《数理方程与特殊函数》练习册

（第十版）

练习 一

姓名: ________ 学号: __________ 班级: ________ 得分: _______

1. 写出长度为 L 的弦振动的边界条件和初值条件:

   (1) 端点 $x=0$, $x=L$ 是固定的;

   (2) 初始位移为 $f(x)$;

   (3) 初始速度为 $g(x)$;

   (4) 弦上任何一点处, 在时刻 t 时的位移是有界的.

2. 写出长度为 L 的弦振动的边界条件:

   (1) 在端点 $x=0$ 处，弦是移动的，由 $g(t)$ 给出；

   (2) 在端点 $x=L$ 处，弦不固定地自由移动.

3. 长度为 L 的各向同性均匀细长导热体, 已知其侧面绝热, 两端保持 0 度, 初始温度分布为 $u|_{t=0}=\varphi(x)$ 且无热源，试写出相应的定解问题.

4. 下列偏微分方程哪些是线性的, 哪些是非线性的? 它们分别是几阶偏微分方程? 哪些偏微分方程含有自由项?

(1) $u_t=u_{xx}+u_{yy}+\sin(x^2+y^2)$;

(2) $u_t+uu_x=0$ (无粘性Burgers方程)；

(3) $u_{tt}+2u_t=u_{xx}$ (电报方程);

(4) $u_t+uu_x+u_{xxx}=0$ (KdV方程);

(5) $u_{xx}+u_{yy}=y\sin x$.

练习 二

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 证明 $u(x,t)=e^{-8t}\sin 2x$ 是如下定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, \\ u(x,0)=\sin 2x \end{cases}$$

的古典解.

2. 设 F, G 是二次可微函数，

(1) 证明 $u(x,t) = F(2x+5t) + G(2x-5t)$ 是方程 $4u_{tt} = 25u_{xx}$ 的通解;

(2) 求其满足定解条件

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = \sin 2x,\ u_t(x,0) = 0$$

的特解.

3. (1) 求二阶偏微分方程 $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = x^2 y$ 的通解;

(2) 求该方程满足定解条件 $u(x,0) = x^2,\ u(1,y) = \cos y$ 的特解.

4. 验证函数 $u = f(xy)$ 是方程 $xu_x - yu_y = 0$ 的解, 其中 f 是任意连续可微函数.

练习 三

姓名: ________ 学号: __________ 班级: ________ 得分: _______

1. 写出下列固有值问题的固有值和固有函数(无需给出计算步骤):

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

2. 求如下定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 3\sin\frac{3\pi x}{2l} + 6\sin\frac{5\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. 写出下列固有值问题的固有值和固有函数(无需给出计算步骤):

$$\begin{cases} X''(x) + (\lambda + 2)X(x) = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

4. 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sqrt{\pi^2 - 2}\sin \pi x. \end{cases}$$

练习 四

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x(l-x), \quad 0 < x < l. \end{cases}$$

2. 求下列固有值问题的固有值和固有函数:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

3. 求如下定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(2,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 4\cos\frac{5\pi x}{4}, \quad 0 < x < 2. \end{cases}$$

4. 求如下定解问题的解:

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xx} + 2u_x,\ 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \\
u(x,0) = e^{-x}\sin\pi x, \quad 0 < x < 1.
\end{cases}
$$

练习 五

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u_x(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 1 + \cos 3\pi x,\ u(x, 1) = 3\cos 2\pi x. \end{cases}$$

2. 求下列定解问题的解:

$$
\begin{cases}
u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 < \theta \le 2\pi, \\
u(1, \theta) = 0, \quad u(2, \theta) = u_0, \quad 0 < \theta \le 2\pi \\
u(r, 0) = u(r, 2\pi).
\end{cases}
$$

3. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u(r, 0) = 0, \quad u(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ u(1, \theta) = \theta(\frac{\pi}{2} - \theta), \quad |u(0, \theta)| < +\infty. \end{cases}$$

4. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\pi,\ 0<y<+\infty, \\ u(0,y)=0, \quad u(\pi,y)=0, \quad 0<y<+\infty, \\ u(x,0)=\sin 5x, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y)=0. \end{cases}$$

练习 六

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos \pi x, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

2. 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t\sin\frac{\pi x}{l},\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l. \end{cases}$$

3. 求如下定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2x,\ x^2 + y^2 < 1, \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1. \end{cases}$$

