

## СФЕРИЧЕСКИЕ БЕССЕЛЕВЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В НЕОДНОРОДНЫХ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ СРЕДАХ

А. В. НОВИЦКИЙ<sup>1)</sup>, Р. Х. АЛЬВАРЕС РОДРИГЕС<sup>1)</sup>, В. М. ГАЛЫНСКИЙ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Для неоднородных бианизотропных сред обобщен матричный подход, применявшийся ранее для описания электромагнитных волн в однородных вращательно-симметричных средах. Предложен общий способ определения материальных параметров неоднородных сред в зависимости от профиля электромагнитной волны в среде. Рассмотрено решение обратной задачи, заключающейся в поиске материальных тензоров неоднородных вращательно-симметричных сред, в которых электрическое и магнитное поля волн описываются сферическими функциями Бесселя. Результативность матричного подхода продемонстрирована на конкретном примере. Данный подход может использоваться для создания требуемого отклика искусственной среды (метаматериала) на внешнее излучение.

**Ключевые слова:** анизотропная среда; метаматериалы; распространение электромагнитных волн.

## SPHERICAL BESSEL SOLUTIONS OF MAXWELL'S EQUATIONS IN INHOMOGENEOUS ROTATIONALLY SYMMETRIC MEDIA

A. V. NOVITSKY<sup>a</sup>, R. J. ALVAREZ RODRIGUEZ<sup>a</sup>, V. M. GALYNSKY<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: galynsky@bsu.by

Matrix approach applied earlier for description of electromagnetic waves in homogeneous rotationally symmetric media is generalized to inhomogeneous bianisotropic media. We propose the general method to determine material parameters of inhomogeneous media depending on the electromagnetic wave's profile. We consider an inverse problem which is the search of the material tensors of inhomogeneous rotationally symmetric media with predetermined electric and magnetic wave's fields in the form of spherical Bessel functions. Functioning of the approach is demonstrated with a particular example. The approach can be applied to create the required response of the artificial medium (metamaterial) on the external radiation.

**Key words:** anisotropic medium; metamaterials; propagation of electromagnetic waves.

---

### Образец цитирования:

Новицкий А. В., Альварес Родригес Р. Х., Галынский В. М. Сферические бesselовы решения уравнений Максвелла в неоднородных вращательно-симметричных средах // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. 2017. № 1. С. 52–60.

### For citation:

Novitsky A. V., Alvarez Rodriguez R. J., Galynsky V. M. Spherical Bessel solutions of Maxwell's equations in inhomogeneous rotationally symmetric media. *J. Belarus. State Univ. Phys.* 2017. No. 1. P. 52–60 (in Russ.).

---

### Авторы:

**Андрей Викторович Новицкий** – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

**Ричард Хосе Альварес Родригес** – аспирант кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета. Научный руководитель – А. В. Новицкий.

**Владимир Михайлович Галынский** – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

### Authors:

**Andrey Novitsky**, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.

*novitsky@bsu.by*

**Richard Jose Alvarez Rodriguez**, postgraduate student at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.

*richardfby@gmail.com*

**Vladimir Galynsky**, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.

*galynsky@bsu.by*

## Введение

В последние годы электромагнитная теория получила новые объекты изучения – метаматериалы, представляющие собой искусственные периодические среды с периодом решетки, намного меньшим, чем длина волны взаимодействующего с ней излучения [1]. В узлах решетки метаматериала находятся рассеиватели, так называемые метаатомы, которые могут иметь разнообразные геометрические формы. Метаатом чаще всего производят из металла для того, чтобы среда обладала не только диэлектрической проницаемостью, но и искусственной магнитной проницаемостью благодаря наведенным электрическим токам. Метаматериал с поляризуемостью и намагниченностью может иметь отрицательный показатель преломления [2], теоретически описанный в [3]. Для приобретения этого свойства среда должна одновременно обладать отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Сложность структуры метаатома может приводить к разнообразным и необычным явлениям, аналогов которым нет в природе, таким как планарная киральность [4], волновое обтекание объектов электромагнитным излучением [5–8], необычные законы отражения света от структурированных поверхностей (метаповерхностей) [9; 10] и др. Несколько лет назад началось интенсивное изучение сильно анизотропных гиперболических метаматериалов, получивших свое название благодаря форме изочастотной дисперсионной кривой плоской электромагнитной волны, распространяющейся в них [11]. Свойствами гиперболических метаматериалов обладают многослойная металлodieлектрическая структура и решетка металлических проволок, встроенных в диэлектрическую матрицу. Обе формы достаточно просты для производства, в том числе и в наномасштабах, т. е. они могут использоваться и в оптическом диапазоне длин волн. Гиперболические метаматериалы применяются для создания гиперболических линз высокой разрешающей способности [12] и сильного магнитного отклика в диэлектрических структурах [13; 14], увеличения локальной плотности оптических состояний, что повышает скорость спонтанного излучения [15] и приводит к отклонениям от планковской теории черного излучения [16]. Вблизи топологического перехода от эллиптической дисперсии к гиперболической метаматериал обладает диэлектрической проницаемостью, равной нулю [17].

