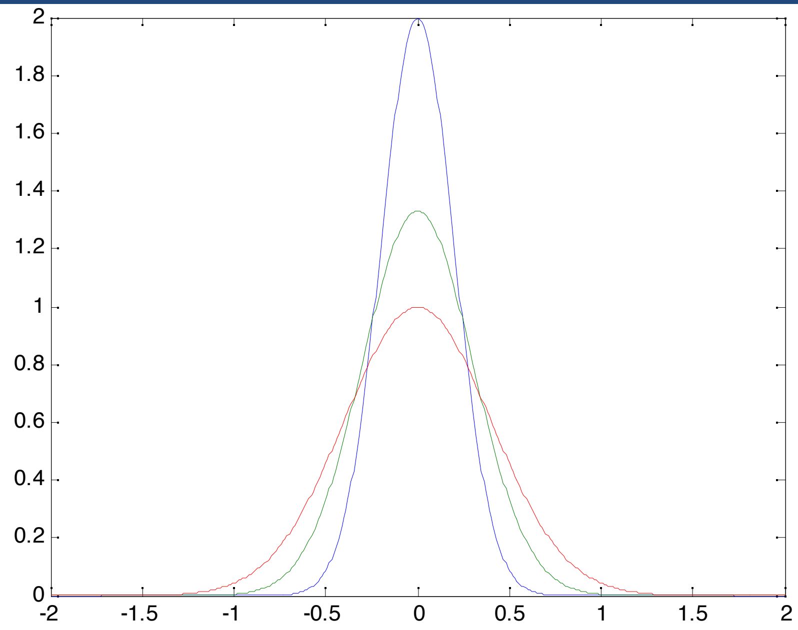
泊松过程



Outline

- 泊松过程定义
- 泊松过程的基本性质
  - 数字特征
  - 时间间隔分布
  - 等待时间分布
  - 到达时间的条件分布
- 非齐次泊松过程
- 复合泊松过程

计数过程

定义3.1：

称随机过程$\{N(t), t\geq 0\}$为计数过程，若$N(t)$表示到时刻t为止已发生的“事件A”的总数，且$N(t)$满足下列条件：

1. $N(t) \geq 0$;

2. $N(t)$取正整数值；

3. 若$s<t$，则$N(s) \leq N(t)$；

4. 当$s<t$时，$N(t)-N(s)$等于区间$(s,t]$中发生的“事件A”的次数。

计数过程

如果计数过程在不相重叠的时间间隔内，则事件A发生的次数是相互独立的，则计数过程N(t)是独立增量过程。

如果计数过程N(t)在(t,t+s]内（S>0），事件A发生的次数N(t+s)-N(t)仅与时间差s有关，而与t无关，则计数过程N(t)是平稳增量过程。

泊松过程定义

定义3.2：

设计数过程{X(t),t≥0}满足下列条件：

1. X(0)=0；
2. X(t)是独立增量过程；
3. 在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从参数λ >0的泊松分布，即对任意s, t≥0，有

$$P\{X(t+s)-X(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\quad n=0,1,$$

则称计数过程{X(t),t≥0}为具有参数λ>0的泊松过程。

泊松过程定义

泊松过程同时也是平稳增量过程

$$\lambda = \frac{E[X(t)]}{t}$$

表示单位时间内事件A发生的平均个数，故称为过程的速率或强度

泊松过程定义

定义3.3：

设计数过程{X(t),t≥0}满足下列条件：

1. X(0)=0；

2. X(t)是独立、平稳增量过程；

3. X(t)满足下列两式：

$$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda h+o(h)$$
$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$$

则称计数过程{X(t),t≥0}为具有参数λ>0的泊松过程。

泊松过程范例

例如：

- 电话交换机在一段时间内接到的呼叫次数；
- 火车站某段时间内购买车票的旅客数；
- 机器在一段时间内发生故障的次数；

定理3.1

定理3.1：

定义3.2和定义3.3是等价的。

证明

· 定义3.2(3)—>定义3.3(3)：利用泰勒级数展开式和高阶无穷小概念

· 定义3.3(3)—>定义3.2(3)：证明任意时间区间内发生的事件数服从参数为λ的泊松分布。首先计算$P_0(t+h)$，思想是将[0,t+h]区间划分为[0, t]和[t, t+h]两个连续的不重叠的区间，并利用定义3.3的条件2、3，最后应用微分定义式；其次计算$P_n(t+h)$ (n>0)

定理3.1证明

- **泊松过程两种定义的等价性的证明：**

定义3.2⇒定义3.3：由（2、3）知平稳性，又当h充分小的时候，有

$$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=P\{X(h)-X(0)=1\}$$

$$=e^{-\lambda h}\frac{\lambda h}{1!}=\lambda h\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}$$

$$=\lambda h[1-\lambda h+o(h)]=\lambda h+o(h)$$

$$P\{X(t+h)-X(t)\ge 2\}=P\{X(h)-X(0)\ge 2\}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}P\{X(h)-X(0)=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^n}{n!}=o(h)$$

定理3.1证明

定义3.3⇒定义3.2

令$P_n(t)=P\{X(t)=n\}=P\{X(t)-X(0)=n\}$,则

(1) 当$n=0$时

$$P_0(t+h)=P\{X(t+h)=0\}$$

$$=P\{X(t+h)-X(0)=0\}$$

$$=P\{X(t)-X(0)=0,X(t+h)-X(t)=0\}$$

$$=P\{X(t)-X(0)=0\}P\{X(t+h)-X(t)=0\}$$

$$=P_0(t)[1-\lambda h+o(h)]$$

定理3.1证明

故$\dfrac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\dfrac{o(h)}{h}$,

当$h\to 0$时有$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$或$\dfrac{P_0'(t)}{P_0(t)}=-\lambda$

