

## ФОРМАЛИЗОВАННОЕ ОПИСАНИЕ ЛАВИНЫ ЭЛЕКТРОНОВ В КАНАЛЕ МИКРОКАНАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Е. А. ЧУДОВСКАЯ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Приведено формализованное описание образования и движения лавины вторичных электронов в канале микроканальной пластины, расположенном перпендикулярно ее входной поверхности. В функциональное уравнение (полученное ранее), описывающее этот процесс, добавлен коэффициент вторичной эмиссии покрытия канала, благодаря чему появилась возможность связать выходной импульс пластины с ее полупроводниковыми параметрами. Представлены математические выражения, описывающие движение каждого электрона как в формирующейся лавине, так и на выходе канала, и их вывод. Полученные таким образом формулы образуют уравнение, или аналитическую модель, формирования выходного сигнала. Его решения при разных исходных данных позволяют учесть практически все внутренние характеристики полупроводникового эмиттера и исследовать их влияние на такой выходной параметр пластины, как ее коэффициент усиления по току. Представлены вычисленные графики зависимости коэффициента усиления канала от глубины полупроводникового эмиттера и величины его запрещенной зоны. Кроме того, описаны результаты вычислений при предположении распределенного по глубине слоя эмиттера. Все выводы не противоречат экспериментальным данным.

**Ключевые слова:** канал микроканальной пластины; функциональное уравнение; плотности вероятности пролета электрона; уравнения движения частицы в электрическом поле; глубина слоя эмиттера; ширина запрещенной зоны полупроводника.

## FORMAL DESCRIPTION OF ELECTRON AVALANCHE IN THE CHANNEL OF MICROCHANNEL PLATE

Е. А. TCHOUDOVSKAJA<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

This article is the formalization description of the secondary emission electron avalanche creation and moving in the channel of the microchannel plate. The position of that channel is perpendicular to the input surface of the plate. There was added the secondary emission coefficient of the semiconductive coverage of the channel to the equation which was received early. This parameter has allowed connecting the output characteristic of the channel with initial parameters of the semiconductive layer. Then, there are the descriptions of the mathematical equations, which have received to describe every electron moving in the avalanche as well inside as outside of the channel. All of those formulas construct the resulting equation, or the analytical model, of the output signal of the MCP. The solution of this equation at the different input data allowed taking into account practically all inside characteristics of the semiconductive emitter and investigating their influence on the output current coefficient. As a result there are offered the calculated graphics of the output gain coefficient in dependence of the layer depth and the gain parameter. There are the calculation results for the distributed cover emitter depth. All the results do not contradict to the experimental data.

**Key words:** channel of a microchannel plate; functional equation; the electron transit probability density; equation of motion of particles in the electric field; emitter layer depth; bandgap.

### Образец цитирования:

Чудовская Е. А. Формализованное описание лавины электронов в канале микроканальной пластины // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. 2017. № 1. С. 61–66.

### For citation:

Tchoudovskaja E. A. Formal description of electron avalanche in the channel of microchannel plate. *J. Belarus. State Univ. Phys.* 2017. No. 1. P. 61–66 (in Russ.).

### Автор:

Елена Аркадьевна Чудовская – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры телекоммуникаций и информационных технологий факультета радиоп физики и компьютерных технологий.

### Author:

Elena Tchoudovskaja, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of telecommunications and information technologies, faculty of radiophysics and computer technologies.  
chudovskaja@bsu.by

При теоретическом исследовании работы канала микроканальной пластины (МКП) одной из основных задач является изучение процессов формирования его выходного сигнала, описать которые можно как методом имитационного моделирования, построив дискретно-событийную модель, так и аналитически. Сделаем это вторым способом.

Математической моделью образования лавины электронов в канале МКП является ветвящийся случайный процесс: любой электрон, вылетевший из его поверхности с некоторой начальной скоростью, движется вдоль тянущего поля до попадания либо на противоположную стенку, где он, обладая полученной дополнительной энергией, способен выбить вторичные электроны, либо на выход канала. Каждый из образованных таким образом вторичных электронов внутри канала становится первичным по отношению к новым вторичным. Этот процесс продолжается, пока все электроны в образовавшейся лавине не достигают конца канала.