Цель настоящей работы – построение метода аналитического нахождения распределений электромагнитных полей при распространении в сложных неоднородных сферически-симметричных средах и решение обратной задачи – поиска структуры материальных тензоров по заданной топологии поля, что может быть использовано при моделировании взаимодействия неоднородных сферических частиц в узлах метаматериала с излучением. Возможность моделирования взаимодействия отдельных частиц с полем позволит разрабатывать метаматериалы с необходимыми электрическими и магнитными мультипольными моментами.

Достижение указанной цели определяет ряд задач. Во-первых, необходимо найти аналитические решения уравнений Максвелла для неоднородных сред в виде сферических функций Бесселя, т. е. в таком же виде, как для однородных сред. Во-вторых, нужно определить классы сред, дающих такие решения. В-третьих, следует продемонстрировать работу предлагаемого алгоритма решения на конкретном примере. Несмотря на то что задачу о распространении волн в неоднородных средах можно решать численными методами, ценность аналитических решений состоит в том, что они позволяют в дальнейшем получать рассеянный на сферических частицах свет с требуемыми характеристиками, а также вычислять значения мультипольных моментов для таких частиц. Известно, что последовательный подход к изучению волн в неоднородных бианизотропных вращательно-симметричных средах отсутствует. Существуют частные решения, полученные для целей геофизики и оптики атмосферы [18; 19], приближенные решения в геометрической оптике [20], а также решения с равными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей в трансформационной оптике [21].

## Матричный метод решения уравнений Максвелла

Для решения поставленной задачи воспользуемся матричным (операторным) методом решения уравнений Максвелла, который применялся для плоскостойких [22], цилиндрически-слоистых [23] и сферически-слоистых систем [24]. Общая идея состоит в сведении уравнений Максвелла в частных производных к системе обыкновенных уравнений первого порядка с помощью разделения переменных. Затем определяются операторы пространственной эволюции волн и тензоры поверхностных импедансов, позволяющие решить проблему рассеяния света. В настоящей работе решаются лишь уравнения Максвелла, но не граничная задача.

Условие вращательной симметрии сред [24; 25] подразумевает возможность разделения переменных в напряженностях стационарных электрического и магнитного полей

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi, t) = \exp(-i\omega t) F_m(\theta, \varphi) \mathbf{E}(r);$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, \varphi, t) = \exp(-i\omega t) F_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{H}(r)$$

с помощью тензорных функций углов

$$F_{lm} = Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + X_{lm}(\theta, \varphi) \otimes \mathbf{e}_r + (\mathbf{e}_r \times X_{lm}) \otimes \mathbf{e}_\varphi,$$

где  $r, \theta$  и  $\varphi$  – сферические координаты;  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  – базисные векторы сферической системы координат;  $\omega$  – круговая частота;  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  и  $X_{lm}(\theta, \varphi)$  – скалярные и векторные сферические гармоники ( $l$  и  $m$  – целые числа); знак  $\otimes$  – прямое (тензорное) произведение векторов, которые выделены жирным шрифтом. Тензоры диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостей, а также псевдотензоры гирации  $\alpha$  и  $\kappa$  коммутируют с  $F_{lm}$  и задаются следующим образом:

$$\xi(r) = \xi_1(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \xi_2(r) I + i\chi_\xi \mathbf{e}_r^\times,$$

где  $\xi$  принимает значение  $\epsilon, \mu, \alpha$  или  $\kappa$ ;  $I = 1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$  – проектор на плоскость, ортогональную  $\mathbf{e}_r$ ;  $\mathbf{e}_r^\times$  – тензор, дуальный вектору  $\mathbf{e}_r$  ( $\mathbf{e}_r^\times \mathbf{a} = \mathbf{e}_r \mathbf{a}^\times = \mathbf{e}_r \times \mathbf{a}$ ) [26]. Тогда уравнения Максвелла для полей  $\mathbf{E}(r)$  и  $\mathbf{H}(r)$  принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r^\times \frac{d\mathbf{H}}{dr} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_r^\times \mathbf{H} - \frac{i\sqrt{l(l+1)}}{r} \mathbf{e}_\varphi^\times \mathbf{H} &= -ik_0(\epsilon \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}); \\ \mathbf{e}_r^\times \frac{d\mathbf{E}}{dr} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_r^\times \mathbf{E} - \frac{i\sqrt{l(l+1)}}{r} \mathbf{e}_\varphi^\times \mathbf{E} &= -ik_0(\mu \mathbf{E} + \kappa \mathbf{H}), \end{aligned}$$

где  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  – волновое число в вакууме. Отметим используемые в правой части уравнений материальные соотношения, в которых индукции электрического и магнитного полей выражаются не только через напряженности электрического и магнитного полей соответственно, но и через перекрестные слагаемые магнитоэлектрической связи [22–24].

