Handouts/Lecture 4 (Calculus and graphics)/Lecture 4: Calculus ("matan")/Series.sagews

Author	**Eugene Strakhov**
Date	**2019-06-29T19:04:43**
Project	**07c06dbe-4967-451f-aa68-dd9268bd2ece**
Location	[Handouts/Lecture 4 (Calculus and graphics)/Lecture 4: Calculus ("matan")/Series.sagews]()
Original file	[Series.sagews]()

Ряды

Ряды

```
n = var('n', domain=ZZ)
s = sum(1/(n^2), n, 1, oo) # сумма ряда обратных квадратов
show(s)
```

$$\frac{1}{6}\,\pi^2$$

```
# Расходящийся ряд
try :
    sum(1/n, n, 1, oo) # гармонический ряд
except :
    print 'Ряд расходится'
```

```
Ряд расходится
```

```
# Конечная сумма
n, k = var('n k')
s = sum(k, k, 1, n) # арифметическая прогрессия
show(s)
show(s.factor()) # разложили на множители
```

$$\frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n$$

$$\frac{1}{2}\,(n+1)n$$

Разложение функции в степенной ряд

```
series(f, x, order=...)
f.series(x, order=...)
f.series(x==..., order=...)
```

Разложение функции в степенной ряд

```
series(f, x, order=...)
f.series(x, order=...)
f.series(x==..., order=...)
```


```
f(x) = exp(x)
show(f.series(x)) # по умолчанию получаем длинный ряд
show(f.series(x, 5)) # до слагаемых 5-го порядка (не включительно)
show(f.series(x==1, 3)) # разложение в окрестности точки x=1
```

$$x \mapsto 1 + 1x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + \frac{1}{3628800}x^{10} + \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{479001600}x^{12} + \frac{1}{6227020800}x^{13} + \frac{1}{87178291200}x^{14} + \frac{1}{1307674368000}x^{15} + \frac{1}{20922789888000}x^{16} + \frac{1}{355687428096000}x^{17} + \frac{1}{6402373705728000}x^{18} + \frac{1}{121645100408832000}x^{19} + \mathcal{O}\left(x^{20}\right)$$

$$x \mapsto 1 + 1x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right)$$

$$x \mapsto (e) + (e)(x-1) + (\frac{1}{2}\,e)(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right)$$

```
# Некоторые тонкости с типом полученного выражения
f = sin(x)
fs = f.series(x, 11)
show(fs)
type(fs)
show(fs.truncate()) # конвертирование в многочлен (символьное выражение)
type(fs.truncate())
#
fst = fs.truncate()
show(fst.factor()) # возможны обычные действия с выражением
```

$$1x + (-\frac{1}{6})x^3 + \frac{1}{120}x^5 + (-\frac{1}{5040})x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + \mathcal{O}\left(x^{11}\right)$$

$$\frac{1}{362880}\,x^9 - \frac{1}{5040}\,x^7 + \frac{1}{120}\,x^5 - \frac{1}{6}\,x^3 + x$$

$$\frac{1}{362880}\,\left(x^8 - 72\,x^6 + 3024\,x^4 - 60480\,x^2 + 362880\right)x$$

Ряд Тейлора

    taylor(fun, x, point, deg)
    f.taylor(x, point, deg)

Ряд Тейлора

    taylor(fun, x, point, deg)
    f.taylor(x, point, deg)

```
x, y = var('x y')
f = sin(x) + cos(x)
ft = f.taylor(x, 1, 3)
show(ft)
type(ft) # получается символьное выражение
show(ft.simplify_trig())
show(ft.simplify_trig().coefficient(x, 3))
```

$$-\frac{1}{6}\,(x-1)^3(\cos(1)-\sin(1)) - \frac{1}{2}\,(x-1)^2(\cos(1)+\sin(1)) + (x-1)(\cos(1)-\sin(1)) + \cos(1) + \sin(1)$$

$$-\frac{1}{6}\,x^3(\cos(1)-\sin(1)) - x^2\sin(1) + \frac{1}{2}\,x(3\,\cos(1)+\sin(1)) - \frac{1}{3}\cos(1) + \frac{4}{3}\sin(1)$$

$$-\frac{1}{6}\cos(1) + \frac{1}{6}\sin(1)$$

```
# Функция двух переменных
f = exp(x+y)
ft = f.taylor((x, 1), (y, 2), 5)
show(ft) # OMG...
show(ft.simplify_full().factor())
```

$$\frac{1}{120}\,(x-1)^5e^3 + \frac{1}{24}\,(x-1)^4(y-2)e^3 + \frac{1}{12}\,(x-1)^3(y-2)^2e^3 + \frac{1}{12}\,(x-1)^2(y-2)^3e^3 + \frac{1}{24}\,(x-1)(y-2)^4e^3 + \frac{1}{120}$$
$$(y-2)^5e^3 + \frac{1}{24}\,(x-1)^4e^3 + \frac{1}{6}\,(x-1)^3(y-2)e^3 + \frac{1}{4}\,(x-1)^2(y-2)^2e^3 + \frac{1}{6}\,(x-1)(y-2)^3e^3 + \frac{1}{24}\,(y-2)^4e^3 + \frac{1}{6}$$
$$(x-1)^3e^3 + \frac{1}{2}\,(x-1)^2(y-2)e^3 + \frac{1}{2}\,(x-1)(y-2)^2e^3 + \frac{1}{6}\,(y-2)^3e^3 + \frac{1}{2}\,(x-1)^2e^3 + (x-1)(y-2)e^3 + \frac{1}{2}$$
$$(y-2)^2e^3 + (x-1)e^3 + (y-2)e^3 + e^3$$

$$\frac{1}{120}$$
$$\left(x^5 + 5\,x^4y + 10\,x^3y^2 + 10\,x^2y^3 + 5\,xy^4 + y^5 - 10\,x^4 - 40\,x^3y - 60\,x^2y^2 - 40\,xy^3 - 10\,y^4 + 50\,x^3 + 150\,x^2y + 150\,xy^2\right.\quad e^3$$
$$\left.+ 50\,y^3 - 120\,x^2 - 240\,xy - 120\,y^2 + 165\,x + 165\,y - 78\right)$$

