

# Handouts/Lecture 6 (Mar 29)/Lecture 6: Differential Equations/Example: Systems of ODEs & Plotting.sageaws

Author Eugene Strakhov

Date 2017-03-28T19:20:08

Project bf655f90-eca0-470e-9c17-2df7d93ad139

Location [Handouts/Lecture 6 \(Mar 29\)/Lecture 6: Differential Equations/Example: Systems of ODEs & Plotting.sageaws](#)

Original file [Example: Systems of ODEs & Plotting.sageaws](#)

## Визуализация решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

### Модель «хищник — жертва»

Рассмотрим классическую модель взаимодействия двух биологических видов, предложенную независимо двумя учёными А. Лотка (Alfred James Lotka, 1925) и В. Вольтерра (Vito Volterra, 1926). Подобные уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами.

Пусть  $x(t)$  — количество жертв (например, карасей) в момент времени  $t$ , а  $y(t)$  — количество хищников (например, щуки). Тогда динамику изменения их численности можно описать системой двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y, \end{cases}$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами.

```
1 # Попытка аналитического решения...
2 t = var('t')
3 x = function('x')(t)
4 y = function('y')(t)
5 # Задаём параметры системы
6 alpha = 0.09 # коэффициент рождаемости жертв (в отсутствие хищников)
7 beta = 0.004 # коэффициент давления хищников (вероятность того, что хищник съест жертву при непосредственном контакте)
8 gamma = 0.03 # коэффициент смертности голодных хищников (в отсутствие жертв)
9 delta = 0.001 # коэффициент воспроизводства для сытых хищников
10 de1 = diff(x, t) == (alpha-beta*y)*x
11 de2 = diff(y, t) == (-gamma+delta*x)*y
12 dsol = desolve_system([de1, de2], [x, y], ivar=t)
13 show(dsol) # OMG...
```

$$[x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{2(\mathcal{L}(x(t)y(t), t, g_{2276}) - 250x(0))}{5(100g_{2276} - 9)}, g_{2276}, t\right), y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(x(t)y(t), t, g_{2276}) + 1000y(0)}{10(100g_{2276} + 3)}, g_{2276}, t\right)]$$

