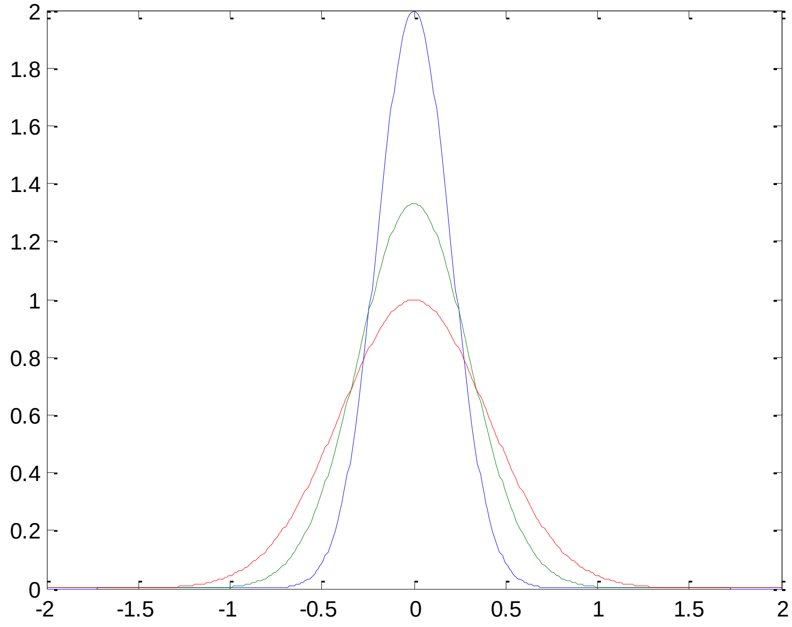
连续时间的马尔可夫链



Outline

- 连续时间马尔可夫链定义
- 无穷小转移概率矩阵
- **Kolmogorov向前方程与向后方程**
- 连续时间马尔可夫链的应用

连续时间马尔可夫链定义

定义5.1：

设随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$，状态空间$I=\{i_n, n\geq 0\}$，若对任意$0\leq t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}$及$i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}\in I$，有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_n)=i_n\}$$

