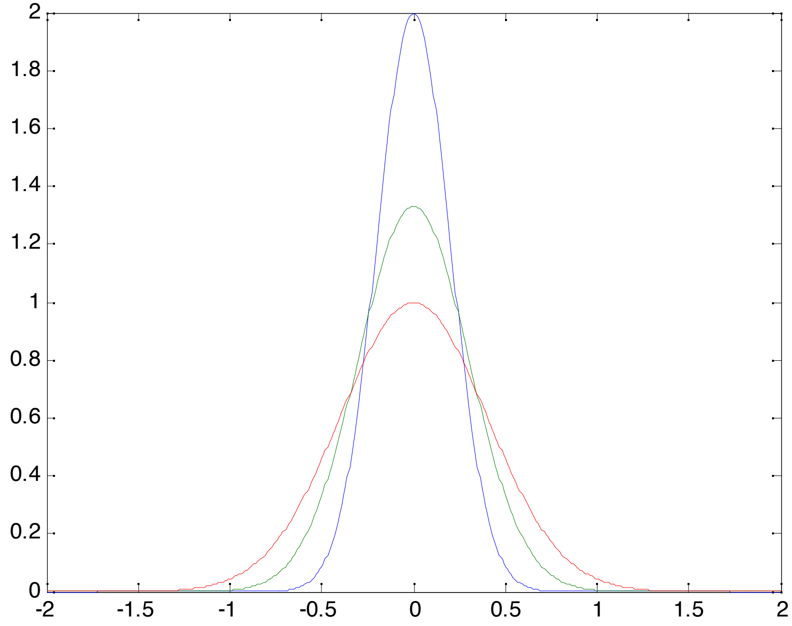
平稳过程的谱分析



Outline

- 谱密度及其性质
- 白噪声与窄带过程
- 平稳过程通过线性系统的分析

- 提示：课后学习学时 6 小时

- 平稳过程的相关函数在时域上描述了过程的统计特性，为了描述平稳过程在频域上的统计特性, 需要引入了谱密度的概念。
- 这章的内容主要讨论随机过程的谱分析

知识回顾

对于确定信号的傅立叶变换的回顾：

设X(t)是时间t的非周期实函数，则X(t)存在傅立叶变换的充要条件是：

（1）X(t)在$(-\infty, +\infty)$满足狄利赫利条件；

（2）X(t)绝对可积，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|X(t)|dt<\infty$

（3）若X(t)代表信号，则总能量有限，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|X(t)|^2dt<\infty$

> (1) 函数在任意有限区间内连续，或只有有限个第一类间断点（当t从左或右趋于这个间断点时，函数有有限的左极限和右极限）
> (2)在一个周期内，函数有有限个极大值或极小值。

傅立叶变换

此时，x(t)的傅立叶变换为：

$$F_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

傅立叶反变换为：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(w)e^{i\omega t}d\omega$$

帕塞瓦（Parseval)等式

证明：非周期性确定性时间函数的帕塞瓦（Parseval)等式为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_x(\omega)|^2 d\omega$$

功率谱密度的定义

由于$x(t)$能量无限,作截尾函数$x_T(t)$:

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & |t|\le T \\ 0, & |t|>T \end{cases}$$

$F_x(\omega,T)$为$x_T(t)$的傅立叶变换,

由帕塞伐公式以及傅立叶反变换，得到

$$\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega,T)|^2d\omega$$

功率谱密度的定义

进一步:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega,T)|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2d\omega$$

$\boxed{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2}$ 称为 **功率谱密度**

功率谱密度的定义

设$X(t)$是均方连续的随机过程，作截尾随机过程$X_T(t)$:

$$X_T(t)=\begin{cases}X(t), & |t|\le T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$$

$F_X(\omega,T)$为$X_T(t)$的傅立叶变换，

由帕塞伐公式以及傅立叶反变换，得到

$$\int_{-T}^{T}|X(t)|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_X(\omega,T)|^2 d\omega$$

功率谱密度的定义

对上式两边先取时间平均，再取统计平均得到：

$$\lim_{T\to\infty} E[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|X(t)\right|^{2} dt] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}E[\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_x(\omega,T)\right|^{2}]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[\left|F_x(\omega,T)\right|^{2}]d\omega$$

