Лабораторна робота 1. Моделювання фазових кривих автономних систем

Нехай є нелінійна автономна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \qquad (1)$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ — траєкторії, t — змінна часу. Такі рівняння детально розглядались на лекціях, а також в курсі диференціальних рівнянь. Для побудови фазових кривих (траєкторій) можна скористатись ітераційними наближеними формулами

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + \alpha_x \cdot \tilde{V}_x^{(k)}, \\ y_k = y_{k-1} + \alpha_y \cdot \tilde{V}_y^{(k)}, \end{cases} \qquad (2)$$

де $k \in \overline{1,\dots,N}$ — номер ітерації, N — кількість ітерацій, $(x_0; y_0)$ — стартова точка (яка задається користувачем на початку алгоритму (2)), $\tilde{V}^{(k)} = (\tilde{V}_x^{(k)}; \tilde{V}_y^{(k)})$ — нормований вектор швидкості потоку в точці $(x_{k-1}; y_{k-1})$ (тобто, $\tilde{V}_x^{(k)} = V_x^{(k)} / \sqrt{(V_x^{(k)})^2 + (V_y^{(k)})^2}$, $\tilde{V}_y^{(k)} = V_y^{(k)} / \sqrt{(V_x^{(k)})^2 + (V_y^{(k)})^2}$, де $V_x^{(k)} = P(x_{k-1}, y_{k-1})$, $V_y^{(k)} = Q(x_{k-1}, y_{k-1})$), α_x та α_y — параметри кроків за напрямами вісей x та y. Наведений алгоритм реалізує ідею плину в часі по траєкторії під дією поля швидкостей (точка з поточного "$(k-1)$-го положення" пересувається в наступне "k-те положення" згідно напряму, який задаються вектором швидкості у поточній точці). Потім, для отримання наближеної траєкторії системи, що виходить з точки $(x_0; y_0)$, точки між сусідніми ітераціями (тобто, точки $(x_{k-1}; y_{k-1})$ та $(x_k; y_k)$) слід з'єднати відрізком прямої. При цьому, величина кроку задається $(\alpha_x; \alpha_y)$ (чим більшими є ці величини, тим більшим буде крок, і тим меншою буде точність побудованої траєкторії). Приклад фазової траєкторії для лінійної системи з $P = x + 25y$, $Q = -x + y$ (власні числа $1 \pm 5i$), що виходить з точки $(1; 1)$, показано на малюнку 1 нижче (тут взято *N=1000000,* $\alpha_x = \alpha_y = 10^{-3}$).

В лабораторній роботі слід виконати наступне:

1) Написати програму для побудови траєкторії системи (1), що починається в довільній (задається користувачем програми) точці площини.

