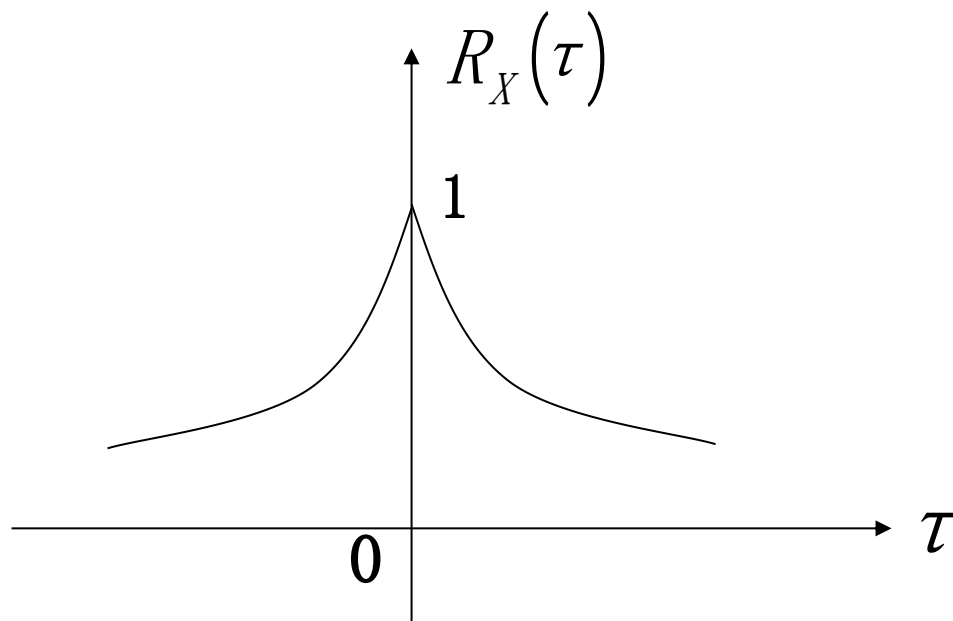
$$X(t)X(t+\tau) = \begin{cases} 1, & N(t, t+\tau) \text{为偶} \\ -1 & N(t, t+\tau) \text{为奇} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= 1 \cdot P\{N(t, t+\tau) \text{为偶}\} + (-1)P\{N(t, t+\tau) \text{为奇}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t, t+\tau) = 2k\} - \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t, t+\tau) = 2k+1\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda|\tau|} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda|\tau|} \\ &= e^{-\lambda|\tau|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda|\tau|)^k}{k!} = e^{-2\lambda|\tau|} = R_X(\tau) \end{aligned}$$

## 例题5-续

与 $t$ 无关，可见随机电报信号是平稳过程。

其相关函数图如下：



# 复随机过程

定义：设  $\{Z(t), t \in T\}$  是复随机过程，

若  $m_Z(t) = E[Z(t)] = m_Z(\text{复常数}) t \in T$

且  $R_Z(t_1, t_2)$  仅与  $t_2 - t_1$  有关，而与  $t_1$  无关

即：  $R_Z(t, t + \tau) = E[Z(t)\overline{Z(t + \tau)}] = R_Z(\tau), \quad t, t + \tau \in T$

则称  $\{Z(t), t \in T\}$  是复平稳过程。

## 例题6

例：设复随机过程  $Z(t) = Z_1 e^{i\lambda_1 t} + Z_2 e^{i\lambda_2 t}$ ,  $-\infty < t < +\infty$   
其中  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是实数, 且  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 而  $Z_1, Z_2$  是不相关的  
复随机变量, 有  $EZ_1 = EZ_2 = 0, E|Z_1|^2 = \sigma_1^2, E|Z_2|^2 = \sigma_2^2$   
试讨论它的平稳性。

$$\begin{aligned}\text{解: } m_Z(t) &= E[Z(t)] = EZ_1 \cdot e^{i\lambda_1 t} + EZ_2 \cdot e^{i\lambda_2 t} = 0 \\ R_Z(t, t+\tau) &= E\left[Z(t)\overline{Z(t+\tau)}\right] \\ &= E\left[\left(Z_1 e^{i\lambda_1 t} + Z_2 e^{i\lambda_2 t}\right)\left(\overline{Z_1} e^{-i\lambda_1(t+\tau)} + \overline{Z_2} e^{-i\lambda_2(t+\tau)}\right)\right] \\ &= E|Z_1|^2 e^{-i\lambda_1 \tau} + E|Z_2|^2 e^{-i\lambda_2 \tau} = \sigma_1^2 e^{-i\lambda_1 \tau} + \sigma_2^2 e^{-i\lambda_2 \tau} = R_X(\tau)\end{aligned}$$

