

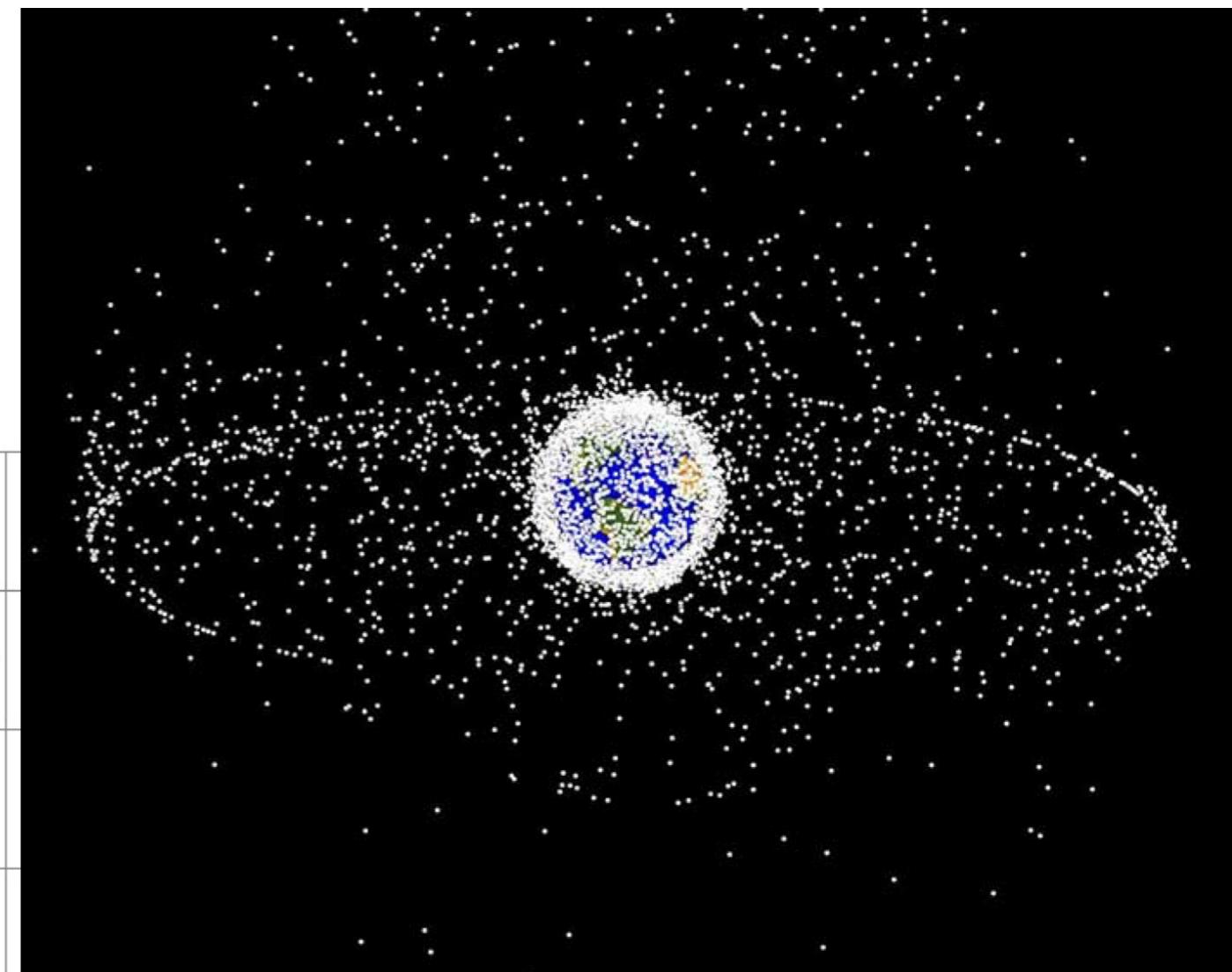
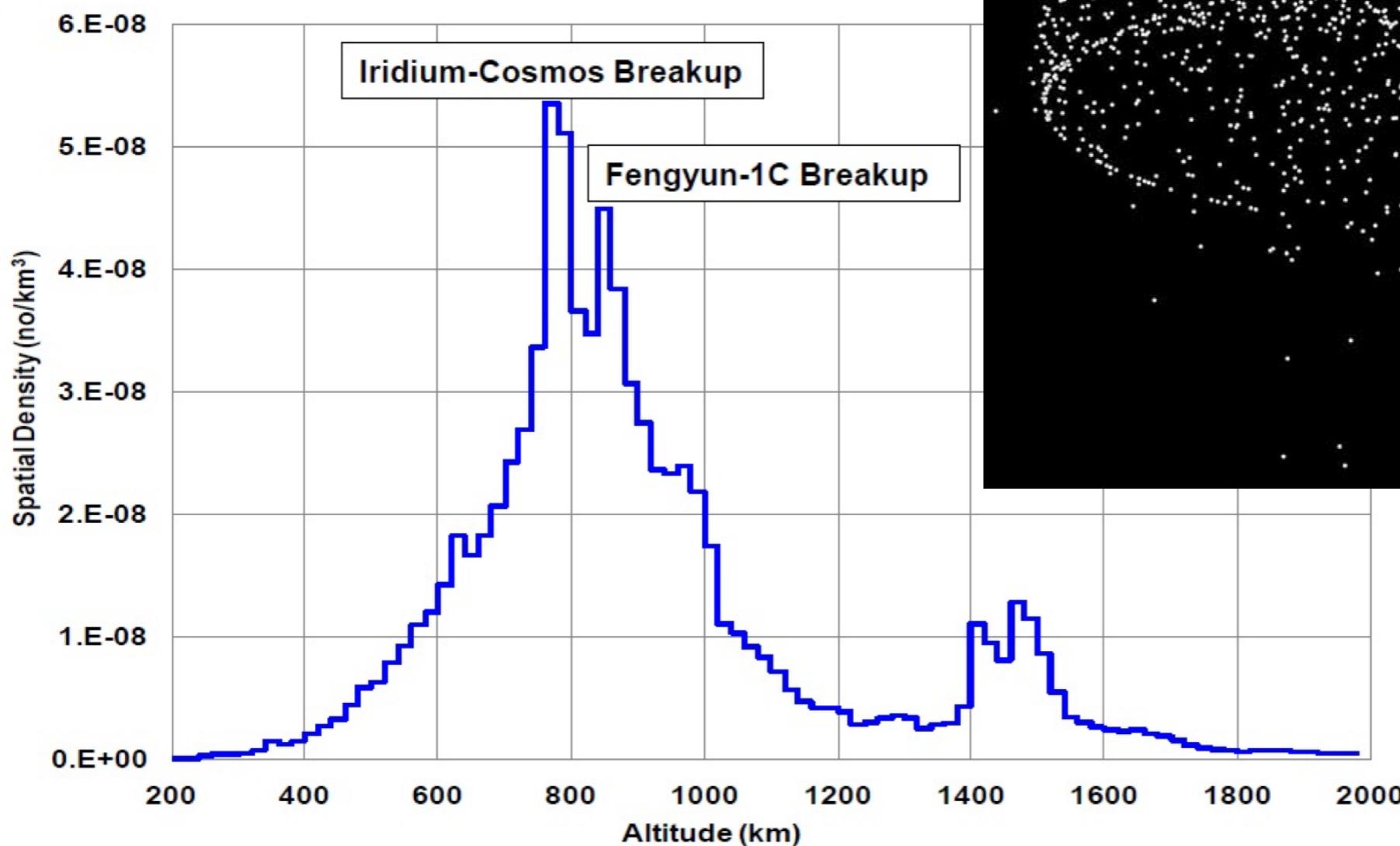
Московский Авиационный Институт  
(национальный исследовательский университет)

Выпускная квалификационная работа на тему:  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕУСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ ПО ХИЛЛУ В ПЛОСКОЙ  
КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ»

Руководитель: д.ф.-м.н. профессор Красильников П.С.  
Дипломник гр. 8О-408Б: Колесников Е.В.

Москва, 2016.

# Описание проблемы

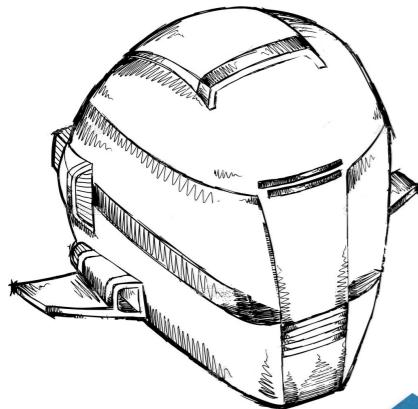


Модель распределения  
космических объектов в  
космосе

Пространственная плотность обломков на  
низких орбитах согласно NASA, 2011

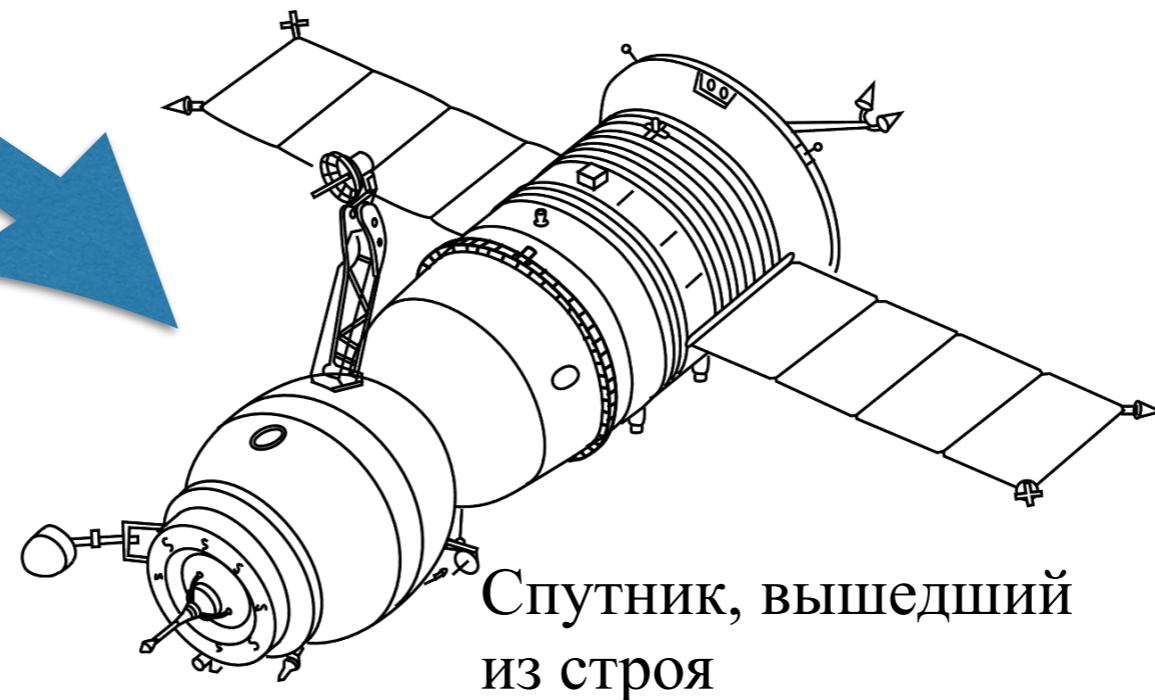
# Идея решения поставленной задачи

Грейдер — специально спроектированный спутник, летающий по орбитам Земли, целью которого является удаление мусора.