功率谱密度的定义

定义7.1：设{X(t), -∞<t<∞}为均方连续的随机过程，

称$\psi^2 = \lim_{T\to\infty} E[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2 dt]$ 为X(t)的平均功率；

称$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E[|F_x(\omega,T)|^2]$ 为X(t)的功率谱密度，

简称谱密度。

对于均方连续的平稳随机过程，平均功率等于该过程的均方值，等于它的谱密度在频域上的积分。即：

$$\psi^2 = E[|X(t)|^2] = R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\omega$$

功率谱密度的性质

1. $S_x(\omega) \geq 0$
2. $S_x(\omega)$是ω的实的，非负偶函数。
3. 对实随机过程，$S_x(\omega) = S_x(-\omega)$
4. 可积性，即$\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega < \infty$
5. 当$S_x(\omega)$是ω的有理函数时,其形式必为:

$$S_x(\omega) = \frac{a_{2n}\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \quad + a_0}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\omega^{2m-2} + \quad + b_0}$$

其中a_{2n-i}, b_{2m-j}为常数,$a_{2n} > 0, m > n$,分母无实根.

证明:

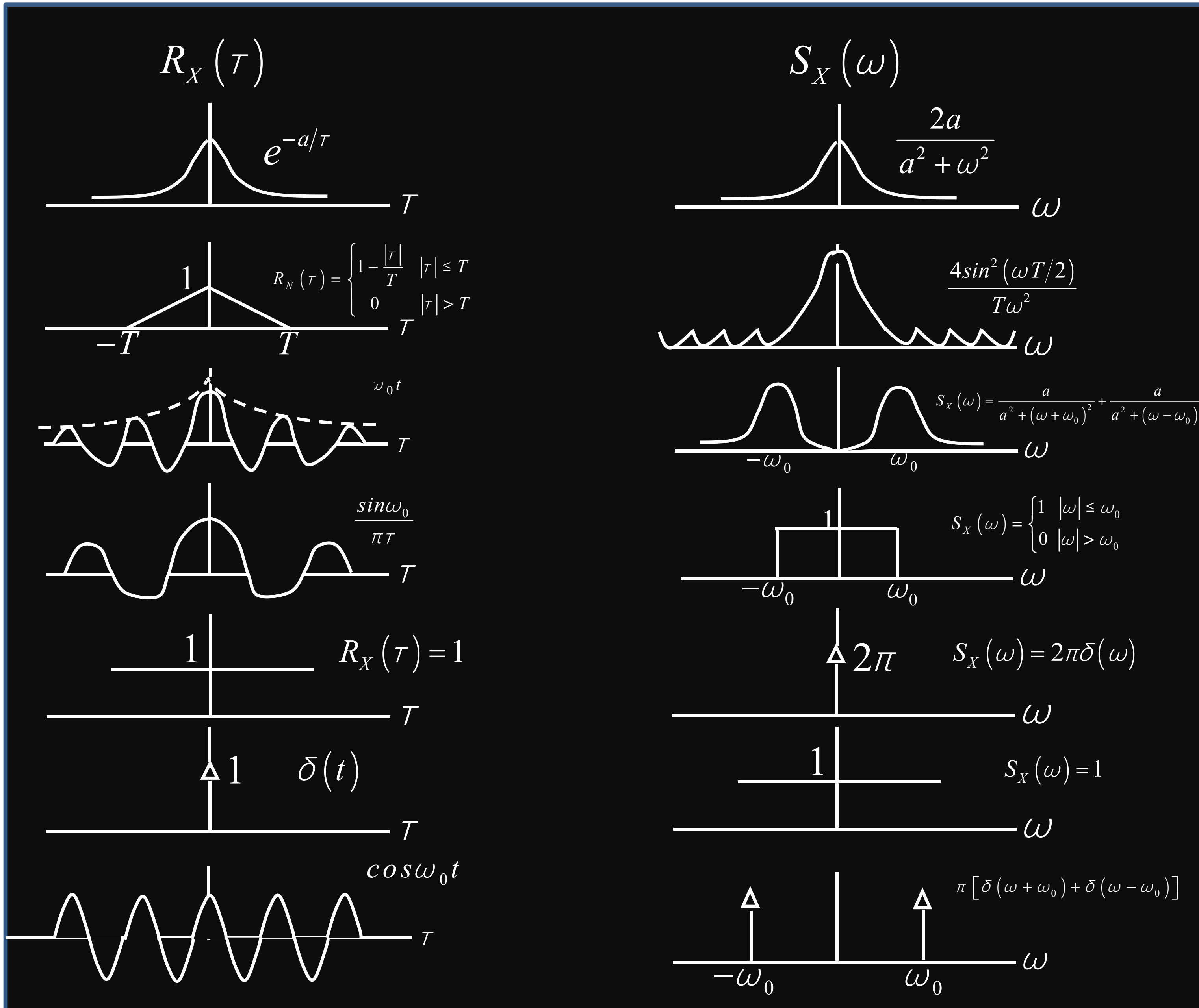
功率谱密度与自相关函数的关系

可以证明：随机过程的自相关函数与功率谱密度之间互为傅立叶变换对。这一个关系就是著名的**维纳-辛钦定理**。即：

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

常见的平稳过程的相关函数和谱密度



例题7.2

例题7.2：平稳随机过程的相关函数为

$R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}cos(\omega_0\tau)$，其中$a>0$, ω_0为常数.

求功率谱密度。

例题3

例题3：平稳随机过程谱密度$S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+5}{\omega^4+10\omega^2+9}$，求平稳随机过程的相关函数和均方值。

方法1:留数定理的利用
方法2:利用常用的傅立叶变换对

例题4

例4：求自相关函数$R_V(\tau)=\dfrac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau+b^2e^{-a|\tau|}$所对应的谱密度$S_V(\omega)$。