Выделим продольные  $E_r, H_r$  и поперечные  $\mathbf{E}_t = I\mathbf{E}, \mathbf{H}_t = I\mathbf{H}$  составляющие полей. Первые выражаются через вторые посредством алгебраических соотношений и потому могут быть исключены из системы дифференциальных уравнений. Поперечные составляющие удовлетворяют матрично-векторному уравнению, аналогичному системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, которое в дальнейшем и будет решаться:

$$\frac{d\mathbf{W}}{dr} = ik_0 M(r) \mathbf{W}(r), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} M(r) &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}(r) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_t \\ \mathbf{E}_t \end{pmatrix}; \\ A &= \frac{i}{k_0 r} I + \mathbf{e}_r^\times \alpha I - \kappa_1 \delta \frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad B = \mathbf{e}_r^\times \epsilon I - \epsilon_1 \delta \frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta; \\ C &= -\mathbf{e}_r^\times \mu I + \mu_1 \delta \frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad D = \frac{i}{k_0 r} I - \mathbf{e}_r^\times \kappa I + \alpha_1 \delta \frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta; \\ \delta &= (\epsilon_1 \mu_1 - \alpha_1 \kappa_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Однородные среды с постоянными значениями  $\xi_1, \xi_2$  и  $\chi_\xi$  рассматривались в [24]. В настоящей работе нас будет интересовать случай зависимых от радиальной координаты  $r$  компонент тензоров. Для этого модифицируем метод решения, применявшийся для однородных сред. Представим матрицу  $M(r)$  в виде суммы трех слагаемых:

$$M(r) = M^{(0)}(r) + \frac{1}{r} M^{(1)}(r) + \frac{1}{r^2} M^{(2)}(r),$$

причем в случае однородных сред матрицы  $M^{(0)}$ ,  $M^{(1)}$ ,  $M^{(2)}$  становятся постоянными, а зависимость  $M$  от радиальной координаты определяется функциями при этих матрицах.  $M^{(0)}$ ,  $M^{(1)}$  и  $M^{(2)}$  записываются в виде

$$M^{(0)}(r) = M_{\theta\theta}^{(0)}(r)I + M_{\varphi\theta}^{(0)}(r)e_r^\times; \quad M^{(1)}(r) = \frac{i}{k_0} M_{\theta\theta}^{(1)}(r)I; \quad M^{(2)}(r) = \frac{l(l+1)}{k_0^2} M_{\varphi\theta}^{(2)}(r)I,$$

где

$$M_{\theta\theta}^{(0)} = i \begin{pmatrix} -\chi_\alpha(r) & -\chi_\varepsilon(r) \\ \chi_\mu(r) & \chi_\kappa(r) \end{pmatrix}; \quad M_{\varphi\theta}^{(0)} = i \begin{pmatrix} \alpha_2(r) & \varepsilon_2(r) \\ -\mu_2(r) & -\kappa_2(r) \end{pmatrix};$$

$$M_{\theta\theta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{\varphi\theta}^{(2)} = \delta(r) \begin{pmatrix} -\kappa_1(r) & -\varepsilon_1(r) \\ \mu_1(r) & \alpha_1(r) \end{pmatrix}.$$
(2)

Из системы уравнений (1) можно исключить  $\varphi$ -компоненты и получить дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестного вектора с двумя  $\theta$ -компонентами магнитного и электрического полей

$$\frac{d^2}{dr^2} \begin{pmatrix} H_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix} + \left( Q_1(r) + \frac{2}{r} \right) \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} H_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix} + \left( Q_2(r) + \frac{1}{r} Q_1(r) + \frac{1}{r^2} Q_3(r) \right) \begin{pmatrix} H_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix} = 0.$$
(3)

В (3) двумерные матрицы  $Q$  выражаются через матрицы  $M$  следующим образом:

$$Q_1 = -ik_0 \left( M_{\theta\theta}^{(0)} + M_{\varphi\theta}^{(0)} M_{\theta\theta}^{(0)} M_{\varphi\theta}^{(0)-1} \right) - \frac{dM_{\varphi\theta}^{(0)}}{dr};$$

$$Q_2 = -k_0^2 M_{\varphi\theta}^{(0)} \left( M_{\varphi\theta}^{(0)} + M_{\theta\theta}^{(0)} M_{\varphi\theta}^{(0)-1} M_{\theta\theta}^{(0)} \right) - ik_0 \left( \frac{dM_{\theta\theta}^{(0)}}{dr} - \frac{dM_{\varphi\theta}^{(0)}}{dr} M_{\varphi\theta}^{(0)-1} M_{\theta\theta}^{(0)} \right);$$

$$Q_3 = -l(l+1) M_{\varphi\theta}^{(0)} M_{\varphi\theta}^{(2)}.$$
(4)