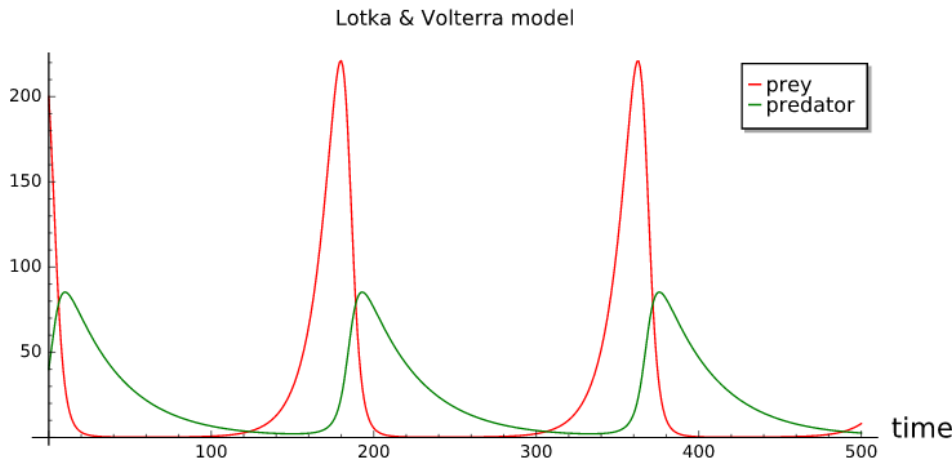
```
14 # Модель "хищник - жертва" (А. Lotka, В. Volterra)
15 # Модель описывает конкуренцию между двумя видами внутри одной среды обитания,
16 # причем один из видов (predator, хищник) питается другим (prey, жертва).
17 # Жертвы при этом имеют источник питания в неограниченном количестве
18 x, y, t = var('x y t') # обратите внимание: x, y объявляются здесь как ПЕРЕМЕННЫЕ, а не как функции!
19 alpha = 0.09 # коэффициент рождаемости жертв (в отсутствие хищников)
20 beta = 0.004 # коэффициент давления хищников (вероятность того, что хищник съест жертву при непосредственном контакте)
21 gamma = 0.03 # коэффициент смертности голодных хищников (в отсутствие жертв)
22 delta = 0.001 # коэффициент воспроизводства для сытых хищников
23 de1 = (alpha-beta*y)*x # правая часть уравнения 1
24 de2 = (-gamma+delta*x)*y # правая часть уравнения 2
25 # Решаем систему численно при начальных условиях: x(0)=200, y(0)=40
26 P = desolve_system_rk4([de1, de2], [x, y], ics=[0, 200, 40], ivar=t, step=1, end_points=[0, 500])
27 # Решение P получено в виде списка троек (i, j, k), где i соответствует дискретному моменту времени, j - переменной x(i), k - переменной y(i)
28 print P
```

```
[[0, 200, 40], [1.0, 183.8957854172123, 47.04786118720772], [2.0, 164.2825016412456, 54.35270368405712], [3.0, 142.5592319304305,
61.49921579962327], [4.0, 120.3461438643255, 68.06421505131266], [5.0, 99.13516846525707, 73.70390871925382], [6.0, 80.01857135124683,
78.21219234154681], [7.0, 63.58535303122909, 81.53164795245699], [8.0, 49.97485464386965, 83.72508138383265], [9.0, 39.01380628485385,
84.92966986838518], [10.0, 30.36202672188741, 85.31361733068184], [11.0, 23.62470572139891, 85.04523836318661], [12.0, 18.42144958001383,
84.27560900698653], [13.0, 14.41981462787973, 83.131583098509], [14.0, 11.34572519890785, 81.71516420524328], [15.0, 8.981368142177164,
80.10604996827689], [16.0, 7.157636766551895, 78.36532286215352], [17.0, 5.745136396570164, 76.53919558574364], [18.0, 4.645702440044056,
74.66232277658733], [19.0, 3.785187926517944, 72.76052736760383], [20.0, 3.107666346776, 70.85295375499872], [21.0, 2.570924881039465,
68.9537258670196], [22.0, 2.143031342661457, 67.07320441662762], [23.0, 1.799751001836738, 65.21893158079453], [24.0, 1.522616528734892,
63.39633736553373], [25.0, 1.297490914160227, 61.60926674228993], [26.0, 1.113498498292694, 59.86037306113784], [27.0, 0.9622291960629716,
58.15141210385087], [28.0, 0.8371448904891421, 56.48346241921116], [29.0, 0.7331353299089417, 54.8570909448245], [30.0, 0.646184682900321,
53.2724779514798], [31.0, 0.5731201645373264, 51.72951166532431], [32.0, 0.5114217057878059, 50.22786021193669], [33.0, 0.4590771818132068,
48.76702653498761], [34.0, 0.4144717739730575, 47.34639048056012], [35.0, 0.3763030119012608, 45.96524116462601], [36.0, 0.3435152199733541,
44.62280195118765], [37.0, 0.3152486920713315, 43.31824978577993], [38.0, 0.2908000965722596, 42.05073019769246], [39.0, 0.2695914838339826,
40.81936896390751], [40.0, 0.2511459137793909, 39.6232811888829], [41.0, 0.2350682014961933, 38.46157837548311], [42.0, 0.2210296376968262,
37.33337392792014], [43.0, 0.2087558102061451, 36.2377874260558], [44.0, 0.1980168555801986, 35.1739479334402], [45.0, 0.1886196235197484,
34.14099654283095], [46.0, 0.180401353434387, 33.13808831808762], [47.0, 0.17322455156507, 32.16439375687813], [48.0, 0.1669728253185117,
31.21909987204571], [49.0, 0.1615474839864806, 30.3014109688833], [50.0, 0.1568647556079787, 29.41054917953149], [51.0, 0.1528535012232041,
