

Multicapas de Grafeno con Matriz de Transferencia, y Excitación de Plasmones Superficiales.

Alumno: Eugenia Noel Gomes Profesor: Ricardo Depine

6 de febrero de 2020

Resumen

En este trabajo se estudia de forma teórica el grafeno como conductor anisótropo, y cómo a partir de esta propiedad y una configuración específica de multicapas entre medios dieléctricos se pueden excitar plasmones superficiales. Para ello se simula las distintas componentes de la conductividad de la capa de grafeno en función de la frecuencia de una onda electromagnética que la atraviesa, y un campo magnetoestático externo que se le aplica perpendicularmente. Además, se desarrolla el método de matriz de transferencia para encontrar la reflectancia y transmitancia de la configuración de multicapas general que contiene capas de grafeno magnetizado. Usando el mismo método, se identifica la excitación de plasmones superficiales en el grafeno para un sistema de una capa de grafeno en la interfaz de Aire y Oxido de Silicio. Luego se estudian los modos plasmónicos de una estructura de multicapas con tres capas de grafeno. Se anexan los códigos en Python para realizar las simulaciones.

I. Introducción

Los polaritones plasmónicos de superficie (SSPs por sus siglas en inglés) son ondas superficiales propagándose en la interfase entre un dieléctrico y un conductor. Son el resultado del acoplamiento entre ondas electromagnéticas y oscilaciones de plasma, y en las últimas décadas han sido de gran interés, dado que los materiales plasmónicos son prometedores en tecnologías nanofotónicas, pues permiten manipular ondas de luz a escalas mucho más pequeñas que su longitud de onda. Pero hay desventajas que limitan las aplicaciones: los dispositivos plasmónicos tienen una enorme pérdida en el rango de frecuencias visible y cerca del infrarrojo, y es muy difícil controlar la permitividad de los materiales. Por otro lado, la interfase entre metal y dieléctrico admite solo modos de plasmones superficiales (modos SP) con polarización transversa magnética (TM), y no transversa eléctrica (TE). Todos estos inconvenientes conducen a que las investigaciones consideren al grafeno como nuevo tipo de material plasmónico.

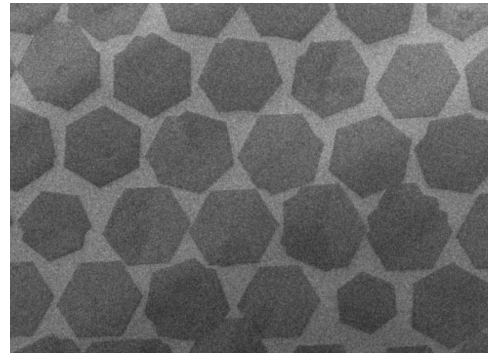


Figura 1: Imagen de la superficie del grafeno obtenida con un microscopio electrónico de barrido. (Fuente: Care University of Houston) .

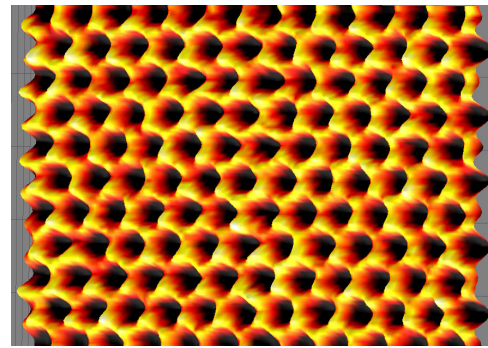


Figura 2: Imagen de la superficie de una lamina de grafeno monoatómica obtenida con un microscopio electrónico de transmisión. (Fuente: Berkeley Lab's National Center for Electron Microscopy)

El grafeno es una única capa atómica de grafito en el que los átomos de carbono están distribuidos en una red bidimensional en forma de panal de abejas (Ver Figuras 1 y 2). El grafeno tiene propiedades únicas, como una conductividad óptica ajustable y baja pérdida de potencia. Mas aún, fue demostrado teórica y experimentalmente que los SPPs pueden propagarse a lo largo de una única capa de grafeno. Además de las propiedades mencionadas, las laminas de grafeno transportan ambos modos TE y TM de SP. Así, con cada una de sus propiedades el grafeno abre múltiples posibilidades antes no pensadas.

Recientemente se han llevado a cabo unas pocas investigaciones destinadas a la conductividad del grafeno. Se sabe que la misma varia en función del campo magnético externo, y se ha demostrado que la dispersión de ondas superficiales en el grafeno dependen significativamente del mismo. El campo magnético externo convierte al grafeno en un medio anisótropo, donde la conductividad difiere según la dirección de polarización. Esta es una de las propiedades que se estudian en la referencia [1] y [2], y cuyos análisis se buscan repetir en el presente trabajo.

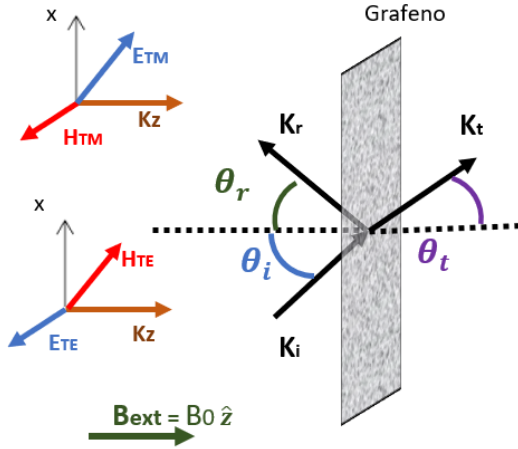


Figura 3: Descomposición de los campos de la onda incidente al grafeno según su polaridad. Por la simetría del problema de la interfaz con grafeno se optó por definir H^{TM} y E^{TE} en y , quedando H^{TE} y E^{TM} en el plano $x - z$.

En el trabajo mencionado [1] se muestra como emplear el grafeno en estructuras de multicapas para la excitación de SPs. La configuración planteada son capas de dieléctricos de espesor conveniente separadas por laminas de grafeno, y en [1] se propone el método de matriz de transferencia (TMM) para la investigación de ondas electromagnéticas propagándose a través de estructuras de multicapas, con capas de grafeno sometidas a un campo magnético perpendicular a las mismas. En el desarrollo del método se modela un caso ideal con capas de grafeno ultrafinas y conductoras separando medios dieléctricos lineales isótropos y homogéneos (LIH). Definiendo la expresión de los campos electromagnéticos en dos dieléctricos diferentes y aplicando las condiciones de contorno sobre la interfase de grafeno, se obtiene una matriz de transferencia en términos de la conductividad anisotrópica para relacionar los campos a ambos lados del grafeno. Este método resulta más práctico que escribir los campos en las diferentes capas e imponer las condiciones de contorno en cada una de las interfaces manualmente.

En este trabajo se busca recrear el desarrollo del TMM y los resultados obtenidos sobre la excitación de SPs en un sistema de multicapas de grafeno, así como estudiar la

variabilidad de la conductividad del grafeno, tal como se hizo en el artículo de Ardakani, Ghasemi y Golshan, ref. [1].

II. Desarrollo

Con el fin de estudiar plasmones superficiales se plantea una configuración de multicapas de grafeno y medios LIH. Para obtener la matriz de transición del problema general, se empieza por plantear un caso sencillo de la figura 3: una sola capa lisa e infinita de grafeno separando dos medios dieléctricos 1 y 2 caracterizados por los parámetros constitutivos ϵ_j y μ_j , $j = 1, 2$. A lo largo del trabajo se aproxima que la permeabilidad magnética es $\mu = 1$.

