
СВЯТОЙ КПК

#BlessRNG

ИЛИ КАК НЕ СДОХНУТЬ НА 2 СЕМЕ ИЗ-ЗА МАТАНА

РАЗРАБОТАЛИ

ТИМОФЕЙ БЕЛОУСОВ @IMODRE

НИКИТА ВАРЛАМОВ @SNITRON

ТИМОФЕЙ ЦОРИН @THEFATTESTOWL

V0.6 ALPHA
ЯНВАРЬ-ИЮНЬ 2022

Заметки авторов

В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre
2. @snitron
3. @thefattestowl

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответствующему автору, или создать Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click).

Known Issues

В данном конспекте отсутствуют следующие теоремы:

1. Теорема о группировке слагаемых
2. Теорема о произведении рядов
3. Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения
4. Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом
5. Формула Эйлера для гамма-функции
6. Формула Вейерштрасса для Γ -функции
7. Вычисление произведений с рациональными сомножителями
8. Лемма о представлении синуса в виде конечного произведения
9. Разложение синуса в бесконечное произведение
10. Формула дополнения для гамма-функции

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Содержание

1	Период Палеозойский	6
1.1	Важные определения	6
1.1.1	Первообразная, неопределённый интеграл ¹	6
1.1.2	Таблица первообразных ¹	6
1.1.3	Определённый интеграл (непрерывной функции) ²	6
1.1.4	Верхний и нижний пределы ¹	7
1.1.5	Риманова сумма ¹	8
1.1.6	Несобственный интеграл, сходимость, расходимость ²	8
1.2	Определения	9
1.2.1	Теорема о существовании первообразной ¹	9
1.2.2	Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность ²	9
1.2.3	Положительная и отрицательная срезки ²	9
1.2.4	Среднее значение функции на промежутке ¹	10
1.2.5	Функция промежутка, аддитивная функция промежутка ¹	10
1.2.6	Плотность аддитивной функции промежутка ¹	10
1.2.7	Кусочно-непрерывная функция ¹	10
1.2.8	Почти первообразная ²	10
1.2.9	Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути ¹	10
1.2.9.1	Краткий обзор пути с прошлого сема, чтобы не тупить	10
1.2.9.2	Гладкий путь	11
1.2.9.3	Вектор скорости	11
1.2.9.4	Носитель пути	11
1.2.10	Длина гладкого пути ¹	11
1.2.11	Вариация функции на промежутке ²	11
1.2.12	Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение ¹	12
1.2.13	Частичный предел ¹	12
1.2.14	Допустимая функция ²	12
1.2.15	Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла ²	12
1.2.16	Теорема об интегральной сумме центральных прямоугольников ²	12
1.3	Важные теоремы	13
1.3.1	Интегрирование неравенств. Теорема о среднем ¹	13
1.3.1.1	Интегрирование неравенств	13
1.3.1.2	Теорема о среднем	13
1.3.2	Формула Ньютона–Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций ¹	13
1.3.3	Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности ²	14
1.3.4	Интеграл как предел интегральных сумм ¹	14
1.3.5	Формула Стирлинга ³	15
1.3.6	Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла ²	16
1.4	Теоремы	18
1.4.1	Теорема о свойствах неопределённого интеграла ¹	18
1.4.1.1	Характеристика множества первообразных функции	18
1.4.1.2	Правила интегрирования	18
1.4.2	Правило Лопиталя ³	19
1.4.2.1	Лемма об ускоренной сходимости	19
1.4.2.2	Правило Лопиталя	19
1.4.3	Теорема Штольца ¹	20

1.4.3.1	Лемма о смешной сумме	20
1.4.4	Теорема Барроу ¹	21
1.4.4.1	Интеграл с переменным верхним пределом	21
1.4.5	Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм ²	21
1.4.6	Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных ²	23
1.4.6.1	Линейность	23
1.4.6.2	Интегрирование по частям	23
1.4.6.3	Замена переменных	23
1.4.6.4	Доказательство	23
1.4.7	Иррациональность числа пи ²	23
1.4.8	Компактность и конечные эpsilon-сети ²	24
1.4.8.1	Определения	24
1.4.8.2	Свойства	24
1.4.8.3	Теорема	26
1.4.9	Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой ²	26
1.4.10	Изопериметрическое неравенство ²	27
1.4.11	Обобщенная теорема о плотности ¹	29
1.4.12	Объём фигур вращения ¹	29
1.4.13	Формула Тейлора с остатком в интегральной форме ¹	31
1.4.14	Вычисление длины гладкого пути ¹	32
1.4.15	Свойства верхнего и нижнего пределов ¹	32
1.4.16	Техническое описание верхнего предела ¹	33
1.4.17	Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов ¹	34
1.4.18	Теорема о характеристике верхнего предела как частичного ¹	34
1.4.19	Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена ²	35
1.4.20	Асимптотика степенных сумм ²	37
1.4.21	Асимптотика частичных сумм гармонического ряда ³	38
1.4.22	Формула Валлиса ¹	38
1.4.23	Простейшие свойства несобственного интеграла ²	39
1.4.24	Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$ ²	40
2	Период Мезозойский	41
2.1	Важные определения	41
2.1.1	Гамма функция Эйлера ¹	41
2.1.2	Абсолютно сходящийся интеграл, ряд ¹	41
2.1.2.1	Интеграл	41
2.1.2.2	Ряд	42
2.1.3	Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость ¹	42
2.1.3.1	Числовой ряд	42
2.1.3.2	Сумма ряда	42
2.1.3.3	Сходимость	42
2.1.3.4	Расходимость	42
2.2	Определения	43
2.2.1	n -й остаток ряда ¹	43
2.2.2	Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда ¹	43
2.2.3	Бесконечное произведение ³	43
2.3	Важные теоремы	45
2.3.1	Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства. ¹	45
2.3.2	Неравенство Йенсена для сумм ¹	46
2.3.3	Неравенство Гельдера для интегралов ³	47

2.3.4	Признак сравнения сходимости положительных рядов ¹	47
2.3.4.1	Лемма о сходимости положительных рядов	47
2.3.4.2	Теорема	47
2.3.4.3	Важные эталонные ряды, с которыми надо всё сравнивать	48
2.3.5	Признак Коши сходимости положительных рядов ¹	48
2.4	Теоремы	50
2.4.1	Интеграл Эйлера–Пуассона ¹	50
2.4.2	Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах ¹	51
2.4.2.1	Интегралы	51
2.4.2.2	Ряды	51
2.4.3	Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x \, dx}{x^p}$ на сходимости и абсолютную сходимости ²	51
2.4.4	Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла ²	52
2.4.5	Интеграл Дирихле ²	53
2.4.6	Неравенство Йенсена для интегралов ¹	55
2.4.7	Неравенство Коши (для сумм и для интегралов) ³	55
2.4.7.1	Неравенство для сумм	55
2.4.7.2	Неравенство для интегралов	56
2.4.8	Неравенство Гельдера для сумм ³	56
2.4.9	Неравенство Минковского ³	57
2.4.10	Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши ¹	58
2.4.10.1	Линейность	58
2.4.10.2	Свойства остатка	58
2.4.10.3	Необх. условие сходимости	59
2.4.10.4	Критерий Больцано–Коши	59
2.4.11	Признак Коши сходимости положительных рядов (pro) ¹	59
2.4.12	Признак Даламбера сходимости положительных рядов ¹	60
2.4.12.1	Pro версия:	60
2.4.13	Признак Раабе сходимости положительных рядов ¹	61
2.4.13.1	Лемма (улучшенный признак сравнения)	61
2.4.13.2	Теорема	61
2.4.13.3	Pro	63
2.4.14	Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов ¹	63
3	Период Кайнозойский	64
3.1	Важные определения	64
3.1.1	Сходимость последовательности в \mathbb{R}^m , покоординатная сходимость ¹	64
3.1.2	Предельная точка, замкнутое множество, замыкание ¹	64
3.1.3	Отображение бесконечно малое в точке ²	65
3.1.4	Отображение, дифференцируемое в точке ²	65
3.1.5	Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал ²	65
3.1.6	Частные производные ²	65
3.1.7	Формула Тейлора (различные виды записи) ²	66
3.2	Определения	67
3.2.1	Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в \mathbb{R}^{m1}	67
3.2.1.1	Скалярное произведение	67
3.2.1.2	Евклидова норма	67
3.2.1.3	Метрика в \mathbb{R}^m	67
3.2.2	Окрестность точки в \mathbb{R}^m , открытое множество ¹	67
3.2.3	Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано–Вейерштрасса ¹	67
3.2.4	Координатная функция ¹	67

3.2.5	Двойной предел, повторный предел ¹	68
3.2.5.1	Двойной предел	68
3.2.5.2	Повторный предел	68
3.2.6	Предел по направлению, предел вдоль пути ¹	68
3.2.6.1	Предел по направлению	68
3.2.6.2	Предел вдоль пути	68
3.2.7	Линейный оператор ¹	69
3.2.8	$o(h)$ при $h \rightarrow 0$ ²	69
3.2.9	Теорема о двойном и повторном пределах ¹	69
3.2.10	Производная по направлению ²	70
3.2.11	Градиент ²	70
3.2.12	Мультииндекс и обозначения с ним ²	70
3.2.13	n -й дифференциал ²	70
3.3	Важные теоремы	71
3.3.1	Признак Лейбница ¹	71
3.3.2	Достаточное условие дифференцируемости ²	71
3.3.3	Дифференцирование композиции ²	72
3.3.3.1	Лемма об оценке нормы линейного оператора	72
3.3.3.2	Теорема о дифференцировании композиции	73
3.3.4	Теорема Лагранжа для векторнозначных функций ³	74
3.3.5	Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано) ³	74
3.4	Теоремы	77
3.4.1	Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда ¹	77
3.4.1.1	Преобразование Абеля (суммирование по частям)	77
3.4.1.2	Дирихле	77
3.4.1.3	Абель	77
3.4.2	Теорема о перестановке слагаемых ³	78
3.4.3	Единственность производной ²	79
3.4.4	Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций ²	79
3.4.5	Необходимое условие дифференцируемости ²	80
3.4.6	Дифференцирование 'произведений' ²	81
3.4.7	Экстремальное свойство градиента ³	81
3.4.8	Независимость частных производных от порядка дифференцирования ³	82
3.4.9	Полиномиальная формула ³	83
3.4.10	Лемма о дифференцировании "сдвига" ³	84

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Первообразная, неопределённый интеграл¹

$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, где $\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F(x)' = f(x)$. F — первообразная f

Неопределённый интеграл — это множество всех первообразных f . Ну а точнее, поскольку всё множество первообразных отличается на константу, то мы просто берём какую-то первообразную и дописываем $+C$.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

1.1.2 Таблица первообразных¹

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$ — длинный логарифм
3. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$ — высокий логарифм
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
5. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C$
6. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
7. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
10. $\int \cos x dx = \sin x + C$
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

1.1.3 Определённый интеграл (непрерывной функции)²

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sigma(\Pi f^+, [a, b]) - \sigma(\Pi f^-, [a, b])$$

Замечания:

1.

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

2.

$$f \equiv c \Rightarrow \int_a^b f = c(b-a)$$

3.

$$\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$$

4.

$$\int_a^a f = 0$$

Свойства:

1. Аддитивность по промежутку:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. Монотонность:

$$f, g \in C[a, b], f \leq g, \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Следствия:

(a)

$$\min f(b-a) \leq \int_a^b f \leq \max f(b-a)$$

(b)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(c)

$$-|f| \leq f \leq |f| \text{ по } [a, b]$$

(d)

$$f \in C[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

1.1.4 Верхний и нижний пределы¹

Рассмотрим верхний. Он определяется как предел последовательности супремумов сужений функции по левой границе:

$$\exists y_m = \sup_{n \geq m} x_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \dots)$$

Ну а сам верхний предел выглядит как

$$\overline{\lim} x_n = \lim y_m$$

Разумеется, нижний определяется аналогично, только с инфемумами (пусть последовательность инфемумов будет z_n).

Простейшие свойства:

1. z_n возрастает, y_n убывает.

2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n \leq x_n \leq y_n$

3. Если изменить конечное число x_n , то изменится не более, чем конечное число z_n , либо y_n (очевидно, после последнего изменённого x_n мы уже не будем их учитывать).

1.1.5 Риманова сумма¹

Пусть у нас определен отрезок $[a, b]$, дробление $x_0 \dots x_n$, оснащение и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда следующее выражение мы называем интегральной (Римановой) суммой.

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Где ξ_k — точка оснащения на отрезке i

1.1.6 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость²

$$\Phi(A) = \int_a^A f$$

1. Если существует $\lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A) = \int_a^{b-0} f dx$ *несобственный интеграл*
2. Если он ещё и конечный, то несобственный интеграл *сходится*
3. А если он бесконечный или вовсе не существует, то несобственный интеграл *расходится*

1.2 Определения

1.2.1 Теорема о существовании первообразной¹

Формулировка

$$\forall f \in C(a, b) \exists F : \forall x \in (a, b) F'(x) = f(x)$$

Доказательство

BASED (Теорема Барроу)

1.2.2 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность²

E — множество ограниченных подмножеств в \mathbb{R}^2

$\sigma : E \rightarrow [0, \infty)$ — площадь в \mathbb{R}^2

\sqcup — дизъюнктивное объединение. Вообще мы тут требуем, чтобы наши фигуры не пересекались и мы их просто объединяли Свойства:

1. Аддитивность: $\sigma(A_1 \sqcup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

Замечания:

1. Монотонность: $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$
2. $\sigma(\text{вертикального отрезка}) = 0$

Ослабленная площадь:

$\sigma : E \rightarrow [0, \infty)$

Свойства:

1. Монотонность: $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$
3. Ослабленная аддитивность: $E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ содержится не более чем в некотором вертикальном отрезке (то есть мы допускаем, что они могут пересекаться, но чуть-чуть), $\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

1.2.3 Положительная и отрицательная срезки²

Literally this:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$f_+ = \max(f, 0)$ — положительная срезка

$f_- = \max(-f, 0)$ — отрицательная срезка

1.2.4 Среднее значение функции на промежутке¹

$f \in C[a, b]$

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \text{ — ср. арифметическое значение функции}$$

1.2.5 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка¹

$\square \text{Segm}\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$

$f : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — функция промежутка (принимает любой отрезок внутри $\langle a, b \rangle$)

Если $\forall x \in \langle p, q \rangle \subset [p, q] \subset \langle a, b \rangle \quad f(p, x) + f(x, q) = f(p, q)$, то f — аддитивная функция промежутка

1.2.6 Плотность аддитивной функции промежутка¹

$\phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — плотность аддитивной функции промежутка $f \Leftrightarrow \forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad \inf_{x \in [p, q]} \phi(x) \cdot (q - p) \leq f([p, q]) \leq \sup_{x \in [p, q]} \phi(x) \cdot (q - p)$

1.2.7 Кусочно-непрерывная функция¹

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называют кусочно-непрерывной, когда у неё на всей области определения существует конечное число разрывов 1 рода (Напоминалка: это когда в точке функция имеет конечные односторонние пределы, но они не совпадают). Также требуется, чтобы $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и они были конечными.

Замечание: такая функция ограничена (вроде очевидно достаточно, все пределы же конечные. А если где-то между точками разрыва функция улетает в бесконечность, там будет точка разрыва, нарушается непрерывность).

1.2.8 Почти первообразная²

$F(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — почти первообразная кусочно-непрерывной функции f , если F — непрерывна и $\exists F'(x) = f(x)$, кроме конечного числа точек

Пример: $f = \text{sign } x, F = |x|, x \in [-1, 1]$

1.2.9 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути¹

1.2.9.1 Краткий обзор пути с прошлого сема, чтобы не тупить

Обычно мы определяем путь как непрерывное отображение в R^m на каком-то промежутке $[a, b]$, в котором $f(a) = A$, а $f(b) = B$. Больше никаких требований на него не наложено, из-за чего он может иметь всякие ужасные изломы, описывая m -мерные фигуры, при этом имея 1-мерный аргумент. Проблема здесь в том, что невозможно измерить какую-либо конечную скорость в некоторых точках такого пути, либо посчитать его длину (типо в квадрате бесконечно много 1-мерных линий, а такой путь может пройти весь квадрат целиком)

1.2.9.2 Гладкий путь

$$\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ причём } \forall i \in [1, m] \quad \gamma_i \in C^1$$

Здесь $\gamma_i(t)$ — отображение отдельной координаты в \mathbb{R}^m , в котором действует путь $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t))$

1.2.9.3 Вектор скорости

Это просто производная функция пути. По принципу покоординатной сходимости мы можем рассматривать каждую координату γ_i отдельно, если представим наш путь как покоординатный вектор функций в \mathbb{R} .

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_m(t+h) - \gamma_m(t)}{h} \right)$$

1.2.9.4 Носитель пути

Это кривая, являющаяся образом γ на всей области определения: $\gamma([a, b])$

1.2.10 Длина гладкого пути¹

Это функция l , заданная на множестве всех возможных гладких путей. Обладает (аксиоматически) следующими свойствами:

1. $l \geq 0$
2. Аддитивность ($\forall c \in [a, b] \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]})$)
3. Если носитель пути является образом сжатия какого-то другого, то длина такого пути \leq длины пути прообраза:

$\gamma, \bar{\gamma}$ — гл. путь

$C_\gamma, C_{\bar{\gamma}}$ — носители

$$\exists f : C_\gamma \xrightarrow{\text{сюръекция}} C_{\bar{\gamma}} (\forall x, y \in [a, b] \quad \rho(x, y) \geq \rho(f(x), f(y))) \implies l(\gamma) \geq l(\bar{\gamma})$$

4. Нормировка

$$\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma(c) = (1 - c) \cdot A + c \cdot B.$$

Человеческими словами, тут мы определили прямолинейный путь. А утверждение в том, что $\rho(A, B) = l(\gamma)$

1.2.11 Вариация функции на промежутке²

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, выберем $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$

Тогда $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ — дробление отрезка.

Вариация функции на отрезке $[a, b]$ l

$$l = \sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=0}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

1.2.12 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение¹

Определён отрезок $[a, b]$

Дробление отрезка — это некий возрастающий конечный набор $x_n \in [a, b]$. Тут $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$. То есть по ним мы можем получить кучу соприкасающихся подотрезков.

Ранг дробления — это наибольшая длина такого подотрезка (ранжица между двумя соседними точками дробления): $\max x_i - x_{i-1}$

Оснащение — это некоторый произвольный набор точек на нашем отрезке, в котором каждая точка находится на своём уникальном подотрезке дробления. Они покрывают все подотрезки: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

1.2.13 Частичный предел¹

$\{x_n\}$ — вещественная последовательность.

