СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 2 семе из-за матана

Разработали

Тимофей Белоусов @imodre
Никита Варламов @snitron
Тимофей Цорин @thefattestowl

v0.6 alpha
Январь-Июнь 2022

Заметки авторов
В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre
2. @snitron
3. @thefattestowl

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответвующему автору, или создать Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click).

Ah shit
Here we go again!

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Первообразная, неопределённый интеграл[1]

$F, f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, где $\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F(x)' = f(x)$. F — первообразная f

Неопределённый интеграл — это множество всех первообразных f. Ну а точнее, поскольку всё множество первообразных отличается на константу, то мы просто берём какую-то первообразную и дописываем $+C$.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

1.1.2 Таблица первообразных[1]

1. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$ — длинный логарифм
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + C$ — высокий логарифм
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
7. $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
8. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
9. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
10. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

1.1.3 Определенный интеграл (непрерывной функции)[2]

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a,b]))$$

Замечания:

1. $$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

2. $$f \equiv c \Rightarrow \int_a^b f = c(b-a)$$

3. $$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$$

4. $$\int_a^a f = 0$$

Свойства:

1. Аддитивность по промежутку:
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. Монотонность:
$$f, g \in C[a, b], f \le g, \int_a^b f \le \int_a^b g$$

   Следствия:

   (a) $$\min f(b-a) \le \int_a^b f \le \max f(b-a)$$

   (b) $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \ge \int_a^b f(x)dx$$

   (c) $$-|f| \le f \le |f| \text{ по } [a, b]$$

   (d) $$f \in C[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

1.1.4 Верхний и нижний пределы[1]

Рассмотрим верхний. Он определяется как предел последовательности супремумов сужений функции по левой границе:

$$\exists y_m = \sup_{n \ge m} x_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots)$$

Ну а сам верхний предел выглядит как

$$\overline{\lim} x_n = \lim y_m$$

Разумеется, нижний определяется аналогично, только с инфемумами (пусть последовательность инфемумов будет z_n.

Простейшие свойства:

1. z_n возрастает, y_n убывает.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n \le x_n \le y_n$
3. Если изменить конечное число x_n, то изменится не более, чем конечное число z_n, либо y_n (очевидно, после последнего изменённого x_n мы уже не будем их учитывать).

1.1.5 Риманова сумма[1]

Пусть у нас определен отрезок $[a,b]$, дробление $x_0 \dots x_n$, оснащение и $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Тогда следующее выражение мы называем интегральной (Римановой) суммой.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

Где ξ_i — точка оснащения на отрезке i

1.1.6 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость[2]

$$\Phi(A) = \int_a^A f$$

1. Если существует $\lim_{A\to b-0}\Phi(A)$ — $\int_a^{\to b} f dx$ *несобственный интеграл*
2. Если он ещё и конечный, то несобственный интеграл *сходится*
3. А если он бесконечный или вовсе не существует, то несобственный интеграл *расходится*

1.2 Определения

1.2.1 Теорема о существовании первообразной[1]

Формулировка

$$\forall f \in C\langle a, b\rangle \exists F : \forall x \in \langle a, b\rangle F'(x) = f(x)$$

Доказательство
BASED (Теорема Барроу)

1.2.2 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность[2]

E — множество ограниченных подмножеств в $\mathbb{R}^2$

$\sigma : E \to [0, \infty)$ — *площадь в* $\mathbb{R}^2$

$\exists\sqcup$ — дизъюнктивное объединение. Вообще мы тут требуем, чтобы наши фигуры не пересекались и мы их просто объединяли Свойства:

1. Аддитивность: $\sigma(A_1 \sqcup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

Замечания:

1. Монотонность: $A \subset B$ $\sigma(A) \leq \sigma(B)$
2. $\sigma(\textit{вертикального отрезка}) = 0$

Ослабленная площадь:

$\sigma : E \to [0, \infty)$

Свойства:

1. Монотонность: $A \subset B$ $\sigma(A) \leq \sigma(B)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$
3. Ослабленная аддитивность: $E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ содержится не более чем в некотором вертикальном отрезке (то есть мы допускаем, что они могут пересекаться, но чуть-чуть), $\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

1.2.3 Положительная и отрицательная срезки[2]

Literally this:

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$f_+ = \max(f, 0)$ — *положительная срезка*

$f_- = \max(-f, 0)$ — *отрицательная срезка*

1.2.4 Среднее значение функции на промежутке[1]

$f \in C[a,b]$

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \text{ — ср. арифметическое значение функции}$$

1.2.5 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка[1]

$\urcorner \operatorname{Segm}\langle a,b\rangle = \{[p,q] : [p,q] \subset \langle a,b\rangle\}$

$f : \operatorname{Segm}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция промежутка (принимает любой отрезок внутри $\langle a,b\rangle$)

Если $\forall x \in (p,q) \subset [p,q] \subset \langle a,b\rangle \quad f(p,x) + f(x,q) = f(p,q)$, то f — аддитивная функция промежутка

1.2.6 Плотность аддитивной функции промежутка[1]

$\phi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — плотность аддитивной функции промежутка $f \Leftrightarrow \forall [p,q] \in \operatorname{Segm}\langle a,b\rangle \quad \inf\limits_{x\in[p,q]} \phi(x)\cdot (q-p) \le f([p,q]) \le \sup\limits_{x\in[p,q]} \phi(x)\cdot(q-p)$

1.2.7 Кусочно–непрерывная функция[1]

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ называют кусочно–непрерывной, когда у неё на всей области определения существует конечное число разрывов 1 рода (Напоминалка: это когда в точке функция имеет конечные односторонние пределы, но они не совпадают). Также требуется, чтобы $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и они были конечными.

Замечание: такая функция ограничена (вроде очевидно достаточно, все пределы же конечные. А если где-то между точками разрыва функция улетает в бесконечность, там будет точка разрыва, нарушается непрерывность).

1.2.8 Почти первообразная[2]

$F(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *почти первообразная* кусочно-непрерывной функции f, если F — непрерывна и $\exists F'(x) = f(x)$, кроме конечного числа точек

Пример: $f = \operatorname{sign} x, F = |x|, x \in [-1,1]$

1.2.9 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути[1]

1.2.9.1 Краткий обзор пути с прошлого сема, чтобы не тупить

Обычно мы определяем путь как непрерывное отображение в R^m на каком-то промежутке $[a,b]$, в котором $f(a) = A$, а $f(b) = B$. Больше никаких требований на него не наложено, из-за чего он может иметь всякие ужасные изломы, описывая m–мерные фигуры, при этом имея 1–мерный аргумент. Проблема здесь в том, что невозможно измерить какую-либо конечную скорость в некоторых точках такого пути, либо посчитать его длину (типо в квадрате бесконечно много 1–мерных линий, а такой путь может пройти весь квадрат целиком)

1.2.9.2 Гладкий путь

$$\gamma[a,b] \to \mathbb{R}^m, \text{ причём } \forall i \in [1,m] \quad \gamma_i \in C^1$$

Здесь $\gamma_i(t)$ — отображение отдельной координаты в R^m, в котором действует путь $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t))$

1.2.9.3 Вектор скорости

Это просто производная функция пути. По принципу покоординатной сходимости мы можем рассматривать каждую координату γ_i отдельно, если представим наш путь как покоординатный вектор функций в $\mathbb{R}$.

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = (\lim_{h\to 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)}{h}, \ldots, \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_m(t+h) - \gamma_m(t)}{h})$$

1.2.9.4 Носитель пути

Это кривая, являющаяся образом γ на всей области определения: $\gamma([a,b])$

1.2.10 Длина гладкого пути[1]

Это функция l, заданная на множестве всех возможных гладких путей. Обладает (аксиоматически) следующими свойствами:

1. $l \geq 0$
2. Аддитивность $(\forall c \in [a,b] \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. Если носитель пути является образом сжатия какого-то другого, то длина такого пути $\leq$ длины пути прообраза:

   $\gamma, \overline{\gamma}$— гл. путь
   $C_\gamma, C_{\overline{\gamma}}$— носители
   $\exists f : C_\gamma \underset{\text{сюръекция}}{\to} C_{\overline{\gamma}}(: \forall x, y \in [a,b] \quad \rho(x,y) \geq \rho(f(x), f(y))) \implies l(\gamma) \geq l(\overline{\gamma})$

4. Нормировка
   $\exists \gamma : [0,1] \to R^m,\ \gamma(c) = (1-c)\cdot A + c \cdot B.$

   Человеческими словами, тут мы определили прямолинейный путь. А утверждение в том, что $\rho(A,B) = l(\gamma)$

1.2.11 Вариация функции на промежутке[2]

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, выберем $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$

Тогда $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ — *дробление* отрезка.

Вариация функции на отрезке $[a,b]$ l

$$l = \sup_\tau \left\{ \sum_{i=0}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))) \right\}$$

1.2.12 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение[1]

Определён отрезок $[a, b]$

Дробление отрезка — это некий возрастающий конечный набор $x_n \in [a, b]$. Тут $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$. То есть по ним мы можем получить кучу соприкасающихся подотрезков.

Ранг дробления — это наибольшая длина такого подотрезка (ранзица между двумя соседними точками дробления): $\max x_i - x_{i-1}$

Оснащение — это некоторый произвольный набор точек на нашем отрезке, в котором каждая точка находится на своём уникальном подотрезке дробления. Они покрывают все подотрезки: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

1.2.13 Частичный предел[1]

$\exists x_n$ — вещественная последовательность.

Выберем в ней подпоследовательность x_{n_k}, где n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел.

$\lim x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$ — это и есть тот самый частичный предел.

1.2.14 Допустимая функция[2]

$f : [a, b) \to \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$

f — *допустима*, если $\forall A \in (a, b) : f$ на $[a, A]$ — *кусочно непрерывна*

1.2.15 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла[2]

$-\infty < a < b \leq +\infty, f$ — допустимая (?), тогда сходимость несобственного интеграла равносильна

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (a, b) : \forall A, B \in (\delta, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

1.2.16 Теорема об интегральной сумме центральных прямоугольников[2]

$$f \in C^2[a, b], \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$
$$\xi_k := \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \text{ (серединка отрезочка)}$$
$$\delta = \max_{1 \geq k \geq n} x_k - x_{k-1}$$

Тогда:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)|dx$$

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем[1]

1.3.1.1 Интегрирование неравенств

Формулировка
$f, g \in C[a,b]$

$$f \le g \implies \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$$

Доказательство
Вполне очевидно: $\Pi\Gamma(f^+, [a,b]) \subset \Pi\Gamma(g^+, [a,b])$. Соответственно, для положительной срезки всё слишком очевидно. В отрицательной всё наоборот. Но там и интеграл её вычитает (то есть знак неравенства переворачивается), так что ничего не ломается.

1.3.1.2 Теорема о среднем

Формулировка

$$\min(f) \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f \le \max(f) \cdot (b-a)$$

Доказательство
$\triangleright$

$$\min(f) \le f \le \max(f)$$

$$\int\limits_a^b (\min(f)) \underset{\min(f)\,\mathrm{const}}{=} \min(f) \cdot (b-a)$$

$$\min(f) \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f \le \max(f) \cdot (b-a)$$

$\triangleleft$

1.3.2 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций[1]

Формулировка
$f \in C[a,b], F$ — первообразная f.

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_{x:=a}^{x:=b}$$

Доказательство
$\triangleright$ Введём интеграл с переменным верхним пределом ϕ.

Заметим, что $\phi = F + c$.

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \phi(b) = \phi(b) - \underset{=0}{\phi(a)} = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a)$$

$\triangleleft$

1.3.3 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности[2]

Формулировка

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ f$ — плотность Φ
Тогда $\Phi\left([p, q]\right) = \int_p^q f, \quad \forall [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle$

Доказательство

$\triangleright$

Давайте введём супер-функцию $F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi([a, x]), & x \neq a \end{cases}$ — это первообразная плотности f.

Докажем это:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi([a, x+h]) - \Phi([a, x])}{h} =$$

$\dfrac{\Phi([x, x+h])}{h} = f(x + \Theta h)$ (где $\Theta \in [0, 1]$, это работает по определению плотности $\inf f \leq \dfrac{f}{|\delta|} \leq \sup f$) $\underset{h\to 0}{=} f(x)$

Ну а теперь:

$$\Phi([p, q]) = \Phi([a, q]) - \Phi([a, p]) = F(q) - F(p) = \int_p^q f$$

$\triangleleft$

1.3.4 Интеграл как предел интегральных сумм[1]

Формулировка
$\exists f \in C[a, b]$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : a = x_0 < \ldots < x_n = b : \lambda_\tau := \max\limits_{i=1..n}(x_i - x_{i-1}) < \delta \forall \underset{\text{осн.}}{\xi_i} \quad \left|\sum\limits_{i=1}^{n}(f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$

Выглядит как атомный пиздец от Евгения Владимировича ☺, но на самом деле тут тупо написано, что мы можем разбить область интегрирования на отрезочки и в каждом выбрать точку, значение функции в которой умножить на длину отрезка, а сумма таких площадей прямоугольничка будет на самом деле стремиться к опр. интегралу функции при уменьшении ранга дробления. ☺

Доказательство

$\triangleright$

Воспользуемся аддитивностью опр. интеграла и разобъём на интегралы отрезков дробления:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Вместо умножения на длину отрезка, запишем эту операцию как интеграл константы (по факту же то же самое):

$$\sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)\,\mathrm{d}x$$

Теперь у нас имеются 2 выражения, в обоих стоит сумма интегралов на одинаковых промежутках интегрирования. Давайте же закинем эту всю радость в 1 кучу:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) - f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\xi_i) - f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Воспользуемся тем, что в подынтегральной функции расстояние от x до ξ_i никогда не превысит δ (по условию) и применим теорему Кантора о равномерной непрерывности, подставив вместо ε, $\frac{\varepsilon}{b-a}$ (а там как раз нас просят проконтролировать, что это расстояние $< \delta$):

$$|\xi_i - x| < \delta \Rightarrow |f(\xi_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\xi_i) - f(x)|\,\mathrm{d}x < \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

$\triangleleft$

1.3.5 Формула Стирлинга[3]

Формулировка:

$n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{n}\sqrt{2\pi}$

Доказательство. Рассмотрим сумму первых натуральных n как аргумент натурального логарифма и запишем формулу Эйлера-Маклорена:

$$\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln n}{2} + \int_1^k \ln n\,\mathrm{d}n - \frac{1}{2}\int_2^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Проинтегрируем $\int \ln n\,\mathrm{d}n$ по частям:

$$\int \ln n\,\mathrm{d}n = [u = \ln n \Rightarrow u' = \frac{1}{n}; v' = 1 \Rightarrow v = n] = n\ln n - \int \frac{1}{n} n\,\mathrm{d}n = n \ln n - n + C$$

$$\frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln n}{2} + \int_1^k \ln n \, \mathrm{d}n - \frac{1}{2}\int_2^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{\ln n}{2} + (n\ln n - n)|_1^n + C_1 + o(1) =$$

$$= \frac{\ln n}{2} + n\ln n - n + C_1 + o(1) = \sum_{i=1}^{n} \ln i = \ln n!$$

Здесь $\frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} = C_1$, т.к. возрастает и ограничена. Под $o(1)$ мы спрятали константы.

$$\ln n! = \frac{\ln n}{2} + n\ln n - n + C_1 + o(1)$$

$$n! = e^{\frac{\ln n}{2} + n\ln n - n + C_1 + o(1)}$$

$$n! = \sqrt{n} n^n e^{-n} e^{C_1 + o(1)} \underset{n\to\infty}{\sim} C\sqrt{n} n^n e^{-n}$$

Осталось выяснить, что такое $C_1 + o(1)$. Для этого рассмотрим $\sqrt{\pi}$ по Валлису:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)!!}{(2k-2)!!}\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^2 4^2 \dots (2k)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)}\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k (k!))^2}{2k!}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Теперь заменяем на эквивалентные, которые мы вывели выше:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2^k\sqrt{k}k^k e^{-k} C)^2}{\sqrt{2k}(2k)^{(2k)}e^{-2k}C}\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{\pi} = \frac{C}{\sqrt{2}} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$, что и доказывает требуемое равенство □

1.3.6 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла[2]

Лемма:

Пусть:

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx, \qquad A \in [a, b)$$

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ - сходится} \Leftrightarrow \Phi(A) \text{ - ограничен}$$

Доказательство:

$$\int_a^A f(x)dx \Leftrightarrow \exists \lim_{A\to b-0} \Phi(A)$$

И $\Phi(A)$ очевидно возрастает.

Формулировка:

f, g — допустимы на $[a, b)$

Если:

1. $f \leq g$ на $[a, b)$

   То:

   (a) $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится

   (b) $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится

2. $\exists \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l < \infty$

   То:

   (a) $l \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \Rightarrow \int_a^b g$ и $\int_a^b f$ сходятся и расходятся одновременно

   (b) $l = +\infty \Rightarrow$ см. пункт 1, заменяя сходится на расходится и наоборот.

   (c) $l = 0 \Rightarrow$ см. пункт 1

Доказательство:

1. $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx; \Psi(A) = \int_a^A g(x)dx$

   $\int_a^b g(x)$ - сходится $\Leftrightarrow \Psi(A)$ - ограничен $\Rightarrow \Psi(A) \geq \Phi(A) \Rightarrow \Phi(A)$ - ограничен $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx$ - сходится. Второй случай разбирается аналогично.

2. (a) $l \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$

   По определению предела, начиная с некоторого x $\frac{f(x)}{g(x)}$ будет лежать в окрестности l. НУО возьмем окрестность $\frac{1}{2}$, т.е.

   $$\frac{1}{2} l < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2} l$$

   $$\frac{1}{2} l g(x) < f(x) < \frac{3}{2} l g(x)$$

   И по пункту 1 этой теоремы g и f сходятся одновременно.

   (b) $l = \infty$

   Условие буквально означает, что начиная с некоторого места $\frac{f(x)}{g(x)} > 2022 \cdot l \Rightarrow 2022 \cdot l \cdot g(x) < f(x) \Rightarrow f(x)$ - расходится $\Rightarrow g(x)$ - расходится.

   (c) $l = 0$

   Аналогично п.b

1.4 Теоремы

1.4.1 Теорема о свойствах неопределённого интеграла[1]

1.4.1.1 Характеристика множества первообразных функции

Формулировка

$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$

Верны следующие утверждения:

1. $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — первообразная f на $\langle a, b\rangle$
2. $\forall \overline{F}$ — первообразная f на $\langle a, b\rangle \quad \overline{F} = F + C$

Доказательство

1. Очевидно ($F'(c) = 0$)
2. $(\overline{F} - F)' = 0, \int 0 \,\mathrm{d}x = C \Rightarrow \overline{F}$ отличается от F на C

1.4.1.2 Правила интегрирования

Формулировка

f, g имеют F, G на $\langle a, b\rangle$

1. $\int f + g = \int f + \int g$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$
3. Пусть $\phi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$. Тогда $(\int f(x)\,\mathrm{d}x)|_{x:=\phi(t)} = F(\phi(t)) + C = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$
4. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)$
5. f, g дифференцируемы. $\exists \int fg' \Rightarrow \exists \int f'g = fg - \int fg'$
   Пример: $\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$. Тогда $f' = 1 \Rightarrow f = x, g = \ln x \Rightarrow g' = \frac{1}{x}$. $\int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x \ln x - x + C$

Доказательство

1. $(F + G)' = F' + G' = f + g$
2. $(\alpha F)' = \alpha f$
3. $(F(\phi(t)))' = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$

4. $\int f(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x = \int \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(\alpha x+\beta)'} = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$
5. $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow (fg)' - fg' = f'g$. По арифметическим свойствам $\int f'g = \int (fg)' - \int fg' = fg - \int fg'$

1.4.2 Правило Лопиталя[3]

1.4.2.1 Лемма об ускоренной сходимости

Формулировка

$f, g : D \to \mathbb{R}, D \subset \overline{\mathbb{R}}, a$ — предельная точка $D, a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\exists \dot{V}_a : f, g \neq 0$ на $\dot{V}_a \cap D, \lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$

Тогда $\forall x_k : x_k \to a, x_k \in D, x_k \neq a$ $\exists y_k : y_k \to a, y_k \in D, y_k \neq a$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

Доказательство. Для всякого k можем подобрать n такое, что

$$\left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}, \qquad \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}.$$

Теперь достаточно взять $y_k := x_n$. □

1.4.2.2 Правило Лопиталя

Формулировка:

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$

f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a, b)

Если:

$$\exists \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)} \in \left\{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right\}$$

Тогда:

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ – постоянного знака $\Rightarrow g$ монотонна $\Rightarrow g \neq 0$.