解：$S_V(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_V(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}}{2}e^{-i\omega\tau}d\tau+b^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]+\frac{2ab^2}{a^2+\omega^2}$$

白噪声

定义：设$\{X(t), -\infty < t < \infty\}$为实平稳随机过程，若它的均值为0，且谱密度在所有频率范围内为非0的常数，即$S_X(\omega) = N_0$ $(-\infty < \omega < \infty)$, 则$X(t)$为白噪声过程。

白噪声

为了对白噪声过程进行频谱分析，下面引入δ函数的概念。

具有下列性质的函数称为δ函数

（1） $\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$

δ函数的性质:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx=f(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-T)\,dx=f(T)$

白噪声

(2) $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$ 其中$u(t)$为单位阶跃函数,即

$$u(t)=\begin{cases}1, t>0\\0, t<0\end{cases}$$ 反之,有

$$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$

(3) δ函数的傅氏变换

$$F_{\delta}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt=1$$

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\ e^{i\omega t}d\omega$$ 故 $\delta(t)\leftrightarrow 1$

同理 $1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$$\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-i\omega t_0} \qquad e^{i\omega_0 t}\rightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

例题7.8

例题7.8：平稳随机过程的相关函数为$R_X(\tau)=a\cos(\omega_0\tau)$，其中$a$，$\omega_0$为常数.求功率谱密度。

白噪声自相关函数

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}N_0e^{j\omega\tau}d\omega=N_0\delta(\tau)$$