```

```
[290.0, 1.065880330023846, 5.394439358786556], [291.0, 1.141715784398727, 5.240788592966912], [292.0, 1.223686904713289, 5.091915830961367]
[293.0, 1.312312242027274, 4.947693820197914], [294.0, 1.408155567234697, 4.807999920302554], [295.0, 1.511829859032259, 4.672716030526048]
[296.0, 1.624001644020545, 4.541728524836349], [297.0, 1.745395719468736, 4.414928195070228], [298.0, 1.876800291799865, 4.292210202608174]
[299.0, 2.019072566563917, 4.173474039117943], [300.0, 2.173144828568261, 4.058623497005851], [301.0, 2.340031053936486, 3.947566650323346]
[302.0, 2.520834099173442, 3.840215847002119], [303.0, 2.716753515830333, 3.736487713437048], [304.0, 2.929094043090428, 3.636303172606459]
[305.0, 3.159274834531453, 3.539587477117779], [306.0, 3.408839479458583, 3.446270258799145], [307.0, 3.67946688352972, 3.356285596730172]
[308.0, 3.972983077892674, 3.269572105925671], [309.0, 4.291374030692261, 3.186073049264019], [310.0, 4.636799539542164, 3.105736475698305]
[311.0, 5.011608288333935, 3.028515388317337], [312.0, 5.418354156495676, 2.954367946451702], [313.0, 5.859813873412503, 2.883257706768108]
[314.0, 6.33900611504411, 2.815153909188485], [315.0, 6.85921214364504, 2.75003181453995], [316.0, 7.423998094682394, 2.687873102126406]
[317.0, 8.03723901725941, 2.62666336960087], [318.0, 8.703144775214271, 2.572407518261428], [319.0, 9.426287915088094, 2.51910072310262]
[320.0, 10.21163360372559, 2.46878861827662], [321.0, 11.06457173159568, 2.421404565247004], [322.0, 11.99095126698561, 2.37707122772674]
[323.0, 12.99711692973688, 2.335804235358999], [324.0, 14.08994822949617, 2.297662414651728], [325.0, 15.2769008804221, 2.262719744919179]
[326.0, 16.56605055918411, 2.231067387183004], [327.0, 17.96613891238762, 2.202816094415469], [328.0, 19.48662163870767, 2.17809908302831]
[329.0, 21.1377183641101, 2.157075464487425], [330.0, 22.93046388791681, 2.13993435993045], [331.0, 24.8767601931287, 2.126899851143891]
[332.0, 26.9894283726673, 2.118236960144754], [333.0, 29.2825931283598, 2.114258899455367], [334.0, 31.77006154669105, 2.115335899341183]
[335.0, 34.46870418508153, 2.121906001309025], [336.0, 37.39515208612824, 2.134488315072812], [337.0, 40.56748953278165, 2.153699377093161]
[338.0, 44.004927455839, 2.180273433613355], [339.0, 47.72778764291284, 2.215087714614988], [340.0, 51.75745525691907, 2.259194087301593]
[341.0, 56.11628818351782, 2.313858905703806], [342.0, 60.82746800128547, 2.380613443541833], [343.0, 65.91477240596538, 2.461318060304883]
[344.0, 71.40224229677177, 2.558244272566641], [345.0, 77.31370788084479, 2.674180273236657], [346.0, 83.67212631966073, 2.812567278370746]
[347.0, 90.4986676489691, 2.977676535430503], [348.0, 97.81146471113793, 3.174840084841478], [349.0, 105.623915149636, 3.410752641668413]
[350.0, 113.9423874858619, 3.693867464354081], [351.0, 122.7631374763459, 4.034915921957435], [352.0, 132.0681848995884, 4.447588501206299]
[353.0, 141.8198370268047, 4.949423378034995], [354.0, 151.9534821144069, 5.562955132823289], [355.0, 162.3682365014767, 6.317175531012206]
[356.0, 172.9150601983382, 7.2493989713733], [357.0, 183.3821520718273, 8.40709636270174], [358.0, 193.4779654004644, 9.8507860870108]
[359.0, 202.8133197981024, 11.6555057201015], [360.0, 210.8861971884652, 13.91206871527652], [361.0, 217.0762384692655, 16.72529739791547]
[362.0, 220.66058447419, 20.20718966513754], [363.0, 220.8670120526481, 24.46182677810491], [364.0, 216.9800716430096, 29.55941174131914]