II.1. Descripción de los campos

Para problemas con una interfaz definida es conveniente descomponer la onda incidente en los modos TE y TM, el primero con el campo eléctrico paralelo a la interfase, y el segundo con el campo magnético paralelo a la interfase. Ubicando un sistema de referencia como se indica en la figura 3, se tiene que y es un eje de simetría, y sobre él se define H^{TM} y E^{TE} :

$$H_{1y}^{TM} = (a_1 e^{ik_{1z}z} + b_1 e^{-ik_{1z}z}) e^{i(qx - \omega t)}, \quad (1a)$$

$$E_{1y}^{TE} = (c_1 e^{ik_{1z}z} + d_1 e^{-ik_{1z}z}) e^{i(qx - \omega t)}. \quad (1b)$$

Generalizando para un medio i , $k_{1z} = k_i \cos \theta_i$, y $q = k_i \sin \theta_i$, siendo $k_i = n_i \omega / c$, donde n_i es el coeficiente de reflexión y θ_i el ángulo de la dirección de propagación de la onda respecto a la normal de la interfaz. Como hay reflexiones se escribe a la onda total como la composición de una onda incidente al grafeno que se desplaza hacia los z positivos, y una reflejada que se desplaza hacia los z negativos. Por otro lado, se introduce la dependencia temporal en x , que es otra dirección de simetría. Entonces, la onda en cuestión tiene una dirección de propagación sobre el plano $x - z$, y es simétrica a lo largo del eje y . Las componentes en y de los campos se escribe como en la ecuación 2:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_y \hat{\mathbf{y}}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + H_y \hat{\mathbf{y}}, \quad (2b)$$

Utilizando las ecuaciones de Maxwell se pueden encontrar las demás componentes de los campos en cada modo. Las ecuaciones de Maxwell macroscópicas en unidades Gaussianas CGS son[3]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho, \quad (3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (3b)$$

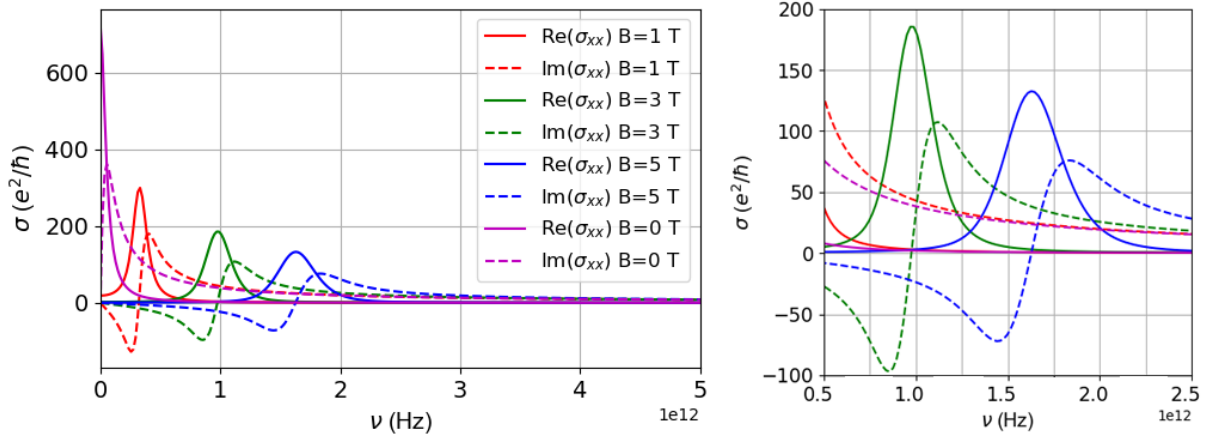


Figura 4: Componente de la conductancia σ_{xx} del grafeno en función de la frecuencia para distintas intensidades del campo magnético aplicado al grafeno. Para la componente σ_{yy} el gráfico es idéntico. Se muestra la parte real (línea continua) y la parte imaginaria (línea punteada). Los parámetros utilizados son $T = 300 \text{ K}$, $\mu_c = 0,5 \text{ eV}$, $\delta = 0$ y $\Gamma = 0,11 \text{ meV}/\hbar$

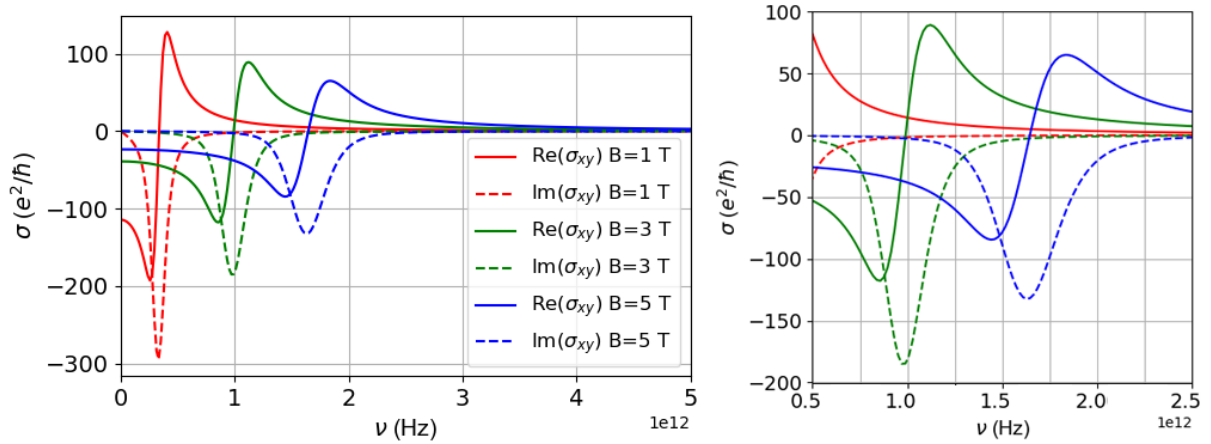


Figura 5: Componente de la conductancia σ_{xy} del grafeno en función de la frecuencia para distintas intensidades del campo magnético aplicado al grafeno. Para la componente σ_{yx} el gráfico es idéntico pero con signo opuesto. Se muestra la parte real (línea continua) y la parte imaginaria (línea punteada). Los parámetros utilizados son $T = 300 \text{ K}$, $\mu_c = 0,5 \text{ eV}$, $\delta = 0$ y $\Gamma = 0,11 \text{ meV}/\hbar$.

$$\nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (3c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3d)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4d)$$

Para facilitar el tratamiento de los medios, se hace un análisis de Fourier de la dependencia temporal de los campos a ambos lados de la superficie. Como las componentes de los campos tienen una función de onda del estilo $\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t}$ evaluándolas en las ecuaciones 3, se obtiene las ecuaciones de Maxwell en el espacio de frecuencias. Como no existen cargas ni corrientes mas allá de la interfaz las ecuaciones de Maxwell a cada lado del grafeno cumplen:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (4b)$$

con las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \epsilon_j \mathbf{E}, \quad (5a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_j \mathbf{H}. \quad (5b)$$

Entonces, usando las ecuaciones 4b y 4c también se pueden escribir como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E}, \quad (6a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}. \quad (6b)$$

De las ecuaciones 4 y 6 se puede obtener una relación entre las componentes transversales y paralelas a la dirección de propagación neta (Ver Apéndice A). Dicha relación esta dada por

$$\mathbf{E}_t^j = \frac{1}{\gamma^2} \left[\nabla_t \frac{\partial E_y^j}{\partial y} - i\mu_j \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t H_y^j \right], \quad (7a)$$

$$\mathbf{H}_t^j = \frac{1}{\gamma^2} \left[\nabla_t \frac{\partial H_y^j}{\partial y} - i\epsilon_j \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t E_y^j \right], \quad (7b)$$

donde $\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$, y $\gamma = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - k_y^2$. Introduciendo las expresiones 1 en 7 se obtienen las demás componentes:

$$E_{1x}^{TM} = \frac{k_{1z}c}{\omega\epsilon_1} (a_1 e^{ik_{1z}z} - b_1 e^{-ik_{1z}z}) e^{i(qx-\omega t)}, \quad (8a)$$

$$E_{1z}^{TM} = -\frac{qc}{\omega\epsilon_1} (a_1 e^{ik_{1z}z} + b_1 e^{-ik_{1z}z}) e^{i(qx-\omega t)}, \quad (8b)$$

$$H_{1x}^{TE} = -\frac{k_{1z}c}{\omega} (c_1 e^{ik_{1z}z} - d_1 e^{-ik_{1z}z}) e^{i(qx-\omega t)}, \quad (8c)$$

$$H_{1z}^{TE} = \frac{qc}{\omega} (c_1 e^{ik_{1z}z} + d_1 e^{-ik_{1z}z}) e^{i(qx-\omega t)}. \quad (8d)$$