По Гейне $x_k : x_k \to a, x_k \in (a, b), x_k \neq a$, построим y_k из леммы. Тогда, по теореме Коши

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)}$$

Будем выражать отсюда $\frac{f(x_k)}{g(x_k)}$:

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right).$$

И т.к. $\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \to 0$, $\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \to 0$, то $\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to L$. □

1.4.3 Теорема Штольца[1]

1.4.3.1 Лемма о смешной сумме

Ну что вы хотели, КПК же

Формулировка

$$s < \frac{a}{b} < t$$
$$s < \frac{c}{d} < t$$
$$s < \frac{a+c}{b+d} < t$$

Доказательство

Упражнение ☺

Формулировка

x_n, y_n — вещественные последовательности, $x_n, y_n \underset{\text{монотонно}}{\to} 0$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{x_n}{y_n}$$

Доказательство

▷ Nota bene: Вообще мы тут рассматриваем только положительные числа, т.к. вышеупомянутая лемма вроде как работает только там. Но тут не должно быть проблем с сохранением общности, так что пофиг.

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall N_1 > N, \forall n > N_1 \quad c - \varepsilon < \frac{x_{N_1+1} - x_{N_1}}{y_{N_1+1} - y_{N_1}} < c + \varepsilon$$

Тут трюк такой: поскольку данное определение верно для всех $N_1 > N$, то мы можем продолжать расписывать такие неравенства до бесконечности (то есть рассмотреть $x_{N_1+2} - x_{N_1+1}$ и так далее. Давайте применим лемму о смешной сумме и сложим этот ряд неравенств. У нас всё, очевидно, сократится, кроме крайних членов:

$$c - \varepsilon < \frac{x_n - x_{N_1}}{y_n - y_{N_1}} < c + \varepsilon$$

Где $n \to \infty$. Ну а по определению предела, $x_n \to 0$, ровно как и y_n. Тогда их можно опустить в предельном переходе:

$$c - \varepsilon < \frac{y_{N_1}}{y_{N_1}} < c + \varepsilon$$

◁

1.4.4 Теорема Барроу[1]

1.4.4.1 Интеграл с переменным верхним пределом

$f \in C[a,b], \phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Обозначим его за

$$\phi(x) = \int\limits_a^x f(x)$$

Формулировка

$$\forall x \in [a,b] \quad \phi'(x) = f(x)$$

Вот это прикол! Взяли какие-то странные интегралы, которые определены как какая-то недоплощадь, ещё и сделали область интегрирования переменной. А получили (внезапно) аж первообразную!

Доказательство

Давайте распишем производную этой непонятной функции:

$$\phi'(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} = \lim_{y \to x+0} \frac{\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f}{y - x} = \lim_{y \to x+0} \frac{\int\limits_x^y f}{y - x} \underset{\text{Теорема о среднем}}{=}$$

$$= \lim_{y \to x+0} f(c), c \in [x,y] \underset{\text{Наконец-то предельный переход}}{\longrightarrow} f(x)$$

1.4.5 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм[2]

Формулировка

ВИНОГРАДЫЧ

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, причём f — возрастает, а g — убывает.

Тогда:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b fg \le \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f \right) \cdot \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g \right)$$

КОХАСЬ

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, монотонны одинаково

Let $I_f = \frac{\int_a^b f}{b-a}$

Тогда:

$$I_f \cdot I_g \le I_{fg}$$

Доказательство

$\triangleright$

$\forall x, y \in [a,b] : (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y)) \geq 0$, так как монотонны одинаково.

Раскрываем скобки:

$f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y) \geq 0$

Интегрируем по y на промежутке $[a,b]$ и делим на $(b-a)$

$f(x)g(x) - I_f g(x) - f(x)I_g + I_f g \geq 0$

Интегрируем по x на промежутке $[a,b]$ и делим на $(b-a)$

$I_{fg} - I_f I_g - I_f I_g + I_{fg} \geq 0$

$I_f I_g \leq I_{fg}$

$\triangleleft$

Формулировка

ВИНОГРАДЫЧ

$n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}^n$, причём $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$

Тогда:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

КОХАСЬ

$n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}^n$, причём $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

Тогда:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Доказательство

$\triangleright$

Возьмём т.н. кусочно-постоянные функции $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, которые разбиты на n кусочков, и $\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$-й кусочек равен a_k и b_k соответственно. Тогда просто запишем стандартное неравенство Чебышева и у нас всё получится! (на разрывы в конечном числе точек пофигу).

$\triangleleft$

1.4.6 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных[2]

1.4.6.1 Линейность

$$\int_a^b \alpha f(x) = \alpha \int_a^b f(x)$$
$$\int_a^b f(x) + g(x) = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$$

1.4.6.2 Интегрирование по частям

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b gf'$$

1.4.6.3 Замена переменных

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f$$

1.4.6.4 Доказательство

Всё выводится из таких же свойств неопределённого интеграла

1.4.7 Иррациональность числа пи[2]

Let $H := \frac{1}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt = \dots$

Проинтегрируем по частям:

$u = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \Rightarrow du = -2nt\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} dt$

$dv = \cos t dt \Rightarrow v = \sin t$

Следовательно, $\dots = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)\sin t|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} dt = \dots$ (причём слагаемое с синусом занулится)

Опять проинтегрируем по частям:

$u = t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \Rightarrow du = \left(\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2t^2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right) dt$

$dv = \sin t dt \Rightarrow v = -\cos t$

Поработаем с du, приплюсуем и вычтем $2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$ и вынесем $2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$ у минусового слагаемого в du и плюсового $2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$:

$$du = \left(2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)+\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\right)dt$$

$$= \left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-(n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\right)dt$$

$$\ldots = 0+\frac{2}{(n-1)!}t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}(-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi^2}{4}}^{\frac{\pi^2}{4}}+\frac{2}{(n-1)!}\left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-(n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\right)\cos t dt$$

$$= (4n-2)H_1 - \pi^2 H_2$$

Формулировка

Число π — иррационально.

Доказательство

$H_0 = 2, H_1 = \ldots [\text{ по частям }] = 4$

$H_n = (\ldots)H_1 + (\ldots)H_0 = P_n(\pi^2)$ — многочлен от π^2 степени $\leq n$.

Почему? Ну типа мы взяли произвольное n, и посчитали для него H_n, и по рекуррентной формуле просто раскрыли всё до примитивов (H_0, H_1) получили в конечном итоге огромный многочлен, зависящий от π^2.

Пусть $\pi^2 = \frac{p}{q}$ (рациональное)

$q^n P_n(\frac{p}{q})$ = целое число (у нас огромный многочлен степени не больше n, в котором переменные = $\pi^2 = \frac{p}{q}$) $= q^n H_n > 0$ (интеграл положителен на нашем интервале) $\Rightarrow q^n H_n \geq 1$ (так как интеграл положительный, q^n — целое, произведение тоже целое, а значит минимальное положительное целое — 1)

$1 \leq \frac{q^n}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n \cos t dt \leq \frac{q^n}{n!}4^n\pi \to_{n\to\infty} 0$

Противоречие!

1.4.8 Компактность и конечные эпсилон-сети[2]

1.4.8.1 Определения

1. Множество $N \subset X$ называется ε-сетью для D, если $\varepsilon > 0$ $\forall x \in D \exists y \in N \quad \rho(x,y) < \varepsilon$
2. Множество D — сверхограниченное в X, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε-сеть

1.4.8.2 Свойства

1. D — сверхограниченно в $X \Leftrightarrow D$ — сверхограниченно в себе

   Доказательство: $\triangleright$

   $\Leftarrow$ ОЧЕВИДНО.

$\Rightarrow$ Отметим $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — $\frac{\varepsilon}{2}$ сеть в X. Теперь в каждом шарике $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ берём $y_i \in D$, если такая есть. Вуаля, $\{y_1, \dots, y_{m \le n}\}$ — ε-сеть для D.

$\lhd$

2. Сверхограниченность сохраняется при равномерно непрерывном отображении

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u, v \in X : \rho(u, v) < \delta \; \rho(f(u), f(v)) < \varepsilon; f(\delta\text{-сети}) = \varepsilon\textit{-сеть}$$

Доказательство: $\rhd$

Возьмём δ из условия, выберем конечную δ-сеть N для D. Тогда, нам необходимо узнать, что при $E = f(D)$, $y = f(x)$, E — сверхорграниченно. Давайте возьмём любую точку x, найдём ближайшую x_i из D и посмотрим $f(x_i)$. Окажется, что $\rho(y, f(x_i)) < \varepsilon$. Вы скажете — а почему??? Да всё просто, по равномерной непрерывности!

$\lhd$

3. D — сверхограниченно $\Rightarrow Cl(D)$ — сверхограниченно

Доказательство: $\rhd$

N — конечная ε-сеть.

$\forall x \in D \exists y \in N : \rho(x, y) < \varepsilon$

Тогда:

$\forall x \in Cl(D) \exists y \in N : \rho(x, y) \le \varepsilon$

Возьмём $a \in D, a_i \to b (b \in Cl(D))$. Покрасим эту бесконечную последовательность в конечное число цветов, следовательно существует подпоследовательность одинакового цвета a_{n_k}. Следовательно, $a_{n_k} : \exists x_i \in N : \rho(a_{n_k}, x_i) < \varepsilon \dots$ (предельный переход) $\rho(b, x_i) \le \varepsilon$. Получается, что мы получили т.н. 2ε-сеть, типа, типа эпсилон надо взять чуть-чуть побольше.

$\lhd$

4. D — сверхограниченно $\Leftrightarrow \forall$ последовательность из D содержит фундаментальную подпоследовательность

Доказательство: $\rhd$

$\Rightarrow$

$\{y_n\}$ — последовательность из D. Зафиксируем $\varepsilon = 1 : \{x_1, \dots, x_n\}$. Логично, что в одном из шаров $B(x_i, \varepsilon)$ — содержится бесконечно много элементов последовательности. Далее будем рассматривать только те элементы последовательности, которые внутри шара.

Зафиксируем $\varepsilon = \frac{1}{2} : \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$. Логично, что в одном из шаров $B(\hat{x}_i, \varepsilon = \frac{1}{2})$ — содержится бесконечно много элементов последовательности. Далее будем рассматривать только те элементы последовательности, которые внутри шара.

И так далее!

А почему же построенная система из под-шаров будет являться фундаментальной последовательностью? Да дело в том, что по определению фундаментальной последовательности, начиная с какого-то номера все элементы подпоследовательности будут лежать сколь угодно близко. А мы тут делаем ровно это — просто берём нужный эпсилон и строим шары.

$\Leftarrow$

Очевидно. ☺

Так как если нет конечной ε-сети, то $\exists \{x_n\}$ в $D : \rho(x, x_i) \ge \varepsilon \Rightarrow$ нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность.

$\lhd$

1.4.8.3 Теорема

Формулировка:

(X, ρ) — метрическое пространство, X — полное, $D \subset X$

Тогда эквивалентно:

1. D — компактно.
2. D — сверхограничено, замкнуто.

Доказательство:
(в метрическом пространстве)

X — компактно $\Leftrightarrow$ X — секвенциально компактно

$\triangleright$

$\Rightarrow$

Полноту получаем автоматически. Если $\exists$ фундаментальная последовательность $\{y_n\}$, не имеющая предела, то из секвенциальной компактности X следует, что существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$

Допустим, что X — не сверограниченно $\Rightarrow \exists \{x_n\}$, из которой нельзя извлечь фундаментальную подпоследовательность, однако, это противоречит секвенциальной компактности (сх. подпосл. фундаментальна).

$\Leftarrow$

Сверхограниченно $\Rightarrow$ из любой последовательности можно извлечь фундаментальную $\Rightarrow$ она сходится (в силу полноты) $\Rightarrow$ оно секвенциально компактно $\Rightarrow_{\text{в } X}$ компактно.

$\triangleleft$

1.4.9 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой[2]

Формулировка:

$f(\varphi) : [0, 2\pi] \to [0, \infty)$ — непрерывная функция.

$\Phi([\alpha, \beta]) = S_{\text{сектора } [\alpha,\beta]}, \ g(\phi) = \frac{r^2(\phi)}{2}$

$$\Phi([\alpha, \beta]) = \int_\alpha^\beta g(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\phi) d\phi$$

Для параметрической:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t)) dt$$

Доказательство:

$\triangleright$

Во первых, возьмём функцию промежутка (угла) $\Phi([\alpha,\beta]) = S_{\text{сектора } [\alpha,\beta]}$ и 'функцию' $g(\varphi) = r^2(\varphi)/2$. Если мы докажем, что g — плотность Φ, то теореме о вычислении АФП по плотности у нас всё будет супер.

Заметим, что кусочек круга (круговой сектор) имеет площадь $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)r^2$ (цитата: *школьная формула*, а вообще, это достаточно логично, мы выбираем кусок круга, ограниченный двумя углами, причём мы смотрим внутри одной четверти, поэтому делим обычную площадь πr^2 на 4). Также, достаточно очевидно, что если мы на нашем промежутке (любом) найдём минимум и максимум функции, то *сектор*(минимума) $\subset$ *сектор*(функции) $\subset$ *сектор*(максимума). Ура!

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\min r^2(\varphi)_{\varphi\in[\alpha,\beta]} \le \Phi([\alpha,\beta]) \le \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\max r^2(\varphi)_{\varphi\in[\alpha,\beta]}$$

Тогда по определению, g — плотность Φ.

$\triangleleft$

Теперь просто переведём для параметрической формулы. $r(\varphi) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$. Также, проведём замену переменный в интеграле, $\phi(t) = \arctan\frac{y(t)}{x(t)}$

$$\Phi([\alpha,\beta]) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} r^2(\varphi)\phi'(t)dt = \frac{1}{2}\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} (x^2(t)+y^2(t))\left(\arctan\frac{y(t)}{x(t)}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} (x^2(t)+y^2(t))\left(\frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}\right)\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} (x^2(t)+y^2(t))\left(\frac{x^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\right)\left(\frac{y'(t)x(t)-x'(t)y(t)}{x^2(t)}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} y'(t)x(t)-x'(t)y(t)dt$$

1.4.10 Изопериметрическое неравенство[2]

Формулировка:

$G \subset \mathbb{R}^2$ — замкнуто и ограничено.

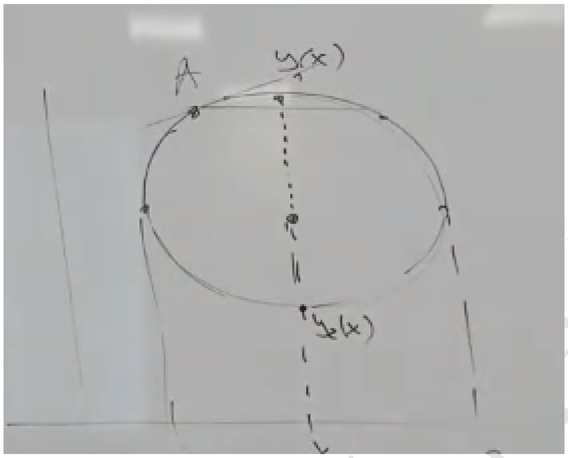
$\text{diam } G = \sup\{\rho(x,y) : \forall x,y \in G\} \le 1$

$\sigma(G) \le \frac{\pi}{4}$

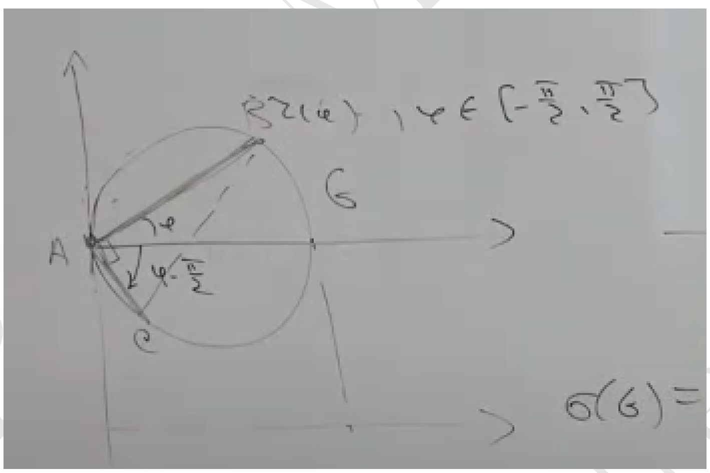
Доказательство:

▷

Рассмотрим наше множество в 1 четверти декартовой системы координат:



Рассмотрим его над- и под- графики. Заметим, что эти функции почти дифференцируемые (?). Возьмём какую-нибудь производную (касательную) и примем её за Oy:



Теперь можем ввести функцию для площади сектора $r(\varphi) \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi$.

Возьмём какой-нибудь уголок φ, и отложим от него 90 градусов вниз, тем самым получим с Ox новый угол $\varphi - \frac{\pi}{2}$. Теперь делаем финт ушами, делим наш интеграл на промежуток до 0 и после, в части от $-\frac{\pi}{2}$ до 0 заменяем переменную на $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$ и потом грациозно меняем α на φ, так как нам по барабану, как называется переменная. Суммируем интегралы:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2})d\varphi$$

А теперь самое интересное. Посмотрим на отрезки AB и AC, заметим, что это прямоугольный треугольник, и, соответственно, сумма их квадратов равна BC. А $BC \leq \text{DIAG}(G) \leq 1$, следовательно:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$\triangleleft$

1.4.11 Обобщенная теорема о плотности[1]

Формулировка

$\exists \phi : \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$\exists f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывна

$\exists \delta$ — произвольный отрезок $\in \langle a, b\rangle$

$\exists m_\delta \le \inf_{x\in\delta} f(x)$, $M_\delta \ge \sup_{x\in\delta} f(x)$

1. $m_\delta \cdot l_\delta \le \phi(\delta) \le M_\delta \cdot l_\delta$
2. $\forall x \in \delta \quad m_\delta \le f(x) \le m_\delta$
3. $\forall \delta \to [x, x] \quad M_\delta - m_\delta \to 0$

Вот это ВСЁ должно выполняться. И тогда мы утверждаем, что верно: $\phi([p, q]) = \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$. Это утверждение — синоним того, что f — плотность ϕ

Доказательство

$\triangleright$

Для начала введём функцию, для которой потом будем пытаться доказать то, что она первообразная.

$\exists F(x) = 0$, если $x = p$ (отрезок $[p, p]$). $F(x) = \phi([p, x])$, если $x \in (p, q]$.