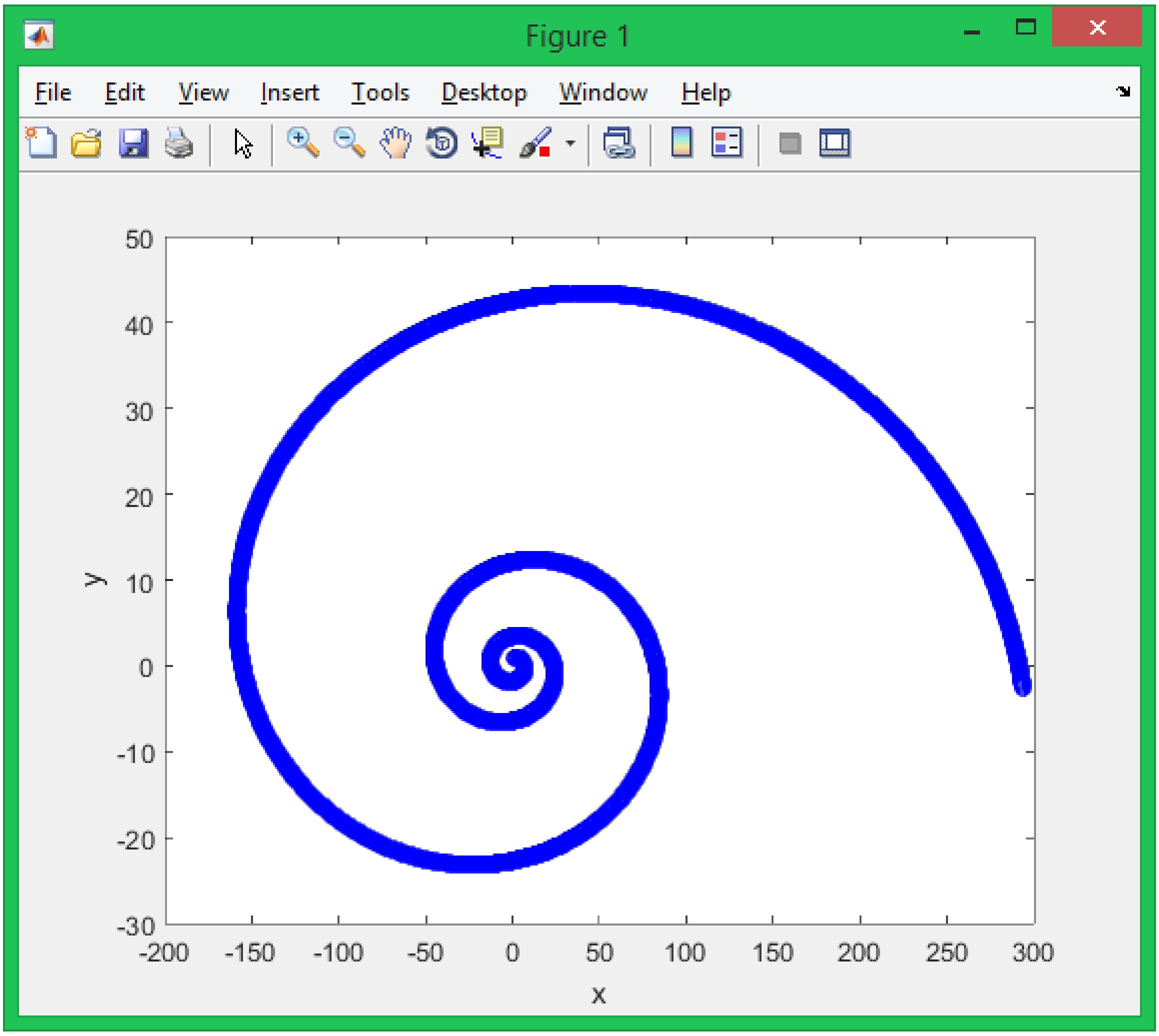
2) Використовуючи написану програму, побудувати тепер приблизний фазовий портрет системи (для чого слід взяти достатню кількість стартових точок — див. пункт 1).

3) Промоделювати поведінку траєкторій в околах усіх особливих точок (точок спокою) системи (1).

4) При виконанні попередніх пунктів експериментально дослідити вплив вибору параметрів кроків α_x та α_y на роботу та збіжність алгоритму, коли ці параметри постійні (не залежать від номеру k ітерації). Також запропонувати (та промоделювати) свої власні <u>варіанти вибору</u> цих параметрів, вважаючи їх залежними від номеру ітерації (тобто $\alpha_x^{(k)}$ та $\alpha_y^{(k)}$ у (2)) — наприклад, якщо відстань між попередніми отриманими сусідніми точками зменшується (збільшується), то цілком логічно, що параметри кроків також повинні зменшуватись (відповідно, збільшуватись) за певним законом. Запропонуйте не менш ніж два таких варіанти (закони зміни) та промоделюйте відповідні випадки.

Розподіл варіантів систем (1) дано нижче.

Лабораторна робота повинна супроводжуватись звітом (який, разом із програмою, "захищається" перед викладачем). Структура звіту: титул, зміст, короткі теоретичні відомості, основна частина, висновки, використана література (опціонально), лістинги програм. В основній частині слід навести повне (аналітичне, без використання комп'ютерних засобів) дослідження фазового портрету й класифікації особливих точок (подібно до того, як це робилось при виконанні РГР з курсу диференціальних рівнянь на третьому курсі), <u>а також детальні результати експериментальних досліджень (комп'ютерного моделювання) згідно до наведених вище пунктів та відповідні скріншоти.</u>



Мал. 1.

