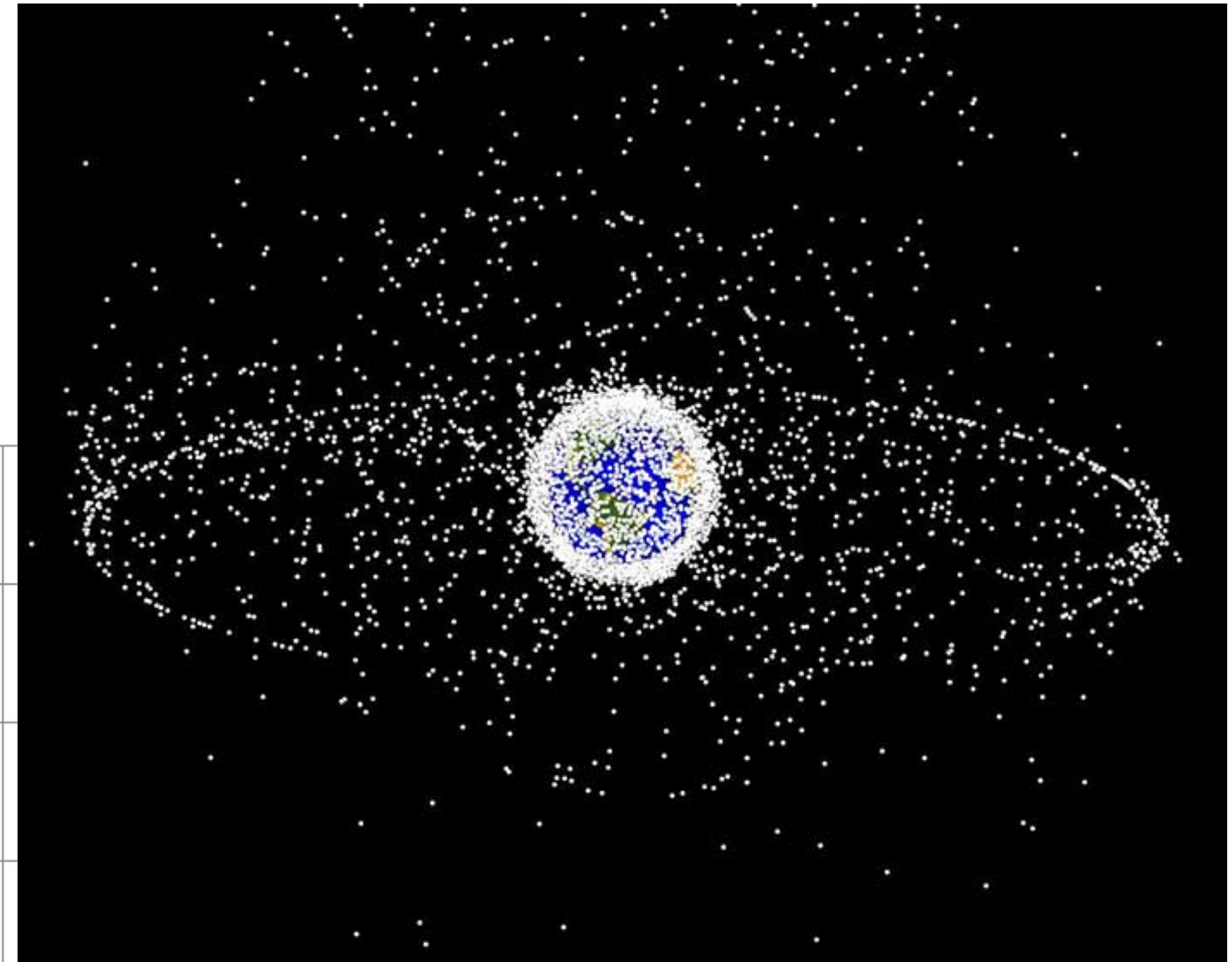
Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Выпускная квалификационная работа
на тему: «Математическое и численное моделирование неустойчивых движений по Хиллу в плоской круговой ограниченной задаче трёх тел»

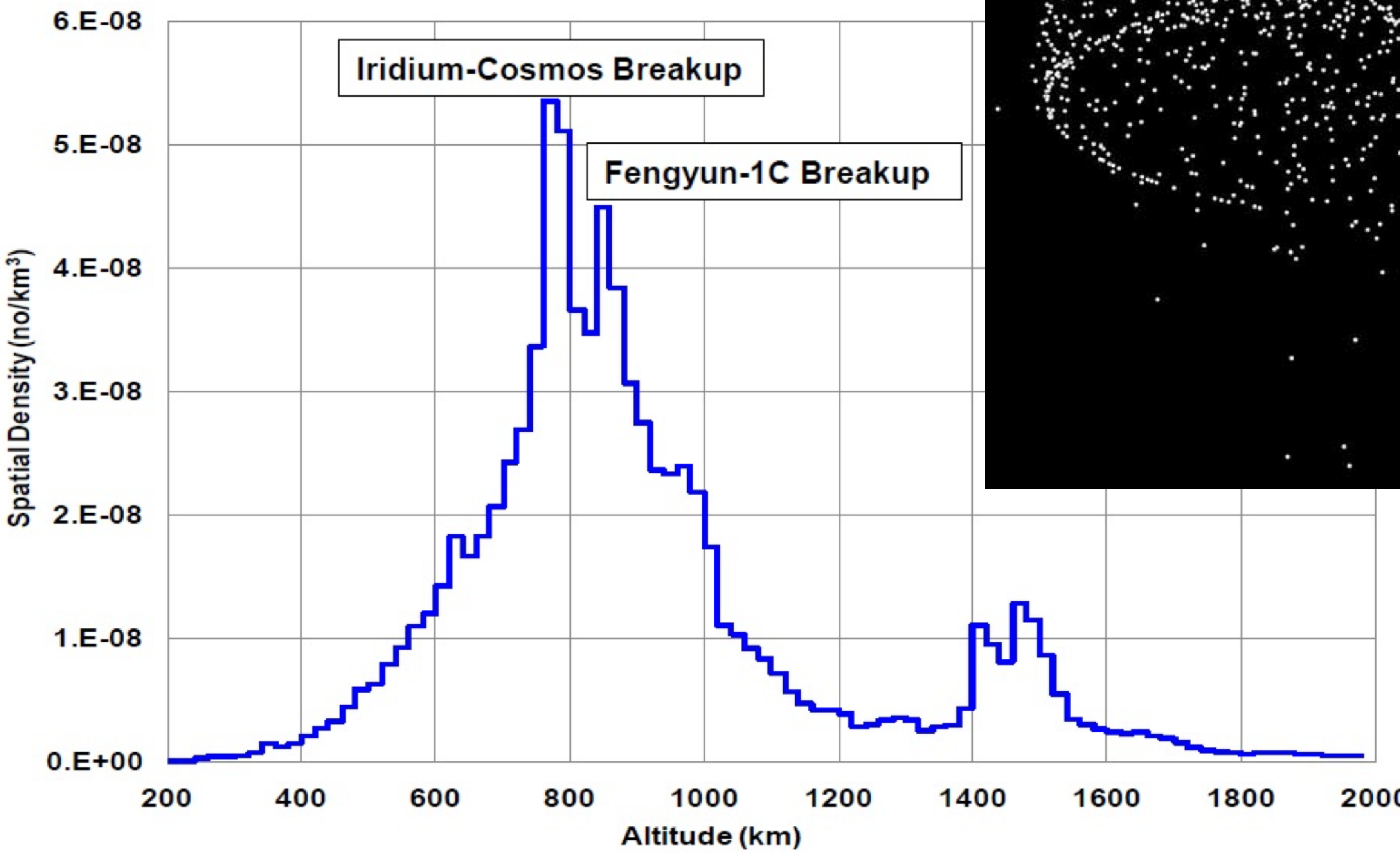
Руководитель: д.ф.-м.н. профессор Красильников П.С.
Дипломник гр. 8О-408Б: Колесников Е.В.

Москва, 2016.