则称$\{X(t), t\geq 0\}$为连续时间马尔可夫链。

上式中条件概率的一般表现形式为

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}=p_{ij}(s,t)$$

连续时间马尔可夫链定义

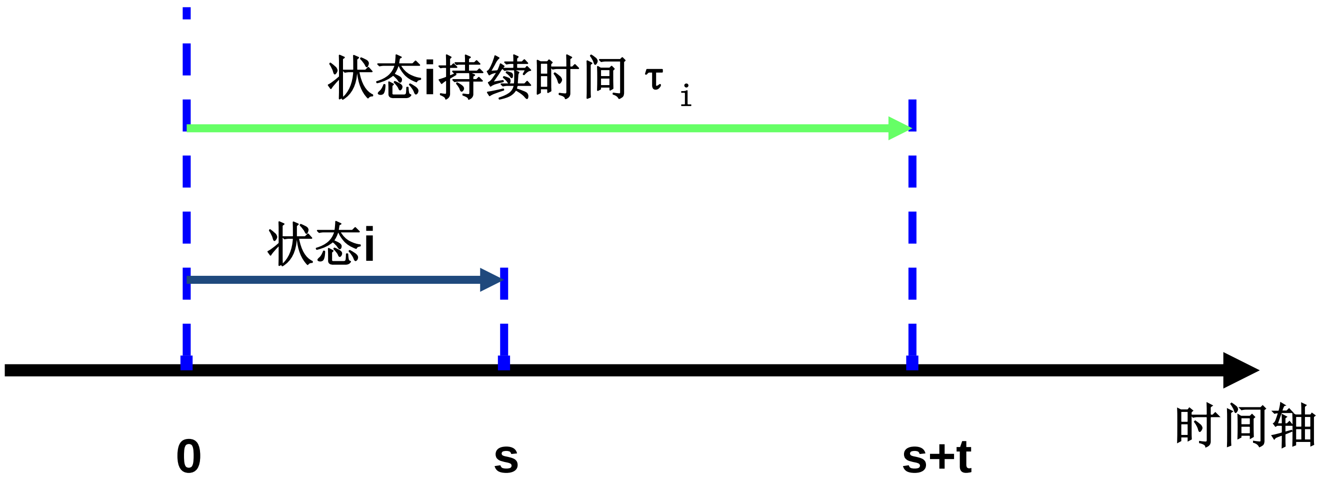
定义5.2：

若$p_{ij}(s, t)$的转移概率与s无关，则称连续时间马尔可夫链具有平稳的或齐次的转移概率，此时转移概率简记为 $p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t)$

其转移概率矩阵简记为 $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))$

连续时间马尔可夫链定义

在0时刻马尔可夫链进入状态*i*，而且在接下来的*s*个单位时间中过程未离开状态*i*，问在随后的*t*个单位时间中过程仍不离开状态*i*的概率是多少？



$$P\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$$

一个连续时间的马尔可夫链，每当它进入状态i，具有如下性质：

1.在转移到另一状态之前处于状态i的时间服从参数为v_i的指数分布；

2.当过程离开状态i时，接着以状态p_{ij}进入状态j，$\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$

当$v_i = \infty$时，称状态i为瞬时状态；

当$v_i = 0$时，称状态i为吸收状态。

一个连续时间马尔可夫链是按照一个离散时间的马尔可夫链从一个状态转移到另一个状态，但在转移到下一个状态之前，它在各个状态停留的时间服从指数分布，此外在状态i过程停留的时间与下一个到达的状态必须是相互独立的随机变量。

转移概率的性质

定理5.1：

齐次马尔可夫过程的转移概率具有下列性质：

1. $p_{ij}(t) \geq 0$

2. $\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1$

3. $p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$

正则性条件

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

绝对概率及初始概率

定义5.3

对于任一t≥0，记

$$p_j(t) = P\{X(t) = j\},$$

$$p_j = p_j(0) = P\{X(0) = j\}, \quad j \in I$$

分别称$\{p_j(t), j \in I\}$和$\{p_j, j \in I\}$为齐次马尔可夫过程的绝对概率分布和初始概率分布。

绝对概率及有限维概率分布的性质

定理5.2

齐次马尔可夫过程的绝对概率及有限维概率分布具有下列性质：

1. $p_j(t) \geq 0$
2. $\sum_{j \in I} p_j(t) = 1$
3. $p_j(t) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t)$
4. $p_j(t+\tau) = \sum_{i \in I} p_i(t) p_{ij}(\tau)$
5. $P\{X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\} = \sum_{i \in I} p_i p_{ii_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$

例5.1

例题5.1：

证明泊松过程{X(t)}为连续时间齐次马尔可夫链

证明：

因为，泊松过程是独立增量过程，且X(0)=0

所以，取$\forall 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$

有：$P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_1) = i_1, \cdots, X(t_n) = i_n\}$

$=P\{X(t_{n+1}) - X(t_n) = i_{n+1} - i_n | X(t_1) - X(t_0) = i_1, \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1}\}$

$=P\{X(t_{n+1}) - X(t_n) = i_{n+1} - i_n\}$

又因为，$P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_n) = i_n\}$

$=P\{X(t_{n+1}) - X(t_n) = i_{n+1} - i_n | X(t_n) - X(t_0) = i_n\}$

$=P\{X(t_{n+1}) - X(t_n) = i_{n+1} - i_n\}$

$\therefore P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_1) = i_1, \cdots, X(t_n) = i_n\} = P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_n) = i_n\}$

可见，泊松过程满足马氏性条件，故此泊松过程是一个时间连续的马尔科夫过程。

例5.1

例题5.1：

证明泊松过程{X(t)}为连续时间齐次马尔可夫链

齐次性：

当$j \geq i$时，由泊松过程的定义，得

$$P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}=P\{X(t+s)-X(s)=j-i\}$$
$$=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

$$\Rightarrow P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}=P_{ij}(t)=P_{ij}(s,t)$$