从而$P_0(t)=ke^{-\lambda t}$

由于$P_0(0)=P\{X\ (0)=0\}=1$

于是有$P_0(t)=e^{-\lambda t}$

定理3.1证明

(2)对$n\geq 1$，建立递推公式

$$P_n(t+h)=P\{X(t+h)=n\}$$

$$=P\{X(t+h)-X(0)=n\}$$

$$=P\{[X(t+h)-X(t)]+[X(t)-X(0)]=n\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}P\{[X(t)-X(0)]=n-j\,|\,X(t+h)-X(t)=j\}$$

$$\cdot P\{X(t+h)-X(t)=j\}$$

定理3.1证明

$$= \sum_{j=0}^{n} P\left\{[X(t)-X(0)]=n-j\right\} P\left\{X(t+h)-X(t)=j\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} P_{n-j}(t)P_j(h)$$

$$= P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)P_1(h)+\boxed{\sum_{j=2}^{n} P_{n-j}(t)P_j(h)}$$

$$= P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)P_1(h)+o(h)$$

$$= (1-\lambda h)P_n(t)+\lambda h P_{n-1}(t)+o(h)$$

$$\sum_{j=2}^{n} P_{n-j}(t)P_j(h) \le \sum_{j=2}^{n} P_j(h) \le \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) = P(N(h)-N(0)\ge 2) = o(h)$$

定理3.1证明

建立递推的微分方程

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{h}$$

当$h\to 0$时，$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$

两边各乘$e^{\lambda t}$，$e^{\lambda t}\left[P_n'(t)+\lambda P_n(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

定理3.1证明

(3) 针对递推公式，特别地当$n=1$时，

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_1(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_0(t)=\lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}=\lambda$$

$$P_1(t)=(\lambda t+C)e^{-\lambda t}$$

由于$P_1(0)=P\{X(0)=1\}=0$

所以$C=0$，$P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$

定理3.1证明

(4)用数学归纳法证明 $P_n(t)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

***n*=0,*n*=1时，结论已成立**

假设*n*−1时(*n*≥1)，结论成立，由递推公式

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

$$=\lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

定理3.1证明

积分得$e^{\lambda t}P_n(t)=\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}+C$

由于$P_n(0)=P\{X(0)=n\}=0$

从而$P_n(t)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

所以$P\{X(t+s)-X(s)=n\}=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

$$(n=0,1,2\quad)$$

因此，定义3.3可推导出定义3.2。

例题

例：设交换机每分钟接到电话的次数X(t)是强度为λ的泊松过程。求：

(1)两分钟内接到3次呼叫的概率。

(2)第二分钟内接到第3次呼叫的概率。

P{第一分钟＝2次，第二分钟≥1次}？

例题

设$X_1, X_2, X_3, \cdots\cdots, X_n$,是独立同分布且具有相同分布的一组随机变量，令随机变量

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

若X_k服从参数为λ_k的泊松分布，则特征函数为：

$$g_{X_k}(t) = \exp(\lambda_k (e^{it} - 1))$$

由于X_k之间相互独立，因此Y的特征函数为：

$$g_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(t) = \exp(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e^{it} - 1)) = \exp((\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)(e^{it} - 1)) = \exp(\lambda_Y (e^{it} - 1))$$

$$\lambda_Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

因此，Y也必服从参数为λ_Y的泊松分布

数字特征

设{X(t),t≥0}是泊松过程，对任意的t,s∈[0, ∞)，且s<t，有

$$E[X(t)-X(s)]=D[X(t)-X(s)]=\lambda(t-s)$$

由于X(0)=0，所以

$$m_X(t)=E[X(t)]=\lambda t$$

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=\lambda t$$

证明

数字特征

$$m_X(t) = E[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = (\lambda t) e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

令$l = k - 1$ $\quad = (\lambda t) e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^l}{l!} = (\lambda t) e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t}$

$$= \lambda t$$

数字特征

$$E[X^2(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda t}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right] \cdot (\lambda t) = e^{-\lambda t}\left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right] \cdot (\lambda t)$$

$$= \underbrace{\boxed{\left[\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right]}}_{E[X(t)]} \cdot (\lambda t) + (\lambda t) \boxed{\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right]} =1$$

$$= E[X(t)] \cdot (\lambda t) + \lambda t = \lambda^2 t^2 + \lambda t$$

$$D[X(t)] = E[X^2(t)] - E^2[X(t)]$$

$$= \lambda^2 t^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

数字特征

由于**X(0)=0**，所以

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)] = \lambda s(\lambda t + 1)$$

证明

$$\begin{aligned}
R_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] \\
&= E[X(s)(X(t) - X(s) + X(s))] \\
&= E[X(s)(X(t) - X(s))] + E[(X(s))^2] \\
&= E[(X(s))]E[(X(t) - X(s))] \\
&\quad + D[X(s)] + (E[X(s)])^2 \\
&= \lambda s \lambda(t-s) + \lambda s + (\lambda s)^2 = \lambda s(\lambda t + 1)
\end{aligned}$$

数字特征

$$B_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$$

一般情况下，泊松过程的协方差函数可表示为

$$B_X(s,t) = \lambda \min(s,t)$$

泊松过程是一个平稳增量过程，但不是一个平稳过程

补充例题-1

- 假设在时间区间[0,t)内男女顾客达到某商场的人数分布独立地服从1人/min和2人/min的泊松过程。求：
  - 时间区间[0,t)内达到商场总人数的分布
    可以用特征函数
  - 已知时刻t时已有60人达到商场的条件下，问其中40人是女性顾客的概率

解：

（1）用N(t)表示[0,t)内到达商场的总顾客数

$$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$$

由于$N_1(t)$与$N_2(t)$独立，可知N(t)服从参数为3的泊松过程。

补充例题-1

因为，$N_1(t)$和$N_2(t)$的特征函数分别为：

$$g_1(v) = e^{\lambda_1 t(e^{iv}-1)}, \qquad g_2(v) = e^{\lambda_2 t(e^{iv}-1)}$$