В работе [1] предложена аналитическая модель процессов каскадного электронного умножения, построенная на представлении о последовательном умножении электронов в виде процесса рождения и гибели точек с использованием аппарата производящих функционалов. Полученное в [1] функциональное уравнение связывает характеристики результирующего потока электронов на выходе канала и потока, получающегося при взаимодействии одного электрона со стенкой канала в линейном режиме:

$$\lambda(v_1/\mu_1) = \int_G \lambda_0(\mu/\mu_1) \cdot \lambda(v_1/\mu) d\mu + \lambda'_0(v_1/\mu_1), \quad (1)$$

где  $\lambda(v_1/\mu_1)$  и  $\lambda'_0(v_1/\mu_1)$  – условные интенсивности потока обобщенных координат электронов соответственно после бесконечного числа каскадов умножения и одного каскада на выходе канала, если в точке с координатой  $\mu_1$  родился один электрон;  $\lambda_0(\mu/\mu_1)$  – условная интенсивность потока обобщенных координат электронов внутри канала после одного каскада умножения;  $G$  – область задания потока пространственных координат электронов, находящихся в канале.

Преобразуем это уравнение для нашего случая и добавим коэффициент вторичной эмиссии поверхности канала пластины. Введение этой характеристики позволит учитывать физические параметры материала покрытия канала [2].

Перейдем от обобщенных координат к пространственным и временной. При этом в силу симметрии условий оставляем одну пространственную координату, направленную вдоль оси канала, и временную. Считаем, что электрон, вылетевший из точки внутри канала с координатами  $(y, \tau)$ , попадает на продолжение стенки канала за его пределами в точку с координатами  $(x, t)$ . Тогда уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda(x, t/y, \tau) = \int_y^x \int_\tau^t \lambda_0(z, \xi/y, \tau) \cdot \lambda(x, t/z, \xi) dz d\xi + \lambda'(x, t/y, \tau), \quad (2)$$

где  $(z, \xi)$  – координаты произвольной точки внутри канала, лежащей между точками рождения электрона и его гибели. Предполагаем, что все процессы, происходящие внутри канала, идентичны. В этом случае условные интенсивности в уравнении (1) можно заменить на разностные:

$$\lambda(t - \tau/x - y) = \int_y^x \int_\tau^t \lambda_0(\xi - \tau, z - y) \cdot \lambda(t - \xi/x - z) dz d\xi + \lambda'(t - \tau/x - y). \quad (3)$$

Добавим в полученное уравнение число вторичных электронов, рожденных от одного первичного, которые зависят от места его рождения в канале пластины. Для этого введем величину  $\delta(z)$  вторичных электронов, рожденных от одного первичного, или  $\delta(z)$  – коэффициент вторичной эмиссии в точке  $z$  канала МКП. Учтем это и, кроме того, сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \xi - \tau &= \varphi, \quad d\xi = d\varphi; \\ \xi &= t : \varphi = t - \tau; \\ \xi &= \tau : \varphi = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

тогда уравнение (3) с учетом (4) примет следующий вид:

$$\lambda(t - \tau/x - y) = \int_y^x \int_0^{t-\tau} \lambda_0(\varphi, z - y) \cdot \delta(z) \cdot \lambda(t - \varphi - \tau/x - z) d\varphi dz + \lambda'(t - \tau/x - y).$$

Обозначим  $t - \tau = \vartheta$  и зафиксируем  $x \equiv L$ , где  $L$  – длина канала,

$$\lambda(\vartheta/L - y) = \int_0^{L-y} \int_0^{\vartheta} \lambda_0(\varphi, z - y) \cdot \delta(z) \cdot \lambda(\vartheta - \varphi/L - z) d\varphi dz + \lambda'(\vartheta/L - y).$$

Далее, произведем замену переменных:  $z - y = v$ ;  $dz = dv$  и обозначим  $L - y = p$ . Тогда уравнение (1) будет выглядеть следующим образом:

$$\lambda(\vartheta/p) = \int_0^p \int_0^{\vartheta} \lambda_0(\varphi, v) \cdot \delta(v + L - p) \cdot \lambda(\vartheta - \varphi/p - v) d\varphi dv + \lambda'(\vartheta/p), \quad (5)$$

где  $0 \leq p \leq L$  – пространственный параметр;  $0 \leq \vartheta \leq \infty$  – временной параметр.

Выразим условные интенсивности  $\lambda_0(\varphi, v)$  и  $\lambda'(\vartheta/p)$  через совместную плотность вероятности  $w_2(x, t)$  пролета электроном расстояния  $x$  за время  $t$  внутри канала (координаты  $x$  и  $t$  независимы) и через условную плотность вероятности  $w_1(t/L - x)$  достижения электроном конца канала за время  $t$  в случае, если он пролетел расстояние  $x$  соответственно. Кроме того, можно записать, что  $\delta(v + L - p) \equiv \delta(x)$ . Тогда уравнение (5) перепишется следующим образом:

$$l_1(t/L - x) = \int_0^x \int_0^t W_2(x, t) \cdot l_1(t - \xi/x - z) dz d\xi + w_1(t/L - x); \quad (6)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

где  $W_2(x, t) = w_2(x, t)\delta(x)$ .

