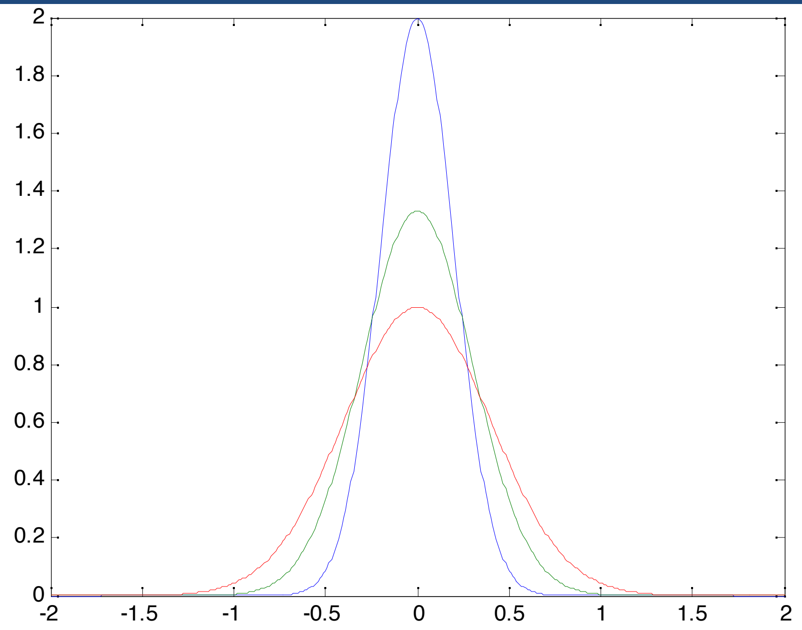
马尔可夫链

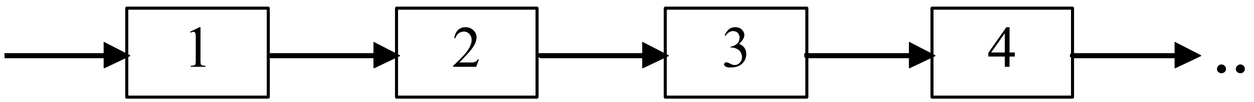


Outline

- 马尔可夫链定义
- 转移概率与绝对概率
  - 一步转移概率及多步转移概率
  - 初始概率及绝对概率
  - Chapman-Kolmogorov方程
- 马尔可夫链状态分类
- 遍历与平稳分布

什么是马尔可夫链?

- 物理现象
  - 微粒的随机游动
  - 多级通信系统



- 它们的共同点：

  由时刻t_0，系统或过程所处的状态，可以决定系统或过程在时刻$t<t_0$所处的状态，而无需借助于t_0以前系统或过程所处状态的历史资料。

  这种特性我们成为：**马尔可夫性**或**无后效性**。

什么是马尔可夫链?

马尔可夫链是最简明的马尔可夫过程，它是状态、时间都是离散量的马尔可夫过程.

马尔可夫过程是随机过程中历史最悠久且充满活力的一类随机过程. 自20世纪初俄罗斯数学家A. A. MapkoB等人开始研究马尔可夫过程以来, 可以说久盛不衰. 它有极为深厚的理论基础, 如拓扑学、函数论、泛函分析、近世代数和几何学; 又有广泛的应用空间, 如近代物理、随机分形、公共事业中的服务系统、电子信息、计算机技术等.

自然界很多现象遵从这样的演变规则: 由时刻t_0系统或过程所处的状态(现在)可以决定系统或过程在时刻$t>t_0$所处的状态(将来), 而无需借助于t_0以前系统或过程所处状态(过去)的历史资料. 如微分方程初值问题即属于此.

马尔可夫链定义

定义4.1

设有随机过程{X_n, n∈T}，若对于任意的整数n∈T和任意的i_0, i_1, …, i_{n+1}∈I，条件概率满足

$$P\{X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \quad , X_n=i_n\}$$
$$=P\{X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_n=i_n\}$$

则称{X_n, n∈T}为马尔可夫链，简称马氏链

将来的状态只与当前状态有关，与过去状态“无关”

转移概率

定义4.2

称条件概率： $p_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$

为马尔可夫链$\{X_n, n \in T\}$在时刻n的一步转移概率，其中$i, j \in I$，简称转移概率。

定义4.3

若对任意的$i, j \in I$，马尔可夫链$\{X_n, n \in T\}$的转移概率与n无关，则称马尔可夫链是齐次马尔可夫链。

我们只讨论齐次马氏链，所以通常省略“齐次”二字。

一步转移概率矩阵

设P表示一步转移概率所组成的矩阵，则

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ & & & \end{bmatrix}$$

称为系统状态的一步转移概率矩阵，它具有如下性质：

1. $p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in I$

2. $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1, \quad i, j \in I$

满足上述两个性质的矩阵成为随机矩阵

n步转移概率矩阵

定义4.4

称条件概率 $p_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\}, \quad i, j \in I, m \geq 0, n \geq 1$

为马尔可夫链{X_n, n ∈ T}的***n*步转移概率**，并称

$$\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$$

为马尔可夫链的*n*步转移矩阵。规定

$$\boxed{p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}}$$

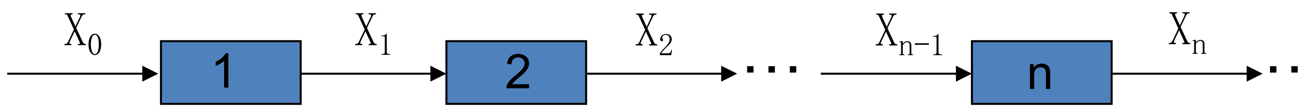
例题1

设马尔可夫链{X_n, n ∈ T}有状态空间I={0,1}，其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

求 $P\{X_{m+2}=0 \mid X_m=0\}$ 和两步转移概率矩阵$\mathbf{P}^{(2)}$

例题2：(0-1传输系统)



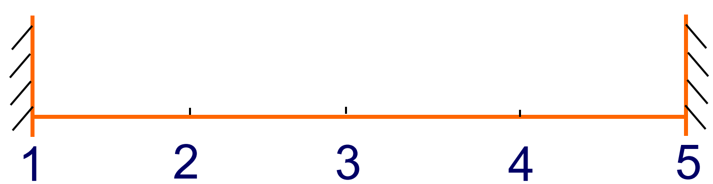
如图所示，只传输数字0和1的串联系统中，设每一级的传真率为p，误码率为q=1-p。并设一个单位时间传输一级，X_0是第一级的输入，X_n是第n级的输出(n≥1)，那么{X_n, n=0,1,2…}是一随机过程，状态空间I={0,1}。

当X_n=i为已知时，X_{n+1}所处的状态的概率分布只与X_n=i有关，而与时刻n以前所处的状态无关，所以它是一个马氏链，而且还是齐次的，它的一步转移概率和一步转移概率矩阵分别为：

$$P_{ij}=P\left(X_{n+1}=j\mid X_n=i\right)=\begin{cases}p & j=i\\ q & j\neq i\end{cases}\qquad i,j=0,1 \qquad P=\begin{bmatrix}p & q\\ q & p\end{bmatrix}$$

例题3：一维随机游动

设一醉汉Q(或看作一随机游动的质点)在直线上的点集I={1,2,3,4,5}作随机游动，且仅在1秒、2秒等时刻发生游动，游动的概率规则是：如果Q现在位于点i($1<i<5$)，则下一时刻各以1/3的概率向左或向右移动一格，或以1/3的概率留在原处；如果Q现在处于1(或5)这一点上，则下一时刻就以概率1移动到2(或4)这点上，1和5这两点称为反射壁，这种游动称为带有两个反射壁的随机游动。



例题3：一维随机游动

解：以X_n表示时刻n时Q的位置，不同的位置就是X_n的不同状态；而且当$X_n=i$为已知时，X_{n+1}所处的状态的概率分布只与$X_n=i$有关，而与Q在时刻n以前如何到达i完全无关，所以$\{X_n, n=0,1,2\cdots\}$是一马氏链，且是齐次的。

它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

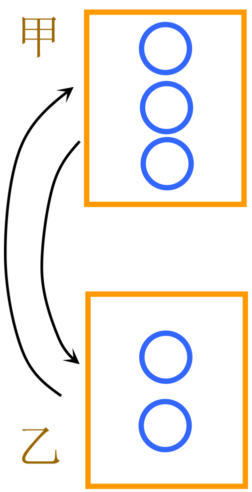
如果把1这点改为吸收壁，即Q一旦到达1这一点，则永远留在点1时，此时的转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

例题4

有甲、乙两袋球，开始时，甲袋有3只球，乙袋有2只球；以后，每次任取一袋，并从袋中取出一球放入另一袋（若袋中无球则不取）。X_n表示第n次抽取后甲袋的球数，n=1, 2, ….