$\exists \delta = [x, y] \in [p, q]$

Идём просто по порядку нумерованных утверждений:

1. Разделим всё на l_δ. $m_\delta \le \frac{\phi(\delta)}{l_\delta} \le M_\delta$. Заметим, что $\phi(\delta) = F(y) - F(x)$, т.к. ϕ аддитивна.
2. Заметили, что наши достижения из прошлого пункта и в этом зажаты в одном промежутке ($[m_\delta, M_\delta]$). Давайте этим воспользуемся и вычтем из первого второе: $|\frac{F(y)-F(x)}{l_\delta} - f(x)| \le M_\delta - m_\delta$.
3. Возьмём достижение из прошлого пункта. Заметим, что $l_\delta = y - x$. А теперь давайте устремим l_δ в 0. $\lim\limits_{y\to x} |\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)| \le M_\delta - m_\delta$. Вспоминаем что мы писали в условии про 3 пункт, выясняется, что $M_\delta - m_\delta \to 0$, то есть всё это выражение стремится к 0. О БОЖЕ!!! Мы же получили ровно определение производной!

$\triangleleft$

1.4.12 Объём фигур вращения[1]

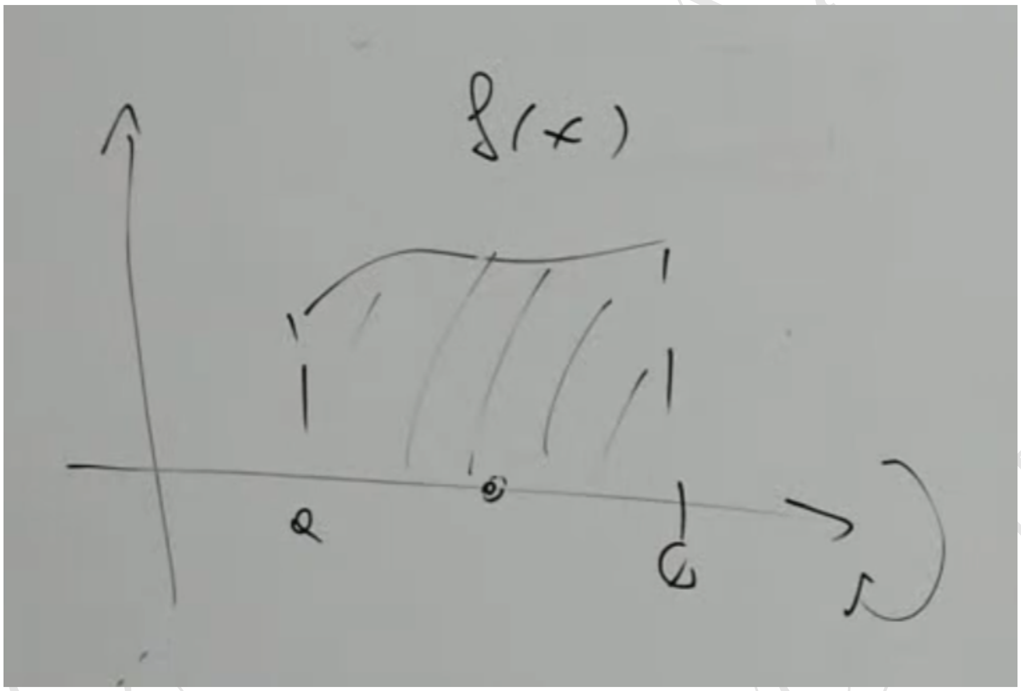
$\exists \delta = [p, q] \in \langle a, b\rangle$

$f : \langle a, b\rangle$ непрерывна (или кусочно-непрерывна, но там мы рассматриваем эти куски отдельно, ничего интересного)

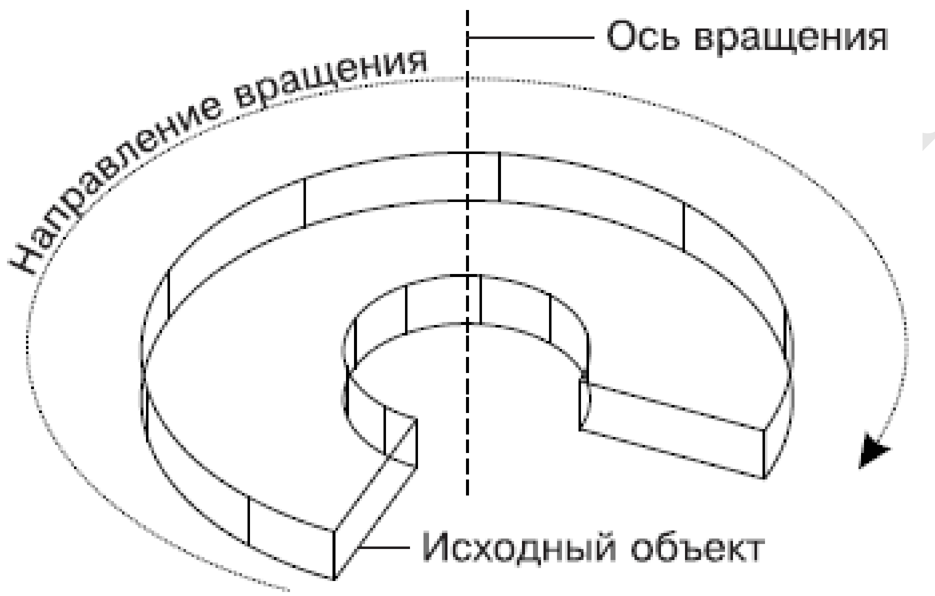
$\exists \phi_x$ — объём фигуры вращения f относительно оси x (получится криволинейная сосиска ☺)

$\exists \phi_y$ — объём фигуры вращения f относительно оси y (получится бублик). Обращаем внимание, что радиус бублика в каждой точке вращения разный (чем дальше от оси, тем больше)

Утверждаем, что $\phi_x(\delta) = \pi \cdot \int_p^q f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Вместо доказательств давайте разберёмся что откуда берётся: π мы просто вынесли как константу, $\pi f^2(x)$ — это площадь среза нашей колбасы в точке x. Ну и интегрируем её просто на нужном отрезке.



Далее, $\phi_y(\delta) = 2\pi \cdot \int_p^q x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$. Тут не всё так очевидно на первый взгляд. На самом деле, всё элементарно: $2\pi x$ — это просто длина окружности в точке вращения. $f(x)$ же просто высота среза в этом месте.



1.4.13 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме[1]

Формулировка

$f \in C^{n+1}(\langle a, b\rangle)$

$x, x_0 \in \langle a, b\rangle$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Доказательство

$\triangleright$

А получается это очень просто, по индукции. База $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Важно: чтобы такие трюки работали, производная должна существовать (по условию $f \in C^{n+1}$

Интегрируем по частям: $\int 1\,\mathrm{d}t = t + C = t - x = -(x - t)$

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = -(x - t)\cdot f'(t) + \int_{x_0}^{x}(x - t)\cdot f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Ещё раз: $\int -(x - t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - (x - t)^2$. Заметили, что степень будет каждую итерацию инкрементиться, а так же каждую итерацию будет появляться множитель–дробь с знаменателем i. Так, когда мы дойдём до n, эта часть будет равна $\frac{1}{n!} - (x - t)^n$ $\triangleleft$

1.4.14 Вычисление длины гладкого пути[1]

Формулировка
$\exists \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, γ — гладкий путь.

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t$$

Note: работает только когда γ инъективен.

Доказательство
$\triangleright$

$\exists [p, q] \in \mathrm{Segm}[a, b]$

Введём функцию $\phi([p, q]) = l(\gamma|_{[p,q]})$. Заметим, что это аддитивная функция промежутка (по 2 аксиоме гладкого пути). Вспоминаем "Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности". То есть мы уже можем сказать, что на всём $[a, b]$ длина считается через $\int\limits_a^b ||\gamma'(t)|| \,\mathrm{d}t$.

Однако, нам надо доказать, что $||\gamma'(t)||$ — плотность ϕ.

Для этого нужно проверить 3 утверждения:

$M_i([p, q]) := \max_{t \in [p,q]} |\gamma_i'(t)|$

1. $m_{[p,q]} \cdot l_{[p,q]} \le \phi([p, q]) \le M_{[p,q]} \cdot l_{[p,q]}$
   Введём $\overline{\gamma} : [p, q] \to \mathbb{R}^m \quad \overline{\gamma}(t) = M([p, q]) \cdot t$

   Введём носители путей γ и $\overline{\gamma}$: $C_\gamma C_{\overline{\gamma}}$

   Заметим, что отображение $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ — растяжение, т.к. $\forall i, j \in [p, q] \quad \rho(\gamma(i), \gamma(j)) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (\gamma_k(i) - \gamma_k(j))^2} \underset{\text{Т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^m (\gamma_k'(c_k) \cdot (j - i))^2} \le |j - i| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2([p, q])} = |j - i| \cdot M_{[p,q]} = \rho(\overline{\gamma}(i), \overline{\gamma}(j))$

   А это ровно и обозначает то, что мы записали в условии: $\phi([p, q]) \le |j - i| \cdot M_{[p,q]}$.

   Для минимумов симметрично
2. $\forall x \in [p, q] \quad m_{[p,q]} \le ||\gamma'(x)|| \le M_{[p,q]}$

   $\gamma'(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i'(x))^2} \le M_{[p,q]}$, т.к. никакое $\gamma_i'(x)$ не может быть больше максимума на промежутке. Для минимума симметрично.
3. $\forall x \in [p, q] \quad M_{[p,q]} - m_{[p,q]} \underset{q-p \to 0}{\to} 0$

   Поскольку все $\gamma_i'(x)$ непрерывны, то предел максимума на отрезке, стремящемся к нему будет равен самому $\gamma_i'(x)$. Таким образом, разность минимума и максимума $\to 0$ (из непрерывности γ' и предыдущего утверждения)

$\triangleleft$

1.4.15 Свойства верхнего и нижнего пределов[1]

Формулировка
$\exists x_n$

Если ничего не написано про нижний предел, значит там всё работает аналогично.

1. $\varliminf x_n \le \varlimsup x_n$
2. $\exists k_n \le x_n \quad \varlimsup k_n \le \varlimsup x_n$
3. $\exists \lambda \ge 0 \quad \varlimsup(\lambda x_n) = \lambda \varlimsup x_n$
4. $\varlimsup(-x_n) = -\varliminf x_n$
5. $\exists k_n \quad \varlimsup(x_n + k_n) \le \varlimsup x_n + \varlimsup k_n$
   $\varliminf(x_n + k_n) \ge \varliminf x_n + \varliminf k_n$
6. $\exists t_n \to l \in \mathbb{R} \quad \varlimsup(x_n + t_n) = \varlimsup(x_n) + l$
7. $\exists t_n \to l > 0 \in \mathbb{R} \quad \varlimsup(t_n \cdot x_n) = l \cdot \varlimsup x_n$

Доказательство
Тут я буду ссылаться на простейшие свойства из определения Верхний и нижний пределы[1].

1. Очевидно из свойства 2.
2. $\varlimsup x_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)$
   $\varlimsup k_n = \sup(k_n, k_{n+1}, \ldots)$. Следовательно, поскольку все элементы меньше, то и точная граница будет меньше.
3. Очевидно по той же логике. Если мы берём $\sup(\lambda x_n, \lambda x_{n+1}, \ldots) = \lambda \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)$
4. Простая логика неравенств: $x < a \Rightarrow -x > -a$. $\sup(-x_n, -x_{n+1}, \ldots) = -\inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)$
5. Очевидно. Равенство достигается, когда последовательности положительны. В противном случае, одна может вычесть другую и вместо увеличения верхнего предела, он уменьшится.
6. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall k > N_0 \quad l - \varepsilon \le t_k \le l + \varepsilon$
   $l - \varepsilon + x_k \le t_k + x_k \le l + \varepsilon + x_k$
   $\sup x_k = y_N$. Возьмём $N > N_0$. Перейдём к sup: $l - \varepsilon + y_N \le \sup(t_N + x_N, t_{N+1} + x_{N+1}, \ldots) \le l + \varepsilon + y_N$
   $y_N \to \varlimsup x_n, \sup(t_N + x_N, t_{N+1} + x_{N+1}, \ldots) \to \varlimsup(x_n + t_n)$
   $\varlimsup(x_n) + l - \varepsilon \le \varlimsup(x_n + t_n) \le \varlimsup(x_n) + l + \varepsilon$. А поскольку $\varepsilon \to 0$, мы его опускаем и получаем выражение из условия

   То есть что мы тут сделали: расписали предел t_k, прибавили к нему x_k, перешли к супремуму, устремили N в бесконечность и сделали предельный переход, после которого всё превратилось в верхние пределы и сошлось.
7. КПК не хочет доказывать ☺

1.4.16 Техническое описание верхнего предела[1]

Формулировка
$\exists x_n$

1. $\varlimsup x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ не ограничено сверху
2. $\varlimsup x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$
3. $\varlimsup x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
   (a) $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists$ беск. число $n : x_n > l - \varepsilon$

Доказательство

1. Очевидно
2. $\Rightarrow$
   Так же очевидно: $\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) = -\infty$, а по свойству 2, $x_n \leq y_n$.
   $\Leftarrow$
   Если x_n стремится к $-\infty$, то $\forall E < 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n < E \Rightarrow sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) < E$
3. $\Rightarrow$

   (a) По свойству 2, $x_n \leq y_n$, а y_n монотонно убывает и $y_n \to l$

   (b) Очевидно из того факта, что последовательность y_n имеет бесконечное количество элементов, при том, что $y_n \to l$. То есть мы можем брать бесконечное число элементов и получим выполнение условия.

   $\Leftarrow$
   $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \exists$ беск. число $n : x_n > l - \varepsilon$. Возьмём эти неравенства и перейдём к супремуму (который мы обозначаем как y_n:
   $l - \varepsilon \leq y_n \leq l + \varepsilon$. Верхняя оценка верна по умолчанию, а нижняя потому, что y_n — супремум, то есть ВЕРХНЯЯ граница.

1.4.17 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов[1]

Формулировка
$\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \exists \lim x_n$

Доказательство
$\Rightarrow$

$\underline{\lim} x_n$ это предел последовательности z_m, которая состоит из $\inf_{n \in [m, +\infty) \cap \mathbb{N}} x_n$. Очевидно, $z_n \leq x_n$. Аналогичное верно для $\overline{\lim} x_n$ (пусть последовательность тут будет k_n).

Соответственно, $z_n \leq x_n \leq k_n$. А поскольку $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$, то по теореме о двух городовых, x_n имеет тот же предел.

$\Leftarrow$

$\overline{\lim} x_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N x_n < l + \varepsilon$. Заметим, что если мы сюда подставим определение предела последовательности по Коши, то это определение так же выполняется. Разумеется, в оба определения в качестве предела мы подставляем точку l и видим, что ничего не нарушается (ε-окрестность точки l, в которой лежат все точки, начиная с N, гарантирует выполнение $x_n < l + \varepsilon$. Для нижнего предела всё то же самое, а поскольку точка у нас фиксирована, мы видим равенство верхнего и нижнего пределов.

1.4.18 Теорема о характеризации верхнего предела как частичного[1]

Формулировка
$\overline{\lim} x_n = l \Rightarrow \exists \lim x_{n_k} = l$

Доказательство
Очевидно, чтобы такое доказать, надо предъявить подходящую подпоследовательность. По тех. определению верхнего предела, точка является предельной в последовательности, то есть мы можем сколько угодно приближать ε, в ней найдётся нужная точка.

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k : l - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq l + \frac{1}{k}$$

То есть грубо говоря, мы выдумали последовательность, которая стремится к l. Супремум является предельной точкой, а значит, мы можем приближать нашу последовательность в любом из супремумов (у нас же предел — последовательность супремумов). Ну другими словами, это значит, что мы можем при всём этом сделать так, чтобы последовательность n_k была возрастающей. И таким образом мы вытащили самую настоящую подпоследовательность, а значит нашли частичный предел, равный верхнему.

Ещё не забываем, что верхний предел может быть бесконечностью, но там всё очевидно. Выбираем подпоследовательность, стремящуюся в бесконечность. У нас последовательность не ограничена, а значит такой есть.

1.4.19 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена[2]

Формулировка (Теорема о формуле трапеций):

$f \in C^2[a, b], \tau$ — дробление, $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$

Тогда
$$\left| \int_a^b f - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

Доказательство (Теорема о формуле трапеций):

Введем $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$

Рассмотрим интеграл на каждом отрезке дробления:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)d(x - \xi_k) =$$

Проинтегрируем по частям: $u = f(x) \Rightarrow u' = f'(x) \qquad v' = 1 \Rightarrow v = x - \xi_k$

$$= f(x)(x - \xi_k)|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x - \xi_k)dx = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x - \xi_k)dx$$

Последнее равенство верно в силу того, что

$$f(x_k)(x_k - \xi_k) - f(x_{k-1})(x_{k-1} - \xi_k) = f(x_k)x_k - f(x_k)\xi_k + f(x_{k-1})x_{k-1} - f(x_{k-1})\xi_k$$

Введем $\psi(x) = (x_k - x)(x - x_{k-1}) \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$

$\psi'(x) = (x_k \cdot x - x_k \cdot x_{k-1} - x^2 + x \cdot x_{k-1})' = -2x + x_k + x_{k-1} \Rightarrow -\frac{1}{2}\psi(x) = x - \xi_k$

Получившийся до этого интеграл снова проинтегрируем по частям $u = f'(x) \Rightarrow u' = f''(x) \quad v' = \psi'(x) \Rightarrow v = \psi(x)$

$$\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\psi'(x)dx = \frac{1}{2}(f'(x) \cdot \psi(x)|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\psi(x)dx)$$

Итого:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)dx = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\psi(x)dx$$

Теперь поработаем с началом:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1})\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (f(x_k) + f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\psi(x)dx - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\psi(x)dx\right| = \left|\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\psi(x)dx'\right|$$

Теперь оценим $\psi(x)$:

$$\psi(\xi_k) = (x_k - \xi_k)(\xi(k) - x_{k-1}) = \left(x_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2} - x_{k-1}\right) =$$
$$= \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right) = \frac{1}{4}(x_k - x_{k-1})^2 = \psi(x) \leq \frac{1}{4}\delta^2$$

здесь δ - максимум по отрезкам.

И в итоге получаем:

$$\left|\frac{1}{8}\int_a^b f''(x)dx\right| = \frac{1}{8}\int_a^b |f''(x)|dx$$

Формулировка (Формула Эйлера–Маклорена):

$m, n \in \mathbb{Z}, f \in C^2[m, n]$

Тогда

$$\int_m^n f = \sum_{i=m}^n f(i) - \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

Причём первое и последнее слагаемое в сумме входят с множителем $\frac{1}{2}$

Доказательство (Формула Эйлера–Маклорена):

Из доказательства предыдущей теоремы вспоминаем, что:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) - \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\psi(x)dx$$

и понимаем, что $\{x\}(1 - \{x\})$ - просто интересная запись для $\psi(x)$.

1.4.20 Асимптотика степенных сумм[2]

Формулировка:

Наша функция $p > 1, f(x) = x^p$. Возьмём сумму первых n членов:

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int_1^n f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x^p + \frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p - \frac{1}{2}\int_m^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1 - \{x\}) = \ldots = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + O(\max 1, n^{p-1})$$

Доказательство:

Формула Эйлера-Маклорена:

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \frac{p(p-1)}{2}\int_1^n x^{p-1}\{x\}(1 - \{x\})dx$$

Теперь один из интегралов оценим, а второй просто посчитаем.

$$0 \le \int_1^n x^{p-2}\{x\}\{1 - x\}dx \le \frac{1}{4}\left(\frac{n^{p-1} - 1}{p-1}\right) = O\left(\max 1, n^{p-1}\right)$$

Оценка справедлива, т.к. $\max\{x\}\{1 - x\}$ достигается при $x = \frac{1}{2}$

$$\int_1^n x^p dx = \frac{n^{p+1} - 1}{p+1}$$

Итого:

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{1}{2}(1 + n^p) + \frac{n^{p+1} - 1}{p+1} + O(\max 1, n^{p-1})$$

Все константы запихиваем под O

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^p}{2} + \frac{n^{p+1}}{p+1} + O(\max 1, n^{p-1})$$

q.e.d.

