Handouts/Lecture 4 (Calculus and graphics)/Lecture 4: Calculus ("matan")/Derivatives.sagews

Author	**Eugene Strakhov**
Date	**2019-06-29T18:58:00**
Project	**07c06dbe-4967-451f-aa68-dd9268bd2ece**
Location	[Handouts/Lecture 4 (Calculus and graphics)/Lecture 4: Calculus ("matan")/Derivatives.sagews]
Original file	[Derivatives.sagews]

Производные

Производные

Рассмотрим функцию `diff()` для дифференцирования символьных выражений. Функция `derivativ`
синоним функции `diff()`. Обе функции вызывают систему Maxima.

Рассмотрим функцию `diff()` для дифференцирования символьных выражений. Функция `derivative()` — синоним функции `diff()`. Обе функции вызывают систему Maxima.

```
x, y, z = var('x y z')
#1
f = sin(x)
f.diff(x)
diff(f, x) # то же самое
f.diff(y)
show('Производная функции', f, 'равна', f.diff(x)) # вычисления + текст
show('$['+latex(f)+"]'="+latex(f.diff(x))+'$') # красивый вывод
#2
n, k, a = var('n k alpha')
f = k*cos(n*a)
show('$['+latex(f)+"]'="+latex(f.diff(a))+'$')
```

```
cos(x)

cos(x)

0
```

Производная функции $\sin(x)$ равна $\cos(x)$

$$[\sin(x)]' = \cos(x)$$

$$[k\cos(\alpha n)]' = -kn\sin(\alpha n)$$

```
# Для удобства можно создать функцию для "красивого вывода" в стиле предыдущего примера
def dshow(f, x) :
    '''
    Красивый вывод для вычисления производной.

    Аргументы:
    f - символьное выражение
    x - символьная переменная, по которой дифференцируем

    Результат: ничего (вывод на экран)
    '''
    show('$\displaystyle{['+latex(f)+"]'="+latex(f.diff(x))+'}$')

f = sqrt(x)
dshow(f, x)
```

$$[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Производные в точке

Производные в точке

```
f = sqrt(x)
dfdx = f.diff(x)
type(dfdx) # как видим, в результате получилось снова символьное выражение
show(dfdx(x=5)) # производная в точке x0=5
show(dfdx(x=1/2).n(digits=20)) # в числовом виде
```

$$\frac{1}{10}\sqrt{5}$$

$$0.70710678118654752440$$

```
# Вторая производная
f = sqrt(x)
d2fdx2 = f.diff(x, 2)
```

```
show(d2fdx2)
```

$$-\frac{1}{4\,x^{\frac{3}{2}}}$$

Частные производные

Частные производные

```
#2
g = exp(z*sin(x+y)) # функция трёх переменных
show(g)
dgdx = g.diff(x) # первая частная производная по x
show(r'$\dfrac{\partial g}{\partial x}='+latex(dgdx)+'$')
d2gdz2 = g.diff(z, 2) # вторая частная производная по z
show(r'$\dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}='+latex(d2gdz2)+'$')
d2gdxdy = g.diff(x, y) # смешанная частная производная
show(r'$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}='+latex(d2gdxdy)+'$')
d2gdydx = g.diff(y, x) # симметричная смешанная
show(r'$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}='+latex(d2gdydx)+'$')
bool(d2gdxdy == d2gdydx) # проверим теорему о равенстве смешанных производных
d3gdx2dy = g.diff(x, 2, y)
show(d3gdx2dy)
```

$$e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = z \cos\left(x + y\right) e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)} \sin\left(x + y\right)^{2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = z^{2} \cos\left(x + y\right)^{2} e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)} - z e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)} \sin\left(x + y\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = z^{2} \cos\left(x + y\right)^{2} e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)} - z e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)} \sin\left(x + y\right)$$

```
True
```

$$z^{3} \cos\left(x + y\right)^{3} e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)} - 3 \, z^{2} \cos\left(x + y\right) e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)} \sin\left(x + y\right) - z \cos\left(x + y\right) e^{\left(z \sin\left(x + y\right)\right)}$$

Градиент и матрица вторых производных (гессиан)

