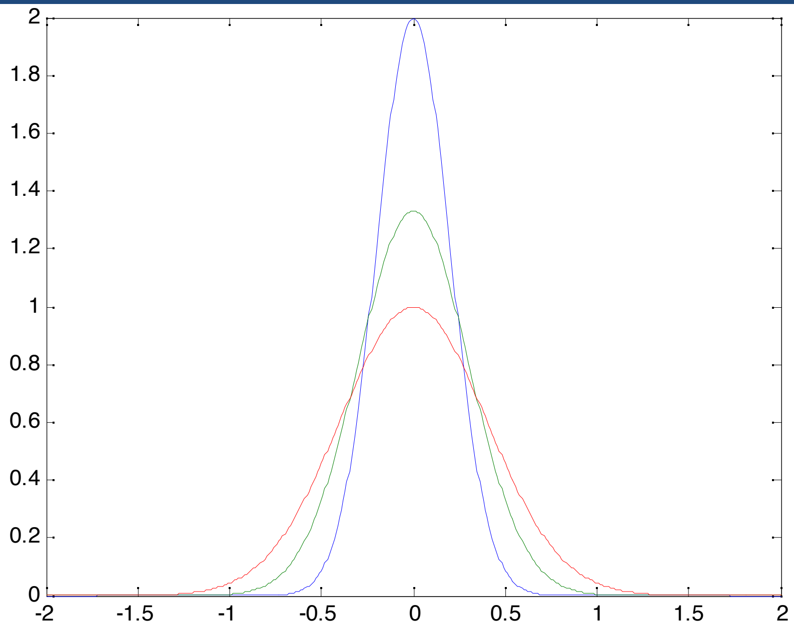
随机过程的概念与基本类型



王非 华中科技大学·电信系

概要

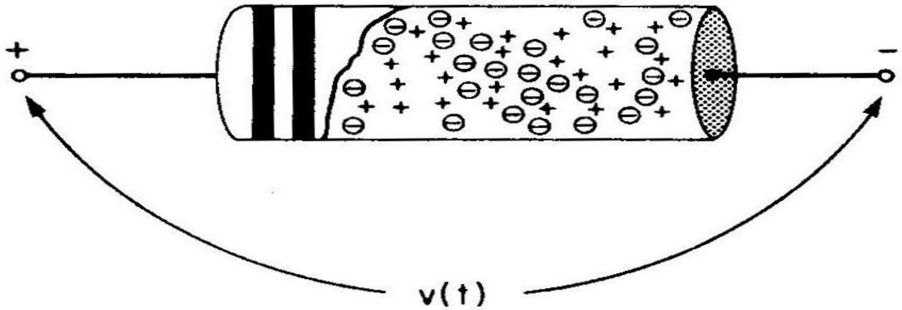
- 随机过程的定义和统计描述
- 随机过程分布律和数字特征
- 复随机过程
- 随机过程基本类型

- **提示：课后学习学时 ≥ 4小时**

随机变量

在每次试验的结果中，以一定的概率取某个事先未知，但为确定的数值。

在实际应用中，我们经常要涉及到在试验过程中随时间t而改变的随机变量。例如，接收机的噪声电压，



此外，还包括:

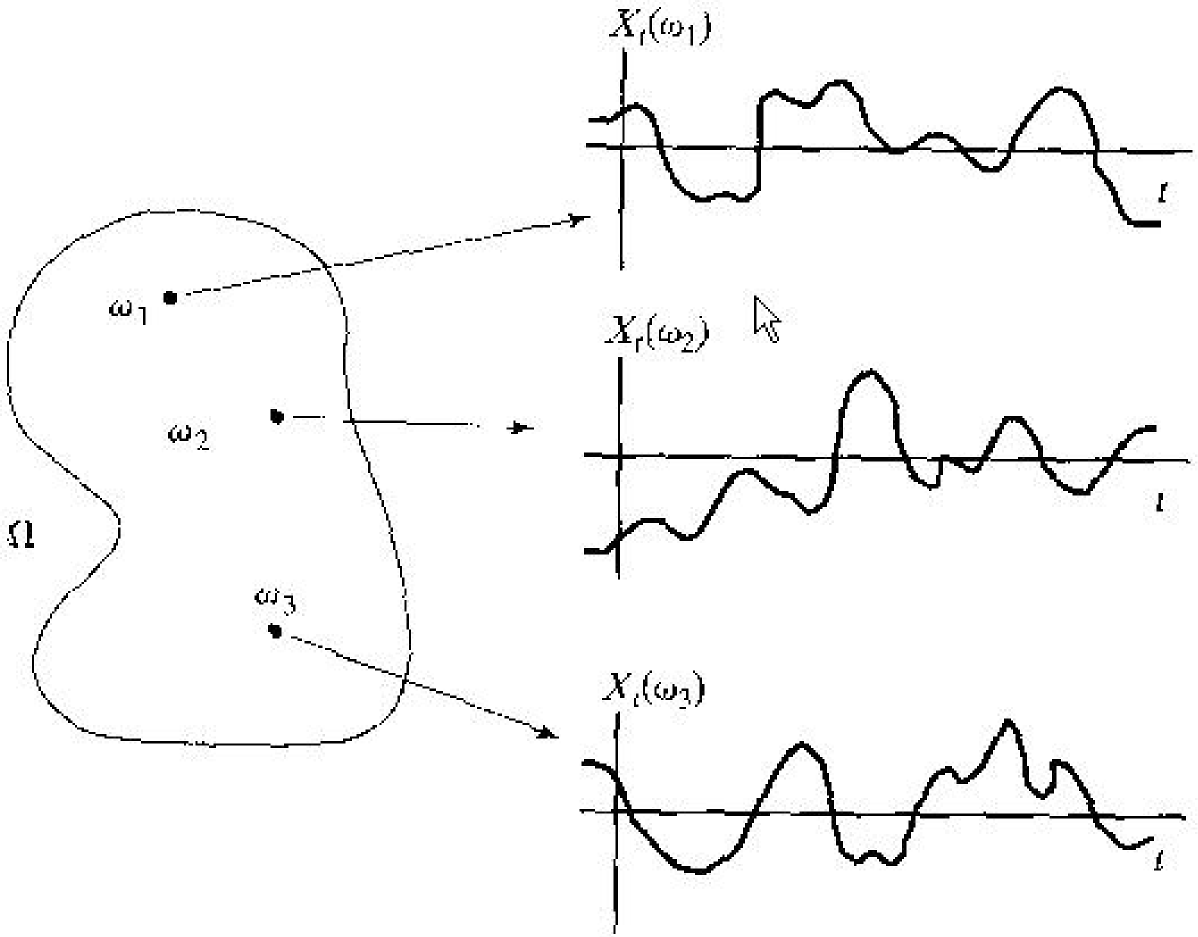
1) 生物群体的增长问题；

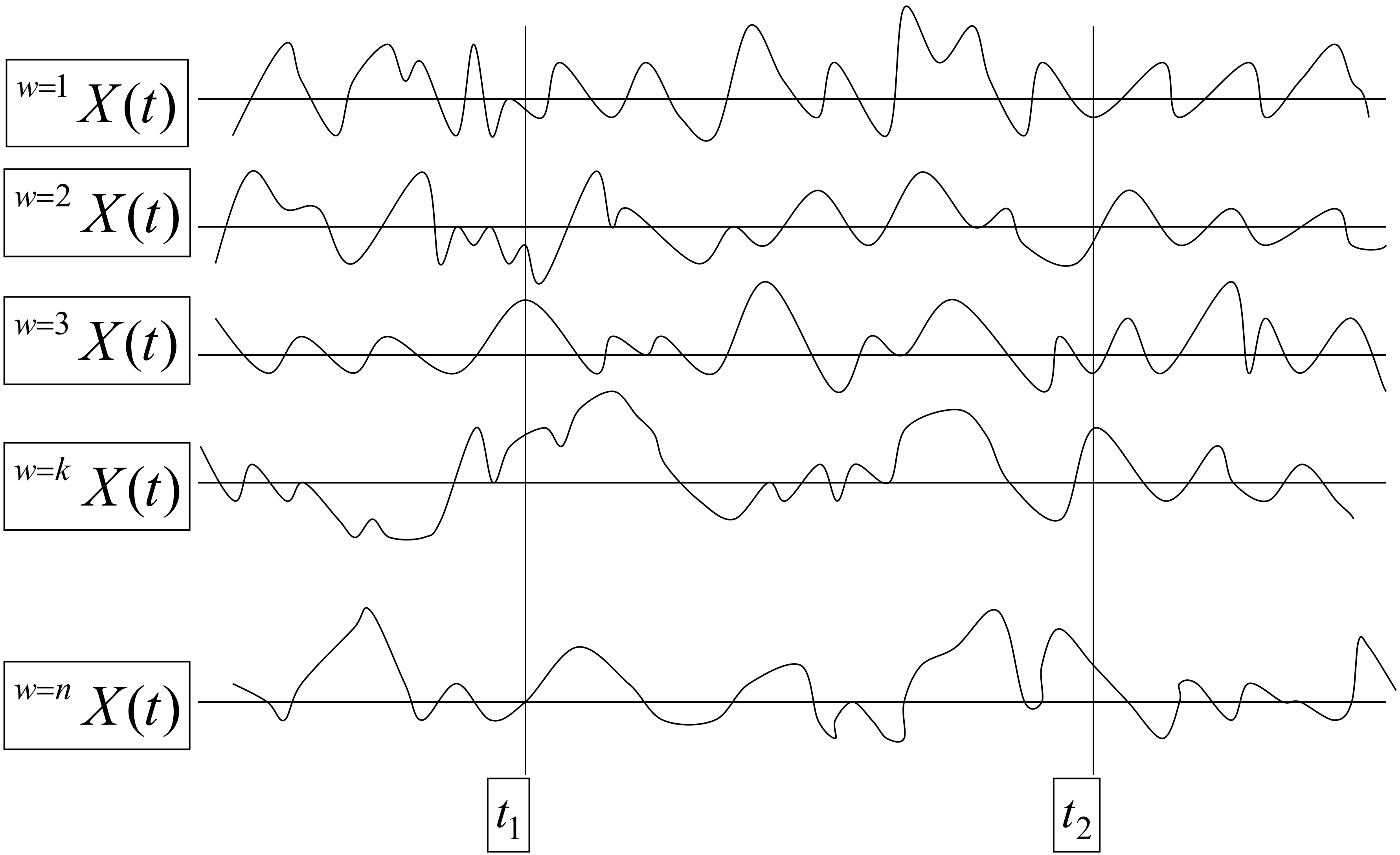
2) 电话交换机在一定时间段内的呼叫次数；

3) 一定时期内的天气预报；

4) 固定点处海平面的垂直振动；

在第W_i次试验中测量获得的噪声电压X_t是一个样本函数




$w\!=\!1$ $X(t)$
$w\!=\!2$ $X(t)$
$w\!=\!3$ $X(t)$
$w\!=\!k$ $X(t)$
$w\!=\!n$ $X(t)$
t_1
t_2

定义 2.1

设（Ω, $\mathscr{F}$, P）是概率空间，T是给定的参数集，若对每个 $t\in T$，有一个随机变量X(t,e)与之对应，则称随机变量族{X(t,e),t ∈ T}是（Ω,F,P）上的**随机过程**。

随机过程{X(t,e),t ∈ T}可以认为是一个**二元函数**。

对固定的t，X(t,e)是（Ω,F,P）上的**随机变量**；

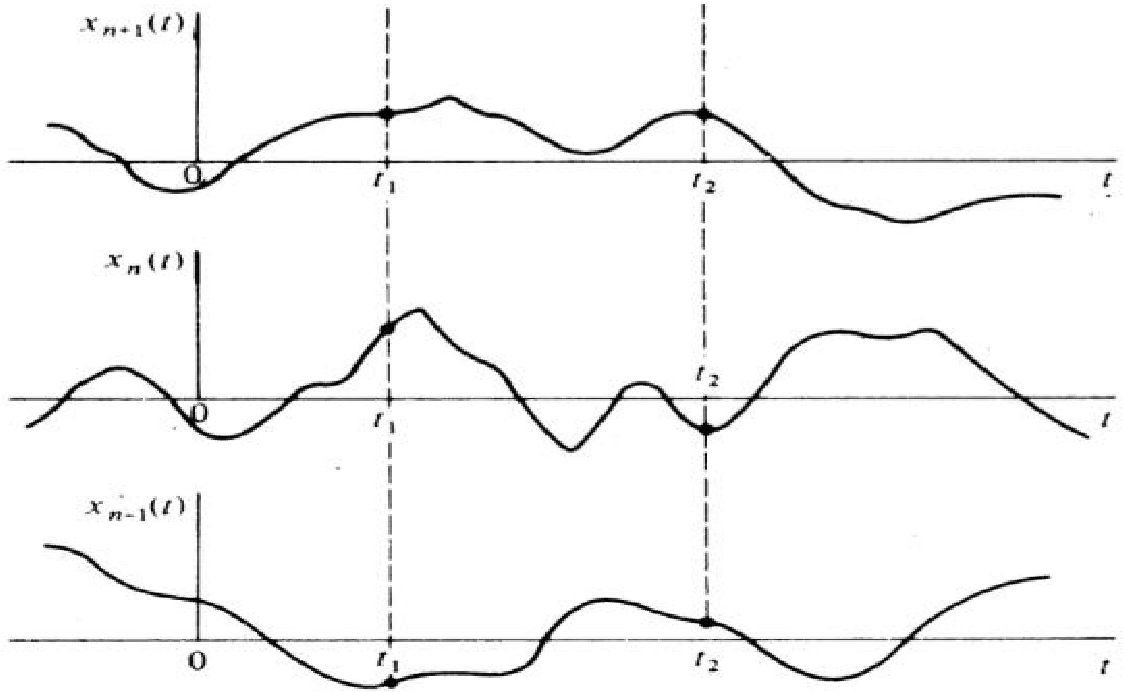
对固定的e， X(t,e)是随机过程{X(t,e),t ∈ T}的一个**样本函数**。