Выберем в ней подпоследовательность x_{n_k} , где n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел.

$\lim x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$ — это и есть тот самый частичный предел.

1.2.14 Допустимая функция²

$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$

f — допустима, если $\forall A \in (a, b) : f$ на $[a, A]$ — кусочно непрерывна

1.2.15 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла²

$-\infty < a < b \leq +\infty, f$ — допустимая (?), тогда сходимость несобственного интеграла равносильна

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall A, B \in (\delta, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

1.2.16 Теорема об интегральной сумме центральных прямоугольников²

$f \in C^2[a, b], a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\xi_k := \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ (серединка отрезочка)

$\delta = \max_{1 \leq k \leq n} x_k - x_{k-1}$

Тогда:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| dx$$

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем¹

1.3.1.1 Интегрирование неравенств

Формулировка

$f, g \in C[a, b]$

$$f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство

Вполне очевидно: $\Pi\Gamma(f^+, [a, b]) \subset \Pi\Gamma(g^+, [a, b])$. Соответственно, для положительной срезки всё слишком очевидно. В отрицательной всё наоборот. Но там и интеграл её вычитает (то есть знак неравенства переворачивается), так что ничего не ломается.

1.3.1.2 Теорема о среднем

Формулировка

$$\min(f) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \max(f) \cdot (b - a)$$

Доказательство

▷

$$\min(f) \leq f \leq \max(f)$$

$$\int_a^b (\min(f)) \underset{\min(f) \text{ const}}{=} \min(f) \cdot (b - a)$$

$$\min(f) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \max(f) \cdot (b - a)$$

◁

1.3.2 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций¹

Формулировка

$f \in C[a, b]$, F — первообразная f .

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_{x:=a}^{x:=b}$$

Доказательство

▷ Введём интеграл с переменным верхним пределом ϕ .

Заметим, что $\phi = F + c$.

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(b) = \phi(b) - \underbrace{\phi(a)}_{=0} = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a)$$

◁

1.3.3 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности²

Формулировка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f$ — плотность Φ

Тогда $\Phi([p, q]) = \int_p^q f, \quad \forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle$

Доказательство

▷

Давайте введём супер-функцию $F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi([a, x]), & x \neq a \end{cases}$ — это первообразная плотности f .

Докажем это:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi([a, x+h]) - \Phi([a, x])}{h} =$$

$$\frac{\Phi([x, x+h])}{h} = f(x+\Theta h) \text{ (где } \Theta \in [0, 1], \text{ это работает по определению плотности } \inf f \leq \frac{f}{|\delta|} \leq \sup f) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x)$$

Ну а теперь:

$$\Phi([p, q]) = \Phi([a, q]) - \Phi([a, p]) = F(q) - F(p) = \int_p^q f$$

◁

1.3.4 Интеграл как предел интегральных сумм¹

Формулировка

$\exists f \in C[a, b]$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : a = x_0 < \dots < x_n = b : \lambda_\tau := \max_{i=1..n} (x_i - x_{i-1}) < \delta \forall_{\text{оч.}} \xi_i \left| \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Выглядит как атомный пиздец от Евгения Владимировича ☹, но на самом деле тут тупо написано, что мы можем разбить область интегрирования на отрезочки и в каждом выбрать точку, значение функции в которой умножить на длину отрезка, а сумма таких площадей прямоугольника будет на самом деле стремиться к опр. интегралу функции при уменьшении ранга дробления. ☺

Доказательство

▷

Воспользуемся аддитивностью опр. интеграла и разобьём на интегралы отрезков дробления:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

Вместо умножения на длину отрезка, запишем эту операцию как интеграл константы (по факту же то же самое):

$$\sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) dx$$

Теперь у нас имеются 2 выражения, в обоих стоит сумма интегралов на одинаковых промежутках интегрирования. Давайте же закинем эту всю радость в 1 кучу:

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) dx - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) - f(x) dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\xi_i) - f(x)| dx$$

Воспользуемся тем, что в подынтегральной функции расстояние от x до ξ_i никогда не превысит δ (по условию) и применим теорему Кантора о равномерной непрерывности, подставив вместо ε , $\frac{\varepsilon}{b-a}$ (а там как раз нас просят проконтролировать, что это расстояние $< \delta$):

$$|\xi_i - x| < \delta \Rightarrow |f(\xi_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\xi_i) - f(x)| dx < \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

◁

1.3.5 Формула Стирлинга³

Формулировка:

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{n} \sqrt{2\pi}$$

Доказательство. Рассмотрим сумму первых натуральных n как аргумент натурального логарифма и запишем формулу Эйлера-Маклорена:

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \ln n dn - \frac{1}{2} \int_2^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx$$

Проинтегрируем $\int \ln n dn$ по частям:

$$\int \ln n dn = [u = \ln n \Rightarrow u' = \frac{1}{n}; v' = 1 \Rightarrow v = n] = n \ln n - \int \frac{1}{n} n dn = n \ln n - n + C$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \ln n \, dn - \frac{1}{2} \int_2^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} \, dx &= 0 + \frac{\ln n}{2} + (n \ln n - n)|_1^n + C_1 + o(1) = \\ &= \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + C_1 + o(1) = \sum_{i=1}^n \ln i = \ln n! \end{aligned}$$

Здесь $\frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} = C_1$, т.к. возрастает и ограничена. Под $o(1)$ мы спрятали константы.

$$\begin{aligned} \ln n! &= \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + C_1 + o(1) \\ n! &= e^{\frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + C_1 + o(1)} \\ n! &= \sqrt{n} n^n e^{-n} e^{C_1 + o(1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C \sqrt{n} n^n e^{-n} \end{aligned}$$

Осталось выяснить, что такое $C_1 + o(1)$. Для этого рассмотрим $\sqrt{\pi}$ по Валлису:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k)!!}{(2k-2)!!} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^2 4^2 \dots (2k)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k (k!)^2}{2k!} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Теперь заменяем на эквивалентные, которые мы вывели выше:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2^k \sqrt{k} k^k e^{-k} C)^2}{\sqrt{2k} (2k)^{(2k)} e^{-2k} C} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{\pi} = \frac{C}{\sqrt{2}} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$, что и доказывает требуемое равенство □

1.3.6 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла²

Лемма:

Пусть:

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx, \quad A \in [a, b)$$

Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx \text{ - сходится } \Leftrightarrow \Phi(A) \text{ - ограничен}$$

Доказательство:

$$\int_a^A f(x) dx \Leftrightarrow \exists \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$$

И $\Phi(A)$ очевидно возрастает.

Формулировка:

f, g — допустимы на $[a, b)$

Если:

1. $f \leq g$ на $[a, b)$

То:

(a) $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится

(b) $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится

2. $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l < \infty$

То:

(a) $l \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow \int_a^b g$ и $\int_a^b f$ сходятся и расходятся одновременно

(b) $l = +\infty \Rightarrow$ см. пункт 1, заменяя сходитя на расходится и наоборот.

(c) $l = 0 \Rightarrow$ см. пункт 1

Доказательство:

1. $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx; \Psi(A) = \int_a^A g(x)dx$

$\int_a^b g(x)$ — сходится $\Leftrightarrow \Psi(A)$ — ограничен $\Rightarrow \Psi(A) \geq \Phi(A) \Rightarrow \Phi(A)$ — ограничен $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx$ — сходится. Второй случай разбирается аналогично.

2. (a) $l \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

По определению предела, начиная с некоторого x $\frac{f(x)}{g(x)}$ будет лежать в окрестности l .
НУО возьмем окрестность $\frac{1}{2}$, т.е.

$$\frac{1}{2}l < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}l$$

$$\frac{1}{2}lg(x) < f(x) < \frac{3}{2}lg(x)$$

И по пункту 1 этой теоремы g и f сходятся одновременно.

- (b) $l = \infty$

Условие буквально означает, что начиная с некоторого места $\frac{f(x)}{g(x)} > 2022 \cdot l \Rightarrow 2022 \cdot l \cdot g(x) < f(x) \Rightarrow f(x)$ — расходится $\Rightarrow g(x)$ — расходится.

- (c) $l = 0$

Аналогично п.б

1.4 Теоремы

1.4.1 Теорема о свойствах неопределённого интеграла¹

1.4.1.1 Характеристика множества первообразных функции

Формулировка

$$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Верны следующие утверждения:

1. $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — первообразная f на $\langle a, b \rangle$
2. $\forall \bar{F}$ — первообразная f на $\langle a, b \rangle \quad \bar{F} = F + C$

Доказательство

1. Очевидно $(F'(c) = 0)$
2. $(\bar{F} - F)' = 0, \int 0 \, dx = C \Rightarrow \bar{F}$ отличается от F на C

1.4.1.2 Правила интегрирования

Формулировка

f, g имеют F, G на $\langle a, b \rangle$

1. $\int f + g = \int f + \int g$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$
3. Пусть $\phi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$. Тогда $(\int f(x) \, dx)|_{x=\phi(t)} = F(\phi(t)) + C = \int f(\phi(t))\phi'(t) \, dt$
4. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \int f(\alpha x + \beta) \, dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$
5. f, g дифференцируемы. $\exists \int f g' \Rightarrow \exists \int f' g = f g - \int f g'$
Пример: $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$. Тогда $f' = 1 \Rightarrow f = x, g = \ln x \Rightarrow g' = \frac{1}{x}$. $\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C$

Доказательство

1. $(F + G)' = F' + G' = f + g$
2. $(\alpha F)' = \alpha f$
3. $(F(\phi(t)))' = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$

$$4. \int f(\alpha x + \beta) dx = \int \frac{f(z) dz}{(\alpha x + \beta)'} = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$$

$$5. (fg)' = f'g + fg' \Rightarrow (fg)' - fg' = f'g. \text{ По арифметическим свойствам } \int f'g = \int (fg)' - \int fg' = fg - \int fg'$$

1.4.2 Правило Лопиталя³

1.4.2.1 Лемма об ускоренной сходимости

Формулировка

$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \overline{\mathbb{R}}, a$ — предельная точка $D, a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\exists \dot{V}_a : f, g \neq 0$ на $\dot{V}_a \cap D, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Тогда $\forall x_k : x_k \rightarrow a, x_k \in D, x_k \neq a \exists y_k : y_k \rightarrow a, y_k \in D, y_k \neq a$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

Доказательство. Для всякого k можем подобрать n такое, что

$$\left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}, \quad \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}.$$

Теперь достаточно взять $y_k := x_n$. □

1.4.2.2 Правило Лопиталя

Формулировка:

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$

f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a, b)

Если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)} \in \left\{ \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right\}$$

Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — постоянного знака $\Rightarrow g$ монотонна $\Rightarrow g \neq 0$.

По Гейне $x_k : x_k \rightarrow a, x_k \in (a, b), x_k \neq a$, построим y_k из леммы. Тогда, по теореме Коши

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)}$$

Будем выражать отсюда $\frac{f(x_k)}{g(x_k)}$:

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right).$$

И т.к. $\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \rightarrow 0$, $\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \rightarrow 0$, то $\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \rightarrow L$. □

1.4.3 Теорема Штольца¹

1.4.3.1 Лемма о смешной сумме

Ну что вы хотели, КПК же

Формулировка

$$s < \frac{a}{b} < t$$

$$s < \frac{c}{d} < t$$

$$s < \frac{a+c}{b+d} < t$$

Доказательство

Упражнение ☺

Формулировка

x_n, y_n — вещественные последовательности, $x_n, y_n \xrightarrow{\text{монотонно}} 0$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{x_n}{y_n}$$

Доказательство

▷ Nota bene: Вообще мы тут рассматриваем только положительные числа, т.к. вышеупомянутая лемма вроде как работает только там. Но тут не должно быть проблем с сохранением общности, так что пофиг.

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall N_1 > N, \forall n > N_1 \quad c - \varepsilon < \frac{x_{N_1+1} - x_{N_1}}{y_{N_1+1} - y_{N_1}} < c + \varepsilon$$

Тут трюк такой: поскольку данное определение верно для всех $N_1 > N$, то мы можем продолжать расписывать такие неравенства до бесконечности (то есть рассмотреть $x_{N_1+2} - x_{N_1+1}$ и так далее. Давайте применим лемму о смешной сумме и сложим этот ряд неравенств. У нас всё, очевидно, сократится, кроме крайних членов:

$$c - \varepsilon < \frac{x_n - x_{N_1}}{y_n - y_{N_1}} < c + \varepsilon$$

Где $n \rightarrow \infty$. Ну а по определению предела, $x_n \rightarrow 0$, ровно как и y_n . Тогда их можно опустить в предельном переходе:

$$c - \varepsilon < \frac{y_{N_1}}{y_{N_1}} < c + \varepsilon$$

◁

1.4.4 Теорема Барроу¹

1.4.4.1 Интеграл с переменным верхним пределом

$f \in C[a, b], \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Обозначим его за

$$\phi(x) = \int_a^x f(x)$$

Формулировка

$$\forall x \in [a, b] \quad \phi'(x) = f(x)$$

Вот это приколы! Взяли какие-то странные интегралы, которые определены как какая-то недо-площадь, ещё и сделали область интегрирования переменной. А получили (внезапно) аж перво-образную!

Доказательство

Давайте распишем производную этой непонятной функции:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\int_x^y f}{y - x} \quad \text{Теорема о среднем} \\ &= \lim_{y \rightarrow x+0} f(c), c \in [x, y] \quad \xrightarrow{\text{Наконец-то предельный переход}} f(x) \end{aligned}$$

1.4.5 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм²

Формулировка

ВИНОГРАДЫЧ

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причём f — возрастает, а g — убывает.

Тогда:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b fg \leq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f \right) \cdot \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g \right)$$

КОХАСЬ

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, монотонны ОДИНАКОВО

Let $I_f = \frac{\int_a^b f}{b-a}$

Тогда:

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

Доказательство

▷

$\forall x, y \in [a, b] : (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$, так как монотонны одинаково.

Раскрываем скобки:

$$f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y на промежутке $[a, b]$ и делим на $(b - a)$

$$f(x)g(x) - I_f g(x) - f(x)I_g + I_f g \geq 0$$

Интегрируем по x на промежутке $[a, b]$ и делим на $(b - a)$

$$I_{fg} - I_f I_g - I_f I_g + I_{fg} \geq 0$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

◁

Формулировка

ВИНОГРАДЫЧ

$n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}^n$, причём $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$

Тогда:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right)$$

КОХАСЬ

$n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}^n$, причём $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

Тогда:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Доказательство

▷

Возьмём т.н. кусочно-постоянные функции $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, которые разбиты на n кусочков, и $\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ -й кусочек равен a_k и b_k соответственно. Тогда просто запишем стандартное неравенство Чебышева и у нас всё получится! (на разрывы в конечном числе точек пофигу).

◁

1.4.6 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных²

1.4.6.1 Линейность

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x) &= \alpha \int_a^b f(x) \\ \int_a^b f(x) + g(x) &= \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)\end{aligned}$$

1.4.6.2 Интегрирование по частям

$$\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b g f'$$

1.4.6.3 Замена переменных

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \phi'(x) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f$$

1.4.6.4 Доказательство

Всё выводится из таких же свойств неопределённого интеграла

1.4.7 Иррациональность числа π ²

$$\text{Let } H := \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt = \dots$$

Проинтегрируем по частям:

$$u = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \Rightarrow du = -2nt \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} dt$$

$$dv = \cos t dt \Rightarrow v = \sin t$$

Следовательно, $\dots = \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right) \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} dt = \dots$ (причём слагаемое с синусом занулится)

Опять проинтегрируем по частям:

$$u = t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} \Rightarrow du = \left(\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - 2t^2(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt$$

$$dv = \sin t dt \Rightarrow v = -\cos t$$

Поработаем с du , приплюсуем и вычтем $2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2}$ и вынесем $2(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2}$

у минусового слагаемого в du и плюсового $2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2}$:

$$\begin{aligned}
du &= \left(2(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right) + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - 2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \\
&= \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - (n-1) \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \\
\dots &= 0 + \frac{2}{(n-1)!} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} (-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi^2}{4}}^{\frac{\pi^2}{4}} + \frac{2}{(n-1)!} \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - (n-1) \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) \cos t dt \\
&= (4n-2)H_1 - \pi^2 H_2
\end{aligned}$$

Формулировка

Число π — иррационально.

Доказательство

$$H_0 = 2, H_1 = \dots [\text{по частям}] = 4$$

$$H_n = (\dots)H_1 + (\dots)H_0 = P_n(\pi^2) — \text{многочлен от } \pi^2 \text{ степени } \leq n.$$

Почему? Ну типа мы взяли произвольное n , и посчитали для него H_n , и по рекуррентной формуле просто раскрыли всё до примитивов (H_0, H_1) получили в конечном итоге огромный многочлен, зависящий от π^2 .

Пусть $\pi^2 = \frac{p}{q}$ (рациональное)

$q^n P_n(\frac{p}{q})$ = целое число (у нас огромный многочлен степени не больше n , в котором переменные = $\pi^2 = \frac{p}{q}$) = $q^n H_n > 0$ (интеграл положителен на нашем интервале) $\Rightarrow q^n H_n \geq 1$ (так как интеграл положительный, q^n — целое, произведение тоже целое, а значит минимальное положительное целое — 1)

$$1 \leq \frac{q^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \leq \frac{q^n}{n!} 4^n \pi \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Противоречие!

1.4.8 Компактность и конечные эпсилон-сети²

1.4.8.1 Определения

1. Множество $N \subset X$ называется ε -сетью для D , если $\varepsilon > 0 \forall x \in D \exists y \in N \quad \rho(x, y) < \varepsilon$
2. Множество D — сверхограниченное в X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть

1.4.8.2 Свойства

1. D — сверхограниченно в $X \Leftrightarrow D$ — сверхограниченно в себе

Доказательство: \triangleright

\Leftarrow ОЧЕВИДНО.

\Rightarrow Отметим $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - \frac{\varepsilon}{2}$ сеть в X . Теперь в каждом шарике $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ берём $y_i \in D$, если такая есть. Вуаля, $\{y_1, \dots, y_{m \leq n}\} - \varepsilon$ -сеть для D .

\triangleleft

2. Сверхограниченность сохраняется при равномерно непрерывном отображении

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u, v \in X : \rho(u, v) < \delta \Rightarrow \rho(f(u), f(v)) < \varepsilon; f(\delta\text{-сети}) = \varepsilon\text{-сеть}$$

Доказательство: \triangleright

Возьмём δ из условия, выберем конечную δ -сеть N для D . Тогда, нам необходимо узнать, что при $E = f(D)$, $y = f(x)$, E — сверхограниченно. Давайте возьмём любую точку x , найдём ближайшую x_i из D и посмотрим $f(x_i)$. Окажется, что $\rho(y, f(x_i)) < \varepsilon$. Вы скажете — а почему??? Да всё просто, по равномерной непрерывности!