После решения уравнения (3)  $\varphi$ -компоненты полей вычисляются по известным  $\theta$ -компонентам согласно

$$\begin{pmatrix} H_\varphi \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \hat{Z} \begin{pmatrix} H_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix}; \quad \hat{Z} = -M_{\varphi\theta}^{(0)-1} \left( \frac{1}{ik_0} \frac{d}{dr} - \frac{i}{k_0 r} - M_{\theta\theta}^{(0)} \right),$$

где  $\hat{Z}$  – дифференциальный матричный оператор. Таким образом, тангенциальные составляющие полей, как сумма  $\varphi$ - и  $\theta$ -компонент, могут быть представлены в виде

$$\mathbf{W}(r) = S(r) \mathbf{C}, \quad S(r) = \begin{pmatrix} \eta_1(r) & \eta_2(r) \\ \zeta_1(r) & \zeta_2(r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$
(5)

где матрицы  $\eta_{1,2}$  и  $\zeta_{1,2}$  относятся к двум независимым решениям для магнитного и электрического полей соответственно, а вектор  $\mathbf{C}$  в качестве компонент имеет четыре постоянных интегрирования матричного уравнения (3). Решение (5) может быть переписано в эволюционном виде, когда оператор эволюции  $\Omega(r, r_0)$  (матрица  $4 \times 4$ ), действуя на начальный вектор полей  $\mathbf{W}(r_0)$ , дает вектор полей в другой точке пространства:

$$\mathbf{W}(r) = \Omega(r, r_0) \mathbf{W}(r_0),$$

где  $\Omega(r, r_0) = S(r) S^{-1}(r_0)$ . Эволюционные операторы и тензоры импеданса для независимых волн  $\Gamma_{1,2}(r) = \zeta_{1,2}(r) \eta_{1,2}^{-1}(r)$  играют важную роль при решении граничной задачи.

## Неоднородные среды

Для того чтобы найти среды, в которых электромагнитные поля описываются заданной функцией радиальной координаты, требуется решить обратную задачу. Сначала выбираем матричные функции  $Q_{1,2,3}(r)$  таким образом, чтобы уравнение (3) имело наперед заданное решение. Затем решаем три дифференциальных матричных уравнения (4) относительно  $M_{\theta\theta}^{(0)}(r)$ ,  $M_{\phi\theta}^{(0)}(r)$  и  $M_{\phi\phi}^{(2)}(r)$  при заданных  $Q_{1,2,3}(r)$ . Последний этап – восстановление материальных параметров по известным матрицам  $M$ . Таким образом можно найти все типы вращательно-симметричных сред, допускающие данное аналитическое решение. Проблема, однако, в том, что дифференциальные матричные уравнения (4) – нелинейные, а их решение представляет сложную задачу, требующую глубокого анализа. Поэтому мы используем дополнительные ограничения, которые позволят найти некоторые (но не все) решения поставленной задачи.

Будем считать, что матрицы  $M_{\theta\theta}^{(0)}(r)$ ,  $M_{\phi\theta}^{(0)}(r)$ ,  $M_{\phi\phi}^{(2)}(r)$ ,  $\frac{dM_{\theta\theta}^{(0)}}{dr}$  и  $\frac{dM_{\phi\theta}^{(0)}}{dr}$  коммутируют, т. е. имеют одинаковый набор собственных векторов. Поскольку производные матриц входят в группу коммутирующих матриц, собственные векторы удобно выбрать постоянными, а матрицы представить в виде спектрального разложения

$$M_{\theta\theta}^{(0)} = \sum_{i=1}^2 f_i(r) \mathbf{a}_i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i; \quad M_{\phi\theta}^{(0)} = \sum_{i=1}^2 g_i(r) \mathbf{a}_i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i; \quad M_{\phi\phi}^{(2)} = \sum_{i=1}^2 h_i(r) \mathbf{a}_i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i, \quad (6)$$

где  $f_i(r)$ ,  $g_i(r)$  и  $h_i(r)$  – собственные значения матриц;  $\mathbf{a}_i$  и  $\tilde{\mathbf{a}}_i$  – правые и левые собственные векторы, определяемые уравнениями  $M_{\theta\theta}^{(0)} \mathbf{a}_i = f_i \mathbf{a}_i$  и  $\tilde{\mathbf{a}}_i M_{\theta\theta}^{(0)} = \tilde{\mathbf{a}}_i f_i$  соответственно. Для них выполняются соотношения  $\mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{a}}_j = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Подставляем (6) в (4):

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\sum_{i=1}^2 (2ik_0 f_i + g_i') \mathbf{a}_i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i; \\ Q_2 &= \sum_{i=1}^2 \left( -k_0^2 (f_i^2 + g_i^2) - ik_0 f_i' + ik_0 \frac{f_i g_i'}{g_i} \right) \mathbf{a}_i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i; \\ Q_3 &= -l(l+1) \sum_{i=1}^2 g_i h_i \mathbf{a}_i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по радиальной координате. Будем искать решения в виде сферических функций Бесселя. Для этого перепишем уравнение (3) с использованием подстановки

$$\begin{pmatrix} H_\theta(r) \\ E_\theta(r) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int Q_1(r) dr\right) \begin{pmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 y^{(i)}(r) \mathbf{a}_i. \quad (7)$$