当$j<i$时，由泊松过程的增量为非负整数，故

$$P_{ij}(s,t)=0$$

所以，$P_{ij}(s,t)$只与t有关，因此泊松过程具有齐次性。

无穷小转移概率矩阵

引理5.1

设齐次马尔可夫过程满足正则性条件，则对于任意固定的$i,j\in I$，$p_{ij}(t)$是t的一致连续函数。

证明思路：

1）求解$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|$的通用表达式，利用夹逼定理

2）运用正则性条件

引理5.1--证明

证：设$h>0$，

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_{r\in I}p_{ir}(h)\cdot p_{rj}(t)-p_{ij}(t)$$

$$=p_{ii}(h)p_{ij}(t)-p_{ij}(t)+\sum_{r\neq i}p_{ir}(h)\cdot p_{rj}(t)$$

$$=-[1-p_{ii}(h)]p_{ij}(t)+\sum_{r\neq i}p_{ir}(h)\cdot p_{rj}(t)$$

$$\therefore p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\geq-[1-p_{ii}(h)]p_{ij}(t)\geq-[1-p_{ii}(h)]$$

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\leq\sum_{r\neq i}p_{ir}(h)\cdot p_{rj}(t)$$

$$\leq\sum_{r\neq i}p_{ir}(h)=1-p_{ii}(h)$$

$$\therefore\left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right|\leq 1-p_{ii}(h)$$

引理5.1--证明

对于$h<0$，同样有：

$$
\begin{aligned}
&p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\\
&=\sum_{r\in I}p_{ir}(-h)\cdot p_{rj}(t+h)-p_{ij}(t+h)\\
&=p_{ii}(-h)\cdot p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t+h)+\sum_{r\neq i}p_{ir}(-h)\cdot p_{rj}(t+h)\\
&=-[1-p_{ii}(-h)]p_{ij}(t+h)+\sum_{r\neq i}p_{ir}(-h)\cdot p_{rj}(t+h)
\end{aligned}
$$

故有：$p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\geq-[1-p_{ii}(-h)]p_{ij}(t+h)$

$$\geq-[1-p_{ii}(-h)]$$

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)&\leq\sum_{r\neq i}p_{ir}(-h)\cdot p_{rj}(t+h)\\
&\leq\sum_{r\neq i}p_{ir}(-h)=1-p_{ii}(-h)
\end{aligned}
$$

引理5.1--证明

$$\therefore \left| p_{ij}(t) - p_{ij}(t+h) \right| \le 1 - p_{ii}(-h)$$

综合有：$\left| p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \right| \le 1 - p_{ii}(|h|)$

由正则性条件：$\lim\limits_{h \to 0} \left| p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \right| = 0$

即$p_{ij}(t)$关于t是一致连续的。

无穷小转移概率矩阵

定理5.3

设$p_{ij}(t)$是齐次马尔可夫过程的转移概率且满足正则性条件，则下列极限存在：

1. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}=v_i=q_{ii}\le\infty$

2. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}=q_{ij}<\infty, i\neq j$

称q_{ij}为齐次马尔可夫过程从状态i到状态j的**转移速率**或**跳跃强度**

$$\begin{cases} p_{ii}(h)=1-q_{ii}h+o(h) \\ p_{ij}(h)=q_{ij}h+o(h) \end{cases}$$

意义：在长为Δt的时间区间内，过程从状态i转移到另一其它状态的转移概率1-$p_{ii}(\Delta t)$，等于q_{ii} Δt加上一个比Δt高阶的无穷小量；而从状态i转移到状态j的概率$p_{ij}(\Delta t)$，等于q_{ij} Δt加上一个比Δt高阶的无穷小量。

定理5.3 推论

推论：对有限齐次马氏过程，有

$$q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<\infty$$

$$\sum_{j\in I}p_{ij}(h)=1\Rightarrow 1-p_{ii}(h)=\sum_{j\neq i}p_{ij}(h)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(h)}{h}=\sum_{j\neq i}q_{ij}$$