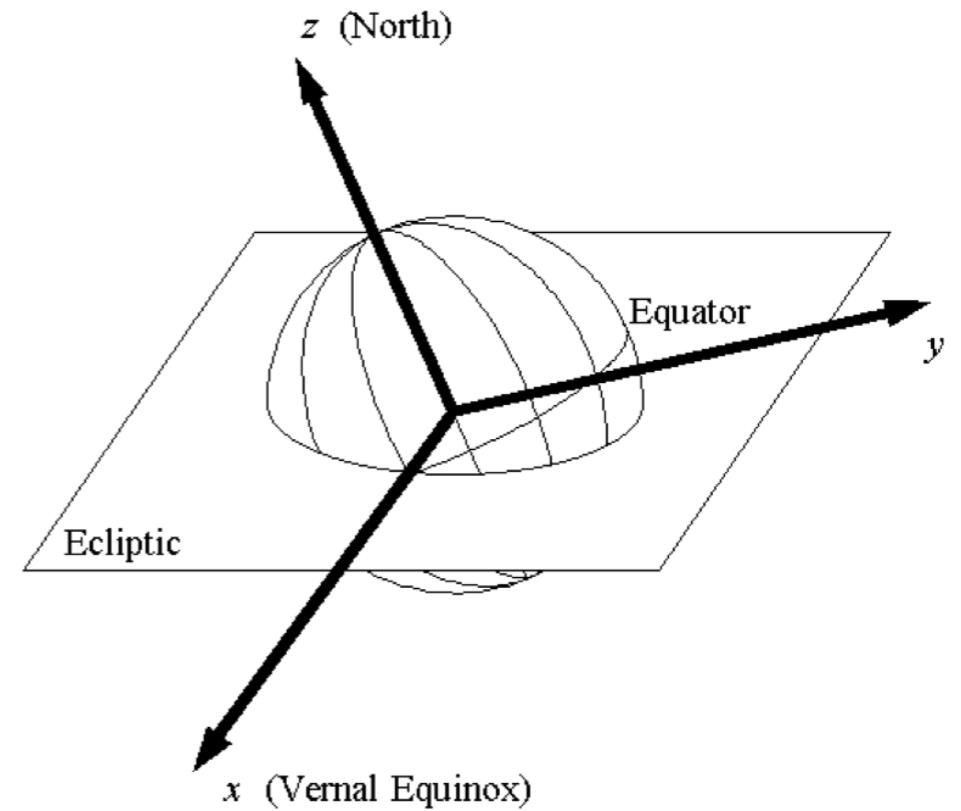
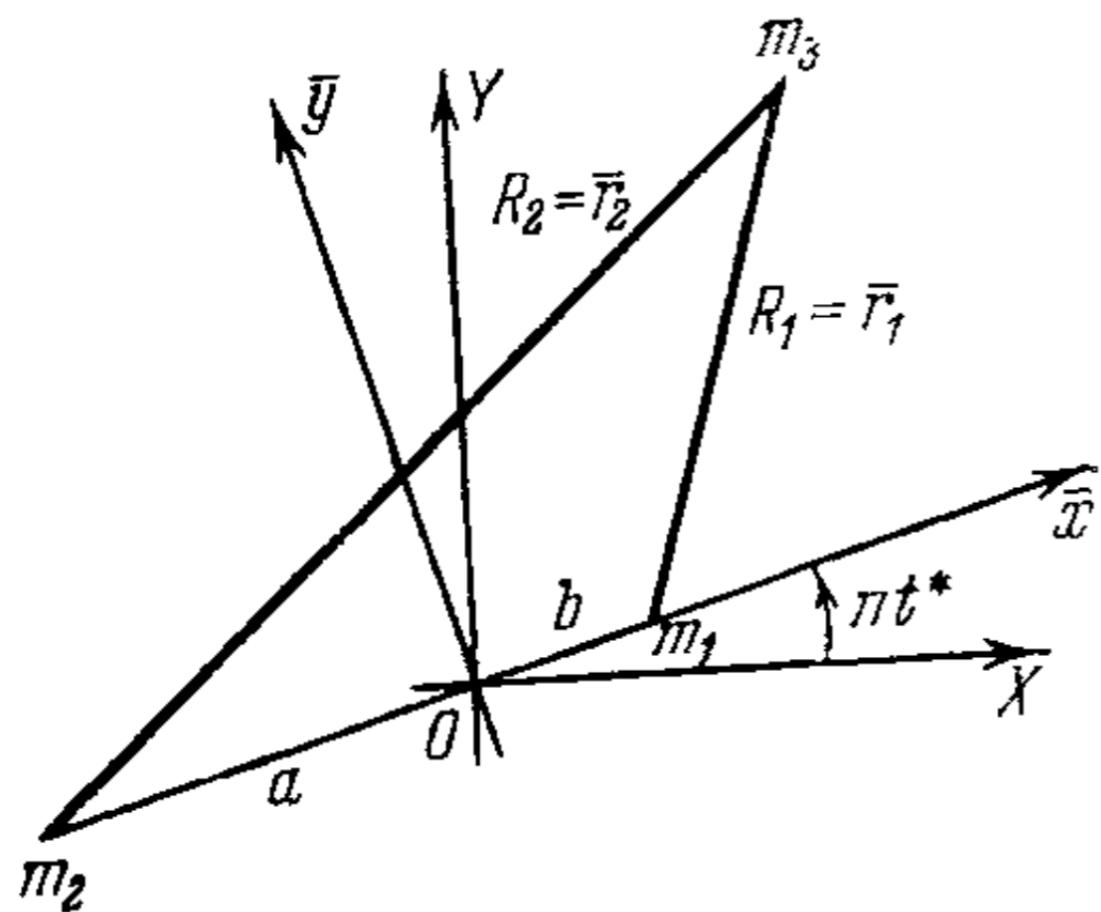


Грейдер

Сообщить такой импульс космическому мусору (спутнику), которого будет достаточно, чтобы спутник смог отдалиться от системы Земля-Луна на бесконечное расстояние.



# Постановка плоской круговой ограниченной задачи трёх тел



Плоскость эклиптики

$OXY$  — сидерическая система координат,  
 $Oxy$  — синодическая система координат.

# Дифференциальные уравнения задачи трёх тел

Система дифференциальных уравнений в сидерической системе координат:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = f \frac{M_1}{\rho_1^3} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}) + f \frac{M_2}{\rho_2^3} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R})$$

Система дифференциальных уравнений в синодической системе координат:

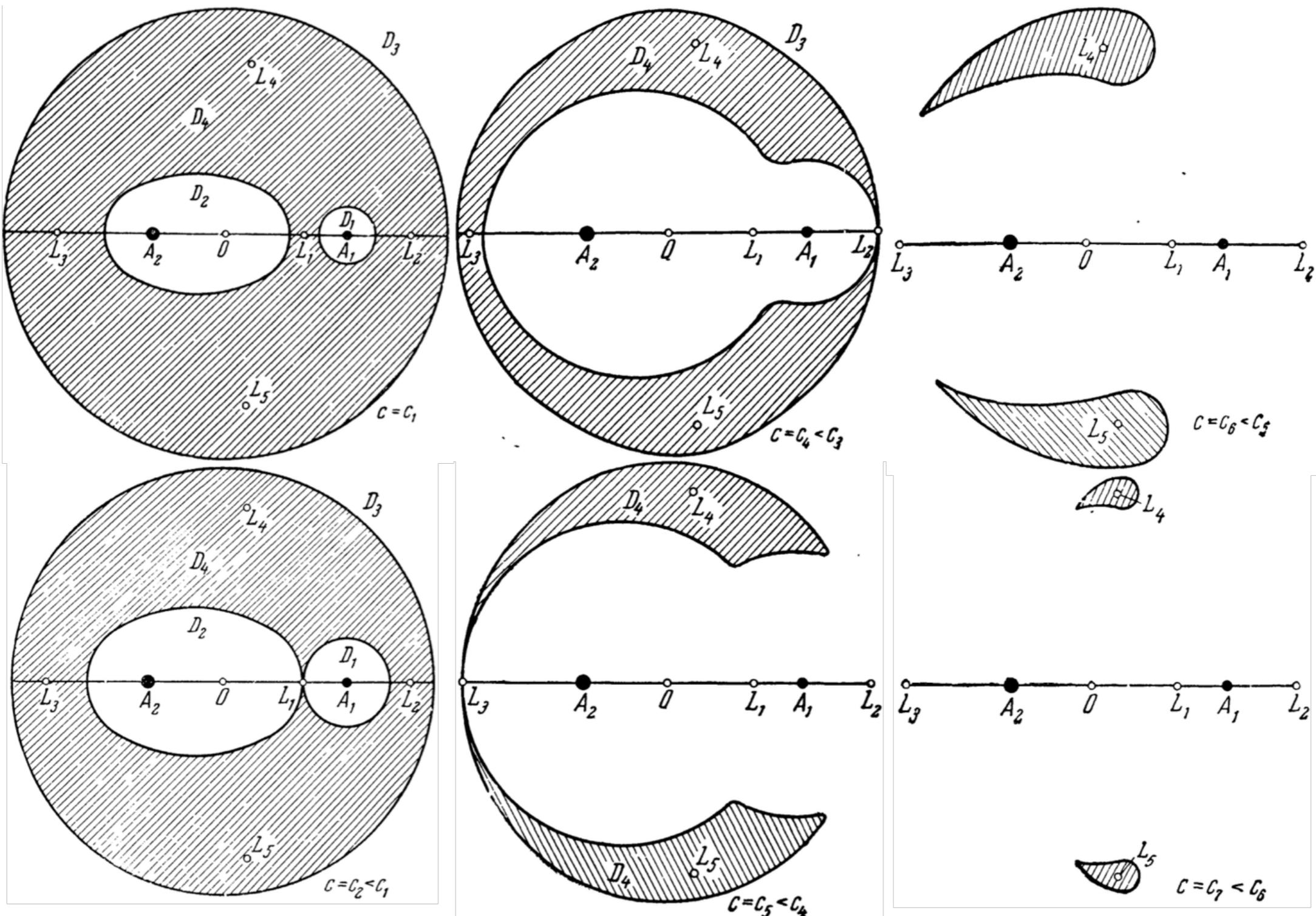
$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = 2n \frac{dy}{dt} + n^2 x + f \frac{M_1}{\rho_1^3} (x_1 - x) + f \frac{M_2}{\rho_2^3} (x_2 - x), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -2n \frac{dx}{dt} + n^2 y - f \frac{M_1}{\rho_1^3} y - f \frac{M_2}{\rho_2^3} y. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений в синодической системе координат в канонических единицах измерения:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \frac{dy}{dt} + x + \frac{1-\mu}{\rho_1^3} (x_1 - x) + \frac{\mu}{\rho_2^3} (x_2 - x), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -2 \frac{dx}{dt} + y - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} y - \frac{\mu}{\rho_2^3} y, \end{cases}$$