\triangleleft

3. D — сверхограниченно $\Rightarrow Cl(D)$ — сверхограниченно

Доказательство: \triangleright

N — конечная ε -сеть.

$$\forall x \in D \exists y \in N : \rho(x, y) < \varepsilon$$

Тогда:

$$\forall x \in Cl(D) \exists y \in N : \rho(x, y) \leq \varepsilon$$

Возьмём $a \in D, a_i \rightarrow b(b \in Cl(D))$. Покрасим эту бесконечную последовательность в конечное число цветов, следовательно существует подпоследовательность одинакового цвета a_{n_k} . Следовательно, $a_{n_k} : \exists x_i \in N : \rho(a_{n_k}, x_i) < \varepsilon \dots$ (предельный переход) $\rho(b, x_i) \leq \varepsilon$. Получается, что мы получили т.н. 2ε -сеть, типа, типа эpsilon надо взять чуть-чуть побольше.

\triangleleft

4. D — сверхограниченно $\Leftrightarrow \forall$ последовательность из D содержит фундаментальную подпоследовательность

Доказательство: \triangleright

\Rightarrow

$\{y_n\}$ — последовательность из D . Зафиксируем $\varepsilon = 1 : \{x_1, \dots, x_n\}$. Логично, что в одном из шаров $B(x_i, \varepsilon)$ — содержится бесконечно много элементов последовательности. Далее будем рассматривать только те элементы последовательности, которые внутри шара.

Зафиксируем $\varepsilon = \frac{1}{2} : \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$. Логично, что в одном из шаров $B(\hat{x}_i, \varepsilon = \frac{1}{2})$ — содержится бесконечно много элементов последовательности. Далее будем рассматривать только те элементы последовательности, которые внутри шара.

И так далее!

А почему же построенная система из под-шаров будет являться фундаментальной последовательностью? Да дело в том, что по определению фундаментальной последовательности, начиная с какого-то номера все элементы подпоследовательности будут лежать сколь угодно близко. А мы тут делаем ровно это — просто берём нужный эpsilon и строим шары.

\Leftarrow

Очевидно. ☺

Так как если нет конечной ε -сети, то $\exists \{x_n\}$ в $D : \rho(x, x_i) \geq \varepsilon \Rightarrow$ нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность.

\triangleleft

1.4.8.3 Теорема

Формулировка:

(X, ρ) — метрическое пространство, X — полное, $D \subset X$

Тогда эквивалентно:

1. D — компактно.
2. D — сворограничено, замкнуто.

Доказательство:

(в метрическом пространстве)

X — компактно $\Leftrightarrow X$ — секвенциально компактно

▷

⇒

Полноту получаем автоматически. Если \exists фундаментальная последовательность $\{y_n\}$, не имеющая предела, то из секвенциальной компактности X следует, что существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$

Допустим, что X — не сворограниченно $\Rightarrow \exists \{x_n\}$, из которой нельзя извлечь фундаментальную подпоследовательность, однако, это противоречит секвенциальной компактности (сх. подпол. фундаментальна).

⇐

Сворограниченно \Rightarrow из любой последовательности можно извлечь фундаментальную \Rightarrow она сходится (в силу полноты) \Rightarrow оно секвенциально компактно \Rightarrow в X компактно.

◁

1.4.9 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой²

Формулировка:

$f(\varphi) : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \infty)$ — непрерывная функция.

$\Phi([\alpha, \beta]) = S_{\text{сектора } [\alpha, \beta]}, \quad g(\phi) = \frac{r^2(\phi)}{2}$

$$\Phi([\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} g(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi$$

Для параметрической:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t)) dt$$

Доказательство:

▷

Во первых, возьмём функцию промежутка (угла) $\Phi([\alpha, \beta]) = S_{\text{сектора } [\alpha, \beta]}$ и 'функцию' $g(\varphi) = r^2(\varphi)/2$. Если мы докажем, что g — плотность Φ , то теореме о вычислении АФП по плотности у нас всё будет супер.

Заметим, что кусочек круга (круговой сектор) имеет площадь $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)r^2$ (цитата: *школьная формула*, а вообще, это достаточно логично, мы выбираем кусок круга, ограниченный двумя углами, причём мы смотрим внутри одной четверти, поэтому делим обычную площадь πr^2 на 4). Также, достаточно очевидно, что если мы на нашем промежутке (любом) найдём минимум и максимум функции, то $\text{сектор}(\text{минимума}) \subset \text{сектор}(\text{функции}) \subset \text{сектор}(\text{максимума})$. Ура!

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) \min_{\varphi \in [\alpha, \beta]} r^2(\varphi) \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \max_{\varphi \in [\alpha, \beta]} r^2(\varphi)$$

Тогда по определению, g — плотность Φ .

◁

Теперь просто переведём для параметрической формулы. $r(\varphi) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Также, проведём замену переменных в интеграле, $\phi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$

$$\begin{aligned} \Phi([\alpha, \beta]) &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} r^2(\varphi) \phi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} (x^2(t) + y^2(t)) \left(\arctan \frac{y(t)}{x(t)} \right)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} (x^2(t) + y^2(t)) \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)^2} \right) \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} (x^2(t) + y^2(t)) \left(\frac{x^2(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \right) \left(\frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} y'(t)x(t) - x'(t)y(t) dt \end{aligned}$$

1.4.10 Изопериметрическое неравенство²

Формулировка:

$G \subset \mathbb{R}^2$ — замкнуто и ограничено.

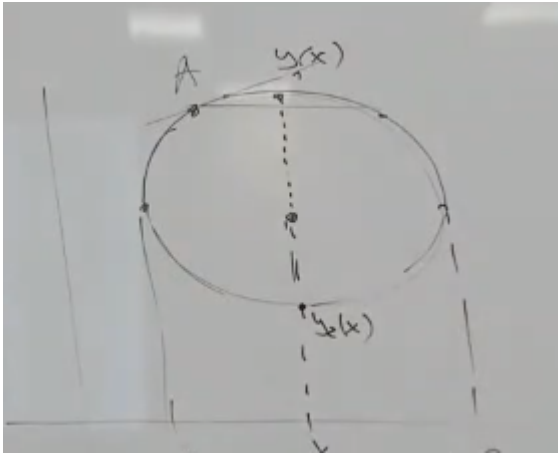
$$\text{diam } G = \sup \{ \rho(x, y) : \forall x, y \in G \} \leq 1$$

$$\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$$

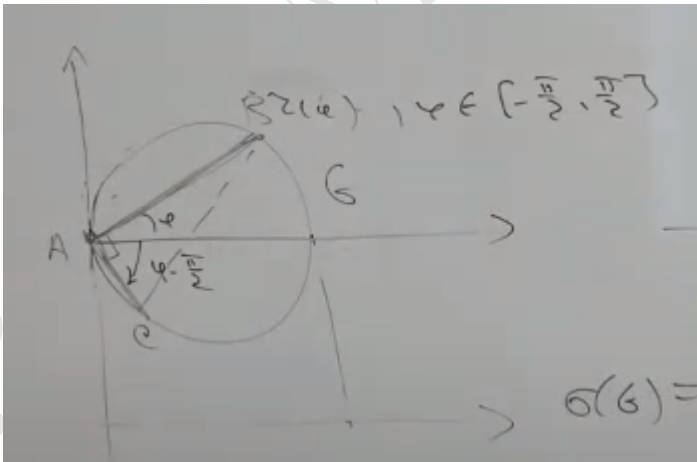
Доказательство:

▷

Рассмотрим наше множество в 1 четверти декартовой системы координат:



Рассмотрим его над- и под- графики. Заметим, что эти функции почти дифференцируемые (?). Возьмём какую-нибудь производную (касательную) и примем её за Оу:



Теперь можем ввести функцию для площади сектора $r(\varphi) \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi$.

Возьмём какой-нибудь уголок φ , и отложим от него 90 градусов вниз, тем самым получим с Ох новый угол $\varphi - \frac{\pi}{2}$. Теперь делаем финт ушами, делим наш интеграл на промежуток до 0 и после, в части от $-\frac{\pi}{2}$ до 0 заменяем переменную на $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$ и потом грациозно меняем α на φ , так как нам по барабану, как называется переменная. Суммируем интегралы:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) d\varphi$$

А теперь самое интересное. Посмотрим на отрезки AB и AC , заметим, что это прямоугольный треугольник, и, соответственно, сумма их квадратов равна BC . А $BC \leq \text{DIAG}(G) \leq 1$, следовательно:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

◁

1.4.11 Обобщенная теорема о плотности¹

Формулировка

$\exists \phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$\exists f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна

$\exists \delta$ — произвольный отрезок $\in \langle a, b \rangle$

$\exists m_\delta \leq \inf_{x \in \delta} f(x), M_\delta \geq \sup_{x \in \delta} f(x)$

1. $m_\delta \cdot l_\delta \leq \phi(\delta) \leq M_\delta \cdot l_\delta$
2. $\forall x \in \delta \quad m_\delta \leq f(x) \leq M_\delta$
3. $\forall \delta \rightarrow [x, x] \quad M_\delta - m_\delta \rightarrow 0$

Вот это ВСЁ должно выполняться. И тогда мы утверждаем, что верно: $\phi([p, q]) = \int_p^q f(x) dx$. Это утверждение — синоним того, что f — плотность ϕ

Доказательство

▷

Для начала введём функцию, для которой потом будем пытаться доказать то, что она первообразная.

$\exists F(x) = 0$, если $x = p$ (отрезок $[p, p]$). $F(x) = \phi([p, x])$, если $x \in (p, q]$.

$\exists \delta = [x, y] \in [p, q]$

Идём просто по порядку нумерованных утверждений:

1. Разделим всё на l_δ . $m_\delta \leq \frac{\phi(\delta)}{l_\delta} \leq M_\delta$. Заметим, что $\phi(\delta) = F(y) - F(x)$, т.к. ϕ аддитивна.
2. Заметили, что наши достижения из прошлого пункта и в этом зажаты в одном промежутке $([m_\delta, M_\delta])$. Давайте этим воспользуемся и вычтем из первого второе: $|\frac{F(y)-F(x)}{l_\delta} - f(x)| \leq M_\delta - m_\delta$.
3. Возьмём достижение из прошлого пункта. Заметим, что $l_\delta = y - x$. А теперь давайте устремим l_δ в 0. $\lim_{y \rightarrow x} |\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)| \leq M_\delta - m_\delta$. Вспоминаем что мы писали в условии про 3 пункт, выясняется, что $M_\delta - m_\delta \rightarrow 0$, то есть всё это выражение стремится к 0. О БОЖЕ!!! Мы же получили ровно определение производной!

◁

1.4.12 Объём фигур вращения¹

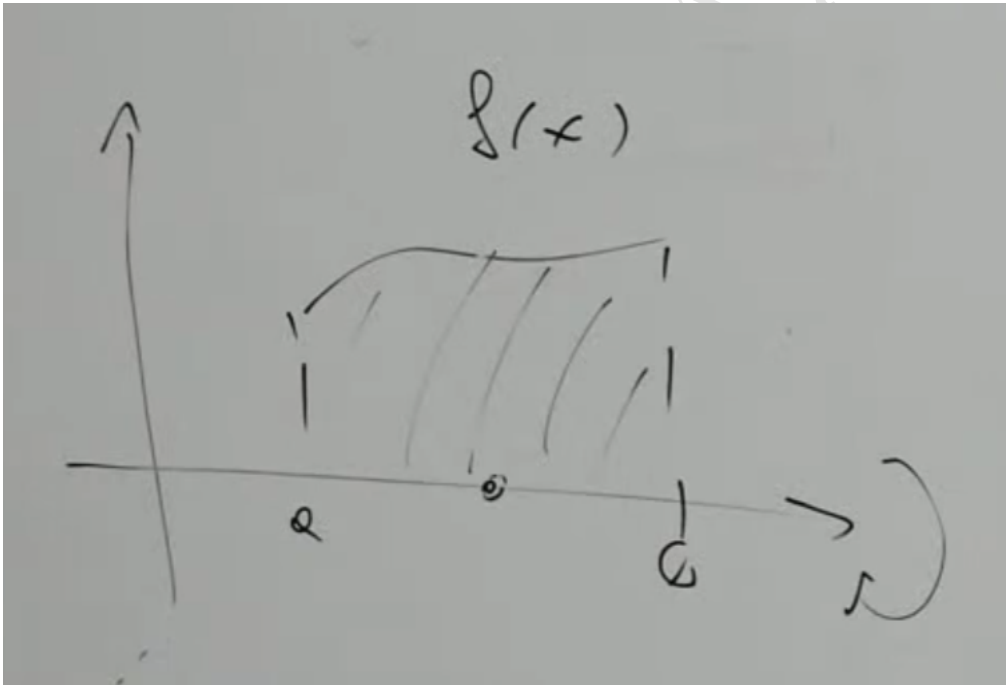
$\exists \delta = [p, q] \in \langle a, b \rangle$

$f : \langle a, b \rangle$ непрерывна (или кусочно-непрерывна, но там мы рассматриваем эти куски отдельно, ничего интересного)

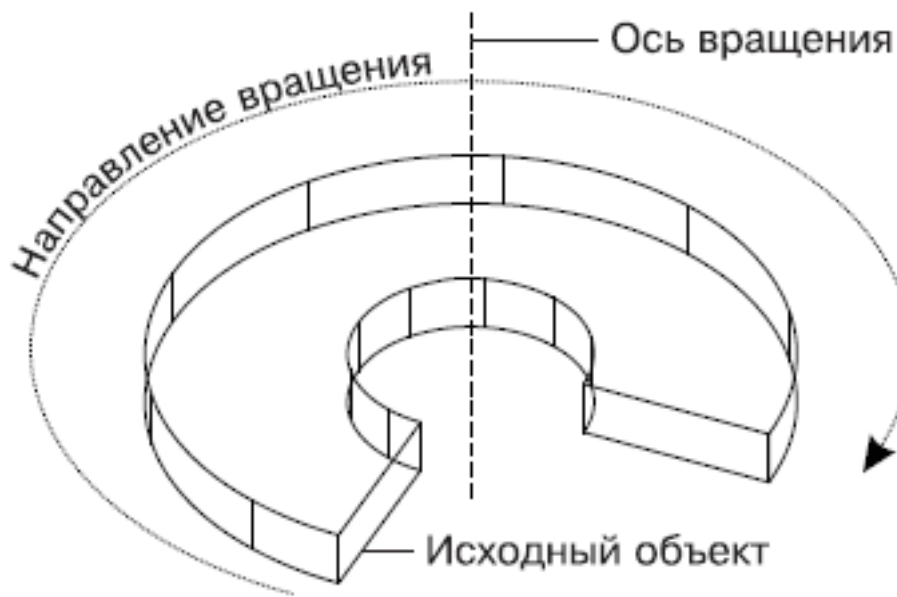
$\Delta\phi_x$ — объём фигуры вращения f относительно оси x (получится криволинейная сосиска ☺)

$\Delta\phi_y$ — объём фигуры вращения f относительно оси y (получится бублик). Обращаем внимание, что радиус бублика в каждой точке вращения разный (чем дальше от оси, тем больше)

Утверждаем, что $\phi_x(\delta) = \pi \cdot \int_p^q f^2(x) dx$. Вместо доказательств давайте разберёмся что откуда берётся: π мы просто вынесли как константу, $\pi f^2(x)$ — это площадь среза нашей колбасы в точке x . Ну и интегрируем её просто на нужном отрезке.



Далее, $\phi_y(\delta) = 2\pi \cdot \int_p^q x \cdot f(x) dx$. Тут не всё так очевидно на первый взгляд. На самом деле, всё элементарно: $2\pi x$ — это просто длина окружности в точке вращения. $f(x)$ же просто высота среза в этом месте.



1.4.13 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме¹

Формулировка

$$f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$$

$$x, x_0 \in \langle a, b \rangle$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Доказательство

▷

А получается это очень просто, по индукции. База $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

Важно: чтобы такие трюки работали, производная должна существовать (по условию $f \in C^{n+1}$)

Интегрируем по частям: $\int 1 dt = t + C = t - x = -(x - t)$

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = -(x-t) \cdot f'(t) + \int_{x_0}^x (x-t) \cdot f''(t) dt$$

Ещё раз: $\int -(x-t) dt = \frac{1}{2} - (x-t)^2$. Заметили, что степень будет каждую итерацию инкрементиться, а так же каждую итерацию будет появляться множитель-дробь с знаменателем i . Так, когда мы дойдём до n , эта часть будет равна $\frac{1}{n!} - (x-t)^n$ <

1.4.14 Вычисление длины гладкого пути¹

Формулировка

$\exists \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, γ — гладкий путь.

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Note: работает только когда γ инъективен.

Доказательство

▷

$\exists [p, q] \in \text{Segm}[a, b]$

Введём функцию $\phi([p, q]) = l(\gamma|_{[p, q]})$. Заметим, что это аддитивная функция промежутка (по 2 аксиоме гладкого пути). Вспоминаем "Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности". То есть мы уже можем сказать, что на всём $[a, b]$ длина считается через $\int_a^b ||\gamma'(t)|| dt$.

Однако, нам надо доказать, что $||\gamma'(t)||$ — плотность ϕ .

Для этого нужно проверить 3 утверждения:

$$M_i([p, q]) := \max_{t \in [p, q]} |\gamma'_i(t)|$$

$$1. m_{[p, q]} \cdot l_{[p, q]} \leq \phi([p, q]) \leq M_{[p, q]} \cdot l_{[p, q]}$$

Введём $\bar{\gamma} : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\bar{\gamma}(t) = M([p, q]) \cdot t$

Введём носители путей γ и $\bar{\gamma}$: $C_\gamma C_{\bar{\gamma}}$

Заметим, что отображение $T : C_\gamma \rightarrow C_{\bar{\gamma}}$ — растяжение, т.к. $\forall i, j \in [p, q] \quad \rho(\gamma(i), \gamma(j)) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (\gamma_k(i) - \gamma_k(j))^2} \stackrel{\text{Т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^m (\gamma'_k(c_k) \cdot (j - i))^2} \leq |j - i| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2([p, q])} = |j - i| \cdot M_{[p, q]} = \rho(\bar{\gamma}(i), \bar{\gamma}(j))$

А это ровно и обозначает то, что мы записали в условии: $\phi([p, q]) \leq |j - i| \cdot M_{[p, q]}$.