Второе соотношение в (7) показывает, что новый, неизвестный, вектор может быть также разложен по введенным собственным векторам. Тогда для неизвестного вектора получаем из (3) уравнение

$$\frac{d^2}{dr^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \left( Q_2 - \frac{1}{4} Q_1^2 - \frac{1}{2} Q_1' + \frac{1}{r^2} \left( Q_3 - \frac{1}{4} \right) \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (8)$$

представляющее собой два независимых дифференциальных уравнения второго порядка, из которых находим  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$ . Выражение (8) будет уравнением Бесселя, лишь если слагаемое в скобках можно представить в виде

$$Q_2 - \frac{1}{4} Q_1^2 - \frac{1}{2} Q_1' + \frac{1}{r^2} \left( Q_3 - \frac{1}{4} \right) = A + \frac{B}{r^2}, \quad (9)$$

поэтому следует искать функции  $f_i$ ,  $g_i$  и  $h_i$  в виде разложения по степеням радиальной координаты вида

$$f_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j^{(i)} r^j; \quad g_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_j^{(i)} r^j; \quad h_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H_j^{(i)} r^j.$$

Исследования показали, что, для того чтобы выполнялось соотношение (9), необходимо выбрать  $g_i(r) = G_0^{(i)}$  и  $h_i(r) = H_0^{(i)} + H_2^{(i)}r^2$ , в то время как  $f_i(r)$  остается произвольной. Тогда решением уравнения

$$\frac{d^2}{dr^2} y^{(i)} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} y^{(i)} + \left( -k_0^2 G_0^{(i)2} - l(l+1) G_0^{(i)} H_2^{(i)} - \frac{1 + 4l(l+1) G_0^{(i)} H_0^{(i)}}{4r^2} \right) y^{(i)} = 0$$

является цилиндрическая функция Бесселя или Ханкеля  $y^{(i)} = B_{\nu_i}(\lambda_i r) c^{(i)}$  порядка  $\nu_i = \sqrt{l(l+1) G_0^{(i)} H_0^{(i)} + \frac{1}{4}}$ , причем  $\lambda_i = \sqrt{-k_0^2 G_0^{(i)2} - l(l+1) G_0^{(i)} H_2^{(i)}}$ , а  $c^{(i)}$  – постоянная интегрирования. Стоит отметить существенное отличие от случая однородных сред, заключающееся в зависимости  $\lambda$  от целого числа  $l$ . При больших значениях  $l$  зависимость  $\lambda$  станет пропорциональной этому числу. Далее,  $\theta$ -компоненты полей, согласно (7), равны:

$$\begin{pmatrix} H_\theta(r) \\ E_\theta(r) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 e^{(ik_0 \int f_i(r) dr)} b_{\nu_i-1/2}(\lambda_i r) c^{(i)} \mathbf{a}_i,$$

где введены сферические функции  $b_{\nu_i-1/2}(\lambda_i r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} B_{\nu_i}(\lambda_i r)$ . Получение тангенциальных компонент полей (5) является чисто технической задачей. Ее решение не требуется сейчас, но понадобится в будущем при рассмотрении рассеяния света на неоднородной сферической частице.

### Пример восстановления материальных параметров

Материальные параметры неоднородных бианизотропных сред, имеющих распределение полей в виде сферической функции Бесселя, могут быть найдены из соотношений (2), так как матрицы  $M$  заданы выражениями (6). Единственная трудность состоит в определении  $\delta(r)$ , но она легко разрешается благодаря тому, что  $\delta^{-1}$  – определитель матрицы, стоящей за ней в формулах (2). Тогда, вычисляя определитель правой и левой частей, получаем  $\delta(r) = \det(M_{\phi\theta}^{(2)})$ . Материальные тензоры имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon(r) &= -\frac{(e_1 M_{\phi\theta}^{(2)} e_2)}{\det(M_{\phi\theta}^{(2)})} e_r \otimes e_r + (e_1 M_{\phi\theta}^{(0)} e_2) I + i(e_1 M_{\theta\theta}^{(0)} e_2) e_r^\times; \\ \mu(r) &= \frac{(e_2 M_{\phi\theta}^{(2)} e_1)}{\det(M_{\phi\theta}^{(2)})} e_r \otimes e_r - (e_2 M_{\phi\theta}^{(0)} e_1) I - i(e_2 M_{\theta\theta}^{(0)} e_1) e_r^\times; \\ \alpha(r) &= \frac{(e_2 M_{\phi\theta}^{(2)} e_2)}{\det(M_{\phi\theta}^{(2)})} e_r \otimes e_r + (e_1 M_{\phi\theta}^{(0)} e_1) I + i(e_1 M_{\theta\theta}^{(0)} e_1) e_r^\times; \\ \kappa(r) &= -\frac{(e_1 M_{\phi\theta}^{(2)} e_1)}{\det(M_{\phi\theta}^{(2)})} e_r \otimes e_r - (e_2 M_{\phi\theta}^{(0)} e_2) I - i(e_2 M_{\theta\theta}^{(0)} e_2) e_r^\times, \end{aligned} \tag{10}$$

где  $e_1$  и  $e_2$  – единичные вектор-столбцы (1; 0) и (0; 1) соответственно.