Los campos a cada lado de la interfaz están sujetos a las condiciones de borde, dadas en la ecuación 9, cuya deducción se encuentra en el Apéndice B.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_{z=0} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)|_{z=0} = 0. \quad (9b)$$

De la Ley de Ohm se obtiene que $\mathbf{J} = \bar{\sigma} \mathbf{E}$, donde $\bar{\sigma}$ es la conductividad de superficie, y por lo tanto la corriente superficial es $\mathbf{K} = \bar{\sigma} \mathbf{E}$. Según la geometría del problema, $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$ (ver figura 3), las ecuaciones 9 quedan:

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_{z=0} = \frac{4\pi}{c} \bar{\sigma} \mathbf{E}|_{z=0}, \quad (10a)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)|_{z=0} = 0. \quad (10b)$$

II.2. Conductividad del grafeno

La interacción entre el grafeno y la radiación electromagnética en general se puede describir por σ , dependiendo de la frecuencia de la radiación ω , la tasa de dispersión fenomenológica de partículas cargadas Γ , la temperatura del ambiente T , el campo electrostático externo (que en este caso sera nulo) y el campo magnetostático externo $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. En las condiciones de un campo magnético uniforme aplicado de forma perpendicular a la lámina de grafeno, el grafeno se vuelve eléctricamente anisótropo y la conductividad superficial es un tensor de 2 x 2:

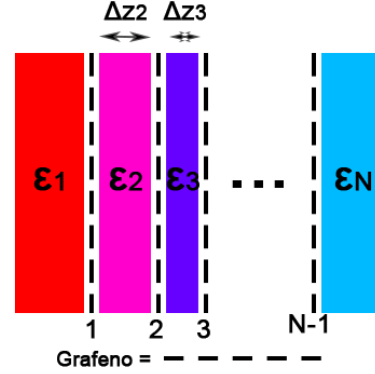


Figura 6: Estructura de multicapas de grafeno con distintos dieléctricos entre ellas.

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Las expresiones de sus componentes son:

$$\sigma_{xx} = \frac{4\sigma_{min}}{i\pi} \Lambda^2 \tilde{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (12a)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{4\sigma_{min}}{\pi} \Lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} K_n, \quad (12b)$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}, \quad (12c)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx}, \quad (12d)$$

donde $\Lambda = v_f(|eB_0|/\hbar)^{1/2}$, $\tilde{\omega} = \omega + 2i\Gamma$, $\sigma_{min} = e^2/(4\hbar)$ y $v_f = 1,02 \times 10^9 \text{ cm/s}$ es la velocidad de Fermi en el grafeno. En las ecuaciones 12a y 12b,

$$A = \frac{f_d(M_n) - f_d(M_{n+1}) + f_d(-M_{n+1}) - f_d(-M_n)}{\Delta_-(\Delta_-^2 - \tilde{\omega}^2)} + \frac{f_d(-M_n) - f_d(M_{n+1}) + f_d(-M_{n+1}) - f_d(M_n)}{\Delta_+(\Delta_+^2 - \tilde{\omega}^2)}, \quad (13)$$

$$K = [f_d(M_n) - f_d(M_{n+1}) + f_d(-M_{n+1}) - f_d(-M_n)] \times [(\Delta_-^2 - \tilde{\omega}^2)^{-1} + (\Delta_+^2 - \tilde{\omega}^2)^{-1}], \quad (14)$$

donde $\Delta_{\pm} = M_{n+1} \pm M_n$, $M_n = \Lambda(2n)^{1/2}$ es la energía entre niveles de Landau equidistantes (cuando se considera la distancia excitónica $\delta = 0$), n es un entero no negativo,

$$f_d(E) = \frac{1}{1 + \exp[(g - \mu_c)/k_B T]}$$

es la distribución de Fermi-Dirac, g la energía del electrón, μ_c el potencial químico, $\beta_T = 1/(k_B T)$, y k_B es la constante de Boltzman. Cuando $B_0 = 0$ y $\sigma_{xy} = 0$, la ecuación 12a converge muy lentamente, por lo que se debe utilizar la siguiente expresión:

$$\sigma_{B=0} = \frac{i4\sigma_{min}}{\pi} \times \frac{1}{\hbar\tilde{\omega}} \left[\mu_c + \frac{2}{\beta_T} \ln(1 + e^{-\mu_c\beta_T}) + \int_0^\infty \frac{n_F(-g) - n_F(g)}{1 - 4g^2/(\tilde{\omega}\hbar)^2} dg \right]. \quad (15)$$

Las ecuaciones 12a y 12b contienen contribuciones de transiciones electrónicas de interbanda e intrabanda en la conductividad [4].

En las figuras 4 y 5 se encuentran los gráficos de las con-

ductividades $\tilde{\sigma}$, siendo las conductividades de las ecuaciones 12a y 12b, $\sigma = \frac{e^2}{\hbar} \tilde{\sigma}$. De esta forma, $\tilde{\sigma}$ es adimensional. En el sistema CGS $\frac{e^2}{\hbar} = \alpha c$, con $\alpha = 1/137,036$ la constante de estructura fina, entonces $\sigma = \alpha c \tilde{\sigma}$ en las ecuaciones 10. Estas simulaciones se realizaron con Python, y los códigos utilizados se presentan en el repositorio de Github del trabajo [5].

II.3. Matriz de Transferencia

$$\frac{k_{2z}}{\epsilon_2}(a_2 - b_2) = \frac{k_{1z}}{\epsilon_1}(a_1 - b_1), \quad (16a)$$

$$(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) = -\sigma_{xx} \frac{ck_{1z}}{\omega\epsilon_1}(a_1 - b_1) + \sigma_{xy}(c_1 + d_1), \quad (16b)$$

$$-k_{2z} \frac{c}{\omega}(c_2 - d_2) + k_{1z} \frac{c}{\omega}(c_1 - d_1) = \sigma_{yx} \frac{ck_{1z}}{\omega\epsilon_1}(a_1 - b_1) + \sigma_{yy}(c_1 + d_1), \quad (16c)$$

$$c_2 + d_2 = c_1 + d_1. \quad (16d)$$

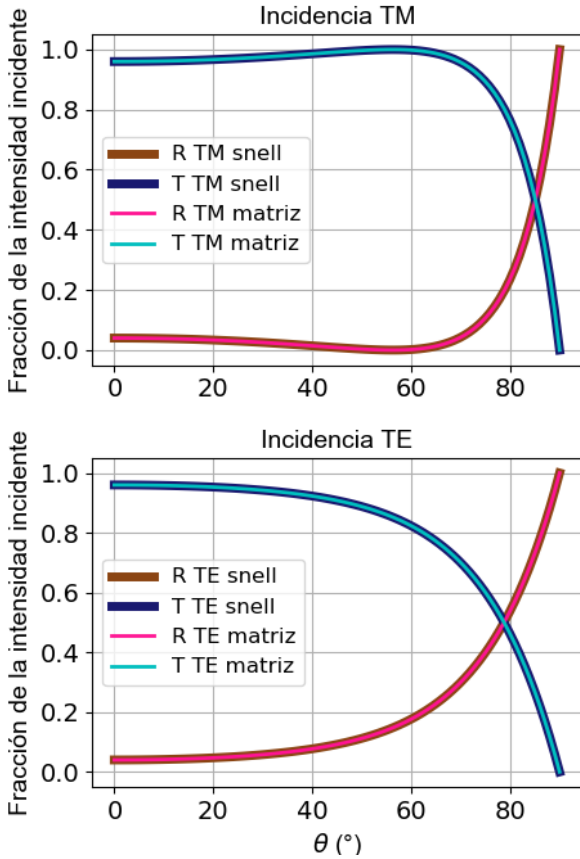


Figura 7: Reflectancia y transmitancia para una onda TM y TE que se transmite de aire a vidrio, en función del ángulo de incidencia a la interfaz.