Для минимумов симметрично

$$2. \forall x \in [p, q] \quad m_{[p, q]} \leq ||\gamma'(x)|| \leq M_{[p, q]}$$

$\gamma'(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma'_i(x))^2} \leq M_{[p, q]}$, т.к. никакое $\gamma'_i(x)$ не может быть больше максимума на промежутке. Для минимума симметрично.

$$3. \forall x \in [p, q] \quad M_{[p, q]} - m_{[p, q]} \xrightarrow{q-p \rightarrow 0} 0$$

Поскольку все $\gamma'_i(x)$ непрерывны, то предел максимума на отрезке, стремящемся к нему будет равен самому $\gamma'_i(x)$. Таким образом, разность минимума и максимума $\rightarrow 0$ (из непрерывности γ' и предыдущего утверждения)

◁

1.4.15 Свойства верхнего и нижнего пределов¹

Формулировка

$\exists x_n$

Если ничего не написано про нижний предел, значит там всё работает аналогично.

1. $\lim x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\exists k_n \leq x_n \quad \overline{\lim} k_n \leq \overline{\lim} x_n$
3. $\exists \lambda \geq 0 \quad \overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \overline{\lim} x_n$
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\lim x_n$
5. $\exists k_n \quad \overline{\lim}(x_n + k_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} k_n$
 $\lim(x_n + k_n) \geq \lim x_n + \lim k_n$
6. $\exists t_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}(x_n) + l$
7. $\exists t_n \rightarrow l > 0 \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}(t_n \cdot x_n) = l \cdot \overline{\lim} x_n$

Доказательство

Тут я буду ссылаться на простейшие свойства из определения Верхний и нижний пределы¹.

1. Очевидно из свойства 2.
2. $\overline{\lim} x_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$
 $\overline{\lim} k_n = \sup(k_n, k_{n+1}, \dots)$. Следовательно, поскольку все элементы меньше, то и точная граница будет меньше.
3. Очевидно по той же логике. Если мы берём $\sup(\lambda x_n, \lambda x_{n+1}, \dots) = \lambda \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$
4. Простая логика неравенств: $x < a \Rightarrow -x > -a$. $\sup(-x_n, -x_{n+1}, \dots) = -\inf(x_n, x_{n+1}, \dots)$
5. Очевидно. Равенство достигается, когда последовательности положительны. В противном случае, одна может вычесть другую и вместо увеличения верхнего предела, он уменьшится.
6. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall k > N_0 \quad l - \varepsilon \leq t_k \leq l + \varepsilon$
 $l - \varepsilon + x_k \leq t_k + x_k \leq l + \varepsilon + x_k$
 $\sup x_k = y_N$. Возьмём $N > N_0$. Перейдём к \sup : $l - \varepsilon + y_N \leq \sup(t_N + x_N, t_{N+1} + x_{N+1}, \dots) \leq l + \varepsilon + y_N$
 $y_N \rightarrow \lim x_n, \sup(t_N + x_N, t_{N+1} + x_{N+1}, \dots) \rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n)$
 $\lim(x_n) + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_n + t_n) \leq \overline{\lim}(x_n) + l + \varepsilon$. А поскольку $\varepsilon \rightarrow 0$, мы его опускаем и получаем выражение из условия
- То есть что мы тут сделали: расписали предел t_k , прибавили к нему x_k , перешли к супремуму, устремили N в бесконечность и сделали предельный переход, после которого всё превратилось в верхние пределы и сошлось.
7. КПК не хочет доказывать ☺

1.4.16 Техническое описание верхнего предела¹

Формулировка

$\exists x_n$

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ не ограничено сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
 - (a) $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
 - (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists$ беск. число $n : x_n > l - \varepsilon$

Доказательство

1. Очевидно

2. \Rightarrow

Так же очевидно: $\sup(x_n, x_{n+1}, \dots) = -\infty$, а по свойству 2, $x_n \leq y_n$.

\Leftarrow

Если x_n стремится к $-\infty$, то $\forall E < 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n < E \Rightarrow \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) < E$

3. \Rightarrow

(a) По свойству 2, $x_n \leq y_n$, а y_n монотонно убывает и $y_n \rightarrow l$

(b) Очевидно из того факта, что последовательность y_n имеет бесконечное количество элементов, при том, что $y_n \rightarrow l$. То есть мы можем брать бесконечное число элементов и получим выполнение условия.

\Leftarrow

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \exists$ беск. число $n : x_n > l - \varepsilon$. Возьмём эти неравенства и перейдём к супремуму (который мы обозначаем как y_n):

$l - \varepsilon \leq y_n \leq l + \varepsilon$. Верхняя оценка верна по умолчанию, а нижняя потому, что y_n — супремум, то есть ВЕРХНЯЯ граница.

1.4.17 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов¹

Формулировка

$$\lim x_n = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \exists \lim x_n$$

Доказательство

\Rightarrow

$\underline{\lim} x_n$ это предел последовательности z_m , которая состоит из $\inf_{n \in (m, +\infty) \cap \mathbb{N}} x_n$. Очевидно, $z_n \leq x_n$. Аналогичное верно для $\overline{\lim} x_n$ (пусть последовательность тут будет k_n).

Соответственно, $z_n \leq x_n \leq k_n$. А поскольку $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$, то по теореме о двух городских, x_n имеет тот же предел.

\Leftarrow

$\overline{\lim} x_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$. Заметим, что если мы сюда подставим определение предела последовательности по Коши, то это определение так же выполняется. Разумеется, в оба определения в качестве предела мы подставляем точку l и видим, что ничего не нарушается (ε -окрестность точки l , в которой лежат все точки, начиная с N , гарантирует выполнение $x_n < l + \varepsilon$. Для нижнего предела всё то же самое, а поскольку точка у нас фиксирована, мы видим равенство верхнего и нижнего пределов.

1.4.18 Теорема о характеристизации верхнего предела как частичного¹

Формулировка

$$\overline{\lim} x_n = l \Rightarrow \exists \lim x_{n_k} = l$$

Доказательство

Очевидно, чтобы такое доказать, надо предъявить подходящую подпоследовательность. По тех. определению верхнего предела, точка является предельной в последовательности, то есть мы можем сколько угодно приближать ε , в ней найдётся нужная точка.

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k : l - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq l + \frac{1}{k}$$

То есть грубо говоря, мы выдумали последовательность, которая стремится к l . Супремум является предельной точкой, а значит, мы можем приближать нашу последовательность в любом из супремумов (у нас же предел — последовательность супремумов). Ну другими словами, это значит, что мы можем при всём этом сделать так, чтобы последовательность n_k была возрастающей. И таким образом мы вытащили самую настоящую подпоследовательность, а значит нашли частичный предел, равный верхнему.

Ещё не забываем, что верхний предел может быть бесконечностью, но там всё очевидно. Выбираем подпоследовательность, стремящуюся в бесконечность. У нас последовательность не ограничена, а значит такой есть.

1.4.19 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена²

Формулировка (Теорема о формуле трапеций):

$f \in C^2[a, b]$, τ — дробление, $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$

Тогда

$$\left| \int_a^b f - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

Доказательство (Теорема о формуле трапеций):

Введем $\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$

Рассмотрим интеграл на каждом отрезке дробления:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) d(x - \xi_k) =$$

Проинтегрируем по частям: $u = f(x) \Rightarrow u' = f'(x) \quad v' = 1 \Rightarrow v = x - \xi_k$

$$= f(x)(x - \xi_k) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x - \xi_k) dx = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x - \xi_k) dx$$

Последнее равенство верно в силу того, что

$$f(x_k)(x_k - \xi_k) - f(x_{k-1})(x_{k-1} - \xi_k) = f(x_k)x_k - f(x_k)\xi_k + f(x_{k-1})x_{k-1} - f(x_{k-1})\xi_k$$

Введем $\psi(x) = (x_k - x)(x - x_{k-1}) \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\psi'(x) = (x_k \cdot x - x_k \cdot x_{k-1} - x^2 + x \cdot x_{k-1})' = -2x + x_k + x_{k-1} \Rightarrow -\frac{1}{2}\psi(x) = x - \xi_k$$

Получившийся до этого интеграл снова проинтегрируем по частям $u = f'(x) \Rightarrow u' = f''(x) \quad v' = \psi'(x) \Rightarrow v = \psi(x)$

$$\frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) \psi'(x) dx = \frac{1}{2} (f'(x) \cdot \psi(x)) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) \psi(x) dx$$

Итого:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) dx = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} - \frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) \psi(x) dx$$

Теперь поработаем с началом:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \right| &= \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (f(x_k) + f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) \psi(x) dx - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) \psi(x) dx \right| = \left| \frac{1}{2} \int_a^b f''(x) \psi(x) dx \right| \end{aligned}$$

Теперь оценим $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \psi(\xi_k) &= (x_k - \xi_k)(\xi_k - x_{k-1}) = \left(x_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \right) \left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2} - x_{k-1} \right) = \\ &= \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right) \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right) = \frac{1}{4} (x_k - x_{k-1})^2 = \psi(x) \leq \frac{1}{4} \delta^2 \end{aligned}$$

здесь δ - максимум по отрезкам.

И в итоге получаем:

$$\left| \frac{1}{8} \int_a^b f''(x) dx \right| = \frac{1}{8} \int_a^b |f''(x)| dx$$

Формулировка (Формула Эйлера–Маклорена):

$$m, n \in \mathbb{Z}, f \in C^2[m, n]$$

Тогда

$$\int_m^n f = \sum_{i=m}^n f(i) - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

Причём первое и последнее слагаемое в сумме входят с множителем $\frac{1}{2}$

Доказательство (Формула Эйлера–Маклорена):

Из доказательства предыдущей теоремы вспоминаем, что:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) - \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)\psi(x)dx$$

и понимаем, что $\{x\}(1 - \{x\})$ - просто интересная запись для $\psi(x)$.

1.4.20 Асимптотика степенных сумм²

Формулировка:

Наша функция $p > 1$, $f(x) = x^p$. Возьмём сумму первых n членов:

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \int_1^n f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x^p + \frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p - \frac{1}{2} \int_m^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1 - \{x\}) = \dots = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + O(\max 1, n^{p-1})$$

Доказательство:

Формула Эйлера–Маклорена:

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-1}\{x\}(1 - \{x\})dx$$

Теперь один из интегралов оценим, а второй просто посчитаем.

$$0 \leq \int_1^n x^{p-2}\{x\}\{1-x\}dx \leq \frac{1}{4} \left(\frac{n^{p-1}-1}{p-1} \right) = O(\max 1, n^{p-1})$$

Оценка справедлива, т.к. $\max \{x\}\{1-x\}$ достигается при $x = \frac{1}{2}$

$$\int_1^n x^p dx = \frac{n^{p+1} - 1}{p+1}$$

Итого:

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{1}{2}(1 + n^p) + \frac{n^{p+1} - 1}{p+1} + O(\max 1, n^{p-1})$$

Все константы запишем под O

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{n^p}{2} + \frac{n^{p+1}}{p+1} + O(\max 1, n^{p-1})$$

q.e.d.

Fun fact:

При $p < -1$ $1^p + 2^p + \dots + n^p = O(1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^p$ - сходится.

1.4.21 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда³

Формулировка:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \dots = \ln n + \gamma + o(1), \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

Доказательство.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln n + \ln 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} \{x\} \{1-x\} dx$$

Заметим, что правый интеграл возрастает как $f(n)$ и ограничен

$$\int_1^n \frac{1}{x^3} \{x\} \{1-x\} dx \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{x^3} dx \leq \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \Big|_1^n\right) \leq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{8}$$

Первый переход легитимен, т.к. это возрастающая функция. Последний переход справедлив, т.к. $\frac{1}{n^2}$ - возрастающая. Таким образом,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \dots = \ln n + \gamma + o(1) \quad (1)$$

где $\gamma \in [\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{8}]$ - постоянная Эйлера, оборачивает интеграл и $\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{n})$. \square

1.4.22 Формула Валлиса¹

Формулировка

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, n - \text{чётно}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1!!}{n!!}, n - \text{нечётно}$$

Доказательство

\triangleright

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = 1$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx \underset{\text{по частям}}{=} -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$-\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx = \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
&I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2} \\
&I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

◁

1.4.23 Простейшие свойства несобственного интеграла²

Формулировка:

1. Критерий Больцано-Коши

$\lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A$ — конечный $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) \forall A, B \in (\delta, b) \left| \int_A^B \right| < \varepsilon$

2. Аддитивность по промежутку

f — допустима, $[a, b], c \in (a, b)$. Тогда $\int_a^{\rightarrow b}$ и $\int_c^{\rightarrow b}$ — сходятся и расходятся одновременно. А если сходятся, то $\int_a^{\rightarrow b} = \int_a^c + \int_c^{\rightarrow b}$

3. Линейность

f, g — допустимы, $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ — сходятся, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f, f \pm g$ — допустимы, $\int_a^{\rightarrow b} \lambda f$ и $\int_a^{\rightarrow b} f \pm g$ — сходятся.

$$(a) \int_a^{\rightarrow b} \lambda f = \lambda \int_a^{\rightarrow b} f$$

$$(b) \int_a^{\rightarrow b} f \pm g = \int_a^{\rightarrow b} f + \int_a^{\rightarrow b} g$$

4. Интегрирование неравенств

f, g — допустимы, $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ — существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$

5. Интегрирование произведения

f, g — дифф. на $[a, b)$, f', g' — допустимы. $\Leftrightarrow f, g \in C[a, b]$.

$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$ (если существуют хотя бы 2 предела, то существует и 3й, и равенство выполняется)

6. Интегрирование композиции

$\phi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle, \phi \in C[\alpha, \beta]$ $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \exists \phi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда:

$$\int_a^{\rightarrow \beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta-0)} f(x) dx$$

Примечание: f — кусочно непрерывна на $[a, b]$. Если рассмотреть на $[a, b)$, то $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$

Доказательство:

1. Почти в тупую выводится из признака Больцано-Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 : |x_1 - b| < \delta \quad |x_2 - b| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \mathbb{R}$$

(это он же, но для $\lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$, где $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$)

2. $\forall A \in (a, b)$

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx$$

Дальше делаем предельный переход и радуемся жизни.

Следствие из критерия Больцано-Коши

Если $\exists A_n \rightarrow b-0 \quad B_n \rightarrow b-0; \quad A_n < B_n; \quad \int_{A_n}^{B_n} f(x)dx \rightarrow 0$

Тогда $\int_a^{b-0} f(x)dx$ - расходится.

Доказывается пристальным взглядом на верхний и нижний предел.

- 3.
- 4.
- 5.
6. Все эти пункты доказываются по аналогии с п.2: Мы сводим признаки к признакам обычных определенных интегралов и делаем предельный переход.

1.4.24 Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}^2$

Формулировка:

$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ - когда-то сходится, а когда-то нет.

Доказательство:

Рассмотрим возможные значения α :

1. $\alpha > 1$

Пусть $\alpha = 1 + 2a, \quad a \in (0, +\infty)$. Тогда:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+2a} \cdot (\ln x)^\beta} = \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a \cdot (\ln x)^\beta}$$

Заметим, что второй множитель $\rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Почему? При $\beta \geq 0$ - тривиально, знаменатель будет улетать в бесконечность.

Для $\beta < 0$ применим хитрое правило Лопиталя: $\frac{1}{x^a \cdot (\ln x)^{-\beta}} = \frac{(\ln x)^\beta}{x^a}$ - здесь уже $\beta > 0$, а числитель и знаменатель $\rightarrow +\infty$. Лопиталим:

$$\frac{\beta (\ln x)^{\beta-1} \frac{1}{x}}{a \cdot x^{a-1}} = \frac{\beta \cdot (\ln x)^{\beta-1}}{a \cdot x^a}$$

Видим, что просто уменьшается степень у $\ln x \Rightarrow$ применив Лопиталья β раз получим что-то вроде $\frac{\beta!}{a^\beta x^a} \rightarrow 0$ (важно, что "вроде т.к. степени могут быть нецелыми) \Rightarrow от β ничего не зависит при $\alpha > 1 \Rightarrow \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a \cdot (\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^{1+a}}$ - сходится, начиная с некоторого x .

2. $\alpha < 1$

Пусть $\alpha = 1 - 2b$, $b \in (0, +\infty)$. Тогда:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-b}} \cdot \frac{1}{x^{-b} \cdot (\ln x)^\beta} = \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-b}} \cdot \left(\frac{x^b}{(\ln x)^\beta} \right) \geq \frac{1}{x^{1-b}}$$

- начиная с некоторого места расходится.

3. $\alpha = 1$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^\beta} = \left[\begin{array}{l} y = \ln x \\ x = e^y \end{array} \right] = \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy \cdot e^y}{e^y \cdot y^\beta} = \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

где-то эту штуку мы уже видели. При $\beta \leq 1$ - расходится, а при $\beta > 1$ - сходится.

Итого:

$\alpha > 1$,

$\forall \beta$ - сходится.

$\alpha < 1$,

$\forall \beta$ - расходится.

$\alpha = 1$,

$\beta \leq 1$ - расходится,

$\beta > 1$ - сходится.

2 Период Мезозойский

2.1 Важные определения

2.1.1 Гамма функция Эйлера¹

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2.1.2 Абсолютно сходящийся интеграл, ряд¹

2.1.2.1 Интеграл

$\square f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ допустима

Несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся, когда выполняются 2 условия:

1. $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$ сходится

2. $\int_a^{\rightarrow b} |f(x)| dx$ сходится

2.1.2.2 Ряд

$\sum a_n$

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится

2.1.3 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость¹

2.1.3.1 Числовой ряд

Выражение

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad | \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

называется формальным рядом. Введём понятие частичных сумм:

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

Тогда ряд можно представить как предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S$$

2.1.3.2 Сумма ряда

S называют суммой ряда.

2.1.3.3 Сходимость

Если $S \in \mathbb{R}$, то такой ряд называют сходящимся

2.1.3.4 Расходимость

Если $S = \pm\infty$ или $\nexists \lim S_N$, то такой ряд называют расходящимся

2.2 Определения

2.2.1 n -й остаток ряда¹

$R_N = \sum_{k=N}^{+\infty} a_k$ — N -ый остаток ряда.

2.2.2 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда¹

Критерий Больцано–Коши

2.2.3 Бесконечное произведение³

Выражение вида $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ будем называть бесконечным произведением.

Обозначим $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$ — что-то типа частичного произведения.