随机过程

X(t)通常表示为在时刻t所处的状态。X(t)的所有可能状态所构成的集合称为**状态空间**或**相空间**。

通常我们可以根据随机变量X(t)在时间和状态上的类型区分随机过程的类型。

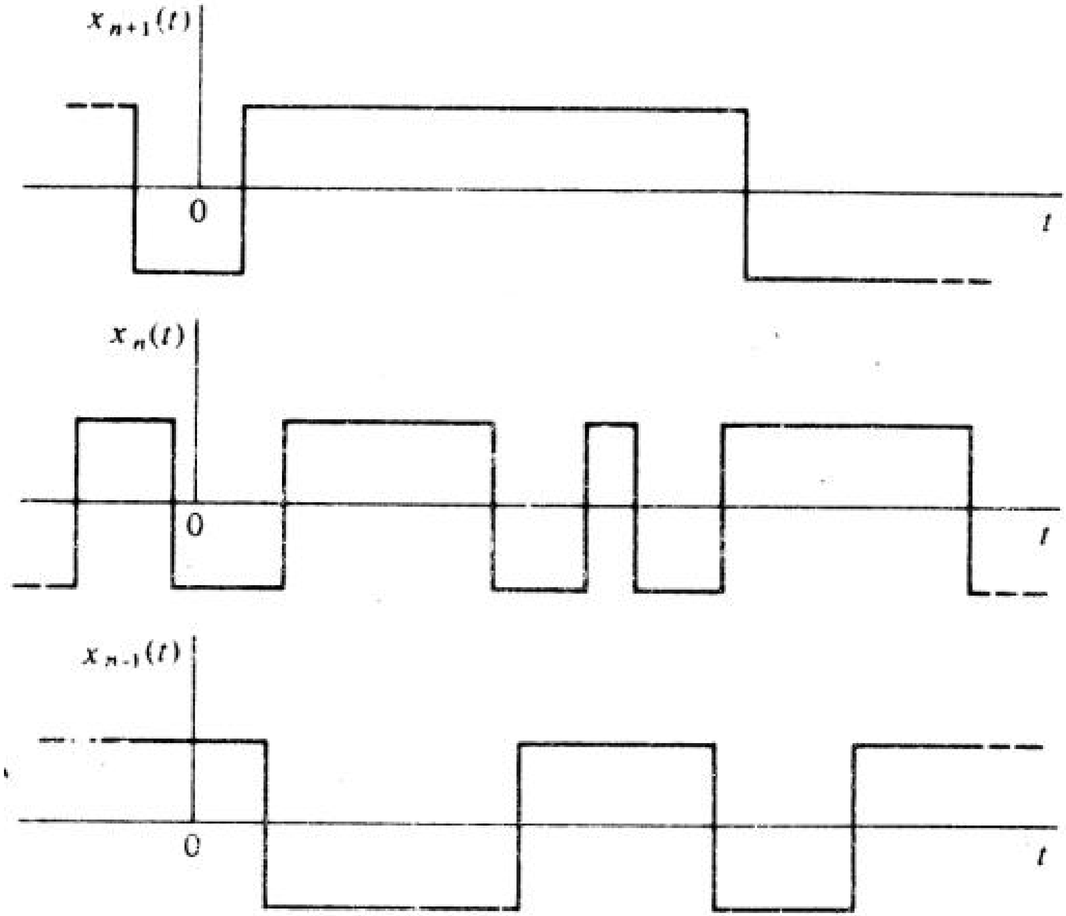
在时间和状态上都连续 → 连续型随机过程



离散随机过程

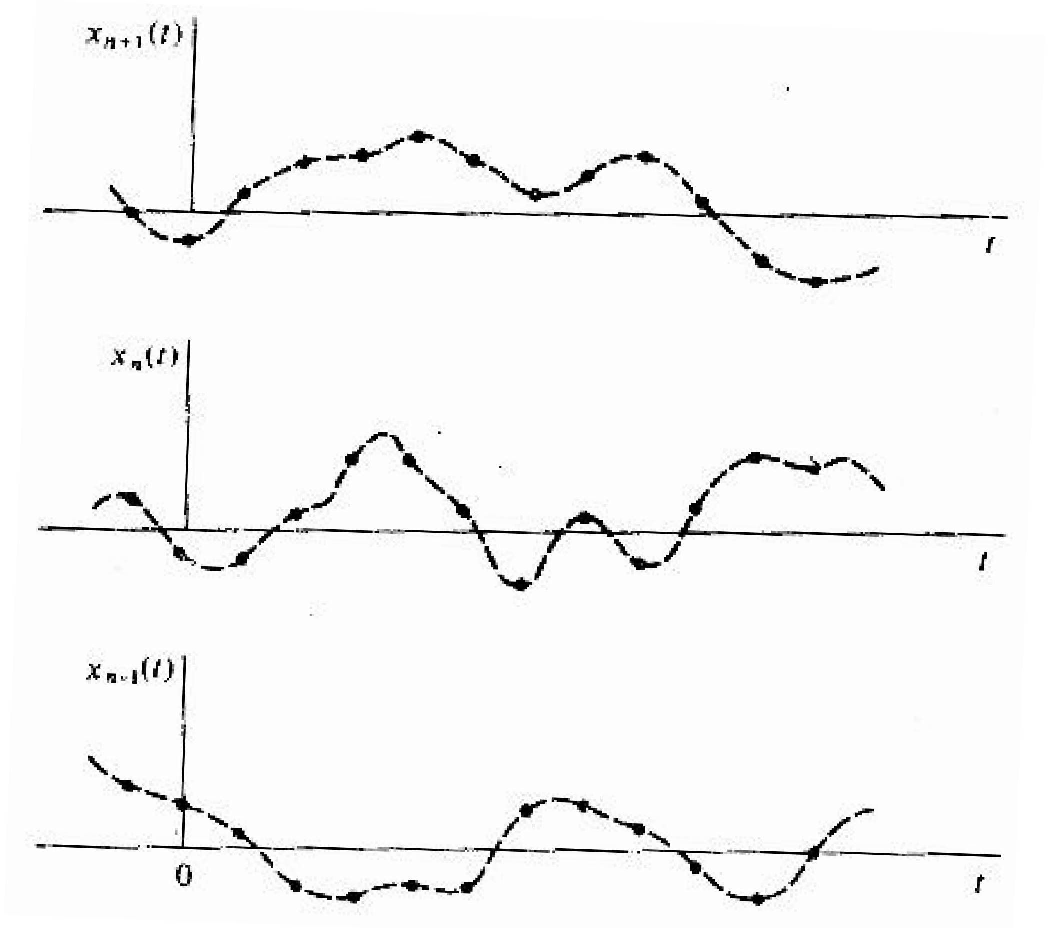
在时间上连续，
状态上离散

离散型随机过程



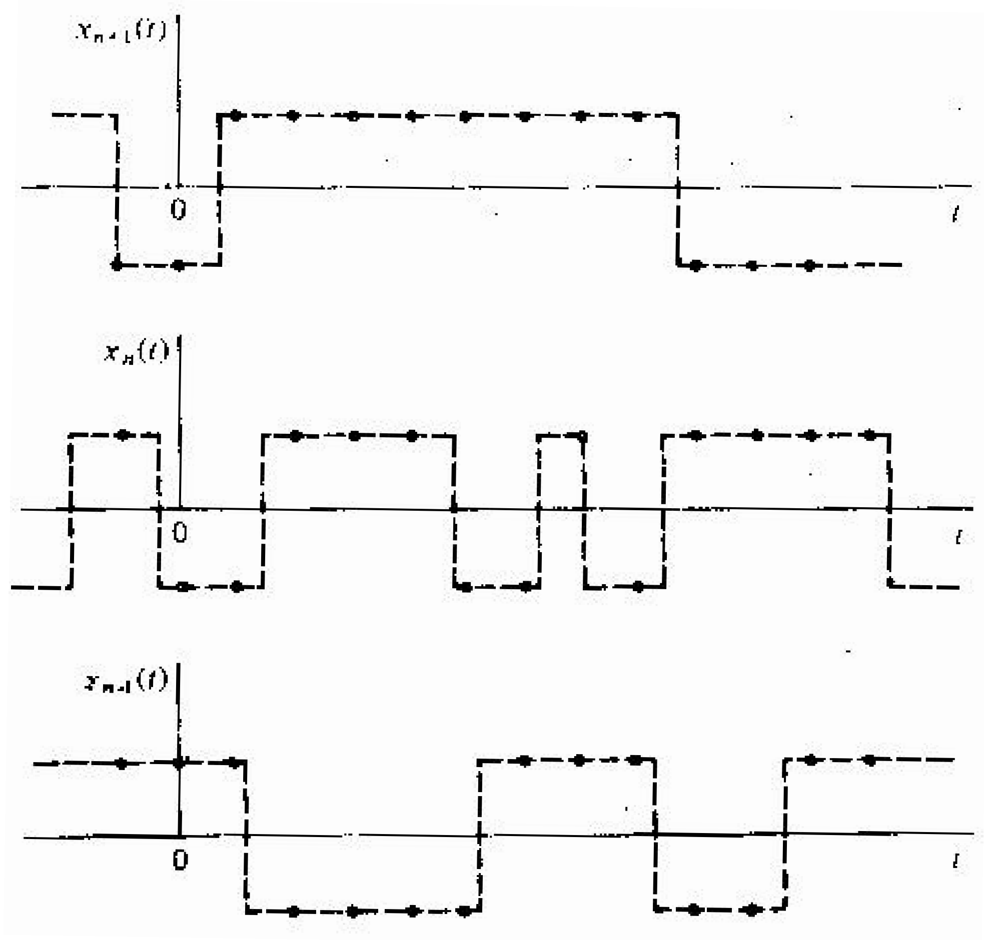
连续型随机

在时间上离散，状态上连续 → 连续型随机序列



离散型随机序列

在时间上离散，状态上离散 → 离散型随机序列



例：抛掷一枚硬币的试验，样本空间是S={H, T}，现定义：

$$X(t)=\begin{cases} cos\pi t & 当出现H \\ t & 当出现T \end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty)，其中P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$$

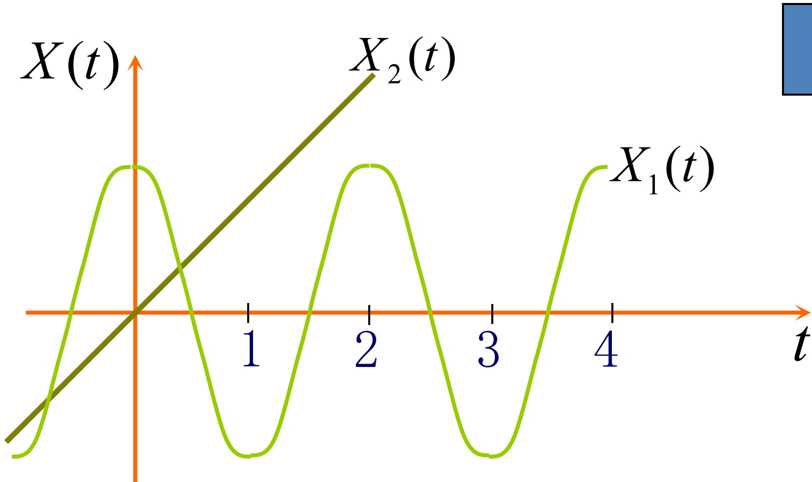
则$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是一随机过程。

解：对任意固定的t, $X(t)$是随机变量，取值为$cos\pi t$和t

$$P(X(t)=cos\pi t)=P(X(t)=t)=\frac{1}{2}$$

此随机过程的样本函数只有两个，即$X_1(t)=cos\pi t, X_2(t)=t$

离散型随机过程



例：考虑 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta), t\in(-\infty,+\infty)$,式中 a和 ω是正常数, Θ是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量,

这是一个随机过程。

对每一固定的时刻t, $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$是随机变量$\Theta$的函数,

从而也是随机变量。它的状态空间是$[-a,a]$.