Fun fact:

При $p < -1 \quad 1^p + 2^p + \ldots + n^p = O(1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^p$ - сходится.

1.4.21 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда[3]

Формулировка:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ldots = \ln n + \gamma + o(1), \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

Доказательство.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln n + \ln 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3}\{x\}\{1-x\}\,\mathrm{d}x$$

Заметим, что правый интеграл возрастает как $f(n)$ и ограничен

$$\int_1^n \frac{1}{x^3}\{x\}\{1-x\}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\int_1^n \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}|_1^n\right) \le \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \le \frac{1}{8}$$

Первый переход легитимен, т.к. это возрастающая функция. Последний переход справедлив, т.к. $\frac{1}{n^2}$ - возрастающая. Таким образом,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ldots = \ln n + \gamma + o(1) \tag{1}$$

где $\gamma \in [\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{8}]$ - постоянная Эйлера, оборачивает интеграл и $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. □

1.4.22 Формула Валлиса[1]

Формулировка

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, n\text{– чётно}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1!!}{n!!}, n\text{– нечётно}$$

Доказательство

▷

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = 1$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}x \underset{\text{по частям}}{=} -\cos x \sin^{n-1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$-\cos x \sin^{n-1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$\triangleleft$

1.4.23 Простейшие свойства несобственного интеграла[2]

Формулировка:

1. **Критерий Больцано-Коши**

   $\lim_{A\to b-0}\int_a^A$ — конечный $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (a,b)\ \forall A, B \in (\delta, b) \quad \left|\int_A^B\right| < \varepsilon$

2. **Аддитивность по промежутку**

   f — допустима, $[a,b), c \in (a,b)$. Тогда $\int_a^{\to b}$ и $\int_c^{\to b}$ — сходятся и расходятся одновременно. А если сходятся, то $\int_a^{\to b} = \int_a^c + \int_c^{\to b}$

3. **Линейность**

   f, g — допустимы, $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ — сходятся, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f, f \pm g$ — допустимы, $\int_a^{\to b} \lambda f$ и $\int_a^{\to b} f \pm g$ — сходятся.

   (a) $\int_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int_a^{\to b} f$

   (b) $\int_a^{\to b} f \pm g = \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$

4. **Интегрирование неравенств**

   f, g — допустимы, $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ — существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \le g$ на $[a,b)$. Тогда $\int_a^{\to b} f \le \int_a^{\to b} g$

5. **Интегрирование произведения**

   f, g — дифф. на$[a,b)$, f', g' — допустимы. $\Leftrightarrow f, g \in C[a,b]$.

   $\int_a^{\to b} fg' = fg|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g$ (если существуют хотя бы 2 предела, то существует и 3й, и равенство выполняется)

6. **Интегрирование композиции**

   $\phi : [\alpha,\beta) \to \langle A, B\rangle, \phi \in C[\alpha,\beta]\ f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, \exists\phi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

   Тогда:

   $\int_\alpha^{\to\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\to\phi(\beta-0)} f(x)dx$

   Примечание: f — кусочно непрерывна на $[a,b]$. Если рассмотреть на $[a,b)$, то $\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$

Доказательство:

1. Почти в тупую выводится из признака Больцано-Коши:

   $$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 : |x_1 - b| < \delta \quad |x_2 - b| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to b} f(x) \in \mathbb{R}$$

   (это он же, но для $\lim_{A\to b-0} \Phi(A)$, где $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$)
2. $\forall A \in (a, b)$

   $$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx$$

   Дальше делаем предельный переход и радуемся жизни.

   Следствие из критерия Больцано-Коши

   Если $\exists A_n \to b - 0 \quad B_n \to b - 0; \quad A_n < B_n; \quad \int_{A_n}^{B_n} f(x)dx \nrightarrow 0$

   Тогда $\int_a^{\to b} f(x)dx$ - расходится.

   Доказывается пристальным взглядом на верхний и нижний предел.
3.
4.
5.
6. Все эти пункты доказываются по аналогии с п.2: Мы сводим признаки к признакам обычных определенных интегралов и делаем предельный переход.

1.4.24 Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$[2]

Формулировка:

$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ - когда-то сходится, а когда-то нет.

Доказательство:

Рассмотрим возможные значения α:

1. $\alpha > 1$

   Пусть $\alpha = 1 + 2a, \quad a \in (0, +\infty)$. Тогда:

   $$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+2a} \cdot (\ln x)^\beta} = \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a \cdot (\ln x)^\beta}$$

   Заметим, что второй множитель $\to 0$ при $x \to \infty$. Почему? При $\beta \geq 0$ - тривиально, знаменатель будет улетать в бесконечность.

   Для $\beta < 0$ применим хитрое правило Лопиталя: $\frac{1}{x^a \cdot (\ln x)^{-\beta}} = \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ - здесь уже $\beta > 0$, а числитель и знаменатель $\to +\infty$. Лопиталим:

   $$\frac{\beta(\ln x)^{\beta-1}\frac{1}{x}}{a \cdot x^{a-1}} = \frac{\beta \cdot (\ln x)^{\beta-1}}{a \cdot x^a}$$

Видим, что просто уменьшается степерь у $\ln x \Rightarrow$ применив Лопиталя β раз получим что-то вроде $\frac{\beta!}{a^\beta x^a} \to 0$ (важно, что "вроде т.к. степени могут быть нецелыми) $\Rightarrow$ от β ничего не зависит при $\alpha > 1 \Rightarrow \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a \cdot (\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^{1+a}}$ - сходится, начиная с некоторого x.

2. $\alpha < 1$

   Пусть $\alpha = 1 - 2b, \quad b \in (0, +\infty)$. Тогда:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-b}} \cdot \frac{1}{x^{-b} \cdot (\ln x^\beta)} = \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-b}} \cdot \left(\frac{x^b}{(\ln x)^\beta}\right) \geq \frac{1}{x^{1-b}}$$

   - начиная с некоторого места расходится.

3. $\alpha = 1$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^\beta} = \begin{bmatrix} y = \ln x \\ x = e^y \end{bmatrix} = \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy \cdot e^y}{e^y \cdot y^\beta} = \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

   где-то эту штуку мы уже видели. При $\beta \leq 1$ - расходится, а при $\beta > 1$ - сходится.

Итого:

$\alpha > 1$,

$\forall \beta$ - сходится.

$\alpha < 1$,

$\forall \beta$ - расходится.

$\alpha = 1$,

$\beta \leq 1$ - расходится,

$\beta > 1$ - сходится.

2 Период Мезозойский

2.1 Важные определения

2.1.1 Гамма функция Эйлера[1]

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

2.1.2 Абсолютно сходящийся интеграл, ряд[1]

2.1.2.1 Интеграл

$\exists f : [a, b) \to \mathbb{R}$ допустима

Несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся, когда выполняются 2 условия:

1. $\int_a^{\to b} f(x) \, \mathrm{d}x$ сходится

2. $\int_a^{\to b} |f(x)| \, \mathrm{d}x$ сходится

2.1.2.2 Ряд

$\exists a_n$

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится

2.1.3 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость[1]

2.1.3.1 Числовой ряд

Выражение

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad | \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

называется формальным рядом. Введём понятие частичных сумм:

$$S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$$

Тогда ряд можно представить как предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = S$$

2.1.3.2 Сумма ряда

S называют суммой ряда.

2.1.3.3 Сходимость

Если $S \in \mathbb{R}$, то такой ряд называют сходящимся

2.1.3.4 Расходимость

Если $S = \pm\infty$ или $\nexists \lim S_N$, то такой ряд называют расходящимся

2.2 Определения

2.2.1 n-й остаток ряда[1]

$R_N = \sum_{k=N}^{+\infty} a_k$ — N-ый остаток ряда.

2.2.2 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда[1]

Критерий Больцано–Коши

2.2.3 Бесконечное произведение[3]

Выражение вида $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ будем называть бесконечным произведением.

Обозначим $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$ - что-то типа частичного произведения.

Если:

1. $\exists$ конечный $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n \in (0, +\infty)$, то произведение сходится
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$, то произведение расходится
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$, то произведение расходится к нулю
4. $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} P_n$, то произведение расходится

Обозначим $\prod_n = \prod\limits_{k=n}^{+\infty}$ и отметим пару свойств бесконечных произведений:

1. $\prod\limits_{k=n}^{+\infty} = P_{n-1} \cdot \prod_n$
2. $\prod\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \prod_n \to 1$ при $n \to +\infty$
3. $\prod\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow a_k \to 1$
4. $\prod\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ сходится только если $\exists K \in \mathbb{N}: \quad \forall k > K \quad a_k > 0$
5. Пусть $a_k > 0$. Тогда $\prod\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow$ ряд $\sum \ln a_k$ сходится. Причем если $\sum \ln a_k = S$, то $\prod\limits_{k=n}^{+\infty} a_k = e^S$

Доказываются эти свойства очевидно, поэтому просто накину идеи доказательств.

1. Предельный переход при $n \to +\infty$

2. Выражаем нужный член из первого пункта
3. $a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}} \to 1$ при $k \to +\infty$
4. Теорема о стабилизации знака
5. Просто прологарифмируем P_n

2.3 Важные теоремы

2.3.1 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства.[1]

Формулировка + доказательство

1. Область определения

   Поищем где интеграл сходится:

   Рассмотрим промежуток интегрирования от 0 до 1. Очевидно, при $t \to 0 \quad t^{x-1}e^{-t} \equiv t^{x-1}$. Ну а так как $x-1 > -1$, то и интеграл сходится. Обратите внимание, это именно то условие, почему при $x \leq 0$ всё ломается.

   Теперь осталось посмотреть на промежуток от 1 до $+\infty$: Надо просто заметить что экспонента стремится к нулю быстрее, чем возрастает t^{x-1}. Соответственно, мы можем отломить от неё кусок, заметив, что вся наша формула неотрицательна (т.к. все члены положительны):

   $$0 \leq t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}}$$

   Так как экспонента стремится к нулю быстрее при росте t, а t^{x-1} ограничена, то $t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}$ тоже стремится к нулю, а значит:

   $$t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}} \leq e^{-\frac{t}{2}}$$

   А это уже стремится к нулю, то есть интеграл сходится.

2. Выпуклость

   Зафиксируем t и рассмотрим подынтегральную функцию. Тогда формула превратится в $f(x) = t^{x-1}e^{-t}$. Теперь мы смотрим на t как на константу и видим произведение показательной функции с какой-то константой. Показательная функция выпукла $\implies f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$. Теперь если всё это безобразие проинтегрировать и подшаманить, то получится

   $$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - 1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \alpha_1 \int_0^{+\infty} t^{x_1-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t + \alpha_2 \int_0^{+\infty} t^{x_2-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   А это определение выпуклости нашей рассматриваемой функции. BTW, из выпуклости следует непрерывность этой функции на всей области определения.

3. Значение Проинтегрируем нашу гамма-функцию по частям:

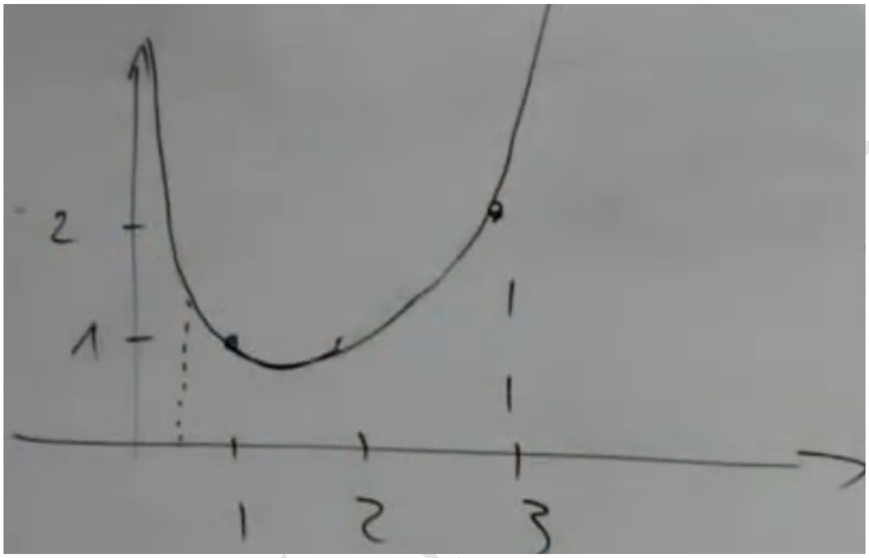
   $$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}\big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x \cdot \Gamma(x)$$

   Теперь заметим, что $\Gamma(1) = 1$, из чего по индукции получаем $\Gamma(n+1) = n!$

4. График

   Рассмотрим $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$

   При $x \to 0 \quad \Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \to \frac{1}{x}$



5. Связь с π

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{t:=x^2}{=} 2\int_0^{+\infty} x \cdot x^{-1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{\text{Интеграл Эйлера–Пуассона}^1}{=} \sqrt{\pi}$$

2.3.2 Неравенство Йенсена для сумм[1]

Формулировка

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая.

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n : \sum_i \alpha_i = 1$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

Доказательство

Пользуясь выпуклостью, мы можем провести опорную прямую такую, что $f(x)$ будет выше этой прямой. Нас интересует прямая в точке $x^* := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ по условию. Но сначала надо убедиться, что точка лежит в $\langle a, b\rangle$:

$$a \le \min_i(x_i) \le \sum_i \alpha_i \cdot x_i \le \sum_i \alpha_i \cdot \max_j(x_j) = \max_j(x_j) \sum_i \alpha_i = \max_j(x_j) \le b$$

Теперь проводим опорную прямую:

$$f(x^*) = kx^* + b = \sum_i (k\alpha_i \cdot x_i) + b = \sum_i (k\alpha_i \cdot x_i + b \cdot \alpha_i) = \sum_i (\alpha_i (k \cdot x_i + b)) \le \sum_i \alpha_i f(x_i)$$

Note: $b = \sum_i (\alpha_i \cdot b)$, так как сумма $\alpha_i = 1$

2.3.3 Неравенство Гельдера для интегралов[3]

Формулировка

Пусть $f, g \in C[a, b]$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{1/q}$$

Доказательство. Распишем интегральные суммы: $x_k := a + k\frac{b-a}{n}; \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$. Пусть $a_i = f(x_k)(\Delta x_k)^{1/p}, b_i = g(x_k)(\Delta x_k)^{1/q}$, тогда, по неравенству Гёльдера для сумм:

$$\left| \sum f(x_k)g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \right| \leq \left(\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k \right)^{1/p} \left(\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k \right)^{1/q}$$

$$\left| \sum f(x_k)g(x_k) \right| \leq \left(\sum |f(x_k)|^p \right)^{1/p} \left(\sum |g(x_k)|^q \right)^{1/q}$$

Осталось лишь сделать предельный переход при $n \to \infty$

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{1/q}$$

$\square$

2.3.4 Признак сравнения сходимости положительных рядов[1]

2.3.4.1 Лемма о сходимости положительных рядов

Формулировка
$a_n \geq 0$

$\sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow S_n$ ограничено.

Доказательство
Тривиально следует из того, что ввиду того, что $a_n \geq 0$, последовательность частичных сумм S_n монотонно возрастает. То есть оно ограничено своим пределом частичных сумм и монотонно к нему стремится снизу.

2.3.4.2 Теорема

Формулировка
$\exists a_n \geq 0, b_n \geq 0, \sum a_n, \sum b_n$

1. $a_n \leq b_n \Rightarrow \sum b_n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится, $\sum a_n$ расходится $\Rightarrow \sum b_n$ расходится.

   Замечание: аналогичное утверждение верно для $\forall k a_n \leq k \cdot b_n$, так как сходимость b_n и $k \cdot b_n$ эквивалентна и можно безопасно их тут подменить.

2. $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} = l$. Тогда если $l \in \mathbb{R}_+$, то сходимость $\sum a_n$ эквивалентна сходимости $\sum b_n$.
   Если $l = \infty$, то $\sum a_n$ сходится $\Rightarrow \sum b_n$ сходится, $\sum b_n$ расходится $\Rightarrow \sum a_n$ расходится.
   Если $l = 0$, то $\sum b_n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится, $\sum a_n$ расходится $\Rightarrow \sum b_n$ расходится.

Доказательство

1. Воспользуемся приведённой леммой и просто сведём наши сходящиеся ряды к частичным суммам и обратно: $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$. Положим $\sum b_n$ сходится, тогда по лемме $S_n^{(b)}$ ограничено. Тогда $S_n^{(a)}$ тоже ограничено, а значит и $\sum a_n$ сходится. Аналогично работает наоборот.

2. Давайте всё сведём к предыдущему пункту. Если $l \in \mathbb{R}_+$, то мы всегда можем домножить a_n на какое-то вещественное число, чтобы оно стало меньше b_n (т.к. начиная с какого-то n частное всей последовательности будет лежать в какой-то окрестности l). Также наоборот, мы всегда можем сделать $k \cdot a_n > b_n$, то есть мы получили первое утверждение в обоих случаях симметрично. То есть действительно сходимость у этих рядов эквивалентна.

   Примечание: то, что мы рассматриваем сходимость рядов начиная с какого-то n, абсолютно законно, так как мы ранее доказывали эквивалентность сходимости n–го остатка и самого ряда.

   При $l = \infty$ всё тривиально, так как в этом случае начиная с какого-то места, очевидно, $a_n > b_n$, что уже свелось к первому признаку. Для $l = 0$ аналогично.

2.3.4.3 Важные эталонные ряды, с которыми надо всё сравнивать

1. $\sum \frac{1}{n^p}$ расходится при $p \leq 1$, сходится при $p > 1$.
2. $\sum q^n$ сходится при $0 < q < 1$, расходится при $q \geq 1$.

2.3.5 Признак Коши сходимости положительных рядов[1]

Формулировка

$$\sum a_n \geq 0; \exists k_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Тогда:

1. Начиная с какого-то места $\exists q : k_n < q < 1$ (q мы ввели чтобы потом сравнивать с ним, так как признак сравнения у нас строго < 1 и с 1 сравнивать неудобно) $\Rightarrow \sum a_n$ сходится

2. $\exists$ бесконечное число элементов $k_n \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится.

Доказательство

1. Выразим из "волшебного"k_n нормальный a_n. $k_n = \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow a_n = k_n^n < q^n$. У нас $q < 1$, а значит можно сравнить его с ближайшим рациональным < 1 и у нас получается эталонный $\frac{1}{\alpha^n}$ где n у нас, разумеется > 1, а значит всё сходится.

2. Прошлая стратегия не работает т.к. $q \geq 1$, а значит мы не подберём рациональную дробь для эталонного. Но зато у нас тут не выполнится необходимый признак сходимости, так как k_n не стремится к 0, сколько не возводи его в большую степень, он только увеличится.