$N_1(t)$和$N_2(t)$独立

$\therefore$ $N(t)$的特征函数为：

$$g(v) = g_1(v)\cdot g_2(v) = \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)t(e^{iv} - 1)\}$$

$\therefore$ $N(t)$仍为泊松过程，且参数$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$

补充例题-1

（2）$P\{N_2(t)=40 \mid N(t)=60\} = P\{N_2(t)=40 \mid N_1(t)+N_2(t)=60\}$

$$= \frac{P\{N_2(t)=40,\ N_1(t)+N_2(t)=60\}}{P\{N(t)=60\}} = \frac{P\{N_2(t)=40,\ N_1(t)=20\}}{P\{N(t)=60\}}$$

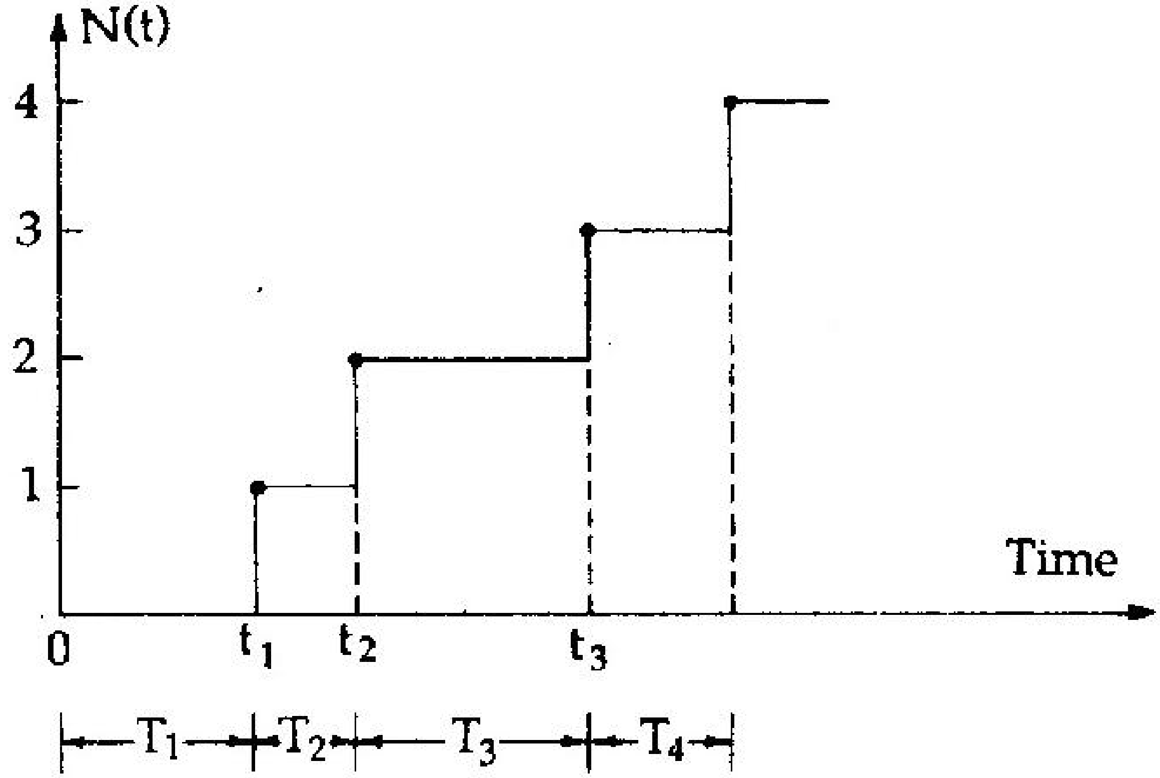
$N_1(t)$和$N_2(t)$独立

$$\therefore\ 上式 = \frac{P\{N_2(t)=40\}\cdot P\{N_1(t)=20\}}{P\{N(t)=60\}}$$

$$= \frac{e^{-2t}\dfrac{(2t)^{40}}{40!}\cdot e^{-t}\dfrac{(t)^{20}}{20!}}{e^{-3t}\dfrac{(3t)^{60}}{60!}} = \frac{60!}{40!\cdot 20!}\cdot\frac{e^{-2t}\cdot e^{-t}}{e^{-3t}}\cdot\frac{t^{40}\cdot t^{20}}{t^{60}}\cdot\frac{2^{40}}{3^{60}}$$

$$= \boxed{C_{60}^{40}\left(\frac{2}{3}\right)^{40}\left(\frac{1}{3}\right)^{20}} \text{ ------ 二项分布}$$

时间间隔的分布



设$\{N(t),t\geq 0\}$是泊松过程，令$N(t)$表示t时刻事件A发生的次数，T_n表示从第（n-1）次事件A发生到第n次事件A发生的时间间隔。

时间间隔的分布

定理3.2：

设{X(t),t≥0}为具有参数λ的泊松过程，$\{T_n, n\geq 1\}$是对应的时间间隔序列，则随机变量T_n是独立同分布的均值为1/λ的指数分布。

证明思路：

$$F_{T_1}(t)=P\{T_1\leq t\}=1-P\{T_1>t\}=1-P\{X(t)=0\}$$

$$F_{T_2}(t)=P\{T_2\leq t\}=1-P\{T_2>t\}=1-P\{T_2>t\mid T_1=s\}=1-P\{X(t+s)-X(s)=0\mid T_1=s\}$$