Полученное функциональное уравнение (6) описывает одновременно создание и движение вторичной эмиссионной лавины в канале МКП вдоль его оси с учетом изменяющегося коэффициента вторичной эмиссии. В этом уравнении  $l_1(t/L - x)$  – результирующая условная интенсивность потока электронов после бесконечного числа каскадов умножения;  $l_1(t - \xi/x - z)$  – условная интенсивность после одного каскада умножения внутри канала. Иными словами, на основании физики описываемого процесса  $l_1(t/L - x)$  – распределенный по времени коэффициент усиления канала пластины, или число электронов на выходе канала при условии, что на его вход попал один электрон, вызвавший бесконечное число каскадов умножения электронов внутри канала.

Для решения уравнения (6) с учетом конкретных интенсивностей пролета электронов в электрическом поле канала определяем явный вид функций  $W_2(x, t)$  и  $w_1(t/L - x)$ .

Любой электрон, появившийся на полупроводниковой поверхности эмиттера канала, обладает случайной начальной скоростью  $\vec{v}_0$ . Это есть вектор, значение которого  $|v_0|$  определяется случайной энергией вылета электрона с поверхности, а направление его можно описать случайными углами вылета  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  вдоль и перпендикулярно образующей канала соответственно.

Совместная плотность вероятности  $w_2(x, t)$  по расстоянию и времени пролета электрона в электрическом поле до соударения со стенкой канала при наличии нескольких ветвей решения [3] запишется как

$$w_2(x, t) = \sum_{k=1}^n J \cdot w_3(E_k, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}),$$

где  $w_3(E_k, \alpha_{1k}, \alpha_{2k})$  – совместная плотность распределения по энергии и двум углам вылета вдоль и перпендикулярно оси канала соответственно;  $J = \frac{\partial(E_k, \alpha_{1k}, \alpha_{2k})}{\partial(x, t, \alpha_{1k})}$  – якобиан обратного преобразования исходных и искомых случайных величин;  $n$  – число ветвей этого преобразования.

Считаем, что составляющие вектора скорости вылета электрона взаимно независимы [4], каждый из них определяется лишь свойствами материала поверхности эмиттера, а углы распределены по закону косинусов

$$w_i(\alpha_i) = \frac{1}{2} \cos(\alpha_i), \quad i = 1, 2,$$

с максимумом, соответствующим нормальному углу вылета по отношению к поверхности эмиттера. Для получения значения энергии  $E$  вылета электрона из поверхности используем закон распределения Рэлея, представляющий собой суперпозицию двух нормальных распределений во взаимно перпендикулярных плоскостях [3]:

$$w_1(E) = \frac{E}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{E^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где  $\sigma$  – дисперсия в нем, и она связана со средней энергией вылета электрона с поверхности как [5]

$$\sigma = E \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Тогда совместная плотность распределения по углам и энергии вылета электрона есть произведение плотностей по каждой из этих величин:

$$w_3(E, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{E}{4\sigma^2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \exp\left\{-\frac{E^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Далее, рассмотрим канал, расположенный под прямым углом к торцам пластины. В этом случае напряженность поля, обусловленная приложенной к пластине разностью потенциалов, направлена только вдоль оси канала. При таком расположении удобно исследовать ток термоэмиссии [6] и его зависимость от высоты и формы потенциального барьера поверхности. На рис. 1 представлены проекции начальной скорости вылетающего из поверхности канала электрона.

Для описания движения заряженной частицы в электрическом поле внутри канала (см. рис. 1) составим систему двух уравнений на основании того, что вдоль оси канала электрон пролетает расстояние  $x$  за время  $t$ , необходимое для достижения поверхности канала по его диаметру:

$$\begin{cases} x = v_x t + \frac{at^2}{2}, \\ t = \frac{D \cos \alpha_1}{v_e}, \end{cases}$$

