

Problemi del Test di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

20 novembre 2023

Introduzione

Ciao! I problemi che state per leggere sono la prima sfida che vi separa dalla possibilità di partecipare allo stage 2024. **Leggete attentamente questa introduzione:** potrà esservi utile per un approccio corretto al test.

Avete circa due settimane di tempo per risolvere i problemi, perciò sentitevi liberi di andare a cercare o studiare gli argomenti che non conoscete bene: il test serve anche a questo. Sconsigliamo fortemente di cercare direttamente le soluzioni, di far risolvere i problemi ad altri o di svolgerli in gruppo: non servirebbe né a voi (non vi aiuta ad approcciare argomenti nuovi in maniera autonoma; inoltre alle olimpiadi siete da soli!), né a noi per selezionarvi in modo appropriato (senza contare che c'è anche una prova orale...).

Per svolgere i problemi è ammesso l'utilizzo della calcolatrice scientifica, materiale da disegno e il supporto necessario per produrre effettivamente l'elaborato. Non sono consentiti ulteriori strumenti di calcolo.

I problemi sono stati ordinati grossomodo in ordine crescente di difficoltà. Ovviamente, questa è una valutazione molto soggettiva, quindi vi invitiamo a non scoraggiarvi e a provare a risolverli tutti: sicuramente, per molti di voi, alcuni dei problemi più difficili risulteranno più facili e viceversa.

Per iscrivervi dovrete inviare un unico file **pdf** con tutte le vostre soluzioni. Potete scriverlo come preferite: L^AT_EX, Word, fotografando manoscritti... L'importante è che sia perfettamente leggibile, ovviamente non potremmo dare alcun punto a ciò che non riusciamo a leggere! La dimensione massima del file unico da caricare sul sito è di 50 Megabyte.

Nel file consegnato, le soluzioni devono essere riportate nello stesso ordine dei corrispondenti problemi e deve essere chiaro a quale quesito si riferiscono!

È necessario spiegare tutti i passaggi svolti, anche parziali, e non riportare solo i risultati finali. Una risposta non giustificata, per quanto corretta, otterrà un punteggio parziale o nullo.

È importante che inviate anche soluzioni incomplete, nel caso non riusciate a risolvere alcuni problemi per intero: in questo caso verranno assegnati punteggi

*segreteria.stagefisica@sns.it

parziali. Inoltre, vi facciamo notare che, per alcuni problemi, è possibile risolvere i punti successivi anche senza aver svolto i precedenti.

Per eventuali domande rivolgersi solamente all'indirizzo email segreteria.stagefisica@sns.it. Eventuali correzioni sul testo possono essere annunciate sul sito ufficiale dello stage stagefisica.sns.it.

Ovviamente, sappiamo che i più giovani potrebbero avere lo svantaggio di conoscere meno argomenti: ne terremo conto. Il test è valutato su un totale di 1000 punti. Il punteggio minimo necessario (ma non sufficiente!) per fare l'orale è di soli 50 punti, al di sotto dei quali scarteremo la richiesta. Buon lavoro!

1 Cilindro equilibrista — 40 pt.

Un cilindro di raggio di base R ha una distribuzione di massa non uniforme, tale che il suo centro di massa si trova a una distanza r dal suo asse. Il cilindro viene adagiato su un piano inclinato, in modo che il suo asse sia orizzontale. Il piano inclinato è scabro e forma un angolo θ con l'orizzontale.

1. Trova le posizioni di equilibrio del sistema, nel caso in cui esse esistano. Per ognuna delle posizioni di equilibrio trovate, determina l'angolo α così definito:
 - siano G , O , rispettivamente, le proiezioni (sulla base del cilindro) del centro di massa e del centro geometrico dello stesso;
 - sia \hat{r} la retta passante per G e O ;
 - sia α l'angolo tra \hat{r} e la retta verticale passante per O .

Una schematizzazione del sistema è mostrata in Figura 1.

2. Determina θ_{lim} , cioè l'angolo tra il piano inclinato e l'orizzontale oltre il quale non esistono posizioni di equilibrio.

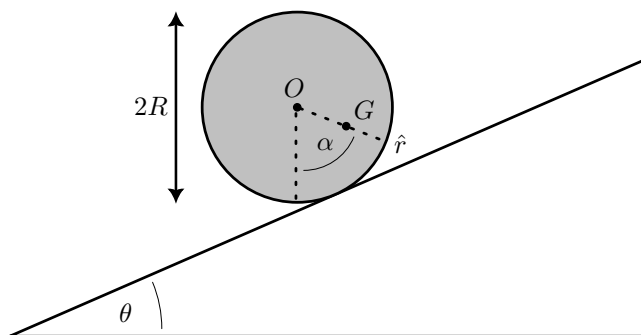


Figura 1: Disegno schematico della configurazione del Problema 1.