2.4 Теоремы

2.4.1 Интеграл Эйлера–Пуассона[1]

Формулировка

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Доказательство

Простое неравенство, которое непросто запомнить:

$$1 - x^2 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$$

Следует из выпуклости ($e^t \ge 1 + t$) и работает для $x \in \mathbb{R}$

Как обычно, проинтегрируем (неравенство по середине выражения обуславливается положительностью функции) и возведём всё в степень n:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

Теперь аккуратно считаем части неравенства:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \underset{x:=\cos t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \underset{\text{Формула Валлиса}^1}{=} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \underset{t:=\sqrt{n}\cdot x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \underset{x:=\operatorname{tg} t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t\,\mathrm{d}t \underset{\text{Формула Валлиса}^1}{=} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$

Домножаем наши достижения на $\sqrt{n}$:

$$\frac{(2n)!!\sqrt{n}}{(2n+1)!!} \le \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \le \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}\sqrt{n}$$

Предельный переход:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{\text{Формула Валлиса}^1}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \equiv \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\frac{(2n)!!\sqrt{n}}{(2n+1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \equiv \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} \underset{\text{Формула Валлиса}^1}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}\sqrt{n} = \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

По Т. О двух городовых

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2.4.2 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом[3]

Формулировка
При $0 \le t \le n$ справедливо

$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \le \frac{1}{n}\, t^2\, e^{-t}$$

Доказательство

Из доказательства предыдущей теоремы берем неравенство:

$$1 + y \le e^y \le (1-y)^{-1}, \qquad y \in [0,1)$$

Подставим $y = \frac{t}{n}$ и возведем в степень $-n$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \ge e^{-t} \ge \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

Из правой части неравенства следует

$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left(1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)$$

Из левой части неравенства следует, что $e^t \ge \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$. Применим ее

$$0 \le e^{-t}\left(1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \le e^{-t}\left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)$$

Из неравенства Бернулли следует

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \ge 1 - \frac{t^2}{n}, \text{ то есть } 1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \le \frac{1}{n}\, t^2$$

Применяем результат и получаем требуемое неравенство

2.4.3 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах[1]

Формулировка

2.4.3.1 Интегралы
$\exists f : [a, b) \to \mathbb{R}$ допустима

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ абсолютно сходится
2. $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ сходится
3. $\int_a^b f_+$ и $\int_a^b f_-$ сходятся

2.4.3.2 Ряды

$\rceil a_n$ ряд.

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ абсолютно сходится
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ сходятся

Доказательство

$\underline{1 \to 2}$

По определению абсолютной сходимости

$\underline{2 \to 3}$

Заметим, что f_+ и f_- либо положительны, либо константный 0. Другими словами, одна из срезок будет равна $|f(x)|$, а другая в это время будет равна 0. Соответственно, существует конечный предел $f(x)$ при $x \to b - 0$. Ну а значит, что и срезка будет его иметь и всё сойдётся. В 0 проблем не будет по Т. О стабилизации знака.

$\underline{3 \to 1}$

Очевидно, т.к. можно выразить $f = f_+ - f_-$

2.4.4 Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x\, dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость[2]

$p > 1$

$\frac{|\sin x|}{x^p} \le \frac{1}{x^p} \Rightarrow$ при $p > 1$ есть абсолютная сходимость.

По следствию из критерия Больцано-Коши докажем, что при $p \le 1$ нет абсолютной сходимости:

Выберем $A_k = \pi k \qquad B_k = 2\pi k$. Обе последовательности $\to \infty$ при $k \to \infty$

$$\int_{\pi k}^{2\pi k} \frac{|\sin x|}{x^p} \ge \int_{\pi k}^{2\pi k} \frac{|\sin x|}{x} \qquad p \le 1$$

Теперь делаем финт ушами:

$$\ge \frac{1}{2\pi k} \int_{\pi k}^{2\pi k} = \frac{2k}{2\pi k} \nrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ при $p \le 1$ нет абсолютной сходимости

$p \in (0, 1]$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x^p} & u' = -\frac{p}{x^{p+1}} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\frac{\cos x}{x^p}\Big|_1^{+\infty} - p\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$$

т.к. левое слагаемое сходится, а интеграл вообще сходится абсолютно $\Rightarrow p > 0$ - сходится, а т.к. $p > 1$ - абсолютно сходится $\Rightarrow$ просто сходится при $p \in (0, 1]$

$p \le 0$

Ну, видимо при $p < 0$ интеграл расходится. Докажем это через следствие из критерия Больцано-Коши.

$A_k = 2\pi k \qquad B_k = 2\pi k + \pi$

$$\int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \frac{\sin x}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi k+\pi)^p}\int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin x = \frac{2}{(2\pi k+\pi)^p} \nrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ расходится.

Итого:

$p > 1$ - сходится абсолютно.

$p \in (0, 1]$ - просто сходится.

$p \leq 0$ - расходится.

2.4.5 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла[2]

Формулировка:

1. Дирихле

   f - допустима на $[a, b) \quad F(A) = \int_a^A f(x)dx \quad A \in [a, b))$

   Пусть F - ограничена: $\exists c_1 > 0 : \forall A \in [a, b) \quad |F(a)| \leq c_1$

   $g \in C^1[a, b]; \quad g(x) \to 0$ при $x \to b - 0; \quad g(x)$ - монотонна $\Rightarrow \int_a^{\to b}$ - сходится.

2. Абель

   f - допустима на $[a, b)$ $\int_a^{\to b} f$ - сходится.

   $g \in C^1[a, b]; \quad g(x)$ - монотонна; $g(x)$ - ограничена: $\exists c_2 > 0 : \forall x \in [a, b] \quad |g(x)| < c_2$

   $\Rightarrow \int_a^{\to b}$ - сходится.

Доказательство:

1. $$\int_a^B f(x)g(x)dx = \begin{bmatrix} u' = f & u = F = f' \\ v = g & v' \quad = g' \end{bmatrix} = F(x)g(x)|_a^B - \int_a^B F(x)g'(x)dx$$

   Теперь видим, что первое слагаемое ограничено и $\to 0$, а интеграл: $\int_a^B |F(x)g'(x)|dx$ - сходится $\Leftrightarrow \exists \lim_{B\to b-0}$

   Почему? Потому что (абсолютно):

   $$\int_a^B |F(x)g'(x)|dx \leq c_1 \int_a^b |g'(x)|dx = \pm c_1 \int_a^b g'(x)dx = \pm c_1 g(x)|_a^b$$

   - конечный, т.к. $g(x) \to 0$ при $x \to b - 0$. Вся эта история конечна $\Rightarrow$ сходится.

2. $\lim_{x\to b-0} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ (т.к. монотонна и ограничена)

   Рассмотрим $\int_a^b fg = \int_a^b f(g-\alpha) + \int_a^b f\cdot\alpha$.

   Второй интеграл сходится и конечный, а первый сходится по Дирихле: f - ограничена по теореме Вейерштрасса, $(g-\alpha)$ - монотонно стремится к 0.

   Победа.

2.4.6 Интеграл Дирихле[2]

Формулировка:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство:

Рассмотрим сумму $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$ и домножим ее на $2\sin\frac{x}{2}$:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx$$

Раскрываем слагаемые по формуле: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$ и получаем телескопическую сумму:

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{2}-x\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+x\right)\right) + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{2}+x\right) + \sin\left(\frac{x}{2}-2x\right)\right) +$$
$$+ \ldots + 2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}-xn\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+xn\right)\right) =$$
$$= -\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}x\right) - \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \sin\left(\frac{5}{2}x\right) + \ldots + \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Здесь мы поделили на $2\sin\frac{x}{2}$

А теперь проинтегрируем полученное равенство $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$ от 0 до π:

$$0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}dx \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Итого, нам очень хочется верить, что

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cdot\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Почему? т.к.

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cdot\frac{x}{2}} = \left[y = (n+\frac{1}{2})x\right] = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin y}{y}dx$$

А затем мы просто устремляем $n \to +\infty$

Ну а если мы хотим во что-то верить, это надо сперва доказать. Но сначала проведем эксперимент:

$$\int_0^\pi \sin Nx \cdot f(x) = \begin{bmatrix} u = f(x) & u' = f'(x) \\ v' = \sin Nx & u = \dfrac{\cos Nx}{N} \end{bmatrix} = \frac{-\cos Nx}{N} \cdot f(x) \Big|_0^\pi + \frac{1}{N} \int_0^\pi \cos Nx \cdot f'(x) dx$$

И при $N \to +\infty$ вся эта штука $\sim O\left(\frac{1}{N}\right)$. При условии хорошей $f(x) \in C^1[0, \pi]$. Зафиксировали.

Теперь, наконец, проверим интересуещее нас утверждение:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \cdot \frac{x}{2}} \to 0 \qquad n \to \infty$$

$$\int_0^\pi \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)\left(\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2 \frac{x}{2}}\right) \to 0$$

Переход выше верен по нашему наблюдению. То, что в скобках - $f(x)$, а оставшийся синус - $\sin Nx$. Осталось только проверить, что $f(x)$ - хорошая.

1. Непрерывность

$$\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2}} = -\frac{\sin \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = -\frac{-\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = O(x) \to 0 \qquad x \to 0$$

2. Дифференцируемость

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} - x^2 \cos \frac{x}{2}}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot \frac{x^2}{4} - x^2 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot c}{x^2 \left(\frac{x^2}{4}\right)} \sim \lim_{x \to 0} \frac{cx^4}{cx^4} = c$$

Последнее равенство получается из формулы Тейлора. А в конце нам вообще плевать, какая константа. Главное, что она есть.

Итого получаем, что $f(x)$ - хорошая, и все сходится.

2.4.7 Неравенство Йенсена для интегралов[1]

Формулировка

$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая, непрерывная.

$x : [a, b] \to \langle A, B \rangle$, непрерывная.

$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, непрерывная. $\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t = 1$

$$f(\int_a^b x(t) \alpha(t)\,\mathrm{d}t) \leq \int_a^b \alpha(t) f(x(t))\,\mathrm{d}t$$

Доказательство
Тупо везде подставляем вместо сумм интеграл. ФСЁ!

Пользуясь выпуклостью, мы можем провести опорную прямую такую, что $f(x)$ будет выше этой прямой. Нас интересует прямая в точке $x^* := \int_a^b \alpha(t)x(t)\,\mathrm{d}t$ по условию. Но сначала надо убедиться, что точка лежит в $\langle a, b\rangle$:

$$m := \inf_{t\in[a,b]} x(t)$$

$$M := \sup_{t\in[a,b]} x(t)$$

$$a \le m \le \int_a^b x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b M\cdot\alpha(t)\,\mathrm{d}t = M\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t = M \le b$$

Теперь проводим опорную прямую:

$$f(x^*) = kx^* + b = k\cdot\int_a^b \alpha(t)x(t)\,\mathrm{d}t + b = \int_a^b \alpha(t)\cdot k\cdot x(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b b\cdot\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \alpha(t)(k\cdot x(t)+b)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \alpha(t)f(x(t))\,\mathrm{d}t$$

Note: $b = \int_a^b \alpha(t)\cdot b\,\mathrm{d}t$, так как сумма $\alpha_i = 1$

2.4.8 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения[3]

Формулировка

1. Если, $\exists K \in \mathbb{N} : \forall k > K \quad a_k > 0$, то сходимость $\prod(1+a_k)$ равносильна сходимости $\sum a_k$
2. Если ряды $\sum a_k$ и $\sum a_k^2$ сходятся, то $\prod(1+a_k)$ тоже сходится

Доказательство

1. $a_k > 0 \Rightarrow$ сходимость $\prod(1+a_k)$ равносильна сходимости $\sum \ln(1+a_k)$, что равносильно сходимости ряда $\sum a_k$ (заменили на эквивалентную, т.к. при сходимости $a_k \to 0$)
2. Рассмотрим сходимость ряда $\sum \ln(1+a_k)$ на сходимость. Разложим логарифм в ряд Маклорена:
$$\sum \ln(1+a_k) = \sum a_k - \frac{a_k^2}{2} + o(a_k^2)$$
Тогда если ряды $\sum a_k$ и $\sum a_k^2$ сходятся, то сходится и ряд $\sum \ln(1+a_k)$, а значит и соответствующее произведение.

2.4.9 Лемма о представлении синуса в виде конечного произведения[3]

Формулировка
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Доказательство

Пусть $m = 2n+1$. Распишем формулы Эйлера и Муавра:

$$e^{imz} = (\cos z + i\sin z)^m = \cos mz + i\sin mz$$

Но

$$(\cos z + i\sin z)^m = \sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot (\cos z)^{m-k} \cdot (i\sin z)^k$$

$$\sin mz = m \cdot (\cos z)^{m-1}\sin z - C_m^3 \cdot (\cos z)^{m-3}(\sin z)^3 + \dots$$

Т.к. m - нечетное, то заменим везде косинусы на синусы (основное тригонометрическое тождество).

$$\sin mz = \sin z P(\sin^2 z)$$

Здесь P - многочлен степени n от $\sin^2 x$

Рассмотрим $z = \frac{k\pi}{m}$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ (все эти числа лежат в $(0, \pi/2)$). При любом $k \sin mz = 0, \sin z \neq 0$, т.е. $\forall z \sin^2 z$ - корень P. Разложим этот многочлен на n множителей.

$$P(u) = C\left(u - \sin^2\frac{\pi}{m}\right)\left(u - \sin^2\frac{2\pi}{m}\right)\dots\left(u - \sin^2\frac{n\pi}{m}\right)$$

Здесь C - константа. Равносильная запись:

$$P(u) = C\left(1 - \frac{u}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{u}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\dots\left(1 - \frac{u}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}\right)$$

Заметим, что $P(0) = C$, $\lim_{z\to 0}\frac{\sin mz}{\sin z} = m$. Теперь $x = mz = (2n+1)z$.Подставляем всю эту шнягу в выражение, в котором мы получили многочлен, и радуемся жизни.

2.4.10 Разложение синуса в бесконечное произведение[3]

Формулировка
$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

Доказательство

Пусть $x \neq \pi l$, при $l \in \mathbb{Z}$ (иначе очевидно). По предыдущей лемме:

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Рассмотрим типичный член произведения при $n\to\infty$:

$$1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\to 1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}$$

и перепишем уравнение из леммы:

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\cdot\prod_{l=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi l}{2n+1}}\right)\cdot\prod_{l=k+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi l}{2n+1}}\right)$$

Введем обозначения:

$$u_k^n = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\cdot\prod_{l=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi l}{2n+1}}\right)$$
$$V_k^n = \prod_{l=k+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi l}{2n+1}}\right)$$

Несколько наблюдений:

$$u_k = u_k^n \to x\cdot\prod_{l=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2l^2}\right) \qquad n\to\infty$$

Следовательно, существует конечный предел $V_k=\lim_{n\to\infty}V_k^n$. Итого $\sin x = u_k\cdot V_k$

Теперь $k\to\infty$. Понятно, что

$$\lim_{k\to\infty}u_k = x\cdot\prod_{l=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2l^2}\right)$$

Проверим теперь, что $V_k\to 1$, при $k\to\infty$

Заметим, что $\frac{2}{\pi}\cdot\varphi\le\sin\varphi\le\varphi$ при $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Теперь ясно, что

$$1\ge 1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi l}{2n+1}}\ge 1-\frac{\frac{x^2}{(2n+1)^2}}{\frac{4\pi^2l^2}{\pi^2(2n+1)^2}} = 1-\frac{x^2}{4l^2}$$

Следовательно,

$$1\ge V_k^n\ge\prod_{l=k+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4l^2}\right)$$

Здесь n и k должны быть достаточно большими, чтобы условное $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Теперь $n\to\infty$

$$1 \geq V_k \geq \prod_{l=k+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4l^2}\right) \to 1$$

2.4.11 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)[3]

2.4.11.1 Неравенство для сумм

Формулировка

$a_i > 0; \frac{1}{n}\sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$

Доказательство. Напишем неравенство Йенсена для $\alpha_i = \frac{1}{n}; f(x) = \ln x$ - вогнутой:

$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \ldots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + \ldots + \frac{1}{n}\ln a_n$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \ln\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Осталось только проэкспоненцировать получившееся неравенство:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

□

2.4.11.2 Неравенство для интегралов

Формулировка

Пусть $f \in C[a, b], f > 0$. Тогда

$$exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное неравенство Йенсена:

$$f(\int_a^b x(t)\alpha(t)\,\mathrm{d}t) \leq \int_a^b \alpha(t) f(x(t))\,\mathrm{d}t$$

для $f(x) = \ln x$ - вогнутой, непрерывной. $\alpha(t) = \frac{1}{b-a} = const$. Видно, что $\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Итого:

$$\ln\left(\int_a^b x(t)\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t\right) \geq \int_a^b \frac{1}{b-a}\ln x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x(t)\,\mathrm{d}t$$

Остается проекспоненцировать и получить требуемое неравенство:

$$exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$$

□

2.4.12 Неравенство Гельдера для сумм[3]

Формулировка

Пусть, $p > 1, q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$ $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ Тогда

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Возьмем x^p - строго выпуклая $\Leftrightarrow$ по неравенству Йенсена

$$\left(\sum \alpha_i x_i\right)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p$$

Положим

$$\alpha_i := \frac{b_i^q}{\sum b_j^q}$$
$$x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum b_j^q$$

Тогда

$$\sum \alpha_i x_i = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum b_j^q =$$
$$= \sum a_i b_i^{\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}} = \sum a_i b_i$$
$$\sum \alpha_i x_i^p = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i^p b_i^{-\frac{p}{p-1}} \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} =$$
$$= \sum a_i^p b_i^0 \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} = \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} \sum a_i^p$$

Подставляем полученные выражения в неравенство Йенсена:

$$\left(\sum a_i b_i\right)^p \leq \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} \sum a_i^p$$

Возводим обе части в степень $\frac{1}{p}$ и получаем требуемое неравенство:

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

2.4.13 Неравенство Минковского[3]

Формулировка

Пусть, $p \geq 1$. Тогда

$$\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Отображение $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой, т.е. выполняется неравенство треугольника:

$$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

При $p = 1$ - очевидно. Пусть $p > 1$, будем рассматривать только положительные a_i, b_i, все остальные будем сводить к ним.

Рассмотрим

$$\sum |a_i||a_i + b_i|^{p-1}, \qquad \sum |b_i||a_i + b_i|^{p-1}$$

Неравенство Гёльдера делает брррррр:

$$\sum |a_i||a_i + b_i|^{p-1} \le \left(\sum (a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^{(p-1)*q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum (a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Аналогично поступаем с $\sum |a_i||a_i + b_i|^{p-1}$ и складываем:

$$\sum |a_i + b_i|^p \le \sum |a_i + b_i|^{p-1}|a_i + b_i| \le \left(\left(\sum |a_i^p|\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Делим обе части уравнения на $(\sum |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{q}}$:

$$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

2.4.14 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши[1]

2.4.14.1 Линейность

$\sum a_n, \sum b_n$ сходятся, $c_n = a_n + b_n \Rightarrow \sum c_n$ сходится, $\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n$

▷

$$c_n = a_n + b_n \Rightarrow S_N^c = S_N^a + S_N^b$$

◁

$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \sum \alpha a_n$ сходится, $\sum \alpha a_n = \alpha \cdot \sum a_n$

▷

$$S_N^{\alpha a} = \alpha a_1 + \alpha a_2 \dots \alpha a_N = \alpha(a_1 + a_2 + \dots + a_N) = \alpha S_N^a \in \mathbb{R}$$

◁

2.4.14.2 Свойства остатка

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \forall N \quad R_N$ сходится.

   ▷ Рассмотрим частичные суммы:

   $$S_N^a = \sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k$$

   При $n \to +\infty$

   $$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$$

   ◁

2. $\exists N : R_N$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится.

   $\triangleright$ Такое же доказательство. $\triangleleft$

3. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow R_N \to 0$

   $\triangleright$

   $\Rightarrow$

   Воспользуемся предыдущим доказательством, после предельного перехода мы получили выражение $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ограничено, $\sum_{k=1}^{m} a_k$ ограничено. Причём $R_N = \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$ и оно тоже ограничено. При $N \to +\infty$ всё больше членов ряда "отщипывается"в $\sum_{k=1}^{m} a_k$, следовательно, эта частичная сумма стремится к исходному ряду. В таком случае, R_N ничего не остаётся, кроме как стремиться к 0, иначе доказанная выше сумма не выполнится.