对于任意n=1,2, …事件A相继到达的时间间隔T_n的分布为

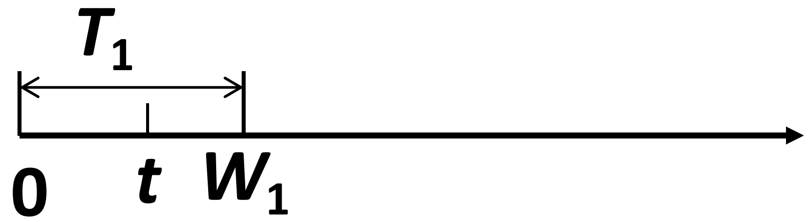
$$F_{T_n}(t)=P\{T_n\leq t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

其概率密度为

$$f_{T_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

时间间隔的分布

证 (1)n=1



事件$\{T_1 > t\}$发生当且仅当在$[0, t]$内没有事件发生

$$P\{T_1 > t\} = P\{X(t) = 0\}$$

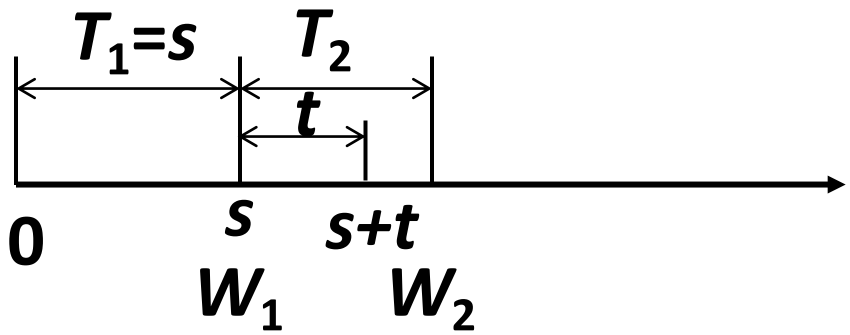
$$= P\{X(t) - X(0) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

$$F_{T_1}(t) = P\{T_1 \le t\} = 1 - P\{T_1 > t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

T_1服从均值为$1/\lambda$的指数分布

时间间隔的分布

(2)n=2



$P\{T_2>t|\ T_1=s\}$

$=P\{$在$(s,\ s+t]$内没有事件发生$|\ T_1=s\}$

$=P\{X(s+t)-X(s)=0\ |\ X(s)-X(0)=1\}$

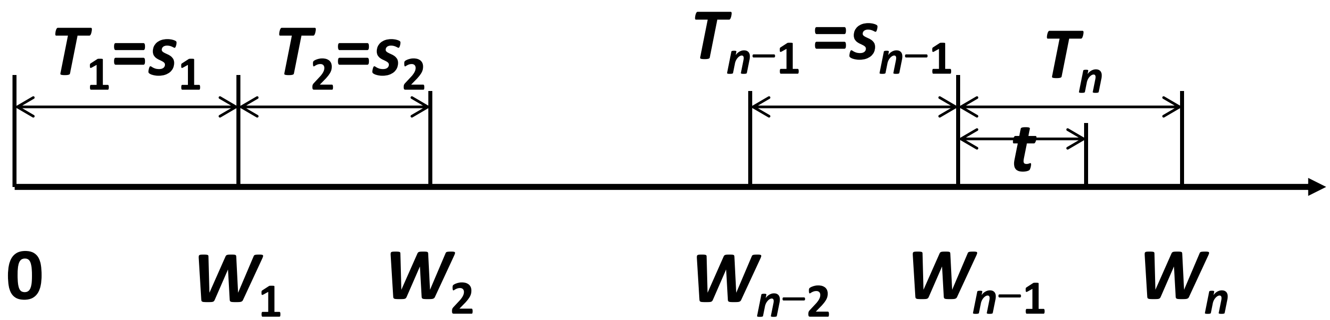
$=P\{X(s+t)-X(s)=0\}=e^{-\lambda t}$

$$F_{T_2}(t)=P\{T_2\le t\}=1-P\{T_2>t\}=1-e^{-\lambda t}$$

T_2服从均值为$1/\lambda$的指数分布

时间间隔的分布

(3) $n \geq 1$



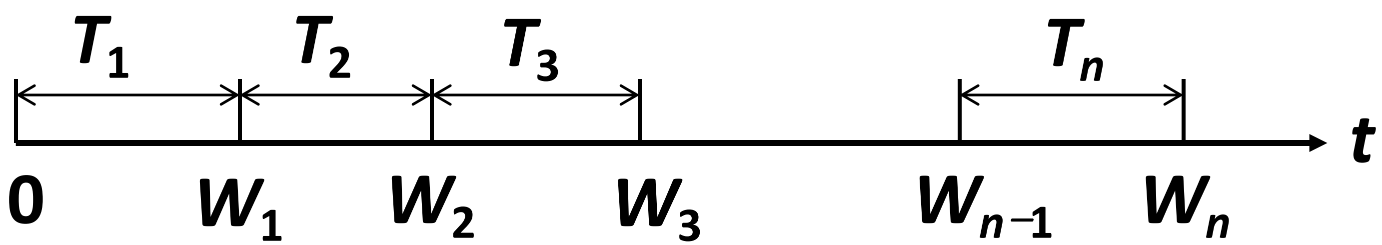
$$P\{T_n > t \mid T_1 = s_1, \quad , T_{n-1} = s_{n-1}\}$$

$$= P\{X(s_1 + \quad + s_{n-1} + t) - X(s_1 + \quad + s_{n-1}) = 0\}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

$$F_{T_n}(t) = P\{T_n \leq t\} = 1 - P\{T_n > t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