Рассмотрим пример материальных параметров, приводящих к решению в виде сферической функции Бесселя. Выберем произвольные собственные векторы в виде  $\mathbf{a}_1 = \tilde{\mathbf{a}}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \tilde{\mathbf{a}}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ , а собственные значения матриц  $M$  – как функции  $f_1(r) = A_0 r^3$ ,  $f_2(r) = \exp(\beta r)$ ,  $g_1(r) = 2$ ,  $g_2(r) = 1$ ,  $h_1(r) = 1 + B_0 r^2$ ,  $h_2(r) = 2$ . Тогда решение для  $\theta$ -компонент полей выражается, например, через сферическую функцию Бесселя  $j_\nu$

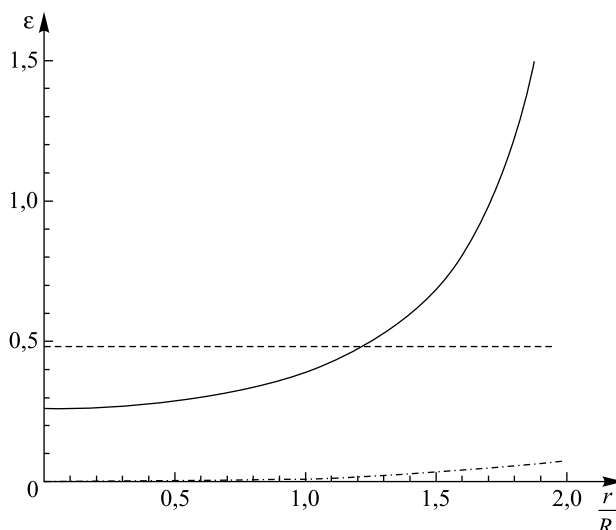


$$\begin{pmatrix} H_\theta(r) \\ E_\theta(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3c^{(1)} \exp\left(\frac{ik_0 A_0 r^4}{4}\right) j_v(\lambda r) + 4c^{(2)} \exp\left(\frac{ik_0 \exp(\beta r)}{\beta}\right) j_v(ik_0 r) \\ 4c^{(1)} \exp\left(\frac{ik_0 A_0 r^4}{4}\right) j_v(\lambda r) - 3c^{(2)} \exp\left(\frac{ik_0 \exp(\beta r)}{\beta}\right) j_v(ik_0 r) \end{pmatrix},$$

где  $v = \sqrt{2l(l+1) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ ;  $\lambda = \sqrt{-4k_0^2 - 2l(l+1)B_0}$ . Тензор диэлектрической проницаемости (10) ра-

вен  $\epsilon(r) = \frac{25(1-B_0 r^2)}{96(1+B_0 r^2)} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{12}{25} I - \frac{12(A_0 r^3 - \exp(\beta r))}{25} \mathbf{e}_r^\times$ . Аналогично определяются и другие мате-

риальные тензоры. На рисунке представлены результаты расчета компонент тензора диэлектрической проницаемости, найденные в рассмотренном выше примере при параметрах  $A_0 = 0,02R^3$ ,  $B_0 = -0,2R^2$ ,  $\beta = -1000R$ . Параметр киральности  $\chi_\epsilon$  может быть сделан сколь угодно малым, а компонента  $\epsilon_1$  – как положительной (см. рисунок), так и знакопеременной. При разных знаках компонент  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  реализуется случай сферически-симметричного гиперболического метаматериала [11].



Зависимость компонент тензора диэлектрической проницаемости  
от безразмерной радиальной координаты  $\frac{r}{R}$  ( $R$  – масштабный множитель):

————  $\epsilon_1(r)$ ; - - - - -  $\epsilon_2(r)$ ; ······  $\chi_\epsilon(r)$

Dependence of the permittivity tensor components on the dimensionless radial coordinate  $\frac{r}{R}$  ( $R$  is the scale factor):

