3.1. 数组

数组（array）是一种线性数据结构，其将相同类型的元素存储在连续的内存空间中。我们将元素在数组中的位置称为该元素的索引（index）。下图展示了数组的主要概念和存储方式。

3.1.1. 数组常用操作

1. 初始化数组

我们可以根据需求选用数组的两种初始化方式：无初始值、给定初始值。在未指定初始值的情况下，大多数编程语言会将数组元素初始化为 0 。

```
# 初始化数组
arr: list[int] = [0] * 5  # [ 0, 0, 0, 0, 0 ]
nums: list[int] = [1, 3, 2, 5, 4]
```

2. 访问元素

数组元素被存储在连续的内存空间中，这意味着计算数组元素的内存地址非常容易。给定数组内存地址（首元素内存地址）和某个元素的索引，我们可以使用下图所示的公式计算得到该元素的内存地址，从而直接访问该元素。

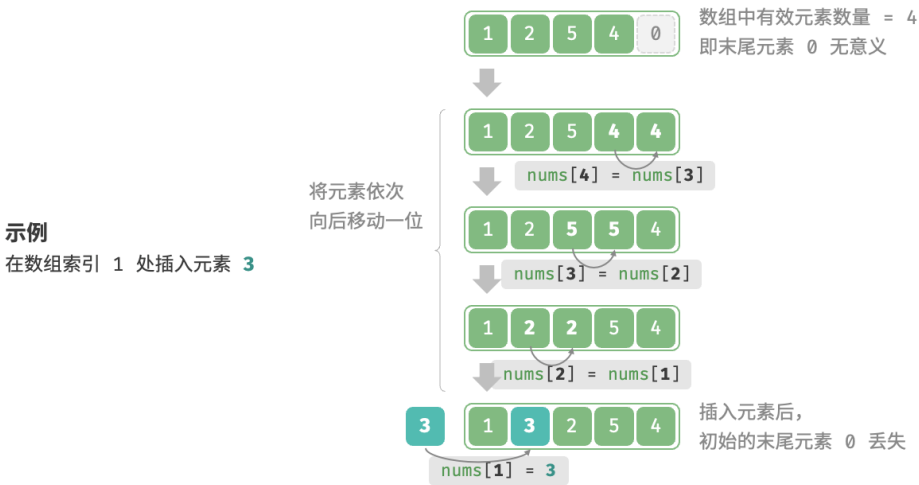
观察上图，我们发现数组首个元素的索引为 0 ，这似乎有些反直觉，因为从 1 开始计数会更自然。但从地址计算公式的角度看，**索引本质上是内存地址的偏移量**。首个元素的地址偏移量是 0 ，因此它的索引为 0 是合理的。

在数组中访问元素非常高效，我们可以在 $O(1)$ 时间内随机访问数组中的任意一个元素。

```
def random_access(nums: list[int]) -> int:
    """随机访问元素"""
    # 在区间 [0, len(nums)-1] 中随机抽取一个数字
    random_index = random.randint(0, len(nums) - 1)
    # 获取并返回随机元素
    random_num = nums[random_index]
    return random_num
```

3. 插入元素

数组元素在内存中是“紧挨着的”，它们之间没有空间再存放任何数据。如下图所示，如果想在数组中间插入一个元素，则需要将该元素之后的所有元素都向后移动一位，之后再把元素赋值给该索引。