与  $t$  无关,  $\therefore Z(t)$  是复平稳过程。

## 例题6-续

另外：设  $Z(t) = \sum_{k=1}^n Z_k e^{i\lambda_k t}, -\infty < t < +\infty$

其中  $\lambda_l \neq \lambda_j (l \neq j, l, j = 1, 2, \dots, n)$

而  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  为两两不相关复随机变量，

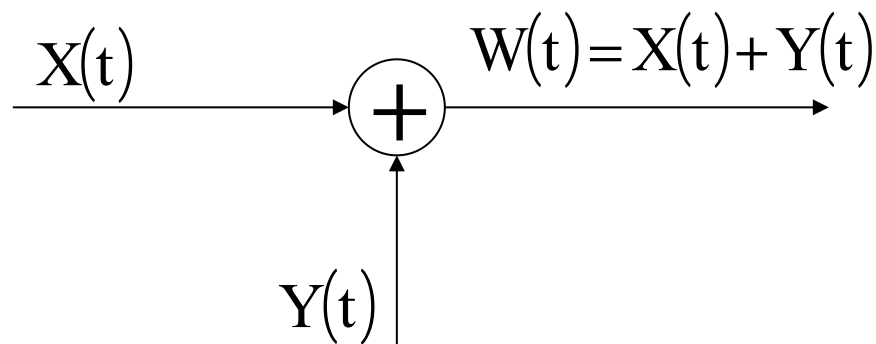
且：  $EZ_k = 0, DZ_k = \sigma_k^2$

则  $E[Z(t)] = 0$

$$R_Z(t, t + \tau) = E[Z(t)\overline{Z(t + \tau)}] = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 e^{-i\lambda_k \tau} = R_X(\tau)$$

也为平稳过程。

# 联合平稳过程

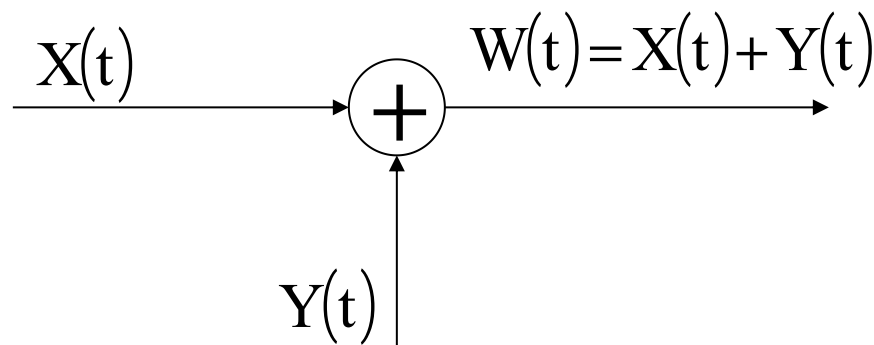


设 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 是两个平稳过程，  
若它们的互相关函数 $R_{XY}(t, t + \tau)$ ， $R_{YX}(t, t + \tau)$   
仅与 $\tau$ 有关而与 $t$ 无关，则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合  
平稳过程。

# 联合平稳过程

当两个平稳过程 $X(t)$ ,  $Y(t)$ 是联合平稳时, 则它们的和 $W(t)$ 也是平稳过程, 且其相关函数为:

$$R_W(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau)$$





## 定理6.1: 相关函数的性质

设  $\{X(t), t \in T\}$  是平稳过程, 相关函数为  $R_X(\tau)$

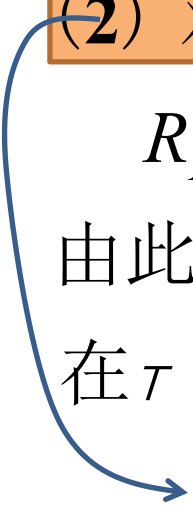
$$(1) R_X(0) = E[X^2(t)] = \psi_X^2 \geq 0$$

