Termodinamica, Elettrostatica, Elettromagnetismo

Eugenio Barbieri Viale

Contents

1 Termodinamica

1.1 Il primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q - L$$

- $Q > 0$: il sistema assorbe calore
- $Q < 0$: il sistema cede calore
- $L > 0$: il sistema compie lavoro
- $Q < 0$: il lavoro è compiuto dall'ambiente sul sistema

1.2 Teoria cinetica per un gas ideale

$$n = \frac{N}{N_a} = \frac{m_{totale}}{m_{atomica}}$$

La massa totale è espressa in grammi, mentre quella atomica in dalton ($1u = 1.66 \times 10^{-27} kg$)

L'equazione di stato dei gas perfetti:

$$pV = nRT$$

con $R = 8.314 \ \ J/(molK)$ la costante universale dei gas

Per un gas monoatomico, dove $\overline{K}$ è l'energia cinetica media di ogni molecola, valgono le seguenti relazioni:

$$pV = \frac{2}{3}N\overline{K}$$

$$\overline{K} = \frac{3}{2}kT$$

Quindi:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Dove m è la massa di una molecola, T la temperatura e $k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ (*costante di Boltzmann*, ovvero $\frac{R}{N_A}$)

In un gas a temperatura T, ogni grado di libertà di una molecola è associato a un'energia media pari a:

$$\frac{1}{2}kT$$

L'energia interna di un gas monoatomico (1) e di un gas biatomico (2):

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad \text{3 gradi di libertà} \tag{1}$$
$$U = \frac{5}{2}nRT \quad \text{5 gradi di libertà (vibrazione non considerata)} \tag{2}$$

1.3 Calore specifico molare

$$Q = C_m n \Delta T$$

dove C_m è il calore specifico molare $(J/(mol \cdot K))$

Gas monoatomico:

$$C_p = \frac{5}{2}R \quad \text{pressione costante}$$
$$C_v = \frac{3}{2}R \quad \text{volume costante}$$

Gas biatomico:

$$C_p = \frac{7}{2}R \quad \text{pressione costante}$$
$$C_v = \frac{5}{2}R \quad \text{volume costante}$$

Se si definisce γ il loro rapporto:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

allora si ottiene che:

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad \text{per un gas perfetto monoatomico}$$
$$\gamma = \frac{7}{5} \quad \text{per un gas perfetto biatomico}$$

1.4 Trasformazioni termodinamiche di un gas ideale

Trasformazione isobara, pressione costante:

$$L = p\Delta V$$

Trasformazione isocora, volume costante:

$$L = 0 \longrightarrow \Delta U = Q$$

Trasformazione isoterma, temperatura costante:

$$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$\Delta U = 0 \longrightarrow Q = L$$

Trasformazione adiabatica, non viene scambiato calore:

$$\begin{aligned} L &= C_v n(T_i - T_f) \quad \text{se a volume costante} \\ L &= C_p n(T_i - T_f) \quad \text{se a pressione costante} \end{aligned}$$

$$Q = 0 \longrightarrow \Delta U = -L$$

1.5 Relazioni tra grandezze in trasformazioni adiabatiche

Temperatura costante:

$$p_i(V_i)^\gamma = p_f(V_f)^\gamma$$

Pressione costante:

$$T_i(V_i)^{\gamma-1} = T_f(V_f)^{\gamma-1}$$

Volume costante:

$$(p_i)^{1-\gamma}(T_i)^\gamma = (p_f)^{1-\gamma}(T_f)^\gamma$$

con γ il rapporto tra C_p e C_v, come definito precedentemente.

1.6 Secondo principio della termodinamica

Enunciato di Kelvin-Planck: *È impossibile realizzare una macchina termica ciclica il cui unico risultato sia la conversione in lavoro di tutto il calore assorbito da un'unica sorgente*

Enunciato di Clausius: *È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo più freddo a uno più caldo senza l'apporto di lavoro esterno*

1.7 Macchine termiche

$$Q_c > 0 \quad Q_f < 0 \quad L > 0$$

Rendimento di una macchina termica:

$$\eta = \frac{L}{Q_c}$$

Dato che

$$L = Q_c + Q_f = Q_c - |Q_f|$$

il rendimento può essere scritto anche:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c}$$

1.8 La macchina di Carnot

Una trasformazione è reversibile se *può essere invertita riportando il sistema e l'ambiente nello stato iniziale, senza che questo porti a un cambiamento nel sistema o nell'universo.*

La macchina di Carnot è una macchina termica reversibile, ovvero opera con trasformazioni reversibili. Si dimostra che:

$$\frac{|Q_f|}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c}$$

e ne consegue che:

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Questo è il rendimento massimo che una macchina termica può raggiungere operando tra le due temperature.