即 $q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<\infty$（状态空间有限）

对于状态空间无限的齐次马尔科夫过程一般只有

$$q_{ii}\geq\sum_{j\neq i}q_{ij}$$

转移速率矩阵

若连续时间齐次马尔可夫链是具有有限状态空间 $I=\{1,2,\ldots,n\}$，则其转移速率可构成以下形式的矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} -q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & -q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & -q_{nn} \end{bmatrix}$$

Q矩阵的每一行元素之和为0，对角线元素为负或0，其余 $q_{ij}\geq 0$

利用Q矩阵可以推出任意时间间隔t的转移概率所满足的方程组，从而可以求解转移概率。

Kolmogorov向后方程

定理5.4（Kolmogorov向后方程）

假设 $\sum_{k\neq i} q_{ik} = q_{ii}$ **，则对一切*i, j*及*t*≥0，有**

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik} p_{kj}(t) - q_{ii} p_{ij}(t)$$

证明思路：

1）利用C-K方程构造微分方程

2）证明求和与极限可互换，只需证明求和式的上、下确界均等于同一个表达式即可

3）最后利用定理5.3的结论

Kolmogorov向前方程

定理5.5（Kolmogorov向前方程）

在适当的正则条件下，则对一切i, j及$t\geq 0$，有

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj}-p_{ij}(t)q_{jj}$$

证明思路：

1）利用C-K方程构造微分方程

2）证明求和与极限可互换

3）最后利用定理5.3的结论

利用Kolmogorov向后方程或向前方程及下述初始条件，可以解得$p_{ij}(t)$

$$\begin{cases} p_{ii}(0)=1 \\ p_{ij}(0)=0 \end{cases}$$

*Kolmogorov*方程的意义

Kolmogorov向后和向前方程所求得的解$p_{ij}(t)$是相同的

在实际应用中，

- 当固定最后所处状态j，研究$p_{ij}(t)$时（i=0,1, …），采用向后方程较方便；
- 当固定状态i，研究$p_{ij}(t)$时（j=0,1, …），采用向前方程较方便；

Kolmogorov方程的意义

Kolmogorov向后和向前方程的矩阵表达形式为

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{QP}(\mathrm{t})$$

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$$

连续时间马尔可夫链的转移概率的求解问题就是矩阵微分方程的求解问题，其转移概率由其转移速率矩阵Q决定。

若Q是一个有限维矩阵，则上述矩阵方程的解为

$$\mathbf{P}(t) = e^{Qt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Qt)^j}{j!}$$

实际意义与限制条件

- 柯尔莫哥洛夫微分方程的实际意义与限制条件:
  - 柯尔莫哥洛夫微分方程建立了齐次马尔可夫过程的Q矩阵与转移概率矩阵P(t)之间的联系。如果给了密度矩阵Q，在一定条件下,可以通过柯尔莫哥洛夫向后(前)方程解出转移概率$p_{ij}(t)$。若Q是一个有限维矩阵，则由向后(前)方程可以解得:

$$P(t)=e^{Qt}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(Qt)^j}{j!}$$

  - 在柯尔莫哥洛夫微分方程的证明中，需要交换极限与求和的次序。但是，对向前方程来说，必须附加适当的条件才能实现。这使得方程的应用受到一定的限制

绝对概率

定理5.6

齐次马尔可夫过程在t时刻处于状态$j\in I$的绝对概率$p_j(t)$满足下列方程

$$p'_j(t) = -p_j(t)q_{jj} + \sum_{k\neq j} p_k(t)q_{kj}$$

状态关系

定义5.4

设$p_{ij}(t)$为连续时间马尔可夫链的转移概率，若存在时刻t_1和t_2，使得

$$p_{ij}(t_1) > 0,\ \ p_{ji}(t_2) > 0$$

则称状态i和j是互通的。若所有状态都是互通的，则称此马尔可夫链为不可约的。

$p_{ij}^{(n)}$的渐进性质与平稳分布

定理5.7

设连续时间的马尔可夫链是不可约的，则有下列性质：

1. 若它是正常返的，则极限 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ 存在且等于$\pi_j>0$，$j\in I$。这里π_j是方程组

$$\begin{cases} \pi_j q_{jj} = \sum_{k\neq j} \pi_k q_{kj} \\ \sum_{j\in I} \pi_j = 1 \end{cases}$$