Se aplican las condiciones de borde a los campos de las ecuaciones 1 y 8 considerando que el único campo eléctrico

aplicado a la capa de grafeno, es el que induce la onda incidente evaluada en la posición del grafeno (que dada la ecuación 10.b, es el mismo que el que se transmite evaluado en la interfaz). Queda el sistema de ecuaciones 16. De aquí se obtiene una relación entre los coeficientes a ambos lados de la capa de grafeno, que se representa matricialmente como en la ecuación 17, siendo T_{12} la matriz de la ecuación 18:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = T_{12} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

$$T_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_{2z}\epsilon_1}{k_{1z}\epsilon_2} + \sigma_{xx} \frac{4\pi k_{2z}}{\epsilon_2\omega} & 1 - \frac{k_{2z}\epsilon_1}{k_{1z}\epsilon_2} - \sigma_{xx} \frac{4\pi k_{2z}}{\epsilon_2\omega} & \sigma_{xy} \frac{4\pi}{c} & \sigma_{xy} \frac{4\pi}{c} \\ 1 - \frac{k_{2z}\epsilon_1}{k_{1z}\epsilon_2} + \sigma_{xx} \frac{4\pi k_{2z}}{\epsilon_2\omega} & 1 + \frac{k_{2z}\epsilon_1}{k_{1z}\epsilon_2} - \sigma_{xx} \frac{4\pi k_{2z}}{\epsilon_2\omega} & \sigma_{xy} \frac{4\pi}{c} & \sigma_{xy} \frac{4\pi}{c} \\ \sigma_{yx} \frac{4\pi}{c} \frac{k_{2z}}{k_{1z}\epsilon_2} & -\sigma_{yx} \frac{4\pi}{c} \frac{k_{2z}}{k_{1z}\epsilon_2} & 1 + \frac{k_{2z}}{k_{1z}} + \sigma_{yy} \frac{4\pi\omega}{c^2} \frac{1}{k_{1z}} & 1 - \frac{k_{2z}}{k_{1z}} + \sigma_{yy} \frac{4\pi\omega}{c^2} \frac{1}{k_{1z}} \\ -\sigma_{yx} \frac{4\pi}{c} \frac{k_{2z}}{k_{1z}\epsilon_2} & \sigma_{yx} \frac{4\pi}{c} \frac{k_{2z}}{k_{1z}\epsilon_2} & 1 - \frac{k_{2z}}{k_{1z}} - \sigma_{yy} \frac{4\pi\omega}{c^2} \frac{1}{k_{1z}} & 1 + \frac{k_{2z}}{k_{1z}} - \sigma_{yy} \frac{4\pi\omega}{c^2} \frac{1}{k_{1z}} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Como los medios entre las capas de grafeno son homogéneos, el avance de la onda electromagnética en z sobre los medios puede representarse multiplicando a los coeficientes a_i , b_i , c_i y d_i por una fase. Esto es, multiplicar al vector de los coeficientes por la matriz de la ecuación 19 donde i representa el medio, y z la distancia que se recorre en ese medio:

$$D_i(\Delta z) = \begin{bmatrix} e^{-ik_{iz}\Delta z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_{iz}\Delta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{iz}\Delta z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{ik_{iz}\Delta z} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

En el caso general de $N - 1$ capas de grafeno separando N dieléctricos, como en la figura 6, la relación entre las amplitudes de las ondas electromagnéticas a ambos lados de las capas de grafeno (justo antes de incidir en la primer capa de grafeno, la del la izquierda de la figura 6, y justo a la salida de la última), esta dada por

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = M_{1,N} \begin{pmatrix} a_N \\ b_N \\ c_N \\ d_N \end{pmatrix}, \quad (20a)$$

$$M_{1,N} = T_{12} D_2 \Delta z_2 T_{23} D_3 \Delta z_3 \dots T_{N-1,N}. \quad (20b)$$

II.4. Reflectancia y Transmitancia

En la práctica, para resolver problemas con una configuración de multicapas de grafeno es necesario conocer el comportamiento de su reflectancia y transmitancia. Si pensamos en una onda incidente en modo TM en la primer capa de grafeno, el vector de los coeficientes de la onda electromagnética a la izquierda de la primer capa es $(1, b_1, 0, d_1)$. Esto es, normalizamos todas las amplitudes a la incidente, y dejamos la posibilidad de una onda reflejada de polarización TE al poner el coeficiente d_1 . Si consideramos $N-1$ capas de grafeno, el vector de coeficientes a la salida de la ultima capa se escribe $(a_N, 0, c_N, 0)$. La expresión 20a queda como en el sistema 21:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ 0 \\ d_1 \end{pmatrix} = M_{1,N} \begin{pmatrix} a_N \\ 0 \\ c_N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (21a)$$

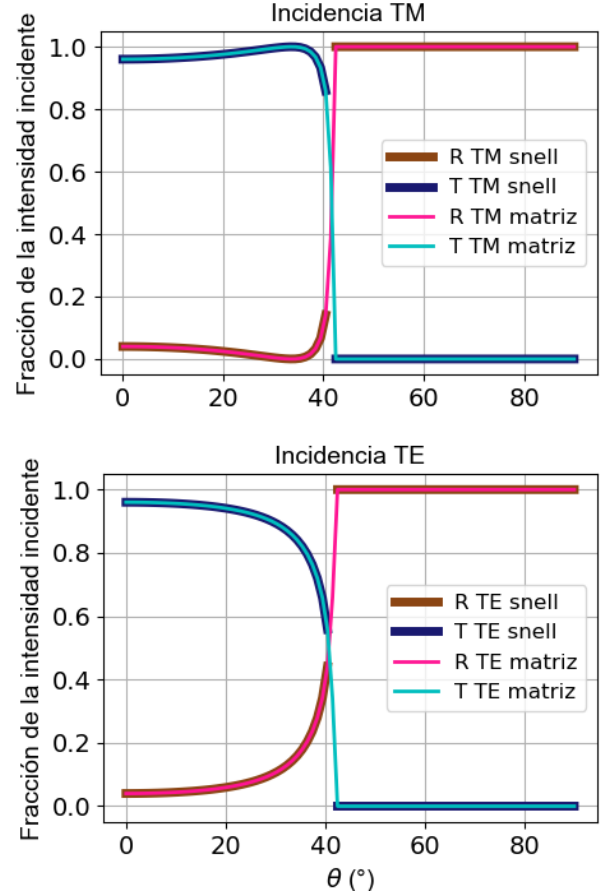


Figura 8: Reflectancia y transmitancia para una onda TM y TE que se transmite de vidrio a aire, en función del ángulo de incidencia a la interfaz.

$$M_{1,N} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}. \quad (21b)$$

Operando en el sistema matricial 21 se despejan los coeficientes N -ésimos y las amplitudes de la onda reflejada en función de los elementos de la matriz $M_{1,N}$:

$$a_N = \frac{-M_{33}}{M_{13}M_{31} - M_{11}M_{33}}, \quad (22a)$$

$$c_N = \frac{M_{31}}{M_{13}M_{31} - M_{11}M_{33}}, \quad (23)$$

$$b_1 = \frac{M_{31}M_{23} - M_{21}M_{33}}{M_{13}M_{31} - M_{11}M_{33}}, \quad (24)$$

$$d_1 = \frac{M_{43}M_{31} - M_{41}M_{33}}{M_{13}M_{31} - M_{11}M_{33}}. \quad (25)$$

Si pensamos en una onda incidente en modo TE en la primera capa de grafeno, la expresión 20a queda como en el sistema 26:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 1 \\ d_1 \end{pmatrix} = M_{1N} \begin{pmatrix} a_N \\ 0 \\ c_N \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Operando en el sistema matricial 26 se despejan los coeficientes N-ésimos y las amplitudes de la onda reflejada en función de los elementos de la matriz $M_{1,N}$:

$$a_N = \frac{-M_{13}}{M_{33}M_{11} - M_{13}M_{31}}, \quad (27a)$$

$$c_N = \frac{M_{11}}{M_{33}M_{11} - M_{31}M_{13}}, \quad (28)$$

$$b_1 = \frac{M_{11}M_{23} - M_{21}M_{13}}{M_{33}M_{11} - M_{13}M_{31}}, \quad (29)$$

$$d_1 = \frac{M_{43}M_{11} - M_{41}M_{13}}{M_{33}M_{11} - M_{31}M_{13}}. \quad (30)$$