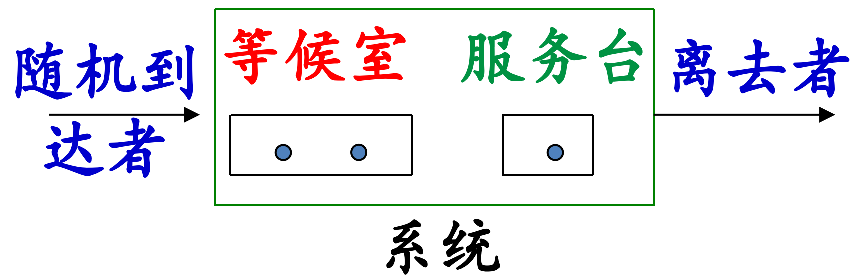
$\{X_n, n=1, 2, \cdots\}$是一随机过程，状态空间=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}，当$X_n=i$时，$X_{n+1}=j$的概率只与i有关，与n时刻之前如何取到i值是无关的，这 是一马氏链，且是齐次的，一步转移概率矩阵为：



$$P=\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

例题5：排队模型

设服务系统，由一个服务员和只可能容纳两个人的等候室组成,见右下图.服务规则是：先到先服务，后来者需在等候室依次排队. 假定一个需要服务的顾客到达系统时, 发现系统内已有3个顾客(一个正在接受服务, 两个在等候室排队)，则该顾客即离去。



设时间间隔Δt内将有一个顾客进入系统的概率为q,有一原来被服务的顾客离开系统(即服务完毕)的概率为p

又设当Δt充分小时，在这时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的.

再设有顾客来到与服务是否完毕是相互独立的

例题5：排队模型

• 如何用马氏链描述这一服务系统?

设定$X_n \equiv X(n\Delta t)$,表示时间$n\Delta t$时系统内的顾客数，即系统的状态。则$\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$是一随机过程，状态空间$I=\{0,1,2,3\}$。由于当$X_n=i$, $i \in I$为已知时, X_{n+1}所处的状态的概率分布只与$X_n=i$有关，而与时间$n\Delta t$以前所处的状态无关，所以该随机过程是一个齐次马氏链

• 怎样计算此马氏链的一步转移概率?

p_{00}：在系统内没有顾客的条件下，经Δt后仍无顾客的概率(显然p_{00}是条件概率，以下与此同)，$p_{00}=1-q$

例题5：排队模型

p_{01}:在系统内没有顾客的条件下,经Δt后有一顾客进入系统的概率, $p_{01}=q$.

p_{10}:系统内恰有一顾客正在接受服务的条件下,经Δt后系统内无人进入的概率, 它等于在Δt间隔内顾客因服务完毕而离去,且无人进入系统的概率， $p_{10}=p(1-q)$.

p_{11}:系统内恰有一顾客的条件下,在Δt间隔内, 他因服务完毕而离去,而另一顾客进入系统, 或者正在接受服务的顾客将继续要求服务,且无人进入系统的概率, $p_{11}=pq+(1-p)(1-q)$.

p_{12}:正在接受服务的顾客将继续要求服务, 且另一顾客进入系统的概率, $p_{12}=q(1-p)$.

p_{13}:正在接受服务的顾客继续要求服务,且在Δt间隔内有两个顾客进入系统的概率.由假设，这种情况是不可能发生的,故$p_{13}=0$.

例题5：排队模型

p_{21}/p_{32}：系统内有一顾客正在接受服务，有一顾客正在排队，在Δt间隔内顾客因服务完毕离去，但再无顾客进入；以及系统内有一顾客正在接受服务，有两顾客正在排队，在Δt间隔内顾客因服务完毕离去，但再无顾客进入的概率，有$p_{21}=p_{32}=p(1-q)$

p_{22}：系统内有两顾客，其中一人正在接受服务，在Δt间隔内，他因服务完毕而离去，而另一顾客进入系统；或者正在接受服务的顾客将继续要求服务，且再无人进入系统的概率，$p_{22}=pq+(1-p)(1-q)$

p_{23}：系统内有两顾客, 正在接受服务的顾客将继续要求服务，且另一顾客进入系统的概率，$p_{23}=q(1-p)$

例题5：排队模型

而且,显然有:当$|i-j|\geq 2$时,$p_{ij}=0$.

p_{33}为:系统内有三位顾客, 或者一人将离去另一人将进入系统; 或者无人离开的概率, $p_{33}=pq+(1-p)(1-q)+q(1-p)$.

于是得该马氏链的一步转移概率矩阵:

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 0 \quad & \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1-q) & q & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) \\ 0 & 0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) \end{bmatrix} \end{array}$$

例题6

某计算机机房的一台计算机经常出故障,研究者每隔15分钟观察一次计算机的运行状态,收集了24小时的数据(共做97次观察).用1表示正常状态,0表示不正常状态,所得的数据序列为:

1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1

1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1.

设X_n为第n(n=1,2,…,97)次观测的计算机状态,可以认为它是一个齐次马氏链,状态空间I={0,1}.96次状态转移的情况是:

$0\to0$: 8次; $0\to1$: 18次; $1\to0$: 18次; $1\to1$: 52次

因此,一步转移概率可用频率近似地表示为:

$p_{00}=P\{X_{n+1}=0|X_n=0\}\approx 8/(8+18)=4/13,$

$p_{01}=P\{X_{n+1}=1|X_n=0\}\approx 18/(8+18)=9/13,$

$p_{10}=P\{X_{n+1}=0|X_n=1\}\approx 18/(18+52)=9/35,$

$p_{11}=P\{X_{n+1}=1|X_n=1\}\approx 52/(18+52)=26/35.$

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4/13 & 9/13 \\ 9/35 & 26/35 \end{pmatrix} \end{array}$$

Chapman-Kolmogorov方程

定理4.1

设$\{X_n, n\in T\}$为马尔可夫链，则对任意整数n≥0，0≤L<n和i, j∈I，n步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 具有下列性质：

1. $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)}$$

Chapman-Kolmogorov方程

2. $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1\in I} \cdots \sum_{k_{n-1}\in I} p_{ik_1} p_{k_1k_2} \cdots p_{k_{n-1}j}$$

3. $$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{(n-1)}$$

4. $$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}$$

Chapman-Kolmogorov方程

证(1)

$$p_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\}=\frac{P\{X_m=i,X_{m+n}=j\}}{P\{X_m=i\}}$$

$$=\sum_{k\in I}\frac{P\{X_m=i,X_{m+l}=k,X_{m+n}=j\}}{P\{X_m=i\}}$$

$$=\sum_{k\in I}\frac{P\{X_m=i,X_{m+l}=k,X_{m+n}=j\}}{P\{X_m=i,X_{m+l}=k\}}\frac{P\{X_m=i,X_{m+l}=k\}}{P\{X_m=i\}}$$

$$=\sum_{k\in I}P\{X_{m+n}=j\mid X_m=i,X_{m+l}=k\}P\{X_{m+l}=k\mid X_m=i\}$$

$$=\sum_{k\in I}p_{kj}^{(n-l)}p_{ik}^{(l)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}$$

Chapman-Kolmogorov方程

(2)在(1)中令l=1,k=k_1,得 $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik_1}^{(1)}p_{k_1 j}^{(n-1)}$

