Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

Дисциплина: Моделирование

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 4
на тему
ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ
НЕПРЕРЫВНО-СТОХАСТИЧЕСКОЙ СМО,
ВАРИАНТ № 4

Студенты: П.В. Сякачёв

Проверила: Ю.О. Герман

МИНСК 2022

1. Цель работы

Изучить методы аналитического моделирования поведения непрерывно-стохастической СМО.

2. Задание

Произвести аналитический расчет вероятностей для графа

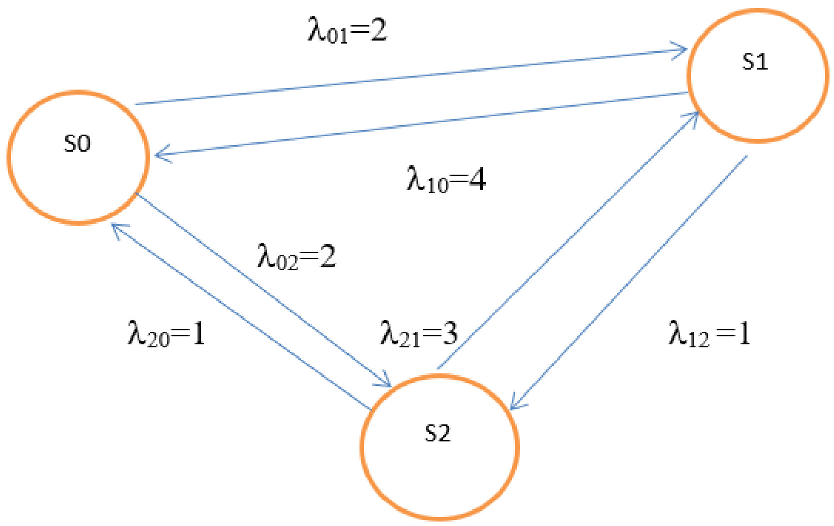

Рисунок 2.1 – граф СМО

3. Ход работы

Количество систем линейных дифференциальных уравнений зависит от количества состояний системы, в данном случае имеется три состояния, следовательно уравнений необходимо на одно меньше, то есть два уравнения. Интенсивности переходов запишем со знаком плюс в случае перехода в состояние, минус – перехода из состояния.

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = 4 \times p_1(t) + p_2(t) - 4 \times p_0(t),$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = 2 \times p_0(t) + 3 \times p_2(t) - 5 \times p_1(t)$$

Теперь составим нормировочное уравнение, которое представляет из себя точно верное утверждение. Очевидно, что сумма вероятностей состояний системы в момент времени t будет равна единице:

$$p_0(t) + \ p_1(t) + p_2(t) = 1$$

Пусть начальным состоянием системы считается p_0:

$$p_0(0) = 1,$$
$$p_1(0) = 0,$$
$$p_2(0) = 0$$

Из нормировочного уравнения можно выразить $p_2(t)$:

$$p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t)$$

Теперь можно подставить p_2 в дифференциальные уравнения:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = 1 + 3 \times p_1(t) - 5 \times p_0(t),$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = 3 - p_0(t) - 8 \times p_1(t)$$

Решение в общем виде имеет вид:

$$p_0(t) = a + be^{kt}$$
$$p_1(t) = c + de^{ht}$$

Возьмём производную по t:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = bk \times e^{kt}$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = dh \times e^{ht}$$

Воспользуемся граничными условиями. Для t=0:

$$p_0(t) = 1 = a + b$$
$$p_1(t) = 0 = c + d$$

Получаем:

$$a = b - 1$$
$$c = \ -d$$

Для t = ∞ вероятности состояний следует найти для установившегося режима. Для этого производные приравниваем 0 и имеем алгебраическую систему:

$$0 = 4 \times p_1(\infty) + p_2(\infty) - 4 \times p_0(\infty),$$
$$0 = 2 \times p_0(\infty) + 3 \times p_2(\infty) - 5 \times p_1(\infty),$$
$$1 = p_0(\infty) + \ p_1(\infty) + p_2(\infty)$$

Подставим:

$$p_2(\infty) = 1 - p_0(\infty) - \ p_1(\infty)$$

Получим:

$$0 = 1 - 5 \times p_0(\infty) + 3 \times \ p_1(\infty),$$
$$0 = 3 - p_0(\infty) - \ 8 \times p_1(\infty)$$

$$p_0(\infty) = \frac{17}{43}$$

$$p_1(\infty) = \frac{14}{43}$$

$$\frac{17}{43} = a + be^{kt}$$
$$\frac{14}{43} = c + de^{ht}$$

Здесь члены e^{kt} (e^{ht}) стремятся к 0 при t стремящемся к бесконечности (полагаем k и h отрицательными). Получаем:

$$a = \frac{17}{43}, b = \frac{26}{43}$$
$$c = \frac{14}{43}, d = -\frac{14}{43}$$

Остается найти значения k и h:

$$p_0(t) = a + be^{kt} = \frac{17}{43} + \frac{26}{43}e^{kt}$$
$$p_1(t) = c + de^{ht} = \frac{14}{43} - \frac{14}{43}e^{ht}$$

Подставим в дифференциальные уравнения полученные значения:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = 1 + 3 \times p_1(t) - 5 \times p_0(t),$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = 3 - p_0(t) - 8 \times p_1(t)$$

$$\frac{30}{43} k e^{kt} = 1 + 3\left(\frac{14}{43} - \frac{14}{43} e^{ht}\right) - 5\left(\frac{17}{43} + \frac{26}{43} e^{kt}\right)$$
$$-\frac{14}{43} h e^{ht} = 3 + \frac{17}{43} + \frac{26}{43} e^{kt} - 8\left(\frac{14}{43} - \frac{14}{43} e^{ht}\right)$$

$$\frac{30}{43} k e^{kt} = -\frac{42}{43} e^{ht} - \frac{130}{43} e^{kt}$$
$$-\frac{14}{43} h e^{ht} = \frac{34}{43} + \frac{26}{43} e^{kt} + \frac{112}{43} e^{ht}$$

Нужно найти h и k. Для этого нужно задать два любых момента времени t (если достаточно одного, то и хватит). Зададим t=0:

$$\frac{30}{43} k = -\frac{42}{43} - \frac{130}{43}$$
$$-\frac{14}{43} h = \frac{34}{43} + \frac{26}{43} + \frac{112}{43}$$

$$k = -\frac{86}{15},$$
$$h = -\frac{86}{7}$$

Все коэффициенты найдены. Получили окончательно:

$$p_0(t) = \frac{17}{43} + \frac{26}{43} e^{-\frac{86}{15}t},$$
$$p_1(t) = \frac{14}{43} - \frac{14}{43} e^{-\frac{86}{7}t},$$
$$p_2(t) = \frac{12}{43} - \frac{26}{43} e^{-\frac{86}{15}t} + \frac{14}{43} e^{-\frac{86}{7}t}$$