

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/282186870>

Cinemática e Dinâmica de Engrenagens: 2. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos

Chapter · January 2014

CITATIONS

4

READS

2,531

1 author:



Paulo Flores

University of Minho

472 PUBLICATIONS 5,600 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)


Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Patelofemoral [View project](#)



Development funtional orthopaedic footwear [View project](#)



Cinemática e Dinâmica de Engrenagens

2. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos

**Paulo Flores
José Gomes**



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Guimarães 2014

ÍNDICE

2. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos	1
2.1. Introdução.....	1
2.2. Relações Geométricas	3
2.3. Continuidade do Engrenamento	10
2.4. Relação de Condução	15
2.5. Escorregamento	20
2.6. Rendimento.....	31
2.7. Interferências	36
2.8. Revisão de Conhecimentos	42
2.9. Referências Bibliográficas	44

2. ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS

2.1. INTRODUÇÃO

No presente texto são apresentados conceitos e fundamentos relativos à caracterização e ao desempenho de engrenagens cilíndricas de dentes retos, os quais servem também de base no estudo de engrenagens de dentes inclinados, engrenagens cónicas e engrenagens do tipo parafuso sem-fim. Na realidade, esta é a abordagem mais frequentemente adotada nos principais livros de texto sobre a temática das engrenagens (Juvinall e Marshek, 2006; Branco *et al.*, 2009; Budynas e Nisbett, 2011).

A figura 2.1 mostra duas engrenagens¹ cilíndricas de dentes retos, a qual serve fundamentalmente para evidenciar a forma dos dentes, bem como o modo de engrenamento entre cada par de rodas. As engrenagens cilíndricas de dentes retos podem ser exteriores ou interiores, como ilustra também a figura 2.1 (Wilson e Sadler, 1993). É indubitável que as engrenagens cilíndricas de dentado reto são as mais frequentemente utilizadas em máquinas e mecanismos quando se pretende transmitir movimento entre eixos paralelos. Algumas das razões que concorrem para a sua popularidade prendem-se com a simplicidade e facilidade associadas às atividades de projeto, fabrico, montagem e manutenção (Flores e Gomes, 2014). Este tipo de engrenagem apresenta rendimentos elevados (até 99%), possibilita a obtenção de relações de transmissão elevadas (8:1) e transmite potências elevadas (Niemann, 1971).



*Figura 2.1 – (a) Engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos;
(b) Engrenagem cilíndrica interior de dentes retos.*

A expressão transmissão de potência em engrenagens está associada à lei da conservação de energia dos sistemas mecânicos (Greenwood, 1965). Em teoria, toda a potência é transmitida da roda motora para a roda movida, uma vez que não há perdas de energia. Este facto é verdadeiro se se admitir que o contacto entre os dentes de uma e outra roda acontece com movimento de rolamento puro (Flores e Claro, 2007). Na prática, o que se pretende é que as engrenagens transmitam um determinado momento (ou binário), o qual está relacionado com a capacidade de realizar trabalho. Na realidade, a maioria das engrenagens funciona como sistema redutor, uma vez que os sistemas de acionamento geram grandes velocidades de rotação, tal como acontece, por exemplo, nos motores de combustão interna (Norton, 2013).

¹ Deve relembrar-se que uma engrenagem é um sistema de transmissão de movimento constituído por duas rodas dentadas (Henriot, 1979).

Um dos principais parâmetros característicos do desempenho das engrenagens é o ângulo de pressão² (Flores, 2009). Este parâmetro é normalizado e assume, em geral, o valor de 20°. Quando assim acontece numa engrenagem, o dentado é denominado de dentado normalizado³ (Branco *et al.*, 2009). Doravante, quando se utilizar a expressão dentado normalizado está automaticamente a referir-se a um dentado em que o ângulo de pressão é igual a 20°. Nos Estados Unidos da América é frequente considerar-se um valor de 25° para o ângulo de pressão. No passado o valor de 14,5° era bastante utilizado, mas tem vindo a cair em desuso. A figura 2.2 mostra o efeito do valor do ângulo de pressão no perfil dos dentes (Juvinall e Marshek, 2006).

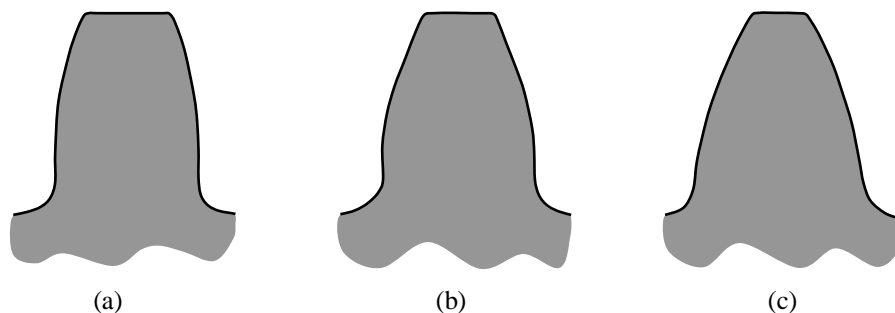


Figura 2.2 – Efeito do ângulo de pressão no perfil do dente: (a) 14,5°; (b) 20°; (c) 25°.

Um outro aspeto fundamental nas engrenagens prende-se com a qualidade dos dentes (Cunha, 2008). Com efeito, definem-se as seguintes qualidades em função da aplicação:

- 01 a 04, engrenagens de precisão para aplicação em laboratórios,
- 05, engrenagens para máquinas operadoras e instrumentos de medida,
- 06 e 07, engrenagens para a indústria automóvel,
- 08 e 09, engrenagens para utilização corrente em mecânica,
- 10 a 12, engrenagens para alfaia agrícolas.

A velocidade periférica condiciona também a escolha da qualidade dos dentes, tal como se apresenta na tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Qualidade dos dentes em engrenagens em função da velocidade periférica.

Velocidade periférica (m/s)	Qualidade dos dentes
Até 2	11 a 12
2 a 3	10 a 11
3 a 4	9 a 10
4 a 5	8 a 10
5 a 10	7 a 9
10 a 15	6 a 7
Mais de 15	6

² Ângulo de pressão é o ângulo formado pela linha de ação ou de engrenamento com a direção tangente às circunferências primitivas no ponto primitivo (Henriot, 1979).

³ Ao dentado normalizado está sempre associado um ângulo de pressão igual a 20°. Dentado normal, por seu lado, diz respeito a um dentado que não foi corrigido (Branco *et al.*, 2009).

2.2. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesta secção são apresentadas as principais relações geométricas e proporções dos dentes para o caso de engrenagens cilíndricas de dentado reto, algumas das quais estão representadas na figura 2.3 (Flores e Gomes, 2014).

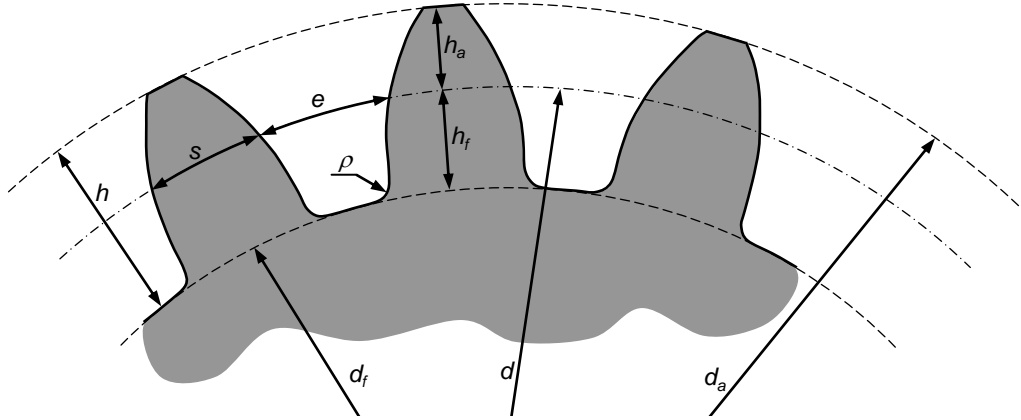


Figura 2.3 – Principais elementos geométricos e proporções dos dentes de uma roda dentada cilíndrica exterior de dentado reto normal.

É sabido que o módulo e o número de dentes definem completamente uma roda dentada normal (Shigley e Mischke, 1989). O produto destas duas quantidades resulta no diâmetro primitivo da roda, ou seja,

$$d = mz \quad (2.1)$$

em que m representa o módulo e z é o número de dentes.

A saliência e a reentrância de um dente relacionam-se com o módulo da seguinte forma (Henriot, 1979)

$$h_a = m \quad (2.2)$$

$$h_f = 1,25m \quad (2.3)$$

Logo, a altura total do dente é dada pela soma da saliência com a reentrância, isto é,

$$h = h_a + h_f = 2,25m \quad (2.4)$$

Por seu lado, o diâmetro de coroa da roda é calculado do seguinte modo

$$d_a = d + 2h_a = d + 2m \quad (2.5)$$

Atendendo agora à definição de módulo, utilizando a equação (2.1), então o diâmetro de coroa pode também ser calculado recorrendo à seguinte expressão

$$d_a = d + 2m = mz + 2m = m(z + 2) \quad (2.6)$$

De modo análogo, o diâmetro de raiz da roda é definido como

$$d_f = d - 2h_f \quad (2.7)$$

Da substituição da equação (2.3) na equação (2.7) resulta que

$$d_f = d - 2,5m \quad (2.8)$$

Considerando agora a equação (2.1), então a equação (2.8) pode ser reescrita da seguinte forma

$$d_f = mz - 2,5m = m(z - 2,5) \quad (2.9)$$

Com efeito, os diâmetros de coroa e de raiz de uma roda dentada de dente reto normal podem ser relacionados entre si do seguinte modo

$$d_a = d_f + 2h \quad (2.10)$$

Se se considerar a inexistência de qualquer folga entre os dentes, então o passo pode ser medido pela soma da espessura do dente com o intervalo do dente, ou seja,

$$p = s + e \quad (2.11)$$

donde, atendendo à definição de passo, a espessura e o intervalo do dente podem ser calculados do seguinte modo

$$s = e = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2} \quad (2.12)$$

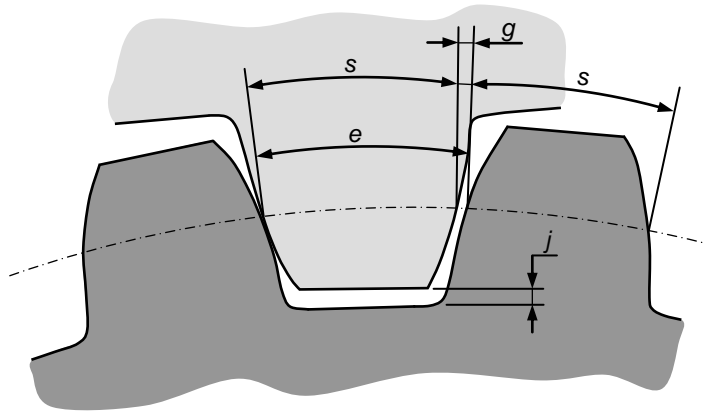


Figura 2.4 – Representação da folga entre dentes e da folga da raiz.

A figura 2.4 mostra as folgas que existem, na prática, nas engrenagens cilíndricas. A folga entre os dentes pode estar associada ao afastamento (propositado ou não) dos centros de rotação das rodas ou à diminuição da espessura do dente em relação aos valores normalizados. Este tipo de folga pode ser não só necessário, como também desejável, já que facilita a lubrificação e possibilita a dilatação dos dentes devido a efeitos térmicos (Drago, 1988). Caso assim não fosse, as engrenagens tenderiam a bloquear ou, pelo menos, a funcionar em condições pouco aceitáveis. As figuras 2.4 e 2.5 mostram, respetivamente, a existência da folga entre os dentes devido à diminuição da espessura dos dentes e ao aumento do entre-eixo. Deve referir-se que a folga entre os dentes é medida na direção da linha de ação.

Na prática, a folga entre os dentes depende do grau de precisão com que os dentes das rodas são produzidos. Assim, diferentes cenários podem ser distinguidos, nomeadamente (Budynas e Nisbett, 2011):

$$g \approx 0 \quad (\text{engrenagens de muito elevada precisão}) \quad (2.13)$$

$$0 < g \leq \frac{1}{40} p, \quad s = \frac{39}{80} p \quad (\text{engrenagens de precisão}) \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{40}p < g \leq \frac{1}{20}p, \quad \frac{39}{80}p < s \leq \frac{19}{40}p \quad (\text{engrenagens correntes}) \quad (2.15)$$

$$g = \frac{1}{20}p, \quad s = \frac{19}{40}p \quad (\text{engrenagens obtidas por fundição}) \quad (2.16)$$

Com efeito, a folga no entredente é expressa por (Henriot, 1979)

$$g = p - 2s \quad (2.17)$$

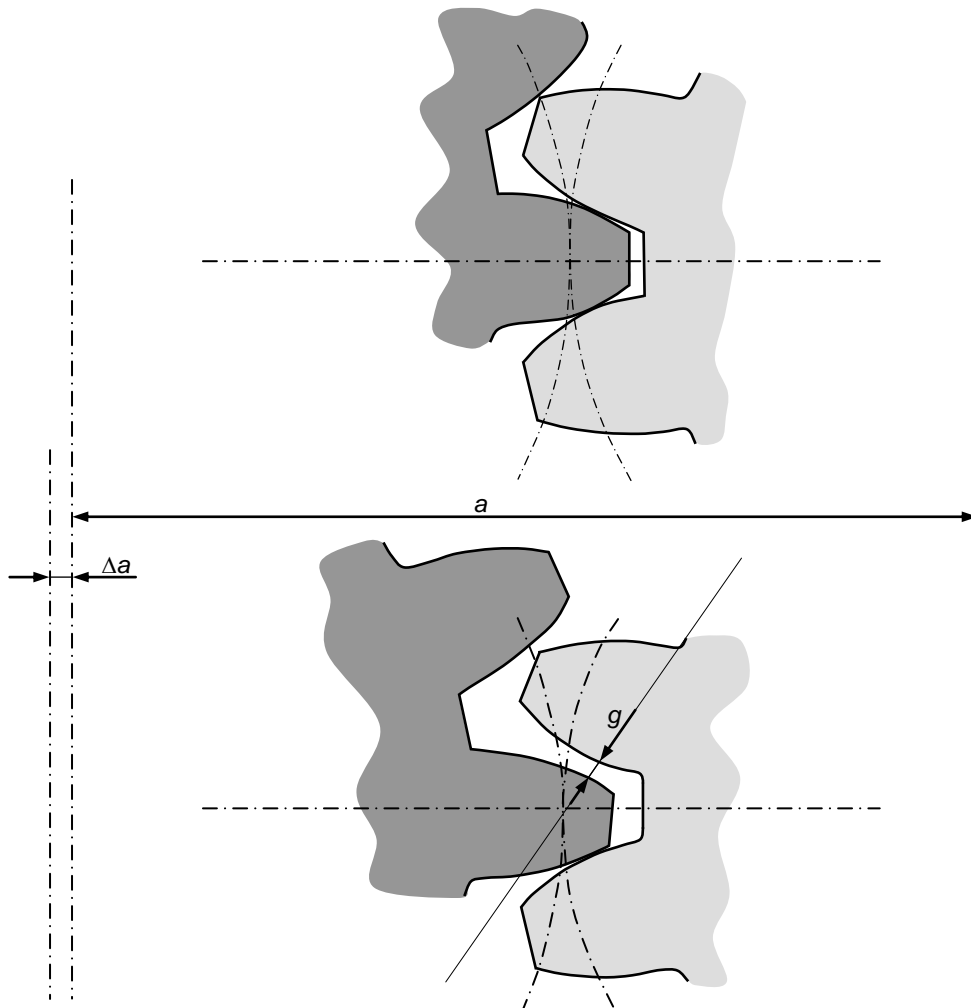


Figura 2.5 – Representação da folga existente entre dois dentes originada pelo aumento de entre-eixo.

A folga na raiz é necessária para evitar que a superfície de coroa de uma roda e a superfície de raiz da roda que com ela engrena entrem em contacto. Para o efeito, as recomendações para a folga na raiz sugerem a seguinte relação (Henriot, 1979)

$$j = h_f - h_a = 1,25m - m = 0,25m \quad (2.18)$$

No que concerne ao raio de concordância da raiz dos dentes não existem recomendações relevantes. Todavia, é boa prática que aquele raio seja proporcional ao módulo da seguinte forma (Jvinall e Marshek, 2006)

$$\rho = \frac{1}{3}m \quad (2.19)$$

É evidente que a largura dos dentes é uma das principais variáveis de projeto de engrenagens, que está diretamente relacionada com a própria resistência dos dentes. Apesar de não existirem indicações das normas internacionais, a largura dos dentes deverá estar compreendida no seguinte intervalo (Juvinall e Marshek, 2006)

$$9m < b < 14m \quad (2.20)$$

Considerando agora uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normal, representada na figura 2.6 pelas circunferências primitivas, então a distância entre os eixos das rodas pode ser calculada como

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (2.21)$$

em que os índices 1 e 2 se referem, respectivamente, ao pinhão (ou carreto) e à roda (ou coroa). Utilizando agora a expressão (2.1), a equação (2.21) pode ser reescrita do seguinte modo⁴

$$a = \frac{mz_1 + mz_2}{2} = m \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (2.22)$$

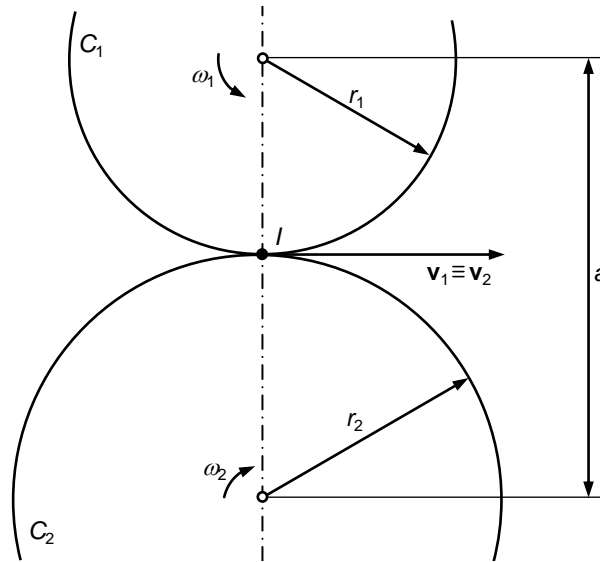


Figura 2.6 – Engrenagem cilíndrica exterior representada pelas circunferências primitivas.