等待时间的分布



等待时间W_n是指第n次事件A到达的时间分布

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

因此W_n是n个相互独立的指数分布随机变量之和。

等待时间的分布

定理3.3：

设$\{W_n, n\geq 1\}$是与泊松过程$\{X(t), t\geq 0\}$对应的一个等待时间序列，则W_n服从参数为n与λ的Γ分布，其概率密度为

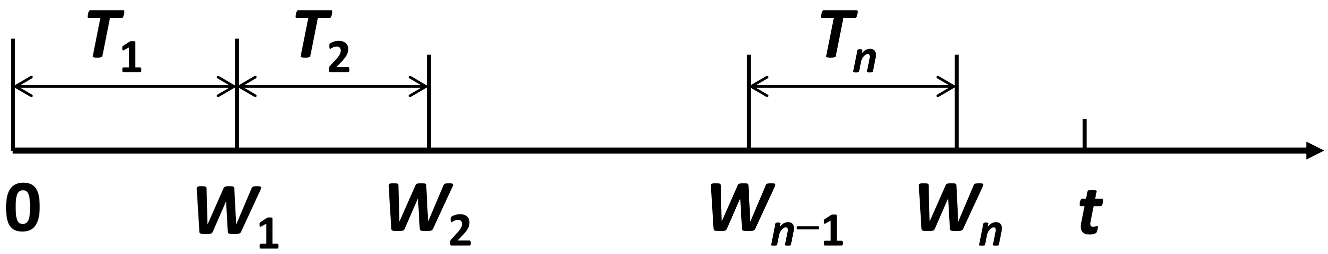
$$f_{W_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

证明思路：

$$F_W(t)=P\{W_n\leq t\}=P\{X(t)\geq n\}$$

等待时间的分布

证：$W_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \quad (n \geq 1)$，$T_i$ 为时间间隔



$$\{W_n \leq t\} \Leftrightarrow \{X(t) \geq n\}$$

$$F_{W_n}(t) = P\{W_n \leq t\} = P\{X(t) \geq n\}$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} P\{X(t) = j\} = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

等待时间的分布

$$f_{W_n}(t)=\frac{dF_{W_n}(t)}{dt}$$

$$=\sum_{j=n}^{\infty}(-\lambda)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}+\sum_{j=n}^{\infty}e^{-\lambda t}j\frac{(\lambda t)^{j-1}}{j!}\lambda$$

$$=-\sum_{j=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}+\sum_{j=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

习题3.7

- 设$\{X(t), t\geq 0\}$和$\{Y(t), t\geq 0\}$分别是具有参数λ_1和λ_2的的相互独立的泊松过程。令W和W'是X(t)的两个相继泊松型事件出现的时间，且W<W'。对于W<t<W'，有X(t)=X(W)和X(W')=X(W)+1，定义N=Y(W')-Y(W)，求N的概率分布。

解：令$w' - w = s$

$$P\{N = k \mid w' - w = s\} = P\{Y(w') - Y(w) = k \mid w' - w = s\}$$
$$= P\{Y(s) - Y(0) = k\} = P\{Y(s) = k\}$$
$$= e^{-\lambda_2 s} \frac{(\lambda_2 s)^k}{k!}$$

但此时，s是一个随机变量，$P\{N = k \mid w' - w = s\}$是s的函数，因此$\{N = k \mid w' - w = s\}$也是随机变量

习题3.7

因此，针对题目的问题，需对其求数学期望

$$\therefore\ P(N=k)=\int_0^{\infty}P(N=k\mid w'-w=s)\cdot f(s)ds$$

w'与w为两个相继事件的事件

$\therefore$ s为指数分布随机变量，且$f(s)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 s}$

于是，$P(N=k)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda_2 s}\dfrac{(\lambda_2 s)^k}{k!}\cdot\lambda_1 e^{-\lambda_1 s}ds$

$$=\lambda_1\lambda_2^k\int_0^{\infty}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}\frac{s^k}{k!}ds$$

$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

到达时间的条件分布

假设在[0,t]内事件A已经发生一次，我们要确定这一到达时间W_1的分布。

泊松过程 → 平稳独立增量过程

可以认为[0,t]内长度相等的区间包含这个事件的概率应该相等，或者说，这个事件的到达时间应在[0,t]上服从均匀分布。对于s<t有

$$P\{W_1 \le s \mid X(t)=1\} = ?$$

分布函数

$$F_{W_1|X(t)=1}(s) = \begin{cases} 0, & s<0 \\ s/t, & 0 \le s < t \\ 1, & s \ge t \end{cases}$$

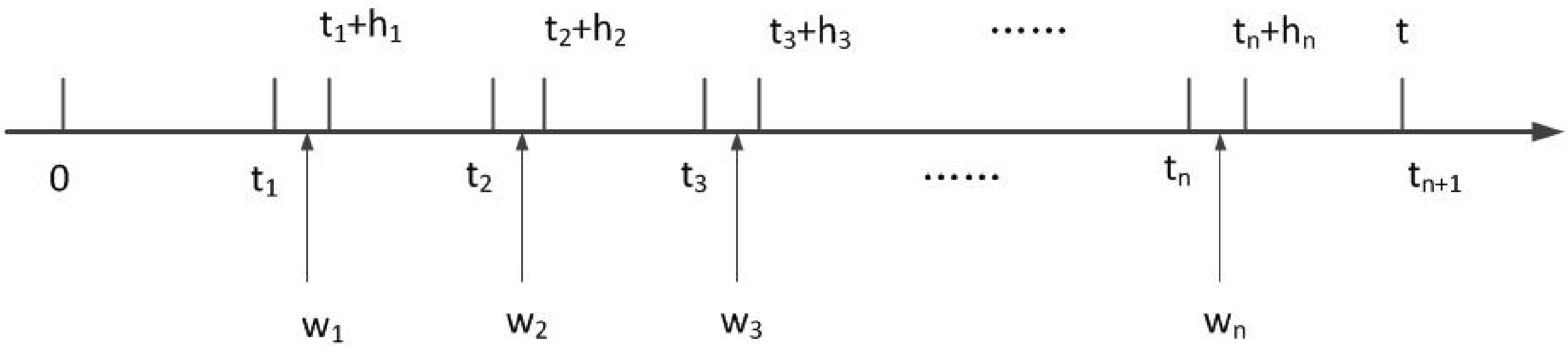
分布密度

$$f_{W_1|X(t)=1}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}, & 0 \le s < t \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