由此可递推出公式

(3)矩阵乘法

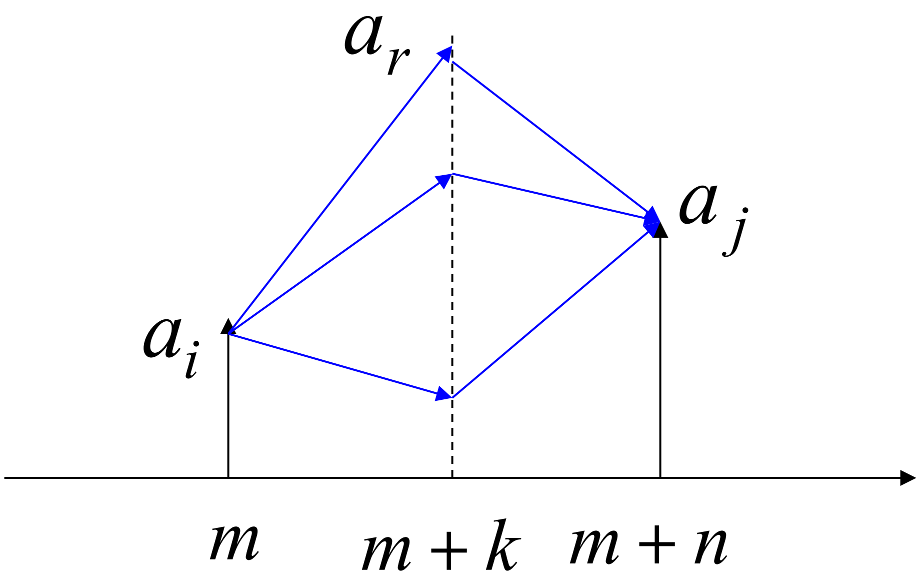
(4)由(3)推出

说明:

(1) n步转移概率由一步转移概率确定,

n步转移概率矩阵由一步转移概率矩阵确定(n次幂)

Chapman-Kolmogorov方程



直观解释对照图

例4.1：无限制随机游动

设质点在数轴上移动，每次移动一格，向右移动的概率为p，向左移动的概率为q=1-p，这种运动称为无限制随机游动。以X_n表示时刻n质点所处的位置，则$\{X_n, n \in T\}$是一个齐次马尔可夫链，求一步和k步转移概率。

$$P = \begin{bmatrix} q & 0 & p & 0 & \\ & 0 & q & 0 & p \end{bmatrix}$$

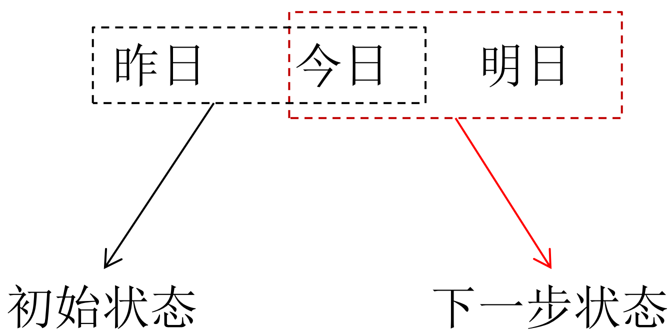
$$\begin{cases} x + y = k \\ x - y = j - i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k + (j - i)}{2} \\ y = \dfrac{k - (j - i)}{2} \end{cases}$$

例题4.3：天气预报问题

设昨日、今日都下雨，明日有雨的概率为0.7；昨日无雨、今日有雨，明日有雨的概率为0.5；昨日有雨、今日无雨，明日有雨的概率为0.4；昨日、今日均无雨，明日有雨的概率为0.2。若星期一、星期二均下雨，求星期四下雨的概率。

思路：



昨日	今日	状态
雨	雨	0
无雨	雨	1
雨	无雨	2
无雨	无雨	3

绝对概率与分布

定义4.5：

称 $p_j(n) = P\{X_n = j\}, (j \in I)$ 为时刻n马尔可夫链的**绝对概率**；

称 $\{p_j(n), j \in I\}$ 为马尔可夫链的**绝对分布**；

称 $\mathbf{P}^T(n) = \{p_1(n), p_2(n), \quad \}, \quad n > 0$ 为n时刻的**绝对概率向量**。

定义：

称 $p_j = P\{X_0 = j\}, (j \in I)$ 为马尔可夫链的**初始概率**；

称 $\{p_j, j \in I\}$ 为马尔可夫链的**初始分布**；

称 $\mathbf{P}^T(0) = (p_1, p_2, \quad)$ 为马尔可夫链的**初始概率向量**。

绝对概率与分布

定理4.2

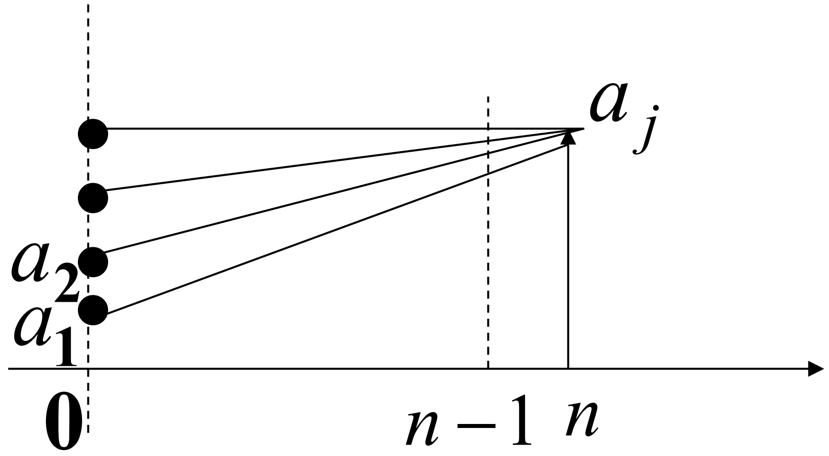
设$\{X_n, n \in T\}$为马尔可夫链，则对任意$j \in I$和$n \geq 1$，绝对概率$p_j(n)$具有下列性质：

1. $$p_j(n) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)}$$

2. $$p_j(n) = \sum_{i \in I} p_i(n-1) p_{ij}$$

3. $$\mathbf{P}^T(n) = \mathbf{P}^T(0)\mathbf{P}^{(n)}$$

4. $$\mathbf{P}^T(n) = \mathbf{P}^T(n-1)\mathbf{P}$$



证明

例题7

设马尔可夫链有k个状态，已知第n-1时刻的绝对概率向量为

$$\{p_1(n-1), p_2(n-1), \quad , p_k(n-1)\}$$

求第n时刻绝对概率向量。

马氏链的有限维分布

定理4.3

设$\{X_n, n\in T\}$为马尔可夫链，则对任意$i_1, \ldots, i_n \in I$和$n\geq 1$，有

$$P\{X_1=i_1, \quad , X_n=i_n\}=\sum_{i\in I} p_i p_{ii_1} \quad p_{i_{n-1}i_n}$$

证明

定理4.3说明马尔可夫链的有限维分布完全由它的初始概率和一步转移概率所决定。因此，只要知道初始概率和一步转移概率，就可以描述马尔可夫链的统计特性。

定理4.3

证明

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1=i_1,\quad ,X_n=i_n\}\\
=&\sum_{i\in I}P\{X_0=i,X_1=i_1,\quad ,X_n=i_n\}\\
=&\sum_{i\in I}P\{X_0=i\}P\{X_1=i_1\mid X_0=i\}\\
&\cdot P\{X_2=i_2\mid X_1=i_1\}\quad P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}\\
=&\sum_{i\in I}p_i p_{ii_1}p_{i_1i_2}\quad p_{i_{n-1}i_n}
\end{aligned}
$$

马氏链的有限维分布

推论：

$$(1)P\{X_0=a_{i_0},X_1=a_{i_1},\quad ,X_n=a_{i_n}\}=p_{i_0}(0)p_{i_0i_1}\quad p_{i_{n-1}i_n}$$

$$(2)P\{X_1=a_{i_1},X_2=a_{i_2},\quad ,X_n=a_{i_n}/X_0=a_{i_0}\}=p_{i_0i_1}\quad p_{i_{n-1}i_n}$$