4. 求如下定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = r\sin\theta, \quad 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi, \\ u(r,0) = 0, \quad u(r,\pi) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ u(1,\theta) = 0, \quad |u(0,\theta)| < +\infty. \end{cases}$$

练习 七

姓名: ________ 学号: __________ 班级: ________ 得分: _______

1. 求解如下定解问题:

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\
u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 1, \quad t > 0, \\
u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{x}{l}, \quad u_t(x,0) = x(l-x) \quad 0 < x < 1.
\end{cases}
$$

2. 求解如下定解问题:

$$
\begin{cases}
u_t = 8u_{xx} + \cos t + e^t \sin \frac{x}{2},\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\
u(0,t) = \sin t, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\
u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi.
\end{cases}
$$

3. 求如下定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x - 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x}\sin \pi x + \frac{x}{2} + \frac{1-e^{-2x}}{2(1-e^{-2})}, \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

练习 八

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 4 + 2e^{-x}, \quad 0 < x < 3,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 1, \quad u(3,t) = -18 - e^{-3}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = -2x^2 - e^{-x}, \quad 0 < x < 3. \end{cases}$$

2. 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6(x-1),\ 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{4} + x^3 - 3x^2 + x, \quad 0 < x < 2. \end{cases}$$

3. 求如下定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(0, y) = 1, \quad u(1, y) = 2, \quad 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 1 + x, \quad u(x, 1) = 1 + x - \pi^{-2} \sin \pi x, \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

练习 九

姓名: ____________ 学号: ______________ 班级: ____________ 得分: __________

1. 求解如下特征值问题的特征值与特征函数:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi). \end{cases}$$

2. 证明固有值问题:

$$\begin{cases} x^2y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$$

的固有函数系 $\{y_n(x):\ n = 1, 2, \cdots\}$ 在区间 $[1,\ e]$ 上带权 $\frac{1}{x}$ 正交.

3. 设 $u(x,t)$ 是热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

的古典解, 试证明 $u(x,t) \equiv 0$. (提示: 方程乘以 u 后对 x 积分)

4. 设 $u(x,t)$ 是弦振动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

的古典解, 试证明 $u(x,t) \equiv 0$. (提示: 方程乘以 u_t 后对 x 积分)

练习 十

姓名: __________　学号: ____________　班级: __________　得分: ________

1. 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x^2, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

2. 求解如下定解问题:

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx} + at + x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\
u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin x, \quad -\infty < x < +\infty.
\end{cases}
$$

3. 用行波法求下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -at < x < 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = \phi(t), \quad u|_{x+at=0} = \psi(x). \end{cases}$$

练习 十一

姓名: ________ 学号: __________ 班级: ________ 得分: _______

1. 求解以下三维波动方程的Cauchy问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = xy, \quad u_t(x, y, z, 0) = xz, \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

2. 求解以下二维波动方程的Cauchy问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = x^2(x + y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

3. 类比一维波动方程柯西问题的齐次化原理, 写出三维波动方程柯西问题的齐次化原理.

练习 十二

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \cos x, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

2. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 1, \quad |u(x,t)| \le M, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0,t) = A\sin\omega t, \quad |u(x,t)| \leq M, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

4. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos 3\pi x, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

练习 十三

姓名: ____________ 学号: ______________ 班级: ____________ 得分: __________

1. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = t^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

2. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + ku, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

3. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$
\begin{cases}
u_t + u_x + u = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\
u(0,t) = 0, \\
u(x,0) = 1.
\end{cases}
$$

4. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2tu, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

练习 十四

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 用 K_R 表示 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为中心以 R 为半径的开球, Γ_R 表示 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为中心以 R 为半径的球面. 若 u 是如下定解问题的解:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (x, y, z) \in K_R, \\ u|_{\Gamma_R} = 1 + \sin xy^2z^3, \end{cases}$$
利用极值原理证明: 在 K_R 内, $u > 0$.

2. 记号同上题所述, 再用 $\overline{K_R}$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为中心以 R 为半径的闭球. 若 $0 < r < R$, 且 u 是如下定解问题的解:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (x, y, z) \in K_R \setminus \overline{K_r}, \\ u|_{\Gamma_r} = 1, \quad u|_{\Gamma_R} = 2, \end{cases}$$

证明: 在区域 $K_R \setminus \overline{K_r}$ 内, $1 < u < 2$.