2 Pendolo su un piano inclinato — 40 pt.

Su un piano inclinato è posto un filo molto sottile e inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza L , come mostrato in Figura 2. Il piano inclinato forma un angolo θ con l'orizzontale. Un estremo del filo è fissato a un punto del piano inclinato, mentre all'altro estremo è attaccata una sferetta di massa m , raggio $r \ll L$ e momento di inerzia $I = \beta mr^2$, calcolato rispetto a un asse passante per il suo centro. La distribuzione di massa della sferetta ha simmetria sferica.

1. Nel caso in cui non sia presente attrito fra sferetta e piano, trova il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

2. Calcola la stessa quantità nel caso in cui ci sia abbastanza attrito fra la sferetta e il piano, in modo che il moto della sferetta sia di puro rotolamento senza strisciamento in ogni istante.

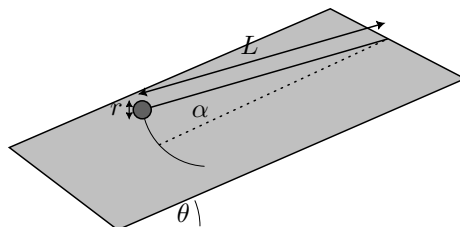


Figura 2: Disegno schematico della configurazione del problema 2.

3 Trasporto di calore — 50 pt.

Una sbarretta a forma di parallelepipedo è costituita da un materiale di conducibilità termica k_1 . Una volta scelte due facce opposte della sbarretta, se ne mantiene una a temperatura T_A e l'altra a temperatura T_B . Sia h_1 la distanza tra le due facce ed S l'area delle stesse. Ogni effetto legato all'irraggiamento può essere trascurato, mentre l'aria può essere considerata un isolante termico perfetto.

1. Determina il profilo della temperatura in funzione della posizione all'interno della sbarretta, in condizioni stazionarie.
2. Supponiamo di attaccare una seconda sbarretta di lunghezza h_2 , conducibilità termica k_2 e sezione S sulla prima, in modo da costruire una nuova sbarretta di lunghezza $h_1 + h_2$. Mantenendo un'estremità della nuova sbarretta alla temperatura T_A e l'altra alla temperatura T_B , dopo un po' il sistema giunge a una condizione stazionaria. Determina il profilo di temperatura in funzione della posizione all'interno della sbarretta. Trova, inoltre, la conducibilità termica efficace della nuova sbarretta k_{ser} , cioè la conducibilità termica che una sbarretta di uguale lunghezza e sezione avrebbe se fosse fatta di un materiale omogeneo.
3. Riferendoci al punto precedente, supponiamo che $h_1 = h_2$ e che le sbarrette vengano unite in maniera tale da costruire una nuova sbarretta di sezione $2S$ e lunghezza h_1 . Mantenendo un'estremità della nuova sbarretta alla temperatura T_A e l'altra alla temperatura T_B , dopo un po' il sistema giunge a una condizione stazionaria. Determina il profilo di temperatura in funzione della posizione all'interno della sbarretta. Trova, inoltre, la conducibilità termica efficace della nuova sbarretta k_{ser} , cioè la conducibilità termica che una sbarretta di uguale lunghezza e sezione avrebbe se fosse fatta di un materiale omogeneo.

4 Corda massiva su un cuneo — 60 pt.

Una corda, di lunghezza $2L$ e densità di massa uniforme λ , è appoggiata e tenuta dritta su un cuneo di apertura angolare 2α , come schematizzato in Figura 3. Il coefficiente di attrito statico tra la corda e i lati del cuneo è pari a μ , mentre sulla punta del cuneo è presente una puleggia di dimensioni trascurabili, attraverso la quale la corda può strisciare liberamente senza attrito.

1. Indicando con x la distanza tra l'estremità destra della corda e la punta del cuneo, determina per quali valori di x il sistema è in equilibrio.
2. Fissando ora il solo valore di α , determina per quali valori di μ la corda è sempre in equilibrio per ogni possibile $0 \leq x \leq 2L$.

