Метод Эйлера решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Метод Эйлера является исторически первым методом численного решения задачи Коши. Впервые описан Леонардом Эйлером в работе «Интегральное исчисление» в 1768 году.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного диффереціального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$, $x \in [a; b]$.

Разобьём промежуток интегрирования системы на частичные сегменты узлами

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Решением исходной системы будет набор значений функции $y = y(x)$ в узлах x_i:
$y_i = y\left(x_i\right)$,
$i = 0, 1, \ldots, n$.

Производную $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ в узле x_i можно аппроксимировать соотношением

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

отсюда получаем основную формулу пересчёта

$$y_i = y_{i-1} + \left(x_i - x_{i-1}\right) f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В частном случае, если шаг дискретизации $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ является постоянным и равным h, получим

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ввиду невысокой точности и вычислительной неустойчивости на практике применяется редко. Его достоинствами являются простота и наглядность.

Метод тривиально обобщается на случай системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, x\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, x\right), \\ \quad \ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, x\right), \\ y_1(a) = y_1^0, \quad y_2(a) = y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n(a) = y_n^0. \end{cases}$$