华中科技大学 2021 ～2022 学年第二学期

《数理方程与特殊函数》考试试卷(B卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: 2022.05.15　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得　分	
评卷人	

一 **(满分 15 分)** 用分离变量法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos(2\pi x), \quad u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

二 **(满分 10 分)** 设 a 是正常数, 用固有函数法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \sin(3\pi x),\ 0 < x < \frac{1}{2},\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\frac{1}{2}, t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

三 **(满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\sin x, \quad 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi, \\ u(0,y)=0, \qquad u(\pi,y)=\pi, \\ u(x,0)=x-\sin x, \qquad u(x,\pi)=\sin x+x. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 利用行波法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0,\ x \geqslant 0, \\ u|_{x=0} = h(t). \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

五 (满分 15 分) 用积分变换法求解如下问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos 2t, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \frac{1}{4}, \quad |u_(x,t)| \leqslant M, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 < t < a. \end{cases}$

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+a^2}] = \cos at.$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

六 (满分 10 分) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + (1+t)u, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

[提示：$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.]

得　分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (第1小题5分, 第2小题10分, 如本页写不下, 答案请写在背面)

1. 用试探法求解圆域内的 Poisson 方程

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=9r, \quad r<1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1}=4. \end{cases}$$

2. 设 Ω 为三维空间中的有界区域, Γ 是其边界. 若 u 是 $\Omega+\Gamma$ 上的二阶连续可微函数且满足: $\triangle u\geqslant 0$, 试证明: 对 Ω 中的任意一点 M_0,

$$u(M_0)\leqslant -\frac{1}{4\pi}\int\int_\Gamma u(M)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r_{MM_0}})-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}dS,$$

其中 r_{MM_0} 表示点 M_0 到点 M 的距离.

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

八 (满分 10 分) 用分离变量法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = 2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u), \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1,t) = 0, \quad |u(0,t)| < +\infty, \\ u(r,0) = r^3 - r. \end{cases}$$

提示: $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$, $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$.