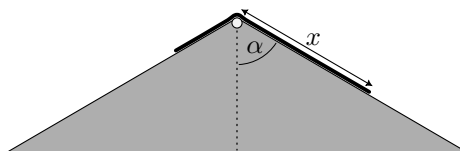


Figura 3: Disegno schematico della configurazione del problema 4.

5 Lento processo termodinamico — 70 pt.

Un cilindro termicamente isolato dall'esterno è suddiviso in due scompartimenti da un pistone al suo interno. Il pistone ha la particolarità di essere un perfetto conduttore di calore ed è a tenuta stagna, ossia non permette lo scambio di materia tra i due scompartimenti.

Inizialmente, i due scompartimenti A e B hanno lo stesso volume $V_0/2$ e contengono ciascuno una mole di gas monoatomico alla stessa temperatura $T_0 = 300\text{ K}$. Un agente esterno muove lentamente il pistone fino a quando i volumi dei due scompartimenti diventano, rispettivamente, $V_0/3$ e $2V_0/3$. Il processo è abbastanza lento, in modo che la temperatura del gas contenuto in A sia istantaneamente uguale alla temperatura del gas contenuto in B.

1. Quanto vale la temperatura finale all'interno del cilindro?
2. Quanto vale la variazione di entropia del sistema?

6 Fagiolo nella ciotola — 90 pt.

Un punto materiale di massa m si muove all'interno di una ciotola semisferica e omogenea, di massa M , raggio R , e altezza h libera di muoversi lungo un piano orizzontale liscio, come illustrato in Figura 4. La ciotola è libera di traslare, ma non può ruotare, essendo essa fissata a un binario. Nel sistema non è presente alcun attrito. All'istante iniziale, il punto materiale viene posto nel punto A.

1. Giustificando adeguatamente la risposta, stabilisci se il punto materiale può perdere contatto con la ciotola durante il moto.
2. Stabilisci se il punto materiale può raggiungere l'altra estremità della ciotola (il punto B in Figura 4) durante il suo moto. In caso affermativo, calcola di quanto si è spostato il centro di massa della ciotola quando ciò accade. Quanto vale lo spostamento massimo del centro di massa della ciotola durante il moto?
3. Descrivi il tipo di moto che l'intero sistema compie. In particolare, trova l'espressione delle funzioni $\Delta x_M(\theta)$ e $V_M(\theta)$, dove θ è l'angolo spazzato dal punto materiale all'interno della ciotola, Δx_M lo spostamento del baricentro della ciotola rispetto alla sua posizione iniziale e V_M la velocità della ciotola.

Sostituiamo la ciotola semisferica con una ciotola di massa M , tagliata a un angolo pari a $\frac{\pi}{4}$, come mostrato in Figura 5.

4. Sotto le stesse ipotesi dei punti precedenti, calcola la gittata del punto materiale nel moto successivo al distacco dalla guida. In questo caso, per *gittata* si intende la proiezione lungo x della distanza tra la posizione del punto di distacco sulla ciotola, calcolata nell'istante in cui il punto materiale tocca il pavimento, e il punto stesso in cui il punto materiale tocca il pavimento.

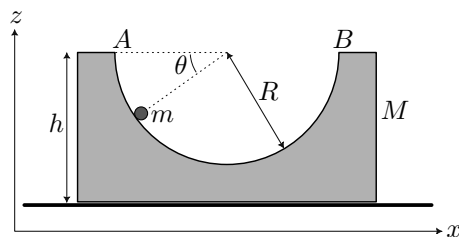


Figura 4: Disegno schematico della prima configurazione del Problema 6.

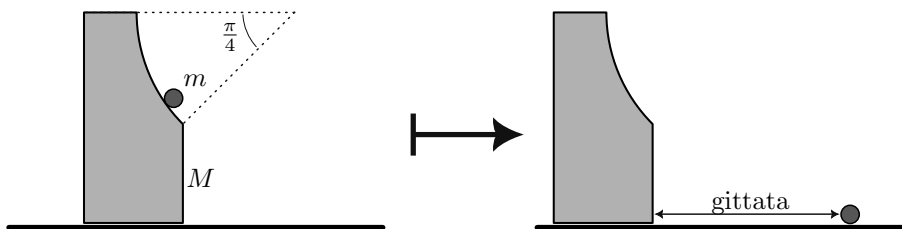


Figura 5: Disegno schematico della seconda configurazione del Problema 6.