的唯一非负解，此时称$\{\pi_j, j\in I\}$是该过程的平稳分布，并且有

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j$$

2. 若它是零常返的或非常返的，则

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} p_j(t) = 0, \quad i, j \in I$$

例5.2

例题5.2

考虑两个状态的连续时间马尔可夫链，在转移到状态1之前在状态0停留的时间是参数为λ的指数变量，而在回到状态0之前它停留在状态1的时间是参数为μ的指数分布，求该马尔可夫链的平稳分布和在时刻t的绝对分布。

其状态转移概率为：

$$\begin{cases} p_{01}(h) = \lambda h + 0(h) \\ p_{10}(h) = \mu h + 0(h) \end{cases}$$

例5.3

例题5.3：机器维修问题

设例题5.2中状态0代表某机器正常工作，状态1代表机器出故障。状态转移概率与例题5.2相同，即在h时间内，及其从正常工作变为出故障的概率为$p_{01}(h)=\lambda h+o(h)$；在h时间内，机器从有故障变为经修复后正常工作的概率为$p_{10}(h)=\mu h+o(h)$，试求在t=0时正常工作的机器，在t=5时为正常工作的概率。

生灭链

定义5.5

设齐次马尔可夫过程$\{X(t), t\geq 0\}$的状态空间$I=\{0,1,2,\ldots\}$，转移概率为$p_{ij}(t)$，如果

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(h)=\lambda_i h+o(h), & \lambda_i>0, \\ p_{i,i-1}(h)=\mu_i h+o(h), & \mu_i>0, \mu_0=0, \\ p_{ii}(h)=1-(\lambda_i+\mu_i)h+o(h), & \\ p_{ij}(h)=o(h), & |i-j|\geq 2, \end{cases}$$

则称$\{X(t), t\geq 0\}$为生灭过程，λ_i为出生率，μ_i为死亡率

若$\lambda_i=i\lambda$，$\mu_i=i\mu$，(λ, μ是正常数)，则称$\{X_i, t\geq 0\}$为线性生灭过程

$\mu_i\equiv 0$，则称$\{X_i, t\geq 0\}$为纯生过程；若$\lambda_i\equiv 0$，则称$\{X_i, t\geq 0\}$为纯灭过程

生灭链

$$q_{ii}=-\frac{d}{dh}p_{ii}(h)|_{h=0}=\lambda_i+\mu_i,\quad i\geq 0$$

$$q_{ij}=-\frac{d}{dh}p_{ij}(h)|_{h=0}=\begin{cases}\lambda_i, & j=i+1, i\geq 0\\ \mu_i, & j=i-1, i\geq 1\end{cases}$$

因此，可得生灭链的向前与向后方程

$$p'_{ij}(t)=\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)p_{i,j}(t)+\mu_{j+1}p_{i,j+1}(t),\quad i,j\in I$$

$$p'_{ij}(t)=\mu_i p_{i-1,j}(t)-(\lambda_i+\mu_i)p_{i,j}(t)+\lambda_i p_{i+1,j}(t),\quad i,j\in I$$

生灭链

$$\begin{cases} \lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \\ (\lambda_j + \mu_j)\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1}, \quad j \geq 1 \end{cases}$$

利用递推法可解得

$$\begin{cases} \pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}\right)^{-1}, \\ \pi_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}\right)^{-1}, \quad j \geq 1 \end{cases}$$

平稳分布存在的充要条件为

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} < \infty$$

生灭链的概率的意义

- 生灭过程的转移概率$p_{ij}(t)$的性质知，若忽略t的高阶无穷小量，生灭过程即种群群体的状态变化有三种可能：

  (1) 由状态$i \to i+1$，即增加了一个个体,概率是$\lambda_i t$;