# Области возможных движений в задаче трёх тел

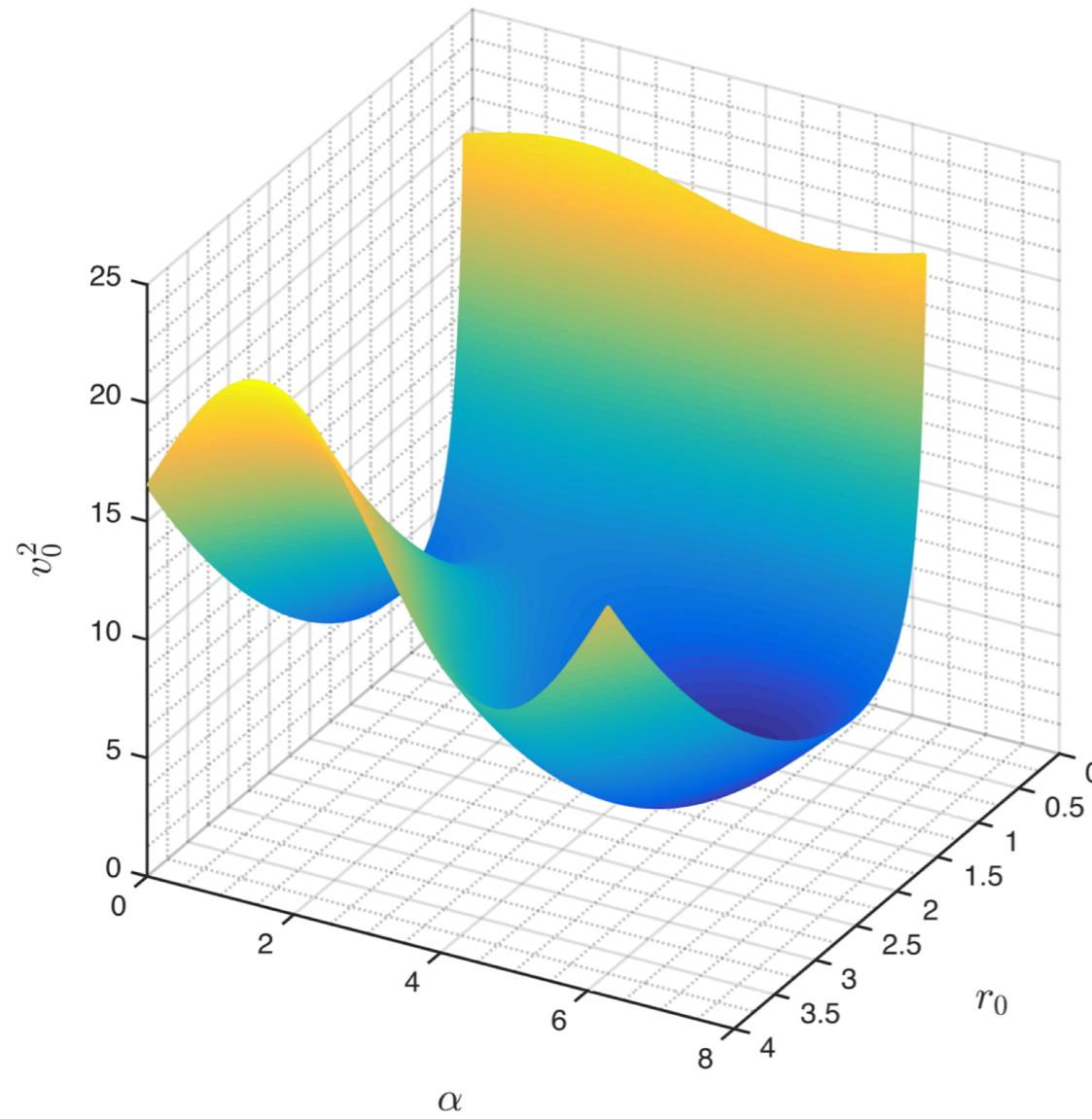
Интеграл Якоби:  $C = (x^2 + y^2) + 2 \frac{1 - \mu}{\rho_1} + 2 \frac{\mu}{\rho_2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$



# Вторая космическая скорость задачи двух тел в синодической системе координат

ЗСЭ в сидерических осях:  $V^2 - \frac{2}{r} = h$

Интеграл Якоби в синодических осях:  $r^2 + \frac{2}{r} - v^2 = C$



$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{1}{r} = h, \\ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{r} - C. \end{cases}$$

$$h + C = \dot{\xi}\dot{\eta} - \dot{\xi}\dot{\eta},$$

$$\sigma = h + C,$$

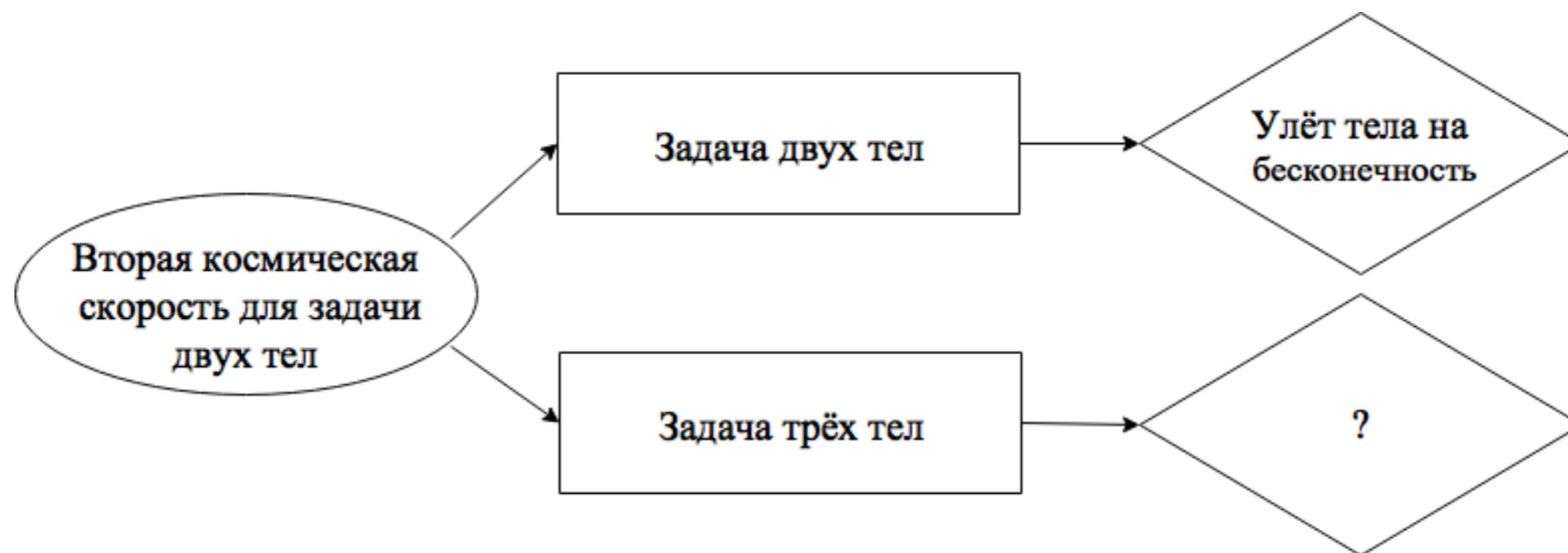
$$\sigma = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = r_0 V_0 \sin(\alpha)$$

$$v_0^2 = r_0^2 + \frac{2}{r_0} + 2\sqrt{2r_0} \sin(\alpha)$$

$$\cos \beta = \frac{V}{v} \cos \alpha$$

# Основная задача работы

Как ведут себя траектории в задаче трёх тел при начальных условиях, соответствующих второй космической скорости в задаче двух тел.



Аппроксимация ограниченной задачи трёх тел задачей Кеплера.

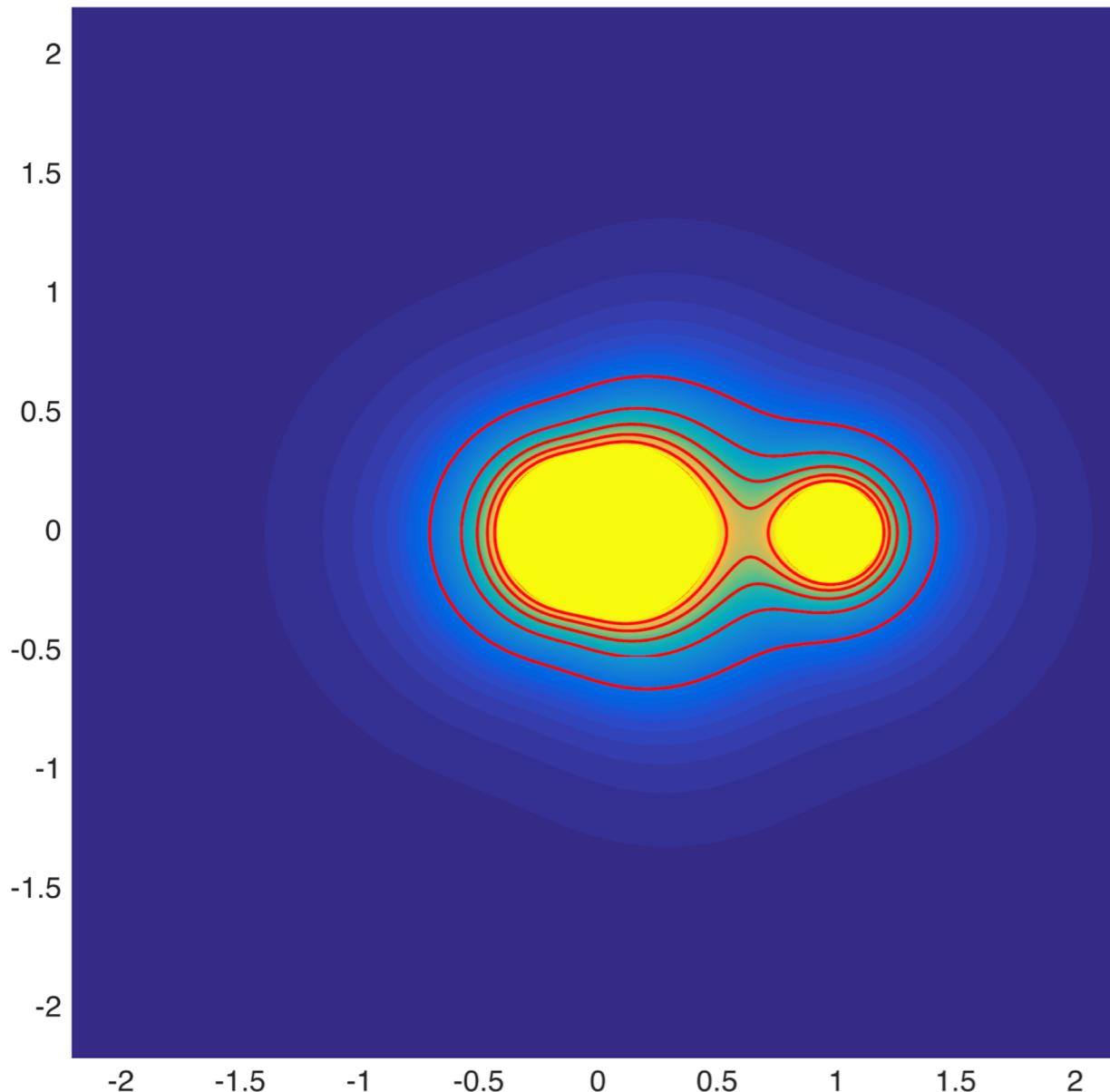
# Условия аппроксимации задачи трёх тел с помощью задачи Кеплера

