Качественное исследование решений динамической системы

Динамическая система — математический объект, соответствующий реальным физическим, химическим, биологическим, социальным и др. системам, эволюция во времени которых на любом интервале времени однозначно определяется начальным состоянием.

Таким математическим объектом может быть система автономных дифференциальных уравнений. Эволюцию динамической системы можно наблюдать в пространстве состояний системы.

Дифференциальные уравнения редко решаются аналитически в явном виде. Использование численного метода (Эйлера, Рунге — Кутты и др.) позволяет получить приближённое решение, однако лишь на конечном отрезке времени, что затрудняет анализ поведения фазовых траекторий в целом. Поэтому важную роль приобретают методы качественного исследования дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx + dy. \end{cases} \tag{1}$$

Фазовыми траекториями такой системы могут быть:

- точки,
- замкнутые кривые,
- незамкнутые кривые.

Точка соответствует **стационарному решению** (точке равновесия, точке покоя) системы; замкнутая кривая — периодическому решению (вспомним фазовый портрет системы «хищник — жертва»); незамкнутая — непериодическому решению.

Нахождение точек равновесия

Точки равновесия (x, y) системы (1) можно найти, приравняв к нулю правые части уравнений. Вспомним, что равенство нулю первой производной означает, что функция постоянна.

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) представляет собой однородную СЛАУ. Как известно, такая система имеет **единственное (нулевое) решение** в том и только в том случае, если

$$\det A = \det \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае динамическая система (1) имеет единственное положение равновесия — точку $(0; 0)$.

Если же $\det A = 0$, то система (2) имеет бесконечно много решений, а значит, система (1) имеет бесконечно много положений равновесия.

Классификация положений равновесия

Качественное поведение фазовых траекторий (тип положения равновесия) определяется **собственными числами матрицы** системы (1).

Классификация положений равновесия в случае $\det A \neq 0$ приведена в таблице.

Собственные числа	**Тип положения равновесия**
λ_1, λ_2 вещественные, одного знака	Узел
λ_1, λ_2 вещественные, разных знаков	Седло
λ_1, λ_2 комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0$	Фокус
λ_1, λ_2 комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = 0$	Центр

Устойчивость положения равновесия

Теория устойчивости была разработана в конце XIX века А. М. Ляпуновым. Последний год своей жизни Александр Михайлович провёл в Одессе и преподавал в нашем университете.

Интуитивное понятие **устойчивости решения** заключается в следующем: *если малым изменениям начальных условий* системы (1) соответствуют *малые изменения её решения на бесконечном промежутке* $[0; +\infty)$, то такое решение является устойчивым.

При этом оказывается, что *устойчивость произвольного решения линейной неоднородной системы* может быть установлена на основе анализа устойчивости *лишь* *одного нулевого решения*, причём более простой — *однородной системы.* Таким образом, исследование устойчивости линейных систем всегда можно ограничить лишь классом однородных систем.

Для нелинейных систем имеет смысл говорить об устойчивости линейного приближения данной системы. Т. е. предварительно все правые части уравнений *линеаризуются* (по формуле Тейлора), а затем исследуется устойчивость полученной линейной системы.

Рассмотрим вопрос об устойчивости положений равновесия системы (1). В теории устойчивости утверждается, что:

- если вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны, то точка равновесия асимптотически устойчива;
- если вещественная часть хотя бы одного собственного числа матрицы A положительна, то точка равновесия неустойчива;
- если все собственные числа матрицы A чисто мнимые, то точка равновесия устойчива (является центром).

Фактически, устойчивость положения равновесия означает, что все решения, начальные значения которых стремятся к рассматриваемому положению равновесия, равномерно сходятся к некоторому постоянному решению на интервале $[0; +\infty)$.