华中科技大学 2022 ～2023 学年第二学期

《数学物理方程与特殊函数》考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: 2023.05.14　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　　名: ________________

(答案请写在答题纸上)

一 (满分 15 分) 设 a 是正常数，用分离变量法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 + 2\cos\frac{3\pi x}{l}, u_t(x,0) = 2 + \cos\frac{5\pi x}{l}. \end{cases}$$

二 (满分 10 分) 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y, \ x^2 + y^2 < 1, \\ u(x,y)|_{x^2+y^2=1} = 0. \end{cases}$$

三 (满分 15 分) 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6(x-1), \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u_x(2,t) = 1, \\ u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{4} + x^3 - 3x^2 + x. \end{cases}$$

四 (满分 10 分) 设$\phi(x), \psi(x)$为已知函数满足$\phi(0) = \psi(0)$，利用行波法求解弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad -t < x < t, \ t > 0, \\ u(x,x) = \phi(x), \quad u(-x,x) = \psi(x), \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

五 (满分 15 分) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$， $\mathcal{F}^{-1}[\frac{\sin m\lambda}{\lambda}] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < m, \\ 0, & |x| > m. \end{cases}$

六 (满分 10 分) 用积分变换法求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = f(t), \\ u(x,0) = 0, \\ |u(x,t)| \leqslant M. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}x}] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

七 (满分 15 分) (每一问5分) 若u是区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上的二阶连续可微函数，且满足$\Delta u(x,y,z) \geqslant 0$ ($\forall$ $(x,y,z) \in \Omega$), 则称u在Ω上是下调和的。

1. 若u是$\mathbb{R}^3$上的下调和函数，证明对于任意的$M \in \mathbb{R}^3, r > 0$，不等式
$$u(M) \leqslant \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{B(M,r)} u dxdydz$$
成立，其中$B(M,r)$表示以M为球心、r为半径的球。
2. 若u为$\mathbb{R}^3$上的调和函数，证明u^2 是$\mathbb{R}^3$上的下调和函数。
3. 若u为$\mathbb{R}^3$上的调和函数，且满足
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} u^2 dxdydz < +\infty,$$
证明$u \equiv 0$. [提示：可利用第1小题和第2小题结论。]

八 (满分 10 分) 记 $\mu_m^{(0)}$ 是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m 个正零点，用固有函数法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + 1 - r^2, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1,t) = 0, \ |u(0,t)| < +\infty, \quad t > 0, \\ u(r,0) = 0, \quad 0 \leqslant r < 1. \end{cases}$$

提示：$J_0'(x) = -J_1(x)$, $(x^n J_n(x))' = x^n J_{n-1}(x)$.