到达时间的条件分布

定理3.4：

设$\{X(t),t\geq 0\}$是泊松过程，已知在$[0,t]$内事件A发生n次，则这n次到达时间$W_1<W_2, \ldots <W_n$与相应于n个$[0,t]$上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同的分布。



到达时间的条件分布

首先 $f(t_1)=\lim\limits_{h_1\to 0}\dfrac{F(t_1+h_1)-F(t_1)}{h_1}=\lim\limits_{h_1\to 0}\dfrac{P(t_1\le w_1\le t_1+h_1)}{h_1}=\dfrac{d}{dt_1}\left[F(t_1)\right]$

取$0\le t_1<t_2<\quad<t_n<t_{n+1}=t$，且取$h_i$充分小

使得$t_i+h_i<t_{i+1}\quad(i=1,2,\quad,n)$

则在给定$X(t)=n$的条件下，我们有

$$P\{t_1<w_1<t_1+h_1,\quad,t_n<w_n<t_n+h_n\mid X(t)=n\}$$

$$=\frac{P\{[t_i,t_i+h_i]\text{内有一事件到达},i=1,2,\quad,n,\quad[0,t]\text{别处无事件发生}\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{\left[\prod_{i=1}^{n}P\{X(t_i+h_i)-X(t_i)=1\}\bullet P\{X(t_{i+1})-X(t_i+h_i)=0\}\right]\bullet P\{X(t_1)=0\}}{P\{X(t)=n\}}$$

到达时间的条件分布

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} \lambda h_i e^{-\lambda h_i} \bullet e^{-\lambda (t_{i+1}-t_i-h_i)}\right] \bullet e^{-\lambda t_1}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!}$$

$$= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} e^{-\lambda (t_2-t_1-h_1)} \bullet \quad \bullet \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda (t-t_n-h_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!}$$

令h_i→0，并取极限可得：

$$\Rightarrow \frac{P\{t_1 < w_1 < t_1+h_1, \quad , t_n < w_n < t_n+h_n \mid X(t)=n\}}{h_1, \quad , h_n} = \frac{n!}{t^n}$$

到达时间的条件分布

令 $h_i \to 0$并取极限，得 $w_1, \cdots, w_n$ 在已知 $X(t) = n$ 的条件下的条件概率密度为：

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} n!/t^n, & 0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

而n个[0，t]上均匀分布的独立随机变量的联合分布密度为

$$\frac{1}{t^n}$$

然而它们的顺序统计量涉及$t_1,\ldots,t_n$的排列次序，共有n！种排列方式，因此它们的顺序统计量的分布密度为：

$$\frac{n!}{t^n}$$

例题3.4

设在[0,t]内事件A已经发生n次，且0<s<t，对于0<k<n，求P{X(s)=k|X(t)=n}

$$P\{X(s)=k\mid X(t)=n\}=\frac{P\{X(s)=k,X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{X(s)=k,X(t)-X(s)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{X(s)=k\}P\{X(t)-X(s)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

例题3.4

$$= \frac{e^{-\lambda s}\dfrac{(\lambda s)^k}{k!}\, e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^n\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

（二项分布）

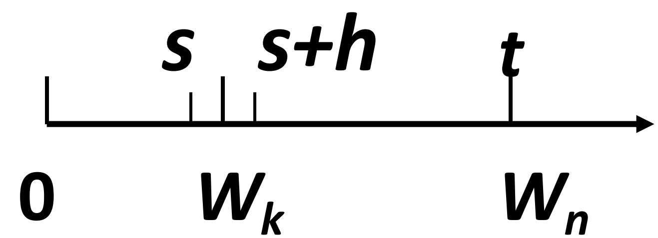
例题3.5

例题3.5

设在[0,t]内事件A已经发生n次，求第k(k<n)次事件A发生的时间W_k的条件概率密度函数。

先求条件分布 $P\{h<W_k \le s+h| X(t)=n\}$，

再对s求导。



$$\{s<W_k \le s+h\} \Leftrightarrow \{W_k \le s+h\}-\{W_k \le s\}$$

取h充分小，使$X(s+h)=k$，进而

$$P\{s<W_k \le s+h | X(t)=n\}$$

$$=P\{W_k \le s+h | X(t)=n\}-P\{W_k \le s | X(t)=n\}$$

例题3.5

$$P\{s < W_k \le s+h \mid X(t)=n\}$$

$$=\frac{P\{s < W_k \le s+h, X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{s < W_k \le s+h, X(s+h)=k, X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{s < W_k \le s+h, X(t)-X(s+h)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{s < W_k \le s+h\}P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

例题3.5

等式两边除以h，并令h→0取极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{P\{s<W_k\le s+h\,|\,X(t)=n\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P\{s<W_k\le s+h\}}{h}\frac{P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}\lim_{h\to 0}\frac{P\{W_k\le s+h\}-P\{s<W_k\}}{h}$$

$$=\frac{P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}\lim_{h\to 0}\frac{F(s+h)-F(s)}{h}$$

例题3.5

进一步有

$$f_{W_k|X(t)}(s\,|\,n)=f_{W_k}(s)\frac{P\{X(t)-X(s)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

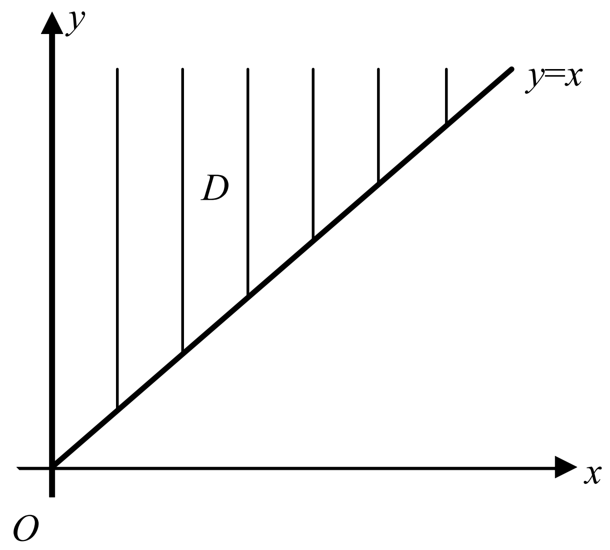
$$=\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{s^{k-1}}{t^k}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

