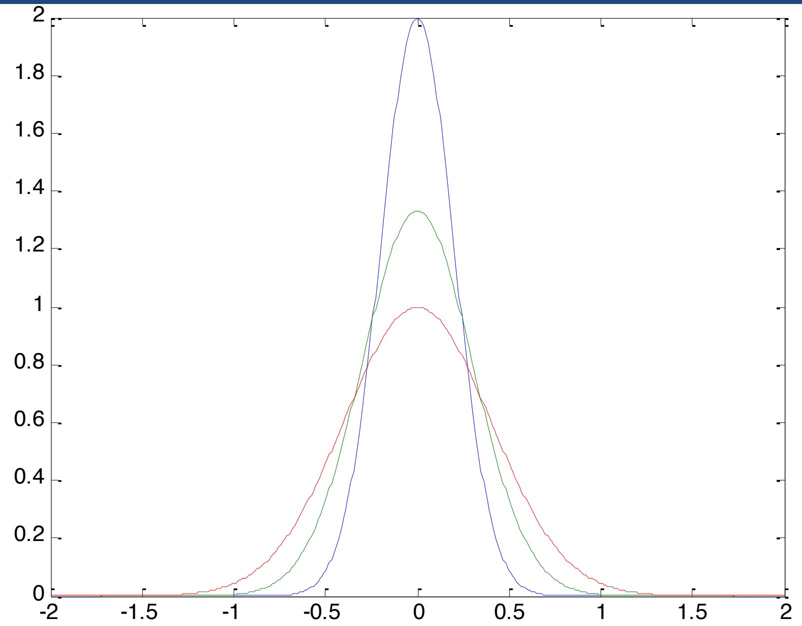
正态过程



Outline

- 多维随机变量的定义与协方差矩阵
- 多维正态随机变量的性质
- 正态随机过程的定义
- 正态随机过程的性质

二维正态分布

二维正态随机变量的概念：

若随机变量X_1，X_2的联合概率密度函数可以表示为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2})^2]\}$$

则称X_1，X_2为二维正态随机变量。其中ρ为X_1和X_2的相关函数。

二维正态分布

对于上述二维随机变量，其边际密度可表示为

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

因此其边际分布为一维正态分布 $X_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$，$X_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$

二维正态分布

二维正态分布的协方差矩阵可表示为

$$C=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

二维正态分布的协方差矩阵具有如下性质：

1. 实对称；

2. 正定阵

3. 其逆矩阵可表示为 $C^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & -\dfrac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2}\\ -\dfrac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}\end{pmatrix}$

二维正态分布

二维正态随机变量的联合密度也可表示为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi|C|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})'C^{-1}(\vec{x}-\vec{a})\}$$

其中 $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\quad \vec{a}=(a_1,a_2)$

正定矩阵

定义：对 $\forall \vec{X} \neq 0$ 有 $\vec{X}^T A \vec{X} > 0$ ，则称A为正定矩阵。

性质：

1）所有特征值均大于0；

2）存在正交阵P，使得

$$PAP' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \mathrm{O} & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

正交矩阵：

1）$Q^{-1} = Q^T$

2）$|Q| = \pm 1$

n维正态分布

n维正态随机变量的定义：

若n维随机变量的联合密度函数为

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})C^{-1}(\vec{x}-\vec{a})'\}$$

则称 $\vec{X}$ 为**n维正态随机变量**，其中**C**为**n维实对称正定阵**。记为 $\vec{X} \sim N(\vec{a}, C)$

n维随机变量的性质

1.若 $\vec{X} \sim N(\vec{a}, C)$ **，则存在n阶正交矩阵A，使得向量** $\vec{Y} = (\vec{X} - \vec{a})A'$ **中的分量$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$是独立的随机变量，且Y_i为一维正态分布$N(0,d_i)$。**

证明

n维正态分布

2、 $\vec{X} \sim N(\vec{a}, C)$ 的特征函数为 $g_{\vec{X}}(\vec{t}) = e^{i\vec{a}\vec{t}' - \frac{1}{2}\vec{t}C\vec{t}'}$

证明

3、n维正态分布中任意m维y向量亦为正态分布

证明

n维正态分布

4、n元正态随机变量的线性变换也为正态随机变量。

即若 $\vec{X}$ 为正态，则 $\vec{Y}=\vec{X}A+\vec{b}$，亦为正态随机变量。

其中**ACA'**正定

只需证明其特征函数亦为正态特征函数

5、若 $\vec{X}$ 为**n**维正态随机变量，那么$\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_n}$相互独立的充要条件是两两互不相关。

n维正态分布

定义：

若随机过程X(t)的任意n维分布都是n维正态分布，则称X(t)是正态随机过程（高斯过程）。

正态随机过程的性质：

1. 若正态随机过程为宽平稳，则必为严平稳。

宽平稳特点

- X(t)的期望为常数，与时间原点无关
- X(t)的相关函数只是时间差t的函数

2. 正态随机过程通过线性系统，其输出亦为正态随机过程。

例题

例题1：

设平稳正态过程$X(t)$均值为0，相关函数$R_X(\tau)=(e^{-2|\tau|})/4$，求对给定时刻$t$， $X(t)$的值在0.5和1之间的概率。

例题2：

$X(t)=A\cos w_0 t+B\sin w_0 t$，其中$A$与$B$为两个独立的正态随机变量，且$EA=EB=0$，$EA^2=EB^2=\sigma^2$，$w_0$为常数，求$X(t)$的一维、二维密度函数。