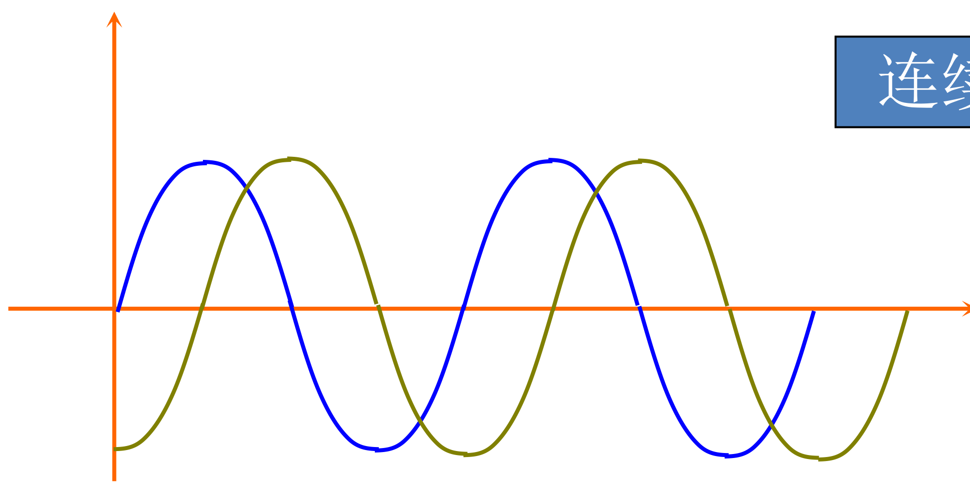
在$(0,2\pi)$内随机取一数θ,相应的就得到一个样本函数

$x(t)=a\cos(\omega t+\theta)$,

这族样本函数的差异在于它们相位θ的不同,

故这一过程称为随机相位正弦波。

连续型随机过程

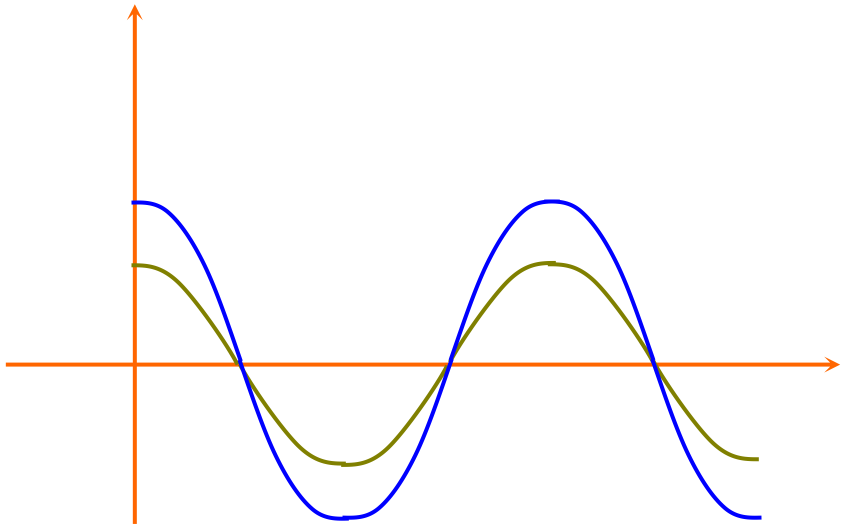


例题

例： 设$X(t)=V\cos\omega t \quad t\in(-\infty,+\infty)$其中$\omega$是常数；

V在[0,1]上服从均匀分布，则$X(t)$是一个随机过程。

对每一固定的t，$X(t)=V\cos\omega t$是随机变量V乘以常数$\cos\omega t$，故也是随机变量，对[0,1]上随机变量取一v值，就得到相应的一个样本函数$x(t)=v\cos\omega t$.

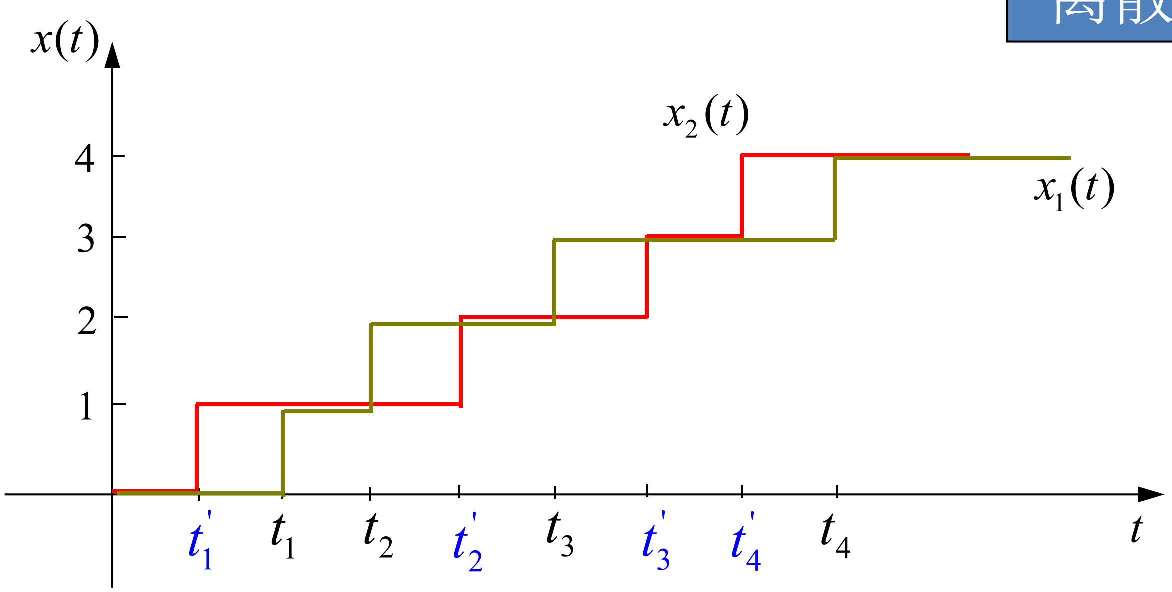


连续型随机过程

例题

例： 某城市的120急救中心电话台迟早会接到用户的呼叫。以$X(t)$表示时间间隔$(0,t]$内接到的呼叫次数，它是一个随机变量，且对于不同的$t \geq 0$，$X(t)$是不同的随机变量，于是$\{X(t), t \geq 0\}$是一随机过程，且它的状态空间是$\{0,1,2,\ \}$.

离散型随机过程



例：考虑抛掷一颗骰子的试验：

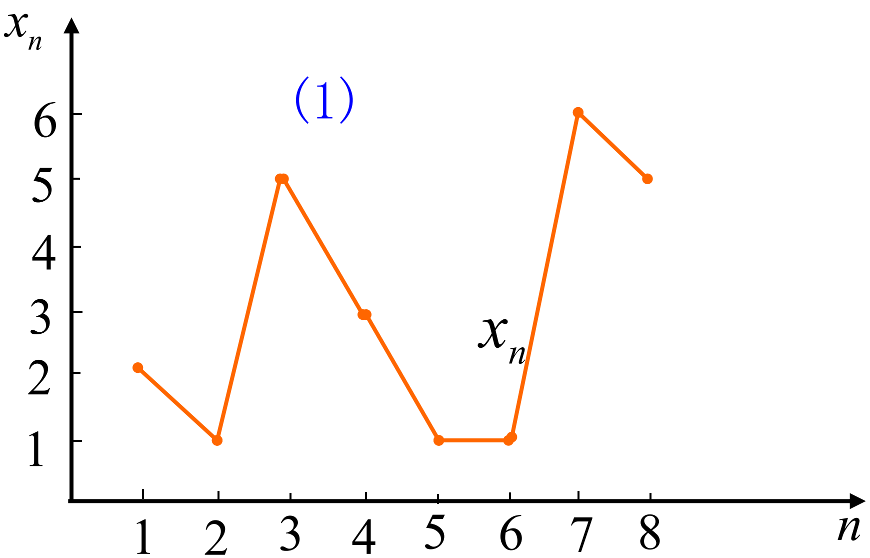
(1) 设X_n是第n次($n \ge 1$)抛掷的点数，对于$n = 1,2,$ 的不同值，X_n是随机变量，服从相同的分布，$P(X_n = i) = \frac{1}{6}$,$i = 1,2,3,4,5,6$

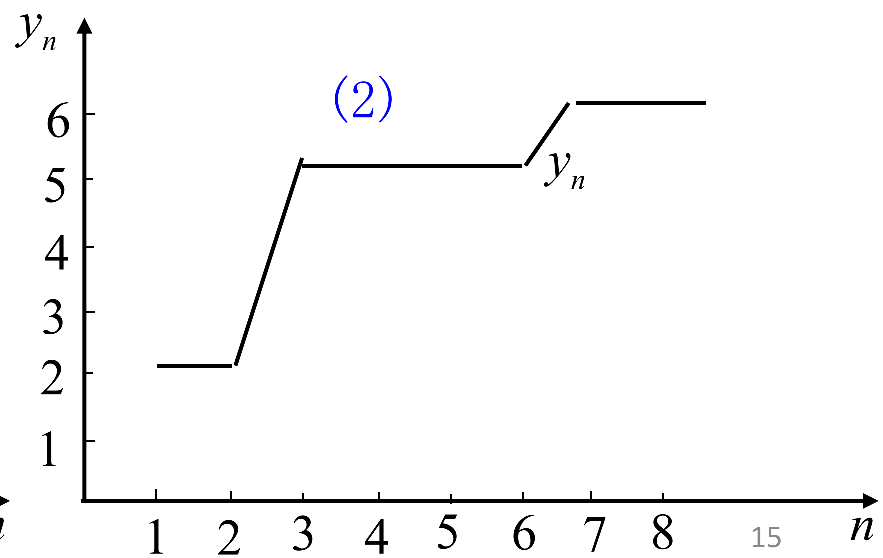
因而$\{X_n, n \ge 1\}$构成一随机过程，称为伯努利过程或伯努利随机序列，它的状态空间为$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