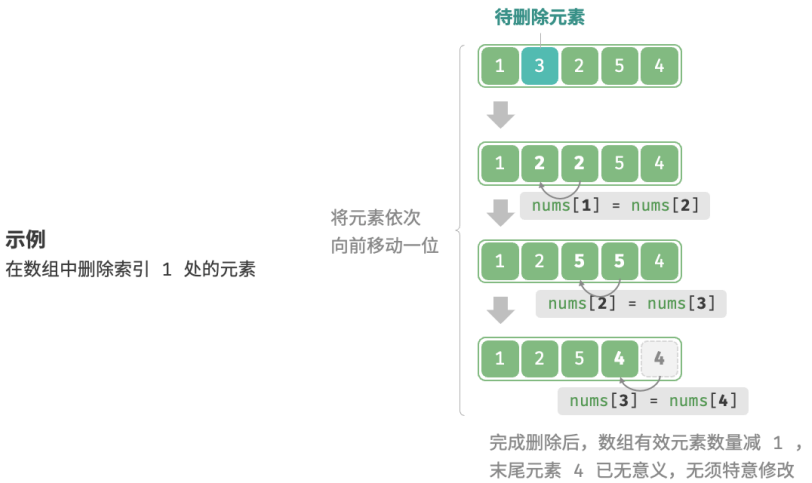


值得注意的是，由于数组的长度是固定的，因此插入一个元素必定会导致数组尾部元素“丢失”。我们将这个问题的解决方案留在“列表”章节中讨论。

```python
def insert(nums: list[int], num: int, index: int):
    """在数组的索引 index 处插入元素 num"""
    # 把索引 index 以及之后的所有元素向后移动一位
    for i in range(len(nums) - 1, index, -1):
        nums[i] = nums[i - 1]
    # 将 num 赋给 index 处的元素
    nums[index] = num
```

4. 删除元素

同理，如下图所示，若想删除索引 i 处的元素，则需要把索引 i 之后的元素都向前移动一位。



请注意，删除元素完成后，原先末尾的元素变得“无意义”了，所以我们无须特意去修改它。

```python
def remove(nums: list[int], index: int):
    """删除索引 index 处的元素"""
    # 把索引 index 之后的所有元素向前移动一位
    for i in range(index, len(nums) - 1):
        nums[i] = nums[i + 1]
```

总的来看，数组的插入与删除操作有以下缺点。

- **时间复杂度高**：数组的插入和删除的平均时间复杂度均为 $O(n)$ ，其中 n 为数组长度。
- **丢失元素**：由于数组的长度不可变，因此在插入元素后，超出数组长度范围的元素会丢失。
- **内存浪费**：我们可以初始化一个比较长的数组，只用前面一部分，这样在插入数据时，丢失的末尾元素都是“无意义”的，但这样做会造成部分内存空间浪费。

5. 遍历数组

在大多数编程语言中，我们既可以通过索引遍历数组，也可以直接遍历获取数组中的每个元素。

```python
def traverse(nums: list[int]):
    """遍历数组"""
    count = 0
    # 通过索引遍历数组
    for i in range(len(nums)):
        count += nums[i]
    # 直接遍历数组元素
    for num in nums:
        count += num
    # 同时遍历数据索引和元素
    for i, num in enumerate(nums):
        count += nums[i]
        count += num
```

6. 查找元素

在数组中查找指定元素需要遍历数组，每轮判断元素值是否匹配，若匹配则输出对应索引。因为数组是线性数据结构，所以上述查找操作被称为“线性查找”。

```python
def find(nums: list[int], target: int) -> int:
    """在数组中查找指定元素"""
    for i in range(len(nums)):
        if nums[i] == target:
            return i
    return -1
```

7. 扩容数组

在复杂的系统环境中，程序难以保证数组之后的内存空间是可用的，从而无法安全地扩展数组容量。因此在大多数编程语言中，**数组的长度是不可变的**。

如果我们希望扩容数组，则需重新建立一个更大的数组，然后把原数组元素依次复制到新数组。这是一个 $O(n)$ 的操作，在数组很大的情况下非常耗时。代码如下所示。

```python
def extend(nums: list[int], enlarge: int) -> list[int]:
    """扩展数组长度"""
    # 初始化一个扩展长度后的数组
    res = [0] * (len(nums) + enlarge)
    # 将原数组中的所有元素复制到新数组
    for i in range(len(nums)):
        res[i] = nums[i]
    # 返回扩展后的新数组
    return res
```

3.1.2. 数组的优点与局限性

数组存储在连续的内存空间内，且元素类型相同。这种做法包含丰富的先验信息，系统可以利用这些信息来优化数据结构的操作效率。

- **空间效率高**：数组为数据分配了连续的内存块，无须额外的结构开销。
- **支持随机访问**：数组允许在 $O(1)$ 时间内访问任何元素。
- **缓存局部性**：当访问数组元素时，计算机不仅会加载它，还会缓存其周围的其他数据，从而借助高速缓存来提升后续操作的执行速度。

连续空间存储是一把双刃剑，其存在以下局限性。

- **插入与删除效率低**：当数组中元素较多时，插入与删除操作需要移动大量的元素。
- **长度不可变**：数组在初始化后长度就固定了，扩容数组需要将所有数据复制到新数组，开销很大。
- **空间浪费**：如果数组分配的大小超过实际所需，那么多余的空间就被浪费了。