Задача двух тел:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = -\frac{1}{r^3}x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -\frac{1}{r^3}y. \end{cases}$$

Задача трёх тел:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{\mu}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}y - \frac{\mu}{\rho_2^3}y. \end{cases}$$



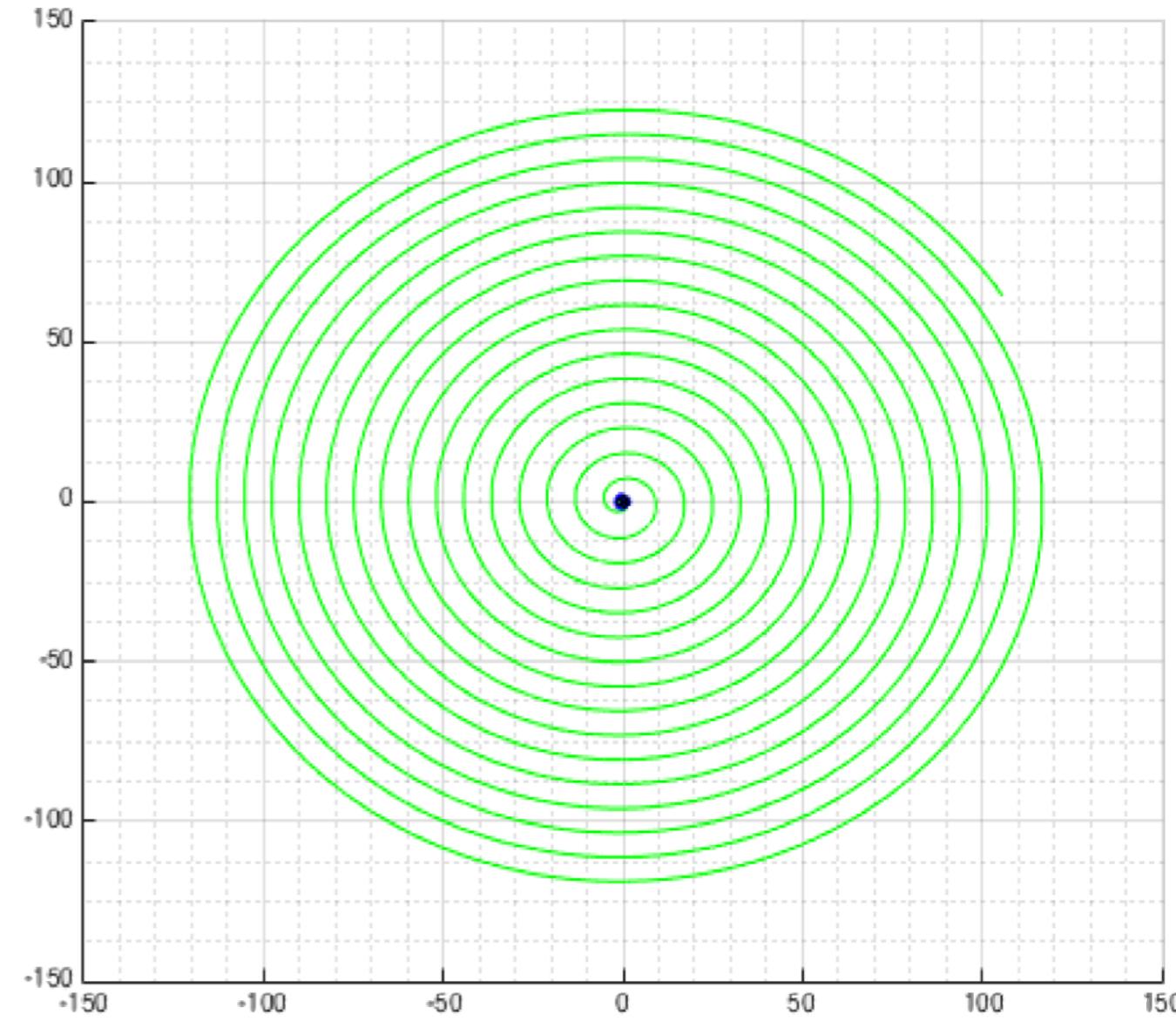
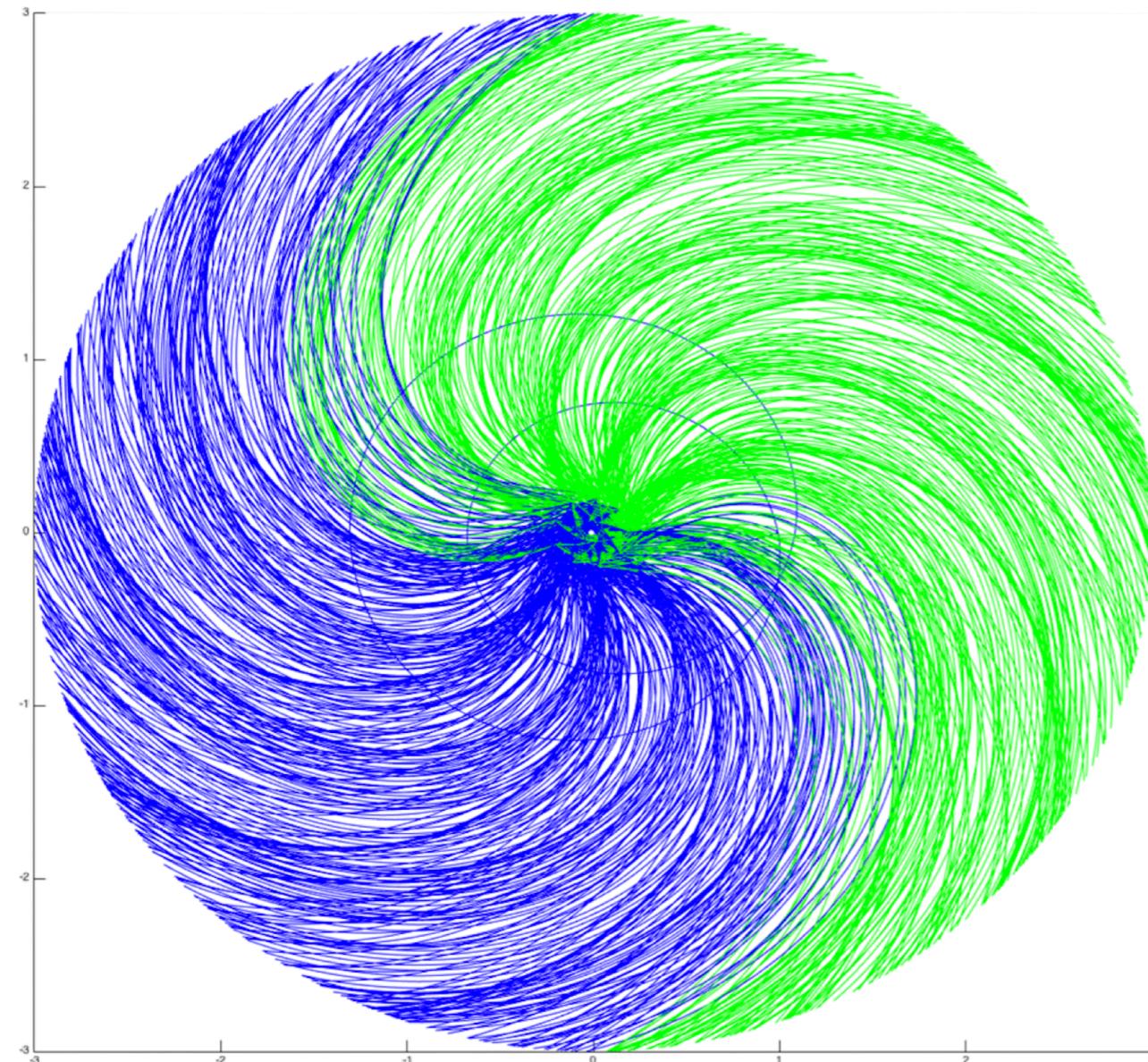
$$\begin{cases} e_x(x, y) = \left| \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{\mu}{\rho_2^3}(x_2 - x) + \frac{1}{r^3}x \right|, \\ e_y(x, y) = \left| -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}y - \frac{\mu}{\rho_2^3}y + \frac{1}{r^3}y \right|. \end{cases}$$

$$\varepsilon(x, y) = \sqrt{e_x^2(x, y) + e_y^2(x, y)}.$$

При  $R > 4$  задачу трёх тел можно аппроксимировать задачей двух тел.

- 1) Просчёт траектории до того момента, пока нельзя будет аппроксимировать задачу трёх тел с помощью задачи Кеплера,
- 2) Проверка условий второй космической скорости в задаче Кеплера.