总结：

1）齐次马氏链多步转移概率可由一步转移概率确定；

$$P(n)=P^n$$

2) 绝对概率可由初始概率及n步转移概率确定；

$$p_j(n)=\sum_{a_i\in I}p_i(0)p_{ij}(n)$$

3)有限维分布可完全由初始概率及一步转移概率确定。

例题8

例：A种啤酒的广告改变方式后经市场调查发现：买A种啤酒及另三种啤酒B,C,D（设市场上只有这四种啤酒）的顾客每两个月的平均转移概率如下：

$$A \to A(95\%) \to B(2\%) \to C(2\%) \to D(1\%)$$

$$B \to A(30\%) \to B(60\%) \to C(6\%) \to D(4\%)$$

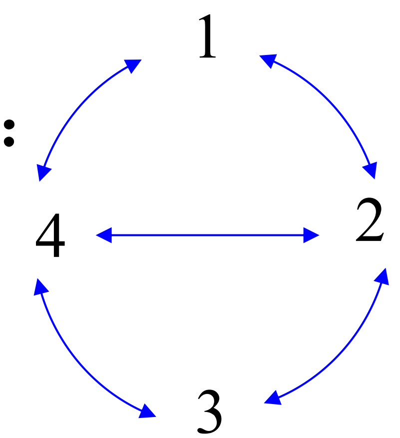
$$C \to A(20\%) \to B(10\%) \to C(70\%) \to D(0\%)$$

$$D \to A(20\%) \to B(20\%) \to C(10\%) \to D(50\%)$$

设目前购买A,B,C,D的顾客分布为(25%,30%,35%,10%)，求半年后A种啤酒的市场占有率.

例题9

例:四人相互抛一球，人的 标号为1,2,3,4,抛球规律如图示，X_n表示n次抛球后拿球人标号。



$\{X_n, n=0,1,2,\quad\}$为齐次马氏链，状态空 间为:

$I=\{1,2,3,4\}$，若$p(0)=\left(\dfrac{1}{10},\dfrac{2}{10},\dfrac{3}{10},\dfrac{4}{10}\right)$

(1)已知开始第一人拿球，经三次传球后又回到第一人的概率;

(2)开始第一人拿球，经三次传球后又回到第一人的概率;

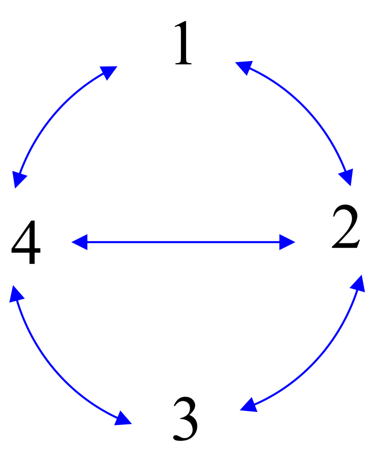
(3)经三次传球后第一人拿球的概率;

(4)经三次传球后，又回开始拿球人的概率。

例题9-续

$$P(1)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$



$$P(3)=P^3=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{7}{18} & \frac{1}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{27} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} & \frac{7}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{18} & \frac{1}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{27} & \frac{7}{27} & \frac{7}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

例题9-续

(1)已知开始第一人拿球，经三次传球后又回到第一人的概率；

(1) $p_{11}(3)=$

(2)开始第一人拿球，经三次传球后又回到第一人的概率；

(2) $P\{X_0=1, X_3=1\}=$

例题9-续

(3)经三次传球后第一人拿球的概率；

(3) $p_1(3)=P\{X_3=1\}=$

(4)经三次传球后，又回开始拿球人的概率。

(4) $\sum_{i=1}^{4}P\{X_0=i,X_3=i\}=$

例题10

设$\{X_n, n \geq 0\}$是具有三个状态0,1,2的齐次马氏链，一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

初始分布$p_i(0) = P\{X_0 = i\} = \frac{1}{3},\ i = 0,1,2$

试求：

(1) $P\{X_0 = 0, X_2 = 1, X_4 = 1\}$

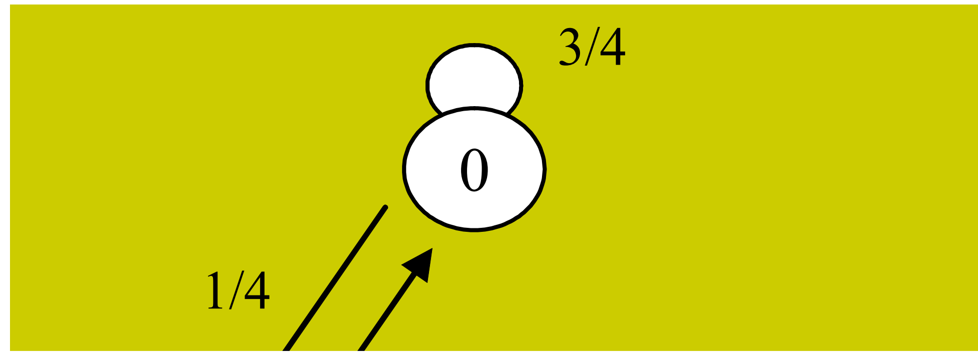
(2) $P\{X_2 = 1, X_4 = 1 \mid X_0 = 0\}$

(3) $P\{X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, X_3 \neq 0, X_4 = 0 \mid X_0 = 0\}$

例题10-续

解：由$C-K$方程可得二步转移概率矩阵为：

$$P(2)=P^2=\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



$(1)\quad P\{X_0=0, X_2=1, X_4=1\}=$

$(2)\quad P\{X_2=1, X_4=1 \mid X_0=0\}=$

$(3)\quad P\{X_1\neq 0, X_2\neq 0, X_3\neq 0, X_4=0 \mid X_0=0\}$

从0出发，经4步首次回到0状态

马尔可夫链的状态分类

- 周期、非周期
- 常返、非常返
- 正常返、零常返
- 遍历状态

例

例：一马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$

分析$P^{(n)}$的情况.

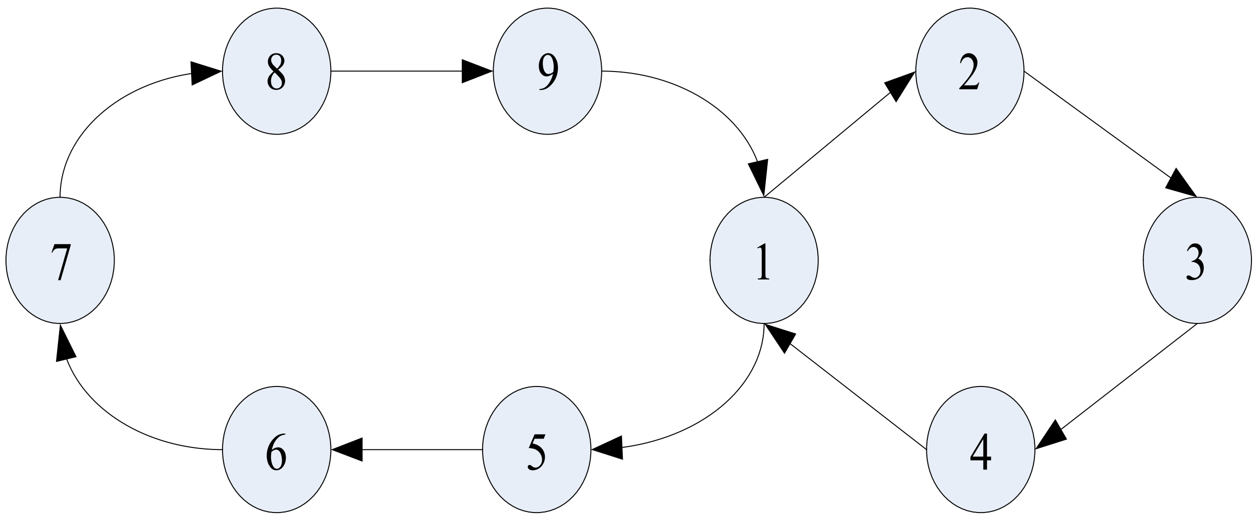
$$P^{(2)}=\begin{bmatrix}0.61 & 0.39\\ 0.52 & 0.48\end{bmatrix},\quad P^{(3)}=\begin{bmatrix}0.583 & 0.417\\ 0.556 & 0.444\end{bmatrix},$$

$$P^{(4)}=\begin{bmatrix}0.5749 & 0.4251\\ 0.5668 & 0.4332\end{bmatrix},\quad P^{(5)}=\begin{bmatrix}0.57247 & 0.42753\\ 0.57004 & 0.42996\end{bmatrix}$$

$$P^{(6)}=\begin{bmatrix}0.571741 & 0.428259\\ 0.571012 & 0.428988\end{bmatrix}$$