(2) 设Y_n是前n次抛掷中出现的最大点数,$\{Y_n, n \ge 1\}$ 也是一随机过程，它的状态空间仍是$\{1,2,3,4,5,6\}$ 。

下面分别给出它们的一条样本函数：

离散型随机序列





随机过程的分布律

有限个随机变量 $\xrightarrow{\text{联合分布函数}}$ 统计规律

随机过程 $\xrightarrow{\text{有限维分布函数族}}$ 统计规律

设$X_T=\{X(t),t\in T\}$是随机过程，对任意$n\geq1$和$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，随机向量$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$的联合分布函数为

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots X(t_n)\le x_n\}$$

这些分布函数的全体

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots x_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$$

称为$X_T=\{X_t,t\in T\}$的**有限维分布函数族**。

随机过程的分布律

随机过程的有限维分布函数族F具有如下性质

对称性

对于$\{t_1,t_2, \ldots,t_n\}$的任意排列 $\{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}\}$

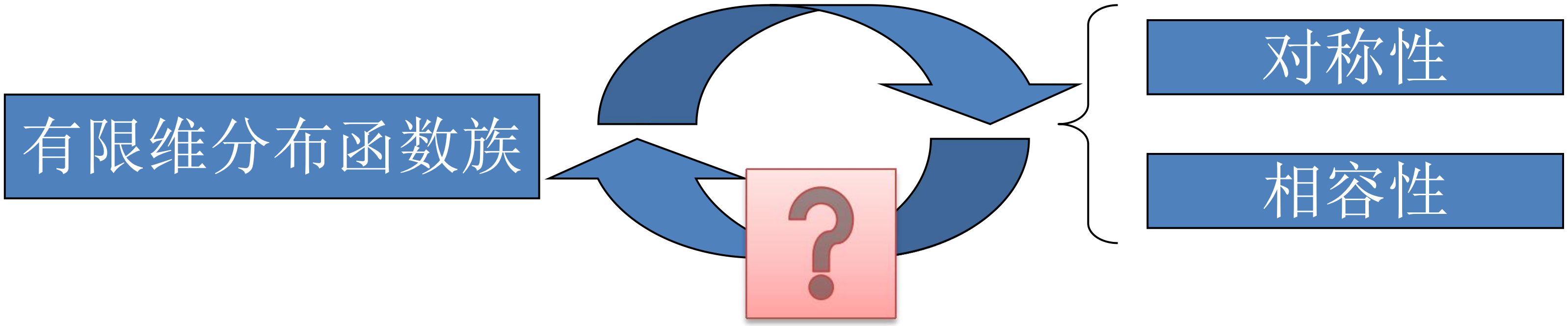
$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{t_{i_1},\cdots,t_{i_n}}(x_{t_{i_1}},\cdots,x_{t_{i_n}})$$

相容性

当$m<n$时，

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=F_{t_1,\cdots,t_m,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)$$

随机过程的分布律



Kolmogorov存在定理

设已给参数集T及满足**对称性**和**相容性**条件的分布函数族F，则必存在概率空间（$\Omega,\mathscr{F}$, P）及定义在其上的随机过程{X(t),t∈T}，它的有限维分布函数族是F。

Kolmogorov存在定理说明，随机过程的有限维分布函数族是随机过程概率特征的完整描述。

随机过程的数字特征

设$X_T=\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果对任意$t\in T$，$EX(t)$存在，则称函数

$$m_x(t) \overset{def}{=} EX(t), \quad t\in T$$

为X_T的**均值函数**，反映随机过程在时刻t的平均值。

$$D_X(t)=B_X(t,t)=E\left[X(t)-m_X(t)\right]^2, \quad t\in T$$

为X_T的**方差函数**，反映随机过程在时刻t对均值的偏离程度。

随机过程的数字特征

若对任意t∈T，$E(X(t))^2$存在，则称X_T为二阶矩过程，而称

$$B_X(s,t) \overset{def}{=} E[\{X(s)-m_X(s)\}\{X(t)-m_X(t)\}], \quad s,t\in T$$

为X_T的**协方差函数**，反映随机过程在时刻t和s时的线性相关程度。

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)], \quad s,t\in T$$

为X_T的**相关函数**，反映随机过程在时刻t和s时的线性相关程度。

对于二阶矩随机过程，其**协方差函数和相关函数**一定存在，且有如下关系：

$$B_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$$

例题2.5

设随机过程 $X(t) = Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t), \quad t > 0$

其中，Y和Z是相互独立的随机变量，且EY=EZ＝0，DY=DZ=σ^2，求X(t)的均值函数和协方差函数。

均值：

$$E[X(t)] = E[Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t)]$$
$$= \cos(\theta t)\cdot EY + \sin(\theta t)\cdot EZ = 0$$

例题2.5—继续

协方差：

$$B_X(s,t)=E[\{X(s)-m_x(s)\}\cdot\{X(t)-m_x(t)\}]$$

$$EX(t)=0$$

$\therefore B_X(s,t)=E[X(s)\cdot X(t)]=R_X(s,t)$ 代入$X(t)$，合并可得

$$=E[Y^2\cos(\theta s)\cos(\theta t)+YZ\cos(\theta s)\sin(\theta t)+ZY\cos(\theta t)\sin(\theta s)+Z^2\sin(\theta s)\sin(\theta t)]$$

由Y,Z独立,且均值为0

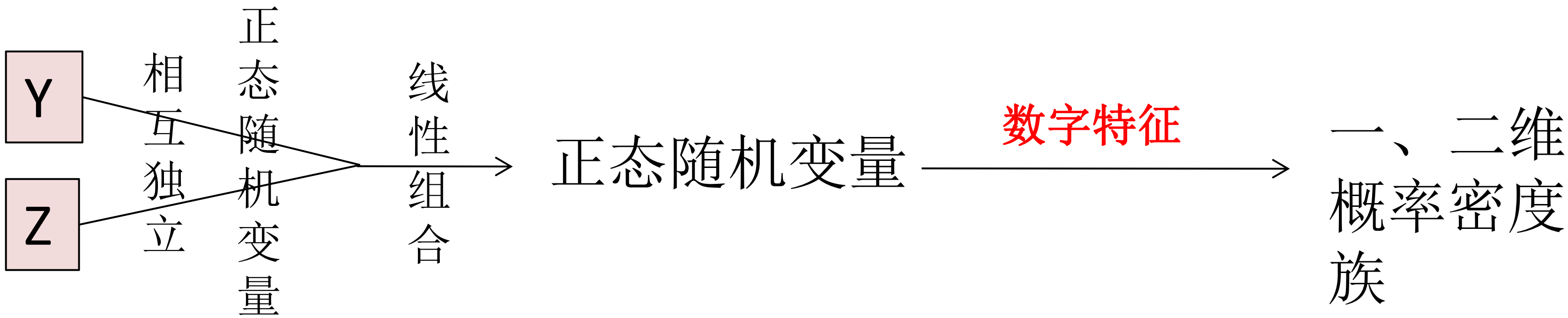
$$=E[Y^2\cos(\theta s)\cos(\theta t)+Z^2\sin(\theta s)\sin(\theta t)]$$

$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)E[Y^2]+\sin(\theta s)\sin(\theta t)E[Z^2]$$

$$=\sigma^2[\cos(\theta s)\cos(\theta t)+\sin(\theta s)\sin(\theta t)]=\sigma^2\cos[(t-s)\theta]$$

例题2.6

设随机过程X(t)=Y+Zt，t>0，其中Y,Z是相互独立的N(0,1)随机变量，求{X(t),t>0}的一、二维概率密度族。



数字特征： $m_X(t) = E[Y + Zt] = EY + t \cdot EZ = 0$

$$D_X(t) = D[Y + Zt] \xrightarrow{Y,Z\text{独立}} DY + t^2 DZ = 1 + t^2$$

$$B_X(s,t) = E[\{X(s) - m_X(s)\} \cdot \{X(t) - m_X(t)\}]$$

$$= E[X(s) \cdot X(t)] = E[(Y + Zs)(Y + Zt)] = 1 + st$$

$$\rho_X(s,t) = \frac{B_X(s,t)}{\sqrt{D_X(s)}\sqrt{D_X(t)}} = \frac{1 + st}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + t^2}}$$