  (2) 由状态$i \to i-1$，即减少了一个个体,概率是$\mu_i t$;

  (3) 由$i \to i$，即群体个数没有变化。

  生灭过程的所有状态都是互通的。但是在充分小的时间区间内，只能在两个相邻状态内变化，或者状态无变化。

M/M/s排队系统

例：$M/M/S$排队系统(等待制服务系统)

顾客按参数为λ的泊松过程来到一个有S个服务员的服务站，即相继来到之间的时间是均值为$1/\lambda$的独立指数随机变量，每一顾客一来到，如有服务空闲，则直接进行服务，否则此顾客加入排队行列，当一个服务员结束对一位顾客的服务时，顾客就离开服务系统，排队中的下一个顾客进入服务，假定相继的服务时间是独立的指数随机变量，均值为$1/\mu$，如以$X(t)$记时刻t系统中的人数，则$\{X(t),\ t\geq 0\}$是生灭过程。

M/M/s排队系统

① 顾客到达过程是泊松过程，到达率是λ

② 有s个服务人员

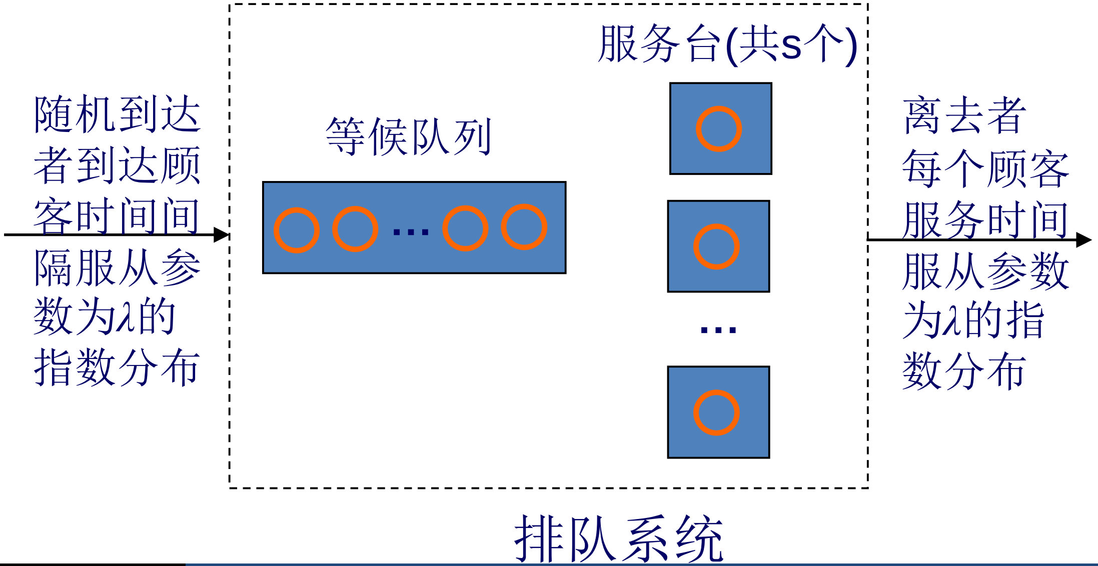
③ 每个服务人员对顾客的服务时间均为指数分布的随机变量，平均服务时间是$1/\mu$

④ 当s个服务人员均在服务时，再到达的顾客参加排队，且按先到先服务原则，如服务人员空闲，则立刻接受服务

⑤ 顾客的到达过程和各个服务人员对顾客的服务时间均相互独立

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \le n \le s \\ s\mu, & n > s \end{cases}$$