[365.0, 208.5038829304971, 35.50012549665261], [366.0, 195.3552161870608, 42.17565455315249], [367.0, 178.0186360741791, 49.34526997980592]
[368.0, 157.5712638969496, 56.64692520910426], [369.0, 135.5183362696939, 63.65310777995461], [370.0, 113.4762472789373, 69.95703448506826]
[371.0, 92.83285111488132, 75.25424925503836], [372.0, 74.52410621215216, 79.386659859604], [373.0, 58.9854283191979, 82.33918055964901]
[374.0, 46.24133215803377, 84.2032590177382], [375.0, 36.05087599098724, 85.13003157691821], [376.0, 28.06672439593429, 85.29040538103298]
[377.0, 21.8310896417258, 88.0485371593047], [378.0, 17.04251757244837, 83.94822466122828], [379.0, 13.3467015952326, 82.70833471309541]
[380.0, 10.53165591660641, 81.22346442145103], [381.0, 8.354197125637267, 79.56701504084019], [382.0, 6.672634731389207, 77.79498261513847]
[383.0, 5.368301985720487, 75.94959850558574], [384.0, 4.351331301448367, 74.06246203897358], [385.0, 3.553891192940457, 72.15707988379658]
[386.0, 2.924817186441802, 70.25085291747081], [387.0, 2.42546911346567, 68.35659750233019], [388.0, 2.026589814756425, 66.48369505783538]
[389.0, 1.705947842377649, 64.63895417658433], [390.0, 1.44657865915194, 62.82725468785505], [391.0, 1.235475769804109, 61.0520822471216]
[392.0, 1.062617032488502, 59.31561700628513], [393.0, 0.9202394301985621, 57.61954219428821], [394.0, 0.8022976284633783, 55.96470516364202]
[395.0, 0.7040584628966317, 54.35153896094582], [396.0, 0.6217960917308614, 52.78012270162551], [397.0, 0.552561870166176, 51.2502683131332]
[398.0, 0.4940098588971353, 49.76158657169218], [399.0, 0.4442639037275899, 48.31353757403134], [400.0, 0.4018159012515005, 46.90546945983598]
[401.0, 0.3654475589185083, 45.53664822642118], [402.0, 0.3341699329647346, 44.20628075971985], [403.0, 0.3071764795046131, 42.91353267590071]
[404.0, 0.2838064243132545, 41.65754217542245], [405.0, 0.2635160484089152, 40.43743081945206], [406.0, 0.2458560741669817, 39.25231192067454]
[407.0, 0.2304537746080561, 38.10129707717248], [408.0, 0.216998756165602, 36.98350125508455], [409.0, 0.2052316114263882, 35.89804673277547]
[410.0, 0.1949348240879281, 34.84406614864668], [411.0, 0.1859254491225814, 33.82070484086735], [412.0, 0.1780491982355464, 32.8271226260559]
[413.0, 0.171175642543178, 31.86249513220646], [414.0, 0.1651943071993774, 30.92601477663544], [415.0, 0.160011481091154, 30.0168914606983]
[416.0, 0.1555476021694426, 29.1343530382037], [417.0, 0.1517351080731293, 28.27764560285648], [418.0, 0.148516664397546, 27.44603363095247]
[419.0, 0.1458437007312947, 26.6388000836662], [420.0, 0.14367198558924, 25.85524596519068], [421.0, 0.1419766861565406, 25.09469093686042]
[422.0, 0.1407194043468122, 24.35647236701077], [423.0, 0.1398796139311433, 23.63994546441491], [424.0, 0.1394380211671331, 22.9444829240499]
[425.0, 0.1393793021082092, 22.26947462046644], [426.0, 0.139691710202102, 21.61432728013394], [427.0, 0.1403667544368266, 20.97846413821043]
[428.0, 0.1413989376688313, 20.36132458419357], [429.0, 0.1427855466792443, 19.76236380009905], [430.0, 0.144526487068394, 19.18105239415046]
[431.0, 0.14662415737853139, 18.61687603242192], [432.0, 0.1490833579528021, 18.06933507042872], [433.0, 0.1519112307336175, 17.53794418629386]
[434.0, 0.1551172723245976, 17.02223201681537], [435.0, 0.1587131027910303, 16.52174079750866], [436.0, 0.1627129335861719, 16.03602600749071]