Il *ciclo di Carnot* è composto da:

- espansione isoterma a temperatura costante T_c
- espansione adiabatica: la temperatura diminuisce da T_c a T_f
- compressione isoterma a temperatura costante T_f
- compressione adiabatica: la temperatura ritorna T_c

1.9 Macchine frigorifere e pompe di calore

$$Q_c < 0 \quad Q_f > 0 \quad L < 0$$

Qui vale la relazione:

$$|Q_c| = |L| + Q_f$$

Il coefficiente di prestazione è:

$$COP = \frac{Q_f}{|L|} \quad \text{in una macchina frigorifera}$$

$$COP = \frac{|Q_c|}{|L|} \quad \text{in una pompa a calore}$$

1.10 Entropia

Riformulazione del secondo principio della termodinamica: *in un sistema isolato l'entropia è una funzione non decrescente nel tempo*

$$\frac{dS}{dt} \geq 0$$

In una trasformazione reversibile:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

L'energia dell'universo non cambia in processi reversibili, mentre aumenta sempre in processi irreversibili. Questi ultimi causano un degrado dell'energia, una cui parte non è più utilizzabile. Il lavoro inutilizzato:

$$L_{inut} = T_f \Delta S_{univ}$$

L'entropia di un macrostato m, dove Ω è il numero di microstati che corrispondono al macrostato e k è uguale alla costante di Boltzmann:

$$S_m = k \ln \Omega_m$$

da cui, la variazione di entropia dal macrostato a al macrostato b:

$$\Delta S_{a \to b} = k \ln \frac{\Omega_b}{\Omega_a}$$

In un sistema ordinato, in cui un macrostato corrisponde a pochi microstati, si può dimostrare che

$$\Omega \approx E^N$$

dove Ω è il numero degli stati disponibili, E è l'energia immagazzinata dal sistema ed N è il numero di molecole.

2 Onde

2.1 Cos'è un'onda?

Un'onda è una perturbazione che si propaga nello spazio e trasporta energia senza che ci sia un trasporto di materia

2.2 Diversi tipi di onda

- **onda trasversale**: le particelle del mezzo in cui si propaga l'onda oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione
- **onda longitudinale**: in un solido elastico, le particelle del mezzo in cui si propaga l'onda oscillano lungo la direzione di propagazione *(come il suono)*

2.3 Caratteristiche

$$\begin{aligned}
&\lambda = \text{lunghezza d'onda} = \text{distanza tra due creste}\\
&T = \text{periodo} = \Delta t \text{ in cui viene compiuta un'oscillazione completa}\\
&f = \text{frequenza} = \frac{1}{T}\\
&v = \text{velocità di propagazione} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f\\
&v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \quad \text{con} \quad \mu = \frac{m}{L} = \text{densità lineare}
\end{aligned}$$

2.4 Descrizione matematica di un'onda

$$y = A\sin(\omega t \pm kx)$$

$$\text{dove} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- $+$ onda si propaga verso sinistra (*direzione* $-x$)
- $-$ onda si propaga verso destra (*direzione* $+x$)

2.5 Teorema di Fourier

Enunciato: *Qualsiasi funzione periodica con frequenza f può essere scritta come somma di funzioni sinusoidali con frequenze che sono multipli di f*

2.6 Il suono

2.6.1 L'ampiezza massima

$$\Delta p_{max} = 2\pi f d v A$$

in cui f è la frequenza, d è la densità del mezzo, v è la velocità di propagazione dell'onda, A è lo spostamento massimo di una molecola dalla posizione di equilibrio

2.6.2 Velocità del suono in un gas

$$v_{suono} = \sqrt{\gamma k_b \frac{T}{m}}$$

$$\text{dove} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

- γ è il rapporto tra il calore specifico molare a pressione costante (c_p) e a volume costante (c_v)
- **gas monoatomico** $\rightarrow \quad \gamma = \frac{5}{3}$
- **gas biatomico** $\rightarrow \quad \gamma = \frac{7}{5}$

2.6.3 Intensità del suono

$$I = \frac{P}{A} = \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

dove P è la potenza sonora che attraversa perpendicolarmente una data superficie, A è l'area della superficie

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

se la sorgente emette onde sonore in maniera isotropa vale questa relazione. La superficie A è quella di una sfera e r è il raggio di essa, ovvero la distanza dalla sorgente

$$I = \frac{\Delta p_{max}^2}{2dv}$$

$$I = 2\pi^2 f^2 d v A^2$$

2.6.4 Livello di intensità sonora

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

con I_0 la soglia minima di intensità sonora udibile

2.7 Effetto Doppler

$$f_r = f_s \frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}} \rightarrow \text{sorgente si avvicina a ricevitore fermo } (f_r \textit{ aumenta})$$

$$f_r = f_s \frac{1}{1 + \frac{v_s}{v}} \rightarrow \text{sorgente si allontana da ricevitore fermo} (f_r \textit{ diminuisce})$$

$$f_r = f_s (1 + \frac{v_r}{v}) \rightarrow \text{ricevitore si avvicina a sorgente ferma } (f_r \textit{ aumenta})$$

$$f_r = f_s (1 - \frac{v_r}{v}) \rightarrow \text{ricevitore si allontana da sorgente ferma } (f_r \textit{ diminuisce})$$