El vector de Poynting está dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{k}}.$$

La irradiancia I es el promedio de energía por unidad de tiempo que cruza un área unidad normal a \mathbf{S} , esto es,

$$I = \langle S \rangle_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2.$$

En lo que ocupa en este trabajo (ver figura 3) se pueden definir las densidades de flujo incidente, reflejado y transmitido, I_i , I_r e I_t , respectivamente, por lo que las áreas transversales de los rayos incidentes, reflejados y transmitidos son $A \cos \theta_i$, $A \cos \theta_r$, y $A \cos \theta_t$, respectivamente, siendo A un área de referencia en la interfaz. De acuerdo con esto, la potencia incidente es $I_i A \cos \theta_i$. La reflectancia se define como el cociente entre la potencia (o flujo radiante) reflejada y la potencia incidente en la interfaz. Esto da como resultado la ecuación 31, donde se utiliza que $\mu = 1$.

$$R = \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i}. \quad (31)$$

Del mismo modo, se define la transmitancia como el cociente entre la potencia transmitida y la incidente en la interfaz,

$$T = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i}. \quad (32)$$

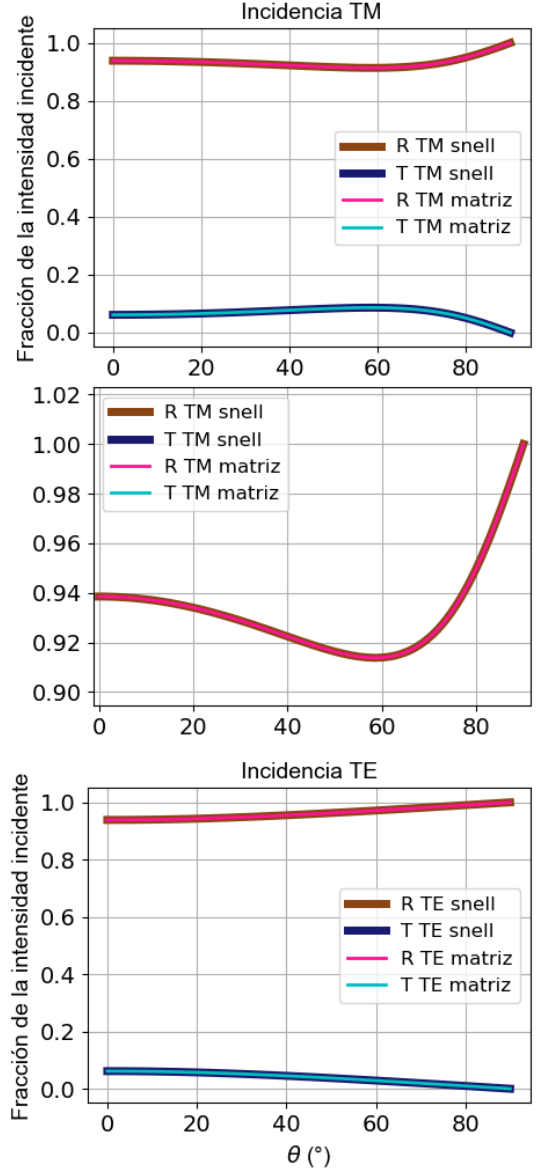


Figura 9: Reflectancia y transmitancia para una onda TM que se transmite de aire a plata, en función del ángulo de incidencia a la interfaz.

En este trabajo se diferencia la reflectancia y transmitancia del modo TM de las del modo TE, de forma que la reflectancia y transmitancia totales son $R = R_{TM} + R_{TE}$, y $T = T_{TM} + T_{TE}$, respectivamente. La distinción surge al utilizar los campos eléctricos del modo TM o TE de las ecuaciones 8 en la expresión de I . Para el caso de la onda incidente TM se utiliza $a_1 = 1$, y se obtiene

$$R_{TM} = |b_1|^2, \quad (33a)$$

$$R_{TE} = \epsilon_1 |d_1|^2, \quad (33b)$$

$$T_{TM} = \frac{n_1 \cos \theta_N}{n_N \cos \theta_1} |a_N|^2, \quad (33c)$$

$$T_{TE} = n_N n_1 \frac{\cos \theta_N}{\cos \theta_1} |c_N|^2. \quad (33d)$$

En el caso de la onda incidente TE, donde se utiliza que $c_1 = 1$ se tiene

$$R_{TM} = \frac{1}{\epsilon_1} |b_1|^2, \quad (34a)$$

$$R_{TE} = |d_1|^2, \quad (34b)$$

$$T_{TM} = \frac{1}{n_1 n_N} \frac{\cos \theta_N}{\cos \theta_1} |a_N|^2, \quad (34c)$$

$$T_{TE} = \frac{n_N \cos \theta_N}{n_1 \cos \theta_1} |c_N|^2. \quad (34d)$$

III. Resultados del método de matriz de transferencia.

A continuación, se pone a prueba el TMM para distintos ejemplos. Todos los códigos utilizados en esta sección se presentan en el repositorio de Github del trabajo [5].

III.1. Problema de Fresnel.

Se comparan las reflectancias R y transmitancias T para el caso del problema de Fresnel mas simple obtenidas de aplicar la Ley de Snell con las que da el método de matriz de transferencia (usando la matriz 18 con las conductividades iguales a 0). En las ecuaciones 35 se presentan los coeficientes de reflexión y transmisión, siendo R y T sus módulos al cuadrado. Las mismas se calculan en función del ángulo de incidencia, y se toma como ejemplo el caso en que la onda que se transmite de aire a vidrio, con índices de refracción $n_1 = 1$ y $n_2 = 1,5$, respectivamente. Se separan los casos en que la onda incidente es TM y TE, como se muestra en las figura 7. Luego se calculan R y T para el caso de la transmisión de una onda de vidrio a aire, obteniendo la figura 8.

$$r_{tm} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1}. \quad (35a)$$

$$t_{tm} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}. \quad (35b)$$

$$r_{te} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}. \quad (35c)$$

$$t_{te} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}. \quad (35d)$$

Se puede ver en el caso de aire a vidrio, que R_{TM} se anula en el ángulo de Brewster, y en el caso de vidrio a aire, que a partir del ángulo crítico θ_c , R y T se vuelven complejas de acuerdo a una onda evanescente.

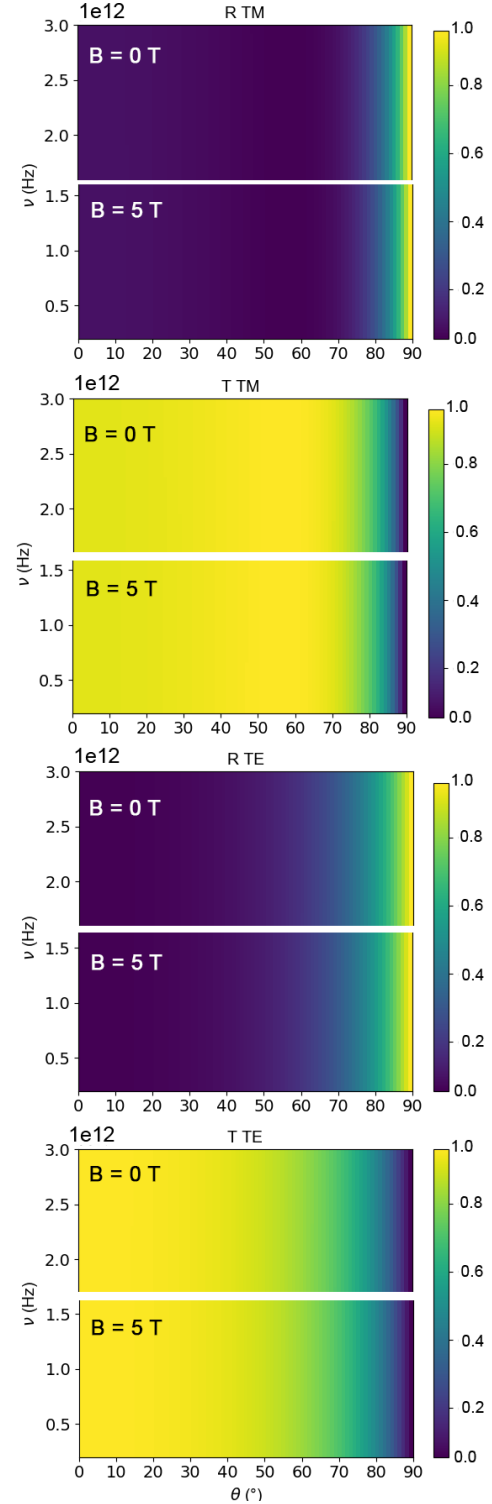


Figura 10: Reflectancia y transmitancia para una onda TM y TE que se transmite de aire a vidrio con grafeno en el medio, en función del ángulo de incidencia a la interfaz y la frecuencia. El valor de la reflectancia o transmitancia esta dado por la barra de colores, se corresponde con $\mu_c = 0,005$ eV, y se muestra para el caso $B = 0$ T y $B = 5$ T.

