

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний Технічний Університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Факультет інформатики та обчислювальної техніки  
Кафедра обчислювальної техніки

Лабораторна робота №2  
з дисципліни «Методи оптимізації та планування»  
на тему: «ПРОВЕДЕННЯ ДВОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З  
ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ»

Виконав:  
студент 2-го курсу ФІОТ  
групи ІО-92  
Гуденко Є. В.

Перевірив:  
Асистент  
Регіда П. Г.

**Мета:** провести двофакторний експеримент, перевірити однорідність дисперсії за критерієм Романовського, отримати коефіцієнти рівняння регресії, провести натуралізацію рівняння регресії.

## Варіант:

№ варіанта	X <sub>1</sub>		X <sub>2</sub>	
	min	max	min	max
207	-5	15	-35	10

$$y_{\max} = 230$$

$$y_{\min} = 130$$

## Код програми:

```
from random import randint
import math
import numpy as np
class Lab2:
    def __init__(self):
        #Задані дані
        self.N_var = 7
        self.Y_max = (30 - self.N_var)*10
        self.Y_min = (20 - self.N_var)*10
        self.X1_min = -5
        self.X1_max = 15
        self.X2_min = -35
        self.X2_max = 10
        self.N = 5

        #Значення критерію Романовського за різних довірчих ймовірностей p
        #кількостях дослідів m
        self.p_list = (0.99, 0.98, 0.95, 0.90)
        self.rkr_table = {2: (1.73, 1.72, 1.71, 1.69),
                           6: (2.16, 2.13, 2.10, 2.00),
                           8: (2.43, 4.37, 2.27, 2.17),
                           10: (2.62, 2.54, 2.41, 2.29),
                           12: (2.75, 2.66, 2.52, 2.39),
                           15: (2.9, 2.8, 2.64, 2.49),
                           20: (3.08, 2.96, 2.78, 2.62)}

        self.matrix23()
        self.exp()
        self.calculate()
        self.print()

    def matrix23(self):
        # Заповнимо матрицю планування для m=5
        self.matrix = [[randint(self.Y_min, self.Y_max) for n in range(self.N)]
                        for k in range(3)]
        self.x_norm = [[-1, 1, -1], [-1, -1, 1]]
        print(
            "Дані варіанту 207 : Y_max = {} Y_min = {} X1_min = {} X1_max = "
```

```

{} X2_min = {} X2_max = {}".format(
    self.Y_max, self.Y_min, self.X1_min, self.X1_max, self.X2_min,
self.X2_max))
    print("Матриця планування для m = {}".format(self.N))
    print("-" * 53)
    print("| X1 | X2 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |")
    print("-" * 53)
    for i in range(3):
        print(
            f"| {self.x_norm[0][i]:^4}| {self.x_norm[1][i]:^4}|
{self.matrix[i][0]:^6}| {self.matrix[i][1]:^6}| {self.matrix[i][2]:^6}|
{self.matrix[i][3]:^6}| {self.matrix[i][4]:^6}|"
        )
        print("-" * 53)

def exp(self):
    #---Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Романовського---
    #1.Знайдемо середнє значення функції відгуку в рядку:
    self.average_Y1 = sum(self.matrix[0][j] for j in range(self.N))/self.N
    self.average_Y2 = sum(self.matrix[1][j] for j in range(self.N))/self.N
    self.average_Y3 = sum(self.matrix[2][j] for j in range(self.N))/self.N
    #2.Знайдемо дисперсії по рядках:
    self.D_Y1 = sum([(j - self.average_Y1) ** 2 for j in self.matrix[0]]) /
self.N
    self.D_Y2 = sum([(j - self.average_Y2) ** 2 for j in self.matrix[1]]) /
self.N
    self.D_Y3 = sum([(j - self.average_Y3) ** 2 for j in self.matrix[2]]) /
self.N
    #3.Обчислимо основне відхилення:
    self.main_deviation = math.sqrt((2 * (2 * self.N - 2)) / (self.N *
(self.N - 4)))
    #4.Обчислимо Fuv:
    self.Fuv_1 = self.D_Y1 / self.D_Y2
    self.Fuv_2 = self.D_Y3 / self.D_Y1
    self.Fuv_3 = self.D_Y3 / self.D_Y2
    #4.Обчислимо TETAuv:
    self.TETAuv_1 = ((self.N - 2) / self.N) * self.Fuv_1
    self.TETAuv_2 = ((self.N - 2) / self.N) * self.Fuv_2
    self.TETAuv_3 = ((self.N - 2) / self.N) * self.Fuv_3
    #6.Обчислимо Ruv:
    self.Ruv_1 = abs(self.TETAuv_1 - 1) / self.main_deviation
    self.Ruv_2 = abs(self.TETAuv_2 - 1) / self.main_deviation
    self.Ruv_3 = abs(self.TETAuv_3 - 1) / self.main_deviation

    if not self.check_homogeneity():
        print(f'\n Дисперсія неоднорідна! Змінимо m={self.N} to m={self.N +
1}\n')
        self.N += 1
        self.add()

def add(self):
    for i in range(3):
        self.matrix[i].append(randint(self.Y_min, self.Y_max))
    self.exp()

#---Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Романовського---
def check_homogeneity(self):
    m = min(self.rkr_table, key=lambda x: abs(x - self.N))
    p = 0
    for ruv in (self.Ruv_1, self.Ruv_2, self.Ruv_3):
        if ruv > self.rkr_table[m][0]:
            return False
    for rkr in range(len(self.rkr_table[m])):
        if ruv < self.rkr_table[m][rkr]:

```

```

        p = rkr
        temp = self.rkr_table[m][p]
        global p2
        p2 = self.p_list[p]
        global item_table
        item_table = temp
        return True

def calculate(self):
    # Розрахуємо нормованих коефіцієнтів рівняння регресії.
    self.mx1 = sum(self.x_norm[0]) / 3
    self.mx2 = sum(self.x_norm[1]) / 3

    self.my = (self.average_Y1 + self.average_Y2 + self.average_Y3) / 3

    self.a1 = sum([i ** 2 for i in self.x_norm[0]]) / 3
    self.a2 = sum(self.x_norm[0][i] * self.x_norm[1][i] for i in range(3)) /
3
    self.a3 = sum([i ** 2 for i in self.x_norm[1]]) / 3
    self.a11 = (self.x_norm[0][0] * self.average_Y1 + self.x_norm[0][1] *
self.average_Y2 + self.x_norm[0][2] * self.average_Y3) / 3
    self.a22 = (self.x_norm[1][0] * self.average_Y1 + self.x_norm[1][1] *
self.average_Y2 + self.x_norm[1][2] * self.average_Y3) / 3

    self.B0 = np.linalg.det([[self.my, self.mx1, self.mx2], [self.a11,
self.a1, self.a2], [self.a22, self.a2, self.a3]]) / (
        np.linalg.det([[1, self.mx1, self.mx2], [self.mx1, self.a1,
self.a2], [self.mx2, self.a2, self.a3]]))
    self.B1 = np.linalg.det([[1, self.my, self.mx2], [self.mx1, self.a11,
self.a2], [self.mx2, self.a22, self.a3]]) / (
        np.linalg.det([[1, self.mx1, self.mx2], [self.mx1, self.a1,
self.a2], [self.mx2, self.a2, self.a3]]))
    self.B2 = np.linalg.det([[1, self.mx1, self.my], [self.mx1, self.a1,
self.a11], [self.mx2, self.a2, self.a22]]) / (
        np.linalg.det([[1, self.mx1, self.mx2], [self.mx1, self.a1,
self.a2], [self.mx2, self.a2, self.a3]]))

    # Проводимо натуралізацію коефіцієнтів:
    self.delta_x1 = math.fabs(self.X1_max - self.X1_min) / 2
    self.delta_x2 = math.fabs(self.X2_max - self.X2_min) / 2
    self.x10 = (self.X1_max + self.X1_min) / 2
    self.x20 = (self.X2_max + self.X2_min) / 2
    self.a2_0 = self.B0 - (self.B1 * (self.x10 / self.delta_x1)) - (self.B2
* (self.x20 / self.delta_x2))
    self.a2_1 = self.B1 / self.delta_x1
    self.a2_2 = self.B2 / self.delta_x2

def print(self):
    print("Остаточні дані варіанту 207 після перевірок : Y_max = {} Y_min =
{} X1_min = {} X1_max = {} X2_min = {} X2_max = {}".format(
        self.Y_max, self.Y_min, self.X1_min, self.X1_max, self.X2_min,
self.X2_max))
    print("Матриця планування для m = {}".format(self.N))
    print("-" * 13)
    for i in range(3):
        print(f"| {self.x_norm[0][i]:^4}| {self.x_norm[1][i]:^4}|")
    print("-" * 13)
    print("-" * 53)
    s = []
    for i in range(self.N):
        s.append("Y"+str(i+1))
    for i in s:
        print(f"{i:^4}", end="")
    print()