(2) 对实随机过程,  $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$ , 即  $R_X(\tau)$  是偶函数。

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t+\tau)X(t)] = R_X(-\tau)$$

由此性质, 在实际问题中只需计算或测量  $R_X(\tau)$

在  $\tau \geq 0$  的值即可。


$$\begin{aligned} \overline{R_X(\tau)} &= E\left[\overline{X(t)X(t+\tau)}\right] = E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\right] \\ &= E\left[X(t)\overline{X(t-\tau)}\right] = R_X(-\tau) \end{aligned}$$

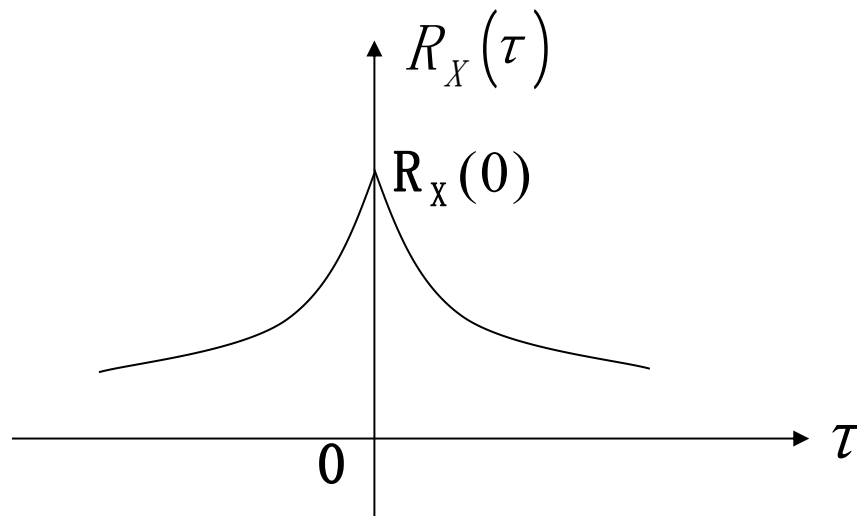
## 定理6.1：相关函数的性质

$$(3) |R_X(\tau)| \leq R_X(0), \quad |B_X(\tau)| \leq B_X(0)$$

$$E|XY| \leq \sqrt{EX^2} \cdot \sqrt{EY^2} \text{ (施瓦兹不等式)}$$

$$\begin{aligned} R_X^2(\tau) &= (E[X(t)X(t+\tau)])^2 \\ &\leq E[X^2(t)] \cdot E[X^2(t+\tau)] = R_X^2(0) \end{aligned}$$

表明自相关函数在  $\tau = 0$  处取得最大值。



## 定理6.1: 相关函数的性质

(4)  $R_X(\tau)$  具有非负定性, 即对任意实数  $t_1, \dots, t_n$ ,

$a_1, \dots, a_n$  有: 
$$\sum_{i,j=1}^n R_X(t_i, t_j) a_i a_j \geq 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n R_X(t_i, t_j) a_i a_j &= \sum_{i,j=1}^n E[X(t_i)X(t_j)] a_i a_j \\ &= E\left[\sum_{i,j=1}^n X(t_i)X(t_j) a_i a_j\right] \\ &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^n X(t_i) a_i\right]^2\right\} \geq 0 \end{aligned}$$

在理论上可证明: 任一连续函数只要具有非负定性, 则该函数必是某平稳过程的自相关函数。

## 定理6.1: 相关函数的性质

(5)  $X(t)$ 为周期 $T$ 的平稳过程  $\Leftrightarrow R_X(\tau)$ 以 $T$ 为周期。

即:  $X(t) = X(t+T) \Leftrightarrow R_X(\tau) = R_X(\tau+T)$

证:  $\Rightarrow R_X(\tau+T) = E[X(t)X(t+\tau+T)]$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$$

$$\Leftrightarrow D[X(t+T) - X(t)] = E[(X(t+T) - X(t))^2] - \underbrace{(E[X(t+T) - X(t)])^2}_{=0}$$