马尔可夫链的状态

设马尔可夫链的状态空间I={1,2,3,4,5,6,7,8,9}，状态间的概率转移图如下图



马尔可夫链的状态

假设$\{X_n, n\geq 0\}$是齐次马尔可夫链，其状态空间$I=\{0,1,2,3, \ldots\}$，转移概率是p_{ij}，$i, j\in I$，初始分布为$\{p_j, j\in I\}$。

定义4.6

如集合$\{n: n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$非空，则称该集合的最大公约数$d=d(i)=\text{G.C.D}\{n: p_{ii}^{(n)}>0\}$为状态$i$的周期。

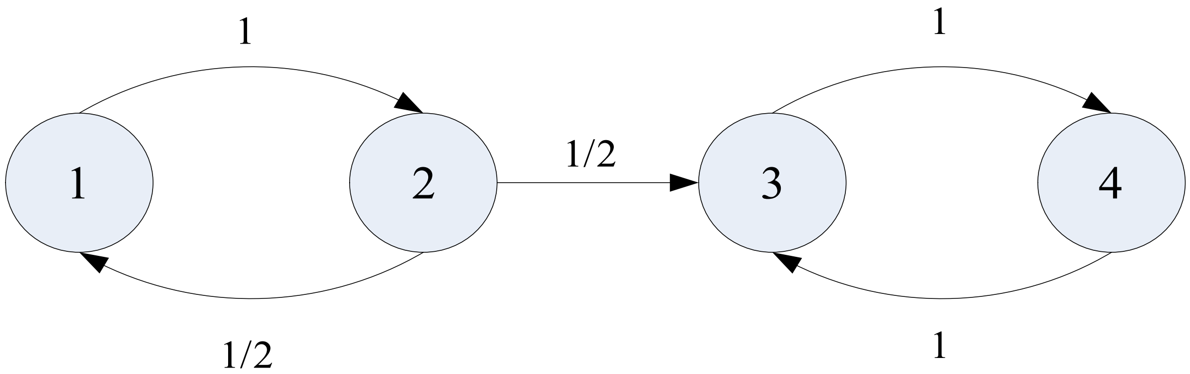
如$d>1$就称状态i为周期的，如$d=1$就称状态i为非周期的。

引理4.1

如状态i的周期为d，则存在正整数M，对一切$n\geq M$，有$p_{ii}^{(nd)}>0$。

例4.7

状态转移概率图



状态2与状态3的周期分别是多少？

状态2与状态3的区别是什么？

首中概率

首中概率

它表示质点由i出发，经n步首次到达j的概率，表示为：

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_{m+v} \neq j, 1 \le v \le n-1, X_{m+n} = j \mid X_m = i)$$

同时我们令 $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 表示质点由i出发，经有限步终于到达j的概率。

定理 4.4 对任一状态 i, j 及 $1 \le n < \infty$，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)}$$

常返与非常返

定义4.7 称状态i为常返的，如$f_{ii}=1$；称状态i为非常返的，如$f_{ii}<1$。

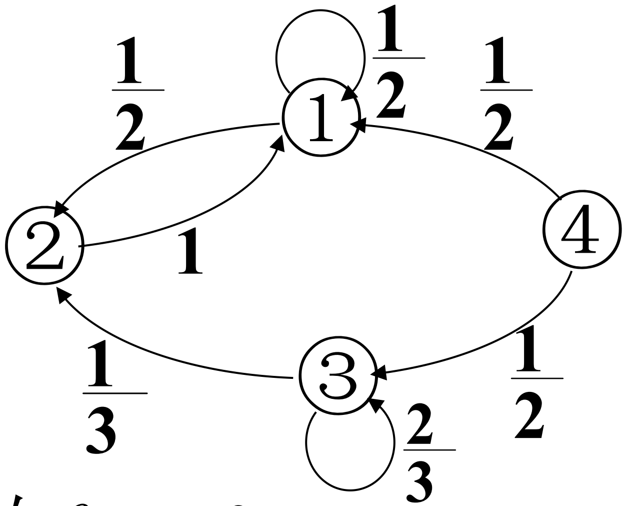
对于常返态i，由定义知$\{f_{ii}^{(n)}, n\geq 1\}$构成一概率分布，此分布的期望值

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

表示由i出发再返回的i的平均返回时间。

例题11

例.马氏链的状态转移图如下：



由图知：对一切 n，$f_{44}(n)=0$, 故$f_{44}=0$,

即状态 4为非常返的;

$$f_{33}(1)=\frac{2}{3}, f_{33}(n)=0(n>1), \text{故} f_{33}=\frac{2}{3}<1,$$

即状态 3也为非常返的;

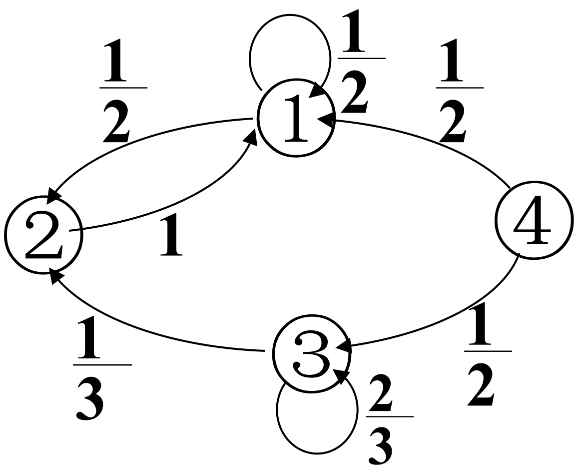
例题11-续

$$f_{11}(1)=f_{11}(2)=\frac{1}{2},\ f_{11}=f_{11}(1)+f_{11}(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

即状态1为常返的；

$$f_{22}(1)=0, f_{22}(n)=\frac{1}{2^{n-1}},(n\geq 2),$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1,$$ 即状态 2也为常返的。



遍历

定义4.8：

如$u_i<\infty$，则称常返态i为正常返的；如$u_i=\infty$，则称常返态i为零常返的。非周期的正常返态称为遍历状态。

如例11，$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}(n)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<+\infty$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\times\frac{1}{2^{n-1}}=3<+\infty$$

故状态1与状态2都是正常返态，又因其周期都是1，故它们都是遍历状态。

“状态的分类”的小结

状态
- 非常返态
- 常返态
  - 零常返态
  - 正常返态
    - 周期的
    - 非周期的——遍历态

为什么要对马尔可夫链的状态进行分类?

对齐次马氏链代表的系统进行研究时要讨论两个问题:

(1)在某一固定时刻n时的概率特性即求n步转移概率或绝对概率$p_j(n)=P\{X_n=j\}$(称**瞬态分析**);

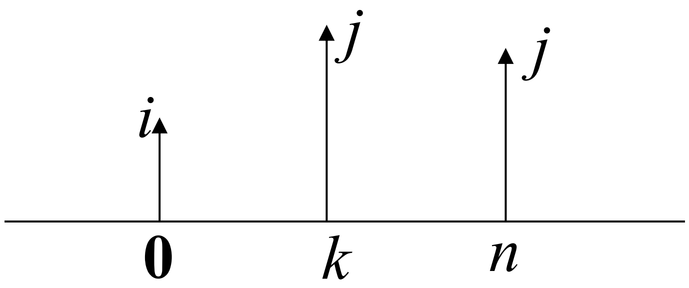
(2)当$n\to\infty$后系统的概率特性, 即$n\to\infty$时, $p_{ij}^{(n)}$的极限是否存在, 若存在又与状态的关系如何,极限概率能否构成概率分布.

解决此类问题需要**对状态(状态空间)进行分类(分解)**.