Описание проблемы

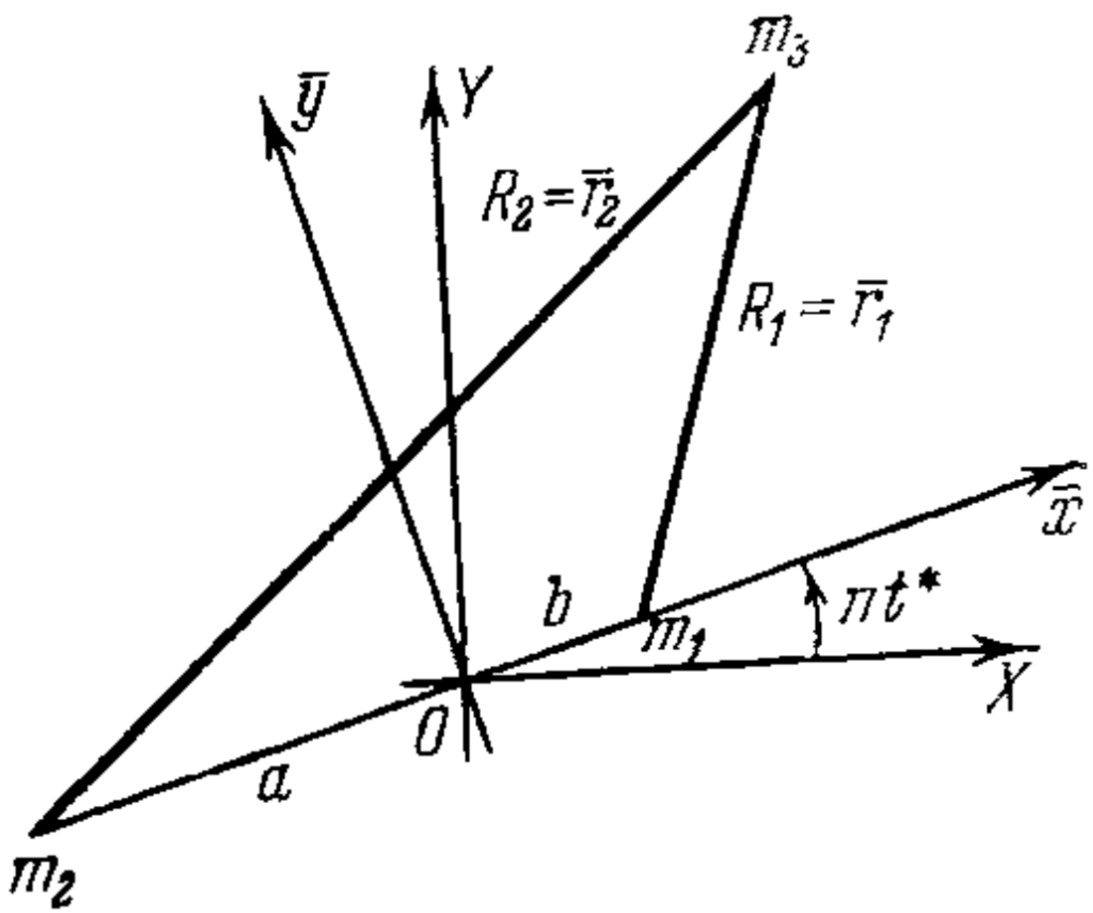


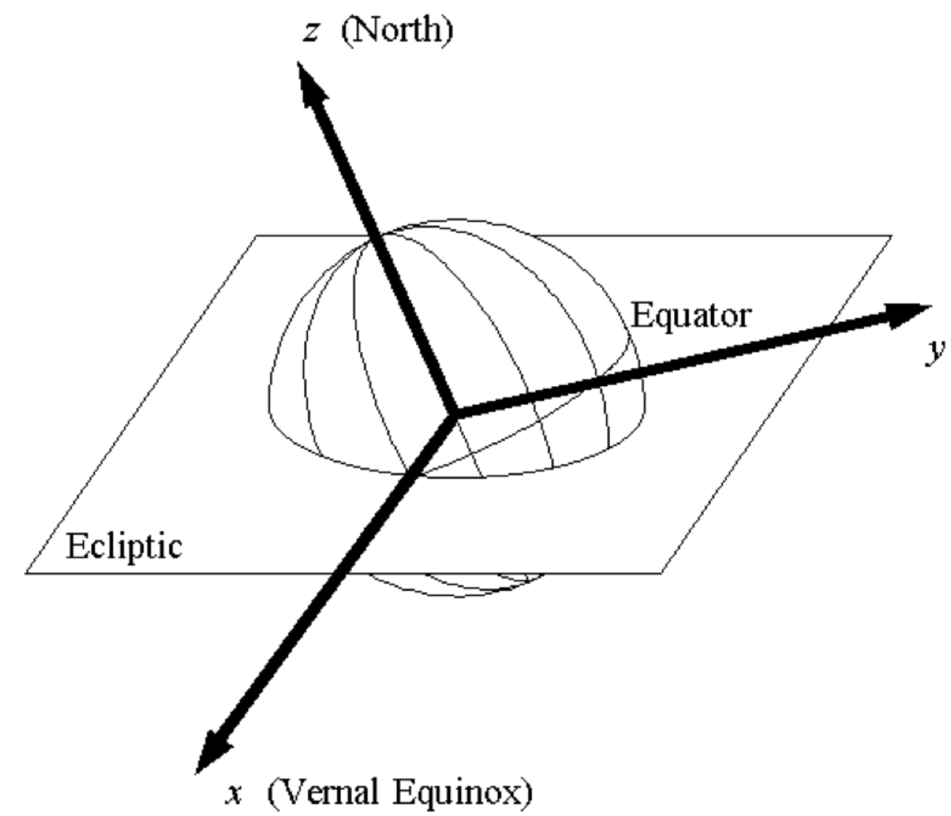
Модель распределения космических объектов в космосе



Пространственная плотность обломков на низких орбитах согласно NASA, 2011

Постановка плоской круговой ограниченной задачи трёх тел





Плоскость эклиптики

OXY — сидерическая система координат,
Oxy — синодическая система координат.

Дифференциальные уравнения задачи трёх тел

Система дифференциальных уравнений в сидерической системе координат:

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = f\,\frac{M_1}{\rho_1^3}(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}) + f\,\frac{M_2}{\rho_2^3}(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R})$$

Система дифференциальных уравнений в синодической системе координат:

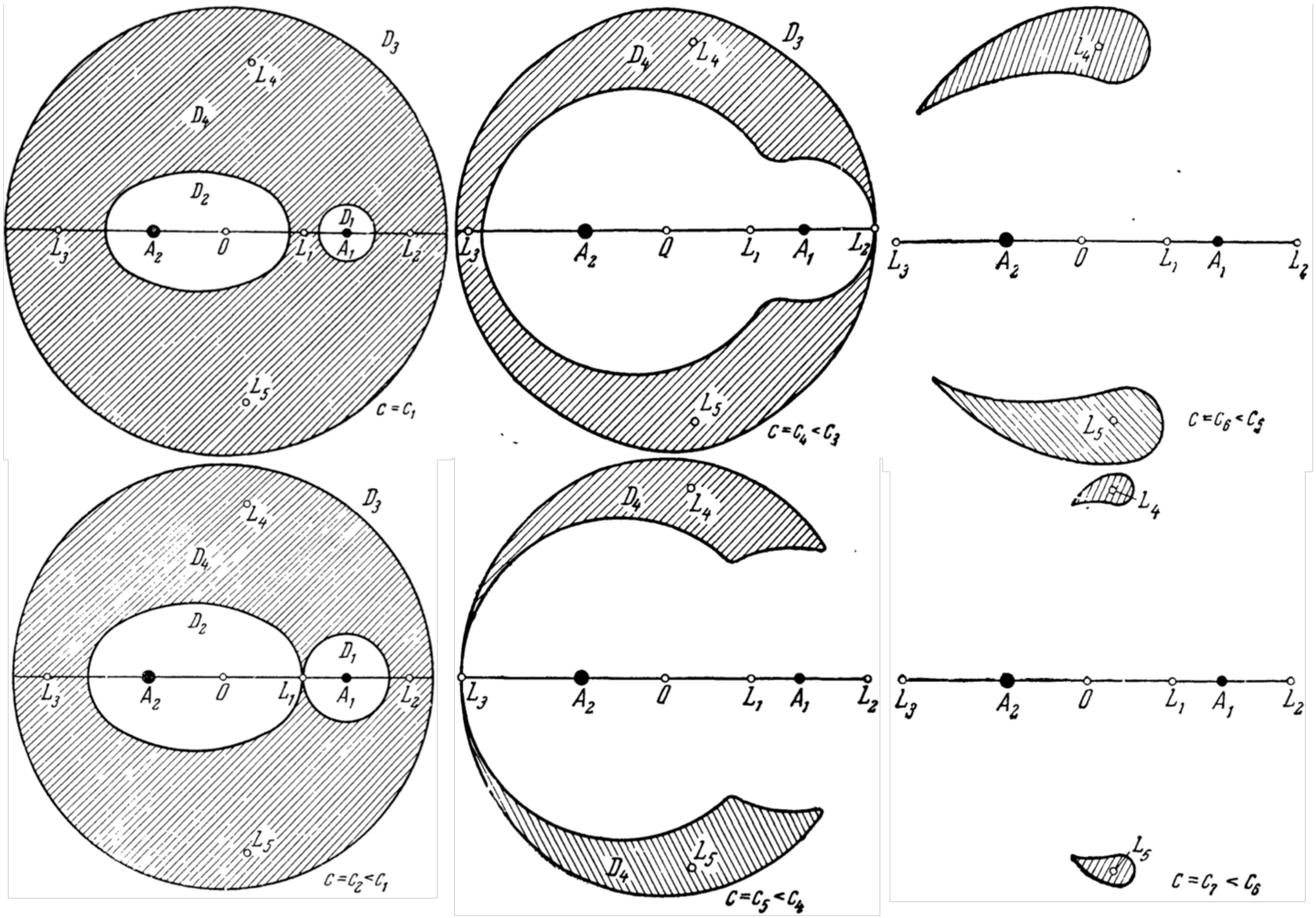
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2n\,\dfrac{dy}{dt} + n^2x + f\,\dfrac{M_1}{\rho_1^3}(x_1 - x) + f\,\dfrac{M_2}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2n\,\dfrac{dx}{dt} + n^2y - f\,\dfrac{M_1}{\rho_1^3}y - f\,\dfrac{M_2}{\rho_2^3}y. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений в синодической системе координат в канонических единицах измерения:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\,\dfrac{dy}{dt} + x + \dfrac{1-\mu}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \dfrac{\mu}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\,\dfrac{dx}{dt} + y - \dfrac{1-\mu}{\rho_1^3}y - \dfrac{\mu}{\rho_2^3}y, \end{cases}$$