例题2.6 继续

代入一、二维概率密度函数公式

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_X(t)}}\exp\left\{-\frac{[x-m_X(t)]^2}{2D_X(t)}\right\}$$

$$f_{s,t}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{D_X(s)D_X(t)[1-\rho_X^2(s,t)]}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2[1-\rho_X^2(s,t)]}\cdot\left[\frac{x_1^2}{D_X(t)}-\frac{2\rho_X(s,t)\cdot x_1\cdot x_2}{\sqrt{D_X(s)D_X(t)}}+\frac{x_2^2}{D_X(s)}\right]\right\}$$

毕

两个随机过程之间的关系

互协方差函数

互相关函数

X与Y，及s与t的顺序必须对应

定义：

设{X(t),t∈T}，{Y(t), t∈T}是两个二阶矩过程，则称

$$B_{XY}(s,t) \triangleq E[(X(s)-m_X(s))(Y(t)-m_Y(t))], \quad s,t \in T$$

为{X(t),t∈T}与{Y(t), t∈T}的互协方差函数，称

$$R_{XY}(s,t) \triangleq E[X(s)Y(t)]$$

为{X(t),t∈T}与{Y(t), t∈T}的互相关函数。

两个随机过程{X(t),t∈T}与{Y(t), t∈T}的**互不相关**定义

$$B_{XY}(s,t) = 0$$

互协方差函数与互相关函数之间的关系

$$B_{XY}(s,t) = R_{XY}(s,t) - m_X(s)m_Y(t)$$

例题2.7

设有两个随机过程$X(t)=g_1(t+\varepsilon)$和$Y(t)=g_2(t+\varepsilon)$，其中$g_1(t)$和$g_2(t)$都是周期为L的周期方波，ε是在(0,L)上服从均匀分布的随机变量，求互相关函数$R_{XY}(t,t+\tau)$的表达式。

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(t,t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)f_\varepsilon(x)dx \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)dx
\end{aligned}
$$

例题2.7 继续

令v=t+x，并利用$g_1(t)$和$g_2(t)$的周期性，有

$$R_{XY}(t,t+\tau)=\frac{1}{L}\int_t^{t+L}g_1(v)g_2(v+\tau)dv$$

$$=\frac{1}{L}[\int_t^{L}g_1(v)g_2(v+\tau)dv+\int_L^{t+L}g_1(v-L)g_2(v-L+\tau)dv]$$

令$u=v-L$ $$=\frac{1}{L}[\int_t^{L}g_1(v)g_2(v+\tau)dv+\int_0^{t}g_1(u)g_2(u+\tau)du]$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^{L}g_1(v)g_2(v+\tau)dv$$

例题2.8

设X(t)为信号过程，Y(t)为噪声过程，令W(t)=X(t)+Y(t)，求W(t)的均值函数和相关函数。

$$m_W(t) = E[W(t)] = E[X(t)+Y(t)] = m_X(t) + m_Y(t)$$

$$\begin{aligned}
R_W(s,t) &= E[W(s)\cdot W(t)] \\
&= E[\{X(s)+Y(s)\}\cdot\{X(t)+Y(t)\}] \\
&= E[X(s)X(t) + X(s)Y(t) + Y(s)X(t) + Y(s)Y(t)] \\
&= R_X(s,t) + R_{XY}(s,t) + R_{YX}(s,t) + R_Y(s,t)
\end{aligned}$$

例题1

- 设随机过程X(t)由下述三个样本函数组成且等可能发生

$X(t,w_1)$=cost；$X(t,w_2)$=-cost；$X(t,w_3)$=sint，计算X(t)的均值函数和相关函数

解：1）$m_X(t)=E[X(t)]=\frac{1}{3}[cost+(-cost)+sint]=\frac{sint}{3}$

2）由于随机过程X(t)只有三个样本函数，所以

$$P\{X(s)=coss,X(t)=cost\}=1/3$$
$$P\{X(s)=-coss,X(t)=-cost\}=1/3$$
$$P\{X(s)=sins,X(t)=sint\}=1/3$$

其他组合的概率**均为零**！

得：

$$R_X(s,t)=1/3[coss\cdot cost+(-coss)\cdot(-cost)+sins\cdot sint]$$

例题1

$$R_X(s,t)=\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}\cos(s+t)+\frac{1}{2}\cos(s-t)$$
$$+\frac{1}{2}\cos(s+t)+\frac{1}{2}\cos(s-t)$$
$$-\frac{1}{2}\cos(s+t)+\frac{1}{2}\cos(s-t)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\cos(s-t)+\frac{1}{6}\cos(s+t)$$

例题1

- 解法二：

将样本函数做一个变换，X(t,w_1)=cos(t+0)；X(t,w_2)=cos(t+π)；X(t,w_3)=cos(t- π /2)，因此X(t)可以写为：X(t)=cos(t+θ)

θ为随机变量，概率分布为{p(θ=0)=1/3, p(θ= -π /2)=1/3, p(θ= π)=1/3}。于是，

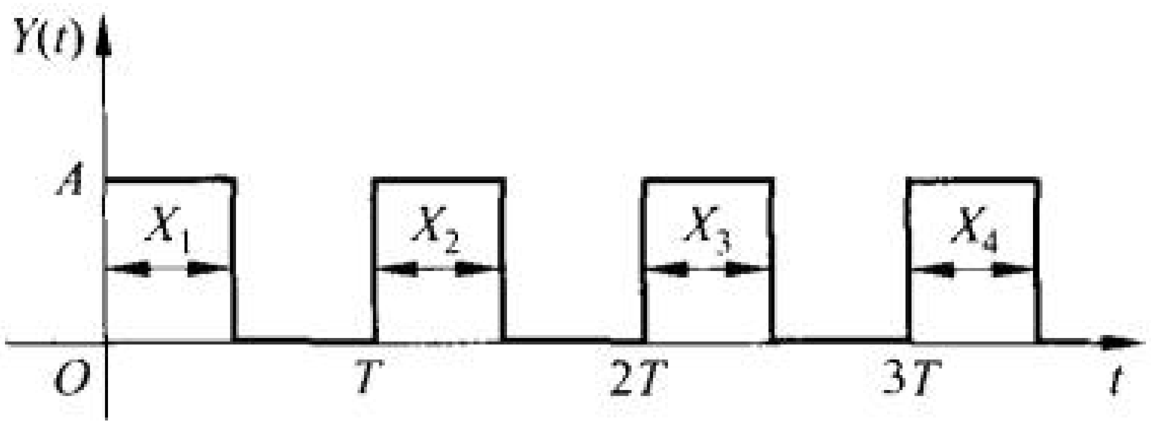
$$R_X(s,t)=E[\cos(s+\theta)\cdot\cos(t+\theta)]$$
$$=\frac{1}{2}E[\cos(s-t)+\cos(s+t+2\theta)]$$
$$=\frac{1}{2}\cos(s-t)+\frac{1}{2}E[\cos(s+t+2\theta)]$$

$$E[\cos(s+t+2\theta)]=\frac{1}{3}\cos(s+t+0*2)+\frac{1}{3}\cos\left(s+t-\frac{\pi}{2}*2\right)+\frac{1}{3}\cos(s+t+\pi*2)$$
$$=\frac{1}{3}\cos(s+t)$$

$$R_X(s,t)=\frac{1}{2}\cos(s-t)+\frac{1}{6}\cos(s+t)$$

例题2

- 一个通信系统，每隔T秒信号源输出一个宽为X的矩形脉冲，其中随机变量X~U(0,T)，并假定不同时间间隔脉冲宽度的取值是相互独立的，能传送的这类信号成为脉冲调制信号。设Y(t) (t≥0)表示t时刻的脉冲调制信号幅度，{Y(t) ,t≥0}是一个随机过程，它的一个样本函数如下图所示。求解{Y(t)}的一维概率密度分布



例题2

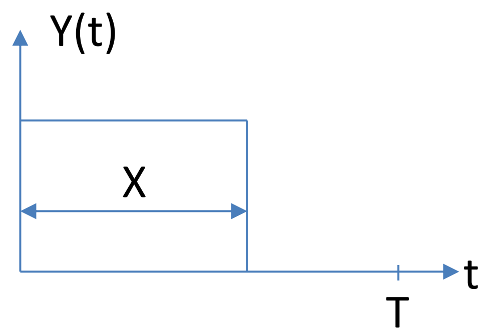
因为Y(t)具有周期性，因此仅需要讨论[0, T]区间

此时，$t \in [0, T]$，Y(t)的取值仅有0和A两种

所以，只需计算p{Y(t)=0}和p{Y(t)=A}

因为， X~U(0,T)