$f_{ij}(n)$与$p_{ij}(n)$的关系

定理4.4：对任意状态 i, j及$1 \le n < +\infty$，有：

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k) p_{jj}(n-k)$$



证：$p_{ij}(n) = P\{X_n = j / X_o = i\}$

$$= \sum_{k=1}^{n} P\{X_v \neq j, 1 \le v \le k-1, X_k = j, X_n = j / X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P\{X_v \neq j, 1 \le v \le k-1, X_k = j / X_0 = i\} \cdot$$

$$P\{X_n = j / X_0 = i, X_v \neq j, 1 \le v \le k-1, X_k = j\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k) p_{jj}(n-k)$$

$f_{ij}(n)$与$p_{ij}(n)$的关系

$$p_{jj}(0)=1,\ \text{取}k=n$$

$$f_{ij}(n)=p_{ij}(n)-\sum_{k=1}^{n-1}f_{ij}(k)p_{jj}(n-k)$$

$c\to k$方程及此定理是马氏链 的关键性公式，它们可以把$p_{ij}(n)$分解成较低步的转移概 率之和的形式。

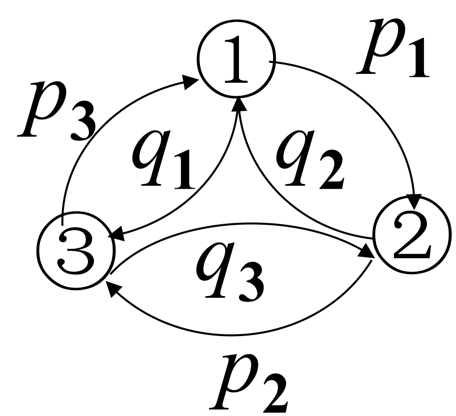
周期的等价定义：

$$G.C.D\{n:\ p_{ii}(n)>0\}=G.C.D\{n:\ n\geq 1,\ f_{ii}(n)>0\}$$

例题12

设马氏链的状态空间$I=\{1,2,3\}$，转移的矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{pmatrix}$$



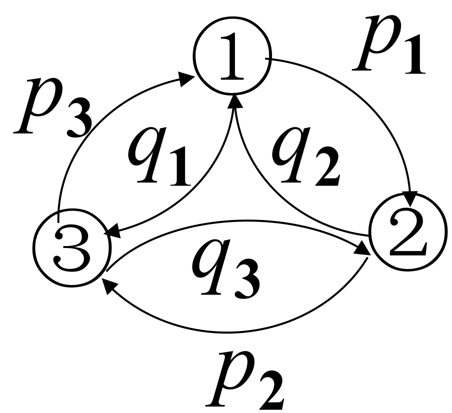
求从状态 1出发经 n步转移首次到达各状态 的概率。

$$f_{12}(n)=\begin{cases}(q_1p_3)^{m-1}q_1q_3, & n=2m, \quad m\geq 1\\ (q_1p_3)^m p_1, & n=2m+1, \quad m\geq 0\end{cases}$$

例题12-续

同理：

$$f_{13}(n)=\begin{cases}(p_1q_2)^{m-1}p_1p_2, & n=2m, \quad m\ge 1\\ (p_1q_2)^{m}q_1, & n=2m+1, \quad m\ge 0\end{cases}$$



$$f_{11}(n)=\begin{cases}0, & n=1\\ p_1(p_2q_3)^{m-1}q_2+q_1(q_3p_2)^{m-1}p_3 & n=2m, m\ge 1\\ p_1(p_2q_3)^{m-1}p_2p_3+q_1(q_3p_2)^{m-1}q_2q_3 & n=2m+1, m\ge 1\end{cases}$$

常返性的判别及其性质

定理4.5： 状态 i 为常返的充要条件为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty \qquad (f_{ii} = 1)$$

如 i 非常返，则 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \dfrac{1}{1-f_{ii}} < \infty \qquad (f_{ii} < 1)$

定理4.5告诉我们，若状态i为常返且过程无限地继续下去时，返回i的次数将无限增加；而当状态i为非常返时，则返回的平均次数将有一个有穷极限：

$$\frac{1}{1-f_{ii}}$$

定理4.5的结论

令随机变量 $\xi_n = \begin{cases} 1 & 若X_n = i \\ 0 & X_n \neq i \end{cases}$， $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n$

ξ表示马氏链状态位于 i的次数

$$而E(\xi / X_0 = i) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n / X_0 = i\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(\xi_n / X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot P\{\xi_n = 1 / X_0 = i\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n = i / X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)$$

可见$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)$实际上表示了马氏链从 i出发再返回i的平均次数。

定理4.5的结论

结论:(1)若$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$，则状态$i$是常返的；

(2)若$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$，则状态$i$是非常返的。

定理4.5的结论

对于确知状态*i*为常返时，如何进一步判断它是零常返还是遍历呢？

定理：设状态 i常返且有周期 d，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(nd) = \frac{d}{\mu_i}$$

其中 μ_i为i的平均返回时间 ,当$\mu_i = \infty$时, $\frac{d}{\mu_i} = 0$

由此定理立即得推论： 设状态 i为常返，则

(1) i为零常返 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0;$

(2) i为遍历状态 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = \frac{1}{\mu_i} > 0$

状态分类判别法

<table>
<tr><th colspan="2">状态分类</th><th colspan="2">判别法</th></tr>
<tr><td rowspan="2">常返态</td><td>正常返</td><td>$p_{ii}(n) \nrightarrow 0$
$(n \to \infty)$</td><td rowspan="2">$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$</td></tr>
<tr><td>零常返</td><td>$p_{ii}(n) \to 0$
$(n \to \infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">非常返态</td><td colspan="2">$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) < +\infty$</td></tr>
</table>

互通与传递性

定义：称自状态i可达状态j，并记为$i \to j$. 如存在$n>0$使$p_{ij}^{(n)}>0$；称状态i与j互通，并记为$i \leftrightarrow j$，如$i \to j$且$j \to i$.

定理4.8：可达和互通关系都具有传递性，即

如果$i \to j$，$j \to k$，则$i \to k$.

如果$i \leftrightarrow j$，$j \leftrightarrow k$，则$i \leftrightarrow k$.

定理4.9：如$i \leftrightarrow j$，则

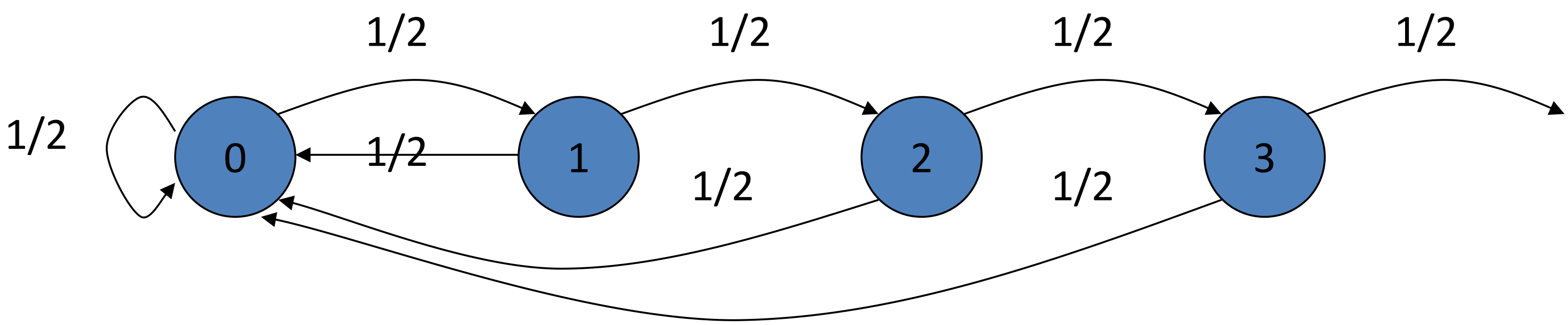
(1) i与j同为常返或非常返，如为常返，则同为正常返或零常返.

(2) i与j有相同的周期.

例4.9

设马氏链$\{X_n\}$的状态空间为$I=\{0,1,2\quad\}$，转移概率为

$$p_{00}=\frac{1}{2}, p_{i,i+1}=\frac{1}{2}, p_{i0}=\frac{1}{2}, i\in I,$$ 分析其遍历性.