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \ge 0$$



M/M/s排队系统

$$P_k(t) = P\{X(t) = k\}$$

基本事件：$(t, t+h)$来到一个的概率为：

$$\lambda h + 0(h)$$

来到二个或二个以上的概率为：

$$0(h)$$

$\because$ 在$(t, t+h)$内服务完一个的概率

$$P\{z \le h\} = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + 0(h)$$

继续服务的概率为：

$$1 - \mu h + 0(h)$$

M/M/s排队系统

$\therefore$ 在$(t,t+h)$中，k个人在服务，指定的一个服务员服务完一个而其它未完成的概率为：

$$\mu h(1-\mu h)^{k-1}+0(h)=\mu h+0(h)$$

则任意一个服务员完成而其他未完成的概率为：

$$k\mu h+0(h)$$

完成二个以上的概率为：

$$\sum_{i=2}^{k}C_k^i(\mu h)^i(1-\mu h)^{k-i}=0(h)$$

M/M/s排队系统

$(t, \; t+h)$ —— 增1 / 不变 / 减1 $\longrightarrow$ 生灭过程

$$p_{i,i+1}(h) = \lambda h + 0(h)$$

$$p_{i,i-1}(h) = \begin{cases} i\mu h + 0(h), & i < s \\ s\mu h + 0(h), & i \ge s \end{cases}$$

$$p_{ii}(h) = \begin{cases} 1 - \lambda h - i\mu h + 0(h), & i < s \\ 1 - \lambda h - s\mu h + 0(h), & i \ge s \end{cases}$$

$$p_{ij}(h) = 0(h) \qquad |i - j| \ge 2$$

M/M/s排队系统

$$q_{i,i+1} = \lambda$$

$$q_{i,i-1} = \begin{cases} i\mu, & i < s \\ s\mu, & i \geq s \end{cases}$$

$$q_{ii} = \begin{cases} -\lambda - i\mu, & i < s \\ -\lambda - s\mu, & i \geq s \end{cases}$$

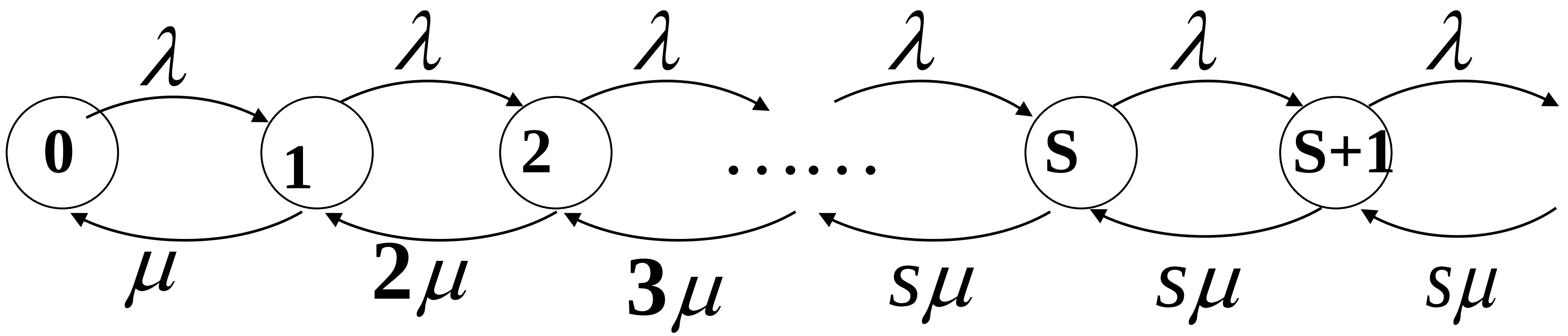
$$q_{ij} = 0, \qquad |i-j| \geq 2$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & & \\ & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & & \\ & & & & & \\ & & & s\mu & -\lambda-s\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

M/M/s排队系统

状态转移图如下：



平稳分布：

$$
\begin{cases}
-\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\
\lambda\pi_{k-1} - (\lambda + k\mu)\pi_k + (k+1)\mu\pi_{k+1} = 0 & 1 \le k \le s-1 \\
\lambda\pi_{k-1} - (\lambda + s\mu)\pi_k + s\mu\pi_{k+1} = 0 & k \ge s
\end{cases}
$$

