# 华中科技大学 2022 ～2023 学年第二学期

# 《数学物理方程与特殊函数》考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: 2023.05.14　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

(答案请写在答题纸上)

**一 (满分 15 分)** 设 $a$ 是正常数，用分离变量法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 + 2\cos\frac{3\pi x}{l}, u_t(x,0) = 2 + \cos\frac{5\pi x}{l}. \end{cases}$$

**二 (满分 10 分)** 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y,\ x^2 + y^2 < 1, \\ u(x,y)|_{x^2+y^2=1} = 0. \end{cases}$$

**三 (满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6(x-1), \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(2,t) = 1, \\ u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{4} + x^3 - 3x^2 + x. \end{cases}$$

**四 (满分 10 分)** 设$\phi(x), \psi(x)$为已知函数满足$\phi(0) = \psi(0)$，利用行波法求解弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad -t < x < t,\ t > 0, \\ u(x,x) = \phi(x), \quad u(-x,x) = \psi(x), \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

**五 (满分 15 分)** 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}$， $\mathcal{F}^{-1}[\frac{\sin m\lambda}{\lambda}]=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<m,\\ 0, & |x|>m.\end{cases}$

**六 (满分 10 分)** 用积分变换法求解如下问题:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}, \quad 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u_x(0,t)=f(t),\\ u(x,0)=0,\\ |u(x,t)|\leqslant M.\end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}x}]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

**七 (满分 15 分)** (每一问5分) 若$u$是区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$上的二阶连续可微函数，且满足$\Delta u(x,y,z)\geqslant 0$ ($\forall$ $(x,y,z)\in\Omega$), 则称$u$在$\Omega$上是下调和的。

1. 若$u$是$\mathbb{R}^3$上的下调和函数，证明对于任意的$M\in\mathbb{R}^3, r>0$，不等式
$$u(M)\leqslant\frac{3}{4\pi r^3}\iiint_{B(M,r)}u\,dxdydz$$
成立，其中$B(M,r)$表示以$M$为球心、$r$为半径的球。
2. 若$u$为$\mathbb{R}^3$上的调和函数，证明$u^2$ 是$\mathbb{R}^3$上的下调和函数。
3. 若$u$为$\mathbb{R}^3$上的调和函数，且满足
$$\iiint_{\mathbb{R}^3}u^2dxdydz<+\infty,$$
证明$u\equiv 0$. [提示：可利用第1小题和第2小题结论。]

**八 (满分 10 分)** 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 $m$ 个正零点，用固有函数法求解如下问题：

$$\begin{cases}u_t=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+1-r^2, \quad 0<r<1, \quad t>0,\\ u(1,t)=0,\ |u(0,t)|<+\infty, \quad t>0,\\ u(r,0)=0, \quad 0\leqslant r<1.\end{cases}$$

提示：$J_0'(x)=-J_1(x)$, $(x^nJ_n(x))'=x^nJ_{n-1}(x)$.

**二 (满分 10 分)** 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=y, \ x^2+y^2<1, \\ u(x,y)|_{x^2+y^2=1}=0. \end{cases}$$

解：设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $x^2+y^2=r^2<1$

原方程化为 $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=r\sin\theta \quad (0<r<1) \\ u|_{r=1}=0 \end{cases}$

**四 (满分 10 分)** 设$\phi(x),\psi(x)$为已知函数满足$\phi(0)=\psi(0)$，利用行波法求解弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t), \quad -t<x<t, \ t>0, \\ u(x,x)=\phi(x), \quad u(-x,x)=\psi(x), \quad x\geqslant 0. \end{cases}$$

解：设 $u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$

$u(x,x)=f(0)+g(2x)=\phi(x) \Rightarrow g(x)=\phi(\frac{1}{2}x)-f(0)$

$u(-x,x)=f(-2x)+g(0)=\psi(x) \Rightarrow f(x)=\psi(-\frac{1}{2}x)-g(0)$

$u(x,t)=\psi[-\frac{1}{2}(x-t)]+\phi[\frac{1}{2}(x+t)]-\phi(0)$

**七 (满分 15 分)** (每一问5分) 若$u$是区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$上的二阶连续可微函数，且满足$\Delta u(x,y,z)\geqslant 0$ $(\forall\,(x,y,z)\in\Omega)$, 则称$u$在$\Omega$上是下调和的。

1. 若$u$是$\mathbb{R}^3$上的下调和函数，证明对于任意的$M\in\mathbb{R}^3, r>0$，不等式
$$u(M)\leqslant\frac{3}{4\pi r^3}\iiint_{B(M,r)}u\,dxdydz$$
成立，其中$B(M,r)$表示以$M$为球心、$r$为半径的球。
2. 若$u$为$\mathbb{R}^3$上的调和函数，证明$u^2$是$\mathbb{R}^3$上的下调和函数。
3. 若$u$为$\mathbb{R}^3$上的调和函数，且满足
$$\iiint_{\mathbb{R}^3}u^2\,dxdydz<+\infty,$$
证明$u\equiv 0$. [提示：可利用第1小题和第2小题结论。]

解：(1)

由球面平均函数

$f(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r^M}u\,dS$

$f'(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r^M}\frac{\partial u}{\partial n}dS$

$=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\Omega}\Delta u\,d\Omega\geq 0$

$\therefore f(r)$单调递增

$\therefore f(r)\geq f(0)=u(M)$

$\therefore u(M)\leq\frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r^M}u\,dS$

$\int_0^r u(M)\cdot 4\pi t^2\,dt\leq\int_0^r\left(\int_{S_t^M}u\,dS\right)dt$

$\Rightarrow u(M)\leq\frac{3}{4\pi r^3}\iiint_{B(M,r)}u\,dxdydz$

(2) 即证 $\Delta(u^2)\geq 0$

$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

$\frac{\partial u^2}{\partial x}=2uu_x$

$\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=2[(u_x)^2+uu_{xx}]$

$\Delta(u^2)=2[(u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2]+2u\Delta u=2[(u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2]\geq 0$

(3) $$u^2(M) \le \frac{3}{4\pi r^3} \iiint\limits_{B(M,r)} u^2 \,dx\,dy\,dz$$

当 $r \to +\infty$ 时，由于 $\iiint\limits_{R^3} u^2 \,dx\,dy\,dz < +\infty$

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{3}{4\pi r^3} \iiint\limits_{B(M,r)} u^2 \,dx\,dy\,dz = 0$$

$\therefore \quad u^2(M) \le 0 \rightarrow u(M) \equiv 0$