Ainda na figura 2.6 está representada a velocidade do ponto primitivo, o qual pertence quer ao pinhão, quer à roda. Atendendo a que este ponto é um centro instantâneo de rotação, então pode escrever-se a seguinte igualdade

$$v_1 = v_2 \Leftrightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad (2.23)$$

em que ω_1 e ω_2 são as velocidades angulares do pinhão e da roda, respectivamente. Assim, atendendo à definição de relação de transmissão, pode escrever-se que

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad (2.24)$$

⁴ Deve lembrar-se que o engrenamento entre duas rodas dentadas só é possível se estas tiverem o mesmo módulo (Flores e Gomes, 2014).

Esta equação pode assumir a seguinte forma, utilizando para tal a equação (2.1)

$$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{mz_2}{mz_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (2.25)$$

A equação (2.25) materializa a relação de transmissão de uma engrenagem, também denominada de vantagem mecânica⁵ (ou ganho mecânico), uma vez que pode traduzir a ideia de multiplicação de força (Antunes, 2012).

À guisa de conclusão genérica, deve referir-se que todas as dimensões das rodas e proporções dos dentes podem ser expressas em função, única e exclusivamente, do módulo e do número de dentes. A tabela 2.2 resume os principais parâmetros anteriormente apresentados.

Tabela 2.2 – Principais relações geométricas e proporções dos dentes para engrenagens cilíndricas exteriores de dentado reto normal.

Parâmetro	Expressão
Diâmetro primitivo	$d = mz$
Saliência	$h_a = m$
Reentrância	$h_f = 1,25m$
Altura do dente	$h = 2,25m$
Diâmetro de coroa	$d_a = m(z + 2)$
Diâmetro de raiz	$d_f = m(z - 2,5)$
Entre-eixo	$a = m \frac{z_1 + z_2}{2}$
Relação de transmissão	$i = \frac{z_2}{z_1}$

Exercício 2.1

Enunciado: Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, calcule os seguintes parâmetros geométricos para o pinhão: (i) saliência, (ii) reentrância, (iii) altura do dente, (iv) diâmetro primitivo, (v) diâmetro de coroa e (vi) diâmetro de raiz. Represente graficamente os parâmetros anteriormente calculados (Wilson e Sadler, 1993).

Padrão de resposta esperado:

$$h_a = m = 3 \text{ mm}$$

$$h_f = 1,25m = 3,75 \text{ mm}$$

$$h = 2,25m = 6,75 \text{ mm}$$

$$d = mz_1 = 57 \text{ mm}$$

$$d_a = m(z_1 + 2) = 63 \text{ mm}$$

$$d_f = m(z_1 - 2,5) = 49,5 \text{ mm}$$

A figura 2.7 diz respeito à representação gráfica dos parâmetros geométricos previamente determinados.

⁵ Vantagem mecânica pode ser definida como o quociente entre força/ação desenvolvida num sistema mecânico e a força/ação que é aplicada no mesmo sistema. Nas engrenagens a vantagem mecânica está diretamente relacionada com a razão entre os binários de saída e de entrada (Beer e Johnston, 1991).

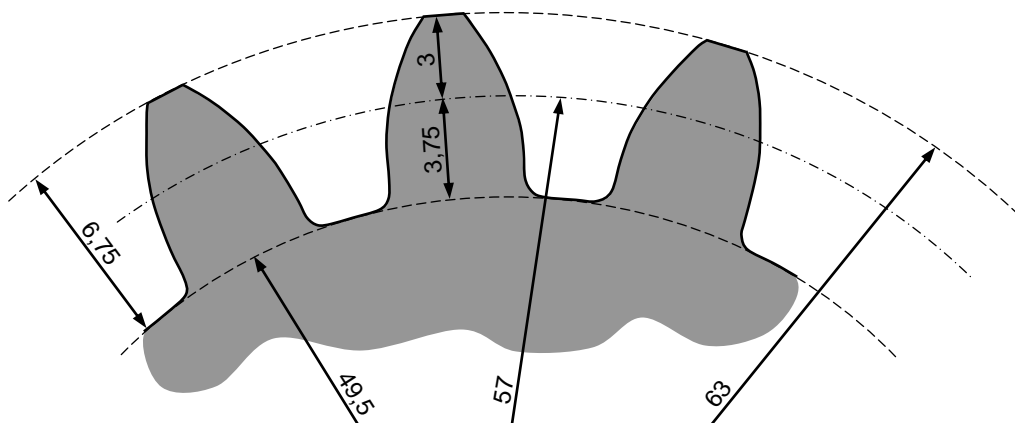


Figura 2.7 – Representação gráfica dos parâmetros geométricos calculados no âmbito do exercício de aplicação 2.1.

Na figura 2.8 encontra-se representada uma engrenagem paralela interior de dentes retos, em que tanto o pinhão como a roda têm o eixo de rotação do mesmo lado relativamente à localização do ponto primitivo. Donde se pode inferir que no caso da roda, a posição das circunferências de coroa e de raiz estão invertidas quando comparadas com uma engrenagem cilíndrica exterior. Assim, a circunferência de coroa está situada interiormente em relação à circunferência primitiva. O mesmo acontece com a circunferência de base (Hamrock *et al.*, 2005). Tal como sucede nas engrenagens cilíndricas exteriores, nos engrenamentos interiores a alteração do entre-eixo não tem consequências nos diâmetros de base do pinhão e da roda. Na verdade, as circunferências de base são o elemento fulcral na geração dos perfis dos dentes em evolvente (Henriot, 1979). Com efeito, por exemplo, o aumento do entre-eixo origina um aumento do ângulo de pressão e uma diminuição da extensão da linha de engrenamento. Acresce ainda o facto de que os perfis dos dentes assim engrenados continuarem a ser conjugados⁶ (Juvinal e Marshek, 2006).

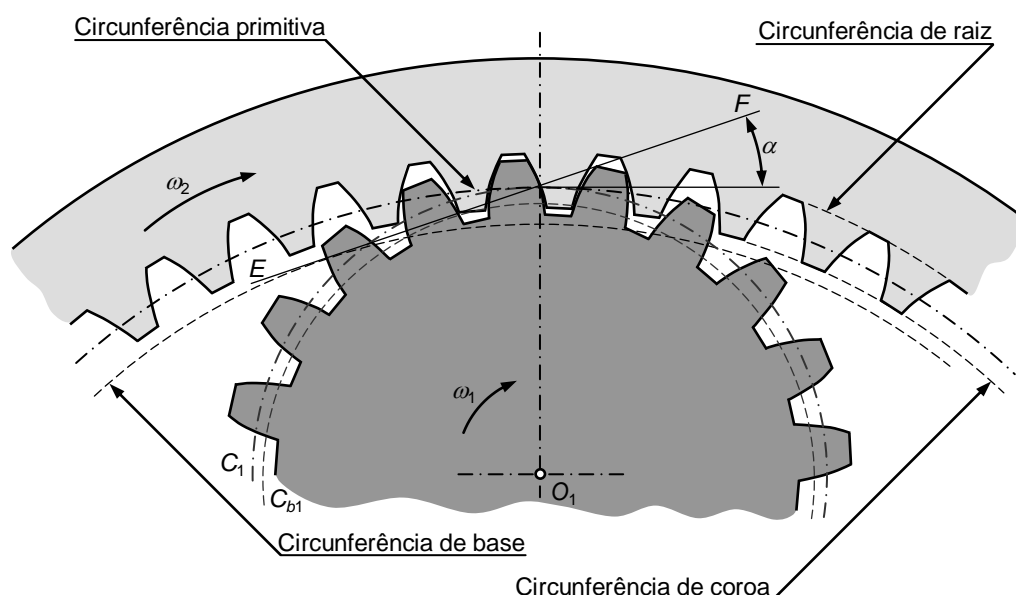


Figura 2.8 – Engrenagem cilíndrica interior de dentes retos.

⁶ Os perfis dos dentes denominam-se conjugados quando existe tangência entre as superfícies de dois dentes de duas rodas engrenadas (Spotts e Shoup, 1998).

A tabela 2.3 contém as principais relações geométricas e proporções dos dentes para uma engrenagem cilíndrica interior de dentado reto normal. Deve notar-se que todos os parâmetros aqui apresentados são expressos apenas em função do módulo da engrenagem e do número de dentes das rodas.

Tabela 2.3 – Principais relações geométricas e proporções dos dentes para engrenagens cilíndricas interiores de dentado reto normal.

Parâmetro	Expressão
Diâmetro primitivo	$d = mz$
Saliência	$h_a = m$
Reentrância	$h_f = 1,25m$
Altura do dente	$h = 2,25m$
Diâmetro de coroa do pinhão	$d_{a1} = m(z_1 + 2)$
Diâmetro de coroa da roda	$d_{a2} = m(z_2 - 2)$
Diâmetro de raiz do pinhão	$d_{f1} = m(z_1 - 2,5)$
Diâmetro de raiz da roda	$d_{f2} = m(z_2 + 2,5)$
Entre-eixo	$a = m \frac{z_2 - z_1}{2}$
Relação de transmissão	$i = \frac{z_2}{z_1}$

2.3. CONTINUIDADE DO ENGRENAMENTO

A continuidade do engrenamento diz respeito à quantidade⁷ de pares de dentes que está engrenada em simultâneo durante funcionamento de uma engrenagem. Assim, para que o engrenamento de duas rodas aconteça em boas condições, do ponto de vista da continuidade do engrenamento, é necessário que pelo menos um par de dentes esteja engrenado durante a transmissão do movimento (Spotts e Shoup, 1998; Budynas e Nisbett, 2011). Por outras palavras, pode dizer-se que existe continuidade do engrenamento quando um par de dentes termina o seu engrenamento só após o par de dentes seguinte ter já iniciado o contacto. A situação limite, em que há apenas e só um par de dentes em contacto, está representada na figura 2.9 (Branco *et al.*, 2009). Este assunto será estudado mais detalhadamente na secção subsequente.

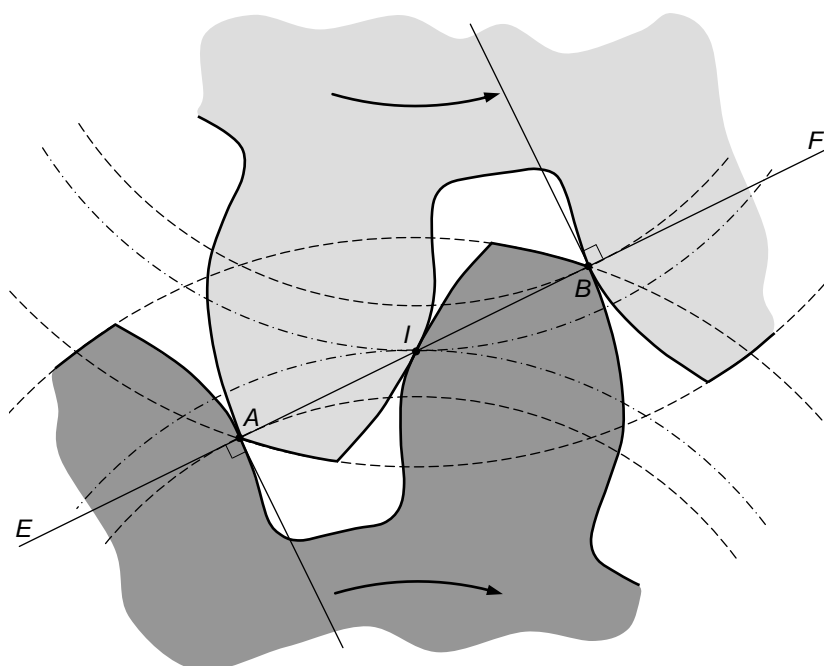


Figura 2.9 – Engrenamento em que apenas há contacto num par de dentes, o qual garante, teoricamente, a continuidade do engrenamento.

É sabido que no caso de engrenagens paralelas de dentes gerados em evolvente de círculo, a linha de ação⁸ ou linha de engrenamento é um segmento de reta, tal como se ilustra na figura 2.10 (Shigley e Mischke, 1989). No âmbito do presente texto admite-se que o pinhão ou carreto é a roda motora, enquanto a coroa é a roda movida. Deve ainda relembrar-se aqui que a linha de engrenamento é sempre tangente às circunferências de base das duas rodas, passa pelo ponto primitivo e faz um ângulo α (ângulo de pressão) com a linha tangente às circunferências primitivas (Henriot, 1979; Branco *et al.*, 2009; Norton, 2013).

⁷ É evidente que cada dente de uma roda dentada está engrenado apenas uma vez em cada rotação completa da roda. Este aspeto é fundamental no estabelecimento do número mínimo de dentes que uma roda dentada deve ter (Henriot, 1979).

⁸ A linha de ação ou linha de engrenamento é, por definição, a linha que une as sucessivas posições do ponto de contacto de uma engrenagem (Flores e Gomes, 2014).

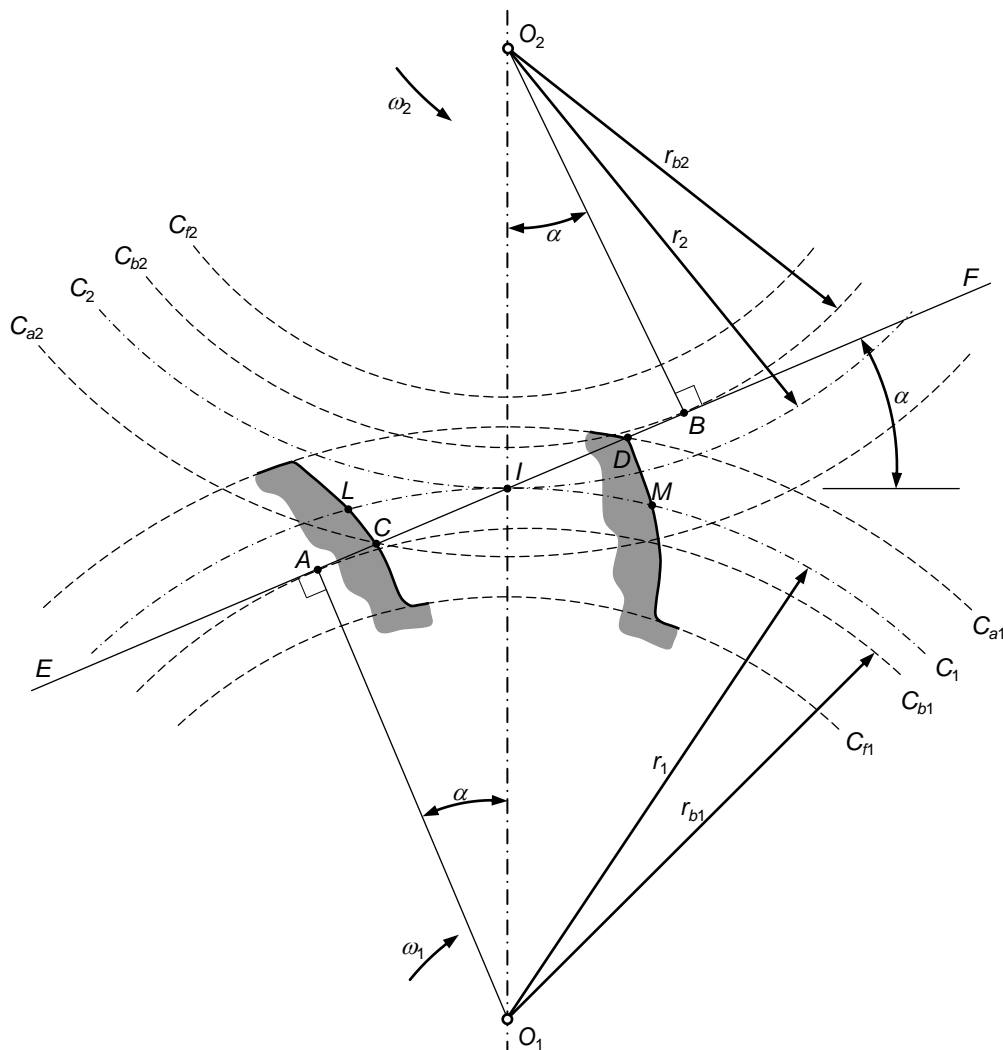


Figura 2.10 – Representação da linha de ação ou linha de engrenamento de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normal.

Observando a figura 2.10, pode afirmar-se que o engrenamento entre dois dentes se inicia quando a circunferência de coroa da roda movida intersecciona a linha de ação. Este ponto é representado pela letra C na figura 2.10. Neste mesmo instante, o ponto em que o perfil do dente do pinhão intersecciona a circunferência primitiva é materializado pelo símbolo L. De modo análogo, o engrenamento termina quando a circunferência de coroa da roda motora intersecciona a linha de ação. Este ponto é representado pela letra D na figura 2.10. Neste mesmo instante, o ponto em que o perfil do dente do pinhão intersecciona a circunferência primitiva é materializado pelo símbolo M. À distância entre os pontos de início e término do engrenamento (segmento CD), chama-se comprimento de condução ou comprimento de ação (Budynas e Nisbett, 2011). Conclui-se, portanto, que o engrenamento entre um par de dentes está, em geral, compreendido entre os pontos A e B que definem a linha de engrenamento.