这表明：白噪声随时间的变化极快，在任意两个时刻t_1和t_2，$X(t_1)$和$X(t_2)$不相关。

(1)白噪声是一种理想化的数学模型。
(2)白噪声可以具有不同的概率分布,例如
正态白噪声,瑞利分布律的白噪声等等。

窄带随机过程

在多数通信系统中，有用的信号和噪声常被具有频率选择性的滤波器，放大器加工、处理。仅仅只有那些在系统通频带内的信号和噪声输出，在通频带之外信号被抑制掉。

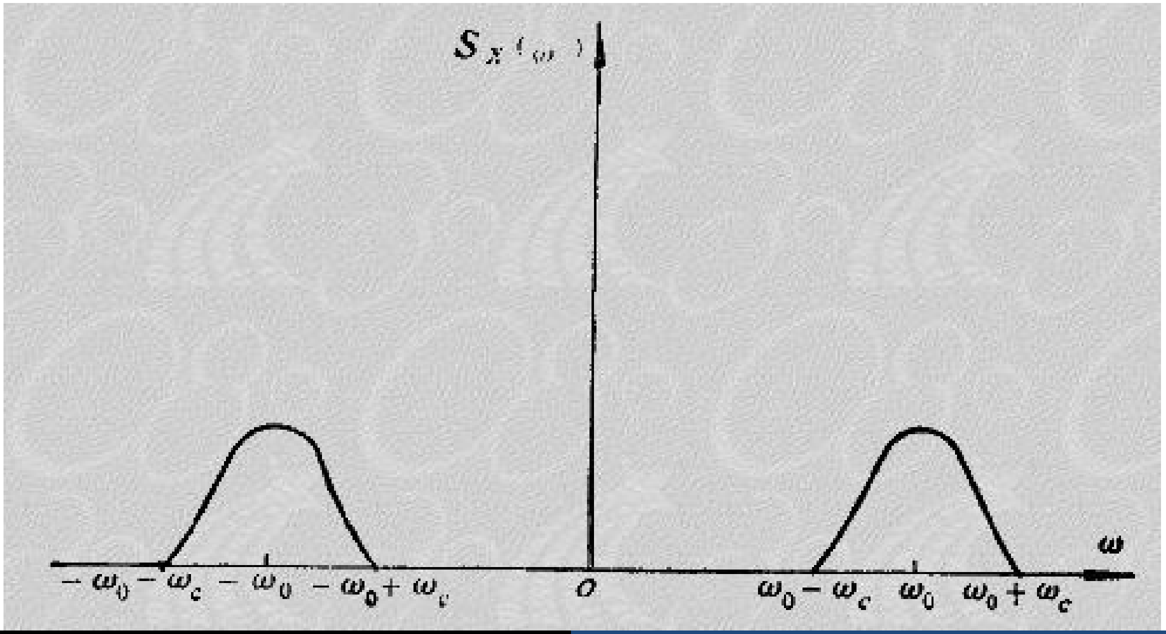
这类信号一般具有窄带的特点，它的频谱只占据一段较窄的频带。

窄带随机过程的定义

若平稳随机过程$X(t)$的功率谱密度$S_X(\omega)$具有以下特点：

$$S_X(\omega)=\begin{cases} S_X(\omega), & \omega_0-\omega_C \le |\omega| \le \omega_0+\omega_C \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

带宽$\Delta\omega=2\omega_C$且满足$\Delta\omega << \omega_0$，则称$X(t)$窄带随机过程。

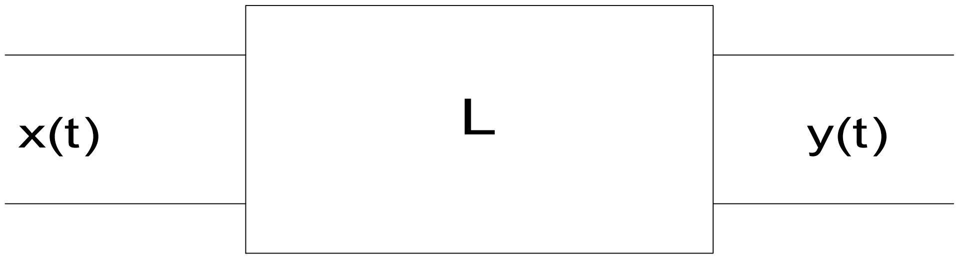


平稳过程通过线性系统的分析

- 线性时不变系统
- 频率响应与脉冲响应
- 线性系统的统计特性分析（均值和相关函数）
- 线性系统的谱密度

线性时不变系统

- 系统：对各种输入按一定的要求产生输出的装置。



- 如放大器，滤波器；波浪造成的轮船震动等。
- 设系统的输入为$x(t)$，系统的作用为L，输出为$y(t)$，则有

$$y(t)=L[x(t)]$$

- 其中，“L”称为算子，可以是加法、乘法、微分、积分和微分方程求解等数学运算。

线性时不变系统

定义：称算子L为**线性算子**，如果它满足以下条件：

若$y_1(t) = L[x_1(t)], y_2(t) = L[x_2(t)]$,则对任意常数$\alpha$、$\beta$有：

$$L[ax_1(t)+bx_2(t)] = aL[x_1(t)]+bL[x_2(t)]$$
$$= ay_1(t)+by_2(t).$$

对一个系统，若算子是线性的则称该系统是线性的。

例 1： $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}x(t)$ 　　算子$L=\dfrac{d}{dt}$是线性算子。