M/M/s排队系统

$$\pi_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\pi_0, \qquad 1 \le k < s-1$$

$$\pi_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{s!s^{k-s}}\pi_0, \qquad k \ge s$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = 1. \qquad \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\pi_0 + \sum_{k=s}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{s!s^{k-s}}\pi_0 = 1$$

M/M/s排队系统

$$\pi_0^{-1}=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}+\frac{s^s}{s!}\sum_{k=s}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k$$

令$\rho=\frac{\lambda}{s\mu}$

来到强度

服务能力

来往强度

存在平稳分布 $\Leftrightarrow \rho<1$(稳态系统)

M/M/s排队系统

特殊情况，在$M/M/1$排队系统中，

$$\lambda_i=\lambda,\mu_i=\mu.$$

将$s=1$代入上面即得：

$$\pi_0^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}\Rightarrow\pi_0=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

$$\Rightarrow\pi_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

M/M/s排队系统

①要平稳分布存在：$\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$，顾客按速率$\lambda$到来且以速率$\mu$受到服务；

②当$\lambda>\mu$时，顾客到来的速率高于他受到服务的速率，排队的长度超于无穷；

③当$\lambda=\mu$时，零常返，无平稳分布存在。

几个关键指标

(1)系统的平均队长

设到达平稳后，系统中出现k个顾客的概率为π_k

故系统中顾客的平均数为：

$$L=\lim_{t\to\infty}E[X(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}$$

$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

由$\lim_{t\to\infty}E[X^2(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\pi_k$

$$=\rho\left[\frac{2}{(1-\rho)^2}-\frac{1}{1-\rho}\right]\Rightarrow\lim_{t\to\infty}D[X(t)]=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

几个关键指标

(2)平均等待的顾客数

当系统中有个k人，其中一人被服务,$(k-1)$人排队等候时，排队等待的顾客平均数为：

$$L_Q=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_k-\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k$$

$$=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}-(1-\pi_0)=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}-\frac{\lambda}{\mu}$$

$$=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

几个关键指标

(3)顾客在系统中所花费时间的平均值W

若某顾客到达服务点时系统中已有k个人，其中一人在被服务，$k-1$个人在等待，由于服务时间服从指数分布，每个顾客的服务时间均值为$\frac{1}{\mu}$，且相互独立。

此顾客平均等候时间为$\frac{k}{\mu}$(无记忆性)，再加上本人服务时间$\frac{1}{\mu}$，此顾客花费时间的平均值为$\frac{k+1}{\mu}$

几个关键指标

$$W=\sum_{k=0}^{\infty}E\{\text{某顾客在系统中花费时间/已有}k\text{个顾客在系统中}\}\cdot\pi_k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{1}{\mu}\pi_k=\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k$$

$$=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda}{\mu-\lambda}+1\right]=\frac{1}{\mu-\lambda}.$$

几个关键指标

(4)顾客排队等候所花费的平均时间W_Q

$$W_Q = \sum_{k=0}^{\infty} E\{\text{顾客排队等候时间/已有}\ k\ \text{个顾客在系统中}\} \cdot \pi_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\mu}\pi_k = \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

几个关键指标

排队服务中的基本关系式：

① $$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \lambda W$$

系统中顾客平均数等于顾客到达率乘以顾客在系统中花费的时间平均值。

② $$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \lambda W_Q$$

在排队等候的顾客平均数等于顾客到达率乘以顾客在排队等候的时间平均值。

几个关键指标

(5)费用最优参数

考虑最优服务率的问题设每一顾客在系统一小时损失c_1元，服务机构每小时费用正比于μ，比例系数为c_2，记$R(\mu)$为每小时费用，则系统平均每小时费用损失为：

$$E[R(\mu)] = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}c_1 + c_2\mu$$

如何选取最优的μ^*,使$ER(\mu^*) = \min ER(\mu)$

由 $$\frac{dER(\mu)}{d\mu} = 0 \Rightarrow \mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_2}}$$

作业

- 5.2