III.2. Interfaz dieléctrico-metal.

Otro caso de interés es el que contempla un índice de refracción complejo, como sucede en los metales. Además, en los metales el índice de refracción depende de la longitud de onda. Utilizando las ecuaciones 35, se compararon los resultados con los del método de matriz de transferencia. En la figuras 9, se presentan R y T para el caso de una onda que se transmite de aire a plata, con una longitud de onda $\lambda = 400 \text{ nm}$, lo que corresponde a un índice de refacción de $n_2 = 0,075 + 1,93i$.

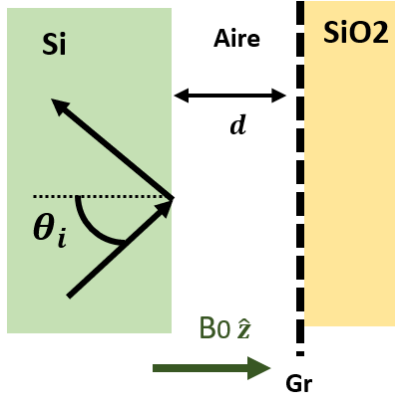


Figura 11: Esquema del sistema de capas utilizado para excitar plasmones superficiales del grafeno.

Se puede ver que hay una pequeña resonancia correspondiente a la excitación de plasmones superficiales en la interfaz dieléctrico-metal en un ángulo de incidencia que depende de varios factores [6]. R puede estudiarse en función de la frecuencia y se encuentra un pozo o depresión, cuyo mínimo está en la frecuencia de resonancia de los plasmones superficiales del sistema [7]. Este tema no nos concierne ahora, y como se explico en la introducción, en

la practica resulta muy difícil encontrar esta resonancia, puesto que es muy sensible a la longitud de onda, los metales tienen grandes pérdidas de intensidad, y además no se presenta en el caso de polarización TE.

III.3. Potencial químico pequeño.

Si se introduce una capa de grafeno al problema de Fresnel, R y T se verán afectadas por la conductividad del grafeno. Como se vio, esta conductividad depende de varios parámetros, como el potencial químico μ_c , y de un campo magnético externo, \mathbf{B} . μ_c es una medida de que tanta corriente se puede producir en un material; a menor μ_c , menor conductivo es el material, y lo mismo pasa con el grafeno [8]. Para mostrar esto utilizando TMM, se calcula R y T para un sistema de aire-grafeno-dieléctrico, en función de la frecuencia (en el rango que se estuvo trabajando en este trabajo) y en función del ángulo de incidencia. Se presentan los gráficos para el caso de aire-grafeno-agua con $\mu_c = 0,005 \text{ eV}$ en las figuras 10 (con $B = 0 \text{ T}$ y con $B = 5 \text{ T}$), para ser comparados con los perfiles de las figuras 7, 8. Se puede ver que para todo el rango de frecuencias estudiado y μ_c pequeño, los perfiles de conductividad en función de ángulo de incidencia se corresponden con el caso de Fresnel sin grafeno, independientemente de si se aplica un campo magnético al grafeno.

III.4. Si-Aire-Grafeno-SiO2

Basándose en el buen comportamiento del TMM para los ejemplos anteriores, se procede a estudiar con este método un sistema de capas dieléctricas y de grafeno, la cual permite excitar los SSPs del grafeno. La configuración necesariamente debe introducir una onda evanescente en la primer interfase, por lo que se toma una onda que se transmite de Silicio (Si) a aire, con $n_1 = \sqrt{12}$ y $n_2 = 1$, respectivamente y un ángulo de incidencia $\theta_i = 60^\circ$, que

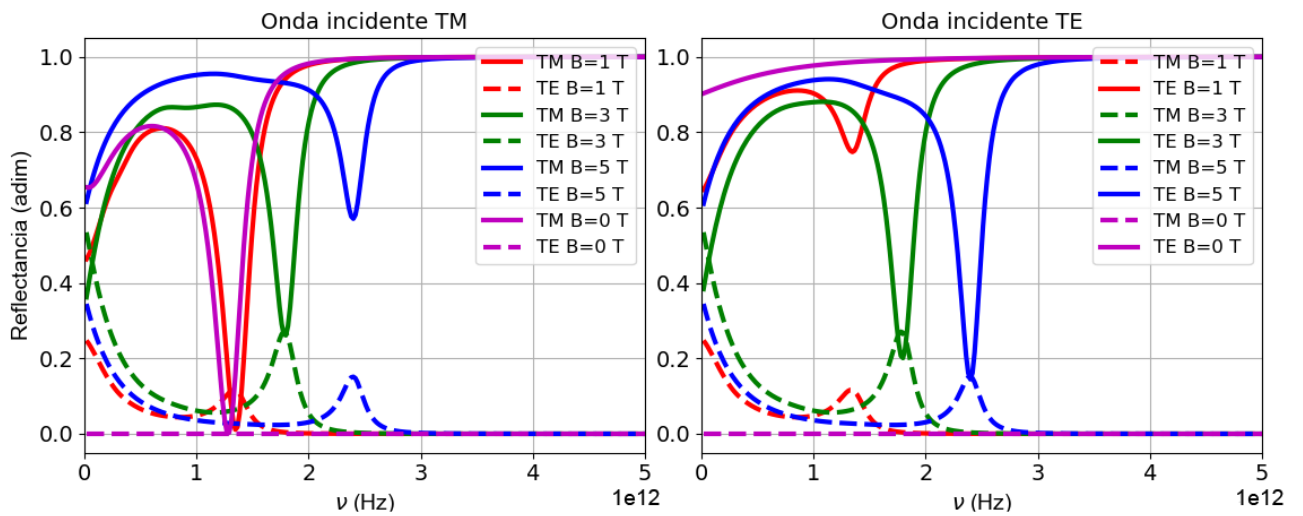


Figura 12: Reflectancia en modo TM y TE para la configuración de Si-aire-grafeno-SiO2 cuando la onda incidente es TM (izquierda) y cuando es TE (derecha), para distintos \mathbf{B} aplicados al grafeno.

es mayor θ_c . A una distancia d lo suficientemente cerca de la primer interfase se coloca una capa de grafeno y a continuación una extensión de SiO₂ (Óxido de Silicio), con $n_3 = 2$. En el caso presentado en este trabajo, se toma $d = 0,5 \mu\text{m}$. Un esquema de la configuración descrita se encuentra en la figura 11. Algunos de los resultados de R se presentan en la figura 12, con $B = 0 \text{ T}$, 1 T , 3 T y 5 T , mientras que T es nula.

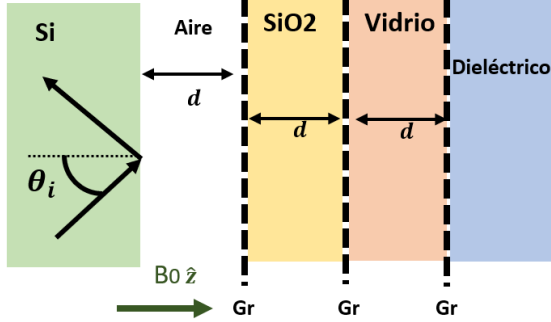


Figura 13: Esquema del sistema de multicapas utilizado para mostrar la utilidad del TMM.