例 2： $y(t)=[x(t)]^2$ 　　算子$L=[\;]^2$不是线性算子。

线性时不变系统

定义：若系统L有$y(t)=L[x(t)]$，并对任一时间平移τ都有：

$$y(t+\tau)=\mathrm{L}[x(t+\tau)],$$

称该系统为时不变系统。如果系统是线性的，则该系统称为线性时不变系统。

例 3：微分算子$L=\dfrac{d}{dt}$是线性时不变的。

例 4：积分算子$L=\int_{-\infty}^{t}(\ )du$是线性时不变的。

线性时不变系统（结论）

- 系统的线性，表现为系统的叠加性和比例性（L[$kx(t)$=kL[$x(t)$]），更通用的表征为：

$$y(t)=L[\sum_{h=1}^{n}a_h x_h(t)]=\sum_{h=1}^{n}a_h L[x_h(t)]=\sum_{h=1}^{n}y(t)$$

- 系统的时不变性，表现为输入和输出的依赖关系不随时间的推移而变化。
- 工程中，常用到的是输入和输出可用下列线性微分方程来描述的系统：

$$b_n\frac{d^n y}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+b_0 y=a_m\frac{d^m x}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\ldots+a_0 x,$$

其中 $n>m,-\infty<t<+\infty.$

频率响应和脉冲响应

- 由线性信号的叠加性和比例性，可把输入信号看成许多单元信号所组成，而输出信号就是由各个单元信号分别通过线性系统后的总和.
- 常常将输入信号分裂成单元脉冲信号和单元正弦信号，前者引出了
  冲击响应法：从时域分析系统；
  后者引出了
  频率响应法：从频域分析系统
- 频域和时域的变换关系

频率响应和脉冲响应

- 频率响应函数：

  定理7.1：设L为线性时不变系统，若输入一谐波信号$x(t)=e^{i\omega t}$，则输出为

  $$y(t)=L[e^{i\omega t}]=H(\omega)e^{i\omega t}.$$

  其中 $H(\omega)=L[e^{i\omega t}]\big|_{t=0}$.

- 意义：对线性时不变系统输入一谐波信号时，其输出也是同频率的谐波，只不过振幅和相位有所变化。$H(w)$表示了这个变化，称为系统的**频率响应函数**。

如果将$H(w)$表示为$H(\omega)=A(\omega)e^{i\theta(\omega)}$，则$|A(\omega)|=|H(\omega)|$称为系统的振幅特性，$\theta(\omega)$称为系统的相位特性。

例5：求$L=\dfrac{d}{dt}$的频率响应函数。

频率响应和脉冲响应

- 脉冲响应函数：

根据δ函数的性质，可得：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

由于$y(t)=L[x(t)]$中的L只对时间函数进行运算，将上式代入得：

$$y(t)=L\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)L\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1)$$

其中 $h(t-\tau)=L\left[\delta(t-\tau)\right].$

当输入函数$x(t)$为脉冲函数$\delta(t)$时，

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)h(t-\tau)d\tau=h(t) \quad (2)$$

(2)式表明$h(t)$是输入脉冲时的输出，故称其为系统的脉冲响应。

频率响应和脉冲响应

- 脉冲响应函数（续）：
- 对(1)式作一些变换，可得：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \xrightarrow{u=t-\tau,\tau=u} y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

- 上面两式从时域描述了系统输入和输出间的关系，表明线性时不变系统的输出等于输入和脉冲响应的卷积，即

$$y(t)=h(t)*x(t).$$

例 6：求系统 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-a^2(t-u)}du$ 的脉冲响应。