   $\Leftarrow$

   Если мы рассматриваем последовательность остатков R_N как какой-то объект, то там должна быть последовательность каких-то чисел, то есть они существуют, то есть существуют такие остатки в этой последовательности, которые будут сходиться к этим числам, то есть выполняется свойство 2.

   $\triangleleft$

2.4.14.3 Необх. условие сходимости

Формулировка
$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow a_n \to 0$

Доказательство
$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow$ последовательность $R_n \to 0$. Это мы доказали выше. А теперь скажем $a_n = R_n - R_{n+1}$. $R_{n+1} \to 0$ так же, как и R_n. Таким образом, $a_n \to 0$ как разность двух бесконечно-малых.

2.4.14.4 Критерий Больцано–Коши

Хотим предложить какой-нибудь достаточный критерий для выяснения сходимости.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p > 0 \quad |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Правое выражение эквивалентно следующему:

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

При помощи этого мусора нетрудно доказать, что $\sum \frac{1}{n^p}$ расходится при $p \leq 1$. Давайте просто предъявим $\varepsilon = 10^{-6}$, $n = N + 1, p = N$. Там всё оценивается снизу по минимальному члену, n сокращается и получается $\frac{1}{2} > \varepsilon$

2.4.15 Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)[1]

Формулировка

$$\sum a_n \geq 0; \exists k_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Тогда:

1. $\exists \overline{\lim} k_n < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $\exists \overline{\lim} k_n > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится
3. $\exists \overline{\lim} k_n = 1 \Rightarrow$ ☹

Доказательство
Вспоминаем Признак Коши сходимости положительных рядов[1]. Там сказаны чудесные слова про $k_n < q < 1$, а так же про бесконечное число элементов ≥ 1. А теперь нам дали какие-то верхние пределы. Отлично!

Вспоминаем Техническое описание верхнего предела[1], а там у нас написано РОВНО ЭТО! В первом случае в качестве ε предложим наше $q - k_n$, а во втором просто найдём какую-то точку $x : 1 < x < \overline{\lim} k_n$. И снова у нас будет выполняться тех. описание верхнего предела. Короче, мы в 2 строчки свелись к Признак Коши сходимости положительных рядов[1].

Если посмотреть на $\overline{\lim} k_n = 1$, то там всё грустно, так как предел не запрещает нашей функции быть в ε–окрестности как сверху от 1, так и снизу. Так что признак не работает.

Есть даже примеры: $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$, один из них расходится, второй сходится, однако наша выбранная k_n всё равно будет стремиться к 1.

2.4.16 Признак Даламбера сходимости положительных рядов[1]

Формулировка

$$\sum a_n \geq 0; \exists D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Тогда:

1. Начиная с какого-то места $\exists q : D_n < q < 1$ (q мы ввели чтобы потом сравнивать с ним, так как признак сравнения у нас строго < 1 и с 1 сравнивать неудобно) $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. Начиная с какого-то места $D_n \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится.

2.4.16.1 Pro версия:
$\exists \lim D_n = D$

1. $D < 1$ — сходится
2. $D > 1$ — расходится
3. $D = 1$ — ☹

Доказательство

1. $\exists N_0 : \forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0+k}} < q < 1$. Теперь распишем это как выражения $\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} < q, \frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} < q, \ldots, \frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0+k}} < q$.

Главный трюк — перемножим все эти выражения (левые и правые части) и у нас всё сократится: $\frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0}} < q^k$. Выразим a_{N_0+k+1}: $a_{N_0+k+1} < q^k \cdot a_{N_0}$.

Теперь устремим k к $+\infty$ и получим, что получившееся неравенство — это 2 ряда под признаком сравнения, при том, что справа у нас бесконечно убывающая геом. прогрессия, у которой по определению можно посчитать сумму, а значит она сходится. Слева неравенства у нас в таком случае будет записан остаток исходного ряда R_{N_0+1}. По признаку сравнения остаток сходится, а значит и исходный ряд сходится.

2. $q \geq 1$, а значит, что как минимум с этого места наш ряд не уменьшается, а значит он не может стремиться у нулю, а значит нет необходимого признака сходимости.

1. Доказывать нечего: выберем ε такой, чтобы верхнее ограничение нашей последовательности было < 1, а это уже подходит под пункт 1 упрощённой версии.
2. Аналогично
3. Не работает, так как при $\varepsilon > 0$ у нас элементы в последовательности могут быть как > 1 так и < 1. Простейший контрпример: $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$. У них у обоих $D = 1$

2.4.17 Признак Раабе сходимости положительных рядов[1]

2.4.17.1 Лемма (улучшенный признак сравнения)

Формулировка
$\exists a_n, b_n > 0$ Если начиная с некоторого места

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

то

1. $\sum b_n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $\sum a_n$ расходится $\Rightarrow \sum b_n$ расходится

Доказательство
$\exists N_0 : \forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0+k}} < \frac{b_{N_0+k+1}}{b_{N_0+k}}$. Теперь распишем это как выражения $\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} < \frac{b_{N_0+1}}{b_{N_0}}, \frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} < \frac{b_{N_0+2}}{b_{N_0+1}}, \dots, \frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0+k}} < \frac{b_{N_0+k+1}}{b_{N_0+k}}$.

Главный трюк — перемножим все эти выражения (левые и правые части) и у нас всё сократится: $\frac{a_{N_0+k+1}}{a_{N_0}} < \frac{b_{N_0+k+1}}{b_{N_0}}$. Выразим a_{N_0+k+1}: $a_{N_0+k+1} < \frac{a_{N_0}}{b_{N_0}} \cdot b_{N_0+k+1}$.

Теперь устремим k к $+\infty$ и получим, что справа неравенства у нас имеет место остаток ряда $R^{(b)}_{N_0+1}$, а слева тоже остаток $R^{(a)}_{N_0+1}$. Получается, мы свели эти все дроби к обычному признаку сравнения для рядов $\sum b_n$ и $\sum a_n$

2.4.17.2 Теорема

Формулировка

$\exists a_n > 0$

1. Начиная с некоторого места $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r > 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится. Вот тут может быть больно: дробь записана вверх ногами, ещё и все неравенства перевёрнуты и ещё сравнение в обоих случаях нестрогое.
2. Начиная с некоторого места $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится.

Доказательство

1. Итак, здесь всё сложно. Сначала давайте возьмём эталонный ряд, про который мы всё хорошо знаем и прогоним его в предельном переходе через формулу из формулировки:
$$\lim n\left(\frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(n+1)^S}} - 1\right) = \lim n\left(\frac{n^S(1+\frac{1}{n})^S}{n^S} - 1\right) = \lim n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^S - 1\right) = n \cdot S\frac{1}{n} = S$$
Это всё значит, что мы можем взять наш эталонный ряд в такой хитровыебанной форме и с ним сравнивать то, что нам дают. Конкретно тут мы хотим подобрать такое S, чтобы оно лежало между r и 1. Слава Аллаху, это возможно. Разумеется, тогда мы выберем такое ε, что с некоторого места ВЕСЬ целиком эталонный ряд будет лежать между r и 1. Тогда мы сможем тупо сравнить эталонный ряд с тем, что нам дали по лемме выше.
Запишем что мы только что доказали:
$$1 < n\left(\frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(n+1)^S}} - 1\right) < r \leq n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$
Теперь разделим на n, прибавляем 1 и получаем красивое:
$$\frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(n+1)^S}} < \frac{a_n}{a_{n+1}}$$
Ой, всё перевёрнуто((, ну ок:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^S}}{\frac{1}{n^S}}$$
Итак, триумфальное шествие: по лемме если правая часть неравенства сходится, то сходится и левая. А мы знаем, что она (правая) сходится только при $S > 1$. А у нас $1 < S < r$, то есть мы подогнали всё так, что доказали сходимость. ЧТД.
2. И вот тут мы наконец узнаем откуда взялось магическое $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$:
$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{n} + 1 = \frac{1+n}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$$
Оказывается, всё это время в этом выражении было зашито сравнение нашего ряда по нашей лемме с любимым эталонным рядом. Итого имеем:
$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
То есть если ряд слева расходится, то и справа расходится. А слева у нас спрятан ряд $\sum \frac{1}{n^1}$, то есть он как раз расходится.

2.4.17.3 Pro

Аналогично, как в Даламбере:

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$$

1. $r>1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $r<1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится
3. $r=1 \Rightarrow$ ☹. Контрпример: ряды $\sum \frac{1}{n\ln n}$ и $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$

2.4.18 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов[1]

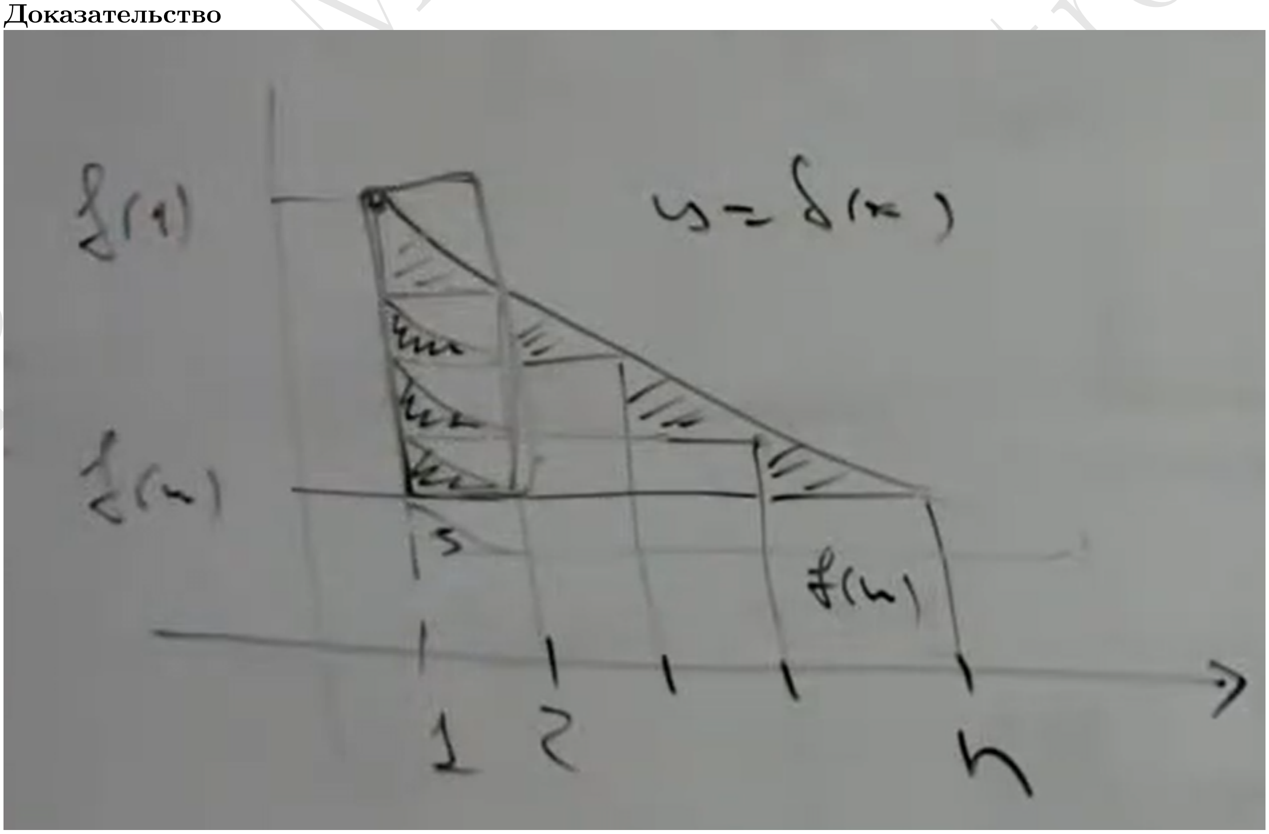
Формулировка

$\exists f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$ непрерывная, монотонная.

Тогда

$$\sum_{k=2}^{+\infty} f(k)\,\text{сходится вместе с}\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство



Разбиение здесь единичное, так что ни на что не умножаем, зато мы тут видим, что мы можем достроить неучтённую в Римановой сумме часть функции до прямоугольника по левой стороне каждого отрезка (так как функция монотонно убывает). Сумма таких прямоугольников будет $|f(1)-f(n)|$ где n — правая граница границы интегрирования/частичной суммы, которую мы фиксируем.

Итак, мы можем записать всё это вот так:

$$\left|\sum_{k=2}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le |f(1) - f(n)|$$

Для монотонно возрастающей функции всё симметрично.

Отсюда можно выразить частичную сумму

$$S_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \delta_n, |\delta_n| \le |f(1) - f(n)|$$

δ_n — это наша добавка–разница между суммой и интегралом.

Сходимость ряда будет следовать из существования + конечности предела этого предела при $n \to +\infty$. Если с влиянием на его конечность интеграла всё понятно, то остаётся только разобраться с влиянием на ответ δ_n.

Заметим, что δ_n монотонно растёт в одну фиксированную сторону, ввиду монотонности исходной функции. Может ли он быть бесконечным? Очевидно, ввиду наших ограничений на функцию, в частности, непрерывности, бесконечным он может стать только если сама функция стремится в неограниченна, а следовательно, её интеграл тоже будет бесконечным, а значит этот частный случай никак не влияет на ответ. В остальных случаях δ_n конечная ввиду ограниченности f, а значит не влияет на сходимость ряда при предельном переходе.

2.4.19 Формула Эйлера для гамма-функции[3]

Лемма 1
Введем функцию $\Pi(n,x) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$

Тогда $\Pi(n,x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} \cdot n^x$

Доказательство

$$\Pi(n,x) = \begin{bmatrix} t := ns \\ dt := n \cdot ds \end{bmatrix} = n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} dx = \begin{bmatrix} f = (1-s)^n & f' = n(1-s)^{n-1} \\ g' = s^{x-1} & g = \dfrac{s^x}{x} \end{bmatrix} =$$

$$= n^x \left((1-s)^n \cdot \frac{s^x}{x} \Bigg|_{s=0}^{s=1} + \frac{n}{k} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^x \, ds \right) = \ldots$$

Понимаем, что эта первое слагаемое зануляется, а интеграл подозрительно похож на тот, который был до интегрирования по частям, только одна степень пониже, а другая повыше. Таким образом, продолжая делать то, что мы делали, придем к требуемому результату.

Лемма 2
При $0 \le t \le n$

$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{1}{n} t^2 e^{-t}$

Доказательство
Пусть $y \in [0,1]$. Тогда из выпуклости экспоненты следует: $1+y \le e^y \le \frac{1}{1-y}$

Теперь рассмотрим $y := \frac{t}{n}$. Подставим это в неравенство выше и возведем все в степень $-n$: $\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \ge e^{-t} \ge \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

Теперь следим за руками:

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left(1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) \le e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \le e^{-t}\cdot\frac{t^2}{n}$$

Теперь объясним движения руками: первый переход - буквально правая часть неравенства выше. Третий переход - левая часть этого неравенства. А последний - неравенство Бернулли: $(1-a)^n \ge 1-na \Leftrightarrow na \ge 1-(1-a)^n$

Формулировка

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots n}{x(x+1)\dots(x+n)}\cdot n^x = \Gamma(x)$$

Доказательство
По определению

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Теперь применим первую лемму и рассмотрим

$$\Gamma(x) - \lim_{n\to\infty}\Pi(n,x) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)t^{x-1}\,dt + \int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt\right) = 0$$

Но почему? Второе слагаемое очевидно стремится к 0 как остаток сходящегося интеграла, а подынтегральное выражение в первом интеграле по второй лемме не меньше нуля и не превосходит $\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}\,t^{x+1}\,dt \le \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\dots = \frac{\Gamma(x+2)}{n} \to 0$

2.4.20 Формула Вейерштрасса для гамма-функции[3]

Формулировка

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\cdot e^{\gamma x}\cdot\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$$

где γ - постоянная Эйлера (если верить Википедии, то постоянная Эйлера-Маскерони)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

Доказательство

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty}\left(n^{-x}\cdot x\,(1+x)\,\left(1+\frac{x}{2}\right)\dots\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} x\,n^{-x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} x\,e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\,e^{-\frac{x}{k}} =$$

$$= x\,e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)\,e^{-\frac{x}{k}}$$

Причем это произведение сходится:

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} = \left(1+\frac{x}{k}\right)\left(1-\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}\dots\right) = 1-\frac{x^2}{2k^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

И если мы представим это произведение в виде $\prod(1+a_k)$, то заметим, что уже победили. Еще и сходится эта штука при $x\in\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$

2.4.21 Вычисление произведений с рациональными сомножителями[3]

$$u_n = A\cdot\frac{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_l)}$$

a_i, b_i - неотрицательные, целые.

$$\prod_{n=1}^{+\infty} =?$$

Решение
Необходимое условие

$u_n\to 1\Leftrightarrow k=l$, $A=1$

$$u_n = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_k)} = \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)} = 1+\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\dots+a_k-b_1-\dots-b_k\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Последний переход справедлив, т.к. из верхних скобок эта хрень просто выносится, а для нижних работает $\frac{1}{1+\frac{b_i}{n}} = \left(1-\frac{b_i}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Вспоминаем, что сходимость $\prod(1+a_k)\Leftrightarrow$ сходимости $\sum a_k$. Для сходимости произведения необходимо: $\sum a_k = \sum b_k$

Внезапное напоминание о формуле Вейерштрасса для Г-функции:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\cdot e^{\gamma x}\cdot\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$$

Теперь начинаем сопоставлять

$$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+a_1)\ldots(n+a_k)}{(n+b_1)\ldots(n+b_k)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}} \cdot \left(1+\frac{a_2}{n}\right)e^{-\frac{a_2}{n}} \ldots \left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}} \cdot \left(1+\frac{b_2}{n}\right)e^{-\frac{b_2}{n}} \ldots \left(1+\frac{b_k}{n}\right)e^{-\frac{b_k}{n}}} =$$

$$= \frac{\Gamma(b_1+1)e^{\gamma b_1} \cdot \Gamma(b_2+1)e^{\gamma b_2} \ldots \Gamma(b_k+1)e^{\gamma b_k}}{\Gamma(a_1+1)e^{\gamma a_1} \cdot \Gamma(a_2+1)e^{\gamma a_2} \ldots \Gamma(a_k+1)e^{\gamma a_k}} = \frac{\Gamma(b_1+1)\ldots\Gamma(b_k+1)}{\Gamma(a_1+1)\ldots\Gamma(a_k+1)}$$

2.4.22 Формула дополнения для Γ—функции[3]

Формулировка
$\forall x \in (0,1)$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$$

Доказательство

Распишем формулу Вейерштрасса для Γ функции:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \cdot e^{\gamma x} \cdot \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = (1-x)e^{\gamma(1-x)} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1-x}{k}\right) e^{-\frac{1-x}{k}}$$

Из формулы Вейерштрасса следует: $\Gamma(1+x) = x\,\Gamma(x)$, при $x \in \backslash\mathbb{Z}$

Заметим, что:

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{1}{(-x)\Gamma(-x)} = \frac{1}{-x} \cdot (-x)e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1-\frac{x}{k}\right) e^{\frac{x}{k}}$$

И теперь эти две функции замечательно перемножаются:

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

Подозрительно похоже на разложение синуса в бесконечное произведение. Ну а если похоже, то подставим, и получим, что эта штука равна $\frac{\sin \pi x}{\pi}$. Победа

3 Период Кайнозойский

3.1 Важные определения

3.1.1 Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость[1]

Последовательность сходится в $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ есть покоординатная сходимость.