Области возможных движений в задаче трёх тел

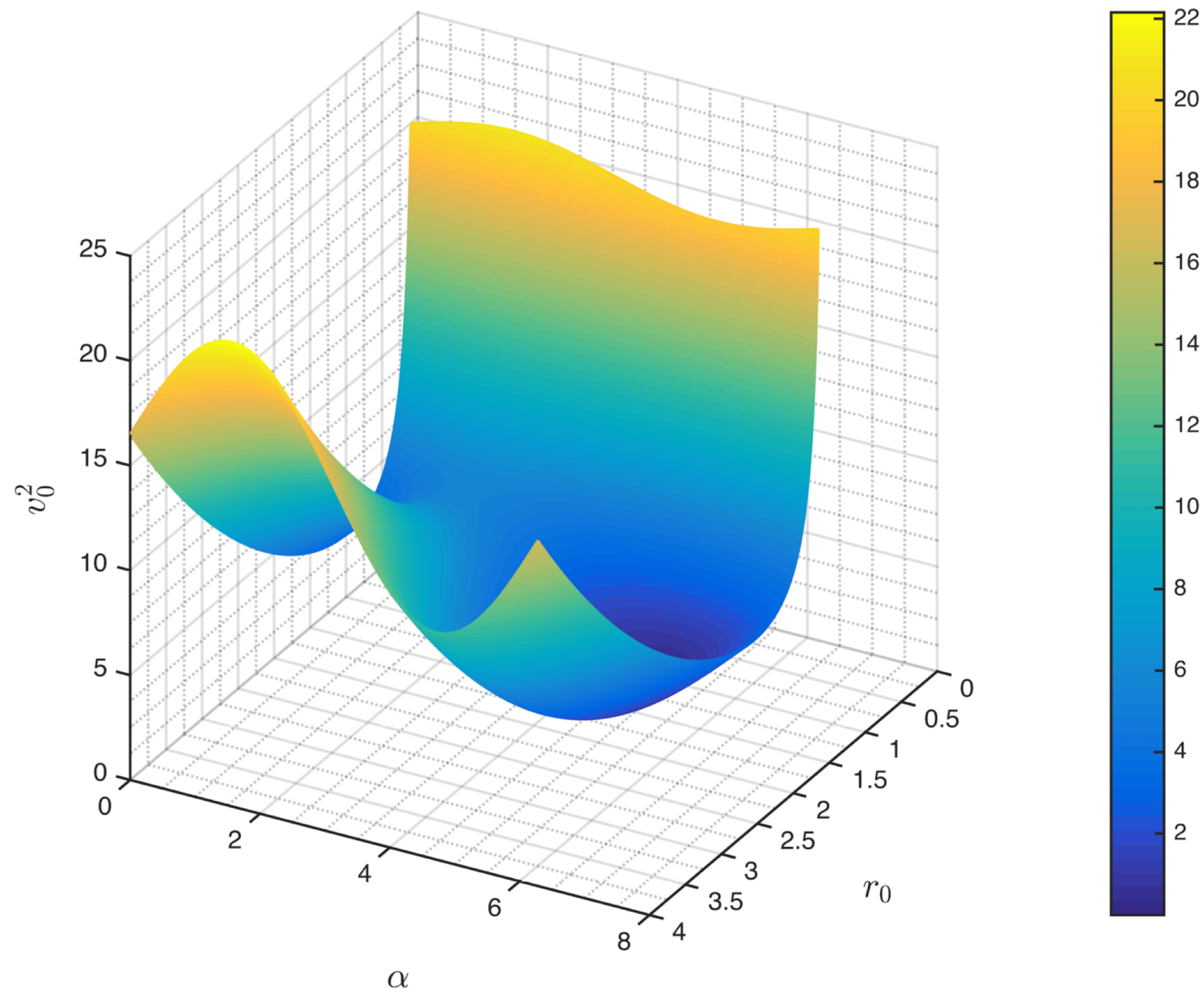
Интеграл Якоби: $C = (x^2 + y^2) + 2\frac{1-\mu}{\rho_1} + 2\frac{\mu}{\rho_2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$



Вторая космическая скорость задачи двух тел в синодической системе координат

ЗСЭ в сидерических осях: $V^2 - \frac{2}{r} = h$

Интеграл Якоби в синодических осях: $r^2 + \frac{2}{r} - v^2 = C$



$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{1}{r} = h, \\ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{r} - C. \end{cases}$$

$$h + C = \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta,$$

$$\sigma = h + C,$$

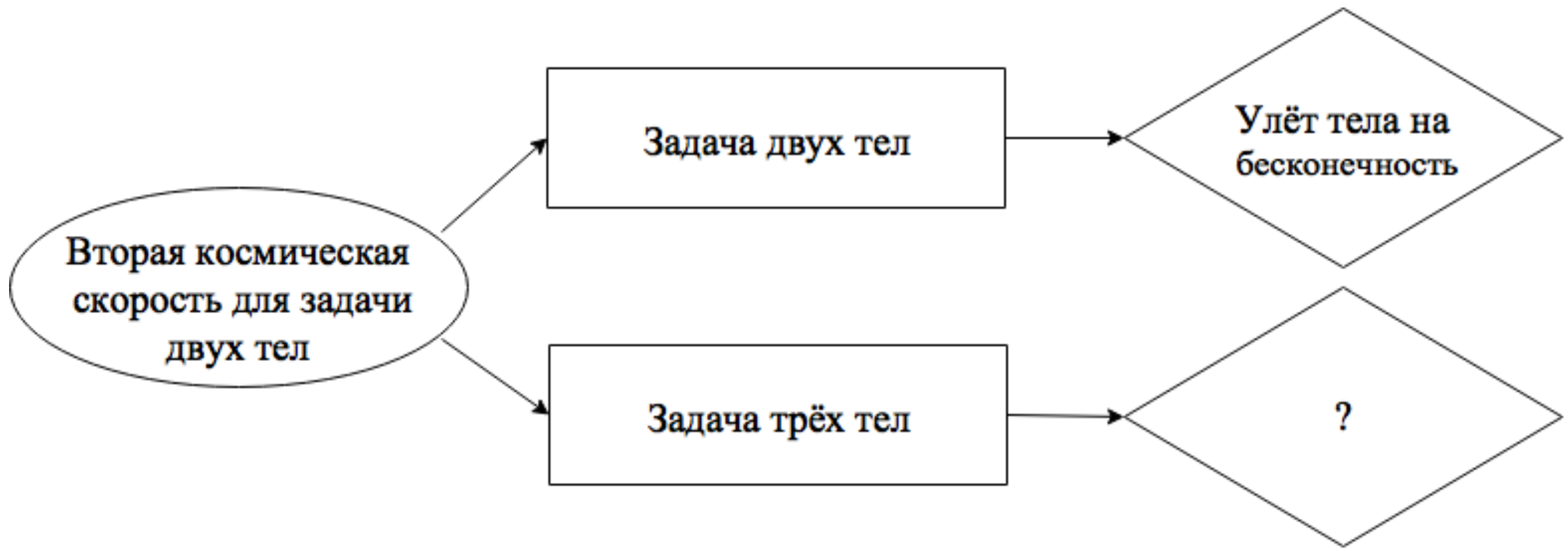
$$\sigma = |\boldsymbol{r_0} \times \boldsymbol{V_0}| = r_0 V_0 \sin(\alpha)$$

$$v_0^2 = r_0^2 + \frac{2}{r_0} + 2\sqrt{2r_0}\sin(\alpha)$$

$$\cos\beta = \frac{V}{v}\cos\alpha$$

Основная задача работы

Как ведут себя траектории в задаче трёх тел при начальных условиях, соответствующих второй космической скорости в задаче двух тел.



Аппроксимация ограниченной задачи трёх тел задачей Кеплера.

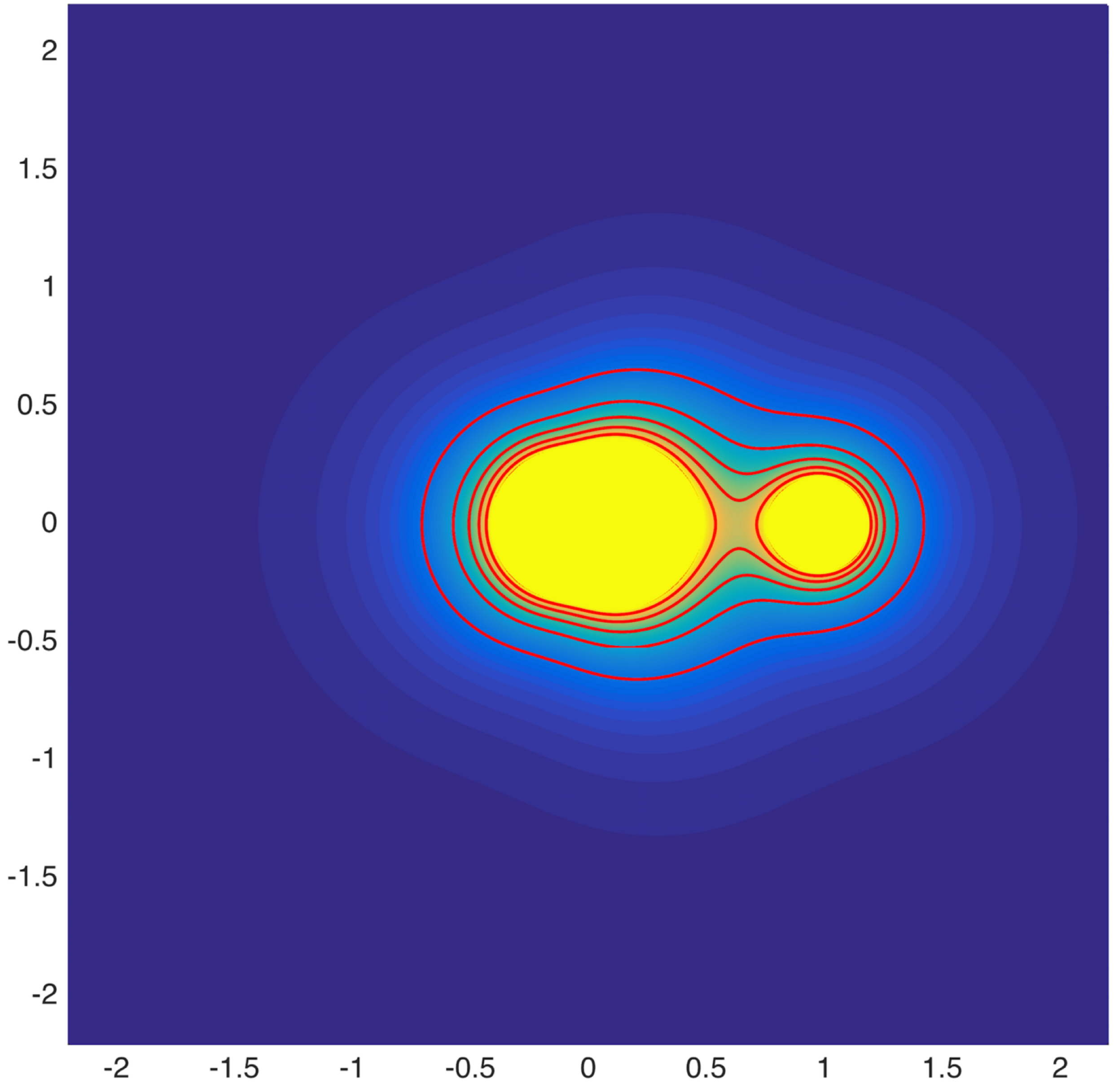
В каких случаях можно аппроксимировать задачу трёх тел с помощью задачи двух тел