频率响应和脉冲响应

- 脉冲响应的傅氏变换：

如果线性时不变系统的冲击响应函数$h(t)$绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

则系统的频率响应函数是冲击响应函数$h(t)$的傅氏变换，即

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

而$h(t)$是$H(\omega)$的傅氏反变换，即

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

频率响应和脉冲响应

- 输入$x(t)$和输出$y(t)$的傅氏变换：

如果$x(t)$和$y(t)$都满足傅氏变换条件，则有下列傅氏变换对：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt,\qquad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-i\omega t}dt,\qquad y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

- 输入频谱$X(\omega)$和输出频谱$Y(\omega)$有下列关系：

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega).$$

它从频域角度给出了系统输入和输出的关系。

- 对于物理可实现系统，冲击响应函数应满足以下条件：

$$h(t)=0\qquad 当t<0.$$

相应地有

$$y(t)=\int_{0}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\qquad\qquad H(\omega)=\int_{0}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt$$

线性系统输出的均值和相关函数

- 当线性系统的输入为确定信号时，常用微分方程来描述输入和输出的关系，用$x(t)$和$y(t)$来表示。
- 当线性系统的输入为随机信号时，可用随机过程$X(t)$和$Y(t)$来表示。$x(t)$和$y(t)$则用来表示随机过程的任一样本函数。
- 对随机信号，常用信号的统计特性：均值和相关函数来描述其输入和输出特性及二者的关系。
- 对线性系统的输出，有以下方法来研究其统计特性：
随机微分方程法：内容丰富但复杂。
冲击响应法和频谱法

线性系统输出的均值和相关函数

- 设X(t)和Y(t)为均方连续平稳过程，x(t)是X(t)的任一样本函数，有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau,$$

- 可以证明，当输入过程X(t)为均方连续平稳过程时，其输出

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

也是平稳过程。

线性系统输出的均值和相关函数

定理7.2：设输入平稳过程$X(t)$的均值和相关函数与输出过程的均值m_x，相关函数为$R_x(\tau)$，则输出过程

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

的均值和相关函数分别为：

$$m_y(t)=m_x\int_{-\infty}^{\infty}h(u)du=\text{常数};$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\overline{h(v)}R_X(\tau-u+v)dudv$$
$$=R_Y(\tau),\qquad (\tau=t_1-t_2).$$

线性系统输出的均值和相关函数

- **说明：**

1. 当输入过程$X(t)$平稳时，其输出的均值E[$Y(t)$]为常数。相关函数$R_Y(t_1, t_2)=R_Y(\tau)$表明输出是平稳的。并且，输出$Y(t)$和输入$X(t)$还是联合平稳的。

2. 令$v=-t$，可得

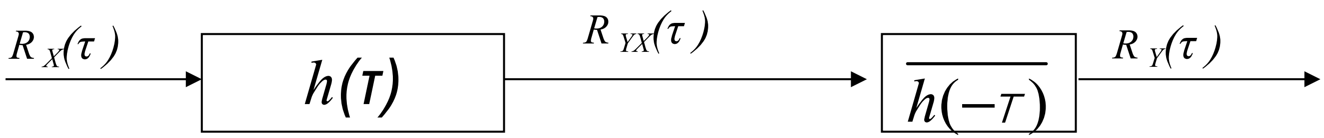
$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\overline{h(-t)}R_X(\tau-u-t)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(-t)}R_{YX}(\tau-t)dt,$$

即 $R_Y(\tau)=R_{YX}(\tau)*\overline{h(-\tau)}=R_X(\tau)*h(\tau)*\overline{h(-\tau)}$

线性系统输出的均值和相关函数

- **说明（续）：**
  从上式可以看出，输出的相关函数可以通过两次卷积产生，第一次是输入相关函数与脉冲响应的卷积，其结果是$Y(t)$和$X(t)$的互相关函数；第二次$R_{YX}(\tau)$是与$\overline{h(-\tau)}$的卷积，其结果是$R_Y(\tau)$。它们的关系如图：



例7：设线性系统输入为白噪声过程$X(t)$，其$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$.