```

```

        for j in self.matrix:
            print(*j)
        print("-" * 53)

        print("1) Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Романовського:")
        print("1. Середнє значення функції відгуку в рядку: Y1 = {} Y2 = {} Y3 = {}".format(self.average_Y1, self.average_Y2, self.average_Y3))
        print("2. Значення дисперсії по рядках:  $\sigma^2(Y1) = {} \sigma^2(Y2) = {} \sigma^2(Y3) = {}$ ".format("%.2f" % self.D_Y1, "%.2f" % self.D_Y2, "%.2f" % self.D_Y3))
        print("3. Основне відхилення  $\sigma\theta$ : {}".format("%.2f" % self.main_deviation))
        print("4. Обчислюємо Fuv: Fuv_1 = {} Fuv_2 = {} Fuv_3 = {}".format("%.2f" % self.Fuv_1, "%.2f" % self.Fuv_2, "%.2f" % self.Fuv_3))
        print("5. Обчислюємо  $\theta_{uv}$ :  $\theta_{uv1} = {} \theta_{uv2} = {} \theta_{uv3} = {}$ ".format("%.2f" % self.TETAuv_1, "%.2f" % self.TETAuv_2, "%.2f" % self.TETAuv_3))
        print("6. Обчислюємо Ruv: Ruv_1 = {} Ruv_2 = {} Ruv_3 = {}".format("%.2f" % self.Ruv_1, "%.2f" % self.Ruv_2, "%.2f" % self.Ruv_3))
        print("Ruv1 = {} < Rкр = {}".format("%.2f" % self.Ruv_1, item_table))
        print("Ruv2 = {} < Rкр = {}".format("%.2f" % self.Ruv_2, item_table))
        print("Ruv3 = {} < Rкр = {}".format("%.2f" % self.Ruv_3, item_table))
        print("Однорідність дисперсій підтверджується з ймовірністю  $p = {}$ !".format(p2))
        print("2) Розрахунок нормованих коефіцієнтів рівняння регресії:")
        print("mx1 = {} mx2 = {} my = {}".format("%.2f" % self.mx1, "%.2f" % self.mx2, "%.2f" % self.my))
        print("a1 = {} a2 = {} a3 = {}".format("%.2f" % self.a1, "%.2f" % self.a2, "%.2f" % self.a3))
        print("a11 = {} a22 = {} => B0 = {} B1 = {} B2 = {}".format("%.2f" % self.a11, "%.2f" % self.a22, "%.2f" % self.B0, "%.2f" % self.B1, "%.2f" % self.B2))
        print("Нормоване рівняння регресії :  $y = {} + ({})*x1 + ({})*x2$ ".format("%.2f" % self.B0, "%.2f" % self.B1, "%.2f" % self.B2))
        print("B0 - B1 - B2 = {} = Y1 = {}".format("%.2f" % (self.B0 - self.B1 - self.B2), self.average_Y1))
        print("B0 + B1 - B2 = {} = Y2 = {}".format("%.2f" % (self.B0 + self.B1 - self.B2), self.average_Y2))
        print("B0 - B1 + B2 = {} = Y3 = {}".format("%.2f" % (self.B0 - self.B1 + self.B2), self.average_Y3))
        print("Результати збігається з середніми значеннями  $Y_j$  !")
        print("3) Натуралізація коефіцієнтів")
        print("Δx1 = {} Δx2 = {} X10 = {} X20 = {}".format(self.delta_x1, self.delta_x2, self.x10, self.x20))
        print("a0 = {} a1 = {} a2 = {}".format("%.2f" % self.a2_0, "%.2f" % self.a2_1, "%.2f" % self.a2_2))
        print("Натуралізоване рівняння регресії:  $y = {} + ({})*x1 + ({})*x2$ ".format("%.2f" % self.a2_0, "%.2f" % self.a2_1, "%.2f" % self.a2_2))
        print("Перевірка по рядках:")
        print("a2_0 + a2_1*x1_min + a2_2*x2_min = {} = Y1 = {}".format("%.2f" %

```

```
(self.a2_0 + self.a2_1 * self.X1_min + self.a2_2 * self.X2_min),

self.average_Y1))
    print("a2_0 + a2_1*X1_max + a2_2*X2_min = {} = Y2 = {}".format("%.2f" %
(self.a2_0 + self.a2_1 * self.X1_max + self.a2_2 * self.X2_min),

self.average_Y2))
    print("a2_0 + a2_1*X1_min + a2_2*X2_max = {} = Y3 = {}".format("%.2f" %
(self.a2_0 + self.a2_1 * self.X1_min + self.a2_2 * self.X2_max),

self.average_Y3))
    print("Отже, коефіцієнти натуралізованого рівняння регресії вірні")
    print("\nВиконав: студент групи ІО-92 Гуденко Євген    Варіант 207")
Lab2()
```

## Результати виконання:

Дані варіанту 207 : Y\_max = 230 Y\_min = 130 X1\_min = -5 X1\_max = 15 X2\_min = -35 X2\_max = 10  
Матриця планування для m = 5

X1	X2	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
-1	-1	175	142	159	141	152
1	-1	191	215	130	196	132
-1	1	173	143	156	144	212