Задача двух тел:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} - x = -\dfrac{1}{r^3}x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} - y = -\dfrac{1}{r^3}y. \end{cases}$$

Задача трёх тел:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} - x = \dfrac{1-\mu}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \dfrac{\mu}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} - y = -\dfrac{1-\mu}{\rho_1^3}y - \dfrac{\mu}{\rho_2^3}y. \end{cases}$$



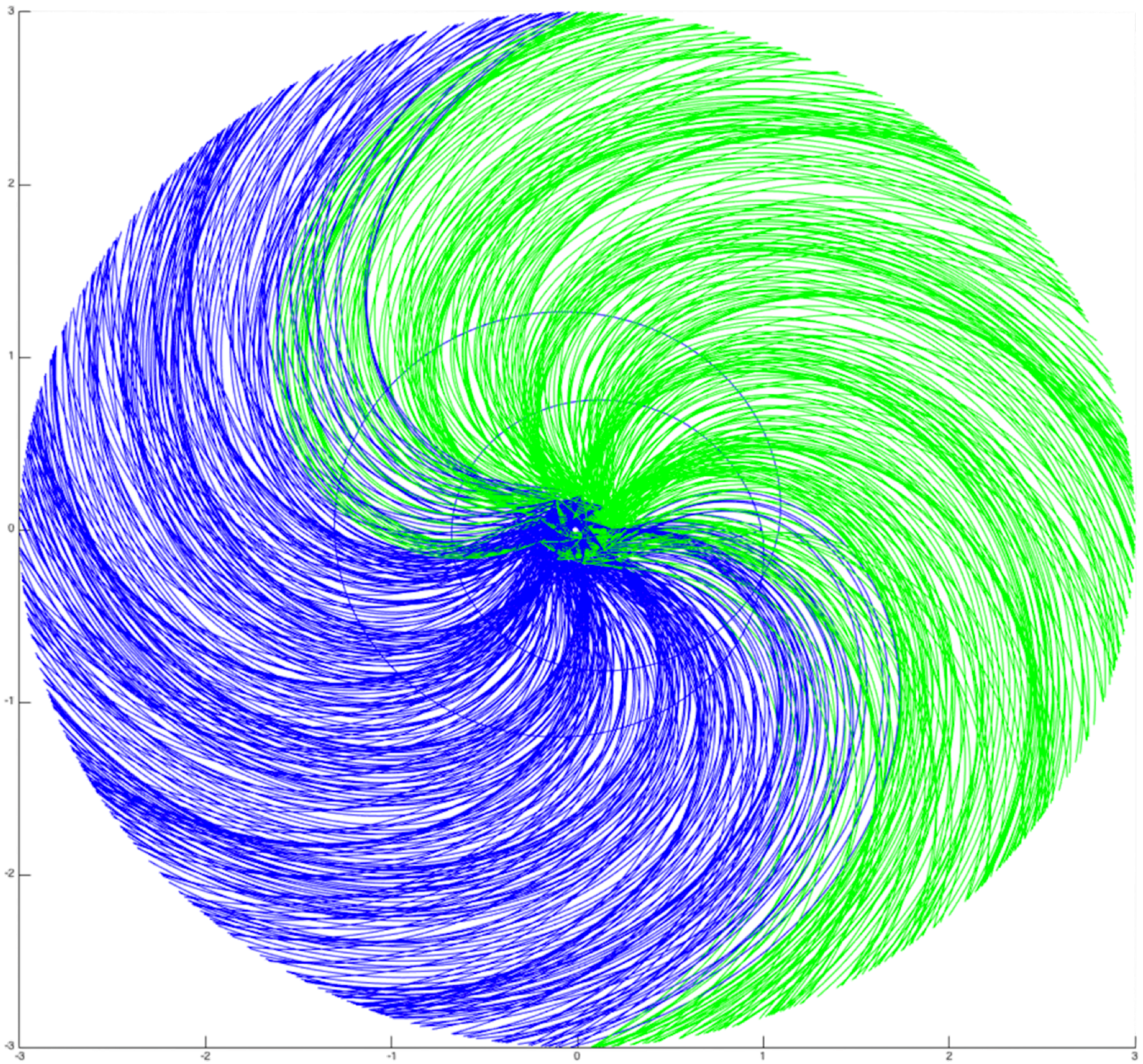
$$\begin{cases} e_x(x,y) = \left| \dfrac{1-\mu}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \dfrac{\mu}{\rho_2^3}(x_2 - x) + \dfrac{1}{r^3}x \right|, \\ e_y(x,y) = \left| -\dfrac{1-\mu}{\rho_1^3}y - \dfrac{\mu}{\rho_2^3}y + \dfrac{1}{r^3}y \right|. \end{cases}$$

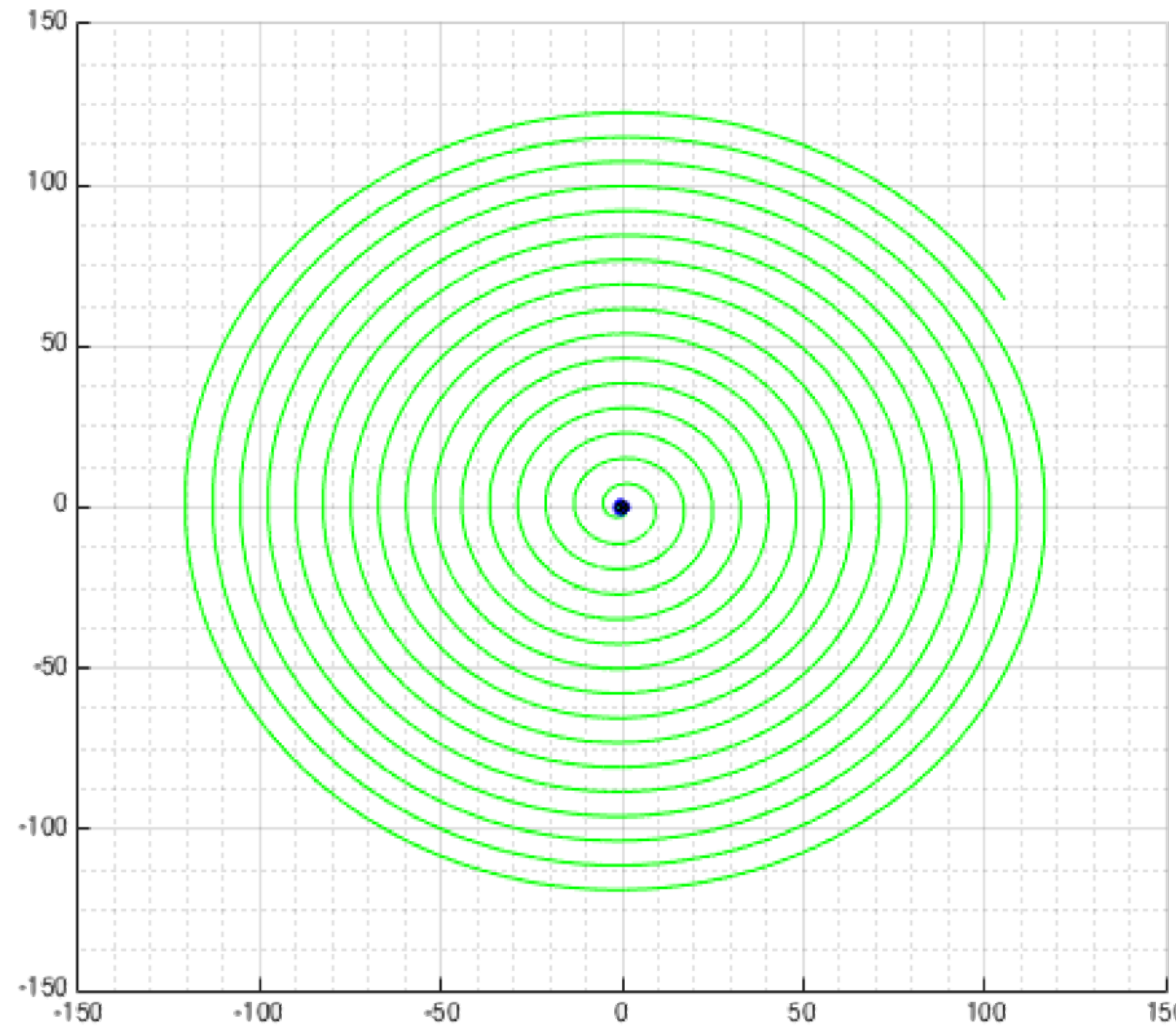
$$\varepsilon(x,y) = \sqrt{e_x^2(x,y) + e_y^2(x,y)}.$$

При $R > 4$ задачу трёх тел можно аппроксимировать задачей двух тел.

1) Просчёт траектории до того момента, пока нельзя будет аппроксимировать задачу трёх тел с помощью задачи Кеплера,
2) Проверка условий второй космической скорости в задаче Кеплера.