$X(t)$ 平稳  $\therefore E[X(t+T) - X(t)] = 0$

$$\therefore \text{上式} = E[X^2(t+T)] + E[X^2(t)] - 2E[X(t)X(t+T)]$$

$$= R_X(0) + R_X(0) - 2R_X(T) = 2R_X(0) - 2R_X(0) = 0$$

根据方差性质知:  $X(t+T) - X(t) = C$

$$X(t)\text{平稳} \therefore E[X(t+T) - X(t)] = 0 \Rightarrow C = 0$$

$\therefore X(t+T) = X(t)$ 即以 $T$ 为周期的平稳过程。

## 定理6.1: 相关函数的性质

(6) 若  $X(t)$  是不含周期分量的非周期过程, 当  $|\tau| \rightarrow \infty$  时,  $X(t)$  与  $X(t + \tau)$  相互独立, 则  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_X(\tau) = m_X \bar{m}_X$

$$\begin{aligned}\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_X(\tau) &= \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= E[X(t)] \cdot \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} E[X(t + \tau)] \\ &= m_X^2\end{aligned}$$

在实际应用中, 对非周期性的噪声和干扰, 一般当  $\tau$  值适当增大,  $X(t)$  和  $X(t + \tau)$  即呈现独立性, 若为零均值, 则其自相关函数趋于0。

(7)  $R_X(\tau)$  在  $(-\infty, +\infty)$  连续  $\Leftrightarrow R_X(\tau)$  在  $\tau = 0$  连续。

# 互相关函数性质

$$1) \quad |R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0), |R_{YX}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0);$$

$$2) \quad R_{XY}(-\tau) = \overline{R_{YX}(\tau)}, \text{ 当 } X(t), Y(t) \text{ 为实联合平稳过程时, 有 } R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau), \text{ 注意无对偶性.}$$

证：由施瓦兹不等式：

$$\begin{aligned} |R_{XY}(\tau)|^2 &= |E[X(t)Y(t+\tau)]|^2 \\ &\leq E[X(t)]^2 \cdot E[Y^2(t+\tau)] \\ &= R_X(0)R_Y(0) \end{aligned}$$

$$(2) \quad R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$$

$$\begin{aligned} \text{证：} R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\ &= E[Y(t+\tau)X(t)] = R_{YX}(-\tau) \end{aligned}$$

## 例题7

例：设 $X(t) = A \sin(\omega t + \cdot \cdot)$ ， $Y(t) = B \sin(\omega t + \cdot \cdot - \varphi)$   
为两个平稳过程，其中 $A, B, \omega$ 为常数， $\cdot \cdot \sim U(0, 2\pi)$ 。  
求 $R_{XY}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$ 。

$$\begin{aligned}\text{解：} R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\ &= E[A \sin(\omega t + \cdot \cdot) \cdot B \sin(\omega t + \omega\tau + \cdot \cdot - \varphi)] \\ &= \int_0^{2\pi} AB \sin(\omega t + \theta) \cdot \sin(\omega t + \omega\tau + \theta - \varphi) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{AB}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \theta) \cdot [\sin(\omega t + \theta) \cos(\omega\tau - \varphi) \\ &\quad + \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega\tau - \varphi)] d\theta = \frac{AB}{2} \cos(\omega\tau - \varphi)\end{aligned}$$

$$\text{根据 } R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \text{ 得 } R_{YX}(\tau) = \frac{1}{2} AB \cos(\omega\tau + \varphi)$$

## 一.收敛性概念

对 $(\Omega, F, P)$ 上的随机序列, 每个试验结果 $e$ 都对应一序列 $X_1(e), X_2(e), \dots, X_n(e)$  (一族序列)。

### 1、处处收敛

如果对每个 $e$ 都收敛, 则称随机序列 $\{X_n\}$ 处处收敛  
即满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  ( $X$ 为随机变量)



## 2. 几乎处处收敛

定义：称二阶矩随机序列 $\{X_n(e)\}$ 以概率**1**收敛于二阶矩随机变量 $X(e)$ 。

若使： $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(e) = X(e)$ ，成立的 $e$ 的集合的概率为 **1**，

即： $P\{e: \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(e) = X(e)\} = \mathbf{1}$  (不一定对每个 $e$ 都收敛)

或称 $\{X_n(e)\}$ 几乎处处收敛于 $X(e)$ ，记作 $X_n \xrightarrow{a.e} X$ 。

## 3.依概率收敛

定义：称二阶矩随机序列 $\{X_n(e)\}$ 依概率收敛于二阶矩随机变量 $X(e)$ ，若对 $\forall \varepsilon > 0$ 有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n(e) - X(e)| \geq \varepsilon\} = 0 \quad \text{记作 } X_n \xrightarrow{P} X$$