[437.0, 0.1671331582587677, 15.56465601990081], [438.0, 0.1719926400497462, 15.10721175840983], [439.0, 0.1773127508301721, 14.66328636025123]
[440.0, 0.1831174761461518, 14.23248484610849], [441.0, 0.1894335414210424, 13.81442379711176]
[442.0, 0.1962905596280507, 13.40873103912814], [443.0, 0.2037212009930194, 13.01504533447397], [444.0, 0.2117613855229623, 12.63301608113017]
[445.0, 0.2204504993850959, 12.26230301950355], [446.0, 0.2298316363875768, 11.90257594674485], [447.0, 0.2399518660403253, 11.55351443860831]
[448.0, 0.2508625299053155, 11.21480757881665], [449.0, 0.2626195681834326, 10.88615369587822], [450.0, 0.2752838787321553, 10.56726010728954]
[451.0, 0.2889217109675444, 10.25784287104648], [452.0, 0.3036050973778492, 9.957626544379082], [453.0, 0.3194123256670348, 9.666343949619861]
[454.0, 0.3364284548572502, 9.383735947111692], [455.0, 0.3547458790123056, 9.109551215059648], [456.0, 0.3744649426023264, 8.843546036230892]
[457.0, 0.3956946119157035, 8.585484091407793], [458.0, 0.418553207341229, 8.335136259501862], [459.0, 0.4431692017940032, 8.092280424239666]
[460.0, 0.4696820910466292, 7.85670128733654], [461.0, 0.498243342255893, 7.62819018807972], [462.0, 0.5290174275482934, 7.406544929249344]
[463.0, 0.5621829501494459, 7.191569609313741], [464.0, 0.5979338712167996, 6.983074460844449], [465.0, 0.6364808462666, 6.780875695106707]
[466.0, 0.6780526808819685, 6.584795352792671], [467.0, 0.7228979162433387, 6.394661160877541], [468.0, 0.771286559708173, 6.210306395593247]
[469.0, 0.8235119467637875, 6.031569751530519], [470.0, 0.879892862435523, 5.858295216898258], [471.0, 0.940775541239428, 5.690331954989438]
[472.0, 1.006536538750984, 5.527534191925509], [473.0, 1.07758488319865, 5.36976110776951], [474.0, 1.154365263179926, 5.216876752186481]
[475.0, 1.237361061415495, 5.068749921654145], [476.0, 1.327097779490986, 4.925254103680552], [477.0, 1.424146751673305, 4.78626738300666]
[478.0, 1.529129187017437, 4.651672373236495], [479.0, 1.642720568306181, 4.521356153184077], [480.0, 1.765655438743802, 4.395210211348659]
[481.0, 1.898732609879651, 4.273130398994572], [482.0, 2.042820826977999, 4.155016892395095], [483.0, 2.198864930983866, 4.040774164895697]
[484.0, 2.36789259368455, 3.930310969563009], [485.0, 2.551021431477629, 3.823540333314596], [486.0, 2.749467267556383, 3.7209379563574262]
[487.0, 2.964552394382449, 3.620759268671992], [488.0, 3.19715094410366, 3.524578393411259], [489.0, 3.4505197594964, 3.431794271464851]
[490.0, 3.724667914631015, 3.342332696540101], [491.0, 4.022010181628103, 3.256133014583471], [492.0, 4.344559257377279, 3.173139239682422]
[493.0, 4.694503986013093, 3.093300196781136], [494.0, 5.074224609132212, 3.016569694870152], [495.0, 5.4863092829149, 2.942906734955762]
[496.0, 5.933571955572464, 2.87227575788433], [497.0, 6.419071702806178, 2.804646938015814], [498.0, 6.946133622741521, 2.739996529841868]
[499.0, 7.518371394856548, 2.678307275966996], [500.0, 8.139711609448812, 2.6195688646586]
```

```
29 # Рисуем полученное решение
30 tsol = [i for i, j, k in P] # или [p[0] for p in P]
31 xsol = [j for i, j, k in P] # или [p[1] for p in P]
32 ysol = [k for i, j, k in P] # или [p[2] for p in P]
33 lp1 = list_plot(zip(tsol, xsol), color='red', legend_label='prey', plotjoined=True)
34 lp2 = list_plot(zip(tsol, ysol), color='green', legend_label='predator', plotjoined=True)
35 (lp1+lp2).show(axes_labels=['time', ''], title='Lotka & Volterra model')
36 # Как видим, динамика изменения численности популяций имеет периодический характер
```