Остаточні дані варіанту 207 після перевірок : Y\_max = 230 Y\_min = 130 X1\_min = -5 X1\_max = 15 X2\_min = -35 X2\_max = 10  
Матриця планування для m = 5

X1	X2
-1	-1
1	-1
-1	1

Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
175	142	159	141	152
191	215	130	196	132
173	143	156	144	212

1) Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Романовського:

- Середнє значення функції відгуку в рядку: Y1 = 153.8 Y2 = 172.8 Y3 = 165.6
  - Значення дисперсії по рядках:  $\sigma^2(Y1) = 156.56$   $\sigma^2(Y2) = 1229.36$   $\sigma^2(Y3) = 655.44$
  - Основне відхилення  $\sigma_0$ : 1.79
  - Обчислюємо Fuv: Fuv\_1 = 0.13 Fuv\_2 = 4.19 Fuv\_3 = 0.53
  - Обчислюємо  $\theta_{uv}$ :  $\theta_{uv1} = 0.08$   $\theta_{uv2} = 2.51$   $\theta_{uv3} = 0.32$
  - Обчислюємо Ruv: Ruv\_1 = 0.52 Ruv\_2 = 0.85 Ruv\_3 = 0.38
- Ruv1 = 0.52 < Rкр = 2.0  
Ruv2 = 0.85 < Rкр = 2.0  
Ruv3 = 0.38 < Rкр = 2.0

Однорідність дисперсій підтверджується з ймовірністю  $p = 0.9$  !

2) Розрахунок нормованих коефіцієнтів рівняння регресії:

$m_{x1} = -0.33$   $m_{x2} = -0.33$   $m_y = 164.07$

$a_1 = 1.00$   $a_2 = -0.33$   $a_3 = 1.00$

$a_{11} = -48.87$   $a_{22} = -53.67$   $\Rightarrow B_0 = 169.20$   $B_1 = 9.50$   $B_2 = 5.90$

Нормоване рівняння регресії :  $y = 169.20 + (9.50) \cdot x_1 + (5.90) \cdot x_2$

$B_0 - B_1 - B_2 = 153.80 = Y_1 = 153.8$

$B_0 + B_1 - B_2 = 172.80 = Y_2 = 172.8$

$B_0 - B_1 + B_2 = 165.60 = Y_3 = 165.6$

Результати збігається з середніми значеннями  $Y_j$  !

### 3) Натуралізація коефіцієнтів

$$\Delta x_1 = 10.0 \quad \Delta x_2 = 22.5 \quad x_{10} = 5.0 \quad x_{20} = -12.5$$

$$a_0 = 167.73 \quad a_1 = 0.95 \quad a_2 = 0.26$$

$$\text{Натуралізоване рівняння регресії: } y = 167.73 + (0.95) \cdot x_1 + (0.26) \cdot x_2$$

Перевірка по рядках:

$$a_{2_0} + a_{2_1} \cdot x_{1\_min} + a_{2_2} \cdot x_{2\_min} = 153.80 = Y_1 = 153.8$$

$$a_{2_0} + a_{2_1} \cdot x_{1\_max} + a_{2_2} \cdot x_{2\_min} = 172.80 = Y_2 = 172.8$$

$$a_{2_0} + a_{2_1} \cdot x_{1\_min} + a_{2_2} \cdot x_{2\_max} = 165.60 = Y_3 = 165.6$$

Отже, коефіцієнти натуралізованого рівняння регресії вірні

Виконав: студент групи ІО-92 Гуденко Євген      Варіант 207

## Висновок:

Проведено двофакторний експеримент, перевірено однорідність дисперсії за критерієм Романовського, отримано коефіцієнти рівняння регресії, проведено натуралізацію рівняння регресії. Під час виконання роботи проблем не виникало. Отримані результати збігаються з очікуваними.

## Відповіді на контрольні питання:

1) Що таке регресійні поліноми і де вони застосовуються?

**Регресійні поліноми** - апроксимуючі поліноми, за допомогою яких ми можемо описати функцію. Застосовуються для оцінки результатів вимірів.

2) Визначення однорідності дисперсії.

Кожне  $R_{uv}$  (експериментальне значення критерію Романовського) порівнюється з  $R_{кр}$  (значення критерію Романовського за різних довірчих ймовірностей  $p$ ) і якщо для усіх  $u = \overline{1, N}; v = \overline{1, N}$  кожне  $R_{uv} < R_{кр}$ , то гіпотеза про однорідність дисперсій підтверджується з ймовірністю  $p$ .

3) Що називається повним факторним експериментом?

**Повний факторний експеримент** - багатофакторний експеримент, де використані всі можливі комбінації рівнів факторів.