Algorithmique avancée

Marin Bougeret

September 18, 2024

POLYTECH MONTPELLIER

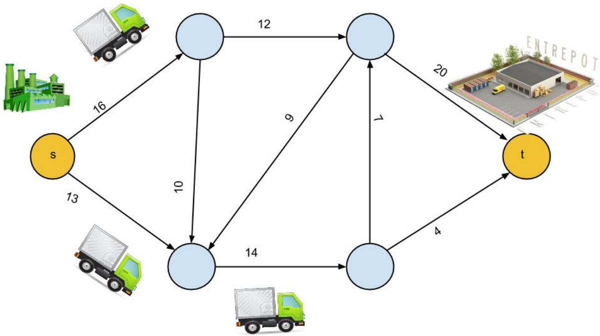
Réseau

Définition

Un **réseau** R est un triplet (G, s, t) où:

- $G = (V, A)$ est un graphe orienté
- chaque arc $a \in A$ a une capacité $c(a) > 0$
- s (la source) et t (le puit) sont deux sommets particuliers de V

Réseau



$c(a)$: limite de tonnes par jour sur autoroute dans deux villes.

Applications

La notion de réseau modélise bien de nombreaux "réseaux" du quotidien:

- réseaux de communication
- chaînes d'assemblage
- réseaux électriques
- liquides, réseaux transports

.. mais (ce qui me touche plus personellement ;) le problème du flot permet de résoudre en temps polynomial beaucoup d'autres problèmes

Flot dans un réseau

Définition

Soit $R = (G, s, t)$ un réseau. Un **flot** f dans le réseau R est une fonction $f : A \mapsto \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes:

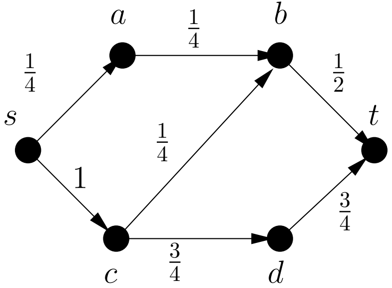
- **contrainte de capacité**: pour tout $a \in A$, $f(a) \leq c(a)$
- **conservation du flot**: pour tout u sauf s et t on a

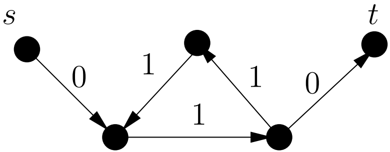
$$f^+(v) = f^-(v),$$

avec $f^+(v) = \sum_{vw \in A} f(vw)$ et $f^-(v) = \sum_{wv \in A} f(wv)$

Flot dans un réseau

Les capacites sont de 1





Définitions

Etant donné flot f, on définit :

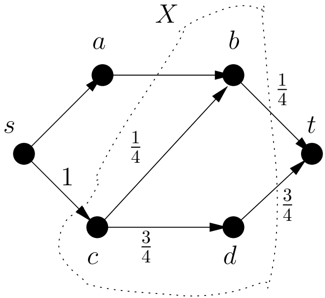
- $f^+(v)$ and $f^-(v)$ (slide précedent)
- $\Delta(v) = f^+(v) - f^-(v)$ pour tout $v \in V$

Une notation de graphes : pour $X \subseteq V$, on note

- $\delta^+(X) = \{uv \in A, \text{avec } u \in X \text{ et } v \notin X\}$
- $\delta^-(X) = \{uv \in A, \text{avec } u \notin X \text{ et } v \in X\}$

Enfin, TOUTES les notations sont étendues aux sous ensembles : par ex $f^+(X) = \sum_{v \in X} f^+(v)$, pareil pour $\Delta(X)$, et $c(A')$ (avec $A' \subseteq A$)

Les capacites sont de 1



$f^+(X) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$
$\delta^+(X) = \{bt, dt\}$
$f(\delta^+(X)) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

Observations importantes

Remarques

- $\Delta(v) = 0$ pour tout v différent de s et t
- On définit la **valeur du flot** par $|f| = \Delta(s)$

Les 2 flots de l'exemple précédent sont respectivement de valeur $5/4$ et 0.

Problème central

Le problème du flot maximum consiste, étant donné un réseau, à trouver un flot de valeur maximale.

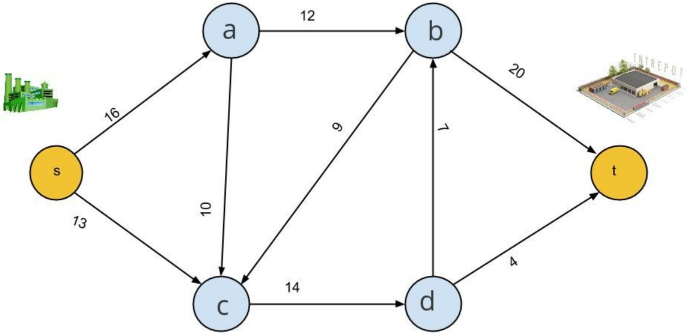
On notera $MaxF(R)$ la valeur du flot maximum d'un réseau R.

Coupe : définition

Définitions

- **Une coupe** S dans un réseau de $R = (G, s, t)$ est un sous ensemble de sommets tel que $s \in S$ et $t \notin S$.
- Rappel : $\delta^+(S)$ arcs sortants de S, $\delta^-(S)$ arcs entrants de S
- **La valeur d'une coupe** est $c(S) = c(\delta^+(S))$ (attention on ne compte pas les arcs entrants)

Coupe : définition



- $c(\{s, a, c, d\}) = 12 + 7 + 4$
- $c(\{s, a, d\}) = 12 + 10 + 13 + 7 + 4$

Coupe : définition

Problème central

Le problème de la coupe minimum consiste, étant donné un réseau, à trouver une coupe de valeur minimale.

On notera $MinC(R)$ la valeur de la coupe minimum d'un réseau R.

Relations entre coupes et flots

Théorème

Pour tout réseau R, $\mathbf{MaxF(R)} = \mathbf{MinC(R)}$, et les deux problèmes Max-FLOT et Min-CUT sont polynomiaux.

Conclusion

Extentions possibles

- de nombreuses variantes restent poly:
  - plusieurs sources / puits
  - bornes inférieurs sur les arcs ($l(a) \leq f(a) \leq c(a)$)
  - avec bornes inf/sup sur les sommets
  - flot max de coût min (avec un prix à payer par unité de flot par arc)
  - ..
- max flot = min cut implique bcp d'autres théorèmes, et d'algos polys pour bcp de problèmes
  - theorème menger (et pb de trouver max s-t chemins arc (ou vertex) disjoints)
  - theorème de hall (cons nec et suff pour existence perfect matching dans bip) (et algo matching dans bipartis)
  - theorème de König-Egervary (VC = MM dans bip)
  - ..