37 # При других значениях коэффициентов и других начальных условиях могут быть получены качественно другие зависимости



38

## Фазовый портрет

Построим фазовый портрет системы, описывающей модель «хищник — жертва».

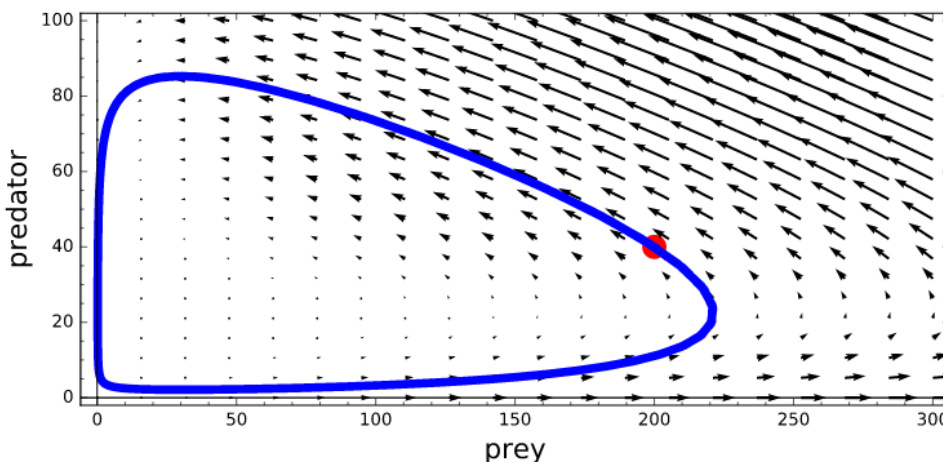
Фазовая плоскость — это плоскость  $xOy$ .

Фазовые координаты —  $x, y$  (зависят от времени). В нашем случае это число жертв и хищников соответственно.

Фазовая траектория — совокупность точек  $(x, y)$  на фазовой плоскости. Имеет направление согласно изменению  $t$ . Начинается в точке  $(x_0, y_0)$ .