## 4.依分布收敛(弱收敛)

定义：若 $\{X_n\}$ 相应的分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 在 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 的每个连续点处有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

称 $\{X_n\}$ 依分布收敛于随机变量 $X$ ，记 $X_n \xrightarrow{d} X$

## 5.均方收敛

定义：设有二阶矩随机序列 $\{X_n\}$ 和二阶矩随机变量 $X$ 。

若有： $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^2] = 0$ 成立，

则称 $\{X_n\}$ 均方收敛于 $X$ ，记作 $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$

极限常写成 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$

(limit in mean)

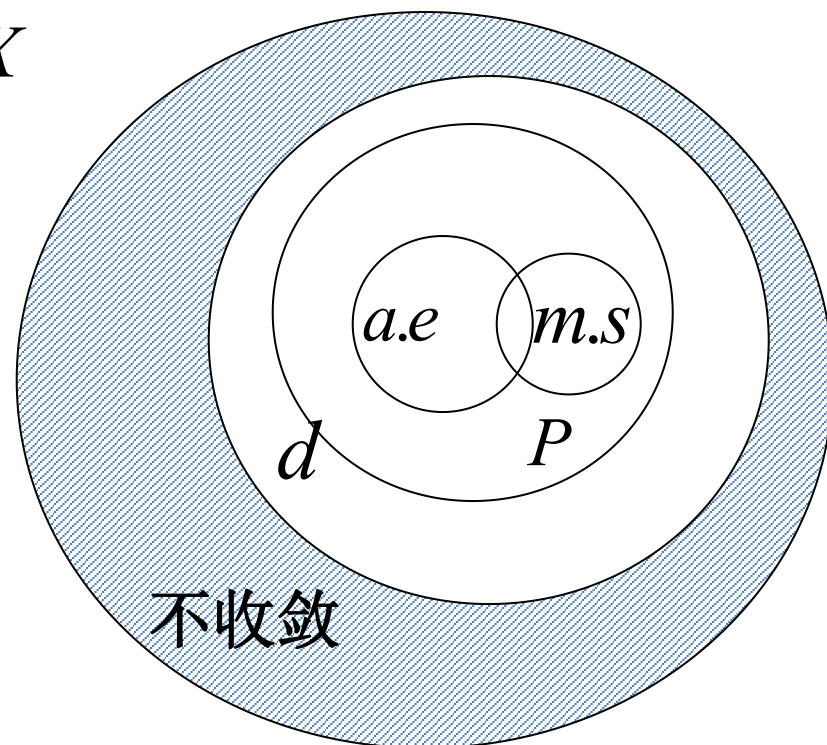
# 收敛性概念

对以上几种收敛定义有下列关系：

① 若  $X_n \xrightarrow{m.s} X$ , 则  $X_n \xrightarrow{P} X$

② 若  $X_n \xrightarrow{a.e} X$ , 则  $X_n \xrightarrow{P} X$

③ 若  $X_n \xrightarrow{P} X$ , 则  $X_n \xrightarrow{d} X$



定理 6. 2: 二阶矩随机序列  $\{X_n\}$  均方收敛于二阶矩随机变量  $X$  的充要条件为:

$$\{X_n, n \geq 1\} \text{均方收敛} \Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} E[|X_n - X_m|^2] = 0$$

# 均方收敛性质

定理6.3: 设 $\{X_n\}, \{Y_n\}$ 为随机变量序列,  $X, Y$ 为随机变量,  $(c_n)$ 为数列,  $a, b, c$ 为常数, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X_n = X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m Y_n = Y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c.$$

则有(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X = X$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m c_n X_n = cX$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m (aX_n + bY_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X_n + b \lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m Y_n = aX + bY$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E\left[\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X_n\right] = EX$

(6)  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} E[X_n \overline{Y_m}] = E\left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X_n\right) \left(\lim_{m \rightarrow \infty} l.i.m \overline{Y_m}\right)\right] = E(X \overline{Y})$