Если:

1. \exists конечный $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n \in (0, +\infty)$, то произведение сходится
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$, то произведение расходится
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$, то произведение расходится к нулю
4. $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$, то произведение расходится

Обозначим $\prod_n = \prod_{k=n}^{+\infty}$ и отметим пару свойств бесконечных произведений:

1. $\prod_{k=n}^{+\infty} = P_{n-1} \cdot \prod_n$
2. $\prod_{k=n}^{+\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \prod_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$
3. $\prod_{k=n}^{+\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow a_k \rightarrow 1$
4. $\prod_{k=n}^{+\infty} a_k$ сходится только если $\exists K \in \mathbb{N} : \forall k > K \quad a_k > 0$
5. Пусть $a_k > 0$. Тогда $\prod_{k=n}^{+\infty} a_k$ сходится \Leftrightarrow ряд $\sum \ln a_k$ сходится. Причем если $\sum \ln a_k = S$, то $\prod_{k=n}^{+\infty} a_k = e^S$

Доказываются эти свойства очевидно, поэтому просто накинута идея доказательств.

1. Предельный переход при $n \rightarrow +\infty$

2. Выражаем нужный член из первого пункта
3. $a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow +\infty$
4. Теорема о стабилизации знака
5. Просто прологарифмируем P_n

2.3 Важные теоремы

2.3.1 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства.¹

Формулировка + доказательство

1. Область определения

Поищем где интеграл сходится:

Рассмотрим промежуток интегрирования от 0 до 1. Очевидно, при $t \rightarrow 0$ $t^{x-1}e^{-t} \equiv t^{x-1}$. Ну а так как $x-1 > -1$, то и интеграл сходится. Обратите внимание, это именно то условие, почему при $x \leq 0$ всё ломается.

Теперь осталось посмотреть на промежуток от 1 до $+\infty$: Надо просто заметить что экспонента стремится к нулю быстрее, чем возрастает t^{x-1} . Соответственно, мы можем отломить от неё кусок, заметив, что вся наша формула неотрицательна (т.к. все члены положительны):

$$0 \leq t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}}$$

Так как экспонента стремится к нулю быстрее при росте t , а t^{x-1} ограничена, то $t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}$ тоже стремится к нулю, а значит:

$$t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}} \leq e^{-\frac{t}{2}}$$

А это уже стремится к нулю, то есть интеграл сходится.

2. Выпуклость

Зафиксируем t и рассмотрим подынтегральную функцию. Тогда формула превратится в $f(x) = t^{x-1}e^{-t}$. Теперь мы смотрим на t как на константу и видим произведение показательной функции с какой-то константой. Показательная функция выпукла $\Rightarrow f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$. Теперь если всё это безобразия проинтегрировать и подшаманить, то получится

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - 1} e^{-t} dt \leq \alpha_1 \int_0^{+\infty} t^{x_1 - 1} e^{-t} dt + \alpha_2 \int_0^{+\infty} t^{x_2 - 1} e^{-t} dt$$

А это определение выпуклости нашей рассматриваемой функции. ВТМ, из выпуклости следует непрерывность этой функции на всей области определения.

3. Значение

Проинтегрируем нашу гамма-функцию по частям:

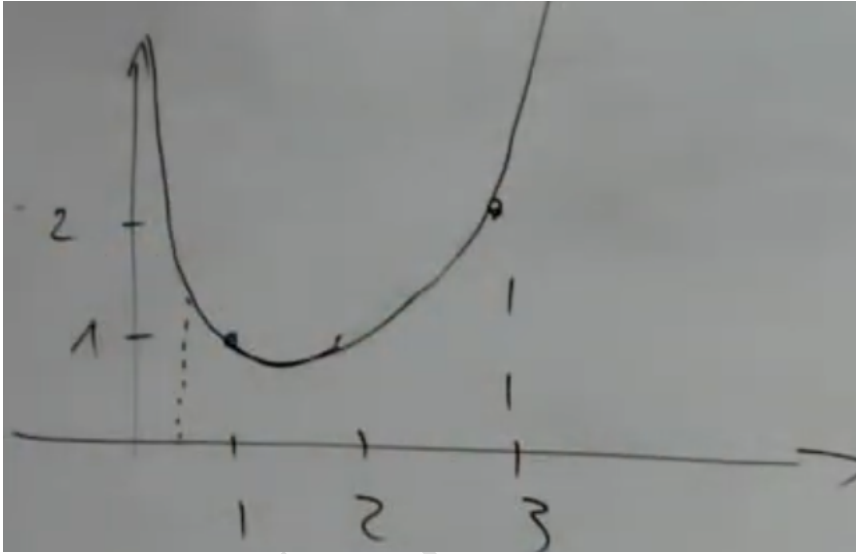
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = 0 + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \cdot \Gamma(x)$$

Теперь заметим, что $\Gamma(1) = 1$, из чего по индукции получаем $\Gamma(n+1) = n!$

4. График

Рассмотрим $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$

При $x \rightarrow 0$ $\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \rightarrow \frac{1}{x}$



5. Связь с π

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \stackrel{t:=x^2}{=} 2 \int_0^{+\infty} x \cdot x^{-1} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \stackrel{\text{Интеграл Эйлера-Пуассона}}{=} \sqrt{\pi}$$

2.3.2 Неравенство Йенсена для сумм¹

Формулировка

$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая.

$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \sum_i \alpha_i = 1$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

Доказательство

Пользуясь выпуклостью, мы можем провести опорную прямую такую, что $f(x)$ будет выше этой прямой. Нас интересует прямая в точке $x^* := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ по условию. Но сначала надо убедиться, что точка лежит в $\langle a, b \rangle$:

$$a \leq \min_i(x_i) \leq \sum_i \alpha_i \cdot x_i \leq \sum_i \alpha_i \cdot \max_j(x_j) = \max_j(x_j) \sum_i \alpha_i = \max_j(x_j) \leq b$$

Теперь проводим опорную прямую:

$$f(x^*) = kx^* + b = \sum_i (k\alpha_i \cdot x_i) + b = \sum_i (k\alpha_i \cdot x_i + b \cdot \alpha_i) = \sum_i (\alpha_i(k \cdot x_i + b)) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i)$$

Note: $b = \sum_i (\alpha_i \cdot b)$, так как сумма $\alpha_i = 1$

2.3.3 Неравенство Гельдера для интегралов³

Формулировка

Пусть $f, g \in C[a, b]$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{1/q}$$

Доказательство. Распишем интегральные суммы: $x_k := a + k \frac{b-a}{n}$; $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$. Пусть $a_i = f(x_k)(\Delta x_k)^{1/p}$, $b_i = g(x_k)(\Delta x_k)^{1/q}$, тогда, по неравенству Гельдера для сумм:

$$\begin{aligned} \left| \sum f(x_k)g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \right| &\leq \left(\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k \right)^{1/p} \left(\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k \right)^{1/q} \\ \left| \sum f(x_k)g(x_k) \right| &\leq \left(\sum |f(x_k)|^p \right)^{1/p} \left(\sum |g(x_k)|^q \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Осталось лишь сделать предельный переход при $n \rightarrow \infty$

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{1/q}$$

□

2.3.4 Признак сравнения сходимости положительных рядов¹

2.3.4.1 Лемма о сходимости положительных рядов

Формулировка

$a_n \geq 0$

$\sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow S_n$ ограничено.

Доказательство

Тривиально следует из того, что ввиду того, что $a_n \geq 0$, последовательность частичных сумм S_n монотонно возрастает. То есть оно ограничено своим пределом частичных сумм и монотонно к нему стремится снизу.

2.3.4.2 Теорема

Формулировка

$\exists a_n \geq 0, b_n \geq 0, \sum a_n, \sum b_n$

1. $a_n \leq b_n \Rightarrow \sum b_n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится, $\sum a_n$ расходится $\Rightarrow \sum b_n$ расходится.

Замечание: аналогичное утверждение верно для $\forall k a_n \leq k \cdot b_n$, так как сходимость b_n и $k \cdot b_n$ эквивалентна и можно безопасно их тут подменить.

2. $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} = l$. Тогда если $l \in \mathbb{R}_+$, то сходимость $\sum a_n$ эквивалентна сходимости $\sum b_n$.
 Если $l = \infty$, то $\sum a_n$ сходится $\Rightarrow \sum b_n$ сходится, $\sum b_n$ расходится $\Rightarrow \sum a_n$ расходится.
 Если $l = 0$, то $\sum b_n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится, $\sum a_n$ расходится $\Rightarrow \sum b_n$ расходится.

Доказательство

1. Воспользуемся приведённой леммой и просто сведём наши сходящиеся ряды к частичным суммам и обратно: $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$. Положим $\sum b_n$ сходится, тогда по лемме $S_n^{(b)}$ ограничено. Тогда $S_n^{(a)}$ тоже ограничено, а значит и $\sum a_n$ сходится. Аналогично работает наоборот.

2. Давайте всё сведём к предыдущему пункту. Если $l \in \mathbb{R}_+$, то мы всегда можем домножить a_n на какое-то вещественное число, чтобы оно стало меньше b_n (т.к. начиная с какого-то n частное всей последовательности будет лежать в какой-то окрестности l). Также наоборот, мы всегда можем сделать $k \cdot a_n > b_n$, то есть мы получили первое утверждение в обоих случаях симметрично. То есть действительно сходимость у этих рядов эквивалентна.

Примечание: то, что мы рассматриваем сходимость рядов начиная с какого-то n , абсолютно законно, так как мы ранее доказывали эквивалентность сходимости n -го остатка и самого ряда.

При $l = \infty$ всё тривиально, так как в этом случае начиная с какого-то места, очевидно, $a_n > b_n$, что уже свелось к первому признаку. Для $l = 0$ аналогично.

2.3.4.3 Важные эталонные ряды, с которыми надо всё сравнивать

1. $\sum \frac{1}{n^p}$ расходится при $p \leq 1$, сходится при $p > 1$.
 2. $\sum q^n$ сходится при $0 < q < 1$, расходится при $q \geq 1$.

2.3.5 Признак Коши сходимости положительных рядов¹

Формулировка

$$\sum a_n \geq 0; \exists k_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Тогда:

1. Начиная с какого-то места $\exists q : k_n < q < 1$ (q мы ввели чтобы потом сравнивать с ним, так как признак сравнения у нас строго < 1 и с 1 сравнивать неудобно) $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
 2. \exists бесконечное число элементов $k_n \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится.

Доказательство

1. Выразим из "волшебного" k_n нормальный a_n . $k_n = \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow a_n = k_n^n < q^n$. У нас $q < 1$, а значит можно сравнить его с ближайшим рациональным < 1 и у нас получается эталонный $\frac{1}{\alpha^n}$ где n у нас, разумеется > 1 , а значит всё сходится.

2. Прошлая стратегия не работает т.к. $q \geq 1$, а значит мы не подберём рациональную дробь для эталонного. Но зато у нас тут не выполнится необходимый признак сходимости, так как k_n не стремится к 0, сколько не возводи его в большую степень, он только увеличится.

2.4 Теоремы

2.4.1 Интеграл Эйлера–Пуассона¹

Формулировка

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Доказательство

Простое неравенство, которое непросто запомнить:

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

Следует из выпуклости ($e^t \geq 1 + t$) и работает для $x \in \mathbb{R}$

Как обычно, проинтегрируем (неравенство по середине выражения обуславливается положительностью функции) и возведём всё в степень n :

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx$$

Теперь аккуратно считаем части неравенства:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \stackrel{x := \cos t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} dt = \underset{\text{Формула Валлиса}^1}{=} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^1 e^{-nx^2} dx \stackrel{t := \sqrt{n} \cdot x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx \stackrel{x := \operatorname{tg} t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt \stackrel{\text{Формула Валлиса}^1}{=} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

Домножаем наши достижения на \sqrt{n} :

$$\frac{(2n)!!\sqrt{n}}{(2n+1)!!} \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n}$$

Предельный переход:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{\text{Формула Валлиса}^1}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \equiv \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\frac{(2n)!!\sqrt{n}}{(2n+1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} \equiv \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} \underset{\text{Формула Валлиса}^1}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} = \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

По Т. О двух городских

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2.4.2 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах¹

Формулировка

2.4.2.1 Интегралы

$\exists f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ допустима

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\int_a^b f(x) dx$ абсолютно сходится
2. $\int_a^b |f(x)| dx$ сходится
3. $\int_a^b f_+ dx$ и $\int_a^b f_- dx$ сходятся

2.4.2.2 Ряды

$\exists a_n$ ряд.

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ абсолютно сходится
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ сходятся

Доказательство

1 \rightarrow 2

По определению абсолютной сходимости

2 \rightarrow 3

Заметим, что f_+ и f_- либо положительны, либо константны 0. Другими словами, одна из срезов будет равна $|f(x)|$, а другая в это время будет равна 0. Соответственно, существует конечный предел $f(x)$ при $x \rightarrow b - 0$. Ну а значит, что и срезка будет его иметь и всё сойдётся. В 0 проблем не будет по Т. О стабилизации знака.

3 \rightarrow 1

Очевидно, т.к. можно выразить $f = f_+ - f_-$

2.4.3 Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость²

$p > 1$

$\frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p} \Rightarrow$ при $p > 1$ есть абсолютная сходимость.

По следствию из критерия Больцано-Коши докажем, что при $p \leq 1$ нет абсолютной сходимости:

Выберем $A_k = \pi k$ $B_k = 2\pi k$. Обе последовательности $\rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$

$$\int_{\pi k}^{2\pi k} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \geq \int_{\pi k}^{2\pi k} \frac{|\sin x|}{x} dx \quad p \leq 1$$

Теперь делаем финт ушами:

$$\geq \frac{1}{2\pi k} \int_{\pi k}^{2\pi k} = \frac{2k}{2\pi k} \rightarrow 0$$

\Rightarrow при $p \leq 1$ нет абсолютной сходимости

$p \in (0, 1]$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x^p} & u' = -\frac{p}{x^{p+1}} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\frac{\cos x}{x^p} \Big|_1^{+\infty} - p \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$$

т.к. левое слагаемое сходится, а интеграл вообще сходится абсолютно $\Rightarrow p > 0$ - сходится, а т.к. $p > 1$ - абсолютно сходится \Rightarrow просто сходится при $p \in (0, 1]$

$p \leq 0$

Ну, видимо при $p < 0$ интеграл расходится. Докажем это через следствие из критерия Больцано-Коши.

$$A_k = 2\pi k \quad B_k = 2\pi k + \pi$$

$$\int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \frac{\sin x}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi k + \pi)^p} \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin x = \frac{2}{(2\pi k + \pi)^p} \rightarrow 0$$

\Rightarrow расходится.

Итого:

$p > 1$ - сходится абсолютно.

$p \in (0, 1]$ - просто сходится.

$p \leq 0$ - расходится.

2.4.4 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла²

Формулировка:

1. Дирихле

f - допустима на $[a, b)$ $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ $A \in [a, b)$

Пусть F - ограничена: $\exists c_1 > 0 : \forall A \in [a, b) \quad |F(A)| \leq c_1$

$g \in C^1[a, b]; \quad g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b - 0; \quad g(x)$ - монотонна $\Rightarrow \int_a^{\rightarrow b} -$ сходится.

2. Абель

f - допустима на $[a, b)$ $\int_a^{\rightarrow b} f$ - сходится.

$g \in C^1[a, b]; \quad g(x)$ - монотонна; $g(x)$ - ограничена: $\exists c_2 > 0 : \forall x \in [a, b) \quad |g(x)| < c_2$

$\Rightarrow \int_a^{\rightarrow b} -$ сходится.

Доказательство:

1.

$$\int_a^B f(x)g(x)dx = \left[\begin{array}{cc} u' = f & u = F = f' \\ v = g & v' = g' \end{array} \right] = F(x)g(x)|_a^B - \int_a^B F(x)g'(x)dx$$

Теперь видим, что первое слагаемое ограничено и $\rightarrow 0$, а интеграл: $\int_a^B |F(x)g'(x)|dx$ - сходится $\Leftrightarrow \exists \lim_{B \rightarrow b-0}$

Почему? Потому что (абсолютно):

$$\int_a^B |F(x)g'(x)|dx \leq c_1 \int_a^b |g'(x)|dx = \pm c_1 \int_a^b g'(x)dx = \pm c_1 g(x)|_a^b$$

- конечный, т.к. $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b - 0$. Вся эта история конечна \Rightarrow сходится.

2. $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ (т.к. монотонна и ограничена)

Рассмотрим $\int_a^b fg = \int_a^b f(g - \alpha) + \int_a^b f \cdot \alpha$.

Второй интеграл сходится и конечный, а первый сходится по Дирихле: f - ограничена по теореме Вейерштрасса, $(g - \alpha)$ - монотонно стремится к 0.

Победа.

2.4.5 Интеграл Дирихле²

Формулировка:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство:

Рассмотрим сумму $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$ и домножим ее на $2 \sin \frac{x}{2}$:

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx$$

Раскрываем слагаемые по формуле: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta))$ и получаем телескопическую сумму:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin (\frac{x}{2} - x) + \sin (\frac{x}{2} + x)) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin (\frac{x}{2} + x) + \sin (\frac{x}{2} - 2x)) + \\ & \quad + \dots + 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin (\frac{x}{2} - nx) + \sin (\frac{x}{2} + nx)) = \\ & = -\sin (\frac{x}{2}) + \sin (\frac{3}{2}x) - \sin (\frac{3}{2}x) + \sin (\frac{5}{2}x) + \dots + \sin (\frac{(2n+1)x}{2}) = \frac{\sin (n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Здесь мы поделили на $2 \sin \frac{x}{2}$

А теперь проинтегрируем полученное равенство $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$ от 0 до π :

$$0 = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \int_0^\pi \frac{1}{2}dx \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Итого, нам очень хочется верить, что

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Почему? т.к.

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \cdot \frac{x}{2}} = [y = (n+\frac{1}{2})x] = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} dy$$

А затем мы просто устремляем $n \rightarrow +\infty$

Ну а если мы хотим во что-то верить, это надо сперва доказать. Но сначала проведем эксперимент:

$$\int_0^\pi \sin Nx \cdot f(x) = \begin{bmatrix} u = f(x) & u' = f'(x) \\ v' = \sin Nx & u = \frac{\cos Nx}{N} \end{bmatrix} = \frac{-\cos Nx}{N} \cdot f(x) \Big|_0^\pi + \frac{1}{N} \int_0^\pi \cos Nx \cdot f'(x) dx$$

И при $N \rightarrow +\infty$ вся эта штука $\sim O(\frac{1}{N})$. При условии хорошей $f(x) \in C^1[0, \pi]$. Зафиксировали.