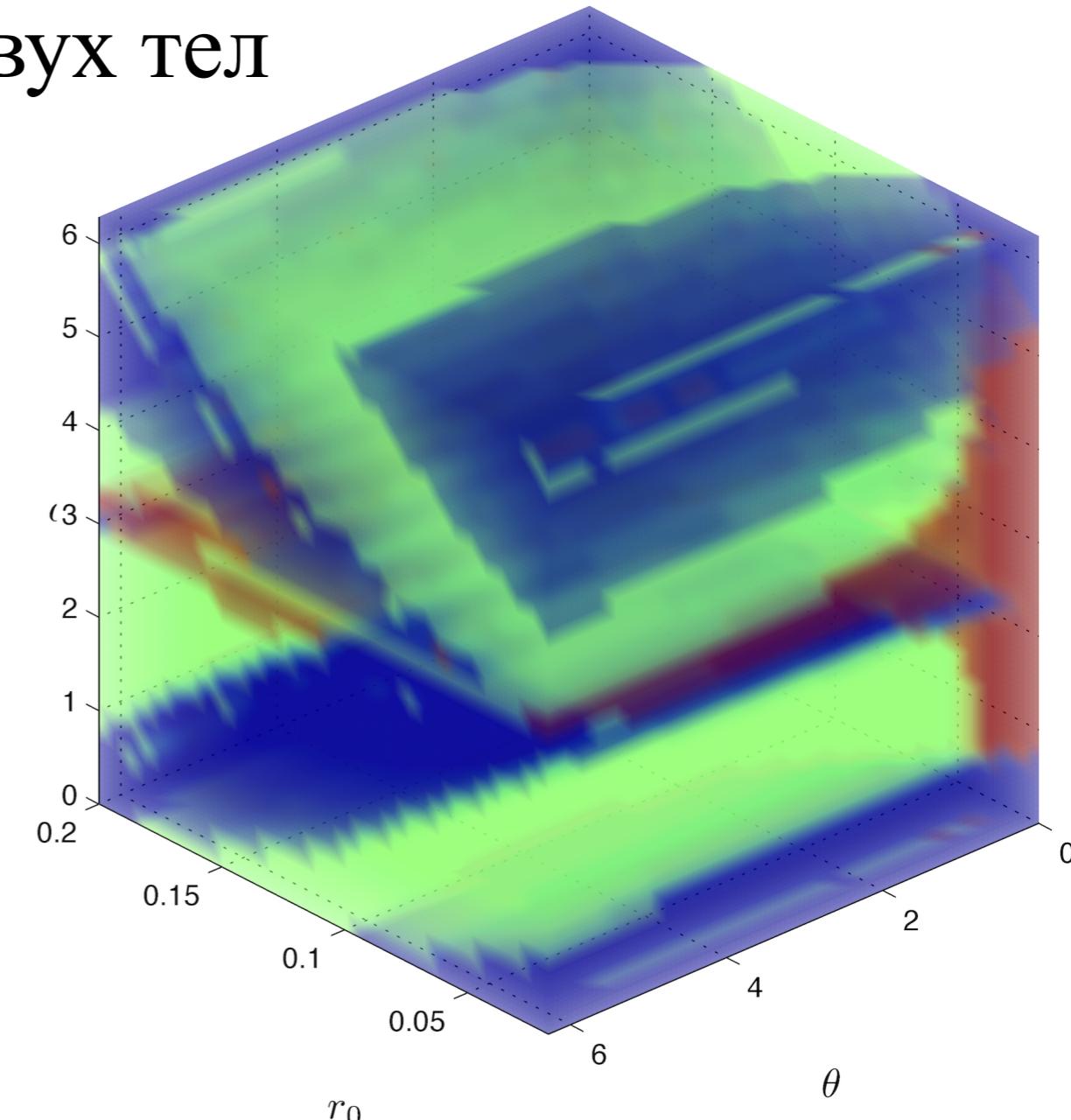
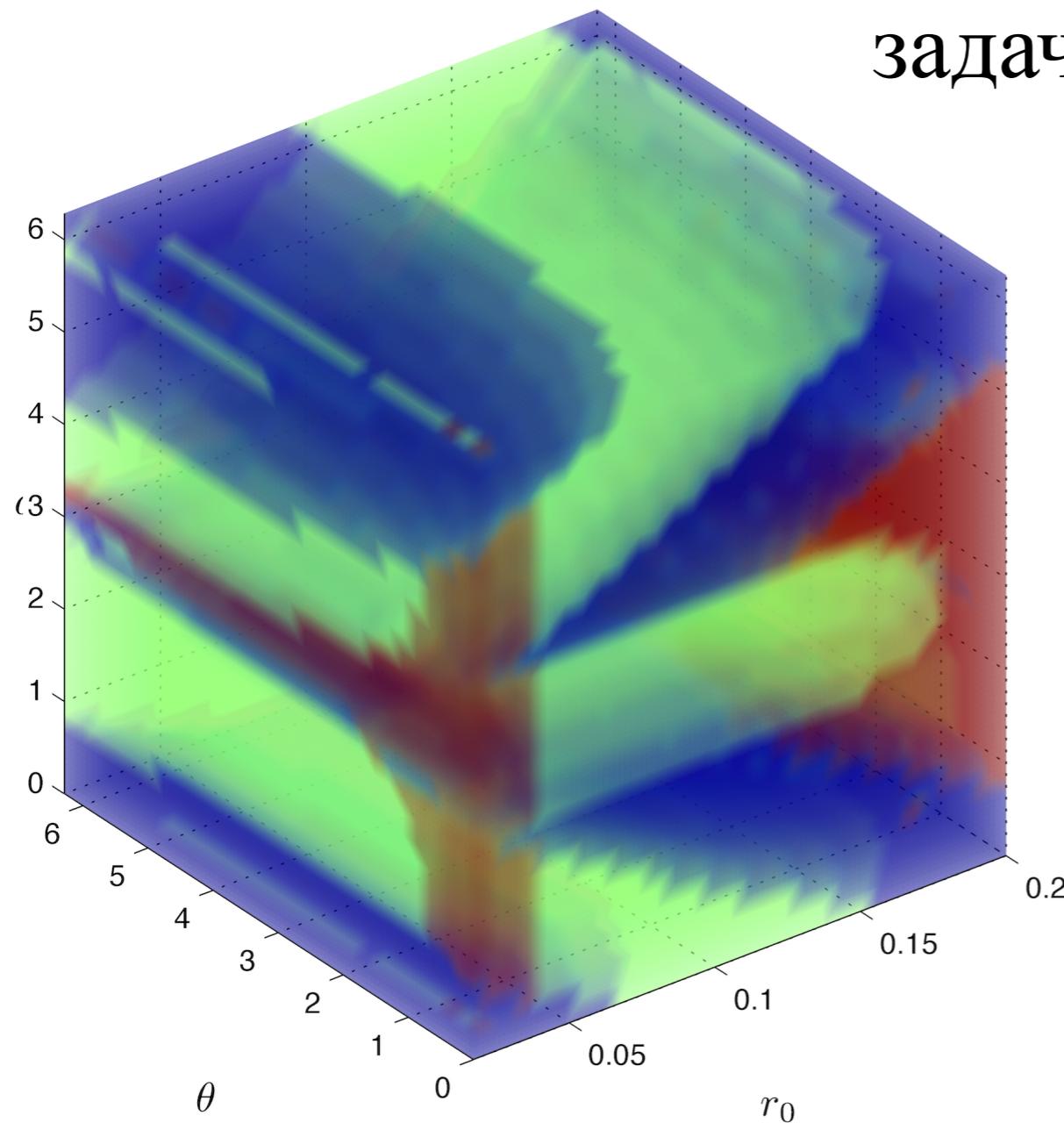
# Траектории при разных начальных положениях (параболический случай)



- Синие линии — траектории, уходящие на бесконечность,
- Зелёные линии — ограниченные траектории.

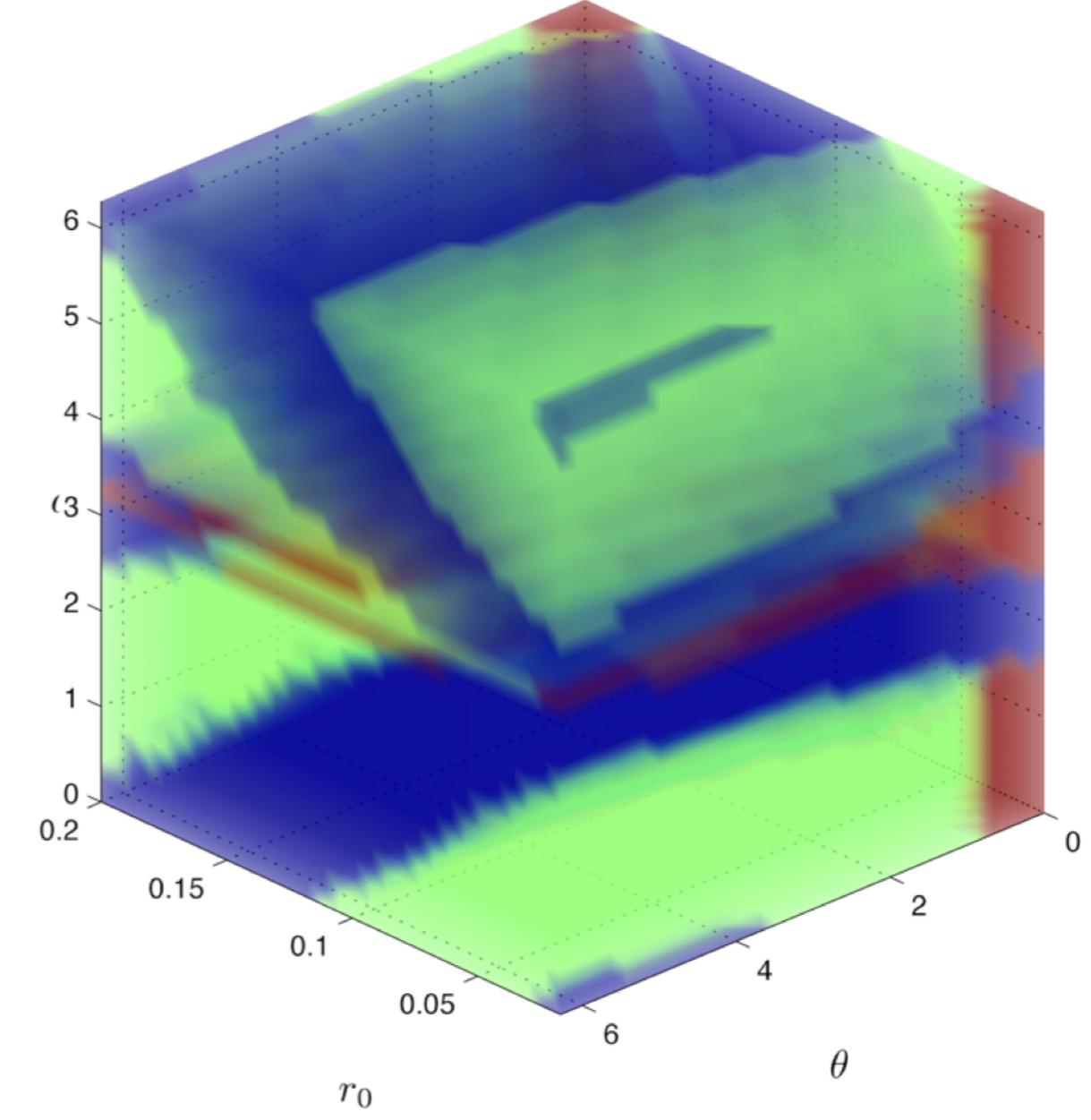
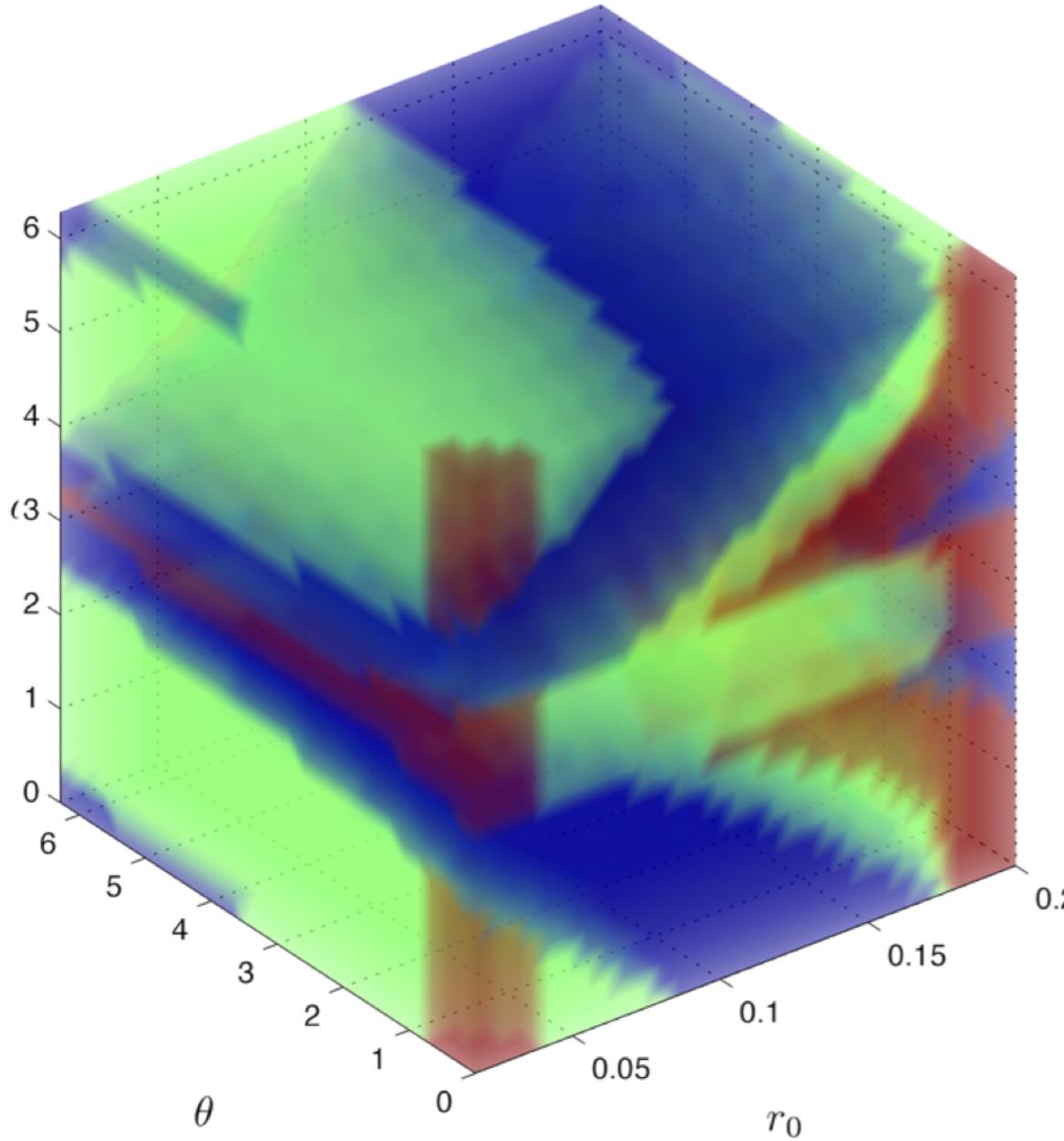
Просчёт одной из ограниченных траекторий в течение длительного времени