3.1.3. 数组典型应用

数组是一种基础且常见的数据结构，既频繁应用在各类算法之中，也可用于实现各种复杂数据结构。

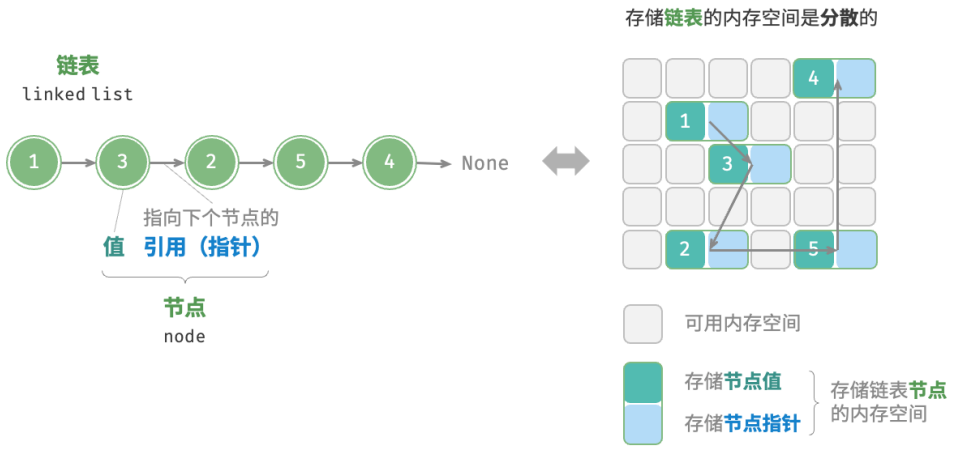
- **随机访问**：如果我们想随机抽取一些样本，那么可以用数组存储，并生成一个随机序列，根据索引实现随机抽样。
- **排序和搜索**：数组是排序和搜索算法最常用的数据结构。快速排序、归并排序、二分查找等都主要在数组上进行。
- **查找表**：当需要快速查找一个元素或其对应关系时，可以使用数组作为查找表。假如我们想实现字符到 ASCII 码的映射，则可以将字符的 ASCII 码值作为索引，对应的元素存放在数组中的对应位置。
- **机器学习**：神经网络中大量使用了向量、矩阵、张量之间的线性代数运算，这些数据都是以数组的形式构建的。数组是神经网络编程中最常使用的数据结构。
- **数据结构实现**：数组可以用于实现栈、队列、哈希表、堆、图等数据结构。例如，图的邻接矩阵表示实际上是一个二维数组。

3.2. 链表

内存空间是所有程序的公共资源，在一个复杂的系统运行环境下，空闲的内存空间可能散落在内存各处。我们知道，存储数组的内存空间必须是连续的，而当数组非常大时，内存可能无法提供如此大的连续空间。此时链表的灵活性优势就体现出来了。

链表（linked list）是一种线性数据结构，其中的每个元素都是一个节点对象，各个节点通过“引用”相连接。引用记录了下一个节点的内存地址，通过它可以从当前节点访问到下一个节点。

链表的设计使得各个节点可以分散存储在内存各处，它们的内存地址无须连续。



观察上图，链表的组成单位是节点（node）对象。每个节点都包含两项数据：节点的“值”和指向下一节点的“引用”。

- 链表的首个节点被称为“头节点”，最后一个节点被称为“尾节点”。
- 尾节点指向的是“空”，它在Java、C++和Python中分别被记为 `null` 、 `nullptr` 和 `None` 。
- 在C、C++、Go和Rust等支持指针的语言中，上述“引用”应被替换为“指针”。

如以下代码所示，链表节点 `ListNode` 除了包含值，还需额外保存一个引用（指针）。因此在相同数据量下，**链表比数组占用更多的内存空间**。

```
class ListNode:
    """链表节点类"""
    def __init__(self, val: int):
        self.val: int = val                # 节点值
        self.next: ListNode | None = None # 指向下一节点的引用
```

3.2.1. 链表常用操作

1. 初始化链表

建立链表分为两步，第一步是初始化各个节点对象，第二步是构建节点之间的引用关系。初始化完成后，我们就可以从链表的头节点出发，通过引用指向 `next` 依次访问所有节点。