状态空间的分解

定义4.9：

状态空间I的子集C称为闭集，如果对任意 $i \in C$及 $k \notin C$ 都有 $p_{ik} = 0$。

闭集的意思是自C的内部不能到达C的外部，这意味着一旦质点进入闭集C中，它将永远留在C中运动。

如果C的状态互通，闭集C称为不可约的。

如果其状态空间不可约，马尔可夫链称为不可约的。

状态分解

定理4.10：状态空间的分解定理

任一马尔可夫链的状态空间I，可唯一的分解成有限个或可列个互不相交的子集$D, C_1, C_2, \ldots$之和，使得

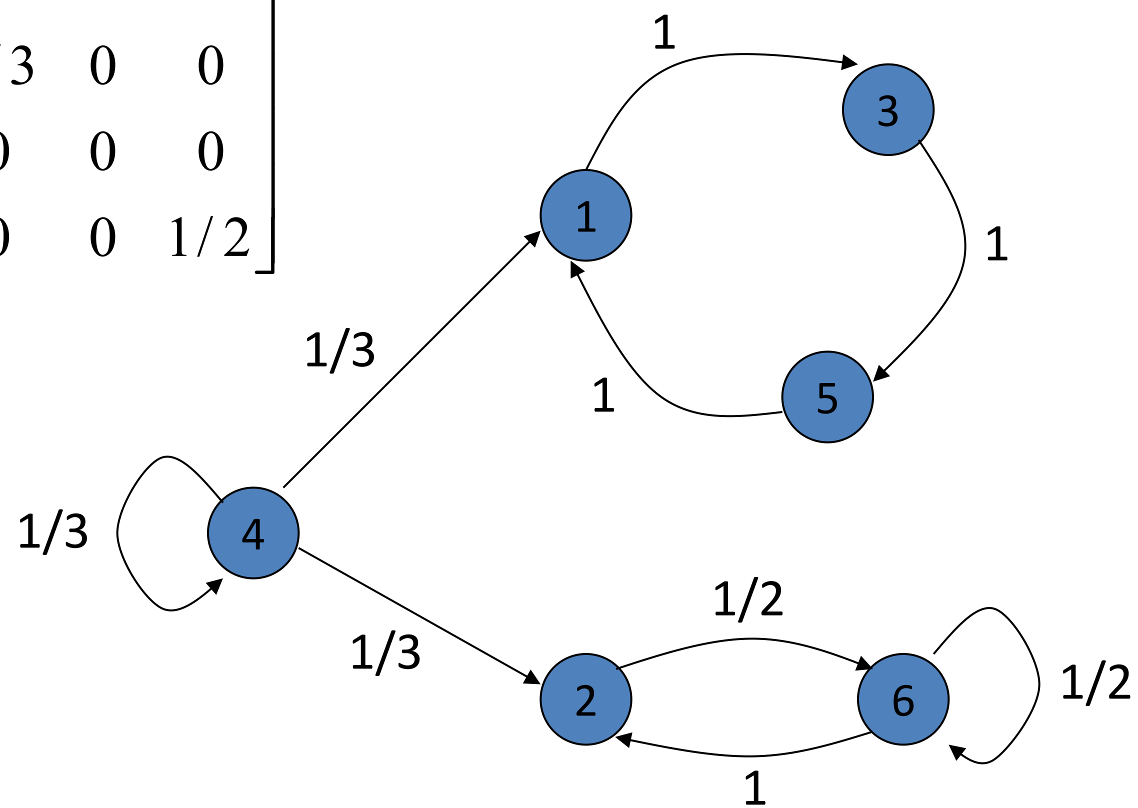
① 每一C_n是常返态组成的不可约闭集；

② C_n中的状态同类，或全是正常返，或全是零常返。它们有相同的周期且$f_{jk}=1, j, k \in C_n$。

③ D由全体非常返状态组成，自C_n中的状态不能到达D中的状态。

例题13

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$



状态分解

定理4.11：周期为d的不可约马氏链，其状态空间C可唯一地分解为d个互不相交的子集之和，即

$$C=\bigcup_{r=0}^{d-1} G_r,\quad G_r \cap G_s=\varnothing,\quad r\neq s$$

且使得自G_r中任一状态出发，经一步转移必进入G_{r+1}中（其中$G_d=G_0$）.

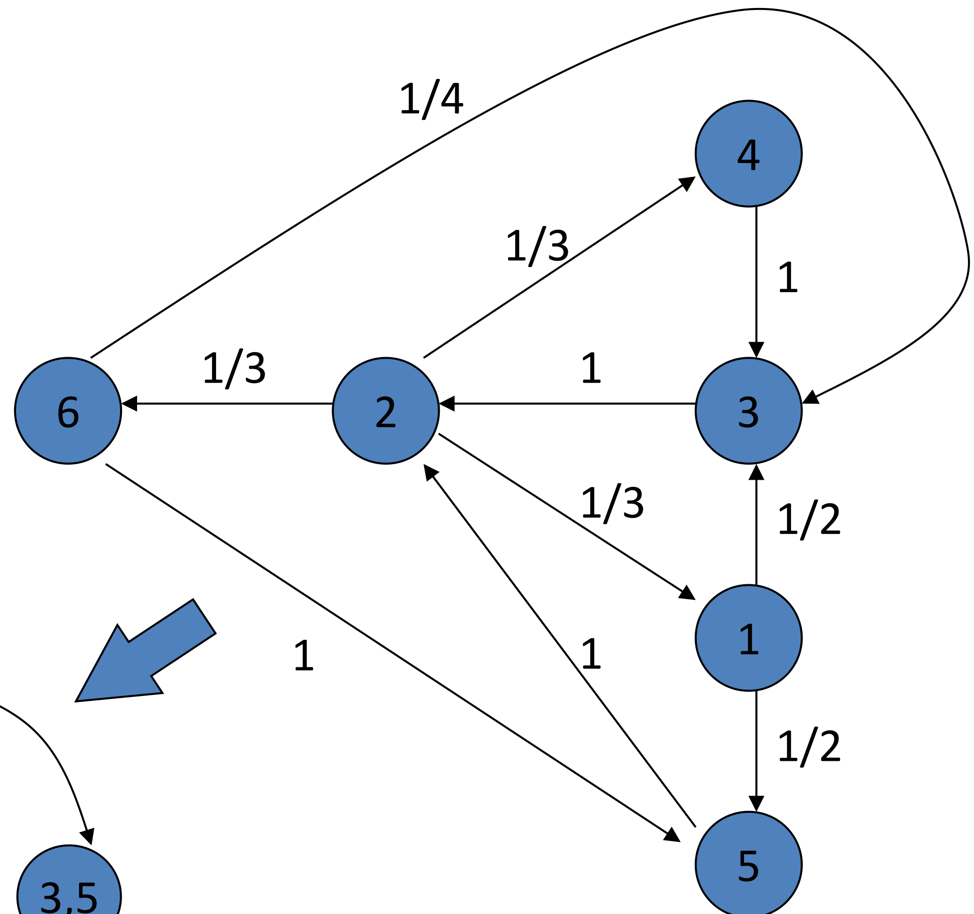
如果只在时刻$0,d,2d,$ 上考虑$\{X_n\}$，即得一新马氏链，其其转移矩阵$P^{(d)}=(p_{ij}^{(d)})$，对此新链， 每一G_r是非周期不可约闭集.