Os ângulos θ_1 e θ_2 representados na figura 2.11 denominam-se de ângulos de condução ou ângulos de ação das rodas motora e movida, respetivamente. Por seu lado, os ângulos ϕ_1 e ϕ_2 representam os ângulos de aproximação das rodas motora e movida, e dizem respeito à amplitude de rotação de cada uma das rodas desde o início do contacto, até ao instante em que o ponto de contacto ocorre no ponto primitivo. Do

mesmo modo, os ângulos γ_1 e γ_2 dizem respeito aos ângulos de afastamento das rodas motora e movida, respetivamente. Estes ângulos representam a amplitude de rotação das rodas desde o instante correspondente ao ponto primitivo até que o ponto de engrenamento entre os dentes atinge o término do contacto (ponto D). É, pois, evidente, por definição e pela observação da figura 2.11 que

$$\theta_1 = \phi_1 + \gamma_1 \quad (2.26)$$

$$\theta_2 = \phi_2 + \gamma_2 \quad (2.27)$$

A figura 2.11 refere-se a três posições sucessivas de um par dentes engrenado. Da análise desta figura pode dizer-se que o engrenamento se inicia no ponto C , isto é, quando a ponta do dente da roda movida contacta com o flanco do dente da roda motora. O engrenamento termina no ponto D , ou seja, quando a ponta do dente da roda motora deixa de estar em contacto com o flanco do dente da roda movida. Durante o engrenamento, podem ser distinguidas duas fases, a saber (Henriot, 1979):

- Fase ou período de aproximação, representada pelo segmento de reta CI ou pelo arco de circunferência LI ,
- Fase ou período de afastamento, representada pelo segmento de reta ID ou pelo arco de circunferência IM .

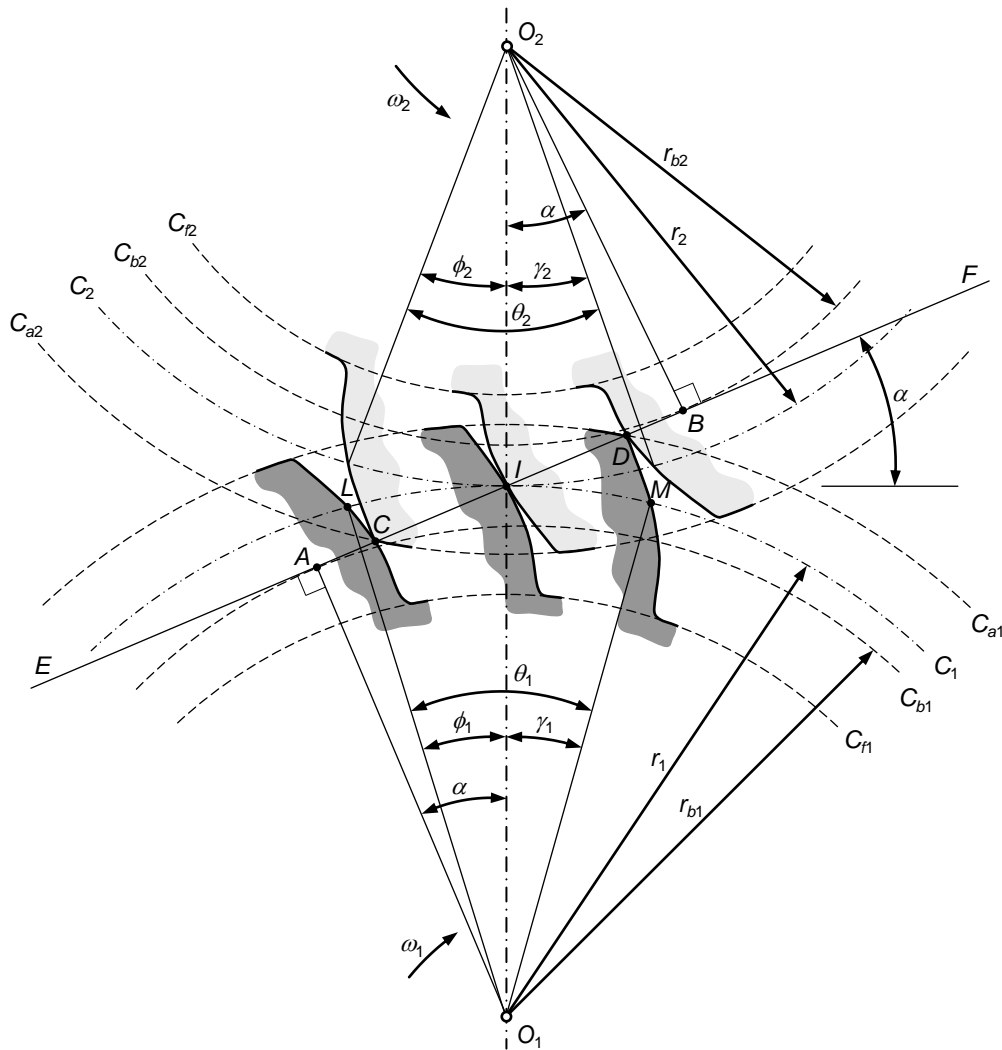


Figura 2.11 – Representação de três posições sucessivas de um par de dentes engrenado.

Então, na fase de aproximação pode escrever-se que

$$l_a = \overline{CI} \quad (\text{comprimento de aproximação}) \quad (2.28)$$

$$a_a = LI = \frac{l_a}{\cos \alpha} \quad (\text{arco de aproximação}) \quad (2.29)$$

Na obtenção do último membro da equação (2.29) utilizaram-se os conceitos de amplitude de um arco ao centro, evolvente de um círculo e que o raio de base se relaciona com o raio primitivo da seguinte forma (Flores e Gomes, 2014)

$$r_b = r \cos \alpha \quad (2.30)$$

Por seu lado, na fase de afastamento tem-se que

$$l_f = \overline{ID} \quad (\text{comprimento de afastamento}) \quad (2.31)$$

$$a_f = IM = \frac{l_f}{\cos \alpha} \quad (\text{arco de afastamento}) \quad (2.32)$$

Com efeito, a duração do engrenamento pode ser definida como a soma das parcelas correspondentes às fases de aproximação e de afastamento, ou seja

$$l = l_a + l_f = \overline{CD} \quad (\text{comprimento de condução}) \quad (2.33)$$

$$a = a_a + a_f = LM = \frac{l}{\cos \alpha} \quad (\text{arco de condução}) \quad (2.34)$$

Deste modo, para que haja continuidade do engrenamento é necessário que se verifique a seguinte condição (Henriot, 1979)

$$l > p_n \quad \text{ou} \quad a > p \quad (2.35)$$

em que p_n representa o passo normal⁹ e p é o passo primitivo¹⁰.

Define-se relação de condução, ou razão de condução, como sendo o quociente entre o arco de condução¹¹ e o passo, ou seja (Budynas e Nisbett, 2011)

$$\varepsilon = \frac{a}{p} = \frac{l}{\pi m \cos \alpha} \quad (2.36)$$

A equação (2.36) permite determinar o número médio de pares de dentes em contacto durante o engrenamento. Para a situação de engrenamento representada na figura 2.9, a relação de condução é igual à unidade, significando que um dente e o entre-dente ocupam completamente o arco de condução LM . Por outras palavras, quando um par de dentes está a iniciar o contacto no ponto A , o par de dentes anterior está, no mesmo instante, a terminar o contacto no ponto B . Note-se que nesta situação particular, os pontos A e C , bem como os pontos B e D , são coincidentes. Na prática,

⁹ Passo normal é a distância que separa dois flancos homólogos consecutivos. Trata-se, portanto, de um segmento de reta (Flores e Gomes, 2014).

¹⁰ Passo primitivo ou passo é, por definição, o comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre dois flancos homólogos e consecutivos (Henriot, 1979).

¹¹ O arco de condução é, por vezes, denominado de arco de ação ou arco de engrenamento (Wilson e Sadler, 1993).

o projeto e desempenho de engrenagens requer que o valor da relação de condução esteja situado entre 1,2 e 1,6, de modo a garantir a continuidade do engrenamento, evitar choques entre os dentes e minimizar o ruído (Henriot, 1979; Wilson e Sadler, 1993). Valores muito elevados de ε são vantajosos em termos de continuidade, mas podem causar dificuldades ao nível das interferências entre os dentes. É, portanto, necessário estabelecer um compromisso entre a continuidade do engrenamento e as interferências de funcionamento (Branco *et al.*, 2009).

O desgaste que sempre ocorre entre os componentes mecânicos que descrevem movimento relativo, as tolerâncias de fabrico e de montagem, podem originar a diminuição da relação de condução, o que, por sua vez, poderá levar ao funcionamento deficiente das engrenagens, traduzido por choques, ruído e avarias prematuras (Drago, 1988). Por conseguinte, procura-se que a relação de condução seja sempre superior a 1,3, o que significa que quando um par de dentes inicia o contacto, o par de dentes anterior ainda não alcançou o ponto D (cf. figura 2.11), havendo, portanto, um período do engrenamento em que dois pares de dentes estão em contacto, um na vizinhança do ponto C e outro na vizinhança do ponto D .

Finalmente, deve referir-se que no caso mais geral, a relação de condução é constituída por duas componentes, uma radial e outra axial. A relação de condução total é, pois, igual à soma destas duas parcelas, ou seja (Juvinall e Marshek, 2006)

$$\varepsilon = \varepsilon_{radial} + \varepsilon_{axial} \quad (2.37)$$

É evidente que a componente axial apenas existe em engrenagens com dentes inclinados (ou helicoidais) e com dentes em espiral.

2.4. RELAÇÃO DE CONDUÇÃO

Nesta secção é desenvolvida uma expressão geral que permite determinar o valor da relação de condução para o caso de engrenagens cilíndricas de dentado reto normal. Para o efeito, considere-se a figura 2.12 onde se representa um engrenamento deste tipo de engrenagem (Branco *et al.*, 2009; Norton, 2013).

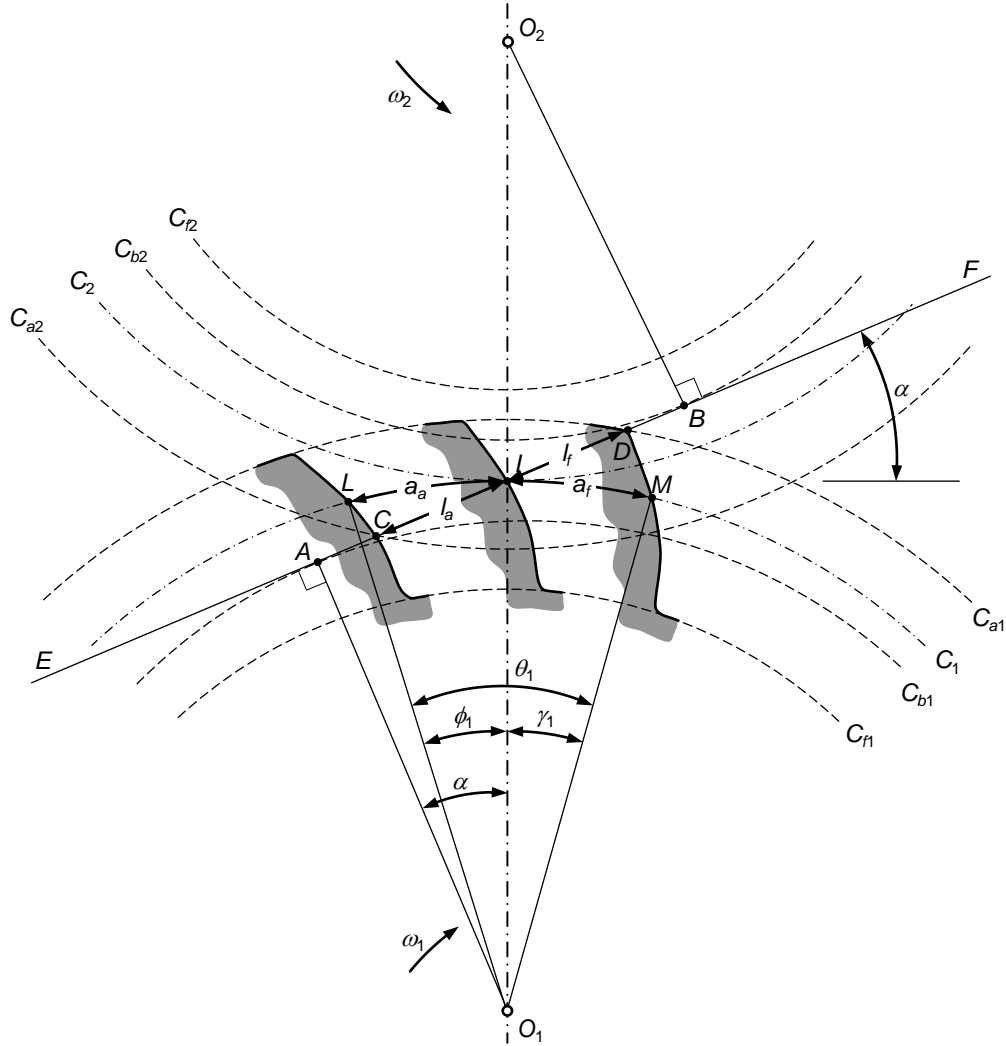


Figura 2.12 – Representação dos arcos e dos comprimentos de aproximação e de afastamento numa engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto.

Tal como foi apresentado na secção anterior, a definição de relação de condução pode ser escrita do seguinte modo (Budynas e Nisbett, 2011)

$$\varepsilon = \frac{a}{p} \quad (2.38)$$

em que a representa o arco de condução e p é o passo da engrenagem. O arco de condução é igual à soma do arco de aproximação com o arco de afastamento, ou seja,

$$a = a_a + a_f = LI + IM \quad (2.39)$$

Atendendo ao conceito de amplitude de um arco ao centro, então os arcos de aproximação e de afastamento podem ser definidos da seguinte forma

$$a_a = LI = r_1 \phi_1 \quad (2.40)$$

$$a_f = IM = r_1 \gamma_1 \quad (2.41)$$

onde r_1 representa o raio primitivo do pinhão, e ϕ_1 e γ_1 são, respetivamente, os ângulos de aproximação e de afastamento, tal como se ilustra na figura 2.12.

Tendo presente o conceito de curva evolvente de um círculo, então da análise da figura 2.12 os comprimentos de aproximação e de afastamento podem ser expressos do seguinte modo

$$\overline{CI} = r_{b1} \phi_1 \quad (2.42)$$

$$\overline{ID} = r_{b1} \gamma_1 \quad (2.43)$$

em que r_{b1} representa o raio de base do pinhão. Sabendo que a relação entre o raio de base e o raio primitivo de uma roda dentada de dentes retos é dada pela equação (2.30), então as equações (2.42) e (2.43) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\phi_1 = \frac{\overline{CI}}{r_1 \cos \alpha} \quad (2.44)$$

$$\gamma_1 = \frac{\overline{ID}}{r_1 \cos \alpha} \quad (2.45)$$

Substituindo agora as equações (2.44) e (2.45) nas equações (2.40) e (2.41), respetivamente, resulta que

$$a_a = LI = \frac{\overline{CI}}{\cos \alpha} = \frac{l_a}{\cos \alpha} \quad (2.46)$$

$$a_f = IM = \frac{\overline{ID}}{\cos \alpha} = \frac{l_f}{\cos \alpha} \quad (2.47)$$

Atendendo à definição de passo, a equação (2.38) pode ser expressa como

$$\varepsilon = \frac{a}{p} = \frac{\overline{CI} + \overline{ID}}{\pi m \cos \alpha} = \frac{\overline{CD}}{\pi m \cos \alpha} \quad (2.48)$$

em que o denominador pode ser designado como passo de base, ou seja,

$$p_b = \pi m \cos \alpha \quad (2.49)$$

e que representa o passo medido na circunferência de base (Wilson e Sadler, 1993).