Теперь, наконец, проверим интересующее нас утверждение:

$$\int_0^\pi \frac{\sin(\frac{1}{n} + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \cdot \frac{x}{2}} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

$$\int_0^\pi \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2\frac{x}{2}}\right) \rightarrow 0$$

Переход выше верен по нашему наблюдению. То, что в скобках - $f(x)$, а оставшийся синус - $\sin Nx$. Осталось только проверить, что $f(x)$ - хорошая.

1. Непрерывность

$$\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2\frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2}} = -\frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = O(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

2. Дифференцируемость

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} - x^2 \cos \frac{x}{2}}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \frac{x^2}{4} - x^2 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot c}{x^2 \left(\frac{x^2}{4}\right)} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx^4}{cx^4} = c\end{aligned}$$

Последнее равенство получается из формулы Тейлора. А в конце нам вообще плевать, какая константа. Главное, что она есть.

Итого получаем, что $f(x)$ - хорошая, и все сходится.

2.4.6 Неравенство Йенсена для интегралов¹

Формулировка

$f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая, непрерывная.

$x : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$, непрерывная.

$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, непрерывная, $\int_a^b \alpha(t) dt = 1$

$$f\left(\int_a^b x(t) \alpha(t) dt\right) \leq \int_a^b \alpha(t) f(x(t)) dt$$

Доказательство

Тупо везде подставляем вместо сумм интеграл. ФСЁ!

Пользуясь выпуклостью, мы можем провести опорную прямую такую, что $f(x)$ будет выше этой прямой. Нас интересует прямая в точке $x^* := \int_a^b \alpha(t)x(t) dt$ по условию. Но сначала надо убедиться, что точка лежит в $\langle a, b \rangle$:

$$m := \inf_{t \in [a, b]} x(t)$$

$$M := \sup_{t \in [a, b]} x(t)$$

$$a \leq m \leq \int_a^b x(t) \alpha(t) dt \leq \int_a^b M \cdot \alpha(t) dt = M \int_a^b \alpha(t) dt = M \leq b$$

Теперь проводим опорную прямую:

$$f(x^*) = kx^* + b = k \cdot \int_a^b \alpha(t)x(t) dt + b = \int_a^b \alpha(t) \cdot k \cdot x(t) dt + \int_a^b b \cdot \alpha(t) dt = \int_a^b \alpha(t)(k \cdot x(t) + b) dt \leq \int_a^b \alpha(t)f(x(t)) dt$$

Note: $b = \int_a^b \alpha(t) \cdot b dt$, так как сумма $\alpha_i = 1$

2.4.7 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)³

2.4.7.1 Неравенство для сумм

Формулировка

$$a_i > 0; \frac{1}{n} \sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

Доказательство. Напишем неравенство Йенсена для $\alpha_i = \frac{1}{n}$; $f(x) = \ln x$ - вогнутой:

$$\begin{aligned}\ln \left(\frac{1}{n} a_1 + \frac{1}{n} a_2 + \dots + \frac{1}{n} a_n \right) &\geq \frac{1}{n} \ln a_1 + \frac{1}{n} \ln a_2 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n \\ \ln \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) &\geq \frac{1}{n} \ln (a_1 a_2 \dots a_n) \\ \ln \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) &\geq \ln (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Осталось только проэкспоненцировать получившееся неравенство:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

□

2.4.7.2 Неравенство для интегралов

Формулировка

Пусть $f \in C[a, b]$, $f > 0$. Тогда

$$\exp \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f \, dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dt$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное неравенство Йенсена:

$$f \left(\int_a^b x(t) \alpha(t) \, dt \right) \leq \int_a^b \alpha(t) f(x(t)) \, dt$$

для $f(x) = \ln x$ - вогнутой, непрерывной. $\alpha(t) = \frac{1}{b-a} = \text{const}$. Видно, что $\int_a^b \alpha(t) \, dt = 1$. Итого:

$$\begin{aligned}\ln \left(\int_a^b x(t) \frac{1}{b-a} \, dt \right) &\geq \int_a^b \frac{1}{b-a} \ln x(t) \, dt \\ \ln \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) \, dt \right) &\geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln x(t) \, dt\end{aligned}$$

Остается проэкспоненцировать и получить требуемое неравенство:

$$\exp \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln x(t) \, dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) \, dt$$

□

2.4.8 Неравенство Гельдера для сумм³

Формулировка

Пусть, $p > 1$, $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$ $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ Тогда

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Возьмем x^p - строго выпуклая \Leftrightarrow по неравенству Йенсена

$$\left(\sum \alpha_i x_i\right)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p$$

Положим

$$\alpha_i = \frac{b_i^q}{\sum b_j^q}$$

$$x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum b_j^q$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum \alpha_i x_i &= \sum \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum b_j^q = \\ &= \sum a_i b_i^{\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}} = \sum a_i b_i \\ \sum \alpha_i x_i^p &= \sum \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i^p b_i^{-\frac{p}{p-1}} \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} = \\ &= \sum a_i^p b_i^0 \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} = \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} \sum a_i^p \end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в неравенство Йенсена:

$$\left(\sum a_i b_i\right)^p \leq \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} \sum a_i^p$$

Возводим обе части в степень $\frac{1}{p}$ и получаем требуемое неравенство:

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

2.4.9 Неравенство Минковского³

Формулировка

Пусть, $p \geq 1$. Тогда

$$\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Отображение $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой, т.е. выполняется неравенство треугольника:

$$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

При $p = 1$ - очевидно. Пусть $p > 1$, будем рассматривать только положительные a_i, b_i , все остальные будем сводить к ним.

Рассмотрим

$$\sum |a_i| |a_i + b_i|^{p-1}, \quad \sum |b_i| |a_i + b_i|^{p-1}$$

Неравенство Гёльдера делает брррррр:

$$\sum |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum (a_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum (a_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Аналогично поступаем с $\sum |a_i| |a_i + b_i|^{p-1}$ и складываем:

$$\sum |a_i + b_i|^p \leq \sum |a_i + b_i|^{p-1} |a_i + b_i| \leq \left(\left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Делим обе части уравнения на $\left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$:

$$\begin{aligned} \left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

□

2.4.10 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши¹

2.4.10.1 Линейность

$\sum a_n, \sum b_n$ сходятся, $c_n = a_n + b_n \Rightarrow \sum c_n$ сходится, $\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n$

▷

$$c_n = a_n + b_n \Rightarrow S_N^c = S_N^a + S_N^b$$

◁

$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \sum \alpha a_n$ сходится, $\sum \alpha a_n = \alpha \cdot \sum a_n$

▷

$$S_N^{\alpha a} = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \dots + \alpha a_N = \alpha(a_1 + a_2 + \dots + a_N) = \alpha S_N^a \in \mathbb{R}$$

◁

2.4.10.2 Свойства остатка

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \forall N \quad R_N$ сходится.

▷ Рассмотрим частичные суммы:

$$S_N^a = \sum_{k=1}^N a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^N a_k$$

При $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$$

◁

2. $\exists N : R_N$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится.

▷ Такое же доказательство. ◁

3. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow R_N \rightarrow 0$

▷

⇒

Воспользуемся предыдущим доказательством, после предельного перехода мы получили выражение $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ограничено, $\sum_{k=1}^m a_k$ ограничено. Причём $R_N = \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$ и оно тоже ограничено. При $N \rightarrow +\infty$ всё больше членов ряда "отщипывается" в $\sum_{k=1}^m a_k$, следовательно, эта частичная сумма стремится к исходному ряду. В таком случае, R_N ничего не остаётся, кроме как стремиться к 0, иначе доказанная выше сумма не выполнится.

⇐

Если мы рассматриваем последовательность остатков R_N как какой-то объект, то там должна быть последовательность каких-то чисел, то есть они существуют, то есть существуют такие остатки в этой последовательности, которые будут сходиться к этим числам, то есть выполняется свойство 2.

◁

2.4.10.3 Необх. условие сходимости

Формулировка

$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$

Доказательство

$\sum a_n$ сходится \Rightarrow последовательность $R_n \rightarrow 0$. Это мы доказали выше. А теперь скажем $a_n = R_n - R_{n+1}$. $R_{n+1} \rightarrow 0$ так же, как и R_n . Таким образом, $a_n \rightarrow 0$ как разность двух бесконечно-малых.

2.4.10.4 Критерий Больцано–Коши

Хотим предложить какой-нибудь достаточный критерий для выяснения сходимости.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p > 0 \quad |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Правое выражение эквивалентно следующему:

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

При помощи этого мусора нетрудно доказать, что $\sum \frac{1}{n^p}$ расходится при $p \leq 1$. Давайте просто предъявим $\varepsilon = 10^{-6}$, $n = N + 1$, $p = N$. Там всё оценивается снизу по минимальному члену, n сокращается и получается $\frac{1}{2} > \varepsilon$

2.4.11 Признак Коши сходимости положительных рядов (рго)¹

Формулировка

$$\sum a_n \geq 0; \exists k_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Тогда:

1. $\exists \overline{\lim} k_n < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $\exists \overline{\lim} k_n > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится
3. $\exists \overline{\lim} k_n = 1 \Rightarrow \odot$

Доказательство

Вспоминаем Признак Коши сходимости положительных рядов¹. Там сказаны чудесные слова про $k_n < q < 1$, а так же про бесконечное число элементов ≥ 1 . А теперь нам дали какие-то верхние пределы. Отлично!

Вспоминаем Техническое описание верхнего предела¹, а там у нас написано РОВНО ЭТО! В первом случае в качестве ε предложим наше $q - k_n$, а во втором просто найдём какую-то точку $x : 1 < x < \overline{\lim} k_n$. И снова у нас будет выполняться тех. описание верхнего предела. Короче, мы в 2 строчки свелись к Признак Коши сходимости положительных рядов¹.

Если посмотреть на $\overline{\lim} k_n = 1$, то там всё грустно, так как предел не запрещает нашей функции быть в ε -окрестности как сверху от 1, так и снизу. Так что признак не работает.

Есть даже примеры: $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$, один из них расходится, второй сходится, однако наша выбранная k_n всё равно будет стремиться к 1.

2.4.12 Признак Даламбера сходимости положительных рядов¹

Формулировка

$$\sum a_n \geq 0; \exists D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Тогда:

1. Начиная с какого-то места $\exists q : D_n < q < 1$ (q мы ввели чтобы потом сравнивать с ним, так как признак сравнения у нас строго < 1 и с 1 сравнивать неудобно) $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. Начиная с какого-то места $D_n \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится.

2.4.12.1 Pro версия:

$$\exists \lim D_n = D$$

1. $D < 1$ — сходится
2. $D > 1$ — расходится
3. $D = 1$ — \odot

Доказательство

1. $\exists N_0 : \forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0+k}} < q < 1$. Теперь распишем это как выражения $\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} < q, \frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} < q, \dots, \frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0+k}} < q$.

Главный трюк — перемножим все эти выражения (левые и правые части) и у нас всё сократится: $\frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0}} < q^k$. Выразим a_{N_0+k+1} : $a_{N_0+k+1} < q^k \cdot a_{N_0}$.

Теперь устремим k к $+\infty$ и получим, что получившееся неравенство — это 2 ряда под признаком сравнения, при том, что справа у нас бесконечно убывающая геом. прогрессия, у которой по определению можно посчитать сумму, а значит она сходится. Слева неравенства у нас в таком случае будет записан остаток исходного ряда R_{N_0+1} . По признаку сравнения остаток сходится, а значит и исходный ряд сходится.

2. $q \geq 1$, а значит, что как минимум с этого места наш ряд не уменьшается, а значит он не может стремиться у нулю, а значит нет необходимого признака сходимости.

1. Доказывать нечего: выберем ε такой, чтобы верхнее ограничение нашей последовательности было < 1 , а это уже подходит под пункт 1 упрощённой версии.

2. Аналогично

3. Не работает, так как при $\varepsilon > 0$ у нас элементы в последовательности могут быть как > 1 так и < 1 . Простейший контрпример: $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$. У них у обоих $D = 1$

2.4.13 Признак Раабе сходимости положительных рядов¹

2.4.13.1 Лемма (улучшенный признак сравнения)

Формулировка

$\exists a_n, b_n > 0$ Если начиная с некоторого места

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

то

1. $\sum b_n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $\sum a_n$ расходится $\Rightarrow \sum b_n$ расходится

Доказательство

$\exists N_0 : \forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0+k}} < \frac{b_{N_0+k+1}}{b_{N_0+k}}$. Теперь распишем это как выражения $\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} < \frac{b_{N_0+1}}{b_{N_0}}, \frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} < \frac{b_{N_0+2}}{b_{N_0+1}}, \dots, \frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0+k}} < \frac{b_{N_0+k+1}}{b_{N_0+k}}$.

Главный трюк — перемножим все эти выражения (левые и правые части) и у нас всё сократится: $\frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0}} < \frac{b_{N_0+k+1}}{b_{N_0}}$. Выразим a_{N_0+k+1} : $a_{N_0+k+1} < \frac{a_{N_0}}{b_{N_0}} \cdot b_{N_0+k+1}$.

Теперь устремим k к $+\infty$ и получим, что справа неравенства у нас имеет место остаток ряда $R_{N_0+1}^{(b)}$, а слева тоже остаток $R_{N_0+1}^{(a)}$. Получается, мы свели эти все дроби к обычному признаку сравнения для рядов $\sum b_n$ и $\sum a_n$

2.4.13.2 Теорема

Формулировка

$\exists a_n > 0$

1. Начиная с некоторого места $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r > 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится. Вот тут может быть больно: дробь записана вверх ногами, ещё и все неравенства перевернуты и ещё сравнение в обоих случаях нестрогое.
2. Начиная с некоторого места $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится.

Доказательство

1. Итак, здесь всё сложно. Сначала давайте возьмём эталонный ряд, про который мы всё хорошо знаем и прогоним его в предельном переходе через формулу из формулировки:

$$\lim n \left(\frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(n+1)^S}} - 1 \right) = \lim n \left(\frac{n^S(1 + \frac{1}{n})^S}{n^S} - 1 \right) = \lim n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^S - 1 \right) = n \cdot S \frac{1}{n} = S$$

Это всё значит, что мы можем взять наш эталонный ряд в такой хитровыебанной форме и с ним сравнивать то, что нам дают. Конкретно тут мы хотим подобрать такое S , чтобы оно лежало между r и 1. Слава Аллаху, это возможно. Разумеется, тогда мы выберем такое ε , что с некоторого места ВЕСЬ целиком эталонный ряд будет лежать между r и 1. Тогда мы сможем тупо сравнить эталонный ряд с тем, что нам дали по лемме выше.

Запишем что мы только что доказали:

$$1 < n \left(\frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(n+1)^S}} - 1 \right) < r \leq n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

Теперь разделим на n , прибавляем 1 и получаем красивое:

$$\frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(n+1)^S}} < \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Ой, всё перевернуто((, ну ок:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^S}}{\frac{1}{n^S}}$$

Итак, триумфальное шествие: по лемме если правая часть неравенства сходится, то сходится и левая. А мы знаем, что она (правая) сходится только при $S > 1$. А у нас $1 < S < r$, то есть мы подогнали всё так, что доказали сходимость. ЧТД.

2. И вот тут мы наконец узнаем откуда взялось магическое $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$:

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{n} + 1 = \frac{1+n}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$$

Оказывается, всё это время в этом выражении было зашито сравнение нашего ряда по нашей лемме с любимым эталонным рядом. Итого имеем:

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

То есть если ряд слева расходится, то и справа расходится. А слева у нас спрятан ряд $\sum \frac{1}{n^1}$, то есть он как раз расходится.

2.4.13.3 Pro

Аналогично, как в Даламбере:

$$\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r$$

1. $r > 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $r < 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится
3. $r = 1 \Rightarrow \ominus$. Контрпример: ряды $\sum \frac{1}{n \ln n}$ и $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$

2.4.14 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов¹

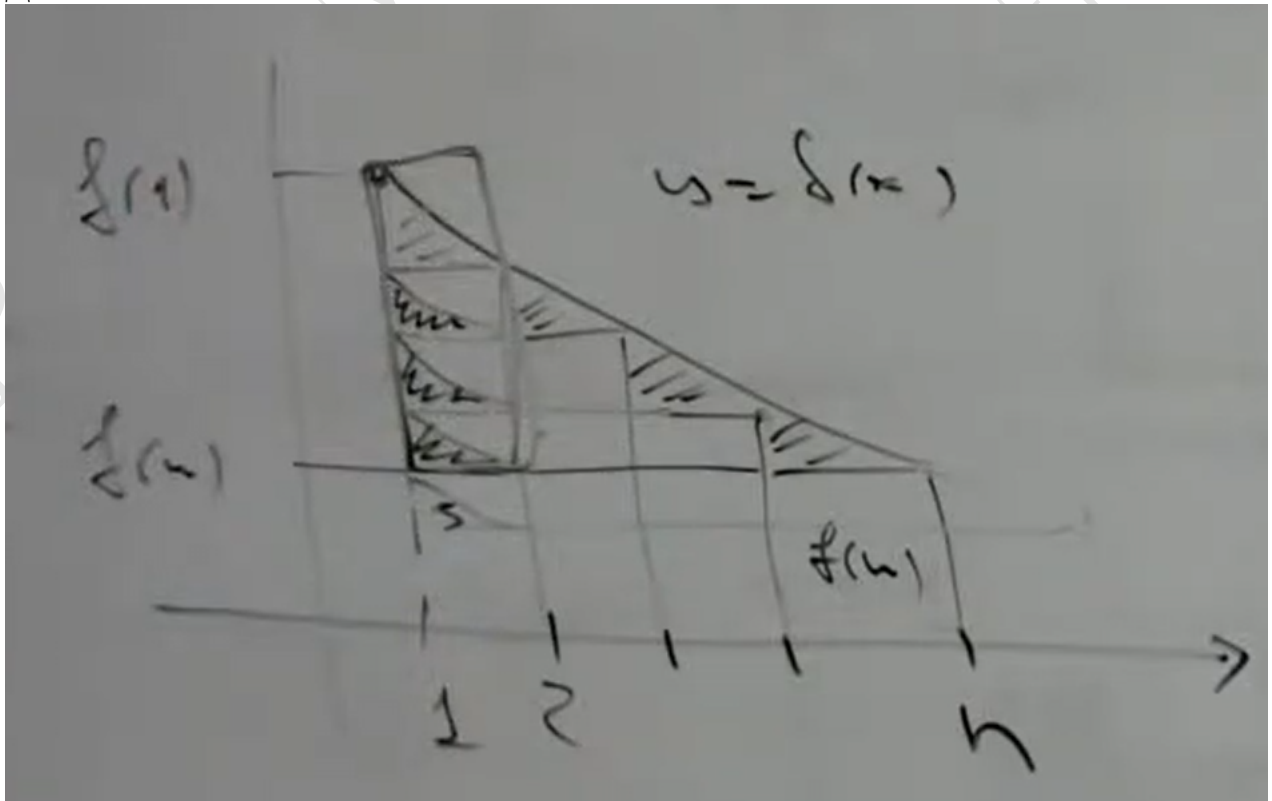
Формулировка

$\square f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывная, монотонная.