7 Repulsione in un campo elettrico — 80 pt.

Due elettroni sono liberi di muoversi nel piano xy . All'istante $t = 0$, uno dei due è fermo nel punto $(d, 0)$, mentre l'altro si trova nell'origine e ha velocità v , inclinata di un angolo θ rispetto alla congiungente dei due elettroni. Effetti relativistici e irraggiamento elettromagnetico possono essere trascurati.

1. Trova la minima distanza tra i due elettroni durante il moto successivo.
2. Ripeti il conto del punto precedente nel caso in cui nello spazio sia presente anche un campo elettrico uniforme $E_0 \hat{x}$.

8 Espansione inconsueta — 80 pt.

Un gas perfetto è chiuso dentro un contenitore, a pressione p_0 e volume V_0 . Il gas ha calore specifico a volume costante C_V .

Successivamente, esso subisce una trasformazione quasistatica che porta la pressione al valore αp_0 e il volume a βV_0 , con $\alpha\beta \neq 1$. Durante tutto il processo, il rapporto tra la variazione infinitesima di energia interna dU e il lavoro infinitesimo svolto δL è costante. Quanto vale il lavoro totale svolto dal gas?

9 Oscillazioni in salse varie — 100 pt.

Un disco di raggio R e massa M , uniformemente distribuita, è libero di ruotare nel piano xy attorno a un asse fisso passante per il suo centro. Una molla con costante elastica k ha un estremo fissato nel punto P , sul piano xy a distanza $3R$ dal centro del disco, e l'altro attaccato alla circonferenza esterna. Nel sistema non è presente alcun attrito.

1. Trova il periodo delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile, nel caso la lunghezza a riposo della molla è nulla.
2. Nel caso in cui la lunghezza a riposo della molla vale $2R$, sia $T(\phi)$ il periodo delle oscillazioni di ampiezza ϕ . Calcola $\frac{T(2\phi)}{T(\phi)}$ per $\phi \ll 1$.

10 Effetti di marea — 130 pt.

Nello spazio sono presenti un pianeta di massa M e una navicella che si mantiene ferma rispetto al pianeta, in un sistema di riferimento inerziale. All'interno della navicella è presente un campo elettrico uniforme di modulo E_0 , parallelo alla congiungente navicella-pianeta, diretto verso il pianeta. Nell'astronave si trova un tubo cilindrico molto sottile, il cui centro è tenuto fermo nella navicella, e che forma un angolo θ costante rispetto alla congiungente navicella-pianeta. All'interno del tubo può scorrere senza attrito una piccolo corpo di massa m ,

dotato di una carica elettrica q . La distanza tra il centro del tubo e il centro del pianeta è R . Il sistema è rappresentato in Figura 6.

1. Determina il valore della carica q per il quale il centro del tubo è una posizione di equilibrio per il corpo di massa m . Da questo punto in avanti, assumi che la precedente condizione sia soddisfatta.
2. Supponiamo che il corpo di massa m si sposti lungo il tubo di una distanza s minore della metà della lunghezza del tubo stesso. Determina, al primo ordine in $\frac{s}{R}$, la forza netta agente sul corpo di massa m in questa configurazione. Può essere utile l'espansione $(1+x)^\alpha \simeq 1+\alpha x$.
3. Determina per quali angoli θ il centro del tubo è una posizione di equilibrio stabile per il corpo di massa m .

Il tubo e il corpo di massa m vengono sostituiti da un'asta di massa trascurabile e lunghezza $2L$ (con $L \ll R$), ai cui estremi sono attaccati due corpi di masse uguali m , dotati di cariche elettriche uguali q pari a quelle determinate nel punto 1. Le masse sono attaccate all'asta tramite una colla che può resistere a forze esterne massime pari a F_0 . Stavolta, il centro dell'asta è fissato rispetto alla navicella ma l'asta è libera di ruotare attorno al proprio centro.

4. Se inizialmente l'asta ha una velocità angolare nulla e l'angolo θ tra l'asta e la congiungente navicella-pianeta vale $\frac{\pi}{4}$, per quali valori di F_0 le due masse si staccheranno nel moto che segue?

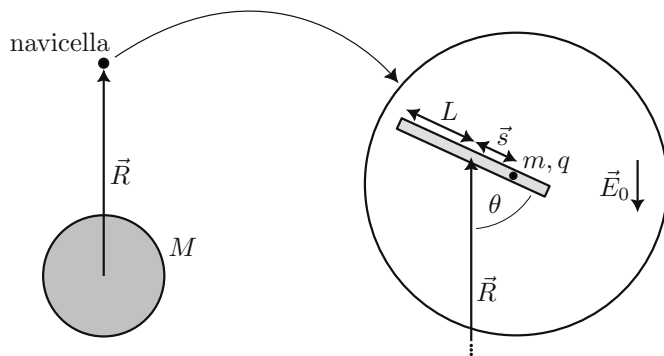


Figura 6: Disegno schematico della configurazione del Problema 10.