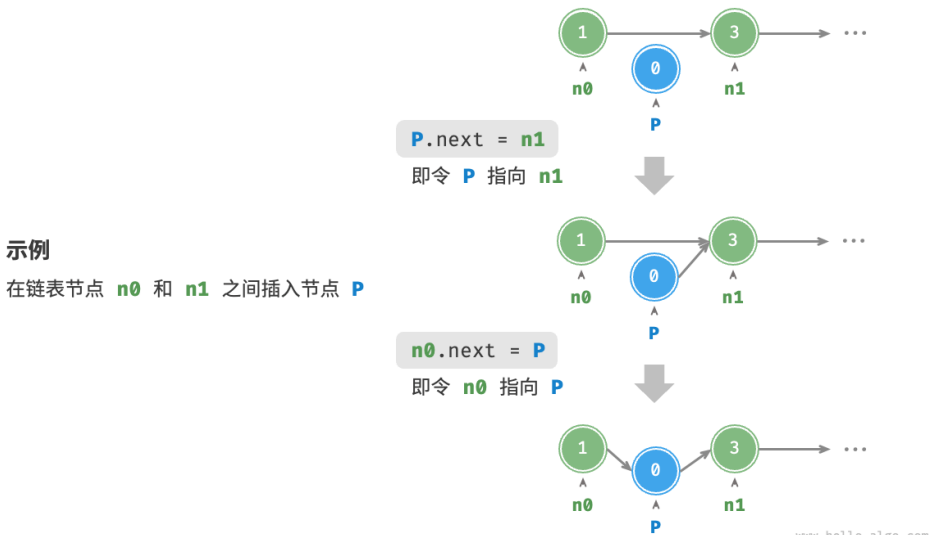
```
# 初始化链表 1 -> 3 -> 2 -> 5 -> 4
# 初始化各个节点
n0 = ListNode(1)
n1 = ListNode(3)
n2 = ListNode(2)
n3 = ListNode(5)
n4 = ListNode(4)
# 构建节点之间的引用
n0.next = n1
n1.next = n2
n2.next = n3
n3.next = n4
```

数组整体是一个变量，比如数组 `nums` 包含元素 `nums[0]` 和 `nums[1]` 等，而链表是由多个独立的节点对象组成的。**我们通常将头节点当作链表的代称**，比如以上代码中的链表可记作链表 `n0` 。

2. 插入节点

在链表中插入节点非常容易。如下图所示，假设我们想在相邻的两个节点 `n0` 和 `n1` 之间插入一个新节点 `P` ，**则只需改变两个节点引用（指针）即可**，时间复杂度为 $O(1)$ 。

相比之下，在数组中插入元素的时间复杂度为 $O(n)$ ，在大数据量下的效率较低。

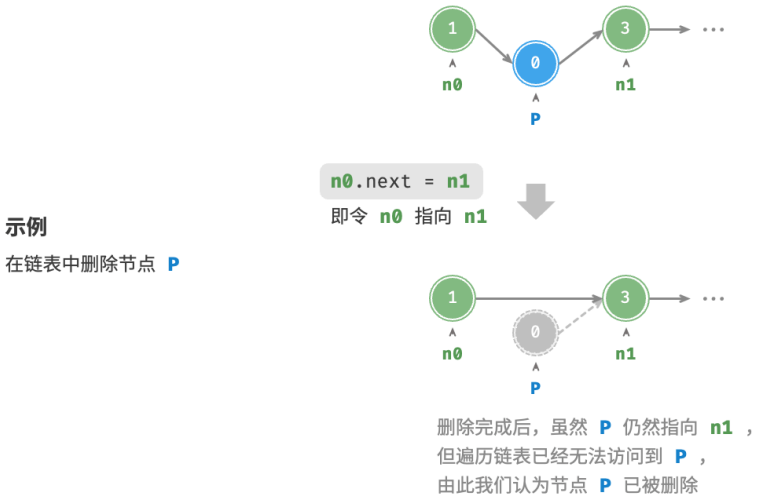



```
def insert(n0: ListNode, P: ListNode):
    """在链表的节点 n0 之后插入节点 P"""
    n1 = n0.next
```

```
    P.next = n1
    n0.next = P
```

3. 删除节点

如下图所示，在链表中删除节点也非常方便，**只需改变一个节点的引用（指针）即可**。请注意，尽管在删除操作完成后节点 `P` 仍然指向 `n1`，但实际上遍历此链表已经无法访问到 `P`，这意味着 `P` 已经不再属于该链表了。




```
def remove(n0: ListNode):
    """删除链表的节点 n0 之后的首个节点"""
    if not n0.next:
        return
    # n0 -> P -> n1
    P = n0.next
    n1 = P.next
    n0.next = n1
```