# 均方收敛性质

性质(5)、(6)表明，极限与数学期望可交换次序，但前者为普通极限，后者为均方极限。

在(6)中，令  $Y_m = 1$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , (显然  $Y = 1$ )  $\Rightarrow$  (5)

$$\text{令 } Y_m = X_n, Y = X \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n^2] = E[X^2]$$

$$\text{由 } D(X_n) = EX_n^2 - [E(X_n)]^2$$

$$\begin{aligned} \text{取极限: } \lim_{n \rightarrow \infty} D(X_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n^2) - \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n)^2 \\ &= E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n^2\right) - \left(E \lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right)^2 \\ &= EX^2 - (EX)^2 = D(X) \end{aligned}$$

# 均方收敛准则

## 7.均方收敛准则（定理6.4）：

$$l.i.m X_n = X \Leftrightarrow \lim_{n,m \rightarrow \infty} E(X_n X_m) = c$$

证： $\Rightarrow$  由性质(6)即得到。

$$\Leftarrow E[(X_m - X_n)^2] = E(X_m^2) - 2E(X_m X_n) + E(X_n^2)$$

当

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} c - 2c + c = 0$$

由收敛定理 6.2知  $\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X_n = X$  存在，即  $\{X_n\}$  均方收敛。

由性质 (6) 知  $c = E(X^2)$ ,  $\left( \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} E(X_n X_m) = E(X^2) = c \right)$

上述结果扩充到复随机 变量情形仍然成立。



# 均方连续

1.定义：设有二阶矩阵过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若对某一个 $t_0 \in T$ ，有 $\lim_{h \rightarrow 0} E\left[\left|X(t_0 + h) - X(t_0)\right|^2\right] = 0$ 。则称 $X(t)$ 在 $t_0$ 点均方连续，记作： $\lim_{h \rightarrow 0} X(t_0 + h) = X(t_0)$

若对 $T$ 中一切点都均方连续，则称 $X(t)$ 在 $T$ 上均方连续。

2.均方连续准则：

$\{X(t), t \in T\}$ 在 $t$ 处均方连续  $\Leftrightarrow R_X(t_1, t_2)$ 在点 $(t, t)$ 处连续。

3.性质：

(1) $X(t)$ 在 $T$ 上均方连续  $\Rightarrow m_X(t) = E[X(t)]$ 在 $T$ 上连续

(2) $X(t)$ 在 $T$ 上均方连续  $\Rightarrow R_X(t_1, t_2)$ 在 $T \times T$ 上连续。

在实际工作中，确定随机过程的均值函数和自相关函数等数字特征很重要，然而要求这些数字特征需知一维、二维分布函数，而这些分布在实际问题中没给出，为此，只能用统计实验的方法对观察数据进行估计。

因此，估计  $m_x$ ， $R_x(\tau)$  需作大量实验，次数越多越精确，而在实际中，能否通过一次实验，长时间的观察值来估计？即按时间取平均来代替统计平均，这就是所谓的遍历性问题。

集合平均

$$m_X = E[X(t)]$$

$m_X$ 是随机过程的均值，即任意时刻的过程取值的统计平均。

时间平均

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$$

$\langle X(t) \rangle$ 是随机过程的样本函数按不同时刻取平均，它随样本不同而不同，是个随机变量。

对于一个确定的样本  $\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = \text{常数}$

时间平均



集合平均

# 大数定理

设独立同分布的随机变量序列 $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$ , 具有 $E[X_n]=m, D[X_n]=\sigma^2, (n=1, 2, \dots)$ , 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k - m \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

随时间 $n$ 的无限增长, 随机过程的样本函数按时间平均以越来越大的概率近似于过程的统计平均。也就是说, 只要观测的时间足够长, 则随机过程的每个样本函数都能够“遍历”各种可能的状态。

# 各态历经性

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \xrightarrow{P} m \text{ 表明}$$