# Трёхмерный куб начальных параметров, соответствующих параболической поверхности в задаче двух тел



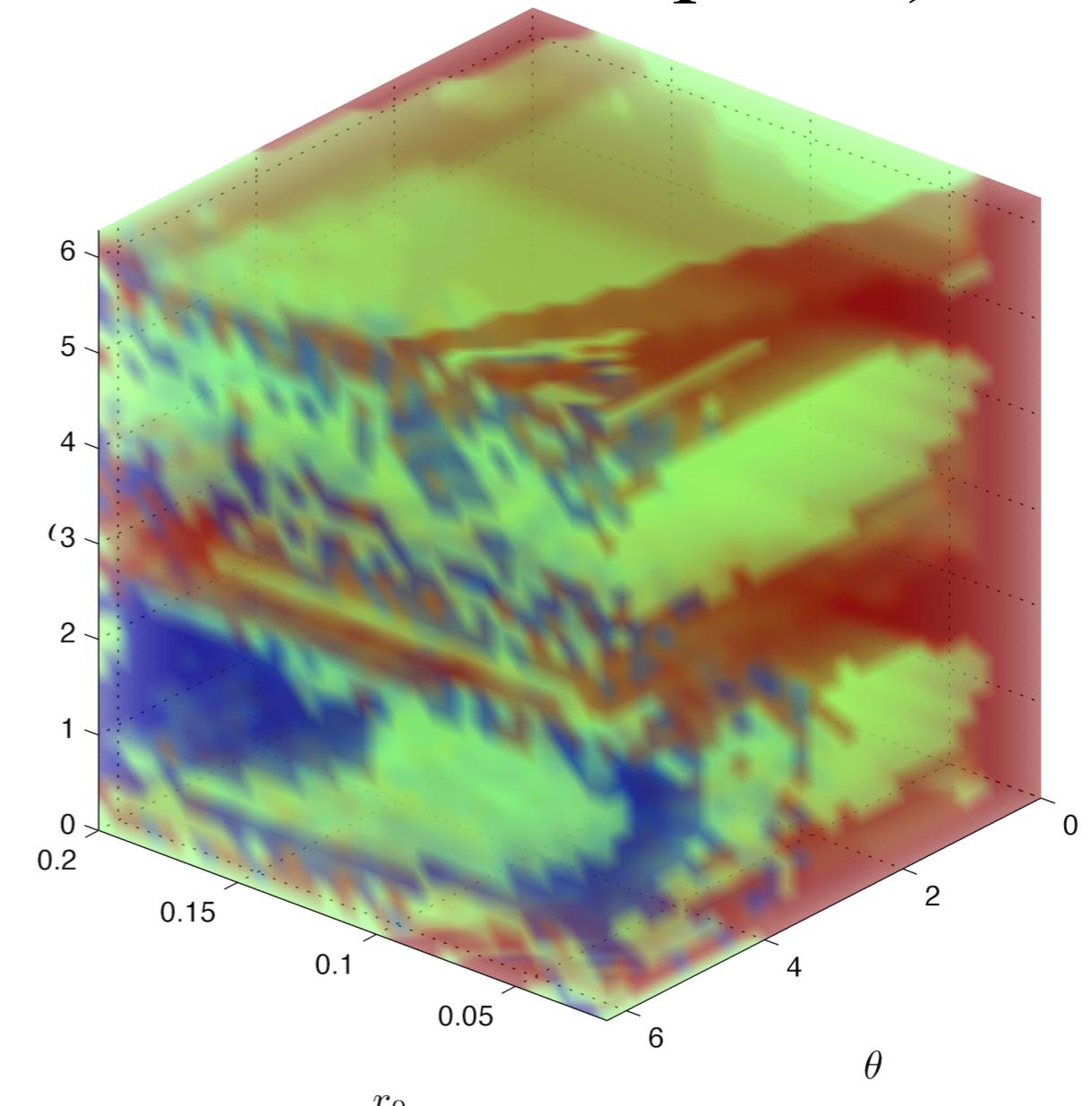
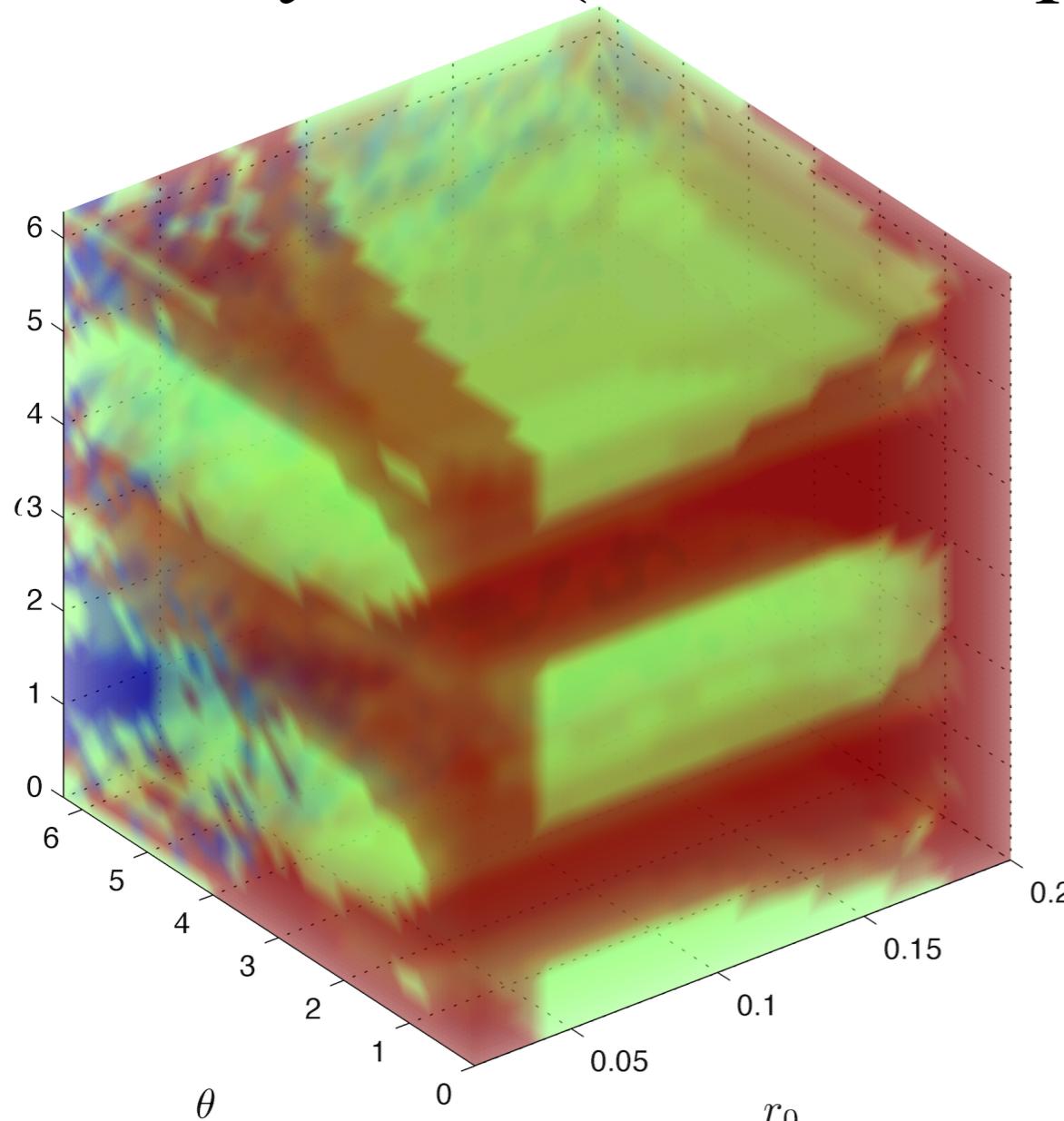
- Зеленая область — область ограниченных траекторий,
- Синяя область — область неограниченных траекторий,
- Красная область — начальные параметры системы, при которых исследуемое тело сталкивается с Землёй.

Трёхмерный куб начальных параметров,  
соответствующих гиперболической области в задаче  
двух тел (120% от второй космической скорости)