4. 访问节点

在链表中访问节点的效率较低。如上一节所述，我们可以在 $O(1)$ 时间下访问数组中的任意元素。链表则不然，程序需要从头节点出发，逐个向后遍历，直至找到目标节点。也就是说，访问链表的第 i 个节点需要循环 $i - 1$ 轮，时间复杂度为 $O(n)$。

```
def access(head: ListNode, index: int) -> ListNode | None:
    """访问链表中索引为 index 的节点"""
    for _ in range(index):
        if not head:
            return None
        head = head.next
    return head
```

5. 查找节点

遍历链表，查找其中值为 `target` 的节点，输出该节点在链表中的索引。此过程也属于线性查找。代码如下所示。

```python
def find(head: ListNode, target: int) -> int:
    """在链表中查找值为 target 的首个节点"""
    index = 0
    while head:
        if head.val == target:
            return index
        head = head.next
        index += 1
    return -1
```

3.2.2. 数组 vs. 链表

下表总结了数组和链表的各项特点并对比了操作效率。由于它们采用两种相反的存储策略，因此各种性质和操作效率也呈现对立的特点。

	数组	链表
存储方式	连续内存空间	分散内存空间
容量扩展	长度不可变	可灵活扩展
内存效率	元素占用内存少、但可能浪费空间	元素占用内存多
访问元素	$O(1)$	$O(n)$
添加元素	$O(n)$	$O(1)$
删除元素	$O(n)$	$O(1)$

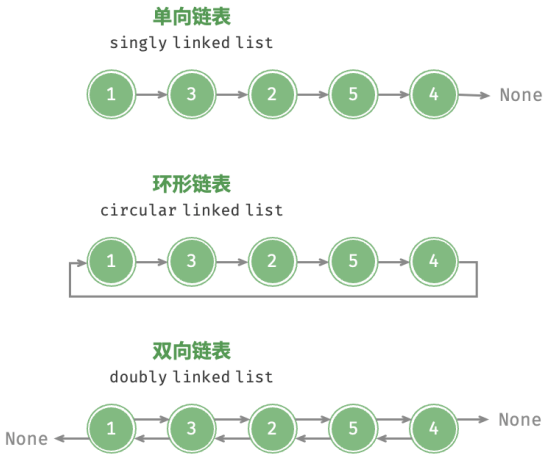
3.2.3. 常见链表类型

如下图所示，常见的链表类型包括三种。

- **单向链表**：即前面介绍的普通链表。单向链表的节点包含值和指向下一节点的引用两项数据。我们将首个节点称为头节点，将最后一个节点称为尾节点，尾节点指向空 `None` 。

- **环形链表**：如果我们令单向链表的尾节点指向头节点（首尾相接），则得到一个环形链表。在环形链表中，任意节点都可以视作头节点。
- **双向链表**：与单向链表相比，双向链表记录了两个方向的引用。双向链表的节点定义同时包含指向后继节点（下一个节点）和前驱节点（上一个节点）的引用（指针）。相较于单向链表，双向链表更具灵活性，可以朝两个方向遍历链表，但相应地也需要占用更多的内存空间。

```
class ListNode:
    """双向链表节点类"""
    def __init__(self, val: int):
        self.val: int = val                  # 节点值
        self.next: ListNode | None = None    # 指向后继节点的引用
        self.prev: ListNode | None = None    # 指向前驱节点的引用
```



3.2.4. 链表典型应用

单向链表通常用于实现栈、队列、哈希表和图等数据结构。

- **栈与队列**：当插入和删除操作都在链表的一端进行时，它表现的特性为先进后出，对应栈；当插入操作在链表的一端进行，删除操作在链表的另一端进行，它表现的特性为先进先出，对应队列。
- **哈希表**：链式地址是解决哈希冲突的主流方案之一，在该方案中，所有冲突的元素都会被放到一个链表中。
- **图**：邻接表是表示图的一种常用方式，其中图的每个顶点都与一个链表相关联，链表中的每个元素都代表与该顶点相连的其他顶点。