<u>Розподіл варіантів</u>

<u>1 варіант.</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2 \\ \dot{y} = 2x - 1 \end{cases}$$

<u>2 варіант.</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = 6 + x - y^2 \\ \dot{y} = x(x - y) \end{cases}$$

3 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 16 - (3x - y)^2 \\ \dot{y} = (x - 3y)^2 - 16 \end{cases}$$

4 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + x^2 - 6x - 8y \\ \dot{y} = x(2y - x + 5) \end{cases}$$

5 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

6 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = (x + y)(x - y + 2) \end{cases}$$

7 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

8 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + x^2 - 5 \\ \dot{y} = (x - 1)(x + 3y - 5) \end{cases}$$

9 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1 \end{cases}$$

10 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9 \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9 \end{cases}$$

11 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x - 1)(y - 2) \\ \dot{y} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

12 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

13 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x + y)^2 + 1 \\ \dot{y} = -1 + x^2 + y \end{cases}$$

14 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 4 \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x) \end{cases}$$

15 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2 \\ \dot{y} = 2x(x - y) \end{cases}$$

16 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2 \\ \dot{y} = 4y - 8 \end{cases}$$
17 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 6xy \end{cases}$$
18 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9 \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2 \end{cases}$$
19 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - 3x \\ \dot{y} = xy^2 \end{cases}$$
20 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 - x - y^2 \end{cases}$$
21 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + x^2 - 5 \\ \dot{y} = (x - 2)(x + 3y - 5) \end{cases}$$
22 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3(x + 2)(y - 1) \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2 \end{cases}$$
23 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = x(y - 2x) \\ \dot{y} = x^2 - 8y + y^2 - x \end{cases}$$
24 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = 25 - x^2 - y^2 \end{cases}$$
25 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = xy + 9 \\ \dot{y} = (x - 2)(y + x) \end{cases}$$
26 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = (x + 1)(x + 3y - 5) \\ \dot{y} = 5 - x^2 - y^2 \end{cases}$$
27 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 + 1 \\ \dot{y} = 11y + x^2 - 1 \end{cases}$$
28 варіант.
$$\begin{cases} \dot{x} = (3x - y)^2 - 16 \\ \dot{y} = (x - 3y)^2 - 16 \end{cases}$$

29 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3(x+1)(y-4) \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

30 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+y)^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

31 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(y-3) \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

32 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = (3x-y)^2 - 4 \\ \dot{y} = (x-3y)^2 - 4 \end{cases}$$

33 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(2y - x^2 + 1) \\ \dot{y} = 11y + x^2 - 1 \end{cases}$$

34 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y \\ \dot{y} = 25 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

35 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(x+3y-5) \\ \dot{y} = 10 - 2x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

36 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 6(x+2)(y-1) \\ \dot{y} = 8y^2 - 2x^2 \end{cases}$$

37 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = (x-y)(x-y+2) \end{cases}$$

38 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x-y)^2 - 9 \\ \dot{y} = 9 - (x-2y)^2 \end{cases}$$

39 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^2 - 8x^2 \\ \dot{y} = 8y - 16 \end{cases}$$

40 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^2 - 8x^2 \\ \dot{y} = 4x - 2 \end{cases}$$

41 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y^2 - 4x^2) \\ \dot{y} = -(2x - 1) \end{cases}$$

42 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(6 + x - y^2) \\ \dot{y} = x(y - x) \end{cases}$$

43 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 16 - (3x - y)^2 \\ \dot{y} = (x - 3y)^2 - 16 \end{cases}$$

44 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y^2 + x^2 - 6x - 8y) \\ \dot{y} = -x(2y - x + 5) \end{cases}$$

45 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + x^2 - 1 \\ \dot{y} = -2xy \end{cases}$$

46 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = -(x + y)(x - y + 2) \end{cases}$$

47 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + x^2 - 1 \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

48 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5 - y^2 + x^2 \\ \dot{y} = (1 - x)(x + 3y - 5) \end{cases}$$

49 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(2x + y^2 - 1) \\ \dot{y} = -(6x - y^2 + 1) \end{cases}$$

50 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 9 - (2x - y)^2 \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2 \end{cases}$$

51 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3(x + 2)(1 - y) \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2 \end{cases}$$

52 варіант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(y - 2x) \\ \dot{y} = -(x^2 - 8y + y^2 - x) \end{cases}$$