Градиент и матрица вторых производных (гессиан)

```
x, y = var('x y')
f = x^2 + 25*y^2
show('$f(x, y)='+latex(f)+'$')
df = f.gradient()
show(r'$\nabla f='+latex(df)+'$')
df(x=-2, y=3) # градиент в точке
show(r'$\nabla f(-2, 3)='+latex(df(x=-2, y=3))+'$')
d2f = f.hessian()
show(r'$\nabla^2 f='+latex(d2f)+'$')
d2f(x=-2, y=3) # матрица Гессе в точке
```

$$f(x, y) = x^{2} + 25 \, y^{2}$$

$$\nabla f = \left(2 \, x,\,50 \, y\right)$$

```
(-4, 150)
```

$$\nabla f(-2, 3) = \left(-4,\,150\right)$$

$$\nabla^2 f = \left(\begin{array}{rr} 2 & 0 \\ 0 & 50 \end{array}\right)$$

```
[ 2  0]
[ 0 50]
```

```
d2f.is_positive_definite
```

Вектор-функции и матрица Якоби

Вектор-функции и матрица Якоби

```
f = (x^3*sin(y), exp(x)) # вектор-функция
jf = jacobian(f, (x,y))
show('Матрица Якоби:', jf)
show('Якобиан:', det(jf)) # определитель матрицы Якоби (якобиан)
```

Матрица Якоби: $\left(\begin{array}{rr} 3 \, x^{2} \sin\left(y\right) & x^{3} \cos\left(y\right) \\ e^{x} & 0 \end{array}\right)$

Якобиан: $-x^{3} \cos\left(y\right) e^{x}$

Формальное дифференцирование

Формальное дифференцирование

```
# Объявляем функцию от x
f(x) = function('f')(x)
```

```
show(f)
show(f.diff(x))
show(f.diff(x, 2))
```

$$x \mapsto f(x)$$

$$x \mapsto \frac{\partial}{\partial x}f(x)$$

$$x \mapsto \frac{\partial^2}{(\partial x)^2}f(x)$$

```
diff?
```

```
File: /projects/sage/sage-7.5/local/lib/python2.7/site-packages/sage/calculus/functional.py
Signature : diff(*args, **kwds)
Docstring :
The derivative of f.

Repeated differentiation is supported by the syntax given in the
examples below.

ALIAS: diff

EXAMPLES: We differentiate a callable symbolic function:

   sage: f(x,y) = x*y + sin(x^2) + e^(-x)
   sage: f
   (x, y) |--> x*y + e^(-x) + sin(x^2)
   sage: derivative(f, x)
   (x, y) |--> 2*x*cos(x^2) + y - e^(-x)
   sage: derivative(f, y)
   (x, y) |--> x

We differentiate a polynomial:

   sage: t = polygen(QQ, 't')
   sage: f = (1-t)^5; f
   -t^5 + 5*t^4 - 10*t^3 + 10*t^2 - 5*t + 1
   sage: derivative(f)
   -5*t^4 + 20*t^3 - 30*t^2 + 20*t - 5
   sage: derivative(f, t)
   -5*t^4 + 20*t^3 - 30*t^2 + 20*t - 5
   sage: derivative(f, t, t)
   -20*t^3 + 60*t^2 - 60*t + 20
   sage: derivative(f, t, 2)
   -20*t^3 + 60*t^2 - 60*t + 20
   sage: derivative(f, 2)
   -20*t^3 + 60*t^2 - 60*t + 20

We differentiate a symbolic expression:

   sage: var('a x')
   (a, x)
   sage: f = exp(sin(a - x^2))/x
   sage: derivative(f, x)
   -2*cos(-x^2 + a)*e^(sin(-x^2 + a)) - e^(sin(-x^2 + a))/x^2
   sage: derivative(f, a)
   cos(-x^2 + a)*e^(sin(-x^2 + a))/x

Syntax for repeated differentiation:

   sage: R.<u, v> = PolynomialRing(QQ)
   sage: f = u^4*v^5
   sage: derivative(f, u)
   4*u^3*v^5
   sage: f.derivative(u)   # can always use method notation too
   4*u^3*v^5

   sage: derivative(f, u, u)
   12*u^2*v^5
   sage: derivative(f, u, u, u)
   24*u*v^5
   sage: derivative(f, u, 3)
   24*u*v^5

   sage: derivative(f, u, v)
   20*u^3*v^4
   sage: derivative(f, u, 2, v)
   60*u^2*v^4
   sage: derivative(f, u, v, 2)
   80*u^3*v^3
   sage: derivative(f, [u, v, v])
   80*u^3*v^3
```