双向链表常用于需要快速查找前一个和后一个元素的场景。

- **高级数据结构**：比如在红黑树、B树中，我们需要访问节点的父节点，这可以通过在节点中保存一个指向父节点的引用来实现，类似于双向链表。
- **浏览器历史**：在网页浏览器中，当用户点击前进或后退按钮时，浏览器需要知道用户访问过的前一个和后一个网页。双向链表的特性使得这种操作变得简单。

- **LRU 算法**：在缓存淘汰（LRU）算法中，我们需要快速找到最近最少使用的数据，以及支持快速添加和删除节点。这时候使用双向链表就非常合适。

  环形链表常用于需要周期性操作的场景，比如操作系统的资源调度。

- **时间片轮转调度算法**：在操作系统中，时间片轮转调度算法是一种常见的CPU调度算法，它需要对一组进程进行循环。每个进程被赋予一个时间片，当时间片用完时，CPU将切换到下一个进程。这种循环操作可以通过环形链表来实现。
- **数据缓冲区**：在某些数据缓冲区的实现中，也可能会使用环形链表。比如在音频、视频播放器中，数据流可能会被分成多个缓冲块并放入一个环形链表，以便实现无缝播放。

3.3. 列表

列表（list）是一个抽象的数据结构概念，它表示元素的有序集合，支持元素访问、修改、添加、删除和遍历等操作，无须使用者考虑容量限制的问题。列表可以基于链表或数组实现。

- 链表天然可以看作一个列表，其支持元素增删查改操作，并且可以灵活动态扩容。
- 数组也支持元素增删查改，但由于其长度不可变，因此只能看作一个具有长度限制的列表。

当使用数组实现列表时，**长度不可变的性质会导致列表的实用性降低**。这是因为我们通常无法事先确定需要存储多少数据，从而难以选择合适的列表长度。若长度过小，则很可能无法满足使用需求；若长度过大，则会造成内存空间浪费。

为解决此问题，我们可以使用动态数组（dynamic array）来实现列表。它继承了数组的各项优点，并且可以在程序运行过程中进行动态扩容。

实际上，**许多编程语言中的标准库提供的列表是基于动态数组实现的**，例如Python中的 `list` 、Java中的 `ArrayList` 、C++中的 `vector` 和C#中的 `List` 等。在接下来的讨论中，我们将把“列表”和“动态数组”视为等同的概念。

3.3.1. 列表常用操作

1. 初始化列表

我们通常使用“无初始值”和“有初始值”这两种初始化方法。

```
# 初始化列表
# 无初始值
nums1: list[int] = []
# 有初始值
nums: list[int] = [1, 3, 2, 5, 4]
```

2. 访问元素

列表本质上是数组，因此可以在 $O(1)$ 时间内访问和更新元素，效率很高。

```
# 访问元素
num: int = nums[1]  # 访问索引 1 处的元素

# 更新元素
nums[1] = 0    # 将索引 1 处的元素更新为 0
```

3. 插入与删除元素

相较于数组，列表可以自由地添加与删除元素。在列表尾部添加元素的时间复杂度为 $O(1)$ ，但插入和删除元素的效率仍与数组相同，时间复杂度为 $O(n)$ 。

```
# 清空列表
nums.clear()

# 在尾部添加元素
nums.append(1)
nums.append(3)
nums.append(2)
nums.append(5)
nums.append(4)

# 在中间插入元素
nums.insert(3, 6)  # 在索引 3 处插入数字 6

# 删除元素
nums.pop(3)        # 删除索引 3 处的元素
```

4. 遍历列表

与数组一样，列表可以根据索引遍历，也可以直接遍历各元素。

```
# 通过索引遍历列表
count = 0
for i in range(len(nums)):
    count += nums[i]

# 直接遍历列表元素
for num in nums:
    count += num
```

5. 拼接列表

给定一个新列表 `nums1` ，我们可以将其拼接到原列表的尾部。

```
# 拼接两个列表
nums1: list[int] = [6, 8, 7, 10, 9]
```

```
nums += nums1  # 将列表 nums1 拼接到 nums 之后
```

6. 排序列表

完成列表排序后，我们便可以使用在数组类算法题中经常考查的“二分查找”和“双指针”算法。

```
# 排序列表
nums.sort()  # 排序后，列表元素从小到大排列
```

3.3.2. 列表实现

许多编程语言内置了列表，例如Java、C++、Python等。它们的实现比较复杂，各个参数的设定也非常考究，例如初始容量、扩容倍数等。感兴趣的读者可以查阅源码进行学习。