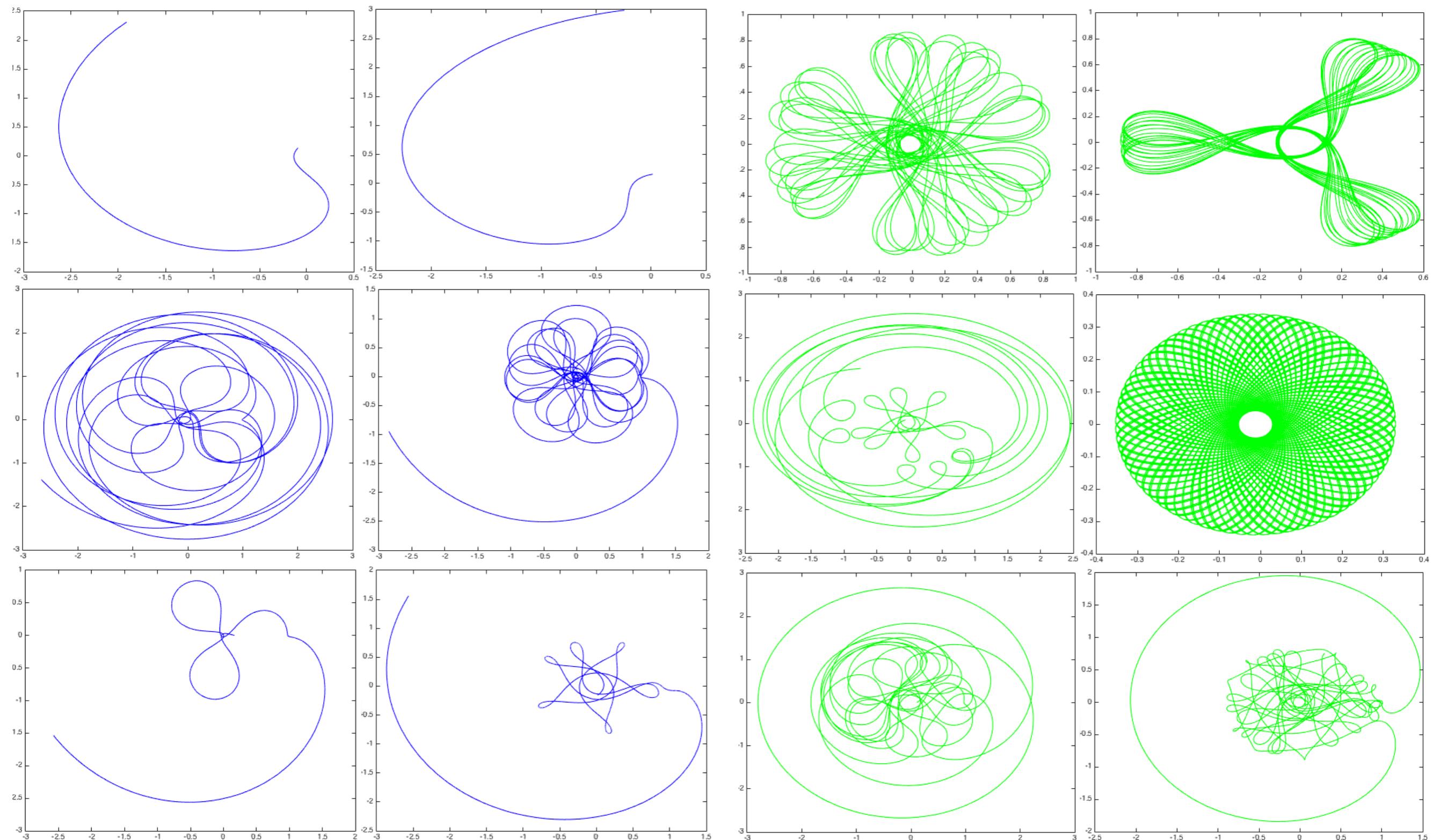
- Зеленая область — область ограниченных траекторий,
- Синяя область — область неограниченных траекторий,
- Красная область — начальные параметры системы, при которых исследуемое тело сталкивается с Землёй.

Трёхмерный куб начальных параметров,  
соответствующих эллиптической области в задаче  
двух тел (90% от второй космической скорости)

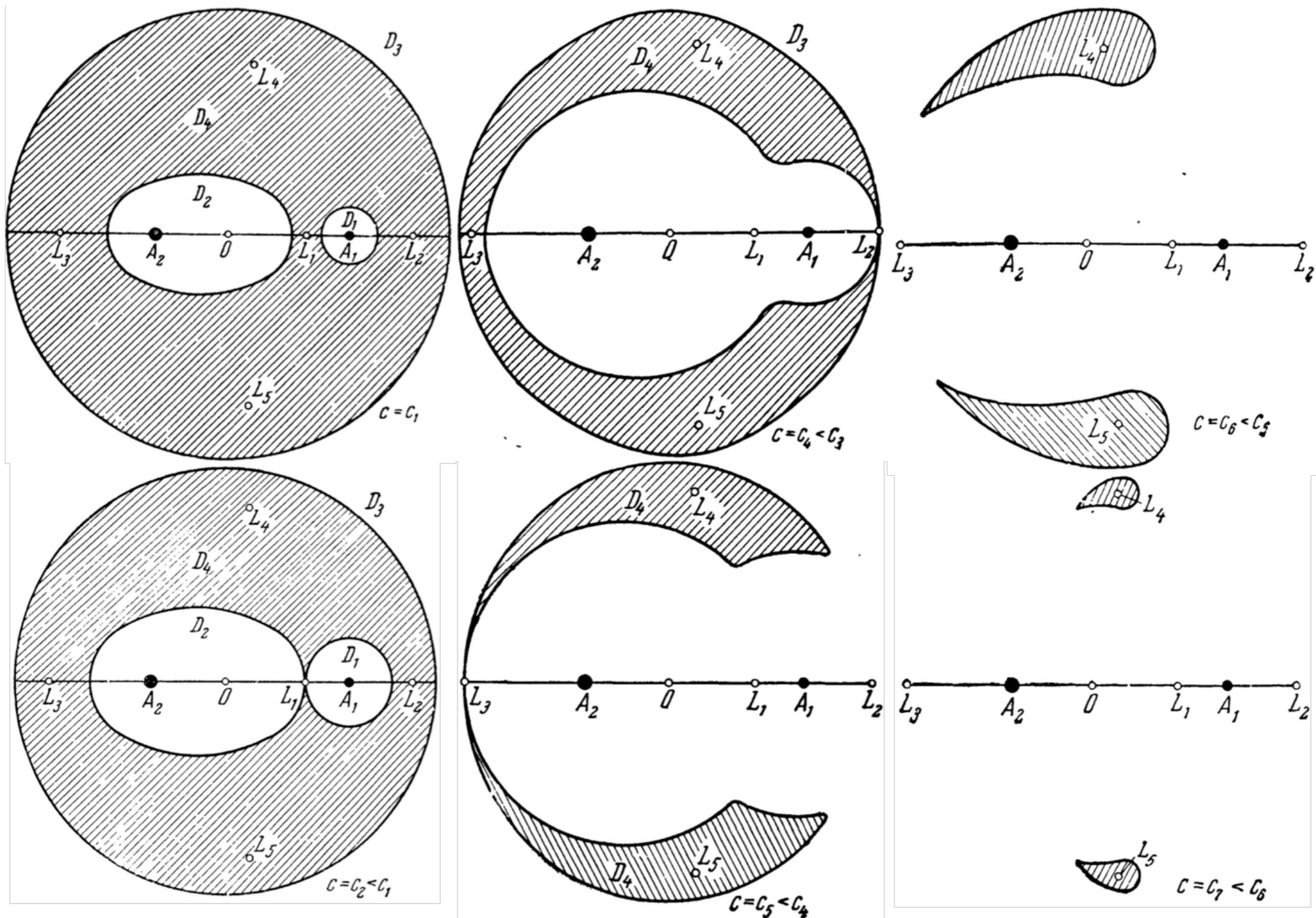


- Зеленая область — область ограниченных траекторий,
- Синяя область — область неограниченных траекторий,
- Красная область — начальные параметры системы, при которых исследуемое тело сталкивается с Землёй.

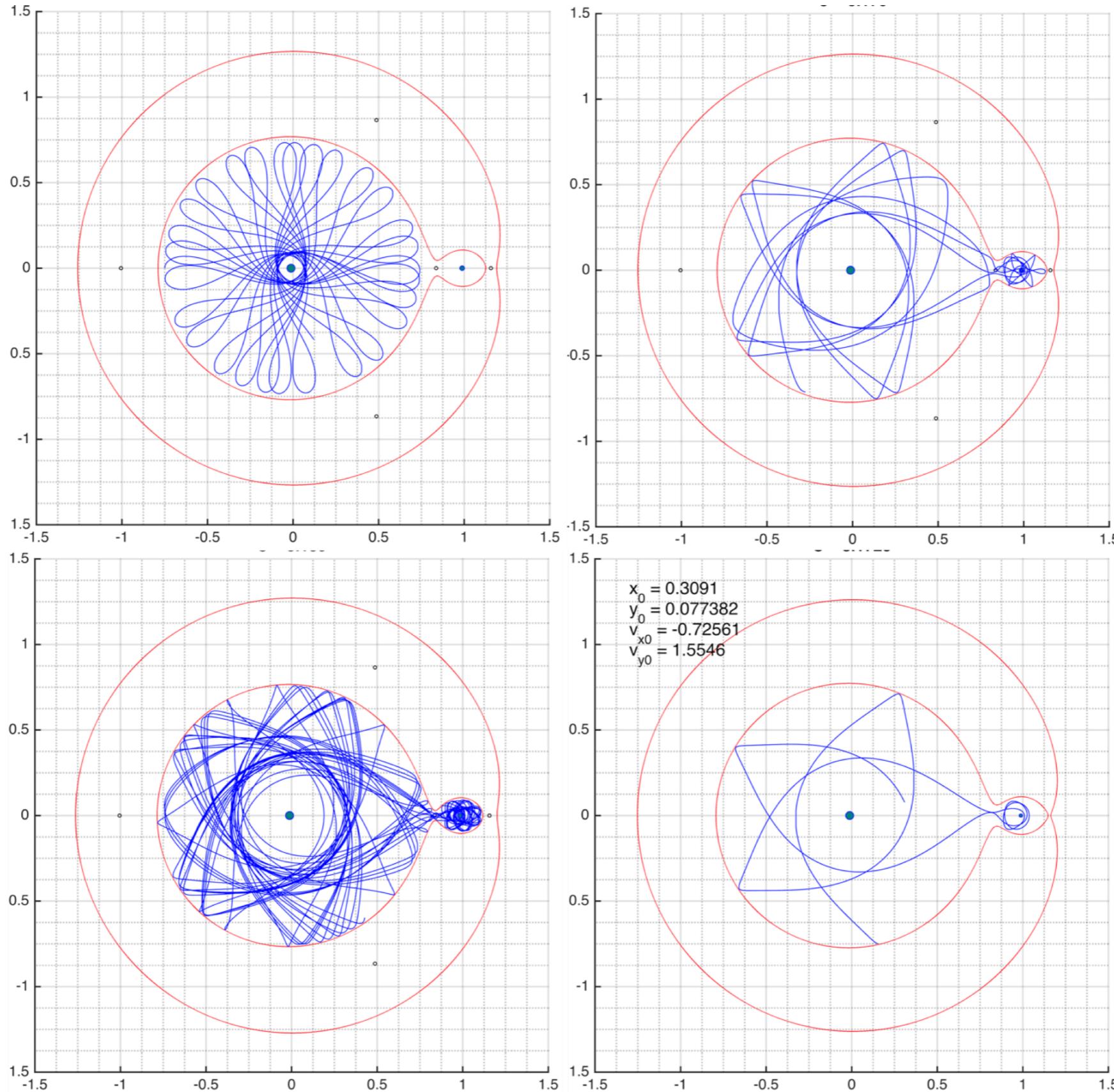
# Частные виды траекторий (эллиптическая область)