Траектории при разных начальных положениях

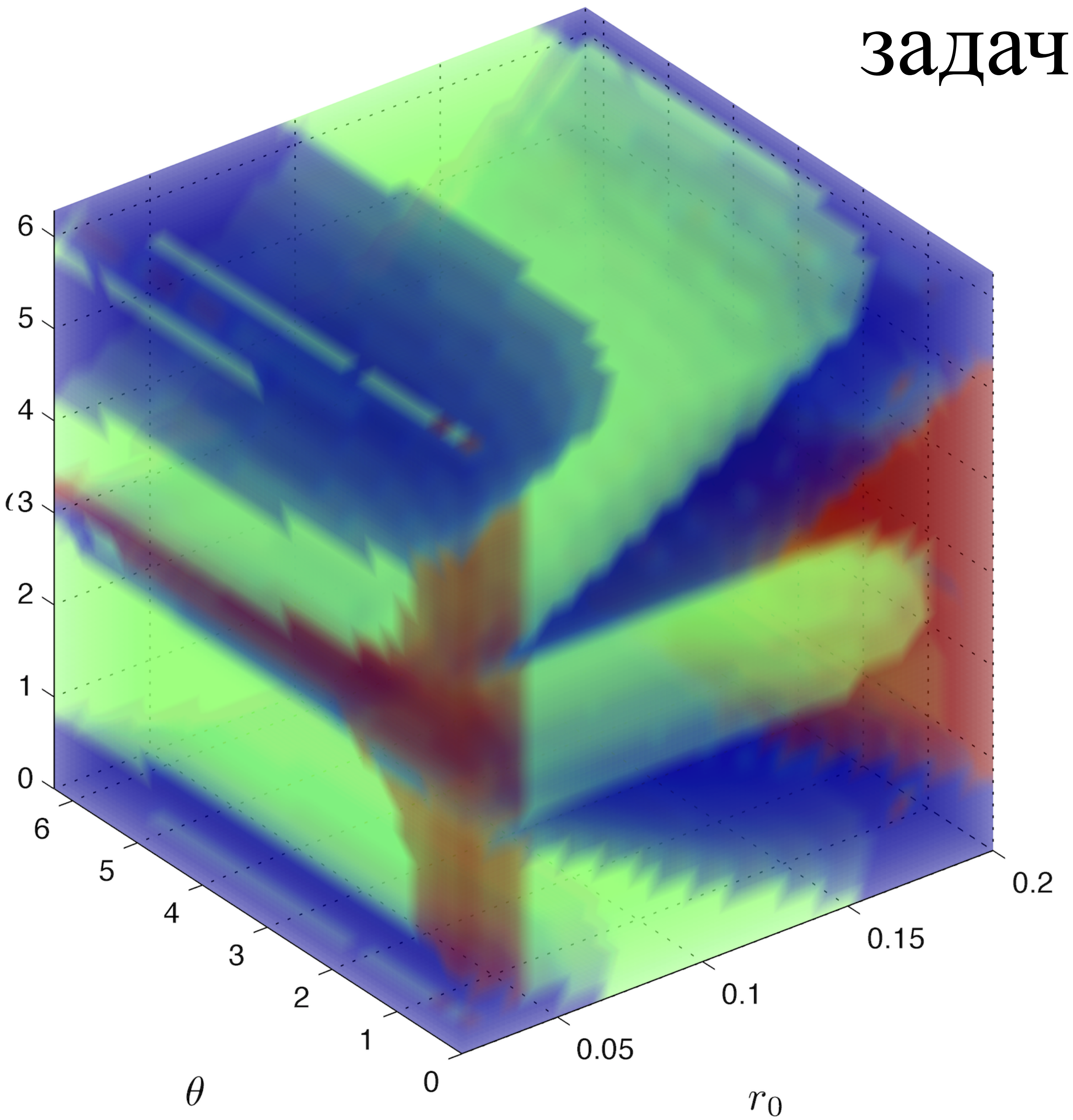


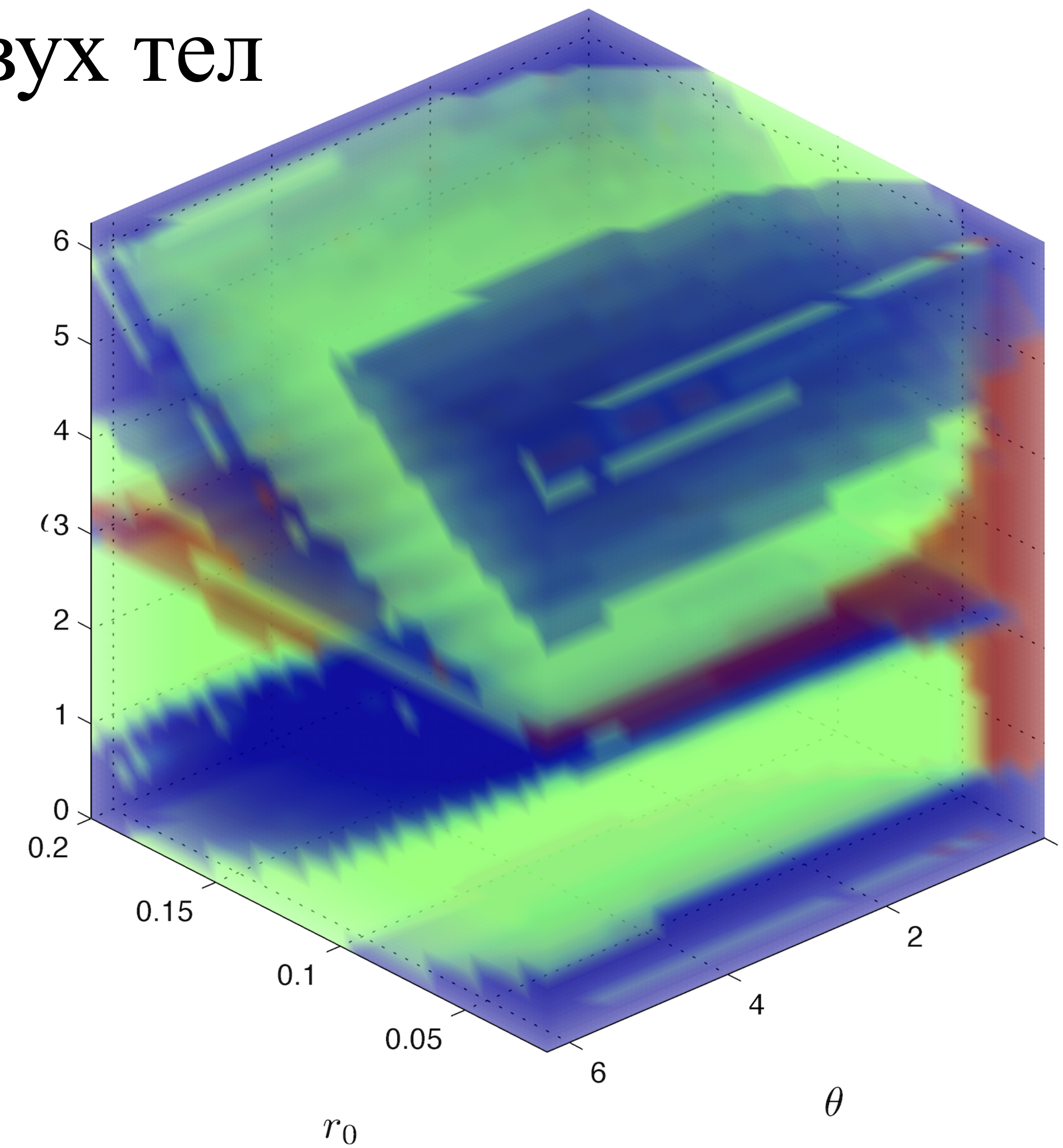


- Синие линии — траектории, уходящие на бесконечность,
- Зелёные линии — ограниченные траектории.

Просчёт одной из ограниченных траекторий в течение длительного времени

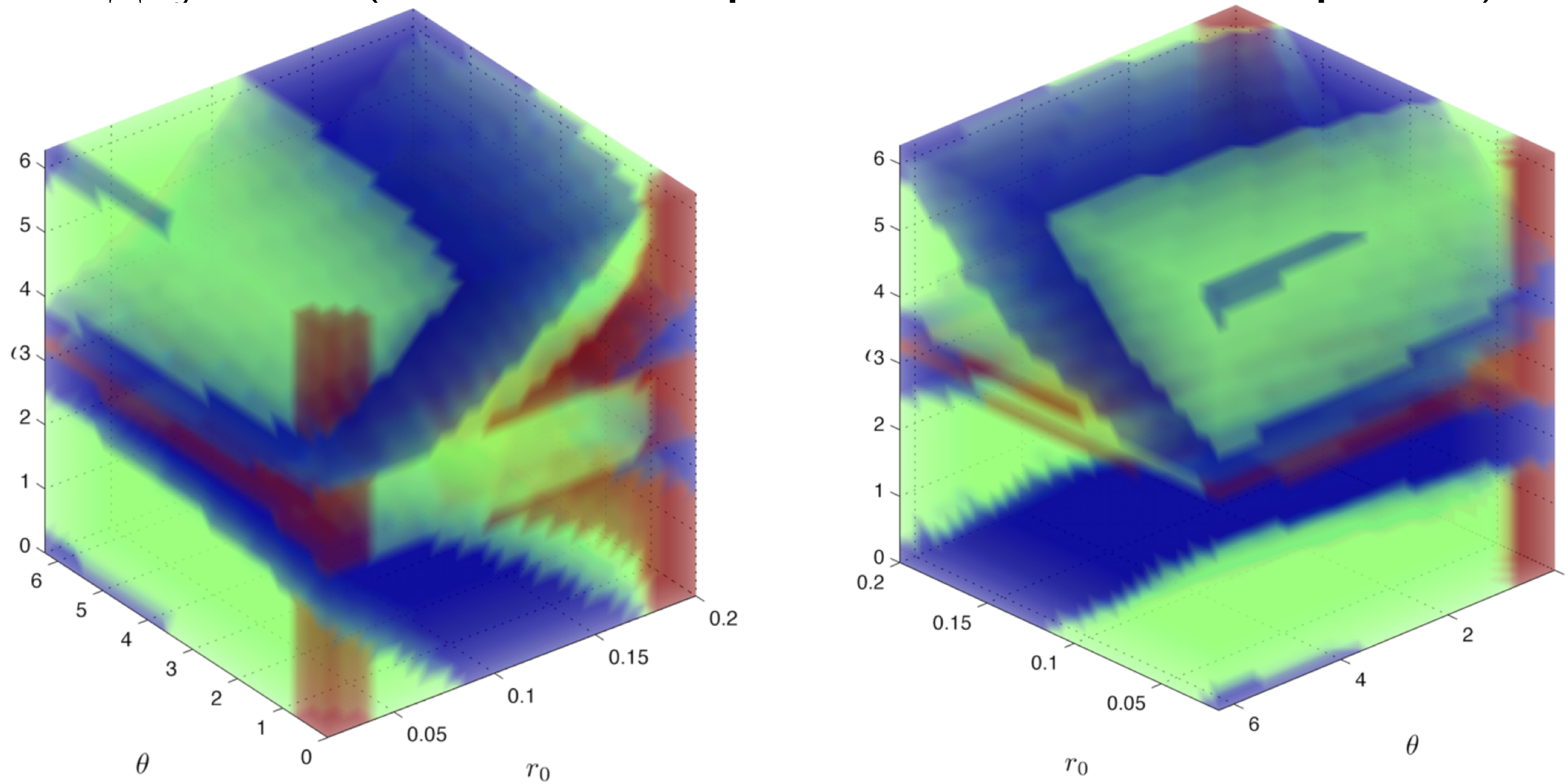
Трёхмерный куб начальных параметров, соответствующих параболической траектории в задаче двух тел





