Numeri Complessi

Eugenio Barbieri Viale

5 novembre 2024

L'insieme dei numeri complessi

Con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è scritto come :

$$(a, b) \iff a + bi$$

Il suo modulo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il suo coniugato:

$$z = a + bi \iff \overline{z} = a - bi$$

Potenze di i

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \end{aligned}$$

Questi valori si ripetono con periodo 4. Quindi:

$$i^n = i^{n \bmod 4}$$

Proprietà dei complessi coniugati

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= |z|^2 \\ \frac{1}{z} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

Operazioni in $\mathbb{C}$

Addizione:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Sottrazione:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Moltiplicazione:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Reciproco:

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Divisione:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{|c+di|^2}$$

Elevamento al quadrato:

$$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

Rappresentazione trigonometrica

$$a=r\cos\alpha \quad b=r\sin\alpha$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \alpha=\arctan\frac{b}{a}$$

Quindi un numero complesso può essere scritto come

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

Operazioni tra $z\in\mathbb{C}$ in forma trigonometrica

Moltiplicazione:

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$$

Divisione:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]$$

Reciproco:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

Potenze con esponenti $n\in\mathbb{Z}$:

$$n\geq 0 \Longrightarrow z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

$$n<0 \Longrightarrow \frac{1}{z^n}=\frac{1}{r^n}(\cos n\alpha-i\sin n\alpha)$$

Radici n-esime di $z \in \mathbb{C}$

La radice n-esima di un numero complesso ha n valori.
Le radici dell'unità immaginaria:

$$\sqrt[n]{i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \text{con k naturale e} \quad k \in [0; n-1]$$

Le radici di i, sul piano complesso, si dispongono sulla circonferenza di raggio 1. Esse formano poligoni regolari inscritti in tale circonferenza.

Le radici di un numero complesso:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right] \quad \text{con k naturale e} \quad k \in [0; n-1]$$