O comprimento de condução, necessário para determinar a relação de condução, pode ser expresso da seguinte forma

$$\overline{CD} = \overline{CI} + \overline{ID} \quad (2.50)$$

em que

$$\overline{CI} = \overline{CB} - \overline{IB} \quad (2.51)$$

$$\overline{ID} = \overline{AD} - \overline{AI} \quad (2.52)$$

Em relação ao triângulo retângulo O_2BC podem ser determinados os comprimentos dos lados O_2C e O_2B , isto é

$$\overline{O_2C} = r_2 + h_{a2} \quad (2.53)$$

$$\overline{O_2B} = r_2 \cos \alpha \quad (2.54)$$

Aplicando agora o teorema de Pitágoras ao triângulo O_2BC , resulta que

$$\overline{CB} = \sqrt{(\overline{O_2C})^2 - (\overline{O_2B})^2} = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} \quad (2.55)$$

Por outro lado, ainda da análise da figura 2.12, sabe-se que

$$\overline{IB} = r_2 \sin \alpha \quad (2.56)$$

Logo, o comprimento de aproximação é dado pela seguinte expressão

$$l_a = \overline{CI} = \overline{CB} - \overline{IB} = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha \quad (2.57)$$

De modo análogo, pode ser determinado o comprimento de afastamento. Assim, do triângulo O_1AD , podem ser calculados os comprimentos dos lados O_1D e O_1A ,

$$\overline{O_1D} = r_1 + h_{a1} \quad (2.58)$$

$$\overline{O_1A} = r_1 \cos \alpha \quad (2.59)$$

Da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo O_1AD vem que

$$\overline{AD} = \sqrt{(\overline{O_1D})^2 - (\overline{O_1A})^2} = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} \quad (2.60)$$

Agora, da observação da figura 2.12 conclui-se que

$$\overline{AI} = r_1 \sin \alpha \quad (2.61)$$

Logo, o comprimento de afastamento é dado pela seguinte expressão

$$l_f = \overline{ID} = \overline{AD} - \overline{AI} = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha \quad (2.62)$$

Com efeito, o comprimento de condução pode ser calculado combinando as equações (2.50), (2.57) e (2.62), resultando em

$$l = \overline{CD} = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha + \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha \quad (2.63)$$

Finalmente, a relação da condução expressa pela equação (2.48) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha + \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha}{\pi m \cos \alpha} \quad (2.64)$$

Tendo em conta as relações geométricas e proporções dos dentes, anteriormente estudadas, a equação (2.64) pode ser simplificada e expressa, única e exclusivamente, em função do número de dentes e do ângulo de pressão, ou seja

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left(\sqrt{\frac{z_2^2}{4} \sin^2 \alpha + z_2 + 1} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} \sin^2 \alpha + z_1 + 1} - \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \alpha \right) \quad (2.65)$$

Da análise das equações (2.64) e (2.65) pode concluir-se que a continuidade do engrenamento melhora (*i.e.*, aumenta) quando:

- Aumentam as saliências dos dentes,
- Aumentam os diâmetros primitivos das rodas,
- Diminui o ângulo de pressão.

Deve ainda mencionar-se que as equações (2.64) e (2.65) são também válidas para engrenagens cilíndricas interiores, sendo que no último caso se considera o sinal (–) para z_2 (Henriot, 1979). Neste tipo de engrenagem, a continuidade do engrenamento melhora (*i.e.*, aumenta) quando:

- Aumentam as saliências dos dentes,
- Aumenta o diâmetro primitivo do pinhão,
- Diminui o diâmetro primitivo da roda,
- Diminui o ângulo de pressão.

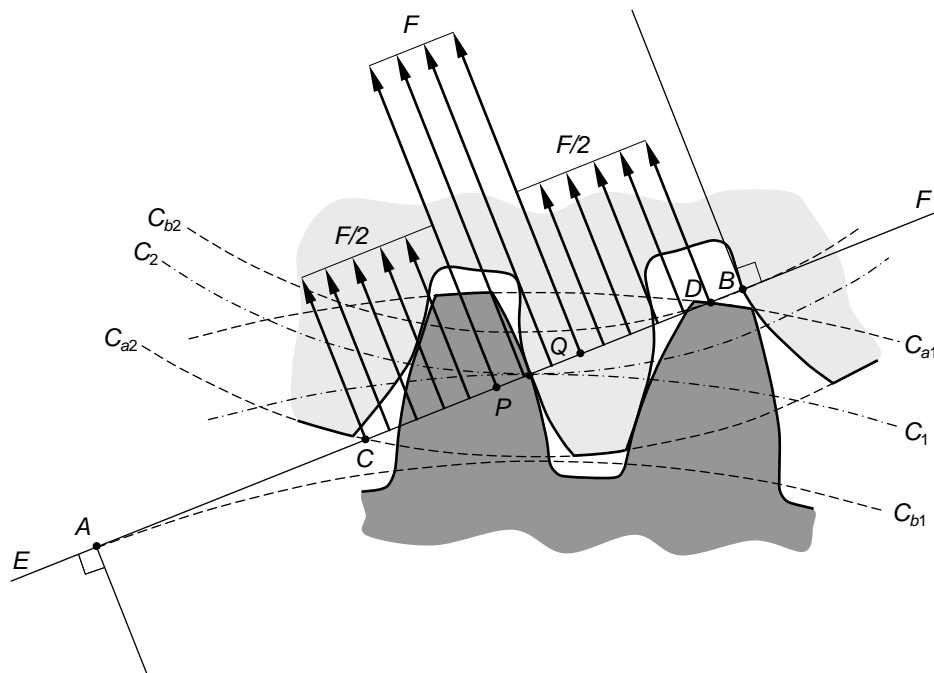


Figura 2.13 – Evolução das forças de contacto nos dentes durante o engrenamento.

Tal como foi mencionado anteriormente, relações de condução mais elevadas são benéficas, não só em termos de continuidade do engrenamento, mas também em termos da distribuição das forças de contacto entre as superfícies dos dentes (Branco *et al.*, 2009). Assim, a figura 2.13 diz respeito à evolução das forças de contacto¹² ao longo do engrenamento, para um par de dentes conjugados. Nesta representação admite-se que existem dois pares de dentes engrenados ao mesmo tempo durante os períodos correspondentes aos comprimentos de condução CP e QD . Com efeito, durante estes dois períodos, a força de contacto é distribuída pelos dois pares de dentes, enquanto no período correspondente ao comprimento de condução PQ , a força é apenas suportada por um par de dentes. Pode facilmente observa-se que o comprimento de condução PQ diminui com o aumento da relação de condução, o que é vantajoso em termos de distribuição das forças desenvolvidas durante o engrenamento.

¹² A análise sobre a distribuição de forças aqui apresentada é algo simplista, na medida em que os efeitos associados à deformação dos dentes e aos erros de fabrico/montagem são negligenciados.

Exercício 2.2

Enunciado: Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, calcule a relação de condução da engrenagem. Comente o resultado obtido.

Padrão de resposta esperado:

Utilizando a equação (2.65) e considerando os dados mencionados no enunciado, isto é, $z_1 = 19$, $z_2 = 76$ e $\alpha = 20^\circ$, resulta que a relação de condução é $\varepsilon = 1,68$. Pode, pois, concluir-se que a engrenagem em estudo apresenta boa continuidade do engrenamento, uma vez que, em média, há cerca de 1,68 dentes em contacto. Este valor está claramente acima das indicações de projeto, isto é, $\varepsilon > 1,3$. Deve ainda referir-se que pelo facto do valor da relação de condução não ser demasiado elevado, não é expectável a existência de interferências de funcionamento.

Finalmente, na tabela 2.4 resumem-se as expressões que permitem calcular a relação de condução para engrenagens cilíndricas de dentes retos não corrigidos, nomeadamente engrenagens cilíndricas exteriores, engrenagens cilíndricas interiores e engrenagens do tipo pinhão-cremalheira.

Tabela 2.4 – Expressões que permitem calcular a relação de condução para diversos tipos de engrenagens cilíndricas de dentes retos normais.

Tipo de engrenagem	Expressão
Engrenagens cilíndricas exteriores (1 pinhão, 2 roda)	$\varepsilon = \frac{\sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} - a \sin \alpha}{\pi m \cos \alpha}$
Engrenagens cilíndricas interiores (1 pinhão, 2 roda interior)	$\varepsilon = \frac{\sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} + a \sin \alpha}{\pi m \cos \alpha}$
Engrenagens pinhão-cremalheira (1 pinhão, 2 cremalheira)	$\varepsilon = \frac{\sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} + \frac{h_{a2}}{\sin \alpha} - \frac{d}{2} \sin \alpha}{\pi m \cos \alpha}$

2.5. ESCORREGAMENTO

Numa engrenagem, o movimento relativo entre as superfícies dos dentes do pinhão e da roda, que acontece durante o engrenamento, não é do tipo rolamento puro. Na verdade, à exceção do ponto primitivo, existe sempre um escorregamento associado à ação conjugada entre os perfis dos dentes. O engrenamento de dois perfis conjugados é, portanto, composto por um misto de rolamento e de escorregamento (Henriot, 1979). Para melhor se compreender o que acaba de ser afirmado, considere-se a figura 2.14, onde as velocidades periféricas de um ponto genérico, P , situado na linha de engrenamento, estão representadas. Na mesma figura incluem-se também as projeções das velocidades periféricas nas direções definidas pela linha de engrenamento e perpendicular a esta. Atente-se, desde já, que as projeções das velocidades do ponto P na direção da linha de engrenamento são iguais, pois caso assim não acontecesse, existiriam descontinuidades no engrenamento, as quais se materializariam em choques (Juvinall e Marshek, 2006). Da análise da figura 2.14 pode ainda inferir-se que as velocidades do ponto P projetadas na direção perpendicular à linha de engrenamento são distintas. Estas últimas componentes das velocidades periféricas são responsáveis pelo escorregamento que existe no engrenamento de dois perfis conjugados para o caso de engrenagens cilíndricas exteriores. É evidente que a existência de escorregamento nas engrenagens influencia o seu desempenho.

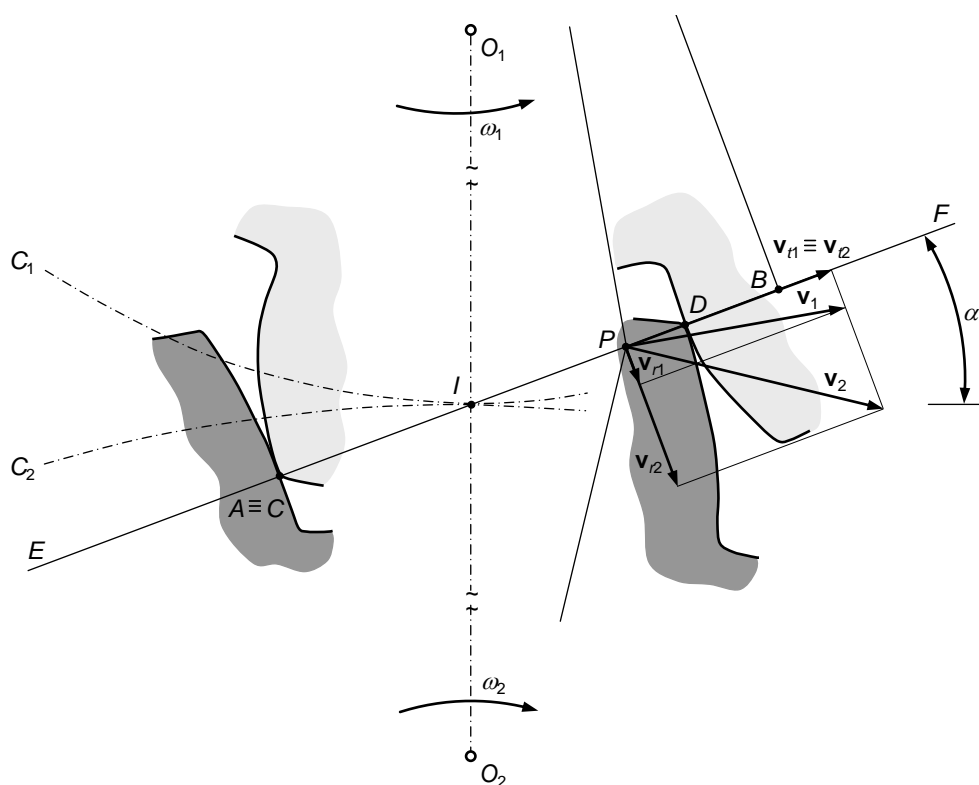


Figura 2.14 – Representação das velocidades periféricas de um ponto genérico situado na linha de engrenamento.

No engrenamento da figura 2.14 considera-se que a roda 2 é a roda motora e que a roda 1 é a roda movida. A velocidade de escorregamento total é dada pela soma, em valor absoluto, das velocidades de rolamento v_{r1} e v_{r2} . Para o caso das engrenagens

paralelas, a velocidade de escorregamento pode ser calculada com referência ao ponto primitivo, o qual é, como se sabe, um centro instantâneo de rotação (Flores, 2012). Assim, para o ponto P a velocidade de escorregamento é expressa do seguinte modo

$$v_g = |\Omega| \overline{IP} \quad (2.66)$$

em que IP é a distância do ponto P ao ponto primitivo e $|\mathbf{\Omega}|$ representa o módulo da velocidade instantânea de rotação relativamente ao centro instantâneo de rotação (I), a qual pode ser calculada do seguinte modo

$$|\mathbf{\Omega}| = \omega_1 + \omega_2 \quad (\text{para engrenagens exteriores}) \quad (2.67)$$

$$|\Omega| = \omega_1 - \omega_2 \quad (\text{para engrenagens interiores}) \quad (2.68)$$

Da análise das equações (2.67) e (2.68) pode observar-se que no caso de engrenagens interiores, existe menos escorregamento uma vez que as duas rodas rodam no mesmo sentido e, conseqüentemente, é menor o valor absoluto de Ω (Budynas e Nisbett, 2011). O sentido da velocidade linear de escorregamento depende diretamente do sentido da velocidade instantânea de rotação, Ω . Uma vez definido o sentido de funcionamento de uma engrenagem exterior, verifica-se que Ω mantém, quer o módulo, quer a intensidade, durante o engrenamento. Com efeito, a velocidade de escorregamento, que varia linearmente, é (Henriot, 1979):

- Tangente aos perfis conjugados no ponto de contacto,
- Nula no ponto primitivo,
- Máxima no início e no fim do engrenamento, porém, com sentidos opostos.

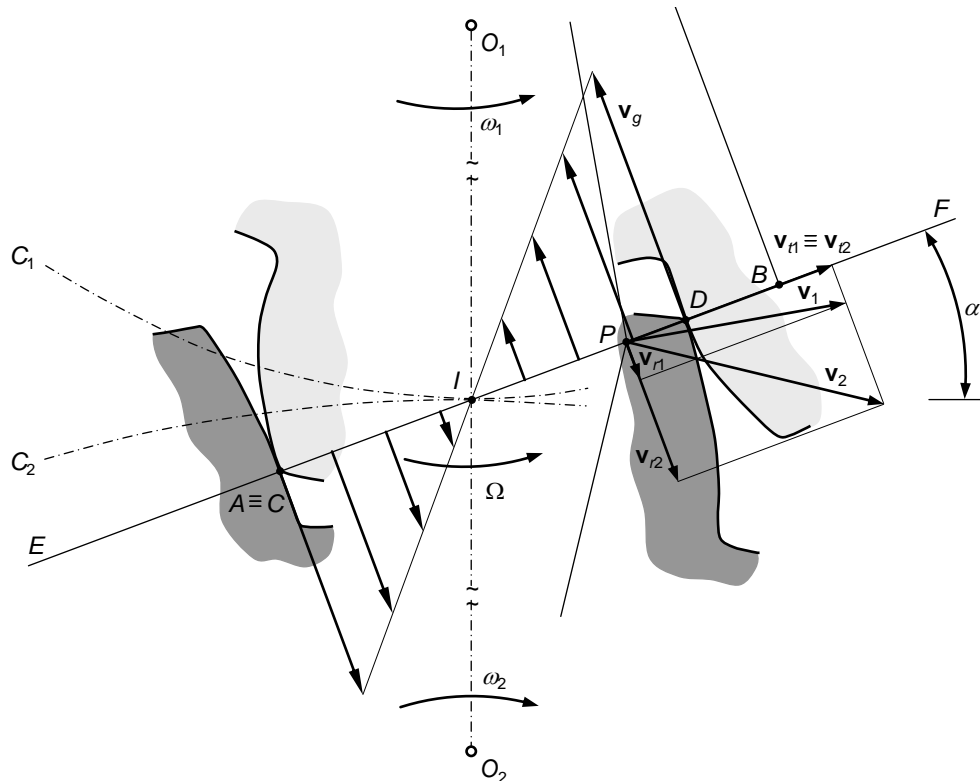


Figura 2.15 – Variação da velocidade de escorregamento ao longo do comprimento de condução numa engrenagem paralela exterior de dentes retos.

A figura 2.15 mostra a variação da velocidade de escorregamento ao longo do comprimento de condução (Henriot, 1979). É por demais evidente que a variação da velocidade de escorregamento tem consequências no desenvolvimento do desgaste nas superfícies dos dentes e no rendimento das engrenagens, tal como se estudará mais à frente no presente texto.

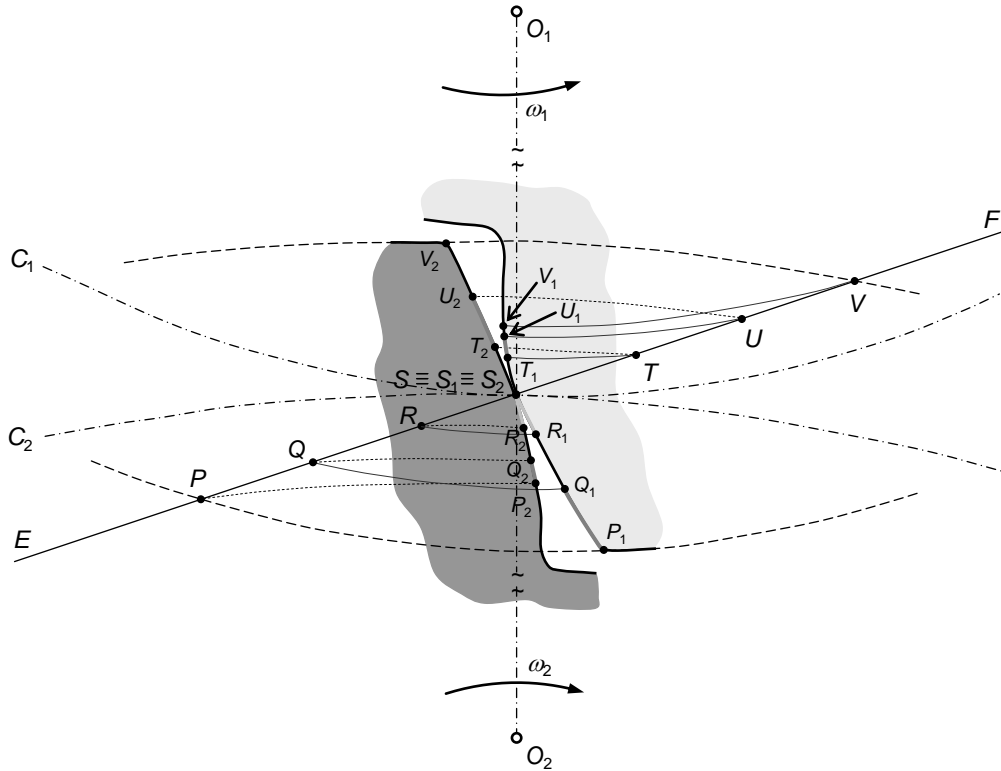


Figura 2.16 – Variação do escorregamento entre dois perfis conjugados de uma engrenagem cilíndrica exterior.