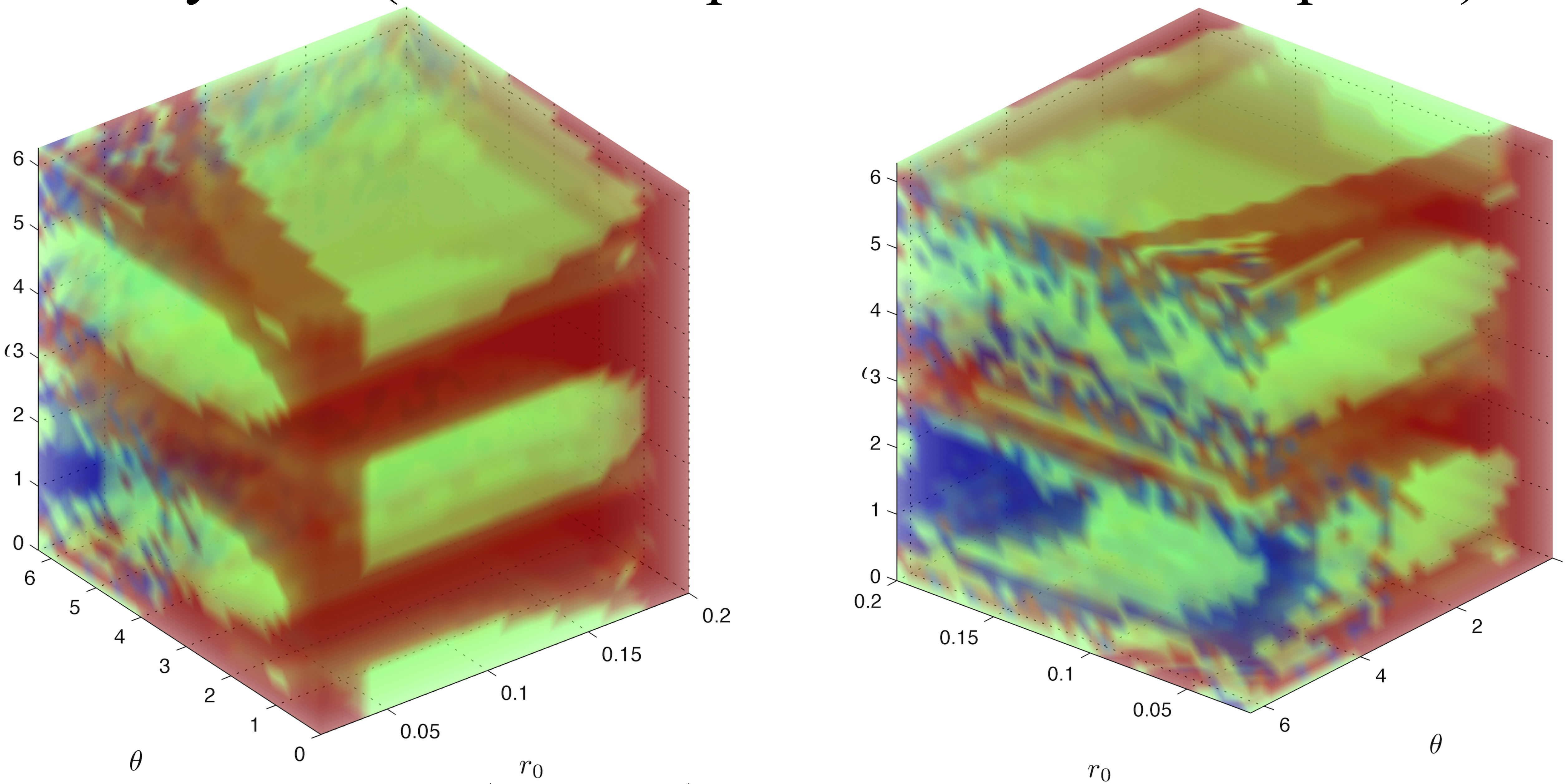
- Зеленая область — область ограниченных траекторий,
- Синяя область — область неограниченных траекторий,
- Красная область — начальные параметры системы, при которых исследуемое тело сталкивается с Землёй.

Трёхмерный куб начальных параметров, соответствующих гиперболической траектории в задаче двух тел (120% от второй космической скорости)



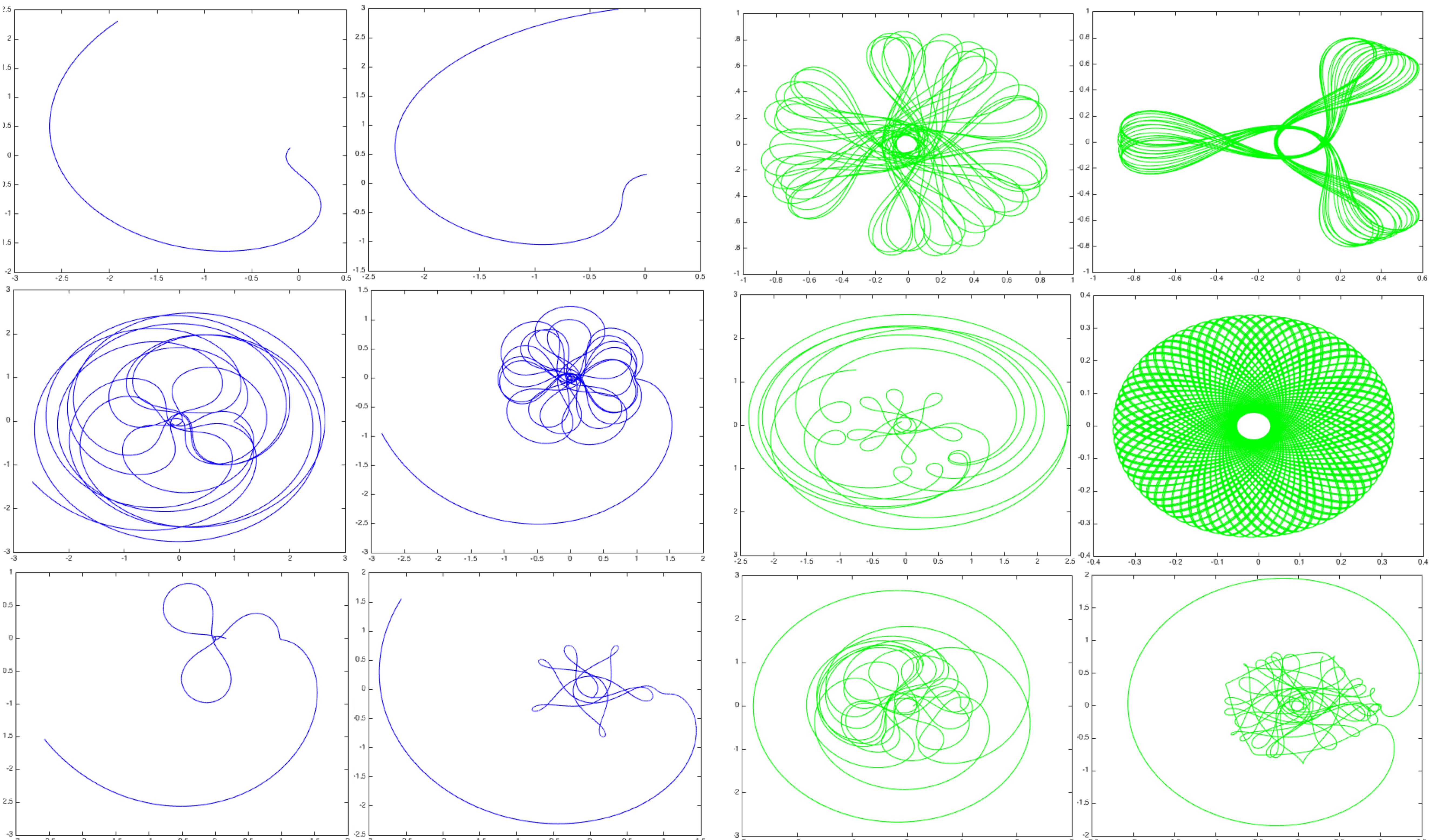
- Зеленая область — область ограниченных траекторий,
- Синяя область — область неограниченных траекторий,
- Красная область — начальные параметры системы, при которых исследуемое тело сталкивается с Землёй.