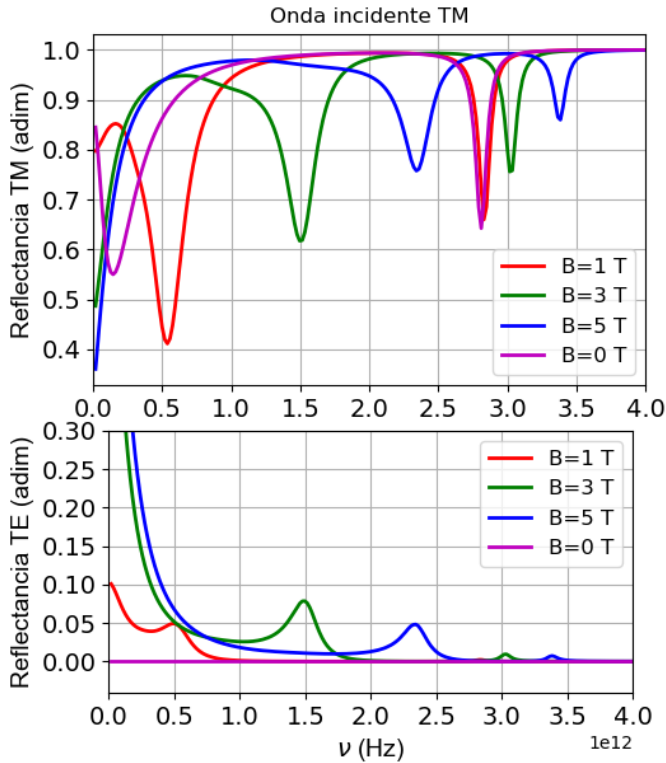


Figura 14: Reflectancia para una onda incidente TM en la configuración de Si-Aire-Grafeno-SiO₂-Grafeno-Vidrio-Grafeno-Dieléctrico, en función de su frecuencia y los distintos campos magnéticos externos aplicados al grafeno.

Cuando la onda incidente es TM, para cada campo magnético hay una depresión en R_{TM} , que se debe al acoplamiento de la onda evanescente a los modos superficiales

que se propagan en la interfase de SiO₂-grafeno. Vale aclarar que si se aumenta d , R vale la unidad para todas las frecuencias. Por lo tanto, el mínimo en R_{TM} resulta de la excitación de los SSPs de la estructura aire-grafeno-SiO₂. La frecuencia en que el pozo ocurre aumenta cuando aumenta B_0 . Por otro lado, cuando B_0 aumenta de 0 a 1 T, el mínimo valor de R_{TM} aumenta un poco, y para mayores incrementos aumenta aún más. Se puede ver que para $B_0 = 0$ no hay onda reflejada TE y $R_{TE} = 0$, y al incrementar B_0 de 1 a 5 T, R_{TE} incrementa desde 0 y forma un pico. La frecuencia en la cual R_{TE} es máxima está ubicada en la vecindad de aquella donde R_{TM} es mínima y aumenta con B_0 . Algo análogo se observa cuando la onda incidente es TE, como se muestra en la figura 11. Los resultados obtenidos están de acuerdo con lo que es reportado en las referencias. Los resultados de este trabajo confirman que la configuración 11 puede utilizarse para excitar plasmones superficiales en una sola lamina de grafeno magnetizada cubierta por diferentes capas de dieléctricos. Mas aún, la onda reflejada puede ser elíptica o circularmente polarizada como se menciona en la referencia [2]. En adición, para algunos B_0 hay frecuencias en las cuales la onda reflejada es casi enteramente polarizada TE, por lo tanto la estructura sirve como un conversor de polarización en el rango de los terahertz.

III.5. Si-Aire-Grafeno-SiO₂-Grafeno-Vidrio-Grafeno-Dieléctrico.

La utilidad del TMM se encuentra al momento de estudiar estructuras de multicapas conteniendo capas de grafeno. Para mostrar este punto proponemos la estructura de Si-Aire-Grafeno-SiO₂-Grafeno-Vidrio-Grafeno-Dieléctrico, que está descrita por el esquema de la figura 13. Observamos el resultado de R para una onda incidente TM en la figura 14, para distintos campos magnéticos externos aplicados a las tres capas, $B_0 = 0, 1, 3$ y 5 T . Los parámetros utilizados en esta simulación son los mismos que en la estructura de Si-Aire-SiO₂, tomando como índices de refracción del vidrio y el dieléctrico final como $n_4 = 1,46$ y $n_5 = 1,41$ respectivamente. Esta claro de la figura 14 que hay dos depresiones en R_{TM} para $B_0 = 0$, mientras que se tiene tres depresiones para $B_0 = 1, 3$ y 5 T . Estos pozos resultan del acoplamiento de la energía de la onda evanescente a los modos normales SP dados por la estructura. Como son 3 las depresiones, cuando se magnetiza la estructura de tres capas de grafeno se encuentran tres modos de plasmones. En la figura 14 también se ve que cada depresión se traslada a mas altas frecuencias cuando se aumenta B_0 . En complemento, se calcula R_{TE} para onda incidente TM, y R_{TE} y R_{TM} para onda incidente TE, lo que se muestra en la figura 15. Se puede ver que en el caso de la incidencia TM, no hay onda reflejada TE cuando $B_0 = 0$, y que al aumentar B_0 aparecen tres picos en las frecuencia de excitación de los modos SP. Los picos también se trasladan a frecuencias mas altas cuando aumenta B_0 , y se ubican en el mismo

lugar que las depresiones en R_{TM} . Por lo tanto, se espera que los modos SP que existen en una estructura de multicapas a base de grafeno pueden ser modificados al variar el campo magnético externo sin cambiar la estructura y tiene un carácter TE-TM híbrido.

IV. Conclusión.

Se derivó una matriz de transferencia para estudiar la óptica de capas de grafeno anisotrópicas en presencia de un campo magnético externo. Se consideró una configuración para excitar ondas plasmónicas superficiales en una capa de grafeno a la que se le aplica un campo magnetostático externo \mathbf{B} y que esta sumergida en la interfase entre dos dieléctricos. Usando el método de matriz de transferencia se obtuvo el espectro de reflectancia para ondas de distintas polarizaciones incidentes en la configuración, para distintas intensidades de \mathbf{B} . Dada la presencia de \mathbf{B} perpendicular a la capa de grafeno, hay ambas polarizaciones TM y TE en la reflectancia independientemente de la polarización de la onda incidente, y plasmones de polarización híbrida TE-TM pueden propagarse a lo largo del grafeno. Para incidencia TM hay un pozo en R_{TM} que se traslada a frecuencias mas altas al aumentar el campo magnético externo, mientras que hay un pico para la reflectancia TE. Como los resultados coinciden con los que se obtuvieron aplicando otras técnicas en otros artículos, se procede a estudiar una estructura de multicapas con tres capas de grafeno. Aparecen tres depresiones en R_{TM} cuando la onda incidente es TM, que se trasladan a frecuencias mas altas cuando aumenta la intensidad de \mathbf{B} . Estos pozos resultan de la excitación de modos plasmónicos superficiales en la estructura de multicapas. Los resultados confirman que la propuesta matriz de transferencia puede utilizarse en investigación de modos SP presentes en una estructura de multicapas basado en capas de grafeno anisotrópicas sujetas a campos magnéticos externos. Mas aun, la matriz de transferencia es una herramienta muy versátil para el estudio de propiedades ópticas de estructuras de multicapas magnetizadas.