11 Raggio apparente di un pianeta — 150 pt.

Attorno a un pianeta di raggio R è presente un'atmosfera distribuita a simmetria sferica. L'indice di rifrazione $n(r)$ è una funzione derivabile due volte. Essa vale $n_0 > 1$ sulla superficie e tende a 1 per distanze molto grandi dal pianeta.

1. Un raggio di luce parte dalla superficie del pianeta formando un angolo θ_0 con la normale al suolo nel punto di partenza. Prova a generalizzare la legge di Snell per corpi a simmetria sferica. In altre parole, trova una relazione tra $n(r)$, la distanza radiale r e l'angolo $\theta(r)$ formato con la direzione radiale in ogni punto della traiettoria del raggio di luce.
2. Trova la traiettoria di un generico raggio di luce all'interno dell'atmosfera (basta anche una forma implicita).
3. Fissato un raggio di luce che parte con angolo θ_0 dalla superficie del pianeta, determina la condizione su $n(r)$ affinché questo si allontani indefinitamente dal pianeta e descrivi la traiettoria che il raggio luminoso segue asintoticamente.
4. Qual è la condizione su $n(r)$ affinché *tutti* i raggi che partono dalla superficie si allontanino indefinitamente dal pianeta?
5. Qual è il raggio apparente del pianeta per un osservatore posto a distanza infinita da esso se $n(r)$ soddisfa la condizione del punto precedente?
6. Qual è il raggio apparente del pianeta per un osservatore posto a distanza infinita da esso se $n(r)$ non rispetta la condizione del punto 4?
7. Descrivi qualitativamente come appare il pianeta a un osservatore lontano nelle condizioni del punto 6.

12 Rimbalzi in un campo magnetico — 110 pt.

Una sbarretta metallica di massa m e lunghezza l può scorrere senza attrito su due aste conduttrici parallele, poste a distanza l l'una dall'altra, come mostrato in Figura 7. Il movimento è limitato dalla presenza di due muri non conduttori, W_1 e W_2 , posti a distanza D l'uno dall'altro. Un condensatore con capacità C e un resistore di resistenza R sono collegati in serie alle aste conduttrici tramite l'interruttore K , inizialmente aperto. Il potenziale dell'armatura superiore del condensatore è inizialmente maggiore di quello dell'armatura inferiore di $\Delta V_0 = q_0/C$, con $q_0 > 0$. “Inferiore” e “superiore” sono riferiti al disegno in Figura 7. Un campo magnetico uniforme di modulo \vec{B}_0 è diretto perpendicolarmente al piano del circuito (nel verso entrante), ed è tale per cui $m > B_0^2 l^2 C$ e $Rq_0 \ll D l B_0$. Quando l'interruttore viene chiuso, la sbarretta è ferma e si trova a distanza $\frac{D}{2}$ da entrambi i muri.

1. Quale muro viene urtato per primo dalla sbarretta?
2. Trova la velocità v_1 della sbarretta alla quale avviene il primo impatto.
3. Assumendo che tutti gli urti siano elastici, trova la velocità v_n dell' n -esimo impatto.

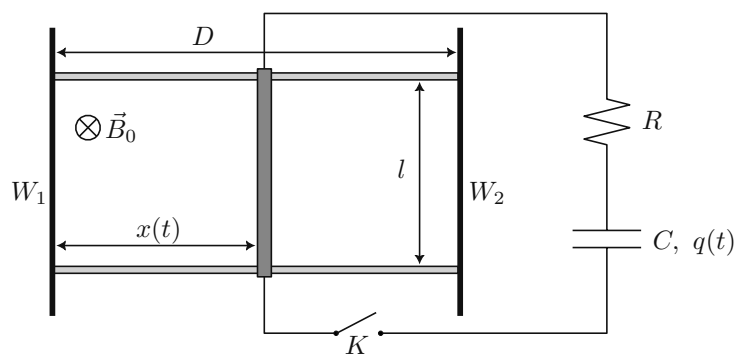


Figura 7: Disegno schematico della configurazione del Problema 12.