（Bata分布）

例题3.6

设$\{X(t_1),t\geq 0\}$和$\{X(t_2),t\geq 0\}$是两个相互独立的泊松过程，它们在单位时间内平均出现的事件数分别为λ_1和λ_2，记 $W_k^{(1)}$为过程$X_1(t)$的第k次事件到达时间，$W_1^{(2)}$为过程$X_2(t)$的第1次事件到达时间，求 $P\{W_k^{(1)}<W_1^{(2)}\}$



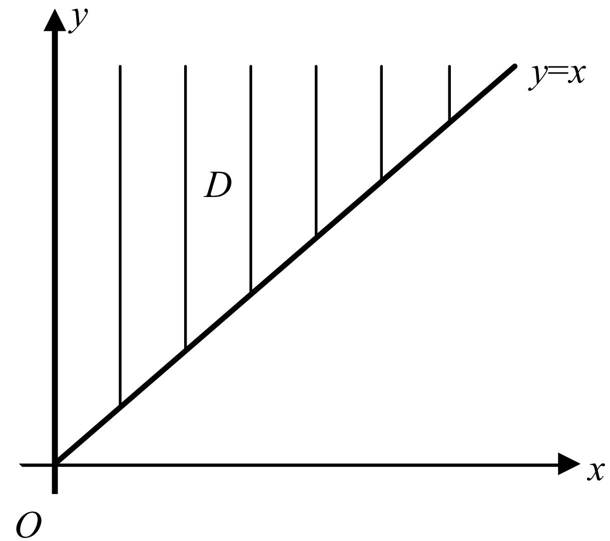
例题3.6

解　设$W_k^{(1)}$的取值为x，$W_1^{(2)}$的取值为y，

$$f_{W_k^{(1)}}(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\dfrac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}, x\geq 0\\ 0\quad ,\quad x<0\end{cases}$$

$$f_{W_1^{(2)}}(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, y\geq 0\\ 0\quad ,\quad y<0\end{cases}$$

例题3.6



则

$$P\left\{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\right\} = \iint_D f(x,y)dxdy$$

$f(x,y)$为 $W_k^{(1)}$与 $W_1^{(2)}$ 的联合概率密度

由于$X_1(t)$与$X_2(t)$独立，故

$$f(x,y) = f_{W_k^{(1)}}(x) f_{W_1^{(2)}}(y)$$

例题3.6

$$P\left\{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\right\}$$

$$= \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dydx$$

$$= \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!}\int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} dx$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

非齐次泊松过程

定义3.4：

称计数过程{X(t),t≥0}为具有跳跃强度函数λ(t)的非齐次泊松过程，若它满足下列条件：

1. X(0)=0；
2. X(t)是独立增量过程；
3. $$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$$
   $$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$$

允许时刻t的事件到达强度是t的函数

非齐次泊松过程的均值函数为

$$m_X(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$$

定理3.5

定理3.5：

设{X(t),t≥0}为具有均值函数 $m_X(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$ **非齐次泊松过程，则有**

$$P\{X(t+s)-X(t)=n\}$$

$$=\frac{[m_X(t+s)-m_X(t)]^n}{n!}\exp\{-[m_X(t+s)-m_X(t)]\},\quad n\geq 0$$

或

$$P\{X(t)=n\}=\frac{[m_X(t)]^n}{n!}\exp\{-m_X(t)\},$$

例题3.8

例题3.8

设{X(t),t≥0}是具有跳跃强度 $\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$ 的非齐次泊松过程（ω≠0），求E[X(t)]和D[X(t)]。

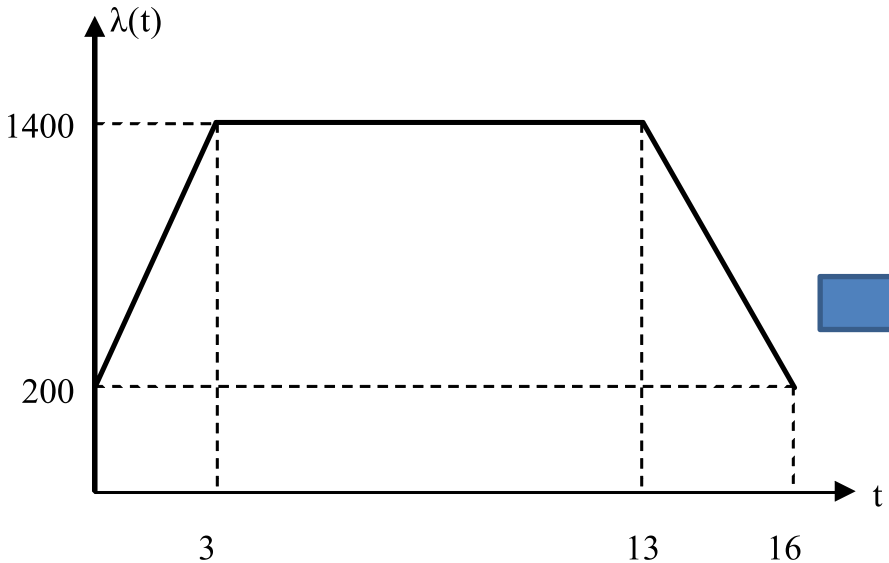
$$EX(t)=DX(t)=m_X(t)$$

$$=\int_0^t \lambda(s)ds=\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos\omega s)ds$$