随机过程的样本按时间的平均值以越来越大的概率无限接近随机过程的统计平均值  $E[X_n]$ 。

也就是说，只要观测的时间足够长，则随机过程的每个样本函数都能够"遍历"各种可能状态，随机过程的这种特性叫各态历经性。

# 时间均值与时间相关函数

定义：设  $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$  为均方连续的平稳过程，则分别称

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt.$$

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+\tau) dt.$$

为该过程的时间均值和时间相关函数。

# 各态历经性

定义：设 $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 是均方连续的平稳过程。

①若 $\langle X(t) \rangle = E[X(t)] = m_X$ 以概率1成立，

则称该平稳过程的均值具有各态历经性；

②若 $\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = R_X(\tau)$ 以概率1成立，

则称该平稳过程的自相关函数具有各态历经性；

③如果平稳过程的均值和自相关函数都具有各态历经性，则称该过程具有各态历经性。

# 各态历经性

注：随机过程的时间平均是对给定的 $e$ ，样本函数对 $t$ 的积分值再取平均，积分值依赖于 $e$ ，故为随机变量，但如果 $X(t)$ 是各态历经过程，则时间平均不再依赖于 $e$ ，而是以概率1分别等于过程的均值和自相关函数。这表明各态历经过程各样本函数的时间平均可认为相同，即可用任一个样本函数的时间平均来代替过程的统计平均。



# 各态历经性的充要条件

定理：设  $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$  是均方连续的平稳过程，则它的均值具有各态历经性的充要条件为：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) [R_X(\tau) - m_X^2] d\tau = 0$$

推论：若平稳过程  $X(t)$  满足条件： $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = m_X^2$

则  $\langle X(t) \rangle = m_X$

# 各态历经性的充要条件

定理：设  $\{X(t), t \in T\}$  为均方连续的平稳过程，  
则其相关函数具有各态历经性的充要条件为：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau_1}{2T}\right) [B(\tau_1) - R_X^2(\tau)] d\tau_1 = 0$$

其中  $B(\tau_1) = E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$

# 各态历经定理的意义

一个实平稳过程，如果它是各态历经的，则可用任意一个样本函数的时间平均代替过程的集合平均，即

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt$$

若样本函数 $x(t)$ 只在有限区间 $[0, T]$ 上给出，则对于实平稳过程有下列估计式

$$m_X \approx \bar{m}_X = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$R_X(\tau) \approx \bar{R}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt$$

## 例题11

例：已知随机电报信号过程 $X(t)$ ,  $E[X(t)] = 0$ ,  
 $R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$ , 问 $X(t)$ 是否均值各态历经？

解：代入充要条件式：

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) [e^{-2\lambda|\tau|} - 0] d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\lambda T} \left(1 - \frac{1 - e^{-2\lambda T}}{4\lambda T}\right) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore X(t)$ 的均值具有各态历经性。

## 例题12

例：设随机相位过程  $X(t) = a \cos(\omega t + \cdot\cdot)$ ,  
 $a, \omega$  为常数,  $\cdot\cdot \sim U(0, 2\pi)$ , 问  $X(t)$  是否为各态  
历经过程。

解： 
$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E[a \cos(\omega t + \cdot\cdot) a \cos(\omega t + \omega\tau + \cdot\cdot)] \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2\pi} \cos(\omega t + \cdot\cdot) \cos(\omega t + \omega\tau + \cdot\cdot) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega\tau) = R_X(\tau) \end{aligned}$$

## 例题12-续

$$\begin{aligned}\text{而 } \langle X(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a \cos(\omega t + \cdot) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{2T} \frac{\sin(\omega T + \cdot) - \sin(-\omega T + \cdot)}{\omega} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \langle X(t) \rangle = E[X(t)]$$

$$\text{又 } \langle X(t)X(t+\tau) \rangle$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \cos(\omega t + \cdot) \cos(\omega t + \omega\tau + \cdot) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{2} [\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\cdot)] dt \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega\tau)\end{aligned}$$

## 例题12-续

故有  $\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = R_X(\tau)$

由于过程 $X(t)$ 的均值和相关函数都具有各态历经性，所以随机相位过程是各态历经的。

# 例题13

例  $X(t) = X, t \in (-\infty, +\infty)$ ,  $X$  是随机变量,  $P(X = \pm 1) = \frac{1}{2}$

试确定  $X(t)$  的均值是否具有各态历经性。

解:  $X(t) = X$  是平稳过程,

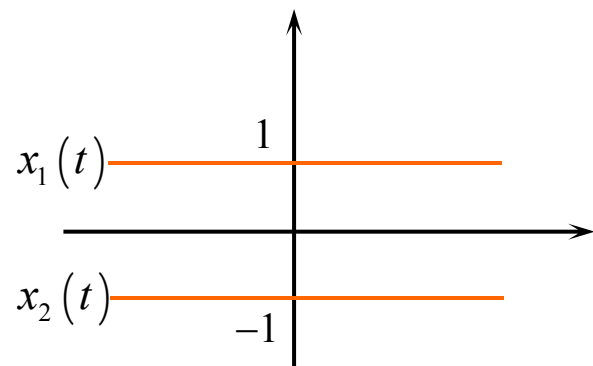
$$\text{因为 } \mu_X(t) = E[X(t)] = EX = 0$$