所以，如需Y(t)=A，只要t<X即可



$$p\{Y(t) = A\} = p\{X > t\} = \frac{T - t}{T}$$

同理，$p\{Y(t) = 0\} = \frac{t}{T}$

所以，Y(t)的一维概率分布为：

Y(t)	0	A
P{Y(t)}	t/T	(T-t)/T

例题3

- 一随机电报信号{X(t), -∞<t<+ ∞}满足：
  - 在任意时刻t，X(t)的取值为0或1，且P{X(t)=0}=P{X(t)=1}=1/2
  - 每个状态的持续时间是随机的，在T时间内波形变化的次数Y(t)服从参数为λT的Poisson分布

$$\mathrm{P}\{\mathrm{Y(t)} = \mathrm{k}\} = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T},\ \lambda > 0, T > 0$$

  - Y(t)与X(t)相互独立
- 求X(t)的均值函数与自相关函数

解：
$$m_X(t) = E[X(t)] = 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

课堂问题：为什么这里可以这样计算均值函数？0和1是样本函数吗？

例题3

- 同理，自相关函数可以理解为两个同分布随机变量的协方差。所以，

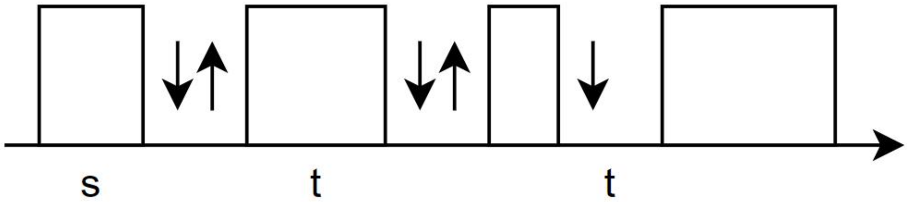
$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=1\times1\times p\{X(s)=1,X(t)=1\}$$

$$\therefore\ R_X(s,t)=p\{X(s)=1,X(t)=1\}$$

(1)$s=t$，则

$$R_X(s,t)=R_X(t,t)=p\{X(t)=1\}=\frac{1}{2}$$

例题3



(2)$s < t$，则

$$R_X(s,t) = p\{X(s)=1, X(t)=1\}$$

$$= p\{X(s)=1, \text{在 } t-s \text{时段内波形变换偶数次}\}$$

$$= p\{X(s)=1, Y(t-s)\text{为偶数}\}$$

$X(t)$与$Y(t)$相互独立

$$\therefore\ R_X(s,t) = p\{X(s)=1\}\cdot p\{Y(t-s)\text{为偶数}\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{[\lambda(t-s)]^{2k}}{(2k)!}\cdot e^{-\lambda(t-s)}$$

例题3

(2)$s < t$,

$$R_X(s,t) = \frac{1}{2}\cdot\sum_0^{\infty}\frac{[\lambda(t-s)]^{2k}}{(2k)!}\cdot e^{-\lambda(t-s)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\sum_0^{\infty}\frac{[\lambda(t-s)]^{k}}{k!}+\sum_0^{\infty}\frac{[-\lambda(t-s)]^{k}}{k!}\right]\cdot e^{-\lambda(t-s)}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-\lambda(t-s)}\left[e^{\lambda(t-s)}+e^{-\lambda(t-s)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1+e^{-2\lambda(t-s)}\right]$$

例题3

(3)$s > t$，同理可得

$$R_X(s,t) = \frac{1}{4}\left[1 + e^{-2\lambda(s-t)}\right]$$

综合以上三种情况，可得：

$$R_X(s,t) = \frac{1}{4}\left[1 + e^{-2\lambda|s-t|}\right]$$

复随机过程的性质

两个复随机过程{X_t}，{Y_t}的互相关函数定义为

$$R_{XY}(s,t) = E(X_s \overline{Y_t})$$

互协方差函数定义为

$$B_{XY}(s,t) = E[X_s - m_X(s)]\overline{[Y_t - m_Y(t)]}$$

复随机过程

定义：

设$\{X_t, t\in T\}$，$\{Y_t, t\in T\}$是取实数值的两个随机过程，若对任意$t\in T$

$$Z_t = X_t + iY_t$$

其中 $i=\sqrt{-1}$ ，则称$\{Z_t, t\in T\}$为复随机过程。

复随机过程的数字特征

均值函数

$$m_Z(t) = E(Z_t) = EX_t + iEY_t$$

方差函数

$$D_Z(t) = E[|Z_t - m_Z(t)|^2] = E[(Z_t - m_Z(t))\overline{(Z_t - m_Z(t))}]$$

相关函数

$$R_Z(s,t) = E[Z_s \overline{Z_t}]$$

协方差函数

$$B_Z(s,t) = E[(Z_s - m_Z(s))\overline{(Z_t - m_Z(t))}]$$

相互之间的关系

$$B_Z(s,t) = R_Z(s,t) - m_Z(s)\overline{m_Z(t)}$$

复随机过程的性质

复随机过程$\{X_{T,,}t\in T\}$的协方差函数B(s,t)具有性质：

（1）**对称性**(埃米特性)，$B(s,t)=\overline{B(t,s)}$

（2）**非负定性**，对任意$t_i\in T$及复数a_i，i=1,2, …,n，n≥1，有

$$\sum_{i,j=1}^{n} B(t_i,t_j)a_i\overline{a}_j \geq 0$$

说明：

1. 如果函数f(s,t)具有非负定性，那么它必具有埃米特性。

2. 若f(s,t)为一非负定函数，则必存在一个二阶矩过程（并可要求它为正态过程）以给定的f(s,t)为协方差函数。

例题2.9 设随机过程 $Z_t=\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k t},\ t\geq 0$ ，其中$X_1,X_2,\ldots,X_n$是相互独立的，且服从$N(0,\sigma_k^2)$的随机变量，$w_1,w_2,\ldots,w_n$是常数，求$\{Z_t,t\geq 0\}$的均值函数m(t)和相关函数R(s,t)。

$$m(t)=E[Z(t)]=E[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k t}]=0$$

$$R(s,t)=E[Z(s)\cdot\overline{Z(t)}]$$

$$=E[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k s}\cdot\overline{\sum_{l=1}^{n}X_l e^{i\omega_l t}}]$$

$$=E[\sum_{k,l=1}^{n}X_k X_l e^{i(\omega_k s-\omega_l t)}]$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}E[X_k X_l]\cdot e^{i(\omega_k s-\omega_l t)}$$

$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立，且服从$N(0,\sigma_k^2)$ $\Rightarrow$ $k\neq l$时，$E[X_k X_l]=0$

$$R(s,t)=\sum_{k=1}^{n}E[X_k^2]\cdot e^{i\omega_k(s-t)}=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\cdot e^{i\omega_k(s-t)}$$

几种基本的随机过程

- 二阶矩过程
- 正交增量过程
- 独立增量过程
- 马尔可夫过程
- 正态过程
- 维纳过程
- 平稳过程

二阶矩过程

定义：设已给定随机过程$X=\{X(t),t\in T\}$，如果对于一切$t\in T$，均有$E|X(t)|^2<\infty$，则称$X(t)$为二阶矩过程。

性质：

1．二阶矩过程必存在均值$m_x(t)=EX(t)$（常设为0）。

2．由Schwartz不等式$\left|EX(s)\overline{X(t)}\right|^2\le|EX(s)|^2|EX(t)|^2$知其相关函数和协方差都存在。

三个分支：正态（高斯）过程，宽平稳过程和正交增量过程。

正交增量过程

定义：

设$\{X(t), t \in T\}$是**零均值**的**二阶矩过程**，若对任意的$t_1<t_2 \le t_3<t_4 \in T$，有

$$E[(X(t_2)-X(t_1))\overline{(X(t_4)-X(t_3))}]=0$$

则称$X(t)$是**正交增量过程**。

正交增量过程

定理： 设$T=[a,b]$，规定$X(a)=0$，若$\{X_t,\ t\in T\}$是正交增量过程，则

$$\boldsymbol{B}_X(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{R}_X(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})=\sigma_X^2(\min(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}))$$

证:对于$a<s<t<b$

$$\begin{aligned}
&B_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)\\
&=R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]\\
&=E[(X(s)-X(a))(X(t)-X(\mathrm{a}))]\\
&=E[(X(s)-X(a))(X(t)-X(s)+X(s)-X(a))]\\
&=E[(X(s)-X(a))(X(t)-X(s))]+E[(X(s)-X(a))^2]\\
&=0+\sigma_X^2(s)=\sigma_X^2(s)
\end{aligned}$$

同理对于$a<t<s<b$，有 $\boldsymbol{B}_X(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})=\sigma_X^2(\boldsymbol{t})$

于是

$$\boldsymbol{B}_X(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{R}_X(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})=\sigma_X^2(\min(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}))$$