Трёхмерный куб начальных параметров, соответствующих эллиптической траектории в задаче двух тел (90% от второй космической скорости)

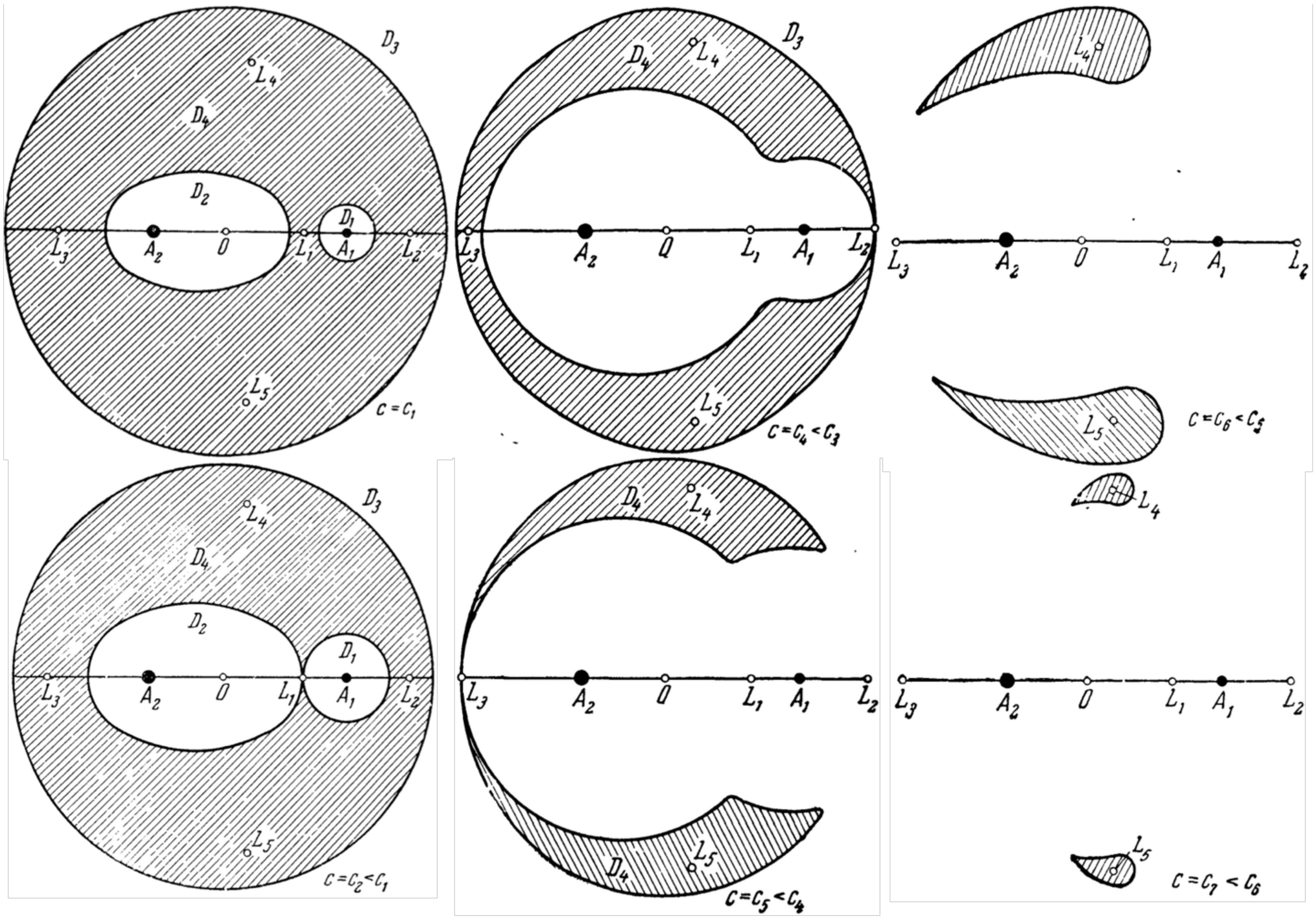


- Зеленая область — область ограниченных траекторий,
- Синяя область — область неограниченных траекторий,
- Красная область — начальные параметры системы, при которых исследуемое тело сталкивается с Землёй.

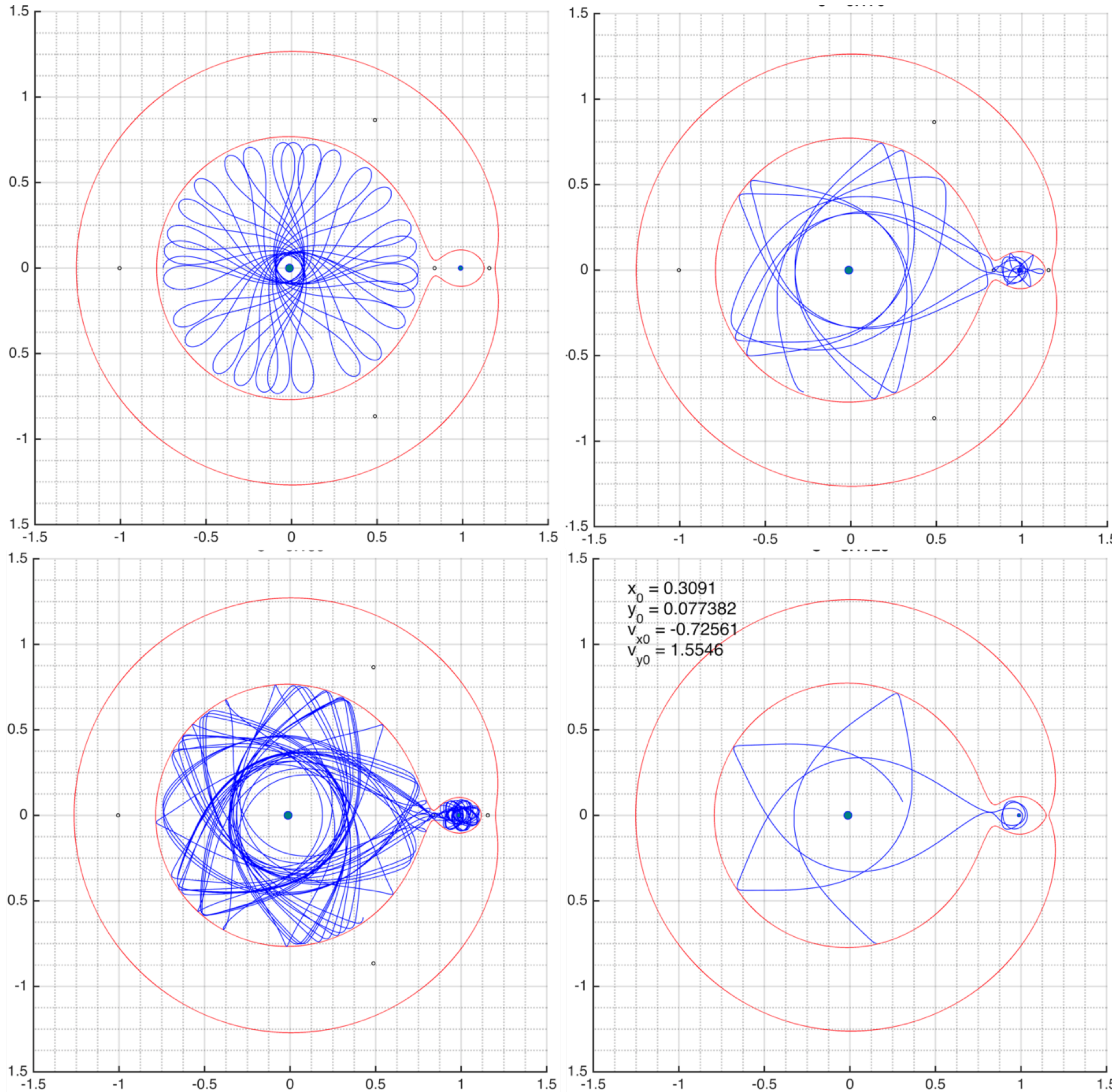
Частные виды траекторий



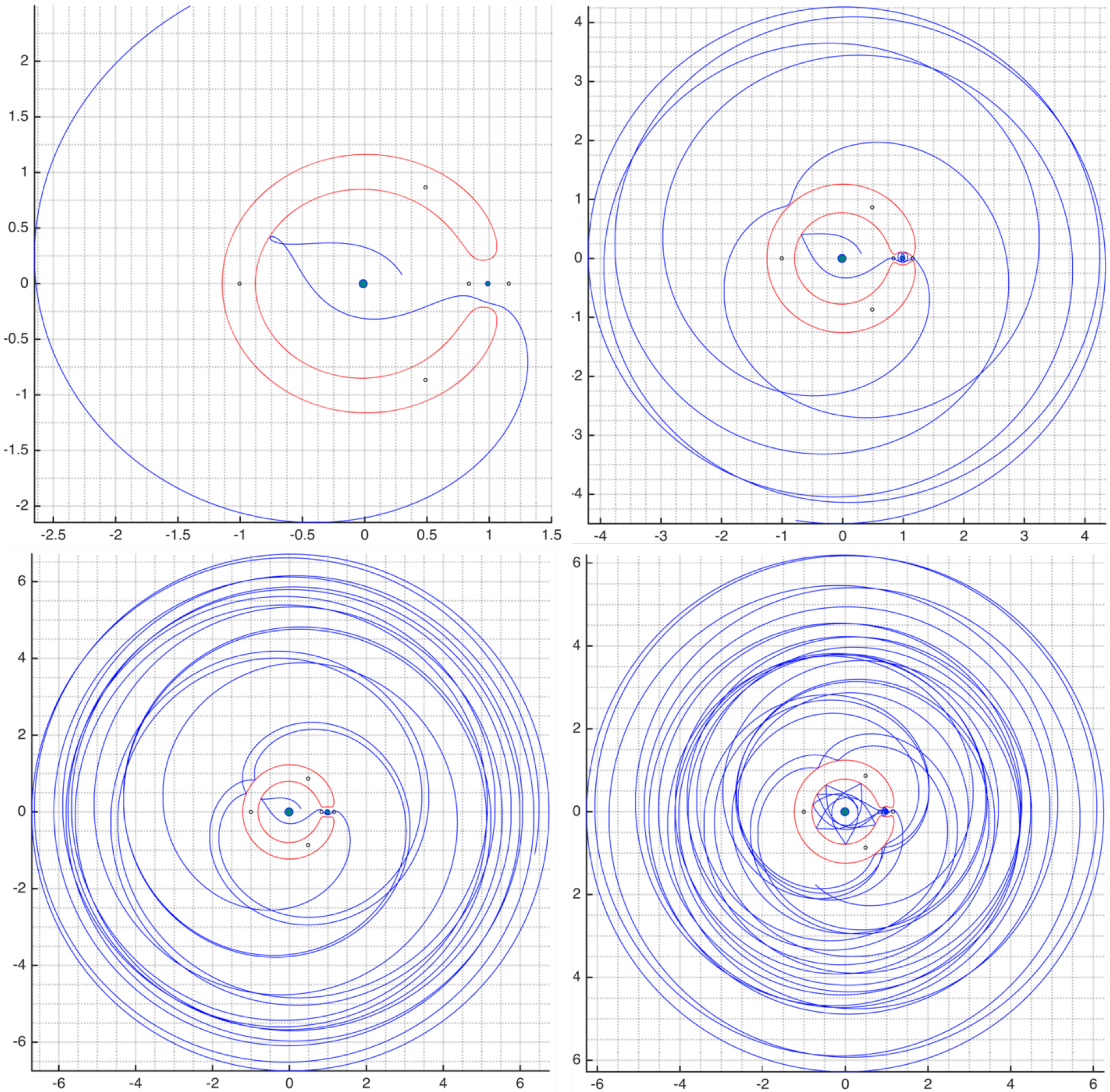
Использование областей возможных движений



