

# Limiti

Eugenio Barbieri Viale

27 maggio 2025

## Intorno di un punto

*Dato un numero reale  $x_0$ , un intorno completo di  $x_0$  è un qualunque intervallo aperto  $I(x_0)$  contenente  $x_0$*

$$I(x_0) = (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2)$$

con  $\delta_1, \delta_2 \in R^+$

## Intorno circolare

L'intorno circolare è un intorno completo in cui  $\delta_1 = \delta_2, \in R^+$

$$I(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

L'intorno circolare può anche essere scritto come

$$I_\delta(x_0) = \{x \in R : |x - x_0| < \delta\}$$

## Intorno destro e sinistro

- intorno sinistro di  $x_0$  :  $I_\delta = (x_0 - \delta; x_0)$
- intorno destro di  $x_0$  :  $I_\delta = (x_0; x_0 + \delta)$

## Corollario

*L'intersezione e l'unione di due intorni completi, e in particolare circolari, di  $x_0$  sono ancora intorni completi, e in particolare circolari, di  $x_0$*

## Estremo superiore

*Dato un insieme  $E \subset \mathbb{R}$  superiormente limitato, l'estremo superiore di  $E$  è quel numero reale  $M$  per il quale:*

- $M$  è maggiorante di  $E$ :  $x \leq M, \forall x \in E$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : x > (M - \varepsilon)$

Se  $\sup E \in E$  allora è anche massimo di  $E$  ( $\max E$ )

*L'estremo superiore di un insieme non vuoto e superiormente limitato esiste sempre ed è unico*

## Estremo inferiore

*Dato un insieme  $E \subset \mathbb{R}$  inferiormente limitato, l'estremo inferiore di  $E$  è quel numero reale  $L$  per il quale:*

- $L$  è minorante di  $E$ :  $x \geq L, \forall x \in E$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : x < (L + \varepsilon)$

Se  $\inf E \in E$  allora è anche minimo di  $E$  ( $\min E$ )

*L'estremo inferiore di un insieme non vuoto e inferiormente limitato esiste sempre ed è unico*

## Punto isolato

*Sia  $x_0$  appartenente a un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$ .  $x_0$  è un punto isolato di  $A$  se esiste almeno un intorno  $I$  di  $x_0$  che non contiene altri elementi di  $A$  diversi di  $x_0$*

## Punto di accumulazione

*Il numero reale  $x_0$  è un punto di accumulazione di  $A \subset \mathbb{R}$  se ogni intorno completo di  $x_0$  contiene infiniti punti di  $A$*

## Limite

Si dice che  $f(x)$  tende ad  $l \in R$ , per  $x$  che tende a  $x_0$ , e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se, comunque si fissa un intorno  $U_\varepsilon(l)$  di raggio  $\varepsilon$ , esiste un  $\delta > 0$ , tale che, per ogni  $x$  dell'intorno  $I_\delta(x_0)$  di raggio  $\delta$ , privato di  $x_0$ , risulti:

$$f(x) \in U_\varepsilon(l)$$

Oppure, comunque si fissa  $\varepsilon > 0$ , esiste un intorno  $I(x_0) \cap D_f$  tale che, per ogni  $x \in I(x_0) \wedge x \neq x_0$ , si abbia:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

## Limite per eccesso

L'intorno di  $l$  è un intorno destro:  $U_\varepsilon^+(l) = (l; l + \varepsilon)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+ \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : l < f(x) < l + \varepsilon, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

## Limite per difetto

L'intorno di  $l$  è un intorno sinistro  $U_\varepsilon^-(l) = (l - \varepsilon; l)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^- \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : l - \varepsilon < f(x) < l, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

## Limite destro

L'intorno di  $x_0$  è un intorno destro:  $I_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I^+(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I^+(x_0), x \neq x_0$$

## Limite sinistro

L'intorno di  $x_0$  è un intorno sinistro  $I_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists I^-(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I^-(x_0), x \neq x_0$$

Si osserva che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \wedge \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

## Limite $\infty$ per $x$ che tende a un valore finito

Per  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \rightarrow \forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) > M, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Per  $-\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \rightarrow \forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) < -M, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

In questi casi si hanno degli asintoti verticali (destro per  $x_0^+$ , sinistro per  $x_0^-$ )

## Limite finito per $x$ che tende a $\infty$

Per  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x > c$$

Per  $-\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x < -c$$

In questi casi si hanno degli asintoti orizzontali (destro per  $+\infty$ , sinistro per  $-\infty$ )

## Limite $\infty$ per $x$ che tende a $\infty$

Per  $+\infty, +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c > 0 : f(x) > M, \forall x > c$$

Per  $-\infty, -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c > 0 : f(x) < -M, \forall x < -c$$

## Continuità

Una funzione è continua nel suo dominio  $D_f \subset R$  se:

$$\forall x \in D_f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

## Limiti notevoli

### Limite notevole 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Dimostrazione:*

$$\frac{\sin -x}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}$$

se  $x \rightarrow 0^+$ , si assume  $x < \frac{\pi}{2}$ , e quindi  $\sin x > 0$

$$\sin x < x < \tan x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$$

Quindi, per il *teorema dei due carabinieri*:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

### Limite notevole 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

*Dimostrazione:*

$$\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x^2}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x^2}{x(1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

Per il *teorema del prodotto dei limiti*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

### Limite notevole 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

*Dimostrazione:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

### Limite notevole 4

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

In generale:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

### Limite notevole 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

In generale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

*Dimostrazione:*

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \ln(1+x) = \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

Ponendo:

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y}$$

Allora, per  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln \left( \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right)$$

$$\ln e = 1$$

## Limite notevole 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

In generale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

*Dimostrazione:*

Ponendo:

$$y = e^x - 1 \rightarrow e^x = y + 1 \rightarrow x = \ln(1 + y)$$

Per  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1$$

## Limite notevole 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

*Dimostrazione:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{k \ln(1+x)} - 1}{x} \cdot \frac{k \ln(1+x)}{k \ln(1+x)}$$

Applicando i due limiti notevoli precedenti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{k \ln(1+x)} - 1}{k \ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot k \\ = 1 \cdot 1 \cdot k = k \end{aligned}$$