独立增量过程

定义：

设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意的正整数n和$t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$，随机变量$X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\ldots,X(t_n)-X(t_{n-1})$是互相独立的，则称$\{X(t),t\in T\}$是**独立增量过程**。

特点：

独立增量过程在任一个时间间隔上过程状态的改变，不影响任一个与它不相重叠的时间间隔上状态的改变。

正交增量过程与独立增量过程的关系

定理： 若$\{X_t, \ t\in T\}$是独立增量过程，且$EX(t)=0$，$EX^2(t)<+\infty$，则$\{X_t, \ t\in T\}$是正交增量过程。

事实上，对$t_1<t_2\le t_3<t_4\in T$,由独立增量性，有

$$E[(X(t_2)-X(t_1))(X(t_4)-X(t_3))]= E[X(t_2)-X(t_1)]E[X(t_4)-X(t_3)] =0$$

正交增量过程与独立增量过程的关系

正交增量过程 → 互不相关

独立增量过程 → 相互独立

定义依据：

不相重叠的时间区间上增量的统计相依性

正交增量过程 ~~→~~ 独立增量过程

二阶矩存在，均值函数恒为零

正交增量过程 ← 独立增量过程

平稳独立增量过程

定义：

设$\{X(t), t \in T\}$是独立增量过程，若对任意$s<t$，随机变量$X(t)-X(s)$的分布仅依赖于$t-s$，则称$\{X(t), t \in T\}$是**平稳独立增量过程**。

例题2.10

考虑一种设备一直使用到损坏为止，然后换上同类型的设备。假设设备的使用寿命是随机变量，令$N(t)$为在时间段$[0,t]$内更换设备的件数，通常可以认为$\{N(t), t \geq 0\}$是平稳独立增量过程。

马尔可夫过程

定义：

设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意正整数n及$t_1<t_2, \ldots<t_n$，$P(X(t_1)=x_1, \ldots, X(t_{n-1})=x_{n-1})>0$，且其条件分布

$$P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1, \quad ,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$
$$= P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

则称$\{X(t),t\in T\}$是马尔可夫过程。

马尔可夫性

系统在已知现在所处状态的条件下，它将来所处的状态只与现在的状态有关，与过去所处的状态无关。

平稳过程

定义：

设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果对任意常数τ和正整数n，$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，$t_1+\tau,t_2+\tau,\ldots,t_n+\tau\in T$，$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$与$(X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\ldots,X(t_n+\tau))$有相同的联合分布，则称$\{X(t),t\in T\}$为**严平稳过程**或**侠义平稳过程**。

定义：

设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果

1. $\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程；
2. 对任意$t\in T$，$m_X(t)=EX(t)=$常数；
3. 对任意$s,t\in T$，$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=R_X(s-t)$则称$\{X(t),t\in T\}$为**广义平稳过程**，简称为**平稳过程**。

平稳过程

广义平稳过程 $\nRightarrow$ 严平稳过程

广义平稳过程 $\xLeftarrow{\text{二阶矩存在}}$ 严平稳过程

对于正态过程，广义平稳过程和严平稳过程是等价的。

正态过程

定义：

设$\{X(t), t \in T\}$是随机过程，若对任意正整数n及$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$，$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$是n维正态随机变量，则称$\{X(t), t \in T\}$是正态过程或高斯过程。

特点：

1. 在通信中应用广泛；
2. 正态过程只要知道其均值函数和协方差函数，即可确定其有限维分布。

维纳过程

定义：

设$\{W(t),-\infty<t<\infty\}$为随机过程，如果

1. $W(0)=0$;
2. 它是独立、平稳增量过程；
3. 对任意s,t，增量$W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$， $\sigma^2>0$

则称$\{W(t),-\infty<t<\infty\}$为**维纳过程**，也称布朗运动过程。

维纳过程是正态过程的一种特殊形式

定理：

设$\{W(t),-\infty<t<\infty\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，则

1. 对任意$t\in(-\infty,\infty)$，$W(t)\sim N(0,\sigma^2|t|)$;
2. 对任意$-\infty<a<s,t<\infty$,

$$E[\{W(s)-W(a)\}\{W(t)-W(a)\}]=\sigma^2\min(s-a,t-a)$$

证明

维纳过程

证明： (2)不妨设$s \le t$，则

$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]$

$=E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(s)+W(s)-W(a))]$

$=E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(s))]+E[(W(s)-W(a))^2]$

$=E[W(s)-W(a)]E[W(t)-W(s)]+D[W(s)-W(a)]$

$=\sigma^2(s-a)$

若 $t \le s$，则

$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]=\sigma^2(t-a)$，所以

$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]=\sigma^2\min(s-a,t-a)$

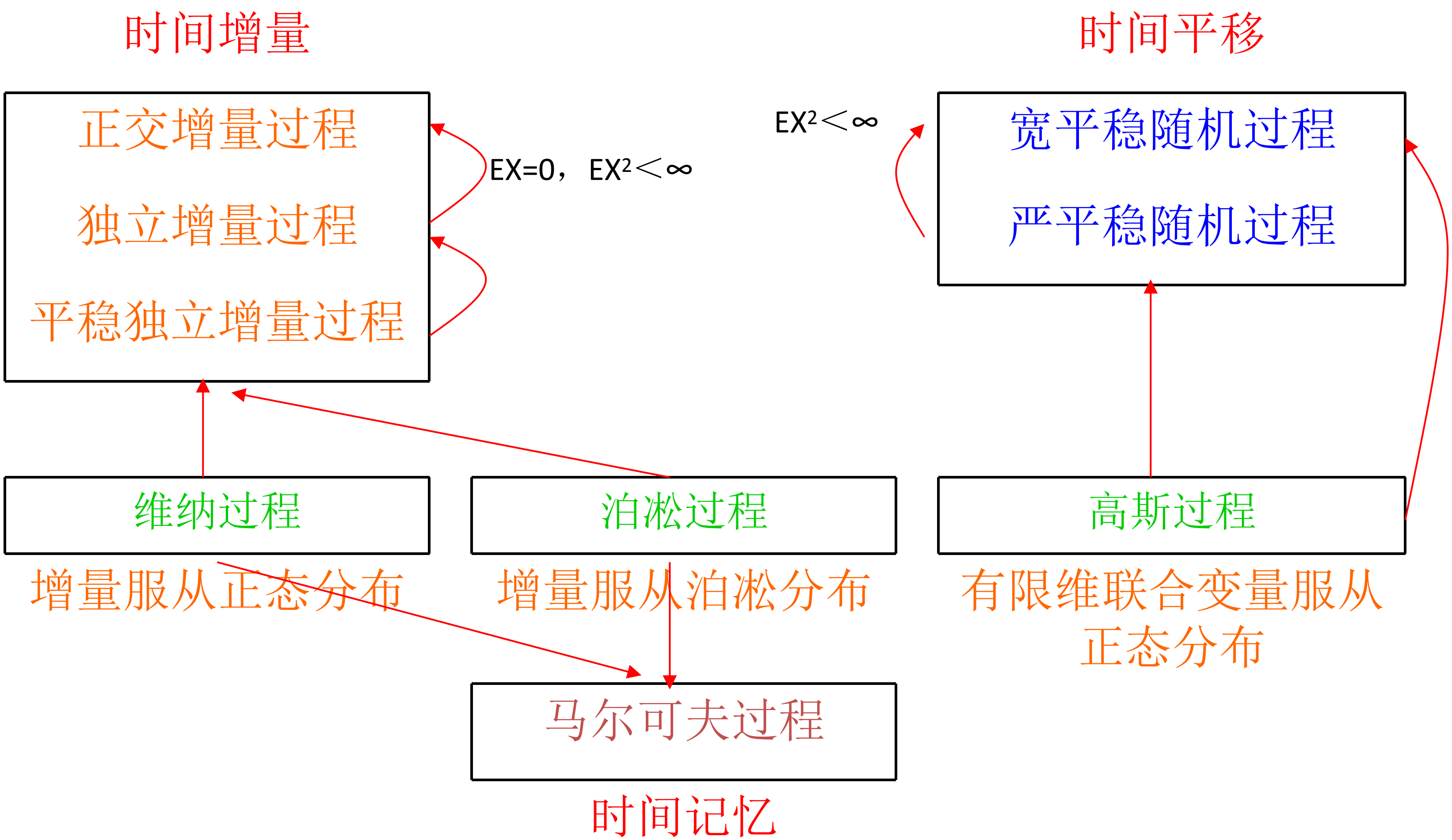
若取$a=0$，则

$R_W(s,t)=E[W(s)W(t)]$

$=E[(W(s)-W(0))(W(t)-W(0))]=\sigma^2\min(s,t)$

☆**注：维纳过程也是正交增量过程（$EX(t)=0$, $EX^2(t)=\sigma^2|t|<+\infty$），还是马尔可夫过程**

几种基本随机过程之间的内在联系



作业

第二章作业： 2.3, 2.12, 2.13