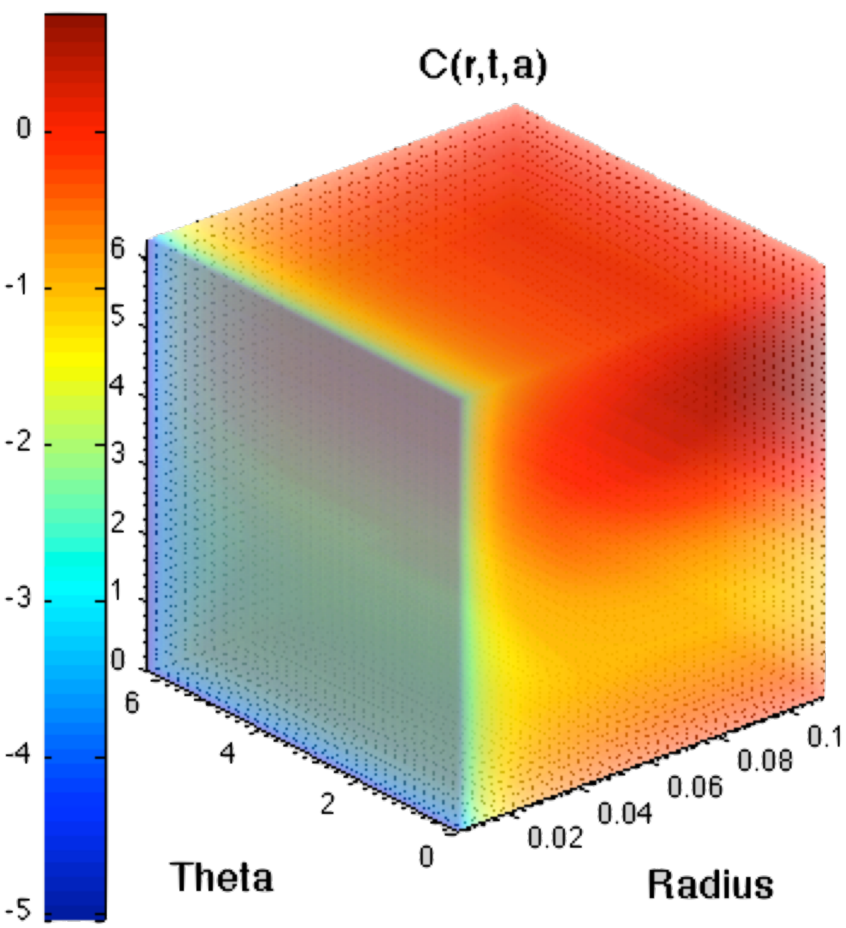
Устойчивые по Хиллу траектории



Неустойчивые по Хиллу траектории

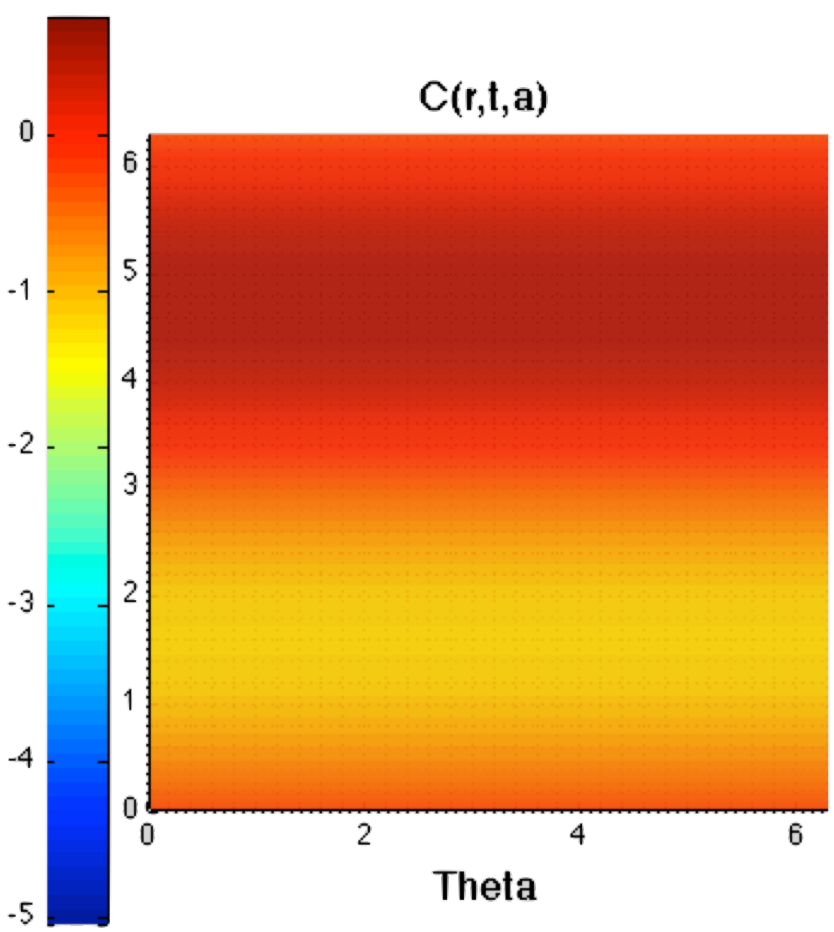


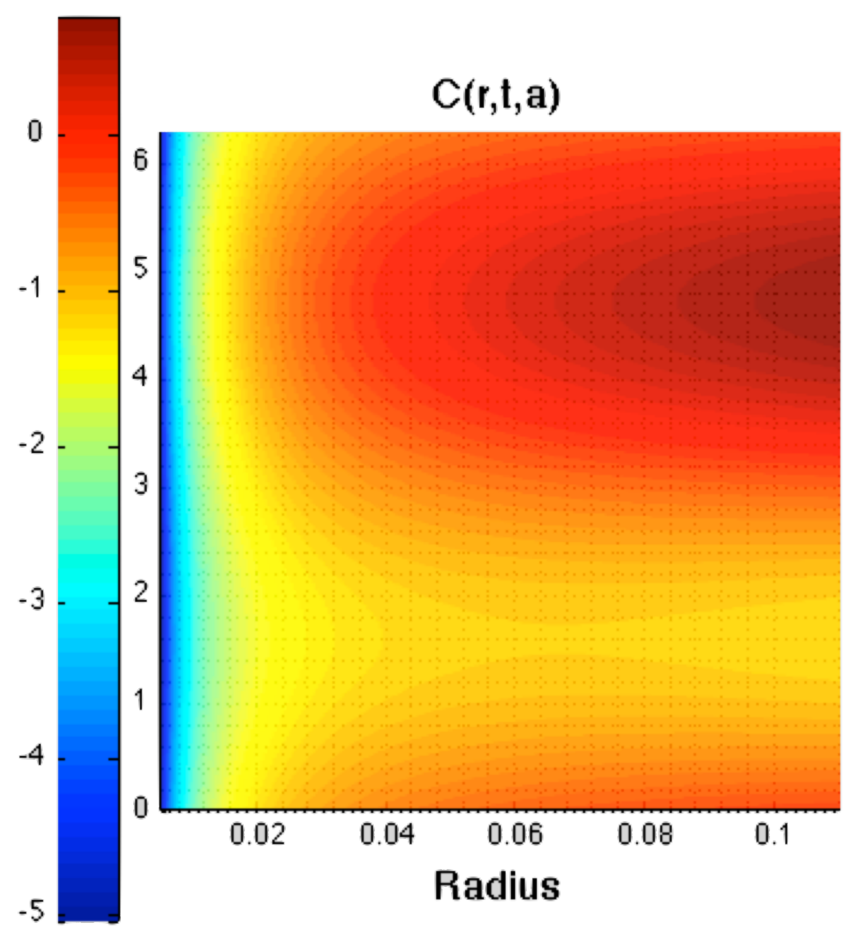
Избыток начальной кинетической энергии



Необходимое и достаточное условие: $C \leq 3.17$

Вторая космическая скорость задачи двух тел слишком велика для поставленной задачи. Достаточно использовать условия из эллиптической области.





Заключение

- Получены условия существования трёх областей, реализующих разные типы движений
- Численно исследовано поведение траекторий задачи трёх тел, когда начальные условия берутся из указанных областей, делается вывод о сохранении некоторых предельных свойств решений задачи двух тел в неинтегрируемой проблеме трёх тел
- Получено новое представление второй космической скорости в задаче двух тел в синодических осях
- Исследовано влияние притяжения Луны на характер поведения малого тела в зависимости от области задания начальных условий
- Численно показано, что «гиперболический» и «параболический» тип движений сохраняется, как правило, в задаче трёх тел (неустойчивость по Хиллу)
- Показано, что «эллиптический» тип трансформируется наиболее сильно: имеют место как устойчивые по Хиллу движения, описываемые квазипериодическими функциями времени, так и неустойчивые движения, когда малое тело покидает систему Земля – Луна через «бутылочное горлышко» в окрестности точки либрации L2.