Na figura 2.16 representa-se o engrenamento entre o pinhão e a coroa de uma engrenagem cilíndrica exterior, em que o comprimento de condução está dividido em seis partes iguais entre si. Estas seis divisões estão delimitadas pelos pontos P , Q , R , S , T , U e V . Por sua vez, as divisões do comprimento de condução podem ser transferidas para os flancos dos dentes do pinhão e da coroa desenhando arcos de circunferência com centros em O_1 e O_2 , respetivamente. Deste modo, obtêm-se os pontos correspondentes a P , Q , ... V , ou seja, P_1 , Q_1 , ... V_1 e P_2 , Q_2 , ... V_2 , como se ilustra na figura 2.16. Com efeito, atendendo às propriedades da linha de engrenamento, aos pontos P , Q , ... V correspondem os pontos de contacto entre os perfis dos dentes do pinhão e da coroa nos pontos P_1 , Q_1 , ... V_1 e P_2 , Q_2 , ... V_2 .

Atente-se agora a que os arcos P_1Q_1 e P_2Q_2 têm comprimentos consideravelmente distintos. Este facto, significa que no mesmo período de engrenamento, o movimento do ponto de contacto que descreve os arcos P_1Q_1 e P_2Q_2 , respetivamente nos flancos dos dentes do pinhão e da coroa, acontece com escorregamento relativo entre os perfis dos dentes (Henriot, 1979). A mesma análise é válida e óbvia para os demais arcos representados nos perfis dos dentes do pinhão e da roda. Em suma, observa-se, portanto, a existência de escorregamento durante o engrenamento de dois perfis conjugados (Branco *et al.*, 2009).

A figura 2.17 diz respeito à representação gráfica dos arcos representados na figura 2.16, em que são evidentes as diferenças nos comprimentos dos respectivos segmentos de reta. Verifica-se, uma vez mais, que o escorregamento é nulo no ponto primitivo e que aquele aumenta à medida que o ponto de contacto se aproxima das extremidades dos perfis dos dentes.

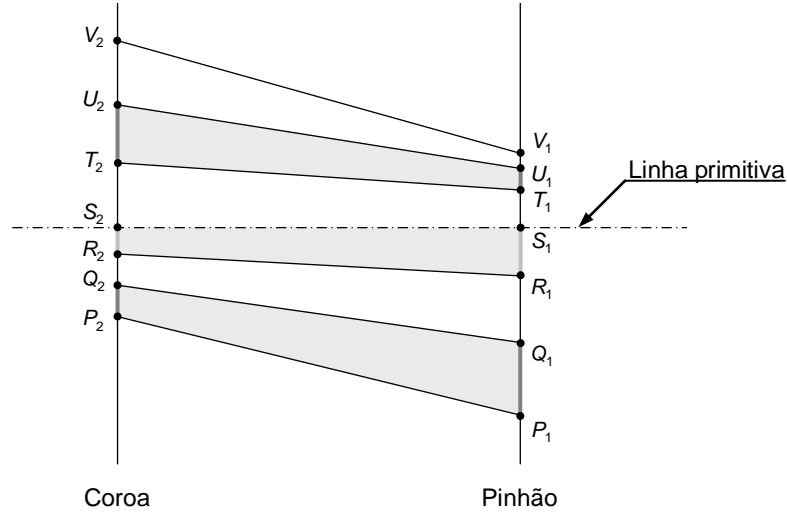


Figura 2.17 – Representação gráfica da evolução do escorregamento no pinhão e na coroa correspondente à ilustração da figura 2.16.

Na figura 2.18 apresenta-se graficamente o escorregamento para o caso de uma engrenagem cilíndrica interior em que foi seguida a mesma metodologia acima descrita para as engrenagens exteriores. Em jeito de observação geral, pode dizer-se que as engrenagens interiores apresentam menos escorregamento que as engrenagens exteriores e, por conseguinte, têm rendimentos superiores, tal como havia sido mencionado anteriormente.

O escorregamento absoluto ou total pode ser quantificado pelas diferenças dos arcos dos perfis conjugados dos dentes do pinhão e da roda nos períodos de aproximação e de afastamento (Henriot, 1979; Branco *et al.*, 2009). Assim, com referência à figura 2.16 pode escrever-se que

$$g_a = IP_1 - IP_2 \quad (\text{escorregamento de aproximação}) \quad (2.69)$$

$$g_f = IV_2 - IV_1 \quad (\text{escorregamento de afastamento}) \quad (2.70)$$

Então, tem-se que o escorregamento total é dado por

$$g = g_a + g_f = IP_1 - IP_2 + IV_2 - IV_1 \quad (2.71)$$

Considere-se agora a figura 2.19 em que um ponto genérico, P , está localizado na linha de engrenamento EF , o qual está a uma distância x do ponto primitivo. Assim, durante um intervalo de tempo elementar dt , o ponto P desloca-se uma distância elementar dx , enquanto as circunferências primitivas, que rolam sem escorregar, descrevem uma trajetória angular elementar ds , tal como se pode observar na figura 2.19. Da análise desta figura e atendendo a que as rodas rolam sem escorregar, pode escrever-se a seguinte relação

$$dx = ds \cos \alpha \quad (2.72)$$

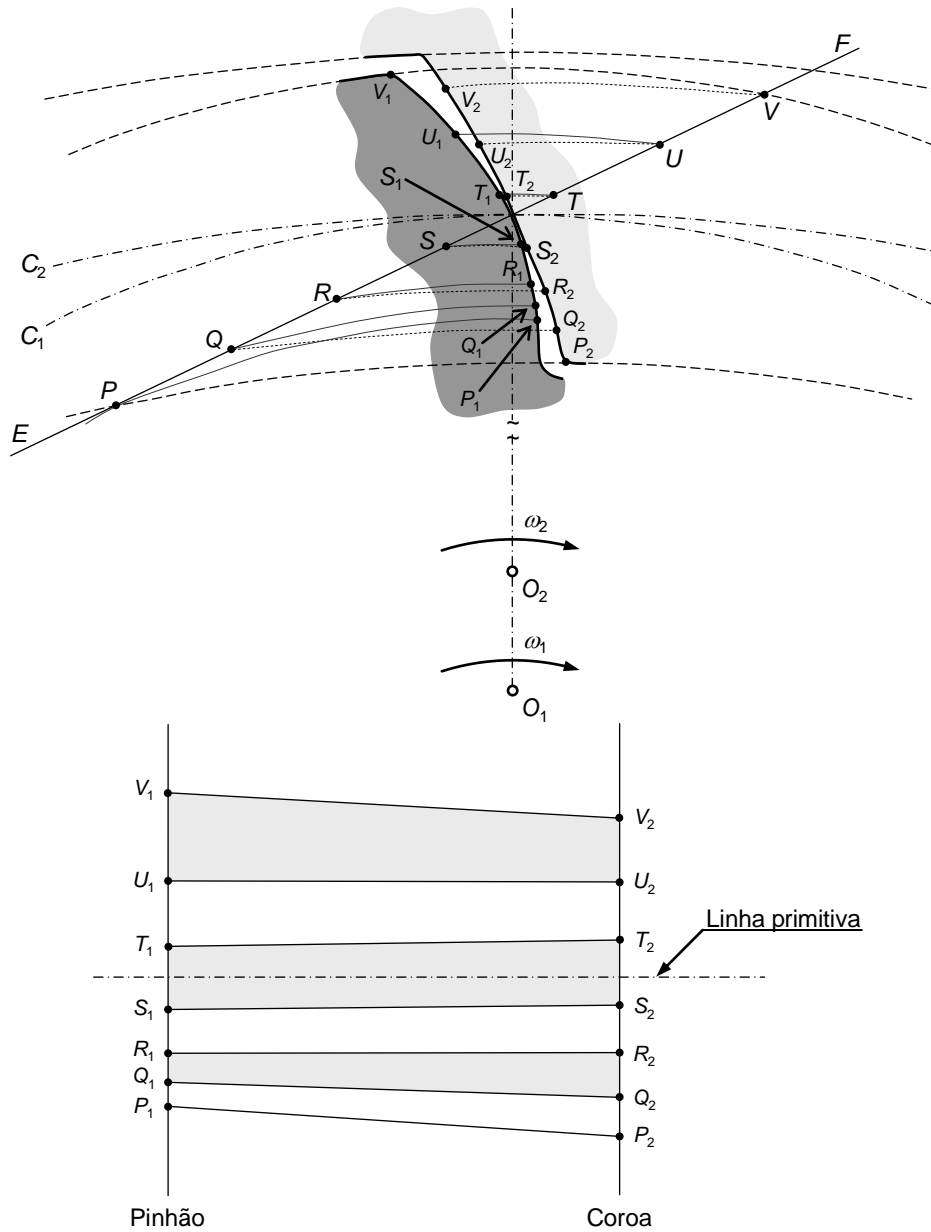


Figura 2.18 – Escorregamento entre dois perfis conjugados de engrenagem interior.

Por seu lado, os arcos elementares descritos pelas circunferências primitivas podem ser determinadas considerando que aquelas descrevem um movimento uniforme

$$ds = v_1 dt = \omega_1 \frac{d_1}{2} dt \quad (2.73)$$

$$ds = v_2 dt = \omega_2 \frac{d_2}{2} dt \quad (2.74)$$

Combinando agora as equações (2.72), (2.73) e (2.74) obtêm-se as expressões

$$\omega_1 dt = \frac{2}{d_1 \cos \alpha} dx \quad (2.75)$$

$$\omega_2 dt = \frac{2}{d_2 \cos \alpha} dx \quad (2.76)$$

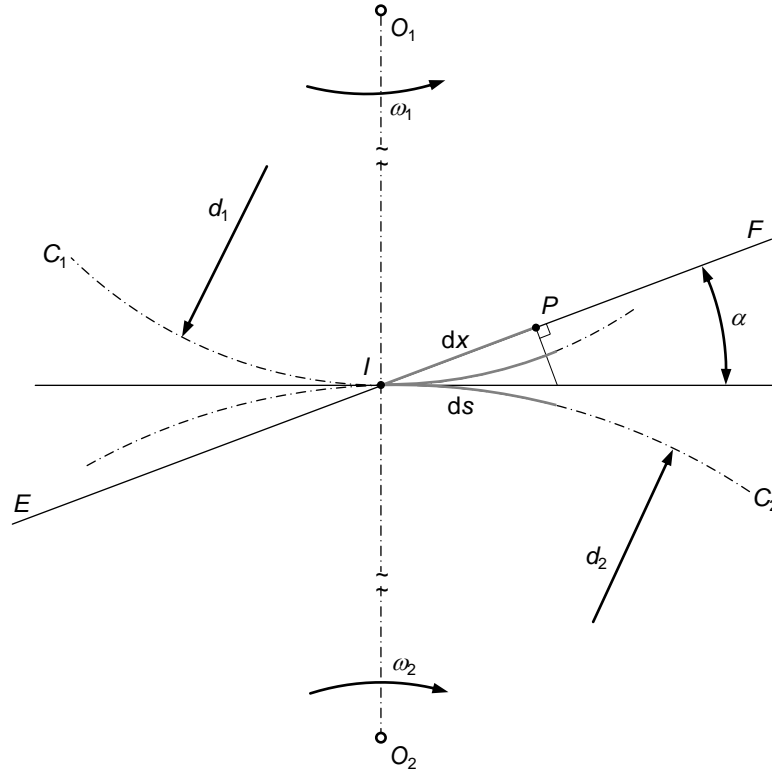


Figura 2.19 – Ponto genérico P situado sobre a linha de engrenamento para o caso de uma engrenagem cilíndrica exterior que descreve um deslocamento elementar dx .

Por outro lado, considerando as equações (2.66) e (2.67), o escorregamento elementar correspondente ao intervalo de tempo dt é dado por

$$dg = (\omega_1 + \omega_2)x dt \quad (2.77)$$

Da substituição das equações (2.75) e (2.76) na equação (2.77) resulta que

$$dg = \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{2x}{\cos \alpha} dx \quad (2.78)$$

Logo, o escorregamento total pode ser obtido integrando a equação (2.78) ao longo de todo o comprimento de condução, em que se sabe que nos pontos C e D o valor de x é l_a e l_f , respetivamente. Com efeito, da equação (2.78) vem que

$$g = \int_{l_a}^{l_f} dg = \left(\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{\cos \alpha} \quad (2.79)$$

onde o sinal (+) diz respeito às engrenagens exteriores e o sinal (–) se refere às engrenagens interiores.

O cálculo do escorregamento total é particularmente relevante na determinação do rendimento das engrenagens (Drago, 1988). Todavia, o conhecimento do escorregamento total não é *de per se* muito útil na caracterização da evolução do desgaste que ocorre ao longo dos flancos dos dentes, uma vez que o escorregamento é distribuído de modo bastante distinto no pinhão e na coroa. Aliás, como se pode atestar pela análise da figura 2.17. Pode facilmente observar-se que o desgaste é mais acentuado no pinhão do que na roda, sendo que a diferença nos desgastes será tanto maior quanto

maior for a relação de transmissão, ou seja, quanto maior for o quociente entre o número de dentes da coroa e o número de dentes do pinhão (Budynas e Nisbett, 2011). Os pontos críticos do desgaste são os pontos correspondentes ao início e ao fim do engrenamento (Branco *et al.*, 2009). Este assunto será objeto de estudo detalhado nos próximos parágrafos.

Com o intuito de mais facilmente se poderem relacionar os desgastes que ocorrem ao longo dos perfis dos dentes do pinhão e da coroa, define-se uma grandeza adimensional denominada de escorregamento específico (Henriot, 1979). O escorregamento específico é, por definição, o quociente entre o escorregamento e o rolamento que se verifica nos perfis conjugados. Assim, com referência à figura 2.17, durante o período de engrenamento que vai desde o ponto P até ao ponto Q , observa-se que

$$g_{s1} = \frac{\overline{P_1Q_1} - \overline{P_2Q_2}}{\overline{P_1Q_1}} \quad (2.80)$$

$$g_{s2} = \frac{\overline{P_1Q_1} - \overline{P_2Q_2}}{\overline{P_2Q_2}} \quad (2.81)$$

em que g_{s1} e g_{s2} se referem aos escorregamentos específicos do pinhão e da coroa, respetivamente. Deve desde já aludir-se a que é relevante, do ponto de vista do projeto de engrenagens, minimizar os escorregamentos específicos (Branco *et al.*, 2009).

Com referência à figura 2.20 observa-se que as velocidades de rolamento dos perfis dos dentes do pinhão e da coroa estão representadas por v_{r1} e v_{r2} , respetivamente. Os valores destas componentes das velocidades periféricas podem ser calculados do seguinte modo (Wilson e Sadler, 1993)

$$v_{r1} = \omega_1 \overline{AP} \quad (2.82)$$

$$v_{r2} = \omega_2 \overline{BP} \quad (2.83)$$

em que P é um ponto genérico que se considera como pertencente, ora ao pinhão, ora à coroa. Assim, as velocidades de escorregamento específico entre os perfis dos dentes do pinhão e da coroa podem ser determinadas pela diferença entre as velocidades de rolamento. Então, tem-se que

$$v_{g1} = v_{r1} - v_{r2} \quad (2.84)$$

$$v_{g2} = v_{r2} - v_{r1} \quad (2.85)$$

onde v_{g1} é a velocidade de escorregamento do perfil do dente do pinhão relativamente ao perfil do dente da coroa e, por sua vez, v_{g2} diz respeito à velocidade de escorregamento do perfil do dente da coroa em relação ao perfil do dente do pinhão.

