IG 4 - Algorithmique avancée

**TD sur les flots/réductions**

---

# 1 Rappels

## Flots

Un **réseau** $R$ est un triplet $(G, s, t)$ où:

- $G = (V, A)$ est un graphe orienté
- chaque arc $a \in A$ a une capacité $c(a) > 0$
- $s$ (la source) et $t$ (le puit) sont deux sommets particuliers de $V$

Soit $R = (G, s, t)$ un réseau. Un **flot** $f$ dans le réseau $R$ est une fonction $f : A \mapsto \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes:

- **contrainte de capacité**: pour tout $a \in A$, $f(a) \leq c(a)$
- **conservation du flot**: pour tout $u$ sauf $s$ et $t$ on a $f^+(v) = f^-(v)$,
  avec $f^+(v) = \sum_{vw \in A} f(vw)$ et $f^-(v) = \sum_{wv \in A} f(wv)$

On définit $\delta^+(X) = \{uv \in A, u \in X, v \notin X\}$, et $\Delta(v) = f^+(v) - f^-(v)$ pour tout $v \in V$. Les notations sont étendues aux sous ensembles. La propriété importante : étant donné $X \subseteq V$ ($X$ peut contenir ou non $s$ et ou $t$), on a $\Delta(X) = f(\delta^+(X)) - f(\delta^-(X))$.

- **Une coupe** $S$ dans un réseau de $R = (G, s, t)$ est un sous ensemble de sommets tel que $s \in S$ et $t \notin S$.
- Rappel : $\delta^+(S)$ arcs sortants de $S$, $\delta^-(S)$ arcs entrants de $S$
- **La valeur d'une coupe** est $c(S) = c(\delta^+(S))$ (attention on ne compte pas les arcs entrants)

## Réduction en problèmes d'optimisation

Soit $\Pi_1$ et $\Pi_2$ deux problèmes de maximisation (avec $c_i$ leurs fonctions de coût). On dit que $\Pi_1$ se $S$-réduit à $\Pi_2$ (et on note $\Pi_1 \leq_S \Pi_2$) ssi il deux algorithmes poly $f$, $g$ tel que

- à partir d'une instance $I_1$ de $\Pi_1$, $f$ crée une instance $I_2$ de $\Pi_2$
- pour tout $t$, $\exists s_1$ solution de $I_1$ avec $c_1(s_1) \geq t \Leftrightarrow \exists s_2$ solution de $I_2$ avec $c_2(s_2) \geq t$
- pour toute solution $s_2$, $g$ calcule une solution $s_1$ tq $c_1(s_1) \geq c_2(s_2)$

## 2 Exercices sur les réductions (pour prouver la polynomialité)

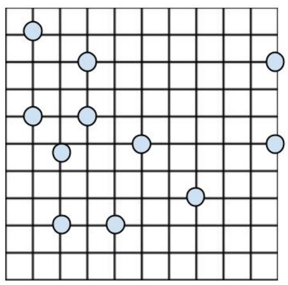
**Exercice 1.** *Pas cher pas cher les extensions*

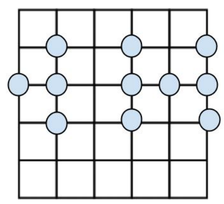
Dans cet exercice on s'intéresse à $\widetilde{FLOT}$, une extension classique du problème du flot que l'on peut toujours résoudre en se ramenant à un problème classique de flot. Un réseau avec capacité sur les sommets est un triplet $R = (G, s, t)$ avec $G = (V, A)$ un graphe orienté, $c_A$ une fonction de $A$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ (capacité des arcs), $c_V$ une fonction de $V$ dans $\mathbb{R}^+$ (capacité des sommets) et $s, t$ deux sommets particuliers de $V$. On étend la définition de flot à ces réseau en demandant en plus que $f^-(v) \leq c_V(v)$ pour tout $v \in V \setminus \{s, t\}$.
On définit $\widetilde{FLOT}$ comme le problème qui, étant donné un réseau avec capacité sur les sommets, consiste à trouver un flot de valeur maximale.

**1.** Montrer que $\widetilde{FLOT} \leq_S FLOT$ (où FLOT est le problème classique du flot maximum).

**Exercice 2.** *Problème de l'évacuation*
Soit $G$ une grille de $n \times n$ points et $E$ un sous-ensemble de $m$ points parmi les $n^2$. Chaque point représente donc une personne. Le problème de l'évacuation consiste à maximiser le nombre de points pouvant être reliés au bord de la grille par des chemins sans sommets communs. Si l'on veut donc évactuer $t$ personnes, il faut donc $t$ chemins qui ne s'intersectent pas.

**1.** Donnez la valeur optimale pour les instances ci-dessous





**2.** Résoudre le problème $\Pi$ de l'évacuation en montrant que $\Pi \leq_S \widetilde{FLOT}$, avec $\widetilde{FLOT}$ une des extensions du problème du flot vue précédement.

**Exercice 3.** *Reductions du TP*
Etudiez les réductions SEGMENTATIONIMAGE $\leq_S$ SEGMENTATIONIMAGEGRAPHE et SEGMENTATION-IMAGEGRAPHE $\leq_S$ MINCUT utilisées dans le TP.