华中科技大学 2023 ～2024 学年第二学期

“数理方程与特殊函数”考试试卷(B卷)

考试方式: 闭卷　考试时间: 2024年5月26日上午　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

装

订

线

一、(简答题，本题有三小题，共 **13** 分)

1. (**3** 分) $u_t + u_{xxx} + 2uu_x = 0$ 是几阶偏微分方程？它是否为线性偏微分方程？它是否为齐次偏微分方程？

2. (**4** 分) 考虑一个半径为 R 的圆形薄板，其上半圆周边界的温度保持为 $u(R,\theta) = \theta(\pi - \theta)$，而下半圆周上的温度保持为零度，板的侧面绝热，试给出稳恒状态下，薄板内温度 $u(r,\theta)$ 满足的定解问题。

3. (**6** 分) 给出下列固有值问题的固有值与固有函数：

$$\begin{cases} X'' + (\lambda - 1)X = 0, \\ X'(0) = 0, \quad X(3) = 0. \end{cases}$$

二、(**12** 分) 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 3,\ 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

三、(**13** 分) 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = -1, \\ u(x,0) = \cos \pi x - \frac{x^3}{3} + 1,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

四、(**12** 分) 求解如下无界弦的强迫振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + xt, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

五、(**13 分**) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_x + u_t = t, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$，$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 \leq t < a. \end{cases}$

六、(**12 分**) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} - 2u, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \cos x. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{F}[\cos ax] = \pi(\delta(\lambda - a) + \delta(\lambda + a))$, $\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $t > 0$.

七、(**10 分**) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，用故有函数法求解：

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + 3, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u|_{r=1} = 0, \quad |u(r,t)| < \infty, \\ u(r,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$, $J_0'(x) = -J_1(x)$.

八、(本题有三小题，共 **15 分**)

1. (**5 分**) 写出拉普拉斯方程在上半空间($z > 0$)内的第一边值问题的格林函数。

2. (**5 分**) 设 $u(x,y)$ 是定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < 4, \\ u|_{x^2+y^2=4} = xy^2. \end{cases}$$

的解，求 $u(x,y)$ 在闭圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 4$ 上的最大值与最小值。

3. (**5 分**) 设 D 为平面有界区域，其边界 C 为光滑封闭曲线，n 为边界 C 上的单位外法向。记 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$。若对某个实数$\lambda$，固有值问题：

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_C = 0. \end{cases}$$

存在非零解 u，则称 λ 是其**固有值**，该非零解 u 称为固有值 λ 的**固有函数**。设 u_1, u_2 分别是固有值 λ_1, λ_2 的固有函数且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，试用格林公式证明：

$$\iint_D u_1 u_2 dxdy = 0.$$