为了加深对列表工作原理的理解，我们尝试实现一个简易版列表，包括以下三个重点设计。

- **初始容量**：选取一个合理的数组初始容量。在本示例中，我们选择10作为初始容量。
- **数量记录**：声明一个变量 `size` ，用于记录列表当前元素数量，并随着元素插入和删除实时更新。根据此变量，我们可以定位列表尾部，以及判断是否需要扩容。
- **扩容机制**：若插入元素时列表容量已满，则需要进行扩容。先根据扩容倍数创建一个更大的数组，再将当前数组的所有元素依次移动至新数组。在本示例中，我们规定每次将数组扩容至之前的2倍。

```
class MyList:
    """列表类"""

    def __init__(self):
        """构造方法"""
        self._capacity: int = 10  # 列表容量
        self._arr: list[int] = [0] * self._capacity  # 数组（存储列表元素）
        self._size: int = 0  # 列表长度（当前元素数量）
        self._extend_ratio: int = 2  # 每次列表扩容的倍数

    def size(self) -> int:
        """获取列表长度（当前元素数量）"""
        return self._size

    def capacity(self) -> int:
        """获取列表容量"""
        return self._capacity
```

```python

    def get(self, index: int) -> int:
        """访问元素"""
        # 索引如果越界，则抛出异常，下同
        if index < 0 or index >= self._size:
            raise IndexError("索引越界")
        return self._arr[index]

    def set(self, num: int, index: int):
        """更新元素"""
        if index < 0 or index >= self._size:
            raise IndexError("索引越界")
        self._arr[index] = num

    def add(self, num: int):
        """在尾部添加元素"""
        # 元素数量超出容量时，触发扩容机制
        if self.size() == self.capacity():
            self.extend_capacity()
        self._arr[self._size] = num
        self._size += 1

    def insert(self, num: int, index: int):
        """在中间插入元素"""
        if index < 0 or index >= self._size:
            raise IndexError("索引越界")
        # 元素数量超出容量时，触发扩容机制
        if self._size == self.capacity():
            self.extend_capacity()
        # 将索引 index 以及之后的元素都向后移动一位
        for j in range(self._size - 1, index - 1, -1):
            self._arr[j + 1] = self._arr[j]
        self._arr[index] = num
        # 更新元素数量
        self._size += 1

    def remove(self, index: int) -> int:
        """删除元素"""
        if index < 0 or index >= self._size:
            raise IndexError("索引越界")
        num = self._arr[index]
        # 将索引 index 之后的元素都向前移动一位
        for j in range(index, self._size - 1):
            self._arr[j] = self._arr[j + 1]
        # 更新元素数量
        self._size -= 1
        # 返回被删除的元素
```

```
        return num

    def extend_capacity(self):
        """列表扩容"""
        # 新建一个长度为原数组 _extend_ratio 倍的新数组，并将原数组复制到新数组
        self._arr = self._arr + [0] * self.capacity() * (self._extend_ratio - 1)
        # 更新列表容量
        self._capacity = len(self._arr)

    def to_array(self) -> list[int]:
        """返回有效长度的列表"""
        return self._arr[: self._size]
```

3.4. 小结

- 数组和链表是两种基本的数据结构，分别代表数据在计算机内存中的两种存储方式：连续空间存储和分散空间存储。两者的特点呈现出互补的特性。
- 数组支持随机访问、占用内存较少；但插入和删除元素效率低，且初始化后长度不可变。
- 链表通过更改引用（指针）实现高效的节点插入与删除，且可以灵活调整长度；但节点访问效率低、占用内存较多。常见的链表类型包括单向链表、环形链表、双向链表。
- 列表是一种支持增删查改的元素有序集合，通常基于动态数组实现。它保留了数组的优势，同时可以灵活调整长度。
- 列表的出现大幅提高了数组的实用性，但可能导致部分内存空间浪费。
- 程序运行时，数据主要存储在内存中。数组可提供更高的内存空间效率，而链表则在内存使用上更加灵活。
- 缓存通过缓存行、预取机制以及空间局部性和时间局部性等数据加载机制，为CPU提供快速数据访问，显著提升程序的执行效率。
- 由于数组具有更高的缓存命中率，因此它通常比链表更高效。在选择数据结构时，应根据具体需求和场景做出恰当选择。