Goniometria

Eugenio Barbieri Viale

11 maggio 2024

1 Funzioni goniometriche

$$sin(x) : \mathbb{R} \to [-1; 1]$$
$$cos(x) : \mathbb{R} \to [-1; 1]$$
$$tan(x) : \mathbb{R} - \{\alpha;\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$$
$$cot(x) : \mathbb{R} - \{\alpha;\ \alpha \neq k\pi\} \to \mathbb{R}$$
$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} : \mathbb{R} - \{\alpha;\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$$
$$csc(x) = \frac{1}{sin(x)} : \mathbb{R} - \{\alpha;\ \alpha \neq k\pi\} \to \mathbb{R}$$

$$arcsin(x) : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$$
$$arccos(x) : [-1; 1] \to [0; \pi]$$
$$arctan(x) : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$$
$$arccot(x) : \mathbb{R} \to [0; \pi]$$

2 Angoli associati

$$sin(-\alpha) = -sin(\alpha) \qquad cos(-\alpha) = cos(\alpha)$$

$$sin(2\pi - \alpha) = -sin(\alpha) \qquad cos(2\pi - \alpha) = cos(\alpha)$$

$$sin(\pi - \alpha) = sin(\alpha) \qquad cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$$

$$sin(\pi+\alpha) = -sin(\alpha) \qquad cos(\pi+\alpha) = -cos(\alpha)$$

$$sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = cos(\alpha) \qquad cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = sin(\alpha)$$

$$sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = cos(\alpha) \qquad cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -sin(\alpha)$$

$$sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = -cos(\alpha) \qquad cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = -sin(\alpha)$$

$$sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -cos(\alpha) \qquad cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = sin(\alpha)$$

3 Formule di addizione e sottrazione

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)$$
$$cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta)$$

$$sin(\alpha+\beta) = sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)$$
$$sin(\alpha-\beta) = sin(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sin(\beta)$$

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{tan(\alpha)+tan(\beta)}{1-tan(\alpha)tan(\beta)}$$
$$tan(\alpha-\beta) = \frac{tan(\alpha)-tan(\beta)}{1+tan(\alpha)tan(\beta)}$$

Una funzione lineare in $sin(x)$ e $cos(x)$ può essere ricondotta a una funzione sinusoidale unica.

$$asin(x) + bcos(x) = rsin(x+\alpha)$$

dove:

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

Per individuare univocamente α bisogna riconoscere il giusto quadrante, ricordando che $a = cos(\alpha)$ e $b = sin(\alpha)$
Angolo tra due rette incidenti e non perpendicolari:

$$tan(\gamma) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

4 Formule di duplicazione

$$sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$$

$$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)$$
$$cos(2\alpha) = 1 - 2sin^2(\alpha)$$
$$cos(2\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1$$

$$tan(2\alpha) = \frac{2tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)}$$

$$sin^2(\alpha) = \frac{1 - cos(2\alpha)}{2} \quad cos^2(\alpha) = \frac{1 + cos(2\alpha)}{2}$$

5 Formule di bisezione

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(\alpha)}{2}}$$
$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(\alpha)}{2}}$$

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sin(\alpha)}{1 + cos(\alpha)} \quad \text{con} \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi$$
$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - cos(\alpha)}{sin(\alpha)} \quad \text{con} \quad \alpha \neq \pi + k\pi$$

6 Formule parametriche

Ponendo $t = tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$sin(\alpha) = \frac{2t}{1 + t^2}$$
$$cos(\alpha) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
$$tan(\alpha) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

7 Formule di prostaferesi

$$sin(p) + sin(q) = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$sin(p) - sin(q) = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$cos(p) + cos(q) = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$cos(p) - cos(q) = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

8 Formule di Werner

$$sin(\alpha)sin(\beta) = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$$
$$cos(\alpha)cos(\beta) = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)]$$
$$sin(\alpha)cos(\beta) = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$$

9 Particolari equazioni elementari

$$sin(\alpha) = sin(\beta) \quad \leftrightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \ \vee \ \alpha + \beta = \pi + 2k\pi$$
$$cos(\alpha) = cos(\beta) \quad \leftrightarrow \quad \alpha = \pm\beta + 2k\pi$$
$$tan(\alpha) = tan(\beta) \quad \leftrightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi$$

Se ci sono segni meno o seni eguagliati a coseni basta utilizzare gli angoli associati e ricondursi a queste espressioni elementari.

10 Equazioni lineari in seno e coseno

Sono nella forma:

$$asin(x) + bcos(x) + c = 0$$

Se $c = 0$ si può risolvere dividendo entrambi i membri per $cos(x)$, in modo da ricondursi all'equazione elementare $tan(x) = -\frac{b}{a}$. Non bisogna dimenticare di porre $cos(x) \neq 0$.
Se invece $c \neq 0$ esistono 3 metodi per risolvere l'equazione:

- **Utilizzando le formule parametriche:** Sostituendo e semplificando si ottiene un'equazione di secondo grado in t, ovvero $tan(\frac{x}{2})$. Bisogna ricordarsi che affinchè la tangente esisti sempre bisogna porre $x \neq \pi + 2k\pi$, ma questa potrebbe essere lo stesso una soluzione dell'equazione. Bisogna perciò verificare sostituendo π nell'equazione originale.

- **Utilizzando il metodo grafico:** Si pone $X = cos(x)$ e $Y = sin(x)$ e si mette a sistema l'equazione della retta che risulta con l'equazione della circonferenza unitaria.
- **Utilizzando il metodo dell'angolo aggiunto:** Si riscrive la somma seno e coseno nella forma di un seno dilatato e traslato, come visto sopra. Il termine c non influisce, dato che comporta solo una traslazione sull'asse y.