Тогда

$$\sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \text{ сходится вместе с } \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Доказательство



Разбиение здесь единичное, так что ни на что не умножаем, зато мы тут видим, что мы можем достроить неучтённую в Римановой сумме часть функции до прямоугольника по левой стороне каждого отрезка (так как функция монотонно убывает). Сумма таких прямоугольников будет $|f(1) - f(n)|$ где n — правая граница границы интегрирования/частичной суммы, которую мы фиксируем.

Итак, мы можем записать всё это вот так:

$$\left| \sum_{k=2}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right| \leq |f(1) - f(n)|$$

Для монотонно возрастающей функции всё симметрично.

Отсюда можно выразить частичную сумму

$$S_n = \int_1^n f(x) dx + \delta_n, |\delta_n| \leq |f(1) - f(n)|$$

δ_n — это наша добавка-разница между суммой и интегралом.

Сходимость ряда будет следовать из существования + конечности предела этого предела при $n \rightarrow +\infty$. Если с влиянием на его конечность интеграла всё понятно, то остаётся только разобраться с влиянием на ответ δ_n .

Заметим, что δ_n монотонно растёт в одну фиксированную сторону, ввиду монотонности исходной функции. Может ли он быть бесконечным? Очевидно, ввиду наших ограничений на функцию, в частности, непрерывности, бесконечным он может стать только если сама функция стремится в неограниченна, а следовательно, её интеграл тоже будет бесконечным, а значит этот частный случай никак не влияет на ответ. В остальных случаях δ_n конечная ввиду ограниченности f , а значит не влияет на сходимость ряда при предельном переходе.

3 Период Кайнозойский

3.1 Важные определения

3.1.1 Сходимость последовательности в \mathbb{R}^m , покоординатная сходимость¹

Последовательность сходится в $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ есть покоординатная сходимость.

Когда пишем последовательности в \mathbb{R}^m , мы пишем индекс сверху в скобках, а снизу пишем координату.

$$x^{(n)} \rightarrow a \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_1 \\ \vdots \\ x_m^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_m \end{cases}$$

3.1.2 Предельная точка, замкнутое множество, замыкание¹

Тут тоже без новостей:

Предельная точка — точка, любая проколота окрестность которой непуста.

Замкнутое множество — множество, включающее все свои предельные точки (или просто дополнение к открытому).

Замыкание — минимальное по включению замкнутое множество, включающее исходное.

3.1.3 Отображение бесконечно малое в точке²

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ — отображение

$x_0 \in E$ — предельная точка E

φ является бесконечно малым в точке x_0 , если $\varphi(x) \rightarrow_{x \rightarrow x_0} 0$

3.1.4 Отображение, дифференцируемое в точке²

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l, a \in \text{Int}(E)$

Если $\exists L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ — линейный оператор, $\exists \alpha : E \rightarrow \mathbb{R}^l$ — бесконечно малое, то $F(x)$ дифференцируемо в точке a :

$$F(a+h) = F(a) + Lh + \alpha \cdot h, h \rightarrow 0$$

$$F(a+h) = F(a) + L \cdot h + o(h)$$

$$x := a + h$$

$$F(x) = F(a) + L \cdot (x - a) + o(|x - a|)$$

3.1.5 Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал²

Из определения выше, L — производный оператор. В точке a записывается следующим образом: $F'(a)$

Матрица, задающая производный оператор, называется матрицей Якоби (по сути своей, матрица производных по всем переменным в этой точке).

Дифференциал функции F в точке a — $F'(x)h$, где $h \rightarrow 0$

3.1.6 Частные производные²

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$

Фиксируем какую-нибудь переменную $x_k, 1 \leq k \leq m, a \in \text{Int}(E)$

Заведём себе функцию $\varphi_k(t) := f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_m)$, причём $t \in U(a)$.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi_k(t+s)}{\varphi_k(t)}$$

— частная производная F в точке a по x_k . Причём *частная* от слова *partial*, а не от *private*.

Также немаловажным будет отметить, как их обозначают. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ — это производная 2-го порядка, причём сначала мы дифференцировали по x_2 , а потом уже по x_1 . Однако, нам не важно, в каком порядке дифференцировать, что доказывается далее. Причём, через неважность для перестановки 2х спокойно выражаются и перестановки любой длины, через транспозиции (привет, ДМ 1 сем!).

3.1.7 Формула Тейлора (различные виды записи)²

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $B(x, a) \subset E$ - открытое.

$f \in C^{r+1}(E)$, тогда $\exists \theta \in (0, 1)$:

Для здоровых людей:

$$f(x) = \sum_{j: |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j + \sum_{j: |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a + \theta(x - a))}{j!} (x - a)^j$$

Для психов:

$$f(x) = \sum_{j: |j| \leq r} \frac{1}{j^1! j^2! \dots j^m!} \frac{\partial^{(j)} f}{\partial x^j}(a) (x - a)^j + \sum_{j: |j| = r+1} \frac{1}{j^1! j^2! \dots j^m!} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}}(a + \theta(x - a)) (x - a)^j$$

В форме n -го дифференциала:

$$f(a + h) = \sum_{n=1}^r \frac{d^n(a, n)}{n!} + d^{n+1}(a + \theta h, h)$$

В форме $a + h$, Лагранжа:

$$f(a + h) = \sum_{j: |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \sum_{j: |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a + \theta h)}{j!} h^j$$

В форме Пеано:

$$f(a + h) = \sum_{j: |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + o(|h|^r)$$

3.2 Определения

3.2.1 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в \mathbb{R}^m ¹

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^m$$

3.2.1.1 Скалярное произведение

$$\langle a, b \rangle := \sum a_i \cdot b_i$$

3.2.1.2 Евклидова норма

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

3.2.1.3 Метрика в \mathbb{R}^m

$$\rho(a, b) = |a - b|$$

Вообще ничего нового, просто напоминка, получается.

3.2.2 Окрестность точки в \mathbb{R}^m , открытое множество¹

Открытое множество — множество, все точки которого внутренние (входят вместе с какой-то окрестностью)

Окрестность точки — какое-то открытое множество, включающее эту точку. Обозначается $U(a)$. Может быть проколото, в этом случае сама точка удаляется.

Шар $B(a, r)$ — множество всех точек, для которых верно $\rho(x, a) < r$.

ε -окрестность точки — открытый шар $B(a, \varepsilon)$

3.2.3 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса¹

Компактное множество в \mathbb{R}^m — это замкнутое и ограниченное множество (ввиду полноты \mathbb{R}^m).

В \mathbb{R}^m компактное множество секвенциально компактно, либо замкнуто + имеет конечную ε -сеть.

Секвенциальная компактность множества гласит, что в любой последовательности, заданной в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке в самом этом множестве.

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса почти про то же. В любой последовательности в ограниченном множестве можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (предел не обязательно лежит в множестве, так что этого недостаточно для компактности!)

3.2.4 Координатная функция¹

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

Такую функцию можно расписать как вектор координатных функций:

$$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{pmatrix}$$

3.2.5 Двойной предел, повторный предел¹

$\sqsupset f : (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}, (a_1, a_2)$ — предельная точка

3.2.5.1 Двойной предел

На языке окрестностей (иначе зачем мы только что их вводили):

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2}} f(x_1, x_2) = L \Leftrightarrow \forall U(L) \exists U(a_1) \exists U(a_2) : \forall x_1 \in \dot{U}(a_1) \cap D_1 \forall x_2 \in \dot{U}(a_2) \cap D_2 \quad f(x_1, x_2) \in U(L)$$

А ещё мы разрешили $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}, a_2 \in \overline{\mathbb{R}}, L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Мы нарисовали двойной предел... Добавить нечего.

3.2.5.2 Повторный предел

Введём

$$\phi(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2)$$

Тогда можно определить предел

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \phi(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2)$$

Но если вы не прогуливали матан в 1 семестре, вы скажете, что тут как бы надо вообще гарантировать, что $\phi(x)$ возвращает что-то адекватное ($\in \mathbb{R}$, например) при всех $x \in D \setminus a_1$, иначе мы не сможем посчитать этот самый коварный наружный предел.

Вот то, что мы ввели вообще-то прозвали *повторным пределом* в точке (a_1, a_2) .

Nota bene: таким же образом мы имеем право ввести ещё и другой повторный предел, нарисовав композицию двух пределов в другом порядке (и даже получить другой ответ в некоторых случаях ☺)

3.2.6 Предел по направлению, предел вдоль пути¹

3.2.6.1 Предел по направлению

Зададим прямую (направление) как $\phi(t) = a + t \cdot v$, где $a, v \in \mathbb{R}^m$. Физический смысл a, b такой же как и в одномерном случае для начального сдвига и коэффициента наклона.

Тогда можно посчитать предел $\lim_{t \rightarrow 0} (\phi(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} (a + t \cdot v)$.

3.2.6.2 Предел вдоль пути

$\sqsupset E$ — путь, проходящий через a такой, что $[-\varepsilon, \varepsilon] \mapsto (x_1(t), x_2(t)), (x_1(0), x_2(0)) = a$

Тогда можно посчитать предел $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_1(t), x_2(t))$. Не то, чтобы прям содержательно, но да.

3.2.7 Линейный оператор¹

Линейный оператор — отображение $F : X \rightarrow Y$ (где X, Y — линейные пространства), которое имеет свойство линейности: $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$.

$F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ договорились называть линейным функционалом

Для фиксированного множества X, Y можно задать множество всех линейных операторов и обозначить как $Lin(x, y)$.

Договорились допускать операции над самими лин. операторами, которые сами по себе тоже являются лин. операторами в том же множестве Lin :

$$(F + G)(x) := F(x) + G(x)$$

$$(\alpha F)(x) := \alpha F(x)$$

$$F : X \rightarrow Y, G : Y \rightarrow Z \Rightarrow G(F) : X \rightarrow Z$$

3.2.8 $o(h)$ при $h \rightarrow 0$ ²

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, 0 — предельная точка E .

Можно задать нашу функцию $\varphi(h)$ двумя способами:

1. $\varphi(h) = o(h)$, при $h \rightarrow 0$

$$\frac{\varphi(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

2. $\exists \alpha(h) : E \rightarrow \mathbb{R}^l$ бесконечно малая при $h \rightarrow 0$

$$\varphi(h) = |h| \cdot \alpha(h)$$

3.2.9 Теорема о двойном и повторном пределах¹

$\sqsupset f : (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$

Если

1. $\exists \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2}} f(x_1, x_2) = L$

2. $\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} \exists \text{ конечный } \phi(x_1) := \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2)$

Тогда $\exists \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \phi(x_1) = L$

Был показательный пример с $\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$, в котором разные повторные пределы давали разный ответ. Так вот, по этой теореме мы сможем убедиться, что тут не выполняется первый пункт, а значит повторный предел не существует.

3.2.10 Производная по направлению²

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{Int}(E), \quad h \in \mathbb{R}^m$$

Пусть $t \in \mathbb{R}, |h| = 1$ (такой вектор называется направлением).

Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)(a)$ — производная по направлению.

Замечание

Функция дифференцируема \Rightarrow функция дифференцируема по любому вектору (направлению)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'_1(a)th + f'_2(a)th + \dots + f'_m(a)th + o(t)}{t} = f'_1(a)h + f'_2(a)h + \dots + f'_m(a)h = \langle \nabla f, h \rangle$$

3.2.11 Градиент²

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{Int}(E), \quad h \in \mathbb{R}^m$$

$$f(a+h) = f(a) + \langle L, h \rangle + o(|h|), \quad h \rightarrow 0$$

Вектор L называется градиентом f в точке a .

$$L = \text{grad} f = \nabla f$$

3.2.12 Мультииндекс и обозначения с ним²

Мультииндекс k в \mathbb{R}^m — (k_1, k_2, \dots, k_m) , $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Некоторые обозначения:

1. $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ — высота мультииндекса
2. $k! = k_1! k_2! \dots k_m!$
3. $x^k = x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_m}$

3.2.13 n -й дифференциал²

LITERALLY THIS:

$$d^n f = \sum_{j: |j|=n} \frac{n! f^{(j)}(a)}{j!} h^j$$

(n -я сумма из леммы о нахождении производной сдвига (?))

Но можно расписать и по-другому, основываясь на выводе полиномиальной формулы (наивная версия):

$$d^n f = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_m=1}^m \frac{\partial^n}{\partial^{j_1} x_1 \partial^{j_2} x_2 \dots \partial^{j_m} x_m} (a) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

Что тут происходит? Мы ищем производную n -го порядка, с какой-нибудь комбинацией переменных, по которым дифференцируем. А также отмечаем, по каким переменным шло дифференцирование, домножая на dx_i

3.3 Важные теоремы

3.3.1 Признак Лейбница¹

Формулировка

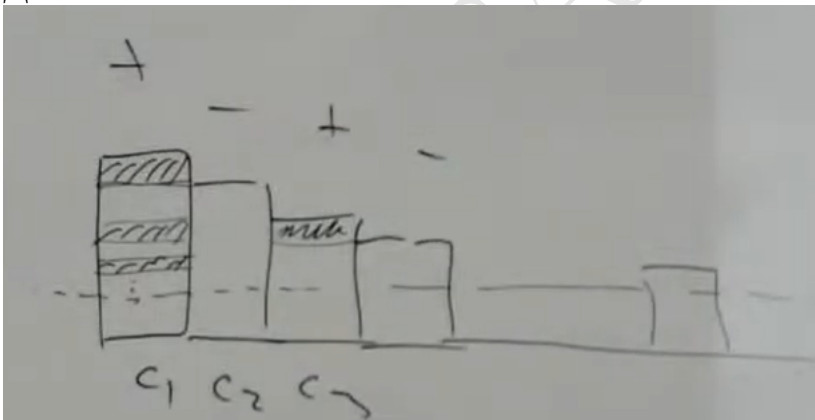
$$\square \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n C_n, C_n \geq C_{n+1} \geq 0$$

Тогда

$$C_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n C_n$$

сходится.

Доказательство



Будем попарно брать столбики с противоположными знаками и разницу между ними закрашивать. Заметим, что сумма всех этих "разниц" — это и будет сумма ряда. А ещё она вся вписывается в первый столбец (очевидно, ввиду монотонности, на рисунке видно).

Но! В условии ещё что-то сказано про $C_n \rightarrow 0$. Так вот, если этого не соблюдать, то у нас произойдёт разнотечение предела, т.к. можно будет взять частичные суммы до чётного члена, а также до нечётного. И вот если этот "последний" член окажется нечётным, то он нам добавит чего лишнего, а если предел неоднозначен, то его не существует. И вот, чтобы этого избежать, мы требуем, чтобы оно стремилось к 0.

3.3.2 Достаточное условие дифференцируемости²

Формулировка:

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int}(E)$$

Пусть в окрестности $B(a, r)$ существуют конечные f'_1, \dots, f'_m и все они непрерывны в точке a . Тогда, f дифференцируема в точке a .

Доказательство:

▷

Рассмотрим для $m = 2$, для остальных всё аналогично.

Возьмём разность $f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$. Добавим и вычтем $f(a_1, x_2)$:

$$= (f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)) + (f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)) =$$

Расписываем каждую скобку по теореме Лагранжа, переменные с шапочками — это что-то среднее между x и a :

$$= f'_{x_1}(\hat{x}_1, x_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, \hat{x}_2)(x_2 - a_2) =$$

Теперь добавим и вычтем $i \in \{1, 2\}$, $f'_{x_i}(a_1, a_2)(x_i - a_i)$

$$= f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) +$$

$$+ (x_1 - a_1)(f'_{x_1}(\hat{x}_1, x_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2)) + (x_2 - a_2)(f'_{x_2}(a_1, \hat{x}_2) - f'_{x_2}(a_1, a_2))$$

Заметим, что $i \in \{1, 2\}$, $(x_i - a_i) \leq |x_i - a_i|$ (нормы), а выражения в скобках — бесконечно малые при $x \rightarrow a$.

В итоге, получили формулу дифференцирования, где слева стоит формула, справа линейная часть и бесконечно малая.

◁

3.3.3 Дифференцирование композиции²

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

3.3.3.1 Лемма об оценке нормы линейного оператора

Формулировка

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ - линейный оператор, $A \Leftrightarrow (a_{ij})$

Тогда:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \leq C_A \cdot |x|, \quad \text{где } C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$$

Доказательство

Рассмотрим:

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^m (a_{ij} \cdot x_j) \right)^2$$

Тут мы просто умножили вектор на матрицу. Теперь распишем внутреннюю сумму по КБШ и вынесем сумму с x ом, т.к. от внешней она не зависит.

$$\sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^m (a_{ij} \cdot x_j) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right) = |x|^2 \cdot \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = |x|^2 \cdot C_A^2$$

$$|Ax| \leq |x|C_A$$

3.3.3.2 Теорема о дифференцировании композиции

Формулировка

$$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l \quad F(E) \in I \quad a \in \text{Int}(E)$$

$$G : I \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m \quad F(a) \in \text{Int}(I)$$

F - дифференцируема в т.а, G - дифференцируема в т. $F(a)$

Тогда :

$$G \circ F \text{ - дифференцируема в т.} a \quad (G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$$

Доказательство

$$b := F(a), \quad k := F'(a) \cdot h + \alpha(h) \cdot |h|$$

$$F(a+h) = F(a) + F'(a) \cdot h + \alpha(h) \cdot |h|$$

$$G(b+k) = G(b) + G'(b) \cdot k + \beta(k) \cdot |k|$$

Рассмотрим:

$$G(F(a+h)) = G(b+k) = G(b) + G'(b) \cdot k + \beta(k) \cdot |k| = G(F(a)) + G'(F(a)) \cdot (F'(a)h + \alpha(h) \cdot |h|) + \beta(k) \cdot |F'(a) \cdot h + \alpha(h) \cdot |h||$$

Здесь мы получили как раз формулу "дифференцирования" для G в т. $F(a)$. Теперь нужно доказать что вот эта длинная блямба в конце - бесконечно малое, и все будет супер.