Когда пишем последовательности в $\mathbb{R}^m$, мы пишем индекс сверху в скобках, а снизу пишем координату.

$$x^{(n)} \to a \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_1 \\ \vdots \\ x_m^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_m \end{cases}$$

3.1.2 Предельная точка, замкнутое множество, замыкание[1]

Тут тоже без новостей:

Предельная точка — точка, любая проколотая окрестность которой непуста.

Замкнутое множество — множество, включающее все свои предельные точки (или просто дополнение к открытому).

Замыкание — минимальное по включению замкнутое множество, включающее исходное.

3.1.3 Отображение бесконечно малое в точке[2]

$\varphi : E \subset R^m \to R^l$ — *отображение*

$x_0 \in E$ — *предельная* точка E

φ является *бесконечно малым в точке* x_0, если $\varphi(x) \to_{x\to x_0} 0$

3.1.4 Отображение, дифференцируемое в точке[2]

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, a \in Int(E)$

Если $\exists L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — линейный оператор, $\exists \alpha : E \to \mathbb{R}^l$ — бесконечно малое, то $F(x)$ дифференцируемо в точке a:

$$F(a+h) = F(a) + Lh + \alpha \cdot h, h \to 0$$
$$F(a+h) = F(a) + L \cdot h + o(h)$$
$$x := a + h$$
$$F(x) = F(d) + L \cdot (x-a) + o(|x-a|)$$

3.1.5 Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал[2]

Из определения выше, L — производный оператор. В точке a записывается следующим образом: $F'(a)$

Матрица, задающая производный оператор, называется матрицей Якоби (по сути своей, матрица производных по всем переменным в этой точке).

Дифференциал функции F в точке a — $F'(x)h$, где $h \to 0$

3.1.6 Частные производные[2]

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$

Фиксируем какую-нибудь переменную $x_k, 1 \le k \le m$, $a \in Int(E)$

Заведём себе функцию $\varphi_k(t) := f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_m)$, причём $t \in U(a)$.

$$\lim_{s \to 0} \frac{\varphi_k(t+s)}{\varphi_k(t)}$$

— частная производная F в точке a по x_k. Причём *частная* от слова *partial*, а не от *private*.

Также немаловажным будет отметить, как их обозначают. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ — это производная 2-го порядка, причём сначала мы дифференцировали по x_2, а потом уже по x_1. Однако, нам не важно, в каком порядке дифференцировать, что доказывается далее. Причём, через неважность для перестановки 2х спокойно выражаются и перестановки любой длины, через транспозиции (привет, ДМ 1 сем!).

3.1.7 Формула Тейлора (различные виды записи)[2]

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad B(x, a) \subset E$ - открытое.

$f \in C^{r+1}(E)$, тогда $\exists \theta \in (0, 1)$:

Для здоровых людей:

$$f(x) = \sum_{j:|j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a + \theta(x-a))}{j!}(x-a)^j$$

Для психов:

$$f(x) = \sum_{j:|j| \le r} \frac{1}{j^1! j^2! \dots j^m!} \frac{\partial^{(j)} f}{\partial x^j}(a)(x-a)^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{1}{j^1! j^2! \dots j^m!} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial_{x_1}^{j_1} \dots \partial_{x_m}^{j_m}}(a + \theta(x-a))(x-a)^j$$

В форме n-го дифференциала:

$$f(a+h) = \sum_{n=1}^{r} \frac{d^n(a, n)}{n!} + d^{n+1}(a + \theta h, h)$$

В форме $a + h$, Лагранжа:

$$f(a+h) = \sum_{j:|j| \le r} \frac{f^{(j)}}{j!}(a) h^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a + \theta h)}{j!} h^j$$

В форме Пеано:

$$f(a+h) = \sum_{j:|j| \le r} \frac{f^{(j)}}{j!}(a) h^j + o(|h|^r)$$

3.2 Определения

3.2.1 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в $\mathbb{R}^m$[1]

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^m$$

3.2.1.1 Скалярное произведение

$$\langle a, b \rangle := \sum a_i \cdot b_i$$

3.2.1.2 Евклидова норма

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

3.2.1.3 Метрика в $\mathbb{R}^m$

$$\rho(a, b) = |a - b|$$

Вообще ничего нового, просто напоминалка, получается.

3.2.2 Окрестность точки в $\mathbb{R}^m$, открытое множество[1]

Открытое множество — множество, все точки которого внутренние (входят вместе с какой-то окрестностью)

Окрестность точки — какое-то открытое множество, включающее эту точку. Обозначается $U(a)$. Может быть проколото, в этом случае сама точка удаляется.

Шар $B(a, r)$ — множество всех точек, для которых верно $\rho(x, a) < r$.

ε–окрестность точки — открытый шар $B(a, \varepsilon)$

3.2.3 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса[1]

Компактное множество в $\mathbb{R}^m$ — это замкнутое и ограниченное множество (ввиду полноты $\mathbb{R}^m$).

В $\mathbb{R}^m$ компактное множество секвенциально компактно, либо замкнуто + имеет конечную ε–сеть.

Секвенциальная компактность множества гласит, что в любой последовательности, заданной в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке в самом этом множестве.

Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса почти про то же. В любой последовательности в ограниченном множестве можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (предел не обязательно лежит в множестве, так что этого недостаточно для компактности!)

3.2.4 Координатная функция[1]

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$$

Такую функцию можно расписать как вектор координатных функций:

$$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{pmatrix}$$

3.2.5 Двойной предел, повторный предел[1]

$\exists f : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}, (a_1, a_2)$ — предельная точка

3.2.5.1 Двойной предел

На языке окрестностей (иначе зачем мы только что их вводили):

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2) = L \Leftrightarrow \forall U(L) \exists U(a_1) \exists U(a_2) : \forall x_1 \in \dot{U}(a_1) \cap D_1 \forall x_2 \in \dot{U}(a_2) \cap D_2 \quad f(x_1, x_2) \in U(L)$$

А ещё мы разрешили $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}, a_2 \in \overline{\mathbb{R}}, L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Мы нарисовали двойной предел... Добавить нечего.

3.2.5.2 Повторный предел

Введём

$$\phi(x_1) = \lim_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$$

Тогда можно определить предел

$$\lim_{x_1 \to a_1} \phi(x_1) = \lim_{x_1 \to a_1} \lim_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$$

Но если вы не прогуливали матан в 1 семестре, вы скажете, что тут как бы надо вообще гарантировать, что $\phi(x)$ возвращает что-то адекватное ($\in \mathbb{R}$, например) при всех $x \in D \setminus a_1$, иначе мы не сможем посчитать этот самый коварный наружный предел.

Вот то, что мы ввели вообще-то прозвали *повторным пределом* в точке (a_1, a_2).

Nota bene: таким же образом мы имеем право ввести ещё и другой повторный предел, нарисовав композицию двух пределов в другом порядке (и даже получить другой ответ в некоторых случаях ☺)

3.2.6 Предел по направлению, предел вдоль пути[1]

3.2.6.1 Предел по направлению

Зададим прямую (направление) как $\phi(t) = a + t \cdot v$, где $a, v \in \mathbb{R}^m$. Физический смысл a, b такой же как и в одномерном случае для начального сдвига и коэффициента наклона.

Тогда можно посчитать предел $\lim_{t \to 0}(\phi(t)) = \lim_{t \to 0}(a + t \cdot v)$.

3.2.6.2 Предел вдоль пути

$\exists E$ — путь, проходящий через a такой, что $[-\varepsilon, \varepsilon] \mapsto (x_1(t), x_2(t)), (x_1(0), x_2(0)) = a$

Тогда можно посчитать предел $\lim_{t \to 0} f(x_1(t), x_2(t))$. Не то, чтобы прям содержательно, но да.

3.2.7 Линейный оператор[1]

Линейный оператор — отображение $F : X \to Y$ (где X, Y — линейные пространства), которое имеет свойство линейности: $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$.

$F : X \to \mathbb{R}^n$ договорились называть линейным функционалом

Для фиксированного множества X, Y можно задать множество всех линейных операторов и обозначить как $Lin(x, y)$.

Договорились допускать операции над самими лин. операторами, которые сами по себе тоже являются лин. операторами в том же множестве Lin:

$$(F + G)(x) := F(x) + G(x)$$

$$(\alpha F)(x) := \alpha F(x)$$

$$F : X \to Y, G : Y \to Z \Rightarrow G(F) : X \to Z$$

3.2.8 $o(h)$ при $h \to 0$[2]

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, 0 — предельная точка E.

Можно задать нашу функцию $\varphi(h)$ двумя способами:

1. $\varphi(h) = o(h)$, при $h \to 0$
   $\frac{\varphi(h)}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$
2. $\exists \alpha(h) : E \to \mathbb{R}^l$ бесконечно малая при $h \to 0$
   $\varphi(h) = |h| \cdot \alpha(h)$

3.2.9 Теорема о двойном и повторном пределах[1]

$\exists f : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$

Если

1. $\exists \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2) = L$
2. $\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} \exists$ конечный $\phi(x_1) := \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$

Тогда $\exists \lim\limits_{x_1 \to a_1} \phi(x_1) = L$

Был показательный пример с $\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$, в котором разные повторные пределы давали разный ответ. Так вот, по этой теореме мы сможем убедиться, что тут не выполняется первый пункт, а значит повторный предел не существует.

3.2.10 Производная по направлению[2]

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ a \in Int(E),\ h \in \mathbb{R}^m$

Пусть $t \in \mathbb{R}, |h| = 1$ (такой вектор называется направлением).

Тогда $\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = (\frac{\partial f}{\partial d})(a)$ — производная по направлению.

Замечание

Функция дифференцируема $\Rightarrow$ функция дифференцируема по любому вектору (направлению)

$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_1'(a)th+f_2'(a)th+\ldots+f_m'(a)th+o(t)}{t} = f_1'(a)h+f_2'(a)h+\ldots+f_m'(a)h = \langle \boldsymbol{\nabla} f, h\rangle$

3.2.11 Градиент[2]

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ a \in Int(E),\ h \in \mathbb{R}^m$

$f(a+h) = f(h) + \langle L, h\rangle + o(|h|), h \to 0$

Вектор L называется градиентом f в точке a.

$L = \mathrm{grad} f = \boldsymbol{\nabla} f$

3.2.12 Мультииндекс и обозначения с ним[2]

Мультииндекс k в $\mathbb{R}^m$ — $(k_1, k_2, \ldots, k_m),\ k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Некоторые обозначения:

1. $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ — высота мультииндекса
2. $k! = k_1!k_2!\ldots k_m!$
3. $x^k = x^{k_1}x^{k_2}\ldots x^{k_m}$

3.2.13 n-й дифференциал[2]

Literally this:

$$d^n f = \sum_{j:|j|=n} \frac{n!f^{(j)}(a)}{j!}h^j$$

(n-я сумма из леммы о нахождении производной сдвига (?))

Но можно расписать и по-другому, основываясь на выводе полиномиальной формулы (наивная версия):

$$d^n f = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_m=1}^{m} \frac{\partial^n}{\partial^{j_1}x_1\partial^{j_2}x_2\ldots\partial^{j_m}x_m}(a)dx_1dx_2\ldots dx_m$$

Что тут происходит? Мы ищем производную n-го порядка, с какой-нибудь комбинацией переменных, по которым дифференцируем. А также отмечаем, по каким переменных шло дифференцирование, домножая на dx_i

3.3 Важные теоремы

3.3.1 Признак Лейбница[1]

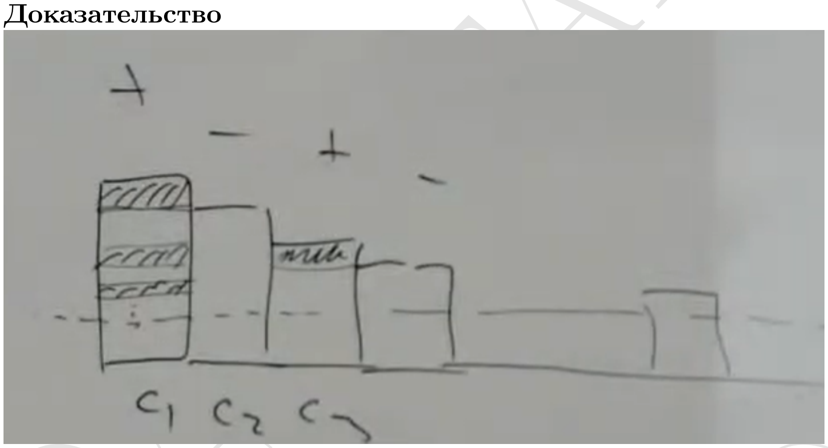
Формулировка
$\rceil \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n C_n, C_n \geq C_{n+1} \geq 0$

Тогда

$$C_n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n C_n$$

сходится.

Доказательство



Будем попарно брать столбики с противоположными знаками и разницу между ними закрашивать. Заметим, что сумма всех этих "разниц— это и будет сумма ряда. А ещё она вся вписывается в первый столбец (очевидно, ввиду монотонности, на рисунке видно).

Но! В условии ещё что-то сказано про $C_n \to 0$. Так вот, если этого не соблюсти, то у нас произойдёт разночтение предела, т.к. можно будет взять частичные суммы до чётного члена, а также до нечётного. И вот если этот "последний"член окажется нечётным, то он нам добавит чего лишнего, а если предел неоднозначен, то его не существует. И вот, чтобы этого избежать, мы требуем, чтобы оно стремилось к 0.

3.3.2 Достаточное условие дифференцируемости[2]

Формулировка:

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ a \in Int(E)$

Пусть в окрестности $B(a, r)$ существуют конечные $f'_1, \ldots, f'_m$ и все они непрерывны в точке a. Тогда, f дифференцируема в точке a.

Доказательство:

$\triangleright$

Рассмотрим для $m = 2$, для остальных всё аналогично.

Возьмём разность $f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$. Добавим и вычтем $f(a_1, x_2)$:

$$= (f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)) + (f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)) =$$

Расписываем каждую скобку по теореме Лагранжа, переменные с шапочками — это что-то среднее между иксом и ашкой:

$$= f'_{x_1}(\hat{x_1}, x_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, \hat{x_2})(x_2 - a_2) =$$

Теперь добавим и вычтем $i \in \{1, 2\},\ f'_{x_i}(a_1, a_2)(x_i - a_i)$

$$= f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) +$$

$$+ (x_1 - a_1)(f'_{x_1}(\hat{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2)) + (x_2 - a_2)(f'_{x_2}(a_1, \hat{x_2}) - f'_{x_2}(a_1, a_2))$$

Заметим, что $i \in \{1, 2\},\ (x_i - a_i) \le |x_i - a_i|$ (нормы), а выражения в скобках — бесконечно малые при $x \to a$.

В итоге, получили формулу дифференцирования, где слева стоит формула, справа линейная часть и бесконечно малая.

$\triangleleft$

3.3.3 Дифференцирование композиции[2]

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

3.3.3.1 Лемма об оценке нормы линейного оператора

Формулировка

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ - линейный оператор, $A \Leftrightarrow (a_{ij})$

Тогда:

$\forall x \in \mathbb{R}^m \qquad |Ax| \le C_A \cdot |x|, \quad$ где $C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$

Доказательство

Рассмотрим:

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} \cdot x_j) \right)^2$$

Тут мы просто умножили вектор на матрицу. Теперь распишем внутреннюю сумму по КБШ и вынесем сумму с иксом, т.к. от внешней она не зависит.

$$\sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}\cdot x_j)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right) = |x|^2\cdot\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2 = |x|^2\cdot C_A^2$$

$$|Ax| \leq |x|C_A$$

3.3.3.2 Теорема о дифференцировании композиции

Формулировка

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \qquad F(E) \in I \qquad a \in Int(E)$

$G : I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m \qquad F(a) \in Int(I)$

F - дифференцируема в т.a, G - дифференцируема в т. $F(a)$

Тогда :

$G \circ F$ - дифференцируема в т.a $\qquad (G\circ F)'(a) = G'(F(a))\cdot F'(a)$

Доказательство

$b := F(a), \quad k := F'(a)\cdot h + \alpha(h)\cdot|h|$

$F(a+h) = F(a) + F'(a)\cdot h + \alpha(h)\cdot|h|$

$G(b+k) = G(b) + G'(g)\cdot k + \beta(k)|k|$

Рассмотрим:

$G(F(a+h)) = G(b+k) = G(b) + G'(b)\cdot k + \beta(k)|k| = G(F(a)) + G'(F(a))\cdot(F'(a)h + \alpha(h)\cdot|h|) + \beta(k)\cdot|F'(a)\cdot h + \alpha(h)\cdot h|$

Здесь мы получили как раз формулу "дифференцирования"для G в т.$F(a)$. Теперь нужно доказать что вот эта длинная блямба в конце - бесконечно малое, и все будет супер.

Теперь воспользуемся доказанной леммой:

$$G(F(a+h)) = G(F(a)) + G'(F(a))\cdot F'(a)\cdot h + G'(F(a))\cdot\alpha(h)|h| + \beta(k)\cdot|F'(a)\cdot h + \alpha(h)|h||$$

Рассмотрим третье слагаемое:

$G'(F(a))\cdot\alpha(h)|h| \leq C_{G'(b)}\cdot|\alpha(h)|\cdot|h|$

И рассмотрим четвертое:

$$|F'(a)\cdot h + \alpha(h)|h|| \leq |F'(a)h| + |\alpha(h)|h|| \leq (C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)\cdot|h|$$

Внимательно вглядываемся в получившееся выражение и понимаем, что скобка - ограничена, а $|h| \to 0$ при $x \to a$

То есть

$$\beta(k) \cdot |F'(a) \cdot h + \alpha(h)|h|| \le |\beta(k)| \cdot (C_{F'(a)} + |\alpha(h)|) \cdot |h|$$

Итого:

Получившиеся два выражения в сумме - бесконечно малое $\Rightarrow$ формула сошлась и все хорошо.

3.3.4 Теорема Лагранжа для векторнозначных функций[3]

Формулировка

$F : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b)

Тогда: $\exists c \in (a, b) \quad |F(b) - F(a)| \le |F'(c)|(b - a)$

Доказательство

$\triangleright$

Заведем $\varphi(t) :=< F(b) - F(a), F(t) - F(a) > \quad t \in [a, b]$

Небольшая ревизия:

$\varphi(0) = 0$

$\varphi'(t) =< (F(b) - F(a))', F(t) - F(a) > + < F(b) - F(a), F'(t) - 0 >=< F(b) - F(a), F'(t) >$

$\varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$

$\varphi(b) - \varphi(a) = |F(b) - F(a)|^2 + < 0, 0 >$

$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$ - обычная теорема Лагранжа.

$|F(b) - F(a)|^2 =< F(b) - F(a), F'(c) > (b - a) \le |F(b) - F(a)||F'(c)|(b - a)$

Делим на $|F(b) - F(a)|$, (для $b = a$ тривиально)

$|F(b) - F(a)| \le |F'(c)|(b - a)$

$\triangleleft$

3.3.5 Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)[3]

Формулировка

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad B(x, a) \subset E$ - открытое.