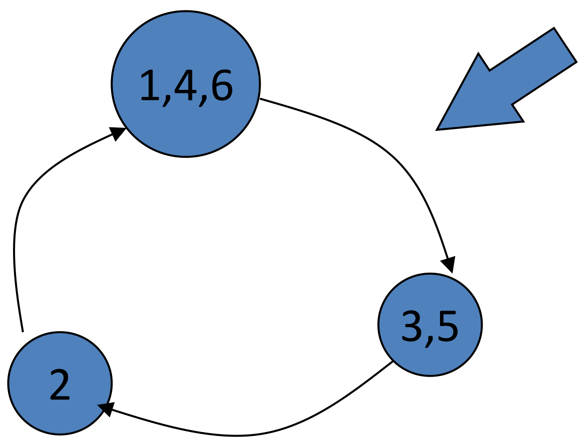
$$G_r=\{j: 对某个 n\geq 0, p_{ij}^{(nd+r)}>0\}$$

例4.14

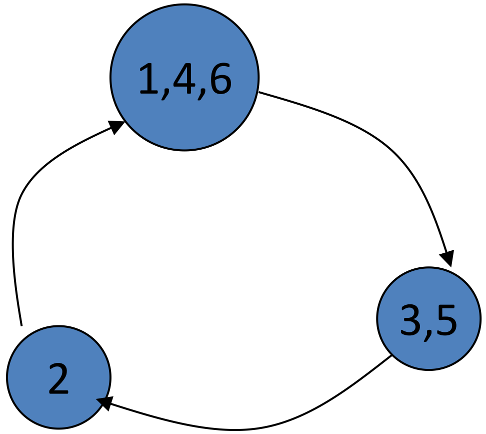
例4.14　设马氏链的状态空间为$C=\{1,2\quad 6\}$，转移阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

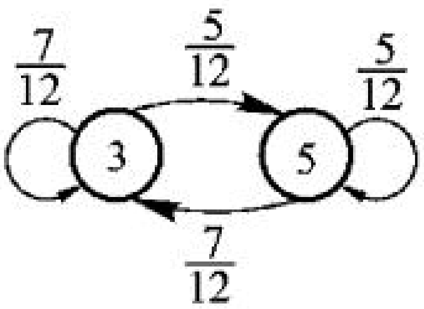


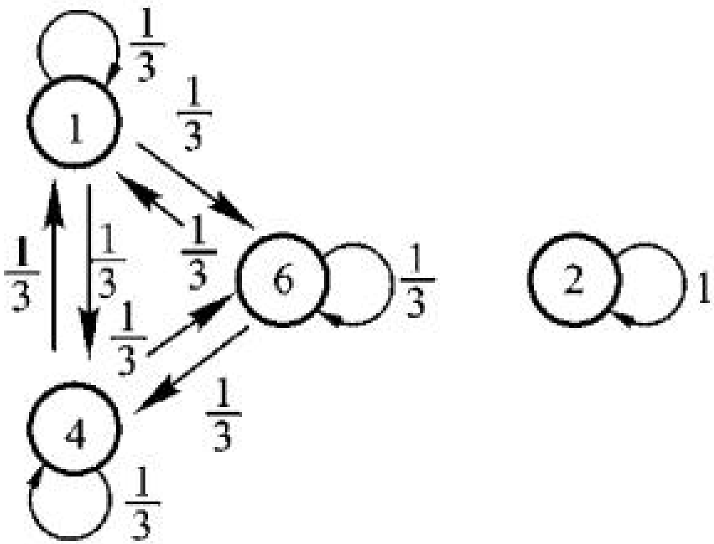


例4.15



$$
P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}
$$





例题14

例：一马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$

分析$P^{(n)}$的情况.

$$P^{(2)}=\begin{bmatrix}0.61 & 0.39\\ 0.52 & 0.48\end{bmatrix},\quad P^{(3)}=\begin{bmatrix}0.583 & 0.417\\ 0.556 & 0.444\end{bmatrix},$$

$$P^{(4)}=\begin{bmatrix}0.5749 & 0.4251\\ 0.5668 & 0.4332\end{bmatrix},\quad P^{(5)}=\begin{bmatrix}0.57247 & 0.42753\\ 0.57004 & 0.42996\end{bmatrix}$$

$$P^{(6)}=\begin{bmatrix}0.571741 & 0.428259\\ 0.571012 & 0.428988\end{bmatrix}$$

$p^{(n)}_{ij}$的渐进性质与平稳分布

定理：设有一有限状态的马氏链，若存在一个正整数m，使得对状态空间的任何状态i, j有$p_{ij}^{(m)} > 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)} = \pi$.

其中，π是一随机矩阵，且它的各行均相同.

平稳分布的定义

由于满足定理的π矩阵每一行都相同，我们取其中某一行来研究，也用π表示.

推论1：P的极限矩阵的每一行满足：

1）$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}, \pi_i > 0$，即 $\pi P = \pi$

2）$\sum_{j \in I} \pi_j = 1, \quad (i \in I)$

而且该极限矩阵是唯一满足上述关系的矩阵.

推论2：$\lim_{n \to \infty} P\{X_n = j\} = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_i$所取的值与初始分布无关.

平稳分布的定义

定义4.11

称概率分布$\{\pi_j, j \in \mathrm{I}\}$为马尔可夫链的平稳分布，若它满足

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum_{j \in I} \pi_j = 1, \quad \pi_j \geq 0 \end{cases}$$

平稳分布的判定

定理4.16

不可约非周期马尔可夫链是正常返的充要条件是存在平稳分布，且此

平稳分布就是极限分布$\left\{\frac{1}{\mu_j}, j \in I\right\}$。

推论：有限状态的不可约非周期马氏链必存在平稳分布。

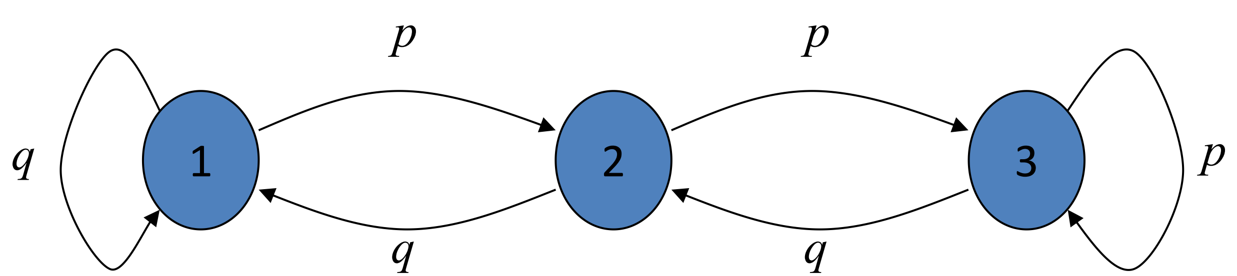
若所有状态是非常返或零常返的，则不存在平稳分布。

例题15

若马尔可夫链有三状态，其概率转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}$$

问此马尔可夫链是否遍历，若遍历求其平稳分布。

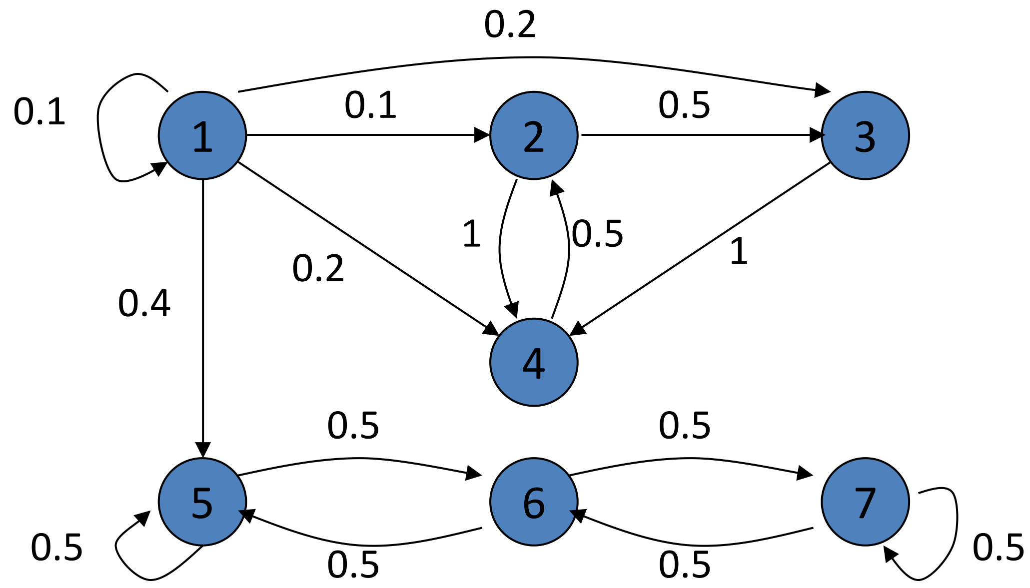


例4.18

设马尔可夫的转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

求每一个不可约闭集的平稳分布



- 作业：4.1，4.6，4.12