华中科技大学 2023 ～2024 学年第一学期

《数学物理方程与特殊函数》考试试卷(B卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: 2024.01.09　考试时长: 150 分钟

院(系): ________　专业班级: ________

学　号: ________　姓　　名: ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

一 **(满分 15 分)** 设 a 是正常数，用分离变量法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0,2), \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 2\sin\frac{\pi x}{4} + 5\sin\frac{3\pi x}{4}. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

二 **(满分 10 分)** 用固有函数法求解如下**扇形区域**上的定解问题：

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = r\cos\frac{3\theta}{2},\ 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}, \\ u_\theta(r,0) = 0, \quad u_\theta(r,\frac{2\pi}{3}) = 0, \\ u(1,\theta) = 0, \quad |u(r,\theta)| < +\infty. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

三 **(满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 1,\ u(\pi,t) = \pi, \\ u(x,0) = \cos\frac{3x}{2} + \cos x + x + 1,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 利用行波法求解如下无界弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ -\infty < t < +\infty, \\ u|_{x=t} = \cos x, \quad u_t|_{x=3t} = \sin x. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

五 (满分 15 分) $M > 0$ 为常数，用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2e^{-t}\sin x \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad |u(x,t)| < M, \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = -\sin x. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$.

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

六 (满分 10 分) 求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = t u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-2|x|}. \end{cases}$$

[提示：$\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{(a^2+\lambda^2)},\ a > 0,\ \mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},\ t > 0.$]

得　分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (每一问5分, 如本页写不下,答案请写在背面)

记 D_r 是以原点为圆心, r 为半径的圆盘, C_r 是以原点为圆心, r 为半径的圆周. 设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界光滑闭曲线, Γ 的外部区域记为 Ω. 给定常数 $r_0>0$, 满足 Γ 包含在圆盘 D_{r_0} 中, 即 $\Gamma\subset D_{r_0}$. 假设 u 在 $\Omega+\Gamma$ 上连续可微. 证明：

1. 若 u 满足如下的狄氏外问题：

$$\begin{cases} \Delta u=0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u|_{\Gamma}=0, \\ \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} u(x,y)=0, \end{cases}$$

试由极值原理证明： $u\equiv 0$.

2. 若 u 是 Ω 上的调和函数(无穷远点除外), 证明：对任意的 $r\geq r_0$, 有

$$\int_{C_r}\frac{\partial u}{\partial n}dS_r=C \text{ (常数, 与 } r\text{无关)},$$

并给出常数 C 的（积分）表达式. 其中 n 为圆周的单位外法方向.

3. 若 u 是 Ω 上的调和函数(无穷远点除外), 对 $r>r_0$, 记 $\bar{u}(r):=\frac{1}{2\pi r}\int_{C_r}udC_r=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)d\theta$, 证明：存在常数 C_2(与 r无关), 使得

$$\bar{u}(r)=\frac{C}{2\pi}\ln r+C_2, \quad \text{对任意的 } r\geq r_0.$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

八 (满分 10 分) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，由分离变量法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u|_{r=1} = 0, \quad |u(r,t)| < \infty, \\ u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 1 - r. \end{cases}$$

[提示：$(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$, $J_0'(x) = -J_1(x)$.]