华中科技大学 2022 ～2023 学年第二学期

《数学物理方程与特殊函数》考试试卷(B卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: 2023.05.14　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得　分	
评卷人	

一 **(满分 15 分)** 设 a 是正常数，用分离变量法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 2 + \cos \pi x, u_t(x,0) = 1 + \cos 3\pi x. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

二 **(满分 10 分)** 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=2xy,\ x^2+y^2<1, \\ u(x,y)|_{x^2+y^2=1}=0. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

三 **(满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6(x-1), \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 1,\ u(2,t) = -2, \\ u(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{4} + x^3 - 3x^2 + x. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 利用行波法求解弦振动问题：

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -at < x < at, t > 0 \\
u(x, \frac{x}{a}) = f(x), \quad u(-x, \frac{x}{a}) = g(x), \quad x \geqslant 0, \\
f(0) = g(0).
\end{cases}
$$

得　分	
评卷人	

五 (满分 15 分) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$，　$\mathcal{F}^{-1}[\frac{sinm\lambda}{\lambda}] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < m, \\ 0, & |x| > m. \end{cases}$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

六 (满分 10 分) 用积分变换法求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = f(t), \\ u(x,0) = 0, \\ |u(x,t)| \leqslant M. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}x}] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

得　分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (每小题5分, 如本页写不下, 答案请写在背面)

若u是区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上的二阶连续可微函数，且满足$\Delta u(x,y,z) \geqslant 0$ $(\forall\ (x,y,z) \in \Omega)$, 则称$u$在$\Omega$上是下调和的。

1. 若u是$\mathbb{R}^3$上的下调和函数，对任意的$M \in \mathbb{R}^3, r > 0$，令

$$f(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{S(M,r)} u dx dy dz$$

其中$S(M,r)$表示以M为球心、r为半径的球面。证明$f'(r) \geqslant 0$。

2. 若u为$\mathbb{R}^3$上的调和函数，$F(t)$是$\mathbb{R}$上的二阶连续可微函数，且$F''(t) \geqslant 0$ $(\forall\ t \in \mathbb{R})$，证明$F(u)$ 是$\mathbb{R}^3$上的下调和函数。

3. 若u为$\mathbb{R}^3$上的调和函数，且满足

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} u^2 dx dy dz < +\infty,$$

证明$u \equiv 0$. [提示：可利用第1小题和第2小题的结论。]

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

八 (满分 10 分) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，用固有函数法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + 1 - r^2, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(r,0) = 0, \quad 0 \leqslant r < 1. \end{cases}$$

提示：$J_0'(x) = -J_1(x)$, $(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$.