华中科技大学 2024 ～2025 学年第一学期

“数理方程与特殊函数”考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷　考试时间: 2025年1月9日上午　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

一、(简答题，本题有三小题，共 **13** 分)

1. (**3** 分) 方程 $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u(1-u)$ 是几阶偏微分方程？是否是线性方程？是否是齐次方程？
2. (**4** 分) 考虑圆心在坐标原点、半径为 R 的圆形薄盘的热传导问题，假设上下两面绝热，内部没有热源，边界温度为 $x^2 - y^2$，初始温度为 $2R^2 - x^2 - 3y^2$。试给出温度函数 $u(x,y,t)$ 满足的定解问题。
3. (**6** 分) 给出下列固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \theta_0, \\ \Phi(0) = 0,\ \Phi'(\theta_0) = 0. \end{cases}$$

二、(**12** 分) 用固有函数法求解定解问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2\sin x + \sin 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

三、(**13** 分) 考虑如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \cos x, \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < 2\pi, \\ u(0,y) = -1,\ u(2\pi,y) = -1, \\ u(x,0) = -\cos x,\ u(x,2\pi) = \sin 3x - \cos x. \end{cases}$$

1. (**5** 分) 求辅助函数 $w(x)$，通过代换 $u(x,y) = v(x,y) + w(x)$ 将方程和一组边界条件转化为齐次，并给出 $v(x,y)$ 满足的定解问题；
2. (**8** 分) 求原定解问题的解。

四、(**12** 分) 设a是正常数， ϕ 为已知函数且$\phi(0) = 0$，用行波法求解弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < at, \\ u(x, \frac{x}{a}) = \phi(x), \quad u_x(0,t) = 0. \end{cases}$$

五、(**13 分**) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 1, \quad u(x,0) = e^{-x}. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$，$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 \leq t < a. \end{cases}$

六、(**12 分**) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} - tu, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

提示：$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$，$t > 0$.

七、(**10 分**) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，用分离变量法求解：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - u, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u|_{r=1} = 0, \quad |u(r,t)| < \infty, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 1 - r^2. \end{cases}$$

提示：$(x^n J_n(x))' = x^n J_{n-1}(x)$, $J_0'(x) = -J_1(x)$.

八、(本题有三小题，共 **15 分**)

1. (**5 分**)设 D 为平面有界区域，其边界 C 为光滑封闭曲线，Laplace方程第一边值问题在点 $M_0 \in D$ 的格林函数为 $G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - v(M)$，请写出调和函数 v 满足的定解问题。

2. (**5 分**) 用试探法求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{5}{2}, \quad 1 < x^2 + \frac{y^2}{4} < 4, \\ u|_{x^2+\frac{y^2}{4}=1} = 2, \quad u|_{x^2+\frac{y^2}{4}=4} = 5. \end{cases}$$

3. (**5 分**) 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域，其边界 Γ 为光滑封闭曲面， n 为边界 Γ 上的单位外法向量；又设 f 和 g 分别为 Ω 和 Γ 上的已知连续函数。若泊松方程第二边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = f(x,y,z), \ (x,y,z) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = g(x,y,z) \end{cases}$$

存在一个经典解 u，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z) d\Omega = \iint_\Gamma g(x,y,z) dS.$$