Бесконечные произведения

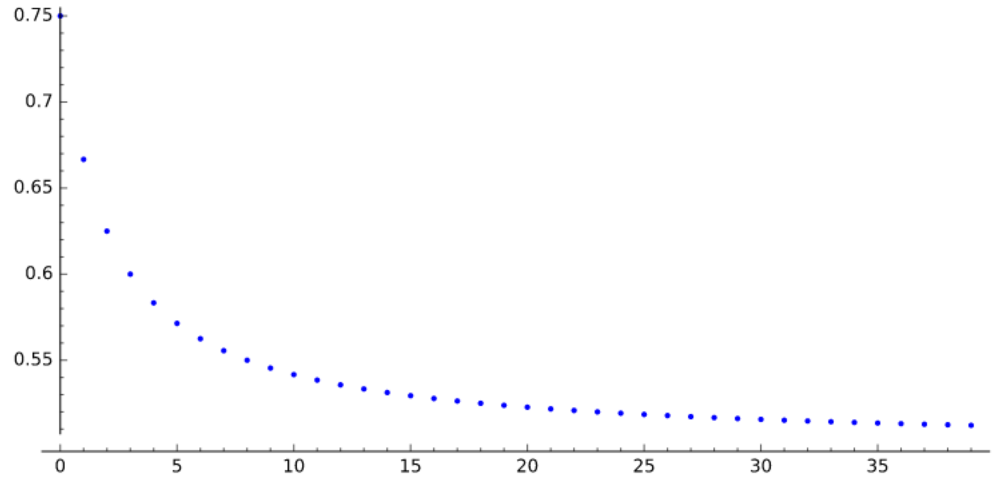
Бесконечные произведения

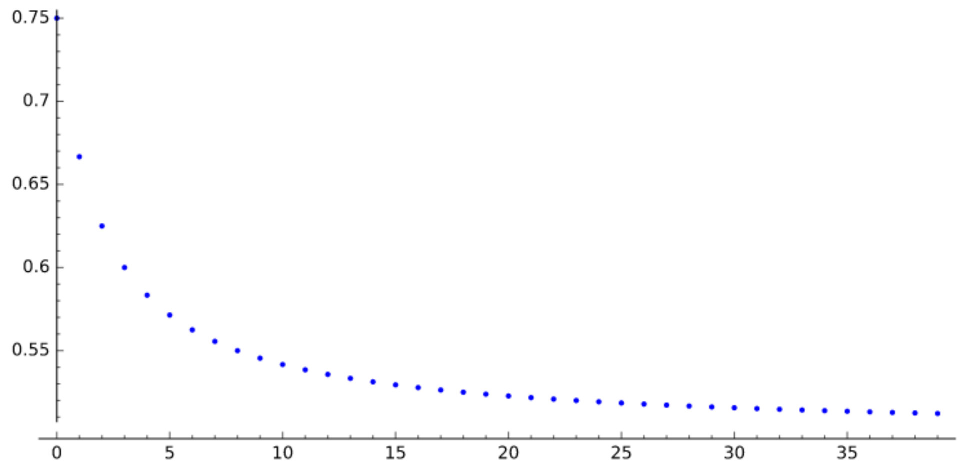
Рассмотрим произведение $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Рассмотрим произведение $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

```
P = lambda n : prod([1-1/(k^2) for k in xrange(2, n+1)])
L = [P(k).n(digits=4) for k in range (2, 42)]
show(L)
list_plot(L)
# Есть основания считать, что произведение сходится к 0.5
```

[0.7500, 0.6667, 0.6250, 0.6000, 0.5833, 0.5714, 0.5625, 0.5556, 0.5500, 0.5455, 0.5417, 0.5385, 0.5357, 0.5333, 0.5312, 0.5294, 0.5278, 0.5263, 0.5250, 0.5238, 0.5227, 0.5217, 0.5208, 0.520
0.5192, 0.5185, 0.5179, 0.5172, 0.5167, 0.5161, 0.5156, 0.5152, 0.5147, 0.5143, 0.5139, 0.5135, 0.5132, 0.5128, 0.5125, 0.5122]





Чтобы вычислить произведение в символьном виде, можно воспользоваться тем, что логариф произведения равен сумме логарифмов:

$$\log \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Чтобы вычислить произведение в символьном виде, можно воспользоваться тем, что логарифм произведения равен сумме логарифмов:

$$\log \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$


```
k = var('k')
s = sum(log(1-1/(k^2)), k, 2, oo)
show('Сумма логарифмов равна:', s)
show('Произведение равно:', exp(s).canonicalize_radical())
```

Сумма логарифмов равна: $-\log(2)$

Произведение равно: $\frac{1}{2}$