V. Referencias

- [1] Ardakani, Ghasemi, Golshan (2017). A new transfer matrix for investigation of surface plasmon modes in multilayer structures containing anisotropic graphene layers.
- [2] LUIZ G. C. MELO (2015). Theory of magnetically controlled low-terahertz surface plasmon-polariton modes in graphene-dielectric structures
- [3] Jackson. Clasical Electrodynamics 2nd Edition, section 1.5
- [4] V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, and J. P. Carbotte, "Magneto-optical conductivity in graphene", J. Phys. Condens. Matter. 19, 026222 (2007).
- [5] <https://github.com/EugeniaNoel/Multicapas-de-Grafeno.git>

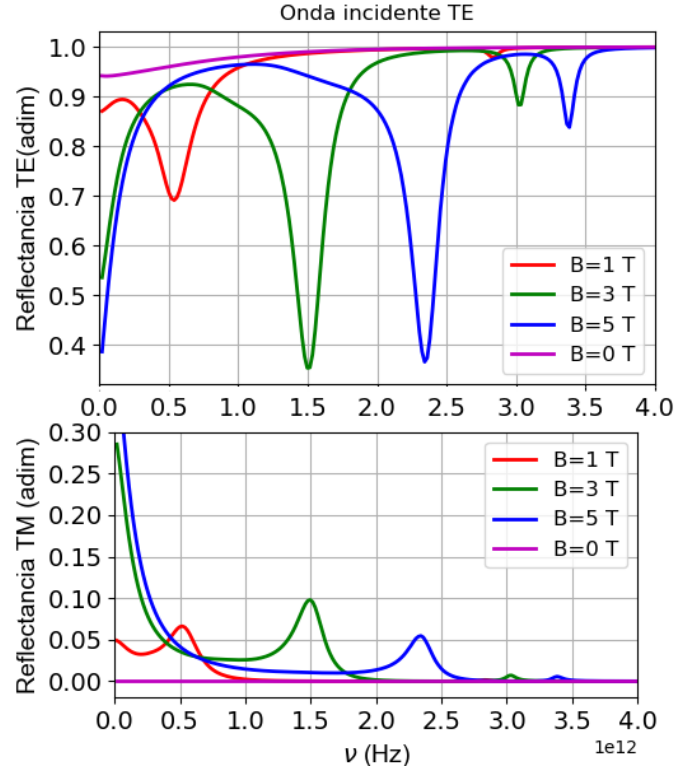


Figura 15: Reflectancia para una onda incidente TE en la configuración de Si-Aire-Grafeno-SiO₂-Grafeno-Vidrio-Grafeno-Dieléctrico, en función de su frecuencia y los distintos campos magnéticos externos aplicados al grafeno.

[6] Saiful Islam and Abbas Z. Kouzan. Parameter Sensitivity Analysis of Surface Plasmon Resonance Biosensor through Numerical Simulation,

[7] A. Farmani et al., Design of a tunable graphene plasmonic-on-white graphene switch atinfrared range, Superlattices and Microstructures (2017),

[8] Optical Thin Films and Coatings: From Materials to Applications. 2nd edition, chapter 7.

VI. Apéndice

A. Relación entre campos longitudinales y transversales.

Para simplificar notación, eliminaremos el subíndice ω , pues todos los campos que usamos son en el espacio de frecuencia. Se propone escribir los campos usando separación de variables como se hizo en las ecuaciones 1. Además es conveniente definir $\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$, de forma que las ecuaciones vectoriales puedan descomponerse en una parte paralela al eje de simetría y otra transversal, descomponiendo $\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}$.

Se parte aplicando el producto vectorial con el versor del eje de simetría, en este caso $\hat{\mathbf{y}} \times$, a la ecuación 6a :

$$\hat{\mathbf{y}} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \hat{\mathbf{y}} \times (-i\frac{\omega}{c}\epsilon \mathbf{E}.)$$

Usando la regla $a \times (b \times c) = b.(a.c) - c.(a.b)$ a la izquierda de la ecuación queda:

$$\nabla_t \mathbf{H}_z - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{H}_t = -i \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}_t .$$

Volviendo a aplicar $\hat{\mathbf{y}} \times$:

$$\hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{H}_y - \hat{\mathbf{y}} \times \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{H}_t = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E}_t . \quad (36)$$

Luego, se procede de forma análoga con la ecuación 6b, y se obtiene:

$$\hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{E}_y - \hat{\mathbf{y}} \times \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_t = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}_t . \quad (37)$$

De la ecuación 37 se despeja H_t y se introduce en la ecuación 36:

$$\hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{H}_y - \hat{\mathbf{y}} \times \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{ic}{\omega \mu} \right) \left[\hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{E}_y - \hat{\mathbf{y}} \times \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_t \right] = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E}_t ,$$

$$\hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{H}_y + \frac{ic}{\omega \mu} \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla_t \mathbf{E}_y - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{E}_t \right] = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E}_t ,$$

$$\hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{H}_y + \frac{ic}{\omega \mu} \nabla_t \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_y - \frac{ic}{\omega \mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{E}_t = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E}_t ,$$

$$\frac{i\omega \mu}{c} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{H}_y - \nabla_t \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{E}_t = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \mathbf{E}_t ,$$

$$\frac{i\omega \mu}{c} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{H}_y - \nabla_t \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_y = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \mathbf{E}_t - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{E}_t .$$

Como \mathbf{E}_t esta separado por variables, de la derivada segunda respecto de y sale $-\omega^2 k_y^2$, y se puede reescribir esta ultima ecuación como:

$$\frac{i\omega \mu}{c} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla_t \mathbf{H}_y - \nabla_t \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_y = -\gamma \mathbf{E}_t ,$$

con $\gamma = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - k_y^2$. De forma análoga se procede para encontrar \mathbf{H}_t en función de los campos longitudinales, despejando \mathbf{E}_t de la ecuación 36 y reemplazando en la ecuación 37. De esta forma se obtienen las ecuaciones 7 que se usan en este trabajo.

B. Condiciones de contorno.

Las ecuaciones 3 son ecuaciones diferenciales aplicadas en cada punto del espacio-tiempo. Mediante el teorema de la divergencia y el teorema de Stokes pueden ser representadas en forma integral. Sea C una curva cerrada en el espacio, S' una superficie abierta abarcando la curva, $d\mathbf{l}$ un elemento de línea en la curva, da un elemento de área en S' , y \mathbf{n}' un versor normal a da apuntando en la dirección dada por la regla de la mano derecha según el sentido de integración sobre la curva. Aplicando la Ley de Stokes sobre la segunda y tercera ecuación de Maxwell, 3b y 3c se obtiene las siguientes expresiones integrales:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \left[\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}' da , \quad (38)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}' da . \quad (39)$$

De las ecuaciones 38 y 39 se deduce la relación de las componentes tangenciales de los campos en ambos lados de una superficie entre diferentes medios, aun con la presencia de carga superficial o densidad de corriente en la interfase. Para ello se considera el arreglo geométrico de la figura 16. La curva infinitesimal C forma un rectángulo con sus lados mas largos uno a cada lado de la interfaz, y esta orientado de tal forma que la normal sobre la superficie que lo recubre es tangente a la interfaz.

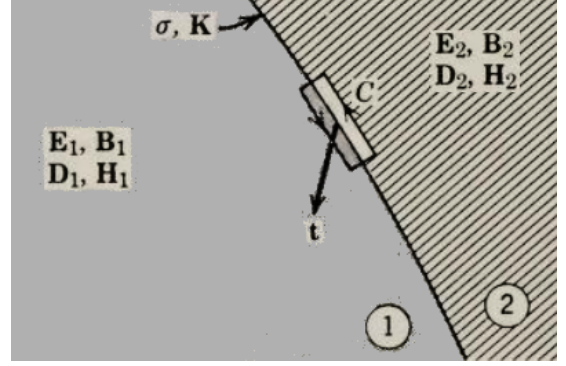


Figura 16: [2].

Si los lados mas cortos de la curva C de la figura 16 tienen un largo despreciable y los brazos largos son paralelos a la interfaz y de un largo Δl , entonces el lado izquierdo de 38 y 39 son, respectivamente:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta l ,$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Delta l .$$

El lado derecho de 39 desaparece pues $\partial \mathbf{B} / \partial t$ es finito en la superficie y el área dentro de la curva C tiende a cero cuando los lados cortos tienden a cero. El lado derecho de 38 no desaparece si hay una densidad de corriente ideal \mathbf{K} fluyendo exactamente sobre la interfase:

$$\int_{S'} \left[\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}' da = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} \Delta l .$$

El segundo termino de esta integral se desvanece por la misma razón que $\partial \mathbf{B} / \partial t$. Asumiendo que \mathbf{K} es paralela a la interfase en todo punto de la misma, las condiciones de contorno quedan como en las ecuaciones 9 presentadas en el trabajo.