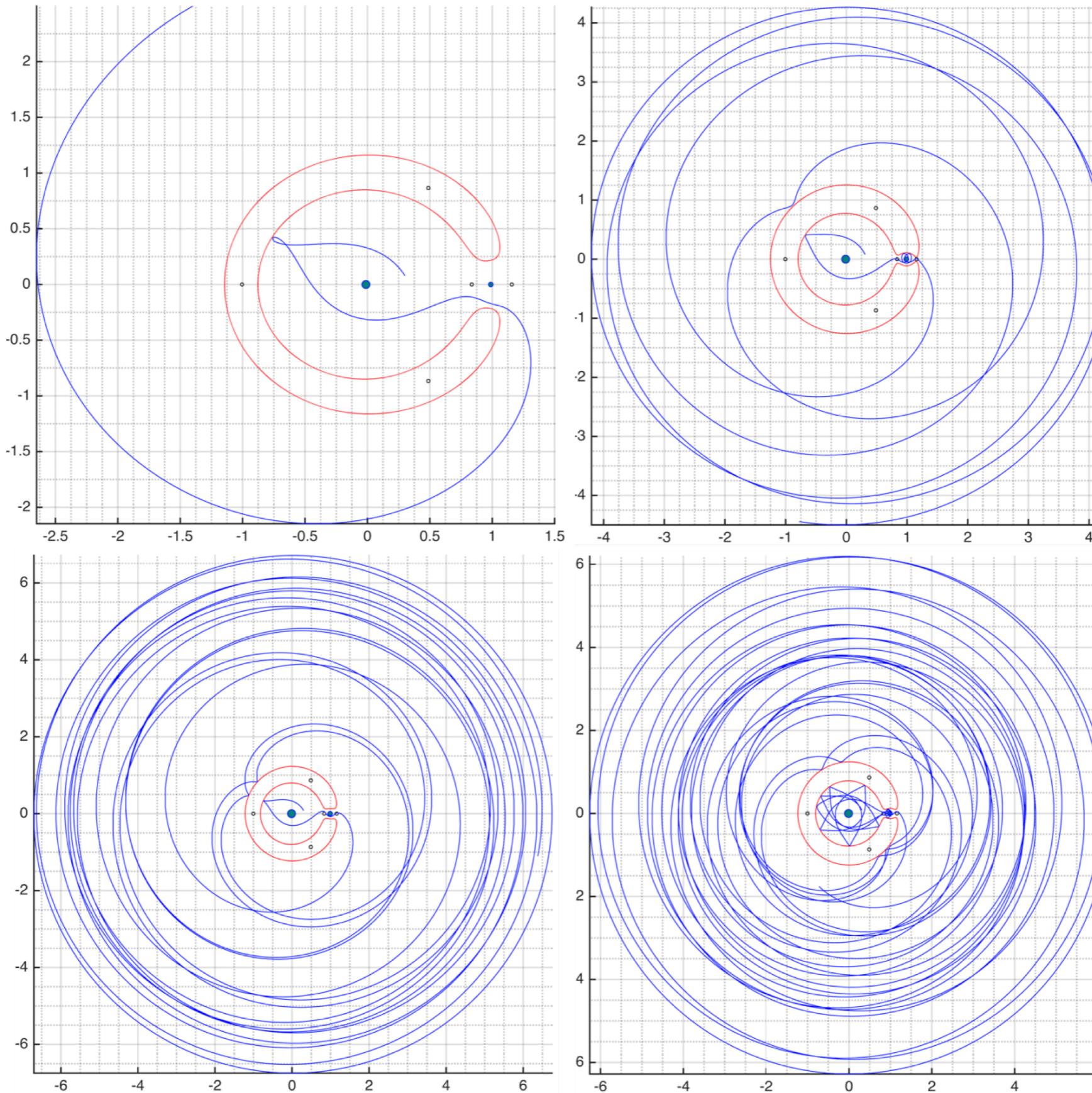
# Использование областей возможных движений



# Устойчивые по Хиллу траектории



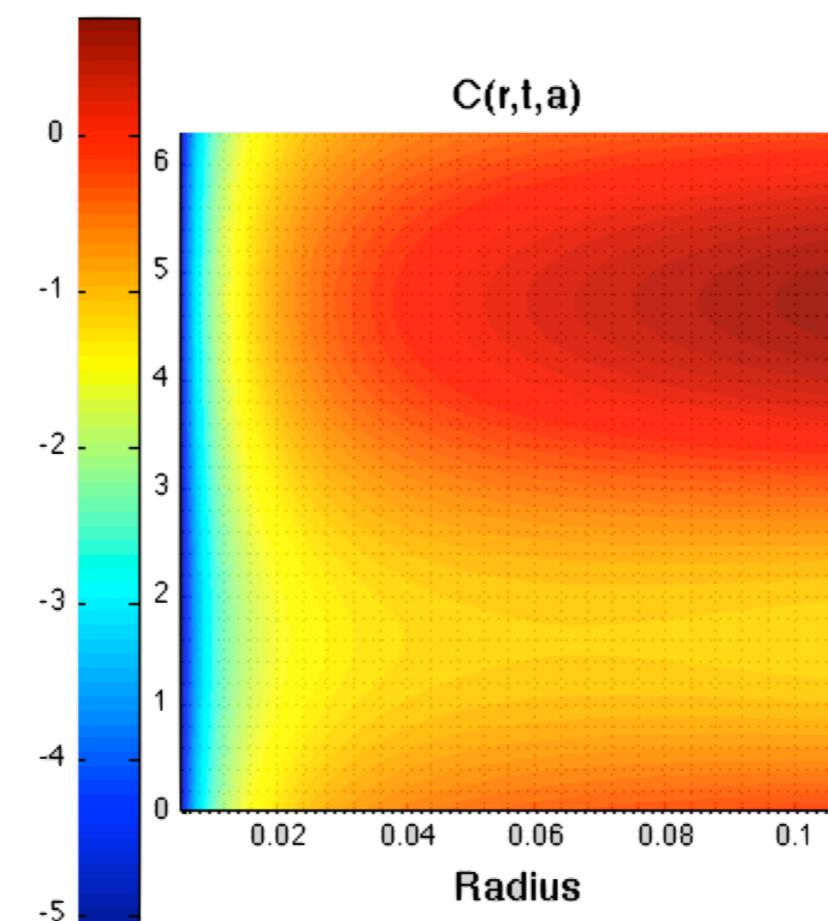
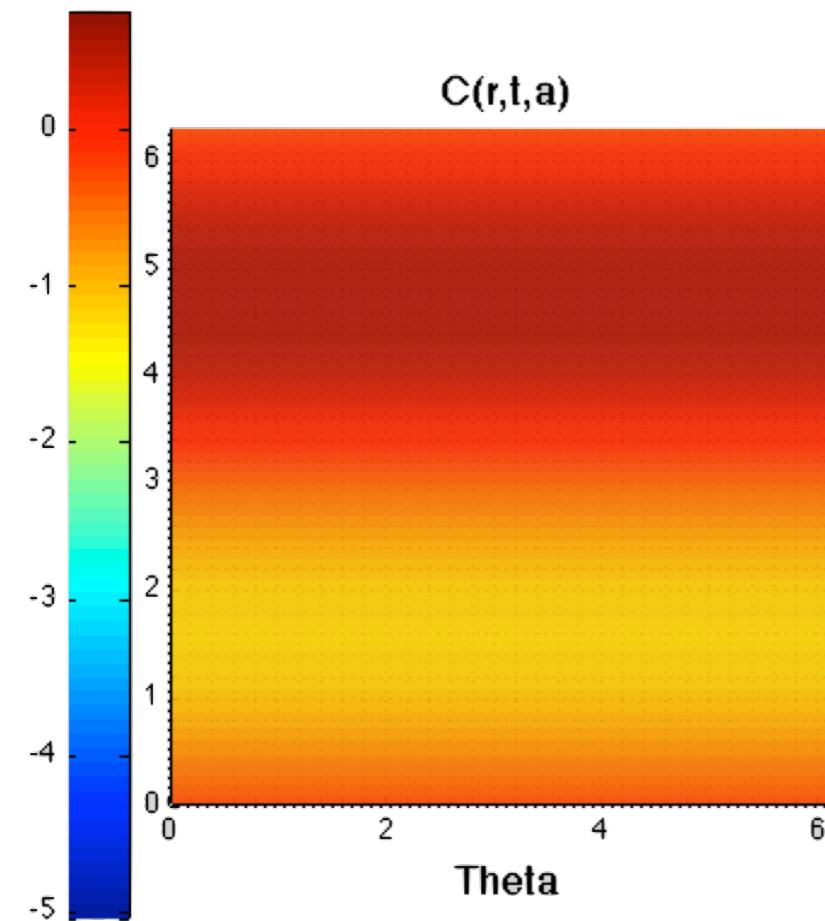
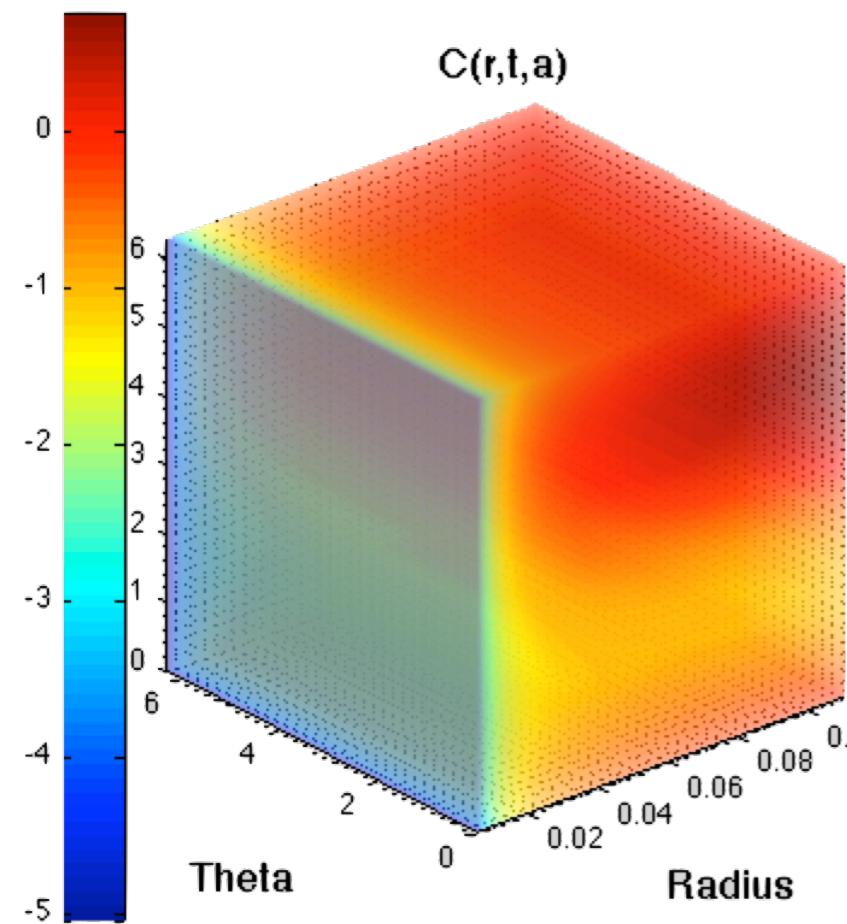
# Неустойчивые по Хиллу траектории



# Избыток начальной кинетической энергии

Необходимое и достаточное условие:  $C \leq 3.17$

Вторая космическая скорость задачи двух тел  
слишком велика для поставленной задачи.  
Достаточно использовать условия из  
эллиптической области.



## Заключение

- Получено новое представление второй космической скорости в задаче двух тел в синодических осях
- Получены условия существования трёх областей, реализующих разные типы движений
- Численно исследовано поведение траекторий задачи трёх тел, когда начальные условия берутся из указанных областей, делается вывод о сохранении некоторых предельных свойств решений задачи двух тел в неинтегрируемой проблеме трёх тел
- Численно показано, что «гиперболический» и «параболический» тип движений сохраняется, как правило, в задаче трёх тел (неустойчивость по Хиллу)
- Показано, что «эллиптический» тип трансформируется наиболее сильно: имеют место как устойчивые по Хиллу движения, описываемые квазипериодическими функциями времени, так и неустойчивые движения, когда малое тело покидает систему Земля – Луна через «бутылочное горлышко» в окрестности точки либрации L2.