Теперь воспользуемся доказанной леммой:

$$G(F(a+h)) = G(F(a)) + G'(F(a)) \cdot F'(a) \cdot h + G'(F(a)) \cdot \alpha(h)|h| + \beta(k) \cdot |F'(a) \cdot h + \alpha(h)|h||$$

Рассмотрим третье слагаемое:

$$G'(F(a)) \cdot \alpha(h)|h| \leq C_{G'(b)} \cdot |\alpha(h)| \cdot |h|$$

И рассмотрим четвертое:

$$|F'(a) \cdot h + \alpha(h)|h|| \leq |F'(a)h| + |\alpha(h)|h| \leq (C_{F'(a)} + |\alpha(h)|) \cdot |h|$$

Внимательно вглядываемся в получившееся выражение и понимаем, что скобка - ограничена, а $|h| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$

То есть

$$\beta(k) \cdot |F'(a) \cdot h + \alpha(h)|h| \leq |\beta(k)| \cdot (C_{F'(a)} + |\alpha(h)|) \cdot |h|$$

Итого:

Получившиеся два выражения в сумме - бесконечно малое \Rightarrow формула сошлась и все хорошо.

3.3.4 Теорема Лагранжа для векторзначных функций³

Формулировка

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b)

Тогда: $\exists c \in (a, b) \quad |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)|(b - a)$

Доказательство

▷

Заведём $\varphi(t) := \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a) \rangle \quad t \in [a, b]$

Небольшая ревизия:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(t) = \langle (F(b) - F(a))', F(t) - F(a) \rangle + \langle F(b) - F(a), F'(t) - 0 \rangle = \langle F(b) - F(a), F'(t) \rangle$$

$$\varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = |F(b) - F(a)|^2 + \langle 0, 0 \rangle$$

$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$ - обычная теорема Лагранжа.

$$|F(b) - F(a)|^2 = \langle F(b) - F(a), F'(c) \rangle (b - a) \leq |F(b) - F(a)| |F'(c)| (b - a)$$

Делим на $|F(b) - F(a)|$, (для $b = a$ тривиально)

$$|F(b) - F(a)| \leq |F'(c)|(b - a)$$

◁

3.3.5 Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)³

Формулировка

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $B(x, a) \subset E$ - открытое.

$f \in C^{r+1}(E)$, тогда $\exists \theta \in (0, 1) :$

Для здоровых людей:

$$f(x) = \sum_{j: |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j + \sum_{j: |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a + \theta(x - a))}{j!} (x - a)^j$$

Для психов:

$$f(x) = \sum_{j:|j|\leq r} \frac{1}{j^1!j^2!\dots j^m!} \frac{\partial^{(j)} f}{\partial x^j}(a)(x-a)^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{1}{j^1!j^2!\dots j^m!} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}}(a + \theta(x-a))(x-a)^j$$

В форме n -го дифференциала:

$$f(a+h) = \sum_{n=1}^r \frac{d^n(a, n)}{n!} + d^{r+1}(a + \theta h, h)$$

В форме $a+h$, Лагранжа:

$$f(a+h) = \sum_{j:|j|\leq r} \frac{f^{(j)}}{j!}(a)h^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!}h^j$$

Доказательство

▷

Из прошлой теоремы: $\varphi(t) = f(a+th)$, $h = x-a$

$$\varphi^{(k)} = \sum_{j:|j|\leq r} \frac{r!}{j!} \frac{\partial^k}{\partial x^j} f(a+th)$$

$\varphi(0) = f(a)$; Распишем Формулу Тейлора с остатком в виде Лагранжа для $\varphi(t)$ в точке 0.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi(0)}{1!}(t) + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(t)}{r!}(t) + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1}$$

$$f(x) = \sum_{j:|j|\leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta(x-a))}{j!}(x-a)^j$$

В чем фишка: мы подставляем $\varphi^{(i)}$ -ю производную в формулу Тейлора для φ (которую мы получили из предыдущей теоремы о сдвиге), тем самым уничтожая факториалы. И все супер.

Теперь в форме Пеано:

$$f(a+h) = \sum_{j:|j|\leq r} \frac{f^{(j)}}{j!}(a)h^j + o(|h|^r)$$

Заметим, что $j^1 + j^2 + \dots + j^m = r+1$ (Для последнего члена в форме Лагранжа)

Докажем, что $h_1^{j_1} \cdot h_2^{j_2} \dots h_m^{j_m} = o(|h|^r)$, $h \rightarrow 0$

Распишем дробь:

$$\frac{h_1^{j_1} h_2^{j_2} \dots h_m^{j_m}}{|h|^r} |h| = \frac{|h_1^{j_1}|}{|h|^{j_1}} \cdot \frac{|h_2^{j_2}|}{|h|^{j_2}} \dots \frac{|h_m^{j_m}|}{|h|^{j_m}} |h|$$

Все получившиеся дроби < 1 . Это следует из того, что $|h| = \sqrt{\sum_{i \in [1, m]} |h_j|^2}$, и, типа, мы просто делим 1 координату на сумму всех \Rightarrow заведомо меньше \Rightarrow при $h \rightarrow 0$ все равно $o(|h|^r)$

\triangleleft

3.4 Теоремы

3.4.1 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда¹

3.4.1.1 Преобразование Абеля (суммирование по частям)

$$A_n := \sum_{i=1}^n a_i$$
$$\sum_{k=1}^N a_k b_k = A_N b_N + \sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

3.4.1.2 Дирихле

Формулировка

$$\square \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

1. A_n ограничено, т.е. $\exists C_A : \forall n > 0 \quad |A_n| \leq C_A$
2. b_n монотонно и $b_n \rightarrow 0$

Если всё выполняется, ряд сходится.

Доказательство

Запишем преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k = A_N b_N + \sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Здесь A_N ограничено, b_N б.м. $\Rightarrow A_N b_N \rightarrow 0$.

Остаётся доказать абсолютную сходимость $\sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$:

$$b_n \rightarrow 0 \Rightarrow \exists C_B : \forall n > 0 \quad |b_n| < C_B$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq C_A \sum_{k=1}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A (b_k - b_{k+1} + b_{k+1} - b_{k+2} + \dots + b_{N-1} - b_N) = \pm C_A (b_k - b_N) \leq 2 \cdot C_A \cdot C_B$$

Все числа здесь конечны, а значит ряд абсолютно сходится (а значит, просто тоже сходится), а значит в исходном преобразовании Абеля у нас все слагаемые сходятся, а значит сам представленный ряд сходится.

3.4.1.3 Абель

Формулировка

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится ($\Rightarrow \exists \lim_N \sum_{n=1}^N a_n = \alpha$)
2. b_n монотонно, b_n ограничено

Здесь требования к a_n сильнее, а к b_n слабее.

Доказательство

Вспоминаем, что у монотонной и ограниченной последовательности есть предел:

$$\exists \lim b_n := \beta$$

Далее нам надо сделать супер-мега-трюк, а именно прибавить и отнять от исходного ряда $\beta \sum_{n=1}^N a_n$:

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = \beta \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=1}^N a_n b_n - \beta \sum_{n=1}^N a_n = \beta \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=1}^N a_n (b_n - \beta)$$

При $N \rightarrow +\infty$ происходит предельный переход:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = \beta \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (b_n - \beta)$$

Левое слагаемое конечно, обратим внимание на правое: $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k (b_k - \beta)$ сходится по признаку Дирихле, так как a_k сходится $\Rightarrow a_k$ ограничено, $b_k \rightarrow \beta \Rightarrow b_k - \beta \rightarrow 0$, монотонность b_k у нас остаётся по условию.

Таким образом, получившееся выражение тоже целиком сходится.

3.4.2 Теорема о перестановке слагаемых³

Формулировка:

Рассмотрим ряд $\sum a_k$ - положительный ряд.

Пусть $\sum b_k$ - его перестановка.

Тогда, если ряд $\sum a_k$ абсолютно сходится, то ряд $\sum b_k$ абсолютно сходится к той же сумме.

Доказательство:

1. Пусть $\sum a_k$ - положительный ряд.

По определению частичная сумма $\sum S_k^b = a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(k)} \leq S_M^a$, где $M = \max(\pi(1), \dots, \pi(k))$

Так как $M \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, а пределы частичных сумм существуют, получаем, что $S^b \leq S^a$, следовательно существует π^{-1} .

Аналогично получаем $S^a \leq S^b$, т.е. $S^a = S^b$.

2. Убираем ограничение на член ряда.

Рассматриваем ряды $\sum a_k^+, \sum b_k^+$, где $a_k^+ = \max(a_k, 0), b_k^+ = \max(b_k, 0)$. Опа, то есть эти ряды - есть перестановки, которые задаются биекцией, и по п.1 абсолютно сходятся к одному и тому же значению.

Аналогично определяем $a_k^- = \max(-a_k, 0), b_k^- = \max(-b_k, 0)$. Понимаем, что $\sum a_k = \sum a_k^+ + \sum a_k^-$. И осознаем, что теорема доказана.

3.4.3 Единственность производной²

Формулировка:

Производный оператор (если он существует) определён однозначно.

Доказательство:

▷

Краткий ответ: так как он вычисляется однозначно для каждого $u \in \mathbb{R}^m$.

Докажем этот удивительный аспект!

$$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$F(a+h) = F(a) + Lh + o(h)$$

Пусть $h = tu$, где $t \in \mathbb{R}$. Причём, $|t| < \frac{r}{|u|}, B(a, r) \in E$ Тогда:

$$F(a+tu) = F(a) + tLu + o(t)$$

$$Lu = \frac{F(a+tu) - F(a)}{t} - \frac{o(t)}{t}$$

$$Lu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a+tu) - F(a)}{t}$$

— однозначно определено!

◁

Замечание (о дифференцируемости функции нескольких переменных):

Логично, что $x \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_m) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Поэтому в векторном виде можно записать дифференцируемость так:

$$F(x+a) = F(a) + L(x-a) + \Phi(x-a)|x-a|$$

3.4.4 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций²

Формулировка:

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$F(x) \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \quad a \in \text{Int}(E)$$

1. $F(x)$ — дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ все f_i дифференцируемы в точке a
2. i -я строчка матрицы Якоби F является матрицей Якоби для f_i

Доказательство:

▷

Просто распишем производную в точке a для i координатной функции:

$$f_i(x) = f_i(a) + (\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \dots + \lambda_{im})(x - a) + \Phi_i(x - a)|x - a|$$

(очевидно всё выполняется, плюс они все ещё и непрерывны, что очевидно, если расписать по координатам)

◁

3.4.5 Необходимое условие дифференцируемости²

Формулировка:

$$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{Int}(E)$$

F — дифференцируема в точке a .

Тогда $\exists f'_1, f'_2, \dots, f'_m$ и матрица Якоби в точке $a = (f'_1, f'_2, \dots, f'_m)$

Доказательство:

▷

Распишем определение дифференцируемости:

$$f(a + h) = f(a) + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \dots + \lambda_m h_m + \alpha(h)|h|$$

Зафиксируем точку $k \in [1, m]$. Пусть $h_k := s \cdot (0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots, 0, 0, 0)$ (единичка на k -том месте), причём $s < r$, где $B(a, r) \subset E$.

$$f(a_1, a_2, \dots, a_k + s, \dots, a_m) = f(a) + \lambda_k \cdot s + \alpha(h(s))|s|$$

Выражаем λ_k :

$$\lambda_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Итого, все производные существуют и в матрице Якоби действительно располагаются они.

◁

3.4.6 Дифференцирование 'произведений'²

Формулировка:

$$F, G : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l \quad a \in \text{Int}(E)$$

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$$

F, G, λ - дифференцируемы в точке a

Тогда:

1. $(\lambda F)'(a) \cdot h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a) \cdot h$ - причем тут в первом слагаемом справа от равенства мы на h "действуем а не умножаем.
2. $\langle F, G \rangle'(a)h = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$

Доказательство:

▷

1. Сначала рассмотрим based версию для $l = 1$: $(\lambda f)(a+h) - (\lambda f)(a) = \lambda(a+h)f(a+h) - \lambda(a)f(a) = (\lambda(a) + \lambda'(a)h + o(h)) \cdot (f(a) + f'(a)h + o(h)) - \lambda(a)f(a) = \lambda(a)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + \lambda'(a)hf(a) + o(h)$ Итого: $(\lambda'(a)h)f(a) + \lambda(a)(f'(a)h + o(h))$ А теперь просто скажем, что это одна из координат по которой мы дифференцируем, и будем радоваться жизни.
2. По определению:

$$\langle F, G \rangle(x) = \sum_{i=1}^l f_i(x)g_i(x)$$

А теперь:

$$\begin{aligned} ((\langle F, G \rangle)'(a))'h &= \sum_{i=1}^l (f_i(a)g_i(a))'h = \\ &= \sum_{i=1}^l f'_i(a)hg_i(a) + f_i(a)g'_i(a)h = \\ &= \sum_{i=1}^l f'_i(a)hg_i(a) + \sum_{i=1}^l f_i(a)g'_i(a)h = \\ &= \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle \end{aligned}$$

◁

3.4.7 Экстремальное свойство градиента³

Формулировка:

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \text{Int}(E)$$

f - дифференцируема в т.а $\text{grad}f(a) = \nabla f(a) \neq 0$

$l := \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ - вектор-направление градиента (наискорейшего возрастания функции)

т.е. $\forall h \in \mathbb{R}^m |h| = r$

$$-|\nabla f(a)| = -\frac{\partial f}{\partial l}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial t}(a) = |\nabla f(a)|$$

Причем равенство достигается при $h = -l$ слева и $h = l$ справа.

Доказательство:

▷

По определению градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Неравенство КБШ:

$$\langle \nabla f(a), h \rangle \leq |\nabla f(a)| |h| = |\nabla f(a)|$$

Так как по факту скалярное произведение стоит под модулем, то и исходное условие выполняется.

Альтернативная версия, с помощью которой проще понять идею: l - нормирован, h - тоже нормирован, $\langle l, h \rangle$ будет максимальным при $l = h$.

◁

3.4.8 Независимость частных производных от порядка дифференцирования³

Формулировка:

$$f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \text{Int}(a)$$

Мы рассматриваем $m = 2$, остальные сводятся к этому случаю по правилу раскрытия дифференциала

$$\text{Если } \exists f''_{xy}, f''_{yx} \text{ в окрестности т.а и они непрерывны } \Rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Доказательство:

▷

Рассмотрим суперфункцию:

$$\Delta^2 f(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

$$\alpha(h) = \Delta^2 f(h, k')$$

где k' - фиксированное k .

Пусть \bar{h} - какая-то средняя точка.

$$\alpha(0) = 0$$

$$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \underset{\text{По Лагранжу}}{=} \alpha'(\bar{h}) \cdot h = (f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k}) - f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0)) h \underset{\text{По Лагранжу}}{=} f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k}) \cdot h \cdot k$$

Аналогично вводим $\beta(k)$ с фиксированным h

Получаем:

$$\beta(k) = \dots = f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k}) \cdot h \cdot k$$

При фиксированных $h, k \neq 0$

$$\alpha(h) = \beta(k)$$

$$h \cdot k \cdot f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k}) = f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k}) \cdot h \cdot k$$

$\bar{h}, \bar{k}, \bar{\bar{h}}, \bar{\bar{k}}$ - какие-то средние значения между $[0, h]$ и $[0, k]$.

$$f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k}) = f''_{yx}(x_0 + \bar{\bar{h}}, y_0 + \bar{\bar{k}}) \xrightarrow{\bar{h}, \bar{k}, \bar{\bar{h}}, \bar{\bar{k}} \rightarrow \infty} f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

◁

3.4.9 Полиномиальная формула³

Формулировка:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^m \sum_{n_2=1}^m \dots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} \cdot a_{n_2} \cdot \dots \cdot a_{n_r} = \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Здесь j - мультииндекс.

Первое равенство - наивная реализация раскрытия скобок.

Доказательство:

▷

Как ни странно, по индукции.

База:

$r = 1$ - очевидно.

Переход:

Пусть все верно для r :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^r = \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Покажем для $r + 1$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^{r+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_m)(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^r = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) \cdot \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j =$$

Вот теперь мы повеселимся. Сначала "домножим" на первую скобку, породив m сумм:

$$= \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1+1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m} + \dots + \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m+1}$$

Теперь перепишем вот это вот все к более удобному виду. На примере первой суммы:

$$\sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1+1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m} \rightarrow \sum_{j: |j|=r+1, j_1 \geq 1} \frac{r! j_1}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m}$$

Итак, мы добавили 1 член, поэтому теперь мультииндекс $|j| \leq r + 1$. Причем, $j_1 \geq 1$, т.к. надо гарантировать это, потому что мы только что домножили на скобку. Также мы по пути трансформировали индексы j , поэтому из дроби $\frac{r!}{j_1! \dots} j_1$ - это как бы $(j_1 + 1)$ из прошлой суммы. Поэтому домножаем дробь на j_1 , чтобы в знаменателе сократить последний член.

Итого:

$$\sum_{j: |j| \leq r+1} \frac{r! j_1}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m} + \dots + \sum_{j: |j|=r+1, j_m \geq 1} \frac{r! j_m}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m}$$

Отметим, что приписка $j_i \geq 1$ - бессмысленна, т.к. если он равен нулю, то слагаемое просто занулится, и все будет норм.

Выносим все общее:

$$\sum_{j: |j|=r+1} \frac{r!(j_1 + j_2 + \dots + j_m)}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m} = \sum_{j: |j|=r+1} \frac{(r+1)!}{j!} a^{(r+1)}$$

Все сошлось!

◁

3.4.10 Лемма о дифференцировании "сдвига"³

Формулировка:

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^r(E)$$

$$a \in E, \quad h \in \mathbb{R}^m \quad a + th \in E, \text{ при } t \in [-1, 1]$$

$$\text{Пусть } \varphi(t) = f(a + th)$$

$$\text{Тогда } \varphi^{(k)}(t) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a + th)$$

Доказательство:

▷

$$\varphi(t)'_t = f(a + th)'_t = \frac{\partial}{\partial t} f(a_1 + th_1, a_2 + th_2, \dots, a_m + th_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + th) \cdot h_i$$

$$\varphi''(t)_t = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + th) h_i \right)'_t = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} (a + th) \cdot h_{i_1} \cdot h_{i_2}$$

Замечаем закономерность:

$$\varphi^{(k)}(t)_t = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} (a + th) h_{i_1} \cdot h_{i_2} \cdot \dots \cdot h_{i_k} =$$

И т.к. нам без разницы, в каком порядке брать производные, применяем полиномиальную формулу:

$$= \varphi^{(k)}(t) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} \frac{\partial^k f}{\partial x^j} (a + th)$$

◁