$$R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E(X^2) = 1 \text{ 与 } t \text{ 无关}$$

$$\text{时间均值 } \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X dt = X$$

$$\text{即 } P\{\langle X(t) \rangle = \mu_X\} = P(X = 0) = 0$$

由定义知,  $X(t)$  的均值不具有各态历经性





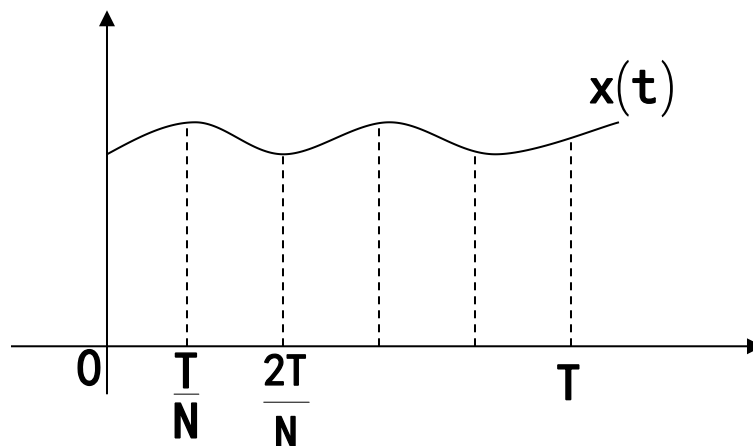
# 各态历经定理的应用

设 $x(t), 0 \leq t < \infty$ 是平稳过程 $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ 的样本函数，若 $X(t)$ 的均值具有各态历经性，即

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

此式中积分可采取将 $[0, T]$ 等分的方式进行计算。

# 各态历经定理的应用



$$\int_0^T X(t)dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N X(t_k) \Delta t_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{N} \sum_{k=1}^N X\left(k \frac{T}{N}\right)$$

$$\text{其中 } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}, \quad t_k = k \Delta t_k$$

# 各态历经定理的应用

$$\begin{aligned}\text{于是: } m_X &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{N} \sum_{k=1}^N X\left(k \frac{T}{N}\right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X\left(k \frac{T}{N}\right)\end{aligned}$$

因均方收敛必依概率收敛，所以对 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X\left(k \frac{T}{N}\right) - m_X\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

于是，当 $T$ ， $N$ 相当大，且 $\frac{T}{N}$ 很小时，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X\left(k \frac{T}{N}\right) - m_X\right| < \varepsilon\right\} \approx 1$$

根据实际推断原理，一次抽样得到的  
样本函数 $x(t)$ ，可认为一定有：

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x\left(k \frac{T}{N}\right) - m_X \right| < \varepsilon.$$

于是

$$m_X \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x\left(k \frac{T}{N}\right)$$

由此式可见，近似计算 $m_X$ 实际上只需用到  
样本函数 $x(t)$ 在 $k \frac{T}{N}$  ( $1 \leq k \leq N$ ) 点上的函数值，  
这些点可以称为采样点。

# $R_x(\tau)$ 的近似估计

下面介绍相关函数 $R_x(\tau)$ 的近似估计，考察

$\tau = r \frac{T}{N}$ ，其中 $r$ 固定， $r = 0, 1, 2, \dots, m$ 若相关函数

具有各态历经性，则对任意 $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{N-r} \sum_{k=1}^{N-r} X\left(k \frac{T}{N}\right) X\left(k \frac{T}{N} + r \frac{T}{N}\right) - R_x(\tau) \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

$$\text{因而, } R_x\left(r \frac{T}{N}\right) \approx \frac{1}{N-r} \sum_{k=1}^{N-r} x\left(k \frac{T}{N}\right) x\left((k+r) \frac{T}{N}\right)$$

此式要求 $N, N-r$ 很大，而 $\frac{T}{N}$ 很小，通常取

$$m = \frac{N}{5} \sim \frac{N}{2} \text{ 便能符合 } N-r \text{ 很大的要求。}$$

**6.5, 6.7, 6.12, 6.21**