$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]$$

例题3.9

设某路公共汽车从早上5时到晚上9时有车发出，乘客流量如下：5时按平均乘客为200人/时计算；5时至8时乘客平均到达率按线性增加，8时到达率为1400人/时；8时至18时保持平均到达率不变；18时到21时从到达率1400人/时按线性下降，到21时为200人/时。假定乘客数在不相重叠时间间隔内是相互独立的。求12时至14时有2000人来站乘车的概率，并求这两个小时内来站乘车人数的数学期望。



$$\lambda(t)=\begin{cases}200+400t, 0\le t\le 3\\ 1400\quad, \quad 3<t\le 13\\ 1400-400(t-13), 13<t\le 16\end{cases}$$

例题3.9

解　12时至14时为$t\in[7,9]$

在$[0,t]$内到达的乘车人数$X(t)$服从参数为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程

12时至14时乘车人数的数学期望为

$$E[X(9)-X(7)]=m_X(9)-m_X(7)$$

$$=\int_7^9\lambda(s)ds=\int_7^9 1400ds=2800$$

12时至14时有2000人来站乘车的概率为

$$P\{X(9)-X(7)=2000\}=e^{-2800}\frac{(2800)^{2000}}{2000!}$$

复合泊松过程

定义3.5：

设$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，$\{Y_k,k=1,2,\ldots\}$是一列独立同分布随机变量，且与$\{N(t),t\geq 0\}$独立，令

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,\quad t\geq 0$$

则称$\{X(t),t\geq 0\}$为复合泊松过程。

N(t)	在时间段(0,t]内来到商店的顾客数
$\mathbf{Y_k}$	第k个顾客在商店所花的钱数
X(t)	该商店在(0,t]时间段内的营业额

定理3.6

定理3.6

设 $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,\ t\geq 0$ 是复合泊松过程，则

1. {X(t), t≥0}是独立增量过程；
2. X(t)的特征函数 $g_{X(t)}(u)=\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}$，其中 $g_Y(u)$是随机变量Y_1的特征函数，λ是事件的到达率；
3. 若$E(Y_1^2)<\infty$，则

$$E[X(t)]=\lambda tE[Y_1],\quad D[X(t)]=\lambda tE[Y_1^2]$$

证明

定理3.6

证：(1)令$0\le t_0<t_1<\ldots\le t_m$，则

$$X(t_k)-X(t_{k-1})=\sum_{i=N(t_{k-1})+1}^{N(t_k)} Y_i, k=1,2,\quad ,m$$

可以验证$X(t)$具有独立增量性

(2)

$$g_{X(t)}(u)=E\left[e^{iuX(t)}\right]=E\left\{E\left[e^{iuX(t)}\middle|N(t)\right]\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{iuX(t)}\middle|N(t)=n\right]P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{iu\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k}\middle|N(t)=n\right]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

定理3.6

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{iu\sum_{k=1}^{n} Y_k} \right] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [g_Y(u)]^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t g_Y(u))^n}{n!}} \xrightarrow{\text{泰勒级数}} \exp\{\lambda t g_Y(u)\}$$

$$= \exp\{\lambda t [g_Y(u) - 1]\}$$

定理3.6

(3) $$g_{X(t)}(u) = \exp\{\lambda t[g_Y(u) - 1]\}$$

$$EX(t) = \left.\frac{g'_{X(t)}(u)}{i}\right|_{u=0}$$

$$= \left.\frac{\lambda t g'_Y(u)\exp\{\lambda t[g_Y(u) - 1]\}}{i}\right|_{u=0}$$

$$= \lambda t \frac{g'_Y(0)}{i}\exp\{\lambda t[g_Y(0) - 1]\}$$

$$= \lambda t E[Y_1] \qquad (g_Y(0) = 1)$$

定理3.6

$$E\left[(X(t))^2\right]=\left.\frac{g''_{X(t)}(u)}{i^2}\right|_{u=0}$$

$$=\left\{\frac{\lambda t g''_Y(u)\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}}{i^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left[\lambda t g'_Y(u)\right]^2\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}}{i^2}\right\}\right|_{u=0}$$

$$=\lambda t\frac{g''_Y(0)}{i^2}+(\lambda t)^2\left[\frac{g'_Y(0)}{i}\right]^2$$

定理3.6

$$E\left[(X(t))^2\right] = \lambda t E[Y_1^2] + \left[\lambda t E[Y_1]\right]^2$$

$$D[X(t)] = E\left[(X(t))^2\right] - [EX(t)]^2$$

$$= \lambda t E[Y_1^2] + \left[\lambda t E[Y_1]\right]^2 - \left[\lambda t E[Y_1]\right]^2$$

$$= \lambda t E[Y_1^2]$$

补充例题-2

- 数据包到达某计算机满足参数为λ的泊松过程，设为{N(t),t≥0}。设每个数据包内含有的数据帧相互独立且都服从参数为β的泊松分布，且与{N(t),t≥0}独立。设X(t)为在[0,t)内到达的数据帧的数目，试求P{X(t)=j|N(t)=n}和E[X(t)]

解：设Y_i为第i个数据包所含有的数据帧数目，且服从参数为β的泊松分布

则$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$，为复合泊松过程

$$P\{X(t) = j \mid N(t) = n\} = P\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = j \mid N(t) = n\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} Y_i = j\right\}$$

补充例题-2

$\sum_{i=1}^{n} Y_i$仍为泊松分布的随机变量，且参数为$n\beta$

记为：$\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

$$\text{上式} = P\{Y = j\} = e^{-n\beta} \frac{(n\beta)^j}{j!}$$

$$E[X(t)] = E[N(t)] \cdot EY = \lambda t \cdot \beta = \lambda \beta t$$

- **作业：3.1, 3.8, 3.10**