где  $v_x$  и  $v_e$  – проекции скорости вылетающего электрона, определяемые как

$$v_x = \frac{v_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}},$$

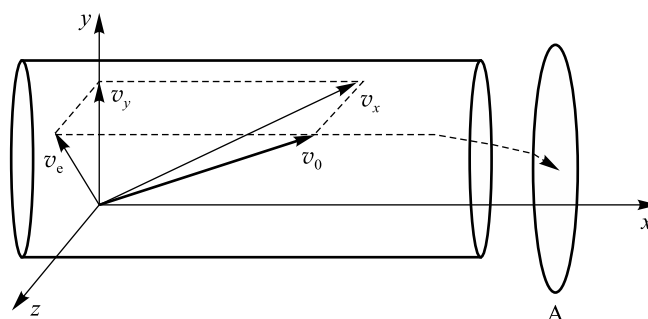


Рис. 1. Проекция скорости вылета электрона из поверхности канала  
(A – анодная система прибора)

Fig. 1. The projections of the outfly electron velocity from the channel surface  
(A is the device anode system)

$$v_e = \frac{v_x}{\cos \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2},$$

где  $v_0 = \sqrt{2 \left( \frac{q}{m_0} \right) u_0}$  – модуль скорости вылета вторичного электрона из эмиттерной поверхности, выраженный через энергию вылета  $u_0$ , задаваемую в электронвольтах;  $a = \frac{qU}{m_0 L}$  – ускорение, сообщаемое электрону постоянной напряженностью поля вдоль оси канала;  $L$  и  $D$  – длина канала и его диаметр соответственно;  $m_0$  и  $q$  – масса и заряд свободного электрона соответственно.

Учитывая приведенные ранее рассуждения, получаем конкретный вид интересующих нас плотностей распределения электронов для канала, расположенного перпендикулярно торцевым поверхностям пластины:

$$w_2(x, t) = \frac{D^3}{\sigma_{ef} t^5} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \alpha_1 (1 + \alpha_{ef})^2}{\left( 1 + \frac{\alpha_{ef}}{\cos^2 \alpha_1} \right)^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{D^4 \cos^4 \alpha_1 (1 + \alpha_{ef})^2}{\sigma_{ef} t^4} \right\} d\alpha_1, \quad (7)$$

где

$$\sigma_{ef} = \left( 2\sigma \frac{q}{m_0} \right)^2, \quad \alpha_{ef} = \frac{(x - (at^2/2))^2}{D^2 \cos^2 \alpha_1};$$

$$w_1(t/L - x) = \int_0^D \frac{y^2 ((L - x) + (at^2/2))}{\sigma_{ef} t^5} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \alpha_1 (1 + \alpha_{ef})^2}{\left( 1 + \frac{\alpha_{ef}}{\cos^2 \alpha_1} \right)^{3/2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{y^4 \cos^4 \alpha_1 (1 + \alpha_{ef})^2}{2\sigma_{ef} t^4} \right\} d\alpha_1 dy. \quad (8)$$

Подставляя выражения (7) и (8) в уравнение (6) и решая его, получаем аналитическое описание, или модель, создания и движения лавины вторичных электронов в канале МКП, расположенном под прямым углом к торцевым поверхностям пластины, при условии рождения одного электрона на входе канала.

Полученная аналитическая модель позволяет учесть практически все внутренние характеристики полупроводникового эмиттера и исследовать их влияние на такой выходной параметр пластины, как ее коэффициент усиления по току. Для примера, на рис. 2 и 3 представлены результаты вычисления коэффициента усиления канала МКП в зависимости от глубины (толщины) слоя эмиттера и величины его запрещенной зоны. Из рис. 2 и 3 видно, что даже небольшие колебания этих величин ведут к сильному изменению значений коэффициента усиления канала. На рис. 2 показано, что при толщине эмиттера, превышающей 500 Å, усиление канала практически равно нулю. Это можно объяснить тем, что на глубине эмиттера свыше 500 Å не происходит процесс полной генерации электронно-дырочных пар. Иными словами, при таких глубинах эмиттера для построения модели необходимо учитывать длину свободного пробега электрона в полупроводниковом слое. При толщине эмиттера менее 200 Å может не хватать электронов, обладающих энергией, достаточной для образования вторично-эмиссионной лавины.