————  $\epsilon_1(r)$ ; - - - - -  $\epsilon_2(r)$ ; ······  $\chi_\epsilon(r)$

### Закключение

С помощью матричного (операторного) метода найден класс вращательно-симметричных сред, электрическое и магнитное поля в которых записываются в виде сферических функций Бесселя и Ханкеля. В связи с этим решалась обратная задача, позволившая восстановить тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей и псевдотензоры гирации по наперед заданным решениям. Отметим, что, для того чтобы восстановить диагональные материальные тензоры, нужно просто выбрать функции  $f_{1,2}(r) = 0$  ( $M_{\theta\theta}^{(0)} = 0$ ), которые сделают равными нулю все  $\chi$ . Для исключения тензоров псевдогирации требуется наложить условие отсутствия диагональных элементов у матриц  $M_{\theta\theta}^{(0)}$  и  $M_{\phi\phi}^{(2)}$ . Таким образом, решения (10) обеспечивают описание рассеивателя общего вида, создание которого в принципе осуществимо благодаря развитию физики метаматериалов. Данные рассеиватели могут быть встроены

в узлы метаповерхности для управления фазой отраженного света. Устройства, построенные на их основе, способны составить конкуренцию тем, которые используются в трансформационной оптике [21] для волнового обтекания объектов [8] и концентрации энергии. Благодаря своей неоднородности частицы могут обладать уникальными оптомеханическими свойствами, которые будут изучены в последующих работах.

Авторы благодарят Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований (грант Ф16Р-049) за финансовую поддержку.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Sarychev A. K., Shalaev V. M. *Electrodynamics of metamaterials*. Singapore, 2007.
2. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity / D. R. Smith [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84, issue 18. P. 4184–4187.
3. Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // *УФН*. 1967. Т. 92. С. 517–526.
4. Asymmetric propagation of electromagnetic waves through a planar chiral structure / V. A. Fedotov [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97, issue 16. Article ID 167401.
5. Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. Controlling electromagnetic fields // *Science*. 2006. Vol. 312, issue 5781. P. 1780–1782.
6. Leonhardt U. Optical conformal mapping // *Science*. 2006. Vol. 312, issue 5781. P. 1777–1780.
7. Capturing photons with transformation optics / J. B. Pendry [et al.] // *Nat. Phys.* 2013. Vol. 9. P. 518–522.
8. Accessing extreme spatiotemporal localization of high-power laser radiation through transformation optics and scalar wave equations / V. Yu. Fedorov [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117, issue 4. Article ID 043902.
9. Light propagation with phase discontinuities: generalized laws of reflection and refraction / N. Yu [et al.] // *Science*. 2011. Vol. 334, issue 6054. P. 333–337.
10. Chen H.-T., Taylor A. J., Yu N. A review of metasurfaces: physics and applications // *Rep. Prog. Phys.* 2016. Vol. 79, № 7. Article ID 076401.
11. Hyperbolic metamaterials / A. Poddubny [et al.] // *Nat. Photonics*. 2013. Vol. 7. P. 958–967.
12. Repan T., Lavrinenko A. V., Zhukovsky S. V. Dark-field hyperlens: Super-resolution imaging of weakly scattering objects // *Opt. Express*. 2015. Vol. 23, issue 19. P. 25350–25364.
13. Magnetic hyperbolic optical metamaterials / S. S. Kruk [et al.] // *Nat. Commun.* 2016. Vol. 7. Article ID 11329.
14. Mirmoosa M. S., Kosulnikov S. Yu., Simovski C. R. Magnetic hyperbolic metamaterial of high-index nanowires // *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 94, issue 7. Article ID 075138.
15. Purcell effect in hyperbolic metamaterial resonators / A. P. Slobozhanyuk [et al.] // *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 92, issue 19. Article ID 195127.
16. Blackbody theory for hyperbolic materials / S.-A. Biehs [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 115, issue 17. Article ID 174301.
17. Javani M. H., Stockman M. I. Real and imaginary properties of epsilon-near-zero materials // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117, issue 10. Article ID 107404.
18. Frazer L. N. Use of the spherical layer matrix in inhomogeneous media // *Geophys. J. Int.* 1977. Vol. 50, № 3. P. 743–749.
19. Babenko V. A., Astaghyeva L. G., Kuzmin V. N. *Electromagnetic scattering in disperse media: Inhomogeneous and anisotropic particles*. Chichester, 2003.
20. Кравцов Ю. А., Кравцов Ю. И. *Геометрическая оптика неоднородных сред*. М., 1980.
21. Leonhardt U., Philbin T. G. Transformation optics and the geometry of light // *Prog. Opt.* 2009. Vol. 53. P. 69–152.
22. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Lavrinenko A. V. Fresnel's reflection and transmission operators for stratified gyroanisotropic media // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1987. Vol. 20, № 5. P. 1095–1106.
23. Novitsky A. V., Barkovskii L. M. Operator matrices for describing guiding propagation in circular bianisotropic fibres // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2005. Vol. 38, № 2. P. 391–404.
24. Novitsky A. V., Barkovsky L. M. Matrix approach for light scattering from a multilayered rotationally symmetric bianisotropic sphere // *Phys. Rev. A*. 2008. Vol. 77, № 2. Article ID 033849.
25. Scattering by rotationally symmetric anisotropic spheres: Potential formulation and parametric studies / C.-W. Qiu // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 75, issue 2. Article ID 026609.
26. Федоров Ф. И. *Теория гиротропии*. Минск, 1976.

