Limiti

Eugenio Barbieri Viale

27 maggio 2025

Intorno di un punto

Dato un numero reale x_0, un intorno completo di x_0 è un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$ contenente x_0

$$I(x_0) = (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2)$$

con $\delta_1, \delta_2 \in R^+$

Intorno circolare

L'intorno circolare è un intorno completo in cui $\delta_1 = \delta_2, \in R^+$

$$I(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

L'intorno circolare può anche essere scritto come

$$I_\delta(x_0) = \{x \in R : |x - x_0| < \delta\}$$

Intorno destro e sinistro

- intorno sinistro di $x_0 : I_\delta = (x_0 - \delta; x_0)$
- intorno destro di $x_0 : I_\delta = (x_0; x_0 + \delta)$

Corollario

L'intersezione e l'unione di due intorni completi, e in particolare circolari, di x_0 sono ancora intorni completi, e in particolare circolari, di x_0

Estremo superiore

Dato un insieme $E \subset R$ superiormente limitato, l'estremo superiore di E è quel numero reale M per il quale:

- M è maggiorante di E: $x \leq M, \forall x \in E$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : x > (M - \varepsilon)$

Se $sup_E \in E$ allora è anche massimo di E (max_E)

L'estremo superiore di un insieme non vuoto e superiormente limitato esiste sempre ed è unico

Estremo inferiore

Dato un insieme $E \subset R$ inferiormente limitato, l'estremo inferiore di E è quel numero reale L per il quale:

- L è minorante di E: $x \geq L, \forall x \in E$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : x < (L + \varepsilon)$

Se $inf_E \in E$ allora è anche minimo di E (min_E)

L'estremo inferiore di un insieme non vuoto e inferiormente limitato esiste sempre ed è unico

Punto isolato

Sia x_0 appartenente a un sottoinsieme A di R. x_0 è un punto isolato di A se esiste almeno un intorno I di x_0 che non contiene altri elementi di A diversi di x_0

Punto di accumulazione

Il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di $A \subset R$ se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A

Limite

Si dice che $f(x)$ tende ad $l \in R$, per x che tende a x_0, e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se, comunque si fissa un intorno $U_\varepsilon(l)$ di raggio ε, esiste un $\delta > 0$, tale che, per ogni x dell'intorno $I_\delta(x_0)$ di raggio δ, privato di x_0, risulti:

$$f(x) \in U_\varepsilon(l)$$

Oppure, comunque si fissa $\varepsilon > 0$, esiste un intorno $I(x_0) \cap D_f$ tale che, per ogni $x \in I(x_0) \wedge x \neq x_0$, si abbia:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

In simboli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \to \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Limite per eccesso

L'intorno di l è un intorno destro: $U_\varepsilon^+(l) = (l; l + \varepsilon)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+ \to \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists I(x_0) : l < f(x) < l + \varepsilon, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Limite per difetto

L'intorno di l è un intorno sinistro $U_\varepsilon^-(l) = (l - \varepsilon; l)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^- \to \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists I(x_0) : l - \varepsilon < f(x) < l, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Limite destro

L'intorno di x_0 è un intorno destro: $I_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta)$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \to \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists I^+(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I^+(x_0), x \neq x_0$$

Limite sinistro

L'intorno di x_0 è un intorno sinistro $I_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \to \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I^-(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I^-(x_0), x \neq x_0$$

Si osserva che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \wedge \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

Limite ∞ per x che tende a un valore finito

Per $+\infty$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \to \forall M > 0 \;\; \exists I(x_0) : f(x) > M, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Per $-\infty$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \to \forall M > 0 \;\; \exists I(x_0) : f(x) < -M, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

In questi casi si hanno degli asintoti verticali (destro per x_0^+, sinistro per x_0^-)

Limite finito per x che tende a ∞

Per $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \to \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists c > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x > c$$

Per $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \to \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists c > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x < -c$$

In questi casi si hanno degli asintoti orizzontali (destro per $+\infty$, sinistro per $-\infty$)

Limite ∞ per x che tende a ∞

Per $+\infty$, $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \to \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists c > 0 : f(x) > M, \forall x > c$$

Per $-\infty$, $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \to \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists c > 0 : f(x) < -M, \forall x < -c$$

Continuità

Una funzione è continua nel suo dominio $D_f \subset R$ se:

$$\forall x \in D_f \to \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Limiti notevoli

Limite notevole 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dimostrazione:

$$\frac{\sin -x}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

quindi:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}$$

se $x \to 0^+$, si assume $x < \frac{\pi}{2}$, e quindi $\sin x > 0$

$$\sin x < x < \tan x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$$

Quindi, per il *teorema dei due carabinieri*:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \to \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Limite notevole 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Dimostrazione:

$$\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x^2}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x^2}{x(1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

Per il *teorema del prodotto dei limiti*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Limite notevole 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 0$$

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Limite notevole 4

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

In generale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

Limite notevole 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

In generale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

Dimostrazione:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

Ponendo:

$$y = \frac{1}{x} \to x = \frac{1}{y}$$

Allora, per $x \to 0$, $y \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left(\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)$$

$$\ln e = 1$$

Limite notevole 6

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

In generale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Dimostrazione:
Ponendo:

$$y = e^x - 1 \to e^x = y + 1 \to x = \ln(1+y)$$

Per $x \to 0$, $y \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1$$

Limite notevole 7

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{k\ln(1+x)} - 1}{x} \cdot \frac{k\ln(1+x)}{k\ln(1+x)}$$

Applicando i due limiti notevoli precedenti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{k\ln(1+x)} - 1}{k\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot k$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot k = k$$