С помощью полученных в настоящей работе выражений также вычислялось влияние распределенного по глубине слоя эмиттера на коэффициент усиления канала. Расчеты показали, что при изменении толщины эмиттера от 200 Å в начале канала до 500 Å на его конце коэффициент усиления достигает  $\sim 10^7$ , тогда как изменение этой величины от 200 до 700 Å уменьшает значение коэффициента до  $\sim 10^4$  электронов. Если же в начале канала положить слой эмиттера глубже, чем на его конце, то коэффициент усиления

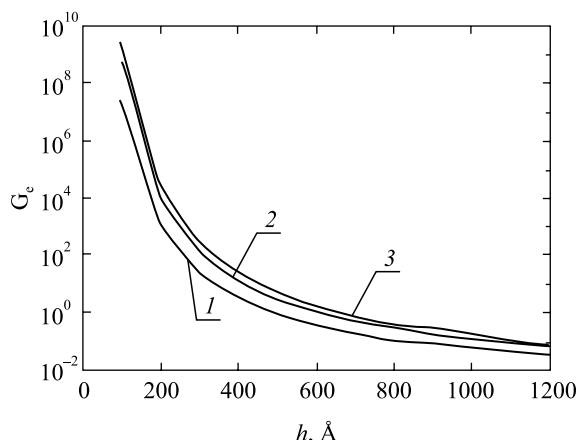


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления канала МКП  $G_e$  от глубины слоя полупроводникового эмиттера ( $h$ , Å) при различных напряжениях питания на пластине:  $U = 900$  В (1);  $U = 1000$  В (2);  $U = 1100$  В (3)

Fig. 2. The dependence of the MCP channel gain factor on the semiconductive emitter depth ( $h$ , Å):  $U = 900$  В (1);  $U = 1000$  В (2);  $U = 1100$  В (3)

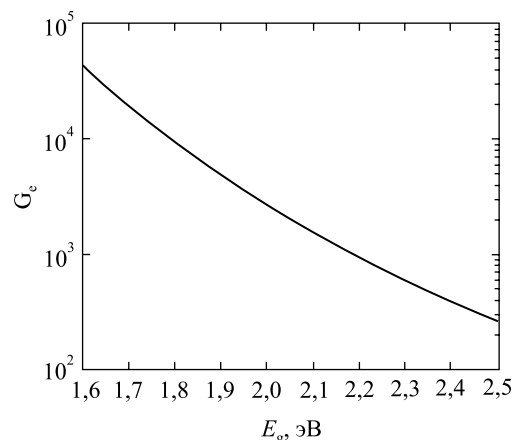


Рис. 3. Зависимость коэффициента усиления канала МКП  $G_e$  от ширины запрещенной зоны эмиттера  $E_g$ , эВ

Fig. 3. The dependence of the MCP channel gain factor on the emitter bandgap  $E_g$ , eV

канала можно свести практически к нулю. Чем тоньше слой эмиттера (в разумных пределах), тем больше коэффициент вторичной эмиссии, и наоборот. Наши исследования показали, что на коэффициент усиления канала большое влияние оказывает коэффициент вторичной эмиссии на начальных стадиях усиления. Этот результат подтверждается и экспериментальными данными. Распределенный по толщине эмиттер (тонкий в начале канала и более глубокий к концу) позволяет увеличить ток натекания электронов от источника питания, что уменьшает время восстановления и лишь незначительно снижает коэффициент усиления канала.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Apanasovich V. V., Novikov E. G. Mathematical Model of the Microchannel Plate Single Electron Impulse Formation // IEEE Trans. Electr. Dev. 1995. Vol. 42, № 12. P. 2231–2235.
2. Чудовская Е. А. Процесс вторичной электронной эмиссии в канале микроканальной пластины // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 3. С. 34–38.
3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1974.
4. Бронштейн И. М., Фрайман Б. С. Вторичная электронная эмиссия. М., 1969.
5. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, 1979.
6. Чудовская Е. А. Темновой ток канала микроканальной пластины // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 1. С. 39–43.

#### REFERENCES

1. Apanasovich V. V., Novikov E. G. Mathematical Model of the Microchannel Plate Single Electron Impulse Formation. IEEE Trans. Electr. Dev. 1995. Vol. 42, No. 12. P. 2231–2235.
2. Chudovskaja E. A. The Secondary Emission Process in a Channel of the Micro Channel Plate. Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform. 2014. No. 3. P. 34–38 (in Russ.).
3. Levin B. R. Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki. Mosc., 1974 (in Russ.).
4. Bronshtein I. M., Fraiman B. S. Vtorichnaya elektronnaya emissiya. Mosc., 1969 (in Russ.).
5. Gikhman I. I., Skorokhod A. V., Yadrenko M. I. Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika. Kiev, 1979 (in Russ.).
6. Chudovskaja E. A. The Dark Current of a Channel in the Micro Channel Plate. Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform. 2014. No. 1. P. 39–43 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 30.09.2016.  
Received by editorial board 30.09.2016.