## REFERENCES

1. Sarychev A. K., Shalaev V. M. *Electrodynamics of metamaterials*. Singapore, 2007.
2. Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84, issue 18. P. 4184–4187.
3. Veselago V. G. Elektrodinamika veshchestv s odnovenno otritsatel'nymi znacheniyami  $\epsilon$  i  $\mu$  [The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ]. *Usp. fiz. nauk*. 1967. Vol. 92. P. 517–526 (in Russ.).
4. Fedotov V. A., Mlyadonov P. L., Prosvirnin S. L., et al. Asymmetric propagation of electromagnetic waves through a planar chiral structure. *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97, issue 16. Article ID 167401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.167401.
5. Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. Controlling electromagnetic fields. *Science*. 2006. Vol. 312, issue 5781. P. 1780–1782.
6. Leonhardt U. Optical conformal mapping. *Science*. 2006. Vol. 312, issue 5781. P. 1777–1780.
7. Pendry J. B., Fernández-Domínguez A. I., Luo Y., et al. Capturing photons with transformation optics. *Nat. Phys.* 2013. Vol. 9. P. 518–522.
8. Fedorov V. Yu., Chanal M., Grojo D., et al. Accessing extreme spatiotemporal localization of high-power laser radiation through transformation optics and scalar wave equations. *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117, issue 4. Article ID 043902.



9. Yu N., Genevet P., Kats M. A., et al. Light propagation with phase discontinuities: generalized laws of reflection and refraction. *Science*. 2011. Vol. 334, issue 6054. P. 333–337.
10. Chen H.-T., Taylor A. J., Yu N. A review of metasurfaces: physics and applications. *Rep. Prog. Phys.* 2016. Vol. 79, No. 7. Article ID 076401.
11. Poddubny A., Iorsh I., Belov P., et al. Hyperbolic metamaterials. *Nat. Photonics*. 2013. Vol. 7. P. 958–967. DOI: 10.1038/nphoton.2013.243.
12. Repan T., Lavrinenko A. V., Zhukovsky S. V. Dark-field hyperlens: Super-resolution imaging of weakly scattering objects. *Opt. Express*. 2015. Vol. 23, issue 19. P. 25350–25364. DOI: 10.1364/OE.23.025350.
13. Kruk S. S., Wong Z. J., Pshenay-Severin E., et al. Magnetic hyperbolic optical metamaterials. *Nat. Commun.* 2016. Vol. 7. Article ID 11329. DOI: 10.1038/ncomms11329.
14. Mirmoosa M. S., Kosulnikov S. Yu., Simovski C. R. Magnetic hyperbolic metamaterial of high-index nanowires. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 94, issue 7. Article ID 075138. DOI: 10.1103/PhysRevB.94.075138.
15. Slobozhanyuk A. P., Ginzburg P., Powell D. A., et al. Purcell effect in hyperbolic metamaterial resonators. *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 92, issue 19. Article ID 195127. DOI: 10.1103/PhysRevB.92.195127.
16. Biehs S.-A., Lang S., Petrov A. Yu., et al. Blackbody theory for hyperbolic materials. *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 115, issue 17. Article ID 174301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.174301.
17. Javani M. H., Stockman M. I. Real and imaginary properties of epsilon-near-zero materials. *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117, issue 10. Article ID 107404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.107404.
18. Frazer L. N. Use of the spherical layer matrix in inhomogeneous media. *Geophys. J. Int.* 1977. Vol. 50, No. 3. P. 743–749. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1977.tb01345.x.
19. Babenko V. A., Astagiyeva L. G., Kuzmin V. N. Electromagnetic scattering in disperse media: Inhomogeneous and anisotropic particles. Chichester, 2003.
20. Kravtsov Yu. A., Kravtsov Yu. I. Geometricheskaya optika neodnorodnykh sred. Mosc., 1980 (in Russ.).
21. Leonhardt U., Philbin T. G. Transformation optics and the geometry of light. *Prog. Opt.* 2009. Vol. 53. P. 69–152.
22. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Lavrinenko A. V. Fresnel's reflection and transmission operators for stratified gyroanisotropic media. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1987. Vol. 20, No. 5. P. 1095–1106.
23. Novitsky A. V., Barkovskii L. M. Operator matrices for describing guiding propagation in circular bianisotropic fibres. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2005. Vol. 38, No. 2. P. 391–404.
24. Novitsky A. V., Barkovsky L. M. Matrix approach for light scattering from a multilayered rotationally symmetric bianisotropic sphere. *Phys. Rev. A*. 2008. Vol. 77, No. 2. Article ID 033849.
25. Qiu C.-W., Li L.-W., Yeo T.-S., et al. Scattering by rotationally symmetric anisotropic spheres: Potential formulation and parametric studies. *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 75, issue 2. Article ID 026609.
26. Fedorov F. I. Teoriya girotropii. Minsk, 1976 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 02.09.2016.  
Received by editorial board 02.09.2016.