$f \in C^{r+1}(E)$, тогда $\exists \theta \in (0, 1)$:

Для здоровых людей:

$$f(x) = \sum_{j:|j| \le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x - a)^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a + \theta(x - a))}{j!}(x - a)^j$$

Для психов:

$$f(x)=\sum_{j:|j|\le r}\frac{1}{j^1!j^2!\dots j^m!}\frac{\partial^{(j)}f}{\partial x^j}(a)(x-a)^j+\sum_{j:|j|=r+1}\frac{1}{j^1!j^2!\dots j^m!}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial_{x_1}^{j_1}\dots\partial_{x_m}^{j_m}}(a+\theta(x-a))(x-a)^j$$

В форме n-го дифференциала:

$$f(a+h)=\sum_{n=1}^{r}\frac{d^n(a,n)}{n!}+d^{n+1}(a+\theta h,h)$$

В форме $a+h$, Лагранжа:

$$f(a+h)=\sum_{j:|j|\le r}\frac{f^{(j)}}{j!}(a)h^j+\sum_{j:|j|=r+1}\frac{f^{(j)}(a+\theta h)}{j!}h^j$$

Доказательство

$\triangleright$

Из прошлой теоремы: $\varphi(t)=f(a+th), \quad h=x-a$

$$\varphi^{(k)}=\sum_{j:|j|\le r}\frac{r!}{j!}\frac{\partial^k}{\partial x^j}f(a+th)$$

$\varphi(0)=f(a)$; Распишем Формулу Тейлора с остатком в виде Лагранжа для $\varphi(t)$ в точке 0.

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi(0)}{1!}(t)+\dots+\frac{\varphi^{(r)}}{r!}(t)+\frac{\varphi^{(r+1)}(\overline{t})}{(r+1)!}t^{r+1}$$

$$f(x)=\sum_{j:|j|\le r}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\sum_{j:|j|=r+1}\frac{f^{(j)}(a+\theta(x-a))}{j!}(x-a)^j$$

В чем фишка: мы подставляем $\varphi^{(i)}$-ю производную в формулу Тейлора для φ (которую мы получили из предыдущей теоремы о сдвиге), тем самым уничтожая факториалы. И все супер.

Теперь в форме Пеано:

$$f(a+h)=\sum_{j:|j|\le r}\frac{f^{(j)}}{j!}(a)h^j+o(|h|^r)$$

Заметим, что $j^1+j^2+\dots+j^m=r+1$ (Для последнего члена в форме Лагранжа)

Докажем, что $h_1^{j_1}\cdot h_2^{j_2}\dots h_m^{j_m}=o(|h|^r), \quad h\to 0$

Распишем дробь:

$$\frac{h_1^{j_1}h_2^{j_2}\dots h_m^{j_m}}{|h^r|}|h|=\frac{|h_1^{j_1}}{|h|^{j_1}}\cdot\frac{|h_2^{j_2}}{|h|^{j_2}}\cdots\frac{|h_m^{j_m}}{|h|^{j_m}}|h|$$

Все получившиеся дроби < 1. Это следует из того, что $|h| = \sqrt{\sum_{i\in[1,m]} |h_j|^2}$, и, типа, мы просто делим 1 координату на сумму всех $\Rightarrow$ заведомо меньше $\Rightarrow$ при $h \to 0$ все равно $o(|h|^r)$

$\triangleleft$

3.4 Теоремы

3.4.1 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда[1]

3.4.1.1 Преобразование Абеля (суммирование по частям)

$$A_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = A_N b_N + \sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

3.4.1.2 Дирихле

Формулировка
$\exists \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$

1. A_n ограничено, т.е. $\exists C_A : \forall n > 0 \quad |A_n| \leq C_A$
2. b_n монотонно и $b_n \to 0$

Если всё выполняется, ряд сходится.

Доказательство
Запишем преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = A_N b_N + \sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Здесь A_N ограничено, b_N б.м. $\Rightarrow A_N b_N \to 0$.

Остаётся доказать абсолютную сходимость $\sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$:

$$b_n \to 0 \Rightarrow \exists C_B : \forall n > 0 \quad |b_n| < C_B$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leq C_A \sum_{k=1}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A (b_k - b_{k+1} + b_{k+1} - b_{k+2} + \ldots + b_{N-1} - b_N) = \pm C_A (b_k - b_N) \leq 2 \cdot C_A \cdot C_B$$

Все числа здесь конечны, а значит ряд абсолютно сходится (а значит, просто тоже сходится), а значит в исходном преобразовании Абеля у нас все слагаемые сходятся, а значит сам представленный ряд сходится.

3.4.1.3 Абель

Формулировка

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится ($\Rightarrow \exists \lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n = \alpha$)
2. b_n монотонно, b_n ограничено

Здесь требования к a_n сильнее, а к b_n слабее.

Доказательство
Вспоминаем, что у монотонной и ограниченной последовательности есть предел:

$$\exists \lim b_n := \beta$$

Далее нам надо сделать супер–мега–трюк, а именно прибавить и отнять от исходного ряда $\beta \sum_{n=1}^{N} a_n$:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \beta \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \beta \sum_{n=1}^{N} a_n = \beta \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} a_n (b_n - \beta)$$

При $N \to +\infty$ происходит предельный переход:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = \beta\alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (b_n - \beta)$$

Левое слагаемое конечно, обратим внимание на правое: $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k (b_k - \beta)$ сходится по признаку Дирихле, так как a_k сходится $\Rightarrow$ a_k ограничено, $b_k \to \beta \Rightarrow b_k - \beta \to 0$, монотонность b_k у нас остаётся по условию.

Таким образом, получившееся выражение тоже целиком сходится.

3.4.2 Теорема о группировке слагаемых[3]

Формулировка:

Рассмотрим ряды: $(A) = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$, $(B) = b_1 + \ldots + b_k + \ldots$, где $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$. Тогда справедливы утверждения:

1. Если ряд (A) сходится, то ряд (B) сходится и имеет ту же сумму.
2. Если (A) - положительный ряд, то $S^a = S^b$ (или суммы рядов равны бесконечности)

Доказательство:
В принципе, тривиально: из того, что $S_m^b = S_{n_m}^a$, в первом случае получаем, что S_m^b стремится к сумме ряда (A), а во втором - что они сходятся к одному конечному значению или к бесконечности одновременно.

Замечания:

1. Из сходимости ряда (B) не следует сходимость (A)
2. Если $a_n \to 0$, а ряд (B) сходится, причем скобки в нем ограниченного размера, то есть

$$\exists M : \forall k \, n_k - n_{k-1} \leq M,$$

то ряд (A) тоже сходится

Доказательство:

1. Контрпример: ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится, но если расставить скобки так: $(1-1)+(1-1)+\ldots$, то ряд получается сходящимся.
2. Рассмотрим частичную сумму S_N^a, где $n_k \leq N \leq n_{k+1}$. Ее можно записать как $S_k^b + \Delta_k$, где Δ_k - "неполная скобка т.е. $\Delta_k = a_{n_k+1} + \ldots + a_N$. Тогда

$$|\Delta_k| \leq |a_{n_k+1}| + \ldots + |a_N| \leq |a_{n_k+1}| + \ldots + |a_{n_k+M}| \to 0, \text{ при } k \to \infty$$

т.к. с некоторого места $a_{n_k+i} \leq \varepsilon / M$

3.4.3 Теорема о перестановке слагаемых[3]

Формулировка:

Рассмотрим ряд $\sum a_k$ - положительный ряд.

Пусть $\sum b_k$ - его перестановка.

Тогда, если ряд $\sum a_k$ абсолютно сходится, то ряд $\sum b_k$ абсолютно сходится к той же сумме.

Доказательство:

1. Путь $\sum a_k$ - положительный ряд.

   По определению частичная сума $\sum S_k^b = a_{\pi(1)} + \ldots + a_{\pi(k)} \leq S_M^a$, где $M = \max(\pi(1), \ldots, \pi(k))$

   Так как $M \to \infty$ при $k \to \infty$, а пределы частичных сумм существуют, получаем, что $S^b \leq S^a$, следовательно существует π^{-1}.

   Аналогично получаем $S^a \leq S^b$, т.е. $S^a = S^b$.
2. Убираем ограничение на член ряда.

   Рассматриваем ряды $\sum a_k^+, \sum b_k^+$, где $a_k^+ = \max(a_k, 0), b_k^+ = \max(b_k, 0)$. Опа, то есть эти ряды - есть перестановки, которые задаются биекцией, и по п.1 абсолютно сходятся к одному и тому же значению.

   Аналогично определяем $a_k^- = \max(-a_k, 0), b_k^- = \max(-b_k, 0)$. Понимаем, что $\sum a_k = \sum a_k^+ + \sum a_k^-$. И осознаем, что теорема доказана.

3.4.4 Теорема о произведении рядов[3]

Формулировка:
Пусть ряды $\sum a_k$, $\sum b_k$ абсолютно сходятся и их суммы равны S^a и S^b соответственно. Тогда для любой биекции $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, которая переводит x в $(\varphi(x), \psi(x))$, произведение рядов $\sum a_k$, $\sum b_k$ - абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S^a \cdot S^b$

Доказательство:
Обозначим $\sum |a_k| = S^a_*, \sum |b_k| = S^b_*$ и исследуем произведение рядов на абсолютную сходимость:

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)}| \cdot |b_{\psi(k)}| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \sum_{k=1}^{m} |b_k| \le S^a_* \cdot S^b_*$$

где $n = \max(\varphi(1), \ldots, \varphi(N))$, $m = \max(\psi(1), \ldots, \psi(N))$. Итого получаем, что множество частичных сумм нашего произведения ограничено, а значит, оно сходится (т.е. произведение сходится абсолютно).

Но если взять другую биекцию, то произведения, полученные с помощью нее - просто перестановка нашего произведения, а значит оба произведения сходятся к этой же сумме.

В качестве γ возьмем "нумерацию по квадратам". Т.е. $\varphi(k)$ будет как бы "координатой"по x, а $\psi(k)$ - "координатой"по y. По сути рассматриваем все возможные попарные произведения рядов выше.

Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \to S^a \cdot S^b \qquad n \to \infty$$

3.4.5 Единственность производной[2]

Формулировка:

Производный оператор (если он существует) определён однозначно.

Доказательство:

$\triangleright$

Краткий ответ: так как он вычисляется однозначно для каждого $u \in \mathbb{R}^m$.

Докажем этот удивительный аспект!

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$$F(a+h) = F(a) + Lh + o(h)$$

Пусть $h = tu$, где $t \in \mathbb{R}$. Причём, $|t| < \frac{r}{|u|}, B(a,r) \in E$ Тогда:

$$F(a+tu) = F(a) + tLu + o(t)$$

$$Lu = \frac{F(a+tu)-F(a)}{t} - \frac{o(t)}{t}$$
$$Lu = \lim_{t\to 0} \frac{F(a+tu)-F(a)}{t}$$

— однозначно определено!

$\triangleleft$

Замечание (о дифференцируемости функции нескольких переменных):

Логично, что $x \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_m) \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Поэтому в векторном виде можно записать дифференцируемость так:

$$F(x+a) = F(a) + L(x-a) + \Phi(x-a)|x-a|$$

3.4.6 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций[2]

Формулировка:

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$F(x) \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),\ a \in Int(E)$

1. $F(x)$ — дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ все f_i дифференцируемы в точке a
2. i-я строчка матрицы Якоби F является матрицей Якоби для f_i

Доказательство:

$\triangleright$

Просто распишем производную в точке a для i координатной функции:

$f_i(x) = f(a) + (\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{im})(x-a) + \Phi_i(x-a)|x-a|$

(очевидно всё выполняется, плюс они все ещё и непрерывны, что очевидно, если расписать по координатам)

$\triangleleft$

3.4.7 Необходимое условие дифференцируемости[2]

Формулировка:

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ a \in Int(E)$

F — дифференцируема в точке a.

Тогда $\exists f_1', f_2', \ldots, f_m'$ и матрица Якоби в точке $a = (f_1', f_2', \ldots, f_m')$

Доказательство:

$\triangleright$

Распишем определение дифференцируемости:

$$f(a+h) = f(a) + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_m h_m + \alpha(h)|h|$$

Зафиксируем точку $k \in [1, m]$. Пусть $h_k := s \cdot (0,0,0,0,0,1,\ldots,0,0,0)$ (единичка на k-том месте), причём $s < r$, где $B(a,r) \subset E$.

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k + s, \ldots, a_m) = f(a) + \lambda_k \cdot s + \alpha(h(s))|s|$$

Выражаем λ_k :

$$\lambda_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Итого, все производные существуют и в матрице Якоби действительно располагаются они.

$\triangleleft$

3.4.8 Дифференцирование 'произведений'[2]

Формулировка:
$F, G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \quad a \in Int(e)$

$\lambda : E \to \mathbb{R}$

F, G, λ - дифференцируемы в точке a

Тогда:

1. $(\lambda F)'(a) \cdot h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a) \cdot h$ - причем тут в первом слагаемом справа от равенства мы на h "действуем а не умножаем.
2. $(< F, G >)'(a)h = < F'(a)h, G(a) > + < F(a), G'(a)h >$

Доказательство:

$\triangleright$

1. Сначала рассмотрим based версию для $l = 1$: $(\lambda f)(a+h) - (\lambda f)(a) = \lambda(a+h)f(a+h) - \lambda(a)f(a) = (\lambda(a) + \lambda'(a)h + \alpha(h)|h|) \cdot (f(a) + f'(a)h + \beta(h)|h|) - \lambda(a)f(a) = \lambda(a)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + \lambda'(a)hf(a) + o(h)$ Итого: $(\lambda'(a)h)f(a) + \lambda(a)(f'(a)h + o(h))$ А теперь просто скажем, что это одна из координат по которой мы дифференцируем, и будем радоваться жизни.
2. По определению:
$$< F, G > (x) = \sum_{i=1}^{l} f_i(x) g_i(x)$$

А теперь:

$$((< F, G >)'(a))'h = \sum_{i=1}^{l}(f_i(a)g_i(a))'h =$$
$$= \sum_{i=1}^{l} f_i'(a)hg_i(a) + f_i(a)g_i'(a)h =$$
$$= \sum_{i=1}^{l} f_i'(a)hg_i(a) + \sum_{i=1}^{l} f_i(a)g_i'(a)h =$$
$$=< F'(a)h, G(a) > + < F(a), G'(a)h >$$

$\triangleleft$

3.4.9 Экстремальное свойство градиента[3]

Формулировка:

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad a \in Int(E)$

f - дифференцируема в т.$a \quad gradf(a) = \nabla f(a) \neq 0$

$l := \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ - вектор-направление градиента (наискорейшего возрастания функции)

т.е. $\forall h \in \mathbb{R}^m |h| = r$

$$-|\nabla f(a)| = -\frac{\partial f}{\partial l}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial t}(a) = |\nabla f(a)|$$

Причем равенство достигается при $h = -l$ слева и $h = l$ справа.

Доказательство:

$\triangleright$

По определению градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) =< \nabla f(a), h >$$

Неравенство КБШ:

$$< \nabla f(a), h > \leq |\nabla f(a)||h| = |\nabla f(a)|$$

Так как по факту скалярное произведение стоит под модулем, то и исходное условие выполняется.

Альтернативная версия, с помощью которой проще понять идею: l - нормирован, h - тоже нормирован, $< l, h >$ будет максимальным при $l = h$.

$\triangleleft$

3.4.10 Независимость частных производных от порядка дифференцирования[3]

Формулировка:

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad a \in Int(a)$

Мы рассматриваем $m = 2$, остальные сводятся к этому случаю по правилу раскрытия дифференциала

Если $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$ в окрестности т.a и они непрерывны $\Rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Доказательство:

$\triangleright$

Рассмотрим суперфункцию:

$$\Delta^2 f(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$$

$$\alpha(h) = \Delta^2 f(h, k')$$

где k' - фикированное k.

Пусть $\bar{h}$ - какая-то средняя точка.

$$\alpha(0) = 0$$

$$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \underset{\text{По Лагранжу}}{=} \alpha'(\bar{h}) \cdot h = \left(f'_x(x_0+\bar{h}, y_0+k') - f'_x(x_0+\bar{h}, y_0)\right) h \underset{\text{По Лагранжу}}{=} f''_{xy}(x_0+\bar{h}, y_0+\bar{k}) \cdot h \cdot k$$

Аналогично вводим $\beta(k)$ с фиксированным h

Получаем:

$$\beta(k) = \dots = f''_{yx}(x_0+\bar{\bar{h}}, y_0+\bar{\bar{k}}) \cdot h \cdot k$$

При фиксированных $h, k \neq 0$

$$\alpha(h) = \beta(k)$$

$$h \cdot k \cdot f''_{xy}(x_0+\bar{h}, y_0+\bar{k}) = f''_{yx}(x_0+\bar{\bar{h}}, y_0+\bar{\bar{k}}) \cdot h \cdot k$$

$\bar{h}, \bar{k}, \bar{\bar{h}}, \bar{\bar{k}}$ - какие-то средние значения между $[0, h]$ и $[0, k]$.

$$f''_{xy}(x_0+\bar{h}, y_0+\bar{k}) = f''_{yx}(x_0+\bar{\bar{h}}, y_0+\bar{\bar{k}}) \underset{\bar{h},\bar{k},\bar{\bar{h}},\bar{\bar{k}} \to \infty}{\to} f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

$\triangleleft$

3.4.11 Полиномиальная формула[3]

Формулировка:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{m} \dots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} \cdot a_{n_2} \cdots a_{n_r} = \sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Здесь j - мультииндекс.

Первое равенство - наивная реализация раскрытия скобок.

Доказательство:

$\triangleright$

Как ни странно, по индукции.

База:

$r = 1$ - очевидно.

Переход:

Пусть все верно для r:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^r = \sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Покажем для $r + 1$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^{r+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_m)(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^r = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) \cdot \sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j =$$

Вот теперь мы повеселимся. Сначала "домножим"на первую скобку, породив m сумм:

$$= \sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1+1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m} + \dots + \sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m+1}$$

Теперь перепишем вот это вот все к более удобному виду. На примере первой суммы:

$$\sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1+1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m} \longrightarrow \sum_{j:|j|=r+1 j_1 \geq 1} \frac{r! j_1}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_m^{j_m}$$

Итак, мы добавили 1 член, поэтому теперь мультииндекс $|j| \leq r + 1$. Причем, $j_1 \geq 1$, т.к. надо гарантировать это, потому что мы только что домножили на скобку. Также мы по пути трансформировали индексы j, поэтому из дроби $\frac{r!}{j_1! \dots}$ j_1 - это как бы $(j_1 + 1)$ из прошлой суммы. Поэтому домножаем дробь на j_1, чтобы в знаменателе сократить последний член.

Итого:

$$\sum_{j:|j| \leq r+1} \frac{r! j_1}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m} + \dots + \sum_{j:|j|=r+1, j_m \geq 1} \frac{r! j_m}{j_1! j_2! \dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m}$$

Отметим, что приписка $j_i \geq 1$ - бессмысленна, т.к. если он равен нулю, то слагаемое просто занулится, и все будет норм.

Выносим все общее:

$$\sum_{j:|j|=r+1} \frac{r!(j_1+j_2+\dots+j_m)}{j_1!j_2!\dots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_m^{j_m} = \sum_{j:|j|=r+1} \frac{(r+1)!}{j!} a^{(r+1)}$$

Все сошлось!

◁

3.4.12 Лемма о дифференцировании "сдвига"[3]

Формулировка:

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad f \in C^r(E)$

$a \in E, \quad h \in \mathbb{R}^m \quad a + th \in E$, при $t \in [-1, 1]$

Пусть $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{j:|j|=k} \frac{k!}{j!} \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a + th)$

Доказательство:

▷

$$\varphi(t)'_t = f(a+th)'_t = \frac{\partial}{\partial t} f(a_1+th_1, a_2+th_2, \dots, a_m+th_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) \cdot h_i$$

$$\varphi''(t)_t = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i \right)'_t = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(a+th) \cdot h_{i_1} \cdot h_{i_2}$$

Замечаем закономерность:

$$\varphi^{(k)}(t)_t = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a+th) h_{i_1} \cdot h_{i_2} \cdot \dots \cdot h_{i_k} =$$

И т.к. нам без разницы, в каком порядке брать производные, применяем полиномиальную формулу:

$$= \varphi^{(k)}(t) = \sum_{j:|j|=k} \frac{k!}{j!} \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a+th)$$

◁