Фазовый портрет — это совокупность всех фазовых траекторий.

```
39 pp = list_plot(zip(xsol, ysol), plotjoined=True, thickness=5)
40 vf = plot_vector_field([de1, de2], [x, 0, 300], [y, 0, 100]) # Добавили векторное поле
41 start = point((200, 40), color='red', size=200)
42 (pp+vf+start).show(axes_labels=['prey', 'predator'])
43 # Замкнутость фазовой траектории подтверждает цикличность процесса
```



## Использование класса ode\_solver

44

- <https://mathcommons.wordpress.com/2012/10/15/plotting-phase-portraits-in-sage/>
- [http://doc.sagemath.org/html/en/reference/calculus/sage/calculus/ode.html#sage.calculus.ode.ode\\_solver](http://doc.sagemath.org/html/en/reference/calculus/sage/calculus/ode.html#sage.calculus.ode.ode_solver)

```
45 x, y = var('x y')
46 T = ode_solver()
47 T.function = lambda t, y : [ y[0]*(alpha-beta*y[1]), y[1]*(delta*y[0]-gamma) ]
48 T.ode_solve(y_0=[200,40], t_span=[0,500], num_points=500)
49 print T.solution

[(0, [200, 40]), (1.0, [183.895757825585, 47.04790146694256]), (2.0, [164.28248619651887, 54.35276430950697]), (3.0, [142.5592485745658,
61.499273063819224]), (4.0, [120.34616558986352, 68.06425811036999]), (5.0, [99.13511792522596, 73.70394928875477]), (6.0,
[80.01835520522908, 78.21225702463597]), (7.0, [63.58491108666132, 81.53176009581394]), (8.0, [49.97418658720371, 83.7252479740723]), (9.0,
[39.01296360283042, 84.92988067746795]), (10.0, [30.361085418523476, 85.31385226247393]), (11.0, [23.623740246126992, 85.04547587106465]),
(12.0, [18.420517861760903, 84.2758315291172]), (13.0, [14.418953947161102, 83.13177902821214]), (14.0, [11.344954573995821,
81.7153275702447]), (15.0, [8.98069316280232, 80.10617911505416]), (16.0, [7.157054438695997, 78.36541898999896]), (17.0,
[5.7446389860101466, 76.53926152095042]), (18.0, [4.645280135042179, 74.66236209059687]), (19.0, [3.7848304999386992, 72.7605438076091]),
```

```

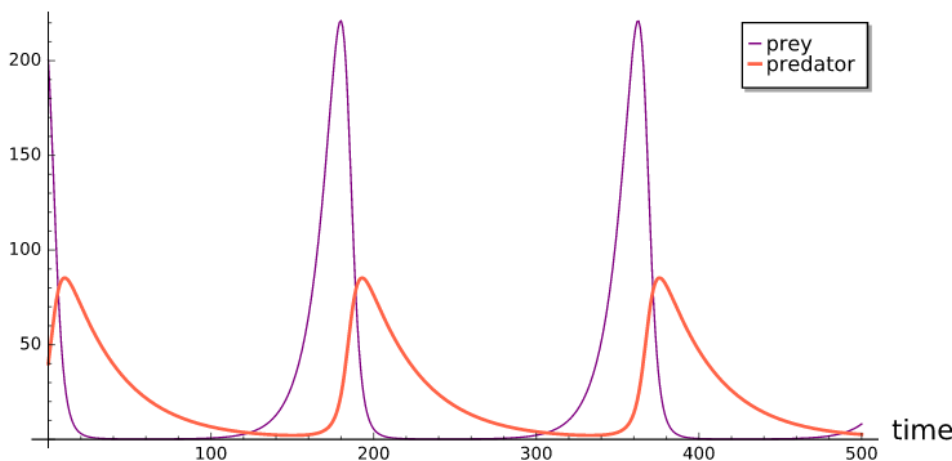
11.903711471996436]], (447.0, [0.23986275731800646, 11.554615658989247]), (448.0, [0.2507682821423473, 11.215875485421831]), (449.0,
[0.26251979968057254, 10.887189249295973]), (450.0, [0.2751781773405372, 10.568264238421932]), (451.0, [0.28880963154312467,
10.258816481921324]), (452.0, [0.3034861590271161, 9.958570508908723]), (453.0, [0.3192860087349818, 9.667259114361848]), (454.0,
[0.3362941976683912, 9.384623131974008]), (455.0, [0.35460307431231425, 9.110411214004792]), (456.0, [0.37431293369982366,
8.844379617933512]), (457.0, [0.39553268847903883, 8.586291999900885]), (458.0, [0.41838060083150214, 8.335919214789604]), (459.0,
[0.4429850804969739, 8.09303912288851]), (460.0, [0.46948555467030534, 7.857436403039725]), (461.0, [0.4980334160549895, 7.62890237219724]),