3. 若 $u(r,\theta,\phi)$ 是单位开球 K_1 内的调和函数在极坐标系下的表示, 且它在闭单位求 $\overline{K_1}$ 上连续. 若 $u(r,\theta,\phi)$ 在上半单位球面上为 $1-\sin\theta$, 在下半单位球面上恒为 0, 试证明在单位求 K_1 内 $0 < u(r,\theta,\phi) < 1$, 并求 $u(r,\theta,\phi)$ 在 $r=0$ 的值.

练习 十五

姓名: ________ 学号: __________ 班级: ________ 得分: _______

1. 设 D 为平面有界区域, 其边界 C 是分段光滑的封闭曲线. 设 u 在 D 中调和, 且在 $\overline{D} = D \cup C$ 上连续可微, 试证明二维调和函数的积分表达式(其中 n 是区域 D 在边界上的外法向):

$$u(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - \frac{\partial u}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\right] ds, \quad M_0 \in D.$$

2. 在下半平面 $y < 0$ 内求解拉普拉斯方程的边值问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < r < +\infty, \quad -\infty < y < 0, \\ u|_{y=0} = f(x). \end{cases}$$

3. 分别用分离变量法和格林函数法求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 1, \ \ 0 \le \theta < 2\pi, \\ |u(r,\theta)| < +\infty, \\ u(1,\theta) = 2\cos\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

4. 设 A, B, R 为常数, 用试探法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < R, \ \ 0 \le \theta < 2\pi, \\ |u(r,\theta)| < +\infty, \\ u(R,\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

练习 十六

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中以分片光滑封闭曲面Γ为边界的有界区域, 若边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + ku|_\Gamma = g(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Gamma \end{cases}$$

有解(其中常数 $k > 0$, n 是曲面 Γ 的单位外法向), 试证明其解是唯一的(提示: 用格林第一公式).

2. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中任意区域, 函数 u 在 Ω 内二阶连续可微. 若对任何球面 $\Gamma \subset \Omega$, 只要它的内部也包含在 Ω 中, 就有

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

则 u 是 Ω 上的调和函数, 其中 n 是球面 Γ 的单位外法向(提示: 用格林第二公式).

3. 设 u 是 $\mathbb{R}^3$ 上的二阶连续可微函数, 若 $\Delta u \geq 0$, 则称 u 是下调和的. 试证明: u 在 $\mathbb{R}^3$ 中下调和的充分必要条件是对任何球面 Γ 都有:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq 0,$$

这里, n 是球面 Γ 的单位外法向(提示: 用格林公式).

练习 十七

姓名: __________ 学号: ____________ 班级: __________ 得分: ________

1. 证明下列等式成立:

(1) $\frac{d}{dx}[xJ_0(x)J_1(x)] = x[J_0^2(x) - J_1^2(x)]$;

(2) $\int x^2 J_1(x)dx = 2xJ_1(x) - x^2 J_0(x) + C$;

(3) $J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x)$;

(4) $\int x^n J_0(x)dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2 \int x^{n-2}J_0(x)dx$.

2. 计算下列积分:

(1) $\int_0^3 (3-x) J_0(\frac{\mu_2^{(0)}}{3}x)dx$;

(2) $\int_0^R r(R^2-r^2) J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)dr$.

3. 设 $\mu_m^{(1)}$ $(m=1,2,\cdots)$ 是 $J_1(x)$ 的正零点, 将函数 $f(x)=x$ $(0<x<1)$ 展成 $J_1(\mu_m^{(1)}x)$ 的傅立叶–贝塞尔级数.

练习 十八

姓名: ________ 学号: __________ 班级: ________ 得分: _______

1. 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r, \quad 0 < r < 1, \ \ t > 0, \\ u(1,t) = 0, \quad |u(r,t)| < +\infty, \\ u(r,0) = 1 - r^2. \end{cases}$$

2. 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0, \quad 0<r<1, \; 0<z<1, \\ u(1,z)=0, \quad |u(0,t)|<+\infty, \\ u_z(r,0)=0, \quad u(r,1)=1. \end{cases}$$

3. 设 A 为常数, 用固有函数法求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + A, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1,t) = 0, \quad |u(r,t)| < +\infty, \\ u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 0. \end{cases}$$

4. 设 A 为常数, 用固有函数法求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + u, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1,t) = 0, \quad |u(r,t)| < +\infty, \\ u(r,0) = 1 - r. \end{cases}$$