



华中科技大学 2021 ~2022 学年第二学期

《数理方程与特殊函数》考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2022.05.15 考试时长: 150 分钟

院(系): 专业班级:

学 号: 姓 名:

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得 分	
评卷人	

一 (满分 15 分) 用分离变量法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & u_x(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 1 + 6\pi \cos(3\pi x). \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

二 (满分 10 分) 设 a 是正常数, 用固有函数展开法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 5 \sin(5\pi x), & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

得 分	
评卷人	

三 (满分 15 分) 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \pi, \\ u(0, y) = -1, & u_x(\frac{\pi}{2}, y) = 1, \\ u_y(x, 0) = 0, & u(x, \pi) = x - 1. \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 设 a 是正常数, 利用行波法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = 0, x \geq 0, \\ u_x|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

得 分	
评卷人	

五 (满分 15 分) 用拉普拉斯变换求解如下问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos t, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

提示: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 < t < a. \end{cases}$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+a^2}] = \cos at$.

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

六 (满分 10 分) 用傅里叶变换求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 3t^2 u, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases}$$

[提示: $\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$]

得 分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (第1小题5分, 第2小题10分.)

1. 用试探法求解环域内的 Laplace 方程:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 0, & 1 < r < 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u|_{r=1} = 0, & u|_{r=2} = 1. \end{cases}$$

2. 设 Ω 为三维空间中的有界区域, 若 u 是 Ω 中的二阶连续可微函数且满足: $\Delta u \geq 0$, 试证明: 对 Ω 中的任意一个以 M_0 为心, 以 a 为半径的球 $B_a(M_0)$, Γ_a 是 $B_a(M_0)$ 的边界, 都有

$$u(M_0) \leq \frac{1}{4\pi a^2} \int \int_{\Gamma_a} u dS.$$

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

八 (满分 10 分) 用分离变量法求解如下问题(若答题区域不够, 可在背面答题):

$$\begin{cases} u_t = 4(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - \frac{4}{r^2}u), & 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1, t) = 0, \quad |u(0, t)| < +\infty, \\ u(r, 0) = 1 - r^2. \end{cases}$$

提示: $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$, $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$, $J_0(0) = 1$,
 $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$.