Com efeito, o escorregamento específico pode também ser estabelecido como sendo o quociente entre a velocidade de escorregamento e a velocidade de rolamento, ou seja (Branco *et al.*, 2009)

$$g_{s1} = \frac{v_{r1} - v_{r2}}{v_{r1}} = 1 - \frac{v_{r2}}{v_{r1}} \quad (2.86)$$

$$g_{s2} = \frac{v_{r1} - v_{r2}}{v_{r2}} = \frac{v_{r1}}{v_{r2}} - 1 \quad (2.87)$$

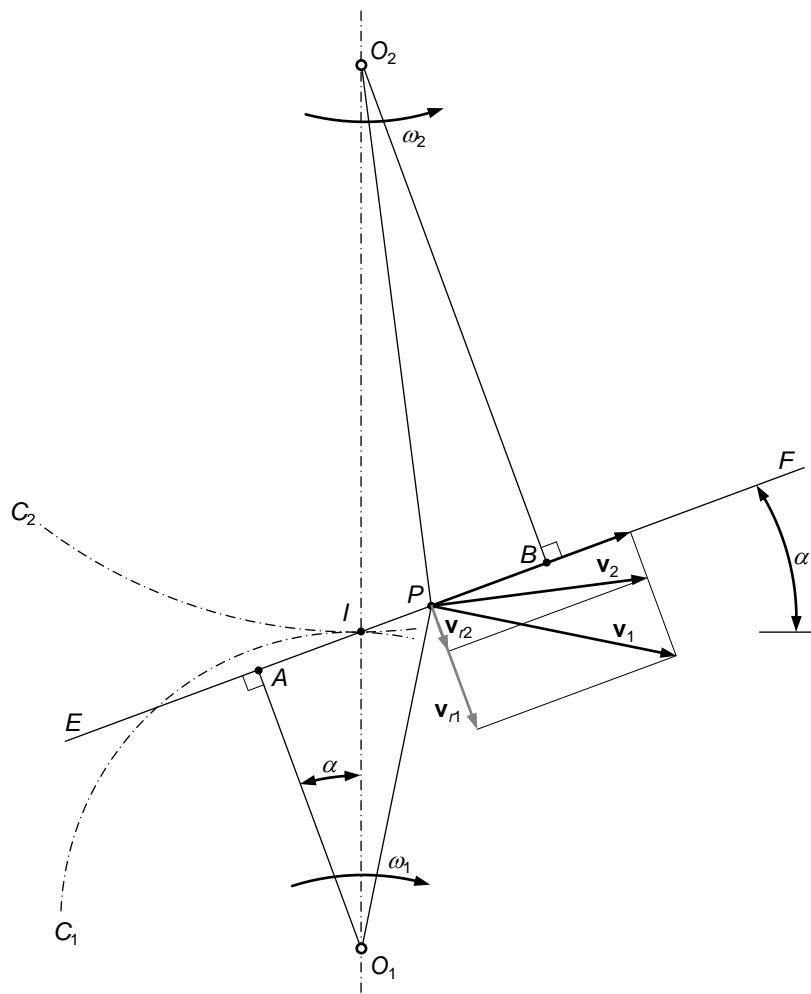


Figura 2.20 – Representação das velocidades de rolamento de um ponto genérico situado na linha de engrenamento.

Combinando as equações (2.86) e (2.87) pode estabelecer-se a seguinte relação entre os escorregamentos específicos

$$g_{s1} = \frac{g_{s2}}{1 + g_{s2}} \quad (2.88)$$

Da análise das expressões (2.82), (2.83), (2.86) e (2.87) observa-se, aliás como seria expectável, que no ponto primitivo os escorregamentos específicos são nulos. Por seu lado, no ponto A (ponto de início do engrenamento) é nula a velocidade de rolamento v_{r1} , pelo que, neste ponto o correspondente escorregamento específico tende para infinito. Do mesmo modo, no ponto B (ponto de término do engrenamento) o escorregamento específico g_{s2} tende para infinito. Observa-se também que os escorregamentos específicos g_{s1} e g_{s2} são iguais à unidade nos pontos B e A, respetivamente. A figura 2.21 diz respeito à evolução dos escorregamentos específicos ao longo da linha de engrenamento (Branco *et al.*, 2009). Finalmente, deve referir-se que o desgaste dos perfis dos dentes será tanto maior quanto maior for o escorregamento específico, sendo mais acentuado no pinhão. Verifica-se ainda que os pontos críticos correspondentes ao início e fim do engrenamento (Drago, 1988; Budynas e Nisbett, 2011; Norton, 2013).

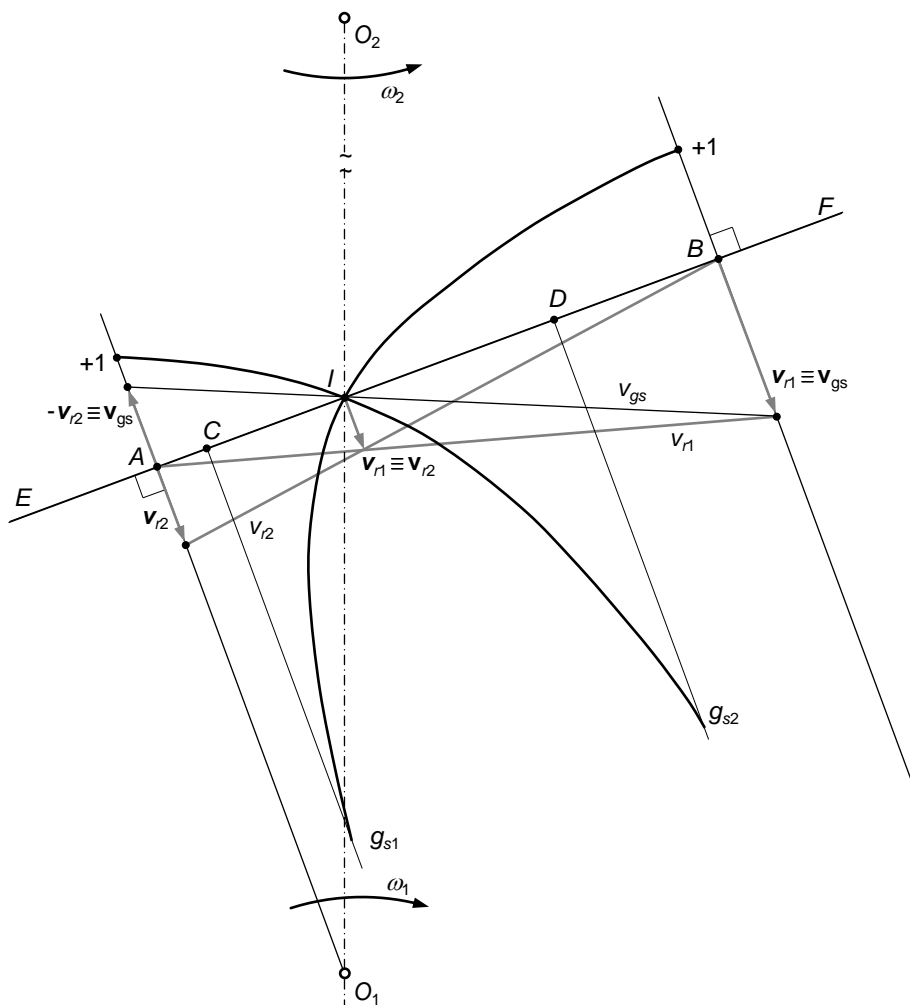


Figura 2.21 – Evolução dos escorregamentos específicos ao longo da linha de ação.

Tal como se referiu anteriormente, o escorregamento está diretamente relacionado com o desgaste dos perfis dos dentes, pelo que o primeiro deve ser bem estudado e minimizado para que o segundo seja equilibrado no pinhão e na coroa. Para minimizar os escorregamentos específicos nas engrenagens, deve reduzir-se o comprimento do arco de condução nas proximidades dos pontos A e B, que, como se sabe, representam a tangência da linha de engrenamento com as circunferências de base. Esta abordagem é particularmente relevante, pois, como foi estudado previamente, o escorregamento específico tende para infinito no início e fim do engrenamento (Henriot, 1979; Branco *et al.*, 2009).

Com o propósito de proporcionar durabilidades equivalentes para o pinhão e para a coroa devem igualar-se os seus escorregamentos específicos. Todavia, do ponto de vista prático, apenas se torna relevante e útil igualar os escorregamentos específicos máximos, isto é

$$(g_{s1})_{\max} = (g_{s2})_{\max} \quad (2.89)$$

A determinação do escorregamento específico máximo pode ser feita utilizando ábacos que permitem, de forma simples e expedita, conhecer o valor do escorregamento em função dos principais parâmetros das rodas, nomeadamente, do número de dentes das rodas, da saliência e do ângulo de pressão (Branco *et al.*, 2009).

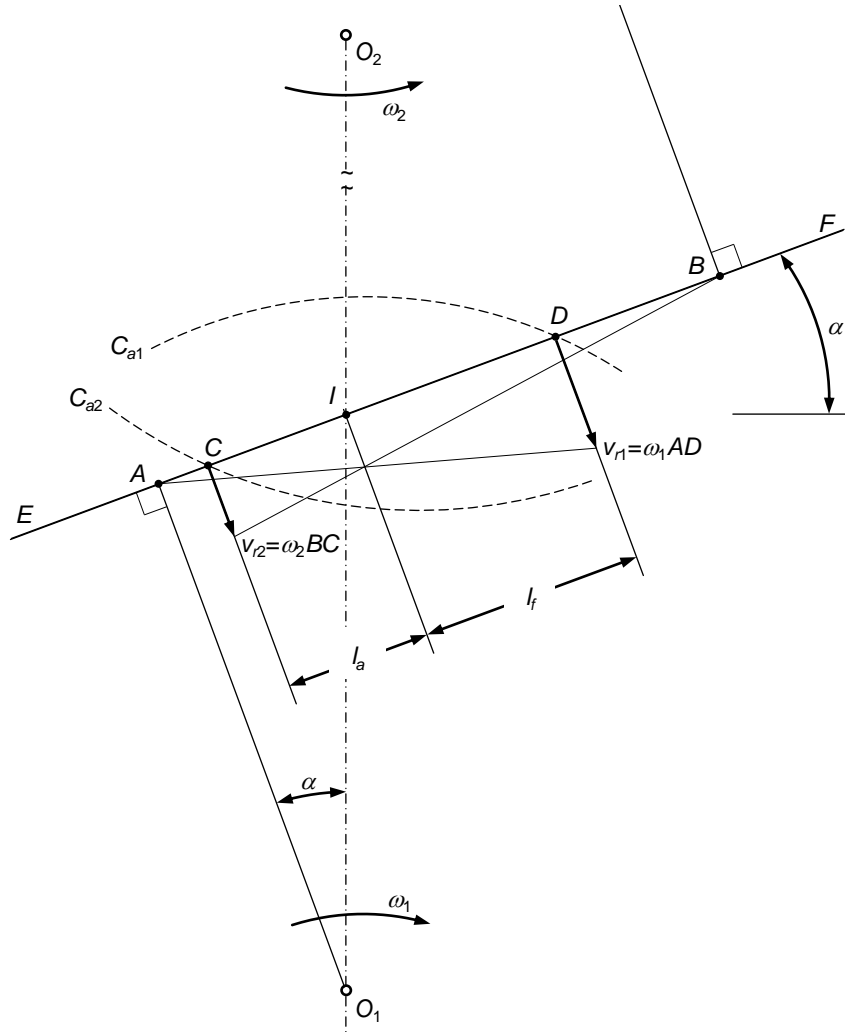


Figura 2.22 – Representação das velocidades de rolamento ao longo da linha de engrenamento no pinhão e na roda.

Os escorregamentos específicos máximos podem também ser determinados analiticamente. Para o efeito, considere-se a figura 2.22 onde se representa um engrenamento entre o pinhão (1) e a coroa (2), bem como as respetivas velocidades de rolamento. Atendendo ao que foi apresentado anteriormente, verifica-se que o escorregamento específico máximo $(g_{s1})_{\max}$ ocorre no início do engrenamento, ou seja no ponto C.

Assim, com referência à figura 2.22 pode escrever-se que

$$v_{r1} = \omega_1 \overline{AC} \quad (2.90)$$

$$v_{r2} = \omega_2 \overline{BC} \quad (2.91)$$

em que

$$\overline{AC} = \overline{AI} - \overline{IC} = \frac{d_1}{2} \sin \alpha - l_a = \frac{d_1 \sin \alpha - 2l_a}{2} \quad (2.92)$$

$$\overline{BC} = \overline{IB} + \overline{IC} = \frac{d_2}{2} \sin \alpha + l_a = \frac{d_2 \sin \alpha + 2l_a}{2} \quad (2.93)$$

Com efeito, o valor máximo do escorregamento específico $(g_{s1})_{\max}$ pode ser calculado combinando as equações (2.86), (2.90), (2.91), (2.92) e (2.93), resultando em

$$(g_{s1})_{\max} = 1 - \frac{v_{r2}}{v_{r1}} = 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\frac{d_2 \sin \alpha + 2l_a}{2}}{\frac{d_1 \sin \alpha - 2l_a}{2}} = 1 - \frac{1}{i} \frac{d_2 \sin \alpha + 2l_a}{d_1 \sin \alpha - 2l_a} \quad (2.94)$$

onde l_a representa o comprimento de aproximação, o qual pode ser determinado utilizando a equação (2.57).

De modo análogo, o valor máximo do escorregamento específico $(g_{s2})_{\max}$, que ocorre no ponto D , é dado por

$$(g_{s2})_{\max} = i \frac{d_1 \sin \alpha + 2l_f}{d_2 \sin \alpha - 2l_f} - 1 \quad (2.95)$$

em que l_f representa o comprimento de afastamento, o qual pode ser calculado utilizando a equação (2.62).

Da análise do que acaba de ser exposto, pode observar-se que, do ponto de vista da minimização dos escorregamentos específicos, é vantajoso afastar a zona de contacto dos perfis dos dentes o mais possível dos pontos A e B (cf. figura 2.22). Porém, esta situação tem como consequência a redução da relação de condução. Um procedimento que costuma ser considerado para igualar os escorregamentos específicos máximos é o que se baseia na correção do dentado (Henriot, 1979; Branco *et al.*, 2009). Este assunto não será objeto de estudo no âmbito do presente documento.

Exercício 2.3

Enunciado: Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, calcule os valores dos escorregamentos específicos máximos. Comente o resultado obtido.

Padrão de resposta esperado:

Para o cálculo dos escorregamentos específicos máximos $(g_{s1})_{\max}$ e $(g_{s2})_{\max}$ utilizam-se as equações (2.94) e (2.95), respetivamente. Antes, porém, é necessário conhecer os valores dos comprimentos de aproximação e de afastamento, ou seja, l_a e l_f . Para o efeito, são consideradas as expressões (2.57) e (2.62), resultando em

$$l_a = 8,05 \text{ mm}$$

$$l_f = 6,84 \text{ mm}$$

Então, os escorregamentos específicos máximos resultantes são os seguintes

$$(g_{s1})_{\max} = -5,95$$

$$(g_{s2})_{\max} = 1,06$$

Atente-se a que os escorregamentos específicos máximos que se verificam no pinhão e na roda são bastante desequilibrados. Na verdade, para dentados não corrigidos, o desequilíbrio pode ser diminuído aumentando o ângulo de pressão. Por exemplo, se se aumentar ângulo de pressão para 25° resultam valores mais equilibrados, isto é

$$(g_{s1})_{\max} = -1,58$$

$$(g_{s2})_{\max} = 0,71$$

2.6. RENDIMENTO

O rendimento de uma engrenagem pode ser estabelecido como o quociente entre o trabalho útil e o trabalho disponível (Henriot, 1979)

$$\eta = \frac{W_u}{W_d} \quad (2.96)$$

em que W_u diz respeito ao trabalho útil, ou seja, o trabalho que é efetivamente transmitido pela engrenagem, sendo W_d o trabalho motor disponível na engrenagem, isto é, o trabalho teórico ou total que existe na engrenagem. O trabalho útil é dado pela diferença entre o trabalho disponível (W_d) e o trabalho dissipado por atrito (W_a) durante o engrenamento, ou seja

$$W_u = W_d - W_a \quad (2.97)$$

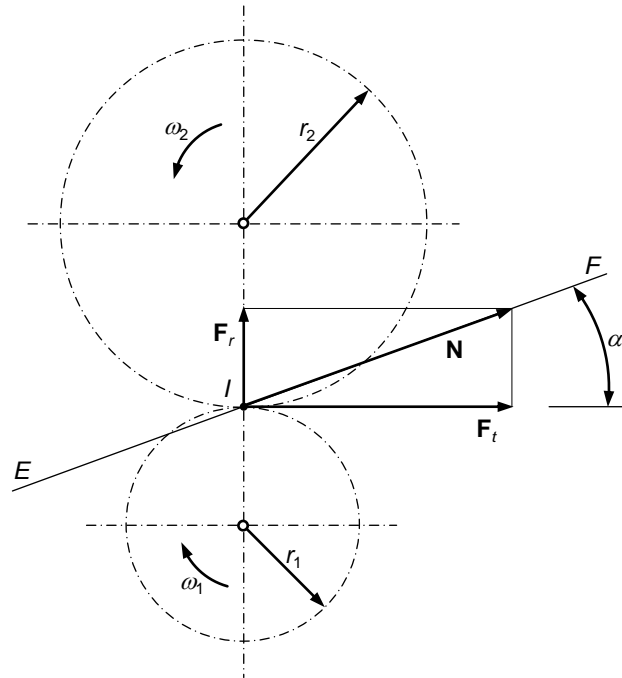


Figura 2.23 – Forças que atuam numa engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto.

Para calcular o trabalho disponível numa engrenagem cilíndrica exterior considere-se a figura 2.23, onde se admite que a força transmitida entre os dentes atua na direção da linha de engrenamento EF (Flores e Gomes, 2014). Ver-se-á mais à frente no presente estudo que esta premissa não corresponde à realidade devido à existência de atrito quando dois perfis conjugados de dentes engrenam um no outro (Niemann, 1971). Ainda na figura 2.23 estão representadas as componentes, radial e tangencial, da força que o pinhão exerce na coroa. Como é evidente, apenas a componente tangencial da força de contacto é responsável pela transmissão do movimento do pinhão para a coroa. Deste modo, o trabalho¹³ motor disponível, que pode ser fornecido à coroa, durante uma volta completa do pinhão, é dado por

¹³ O trabalho é, por definição, uma medida da energia transmitida por uma dada força (F), quando esta efetua um determinado deslocamento (Δs). O trabalho é expresso do seguinte modo $W = F\Delta s$.

$$W_d = F_t \Delta s = N \cos \alpha \pi d_1 \quad (2.98)$$

em que Δs representa o deslocamento efetuado pelo pinhão durante uma volta completa, ou seja, o perímetro πd_1 . Na equação (2.98) N representa a magnitude da força normal de contacto que atua nos dentes e α é o ângulo de pressão da engrenagem, tal como é ilustrado na figura 2.23.