线性系统的谱密度

- 用微分和冲击响应方法来求输出相关都比较复杂。
- 相关函数和功率谱密度是傅氏变换对，可以从输出谱密度来分析输入和输出的关系。

定理7. 3：设输入平稳过程$X(t)$具有谱密度$s_X(\omega)$，则输出平稳过程$Y(t)$的谱密度为

$$s_Y(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 s_X(\omega).$$

其中$H(\omega)$是系统的频率响应函数。称$\left|H(\omega)\right|^2$为系统的频率增益因子或频率传递函数。

线性系统的谱密度

- **说明：**

 1. 线性系统的输出谱密度等于输入谱密度乘以**增益因子**。

 2. 根据相关函数和谱密度的傅氏变换关系。可得输出相关函数的另一个比较简单的求法。

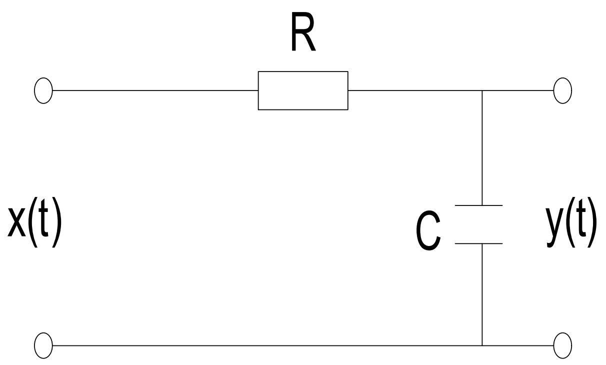
$$
\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_Y(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_X(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 e^{i\omega\tau}d\omega
\end{aligned}
$$

 进一步可得输出的平均功率（均方值）

$$
R_Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_X(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega
$$

线性系统的谱密度

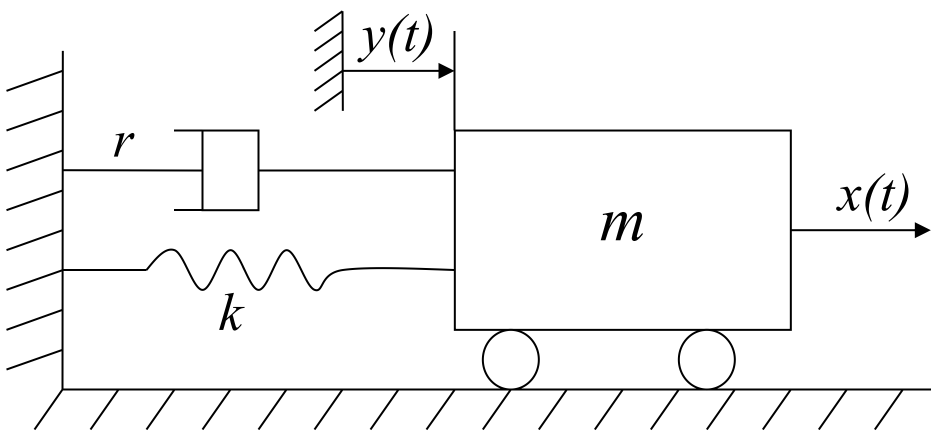
例8：如图所示的RC电路，若输入白噪声电压$X(t)$，其相关函数为$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$。求输出电压$Y(t)$的相关函数和平均功率。



线性系统的谱密度

例9：设如图的系统的激励力函数$x(t)$的谱密度$s_x(\omega)=s_0$，k为弹性系数，r为阻尼系数，试求输出位移$y(t)$的谱密度和平均功率。

$y(t)$的微分方程为$m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+r\dfrac{dy(t)}{dt}+ky(t)=x(t)$.



线性系统的谱密度

例10：设有两个线性时不变系统如图所示。它们的频率响应函数分别为$H_1(\omega)$和$H_2(\omega)$。若两个系统输入同一个均值为零的平稳过程$X(t)$，它们的输出分别为$Y_1(t)$和$Y_2(t)$。问如何设计$H_1(\omega)$和$H_2(\omega)$才能使$Y_1(t)$和$Y_2(t)$互不相干？