(462.0, [0.5287930559340668, 7.407234811322812]), (463.0, [0.5619429897396223, 7.192237797556324]), (464.0, [0.5976770832763358,
6.983721542605726]), (465.0, [0.6362058884859589, 6.781502237312343]), (466.0, [0.677758098433143, 6.585401902358719]), (467.0,
[0.7225821320540544, 6.395248245098983]), (468.0, [0.7709478601430639, 6.210874522506432]), (469.0, [0.8231484850656386, 6.032119410248934]),
(470.0, [0.8795025877834859, 5.858826877921006]), (471.0, [0.9403563569678373, 5.690846070481661]), (472.0, [1.0060860162655636,
5.528031195969808]), (473.0, [1.0771004671779894, 5.370241419594697]), (474.0, [1.1538441665218002, 5.217340764327736]), (475.0,
[1.2368002590734566, 5.06919801815464]), (476.0, [1.3264939877615745, 4.925686648183999]), (477.0, [1.4234964056748205, 4.786684721850301]),
(478.0, [1.528428416204807, 4.652074835497523]), (479.0, [1.6419651698537066, 4.521744050684184]), (480.0, [1.7648408486139504,
4.39558388613476]), (481.0, [1.897853871381333, 4.273490033164401]), (482.0, [2.0418725566022853, 4.155362793082605]), (483.0,
[2.1978412812886923, 4.041106573985795]), (484.0, [2.3667871786702896, 3.9306301109495014]), (485.0, [2.5498274200609448,
3.823846412565092]), (486.0, [2.748177130164164, 3.7206727675199294]), (487.0, [2.963157988627431, 3.621030764908665]), (488.0,
[3.1962075748221257, 3.524846329705357]), (489.0, [3.448889516826124, 3.4320497750499763]), (490.0, [3.722904510057762, 3.3425758732920046]),
(491.0, [4.020102275458828, 3.2563639480565794]), (492.0, [4.342494531825064, 3.1733579899897335]), (493.0, [4.692269061604775,
3.0935067992954397]), (494.0, [5.071804954278207, 3.0167641587211818]), (495.0, [5.483689116149244, 2.943089041293239]), (496.0,
[5.930734139952181, 2.872445857871716]), (497.0, [6.415997631941624, 2.8048047505131795]), (498.0, [6.9428030979166895,
2.7401419387288124]), (499.0, [7.514762492692306, 2.678440127047434]), (500.0, [8.13580053956361, 2.6196889838855655])

```

```

50 # Как видим, структура решения T.solution почти идентична структуре решения методом desolve_system_rk4
51 # Построим два графика
52 X = [(p[0], p[1][0]) for p in T.solution] # либо с помощью zip()
53 lpx = list_plot(X, color='purple', legend_label='prey', plotjoined=True)
54 Y = [(p[0], p[1][1]) for p in T.solution] # либо с помощью zip()
55 lpy = list_plot(Y, color='tomato', legend_label='predator', thickness=2, plotjoined=True)
56 (lpx+lpy).show(axes_labels=['time', ''])

```



```

57 # Фазовый портрет
58 vf = plot_vector_field([de1, de2], [x, 0, 300], [y, 0, 100])
59 (line([p[1] for p in T.solution], thickness=4)+point((200, 40), size=200, color='red')+vf).show(axes_labels=['prey', 'predator'])

```