É sabido que na realidade, a presença do atrito entre os perfis conjugados dá origem a uma força de atrito que atua perpendicularmente à linha de engrenamento. Por conseguinte, a força resultante que atua nas superfícies dos dentes não tem a mesma direção da linha de engrenamento. A figura 2.24 mostra exatamente esta situação, em que R representa a força resultante no contacto. Admite-se também que o pinhão (1) é a roda motora.

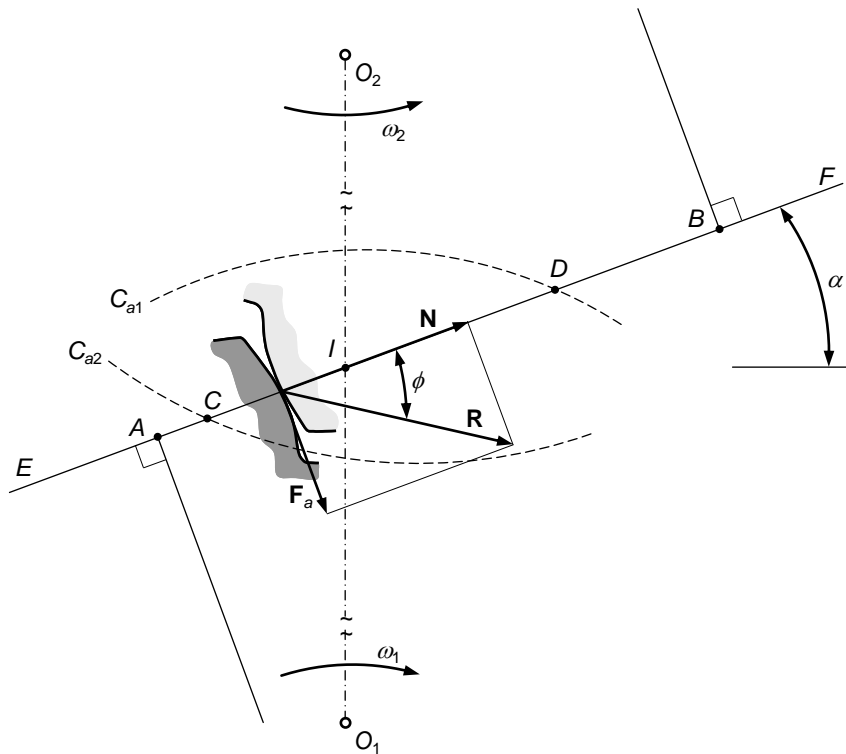


Figura 2.24 – Representação das forças que atuam nos perfis conjugados quando se considera a existência de atrito entre as superfícies dos dentes.

Atendendo à definição da lei de atrito seco de Coulomb, pode escrever-se a seguinte expressão para a força de atrito (Greenwood, 1965)

$$F_a = \mu N \quad (2.99)$$

onde μ representa o coeficiente de atrito¹⁴ e N é a força que atua na direção normal aos perfis conjugados, isto é, na direção da linha de engrenamento, tal como se ilustra na figura 2.24. Com efeito, o trabalho dissipado por atrito num par de dentes em contacto pode ser expresso do seguinte modo (Henriot, 1979)

¹⁴ O coeficiente de atrito é um parâmetro estatístico que pode ser obtido experimentalmente. Em termos geométricos, o coeficiente de atrito pode ser definido como $\mu = \tan \phi$, em que ϕ é o ângulo definido pelas forças resultante e normal, como se pode observar na figura 2.24.

$$W_a' = F_a \Delta s = \mu N g \quad (2.100)$$

em que o deslocamento associado a este trabalho é o escorregamento total que ocorre nos perfis conjugado de um par de dentes. É, pois, oportuno lembrar que na secção anterior do presente texto se estudou o fenómeno do escorregamento nas suas várias dimensões, verificando-se que o escorregamento total pode ser expresso por

$$g = \left(\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{\cos \alpha} \quad (2.101)$$

Na equação (2.101) os sinais (+) e (−) referem-se, respetivamente, a engrenamentos exteriores e interiores. Por seu lado, os comprimentos de aproximação e de afastamento, l_a e l_f , foram também estudados previamente na secção dedicada à análise da relação de condução. Assim, introduzindo as equações (2.101) na (2.100) resulta que o trabalho dissipado por atrito nos perfis conjugados é expresso de seguinte modo

$$W_a' = \mu N \left(\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{\cos \alpha} \quad (2.102)$$

Deve notar-se que a equação (2.102) apenas representa o trabalho dissipado por atrito pelos perfis conjugados dos pares de dentes engrenados, a que corresponde o comprimento de condução ($l = l_a + l_f$). A questão fundamental que se deve agora colocar prende-se com a definição da quantidade de pares de dentes que está em contacto durante cada volta completa do pinhão. Para o efeito, considere-se a representação da figura 2.25, em que ao comprimento de condução se faz corresponder um arco de circunferência com um comprimento equivalente situado sobre a circunferência de base (Henriot, 1979).

Da análise da figura 2.25 observa-se que durante o período de engrenamento, que vai desde o ponto C até ao ponto D , o pinhão descreve um ângulo θ igual a

$$\theta = \frac{l_a + l_f}{r_{b1}} = \frac{2(l_a + l_f)}{d_1 \cos \alpha} \quad (2.103)$$

Então, o número total de períodos de engrenamento é dado por

$$n_T = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2(l_a + l_f)}{d_1 \cos \alpha}} = \frac{\pi d_1 \cos \alpha}{l_a + l_f} \quad (2.104)$$

em que, por definição, a frequência (f) diz respeito ao número de ocorrências de um evento num determinado intervalo de tempo. A frequência é também definida como o inverso do período (T) (Beer e Johnston, 1991). Pode, portanto, dizer-se que a equação (2.104) representa a quantidade de pares de perfis conjugados em contacto durante uma volta completa do pinhão.

Logo, o trabalho dissipado por atrito (escorregamento) durante uma volta completa do pinhão é igual a

$$W_a = \mu N \left(\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{\cos \alpha} \frac{\pi d_1 \cos \alpha}{l_a + l_f} \quad (2.105)$$

ou seja

$$W_a = \pi\mu N \left(\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{l_a + l_f} d_1 \quad (2.106)$$

Combinando agora as equações (2.97), (2.98) e (2.106) pode inferir-se que o trabalho útil, que é transmitido efetivamente pela engrenagem durante uma rotação completa do pinhão, é dado por

$$W_u = N \cos \alpha \pi d_1 - \pi \mu N \left(\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{l_a + l_f} d_1 \quad (2.107)$$

Então, o rendimento de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos (exterior ou interior) pode ser definido do seguinte modo

$$\eta = \frac{W_d - W_a}{W_d} \quad (2.108)$$

Introduzindo agora as respectivas expressões na equação (2.108), após breve tratamento matemático, resulta que

$$\eta = 1 - \frac{\mu}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{l_a + l_f} \quad (2.109)$$

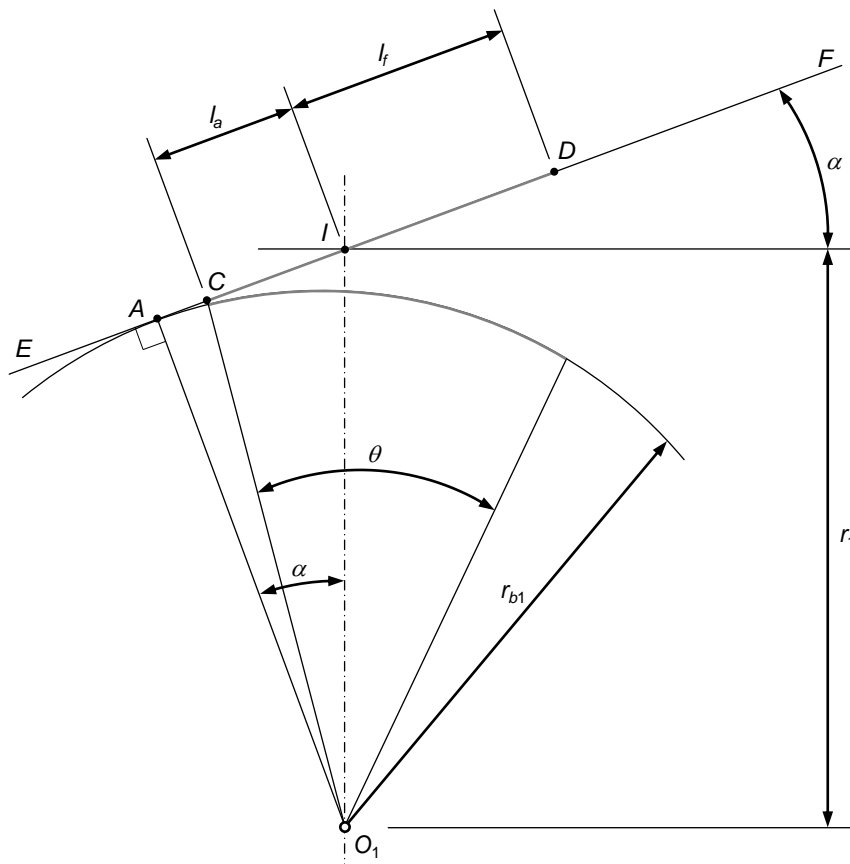


Figura 2.25 – Representação do comprimento de condução e correspondente arco sobre a circunferência de base.

Com o propósito de simplificar a equação (2.109) considere-se que

$$\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} = \frac{d_2}{d_1 d_2} \pm \frac{1}{d_2} = \frac{i}{d_2} \pm \frac{1}{d_2} = \frac{1}{d_2} (i \pm 1) = \frac{1}{m z_2} (i \pm 1) \quad (2.110)$$

e que, da equação (2.36), relativa ao estudo da continuidade do engrenamento, se pode escrever a seguinte relação

$$l_a + l_f = \varepsilon \pi m \cos \alpha \quad (2.111)$$

Com efeito, da substituição das equações (2.110) e (2.111) na equação (2.109) resulta que

$$\eta = 1 - \frac{\mu (l_a^2 + l_f^2) (i \pm 1)}{\pi \varepsilon z_2 m^2 \cos^2 \alpha} \quad (2.112)$$

Da análise da equação (2.212) conclui-se que as engrenagens interiores apresentem rendimentos superiores quando comparadas com as engrenagens exteriores. Por outro lado, o rendimento de uma engrenagem diminui com o aumento do comprimento de condução, pelo que se deve ter um módulo o menor possível, sem, contudo, desprezar a resistência dos dentes. Finalmente, deve dizer-se que os valores que resultam da expressão (2.112) não entram em consideração com a deformação elástica dos dentes, com o efeito da lubrificação, bem como possíveis erros associados ao fabrico e à montagem (Henriot, 1979; Branco *et al.*, 2009).

Exercício 2.4

Enunciado: Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm e que o coeficiente de atrito é de 0,05, determine o rendimento da engrenagem. Comente o resultado obtido.

Padrão de resposta esperado:

Para a determinação do rendimento utiliza-se a equação (2.112). Para tal, é necessário conhecer os valores dos comprimentos de aproximação e de afastamento (l_a e l_f), a relação de transmissão (i) e a relação de condução (ε). Para estes cálculos prévios, são consideradas as expressões (2.57), (2.62), (2.25) e (2.65), respetivamente, donde resulta que

$$l_a = 8,05 \text{ mm}$$

$$l_f = 6,84 \text{ mm}$$

$$i = 4$$

$$\varepsilon = 1,68$$

Logo, o rendimento da engrenagem é

$$\eta = 99,13\%$$

Refira-se que, tal como seria expectável, as engrenagens cilíndricas de dentes retos apresentam valores de rendimento bastante elevados.

2.7. INTERFERÊNCIAS

Quando se projeta uma engrenagem com perfil dos dentes em evolvente de círculo é expectável que os perfis conjugados dos pares de dentes em contacto sejam, pela própria definição de perfis conjugados, continuamente tangentes (Shigley e Mischke, 1989). Na verdade, verifica-se que em determinadas situações, que têm a ver com a configuração geométrica das rodas, os perfis dos dentes deixam de ser conjugados por uma de duas razões (Mabie e Reinholtz, 1987):

- Os perfis dos dentes em contacto não são tangentes (ou *não evolventes*),
- Os flancos dos dentes em contacto têm a tendência para se interpenetrarem.

Quando uma destas situações ocorre diz-se que há interferências de funcionamento (Henriot, 1979; Juvinal e Marshek, 2006; Norton, 2013). Quando tais circunstâncias acontecem durante o talhe dos dentes, então as interferências denominam-se de interferências de talhe (Drago, 1988). É evidente que quando tal se verifica, os dentes ficam mal talhados. No presente estudo, apenas se abordam as interferências de funcionamento.

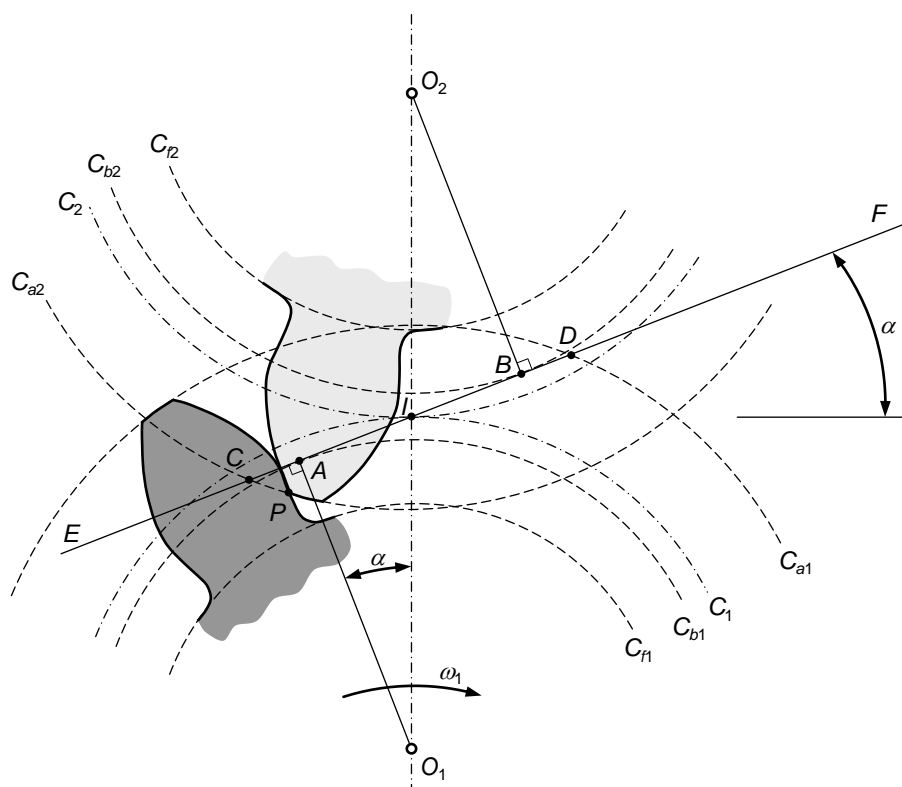


Figura 2.26 – Representação da interferência em engrenagens cilíndricas exteriores.

Para melhor compreensão do conceito e das implicações das interferências de funcionamento, considere-se a figura 2.26, em que se representa o contacto entre um par de dentes de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos (Mabie e Reinholtz, 1987). Nesta representação, o pinhão (1) é a roda motora, cujo sentido de rotação está indicado na figura 2.26. Ainda nesta figura estão representados os pontos de tangência, pontos A e B, entre as circunferências de base e a linha de engrenamento. Da análise da figura 2.26 observa-se que os pontos de início e término de engrenamento, pontos C e D, estão situados fora dos limites estabelecidos pelos pontos

tos de tangência. Este cenário configura, portanto, uma situação de interferência de funcionamento, uma vez que a ponta da coroa contacta com o flanco do dente do pinhão no ponto P , o qual está situado no interior da circunferência de base C_{b1} . Na realidade, não é possível, por definição de evolvente de círculo, a existência de perfil do dente evolvente no interior da circunferência de base (Mabie e Reinholtz, 1987; Branco *et al.*, 2009). Daqui pode inferir-se que as partes dos perfis dos dentes que se situam no interior da circunferência de base não são conjugados (ditos perfis *não evolventes*). Por isso, verifica-se que a ponta de coroa da roda interfere com a parte do flanco dos dentes do pinhão próximo da raiz.

As interferências de funcionamento ocorrem quando a coroa dos dentes da roda (elemento com maior número de dentes) contacta com os flancos dos dentes do pinhão (elemento com menor número de dentes). O problema das interferências de funcionamento agrava-se com o aumento do número de dentes da roda. Logo, pode constatar-se que o pior cenário, em termos de interferências de funcionamento, diz respeito à situação em que a roda tem um número infinito de dentes, ou seja, quando se tem um engrenamento do tipo pinhão-cremalheira (Henriot, 1979; Mabie e Reinholtz, 1987; Branco *et al.*, 2009).

Uma das consequências associadas às interferências de funcionamento prende-se com o bloqueio ou encravamento das engrenagens. Assim, no caso do engrenamento ilustrado na figura 2.26, o seu funcionamento só poderia ocorrer se se afastassem os centros das rodas e, deste modo, impusesse uma folga significativa que permitisse, ainda que em condições deficientes¹⁵, o movimento entre o pinhão e a roda. Refira-se, de novo, que os perfis dos dentes seriam conjugados apenas durante o período de funcionamento relativo ao comprimento de condução, isto é, desde o ponto A até ao ponto B . A restante parte do movimento far-se-ia em perfil *não evolvente* (Shigley e Mischke, 1989; Budynas e Nisbett, 2011).

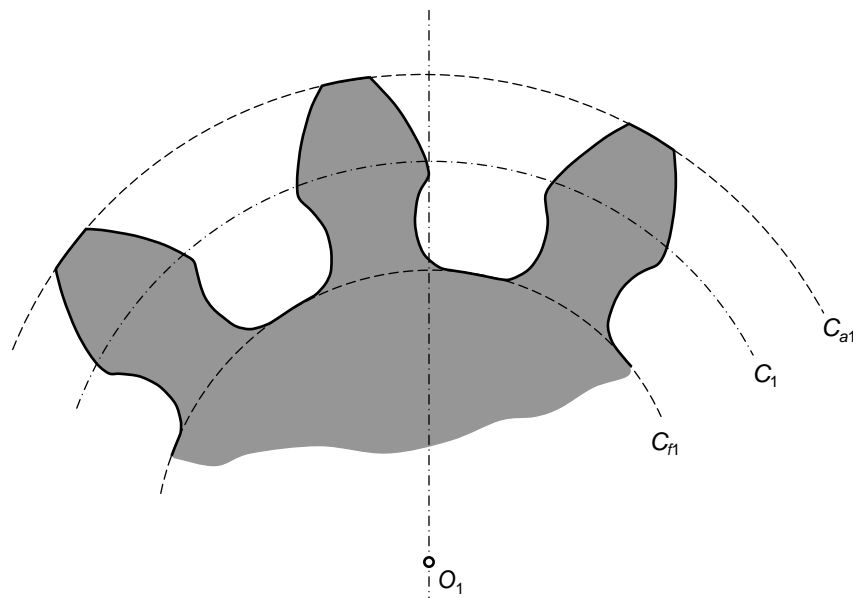


Figura 2.27 – Remoção da porção dos dentes tendo em vista a eliminação das interferências de funcionamento em engrenagens cilíndricas exteriores.

¹⁵ Na realidade, as engrenagens que operam com folgas excessivas produzem elevados níveis de ruído e choques, e originam um desgaste acelerado nas zonas em que os perfis não são conjugados.

O problema das interferências de funcionamento é total e automaticamente resolvido quando os dentes das rodas são talhados pelo processo de geração¹⁶, uma vez que a ferramenta de corte remove a porção interferente do flanco de raiz do dente, tal como se ilustra da figura 2.27. Todavia, com esta solução reduz-se a área da raiz do dente e, por conseguinte, a resistência do dente (Mabie e Reinholtz, 1987). Deve, portanto, ter-se cuidado para que a capacidade de carga dos dentes não seja demasiado penalizada quando se eliminam as interferências de funcionamento durante o talhe dos dentes pelo processo acima referido. Com efeito, com o talhe dos dentes pelo processo de geração obtém-se um flanco de dente em que uma parte é evolvente e outra é trocoide¹⁷, sendo que neste último caso os perfis em contacto não são conjugados. Contudo, o problema das interferências de funcionamento é eliminado qualquer que seja o número de dentes das rodas que vão engrenar (Shigley e Mischke, 1989; Wilson e Sadler, 1993).

Embora pouco frequente do ponto de vista prático, outra solução que permite resolver o problema das interferências de funcionamento é a que se baseia no aumento do número de dentes das rodas, mantendo a relação de transmissão. Esta opção não é interessante uma vez que o aumento do número de dentes das rodas traz consigo maior atravacamento, maior inércia, maior nível de ruído e engrenagens mais caras (Budynas e Nisbett, 2011). Em termos do projeto de engrenagens, o problema das interferências de funcionamento pode ser controlado com o aumento do ângulo de pressão (Branco *et al.*, 2009). Na verdade, o aumento do valor do ângulo de pressão tem como consequência o aumento dos diâmetros de base e, concomitantemente, o aumento do comprimento de condução. Com efeito, esta opção aumenta a parte dos flancos dos dentes com perfil em evolvente. Todavia, o aumento do ângulo de pressão é prejudicial em termos da continuidade do engrenamento e capacidade de transmissão de potência das engrenagens. Finalmente, o problema das interferências de funcionamento pode ser minimizado fazendo a correção do dentado, nomeadamente pela redução da saliência dos dentes (Henriot, 1979). O tema da correção do dentado está fora dos objetivos do presente texto, pelo que não será apresentado.

Em suma, para que não haja interferências de funcionamento num par de rodas engrenadas, as saliências dos dentes devem ter um valor de modo a que o comprimento de condução (segmento *CD*) seja igual ou inferior à distância entre os pontos de tangência da linha de engrenamento com as circunferências de base (segmento *AB*). Com efeito, os pontos *A* e *B* podem ser denominados de pontos limites de interferência. Em termos gráficos, o valor limite que a saliência dos dentes de cada uma das rodas deve ter para que não haja interferência de funcionamento, pode ser obtido fazendo-se passar as circunferências de coroa pelos correspondentes pontos de tangência (Henriot, 1979).

Com o propósito de definir o número mínimo¹⁸ de dentes que uma roda deve ter de modo a que não ocorram interferências de funcionamento considere-se a figura 2.28, em que se ilustra o engrenamento entre duas rodas cilíndricas de dentes retos. Nesta figura representa-se a situação limite de interferência, isto é, as circunferências

¹⁶ Refira-se, a título de curiosidade, que o talhe dos dentes pode ser feito por reprodução, frezamento ou por geração (Mabie e Reinholtz, 1987). Este tópico do talhe dos dentes está fora do âmbito dos objetivos do presente texto e, por isso, não é aqui incluído.

¹⁷ Trocoide é uma curva bidimensional descrita por um ponto de uma circunferência quando esta rola sem escorregar sobre uma reta.

¹⁸ Segundo Antunes (2012) o número mínimo de dentes observado numa roda dentada foi de quatro.

de coroa das rodas passam pelos pontos de tangência A e B (Mabie e Reinholtz, 1987). Ainda na figura 2.28 pode identificar-se o triângulo retângulo O_2AB , denominado triângulo limite. Da análise do triângulo O_2AB , pode escrever-se que

$$(\overline{O_2A})^2 = (\overline{O_2B})^2 + (\overline{AB})^2 \quad (2.113)$$

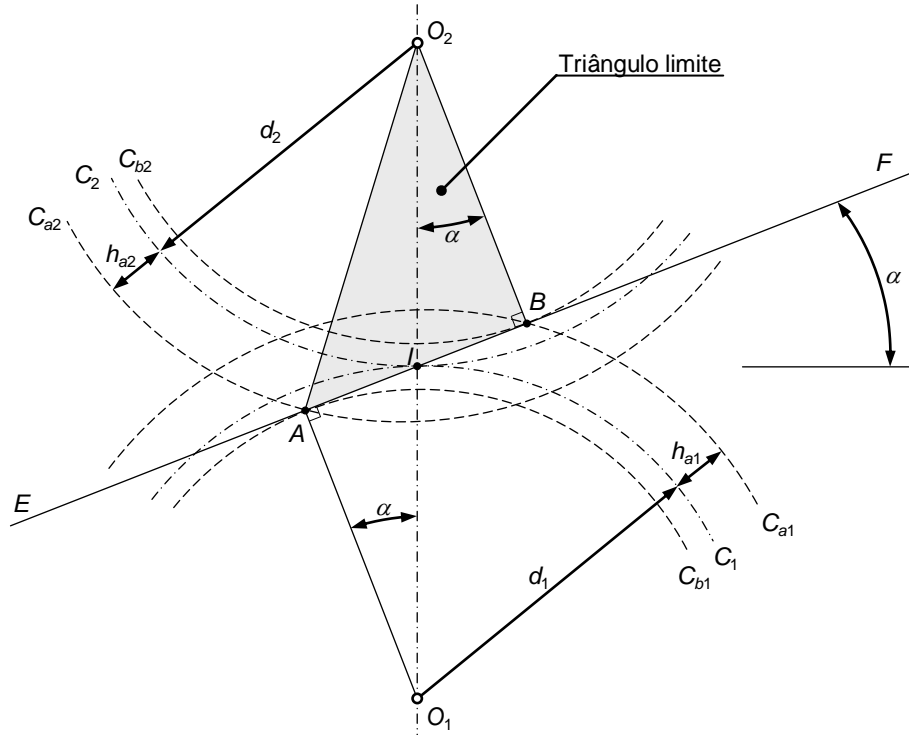


Figura 2.28 – Representação da situação limite em termos da ocorrência de interferências de funcionamento numa engrenagem cilíndrica exterior.

Atendendo a que

$$\overline{O_2A} = \frac{d_2}{2} + h_{a2} \quad (2.114)$$

$$\overline{O_2B} = \frac{d_2}{2} \cos \alpha \quad (2.115)$$

$$\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} \quad (2.116)$$

$$\overline{AI} = \frac{d_1}{2} \sin \alpha \quad (2.117)$$

$$\overline{IB} = \frac{d_2}{2} \sin \alpha \quad (2.118)$$

então, a equação (2.113) vem que¹⁹

$$\left(\frac{d_2}{2} + h_{a2} \right)^2 \leq \left(\frac{d_2}{2} \cos \alpha \right)^2 + \left(\frac{d_1}{2} \sin \alpha + \frac{d_2}{2} \sin \alpha \right)^2 \quad (2.119)$$

¹⁹ Refira-se que neste processo, atendendo a que está perante a situação limite, o sinal = é substituído pelo sinal ≤.

Por outro lado, sabe-se que

$$d_1 = mz_1 \quad (2.120)$$

$$d_2 = mz_2 \quad (2.121)$$

$$h_{a2} = m \quad (2.122)$$

Substituindo agora as expressões (2.120)-(2.122) na equação (2.119) resulta que

$$\left(\frac{mz_2}{2} + m\right)^2 \leq \left(\frac{mz_2}{2} \cos \alpha\right)^2 + \left(\frac{mz_1}{2} \sin \alpha + \frac{mz_2}{2} \sin \alpha\right)^2 \quad (2.123)$$

Resolvendo a equação (2.223) em ordem a z_1 vem que

$$z_1 \geq -z_2 + \sqrt{z_2^2 + \frac{4(z_2 + 1)}{\sin^2 \alpha}} \quad (2.124)$$

A equação (2.124) permite calcular o número mínimo de dentes que um pinhão deve ter para que não haja interferências de funcionamento. Tal como foi referido anteriormente, o caso mais desfavorável diz respeito ao engrenamento pinhão-cremalheira. Como uma cremalheira tem um número infinito de dentes, a equação (2.124) é simplificada e escrita do seguinte modo

$$z_1 \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha} \quad (2.125)$$

Registe-se que para o valor mais comum do ângulo de pressão (20°), o número mínimo de dentes do pinhão para garantir a inexistência de interferências de funcionamento é igual de 17.

Tal como foi já descrito anteriormente, as interferências de funcionamento podem ser controladas, ou mesmo eliminadas, durante a fase de projeto, reduzindo a saliência dos dentes. Com efeito, a questão central que se coloca é a de saber qual deverá o valor máximo da saliência de modo a que não haja interferências de funcionamento. Assim, admita-se que a saliência pode ser expressa em função do módulo da seguinte forma (Mabie e Reinholtz, 1987),

$$h_a = w_a m \quad (2.126)$$

em que m representa o módulo e w_a é o coeficiente de saliência.

Considerando novamente a figura 2.28, as expressões (2.113)-(2.121) e a equação (2.126) vem que

$$\left(\frac{mz_2}{2} + w_a m\right)^2 = \left(\frac{mz_2}{2} \cos \alpha\right)^2 + \left(\frac{mz_1}{2} \sin \alpha + \frac{mz_2}{2} \sin \alpha\right)^2 \quad (2.127)$$

ou seja

$$(z_1^2 + 2z_1 z_2) \sin^2 \alpha - 4w_a (z_2 + w_a) = 0 \quad (2.128)$$

Resolvendo a equação (2.128) em ordem ao coeficiente de saliência tem-se que

$$w_a = -\frac{z_2}{2} \pm \sqrt{\frac{z_2^2}{4} + \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2}{4} \sin^2 \alpha} \quad (2.129)$$

A expressão (2.129) permite calcular o valor do coeficiente de saliência máximo de modo a garantir que não há interferências de funcionamento entre duas rodas dentadas com um ângulo de pressão α e com z_1 e z_2 dentes. É evidente que o coeficiente de saliência deverá ser inferior à unidade, quando numa engrenagem existe a possibilidade de ocorrerem interferências de funcionamento. Deve agora chamar-se a atenção que a redução da saliência dos dentes penaliza a continuidade do engrenamento, pelo que, após a determinação do valor do coeficiente de saliência é necessário, fazer a verificação se existe, ou não, continuidade do engrenamento (Henriot, 1979).

Exercício 2.5

Enunciado: Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, verifique se existem interferências de funcionamento.

Padrão de resposta esperado:

Para verificar se existem interferências de funcionamento, deve ser calculado o número mínimo de dentes do pinhão para que tal não aconteça. Para este efeito, deve considerar-se a equação (2.124), donde resulta que $z_1 > 15,70$. Como na engrenagem em estudo o pinhão tem, de facto, 19 dentes, não há interferências de funcionamento.

2.8. REVISÃO DE CONHECIMENTOS

Com o propósito de proporcionar uma revisão de conhecimentos sobre a temática das engrenagens cilíndricas de dentes retos, apresenta-se, nesta secção, um conjunto diversificado de questões e de exercícios de aplicação.

1. Quais são os principais parâmetros que caracterizam uma roda dentada cilíndrica de dentes retos normalizados?
2. Qual é o valor do ângulo de pressão para dentes normalizados?
3. Distinga comprimento de aproximação de comprimento de afastamento.
4. Distinga arco de aproximação de comprimento de aproximação.
5. Defina continuidade do engrenamento.
6. Quais são as principais variáveis que influenciam a relação de condução numa engrenagem cilíndrica de dentes retos?
7. Explique por que razões a relação de condução deve estar compreendida entre 1,2 e 1,6.
8. Explique porque existe sempre um escorregamento entre as superfícies de contacto de um par de dentes.
9. Defina escorregamento total ou absoluto.
10. Explique como varia a velocidade de escorregamento ao longo da linha de condução.
11. Apresente uma definição de escorregamento específico.
12. Qual é a importância de igualar os escorregamentos específicos?
13. Defina rendimento de uma engrenagem.
14. Quais são as principais variáveis geométricas que afetam o rendimento de uma engrenagem?
15. Explique o conceito de interferências de funcionamento.
16. Liste dois métodos que permitem controlar ou minimizar as interferências de funcionamento.
17. Qual é o número mínimo de dentes que o pinhão de uma engrenagem do tipo pinhão-cremalheira deve ter para que não haja interferências de funcionamento?

18. Considerando princípios elementares, obtenha a equação (2.65) a partir da equação (2.64). Deve ser tida em consideração a definição de módulo e a lei fundamental da trigonometria.
19. Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos normalizados, com uma relação de transmissão igual a 6, um entre-eixo de 250 mm e um módulo de 3 mm. Determine o número de dentes do pinhão e o diâmetro de base da roda.
20. Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos normalizados, com uma relação de transmissão igual a 6, um entre-eixo de 250 mm e um módulo de 3 mm. Assim, calcule os comprimentos de aproximação e de afastamento.
21. Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado, em que o pinhão e a roda têm, respectivamente, 12 e 60 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, determine a distância entre os eixos das rodas. Qual é o valor do ângulo de pressão quando a distância entre os eixos das rodas aumentar 1 mm?
22. Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado, em que o pinhão e a roda têm, respectivamente, 12 e 60 dentes. O módulo da engrenagem é igual a 4 mm. Atendendo a que o coeficiente de atrito é de 0,06, determine o rendimento da engrenagem.
23. Calcule os escorregamentos específicos máximos para a engrenagem descrita no exercício 22. Comente o resultado obtido.
24. Calcule a relação de condução da engrenagem descrita no exercício 22. Comente o resultado obtido.
25. Verifique se há interferências de funcionamento na engrenagem descrita no exercício 22. Comente o resultado obtido.

2.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antunes, F. (2012) *Mecânica Aplicada - Uma abordagem prática*. Lidel.
- Beer, F.P., Johnston, E.R. (1991) *Mecânica Vetorial para Engenheiros. Cinemática e Dinâmica*. 5ª Edição, McGraw-Hill, São Paulo.
- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Cunha, L.V. (2008) *Desenho Técnico*. 14ª Edição. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Drago, R.J. (1988) *Fundamentals of Gear Design*. London, Butterworths.
- Flores, P. (2009) *Projeto de Mecanismos Came-Seguidor*. Publindústria, Porto.
- Flores, P. (2012) *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos - Exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto.
- Flores, P., Claro, J.C.P. (2007) *Cinemática de Mecanismos*. Edições Almedina, Coimbra.
- Flores, P., Gomes, J. (2014) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 1. Aspectos gerais sobre engrenagens*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 41p.
- Greenwood, D.T. (1965) *Principles of Dynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Hamrock, B.J., Schmid, S.R., Jacobson, B. (2005) *Fundamentals of Machine Elements*. 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Juvinall, R.C., Marshek, K.M. (2006) *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Mabie, H.H., Reinholtz, C.F. (1987) *Mechanisms and Dynamics of Machinery*. Fourth Edition, John Wiley and Son, New York.
- Niemann, G. (1971) *Elementos de Máquinas*. Volume II, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, Brasil.
- Norton, R.L. (2013) *Machine Design*. Pearson Education, New York.
- Shigley, J.E., Mischke, C.R. (1989) *Mechanical Engineering Design*. 5th Edition, McGraw-Hill, New York.
- Spotts, M.F., Shoup, T.E. (1998) *Design of Machine Elements*. 7th Edition Prentice-Hall, New Jersey.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.