Caso generale:

$$f_r = f_s \left(\frac{1 \pm \frac{v_r}{v}}{1 \pm \frac{v_s}{v}} \right)$$

2.8 Interferenza

Si ha interferenza costruttiva nei punti di ampiezza massima, cioè quando:

$$\Delta x = k\lambda \quad k \in Z$$

Si ha invece interferenza distruttiva nei punti di ampiezza nulla, cioè quando:

$$\Delta x = (k + \frac{1}{2})\lambda \quad k \in Z$$

$\Delta x = x_1 - x_2$ è la differenza di cammino, dove x_1 e x_2 sono le distanze del punto P dalle sorgenti (luminose o sonore) S_1 e S_2.

2.9 La luce come onda

Se v è la velocità di propagazione, λ la lunghezza d'onda e f la frequenza:

$$v = \lambda f$$

e se il raggio passa da un materiale all'altro, con indici di rifrazione n diversi:

$$\frac{n_1}{\lambda_1} = \frac{n_2}{\lambda_2}$$

2.9.1 L'esperimento di Young

Nei punti di interferenza costruttiva ci sono frange chiare che si trovano ad ampiezze di θ tali che:

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{d}, \quad k \in N$$

con d la distanza tra le due fenditure.

Nei punti di interferenza distruttiva ci sono frange scure che si trovano ad ampiezze di θ tali che:

$$\sin\theta = (k + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{d}, \quad k \in N$$

Da questa relazione, ponendo $k = 1$ e approssimando $\sin\theta \approx \tan\theta$ per $\theta \to 0$, si ottiene che:

$$\lambda = \frac{yd}{L}$$

dove y è la distanza tra la frangia chiara di ordine 0 e di ordine 1, mentre L è la distanza tra lo schermo e la doppia fenditura.

2.10 Diffrazione

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{D}$$

dove θ è l'angolo di diffrazione, D è la larghezza della fenditura attraverso la quale il suono o la luce passano.

Per la luce, nel caso di un'unica fenditura, le frange di diffrazione scure si trovano ad ampiezze di θ tali che:

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{D}, \quad k \in N$$

2.11 Battimenti

$$f_{bat} = |f_1 - f_2|$$

2.12 Onde stazionarie

Le onde stazionarie sono onde che non si propagano ma rimangono confinate in una regione

2.12.1 Trasversali

$$f_n = n\frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Queste frequenze costituiscono la serie armonica. Le onde hanno n ventri

2.12.2 Longitudinali

$$f_n = n\frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

il tubo ha lunghezza L e ha le estremità aperte

$$f_n = (2n-1)\frac{v}{4L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

il tubo ha lunghezza L e ha un'estremità chiusa

3 Elettrostatica

3.1 Costanti

Costante dielettrica nel vuoto:

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} C^2/(Nm^2)$$

Negli altri materiali:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

3.2 Forza di Coulomb

$$|\vec{F_c}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

3.3 Campo elettrico

Per definizione:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Carica puntiforme

$$|\vec{E}| = \frac{k|q|}{r^2}$$

Piano infinito uniformemente carico

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Condensatore

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Filo conduttore infinitamente lungo e uniformemente carico

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Sfera isolante uniformemente carica

$$\begin{cases} |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \longrightarrow r \leq R \\ |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \longrightarrow r > R \end{cases} \tag{3}$$

3.4 Flusso

Per definizione:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = |\vec{E}||\vec{S}| \cos\varphi$$

Teorema di Gauss: *Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie gaussiana è uguale al rapporto tra la carica totale racchiusa nella superficie e la costante dielettrica*

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{Q_{racchiusa}}{\varepsilon_0}$$

3.5 Energia potenziale

La forza di coulomb è conservativa, e l'energia potenziale di un sistema di due cariche puntiformi è:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r}$$

considerando la distanza infinita come riferimento $U = 0$

In un sistema di n cariche, le coppie possibili sono:

$$N = C_{n,2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1}{2} n(n-1)$$

3.6 Potenziale elettrico

Per definizione:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

In un condensatore con le armature a distanza d:

$$U = q|\vec{E}|d \longrightarrow V = |\vec{E}|d$$

considerando l'armatura negativa come $U = 0$ e $V = 0$

Per cariche puntiformi invece:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

considerando la distanza infinita come riferimento $V = 0$

- una carica positiva accelera da una regione con potenziale maggiore a una con potenziale minore (seguendo il campo)
- una carica negativa accelera da una regione con potenziale minore a una con potenziale maggiore

Le superifici equipotenziali sono sempre perpendicolari al campo elettrico
Il lavoro che serve per spostare una carica lungo una superficie è nullo $L = 0$, poichè il prodotto scalare tra il vettore campo e il vettore spostamento è nullo $\cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Il potenziale di una sfera conduttrice (r distanza dal centro, R raggio della sfera):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \longrightarrow r \geq R$$

All'interno della sfera:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \longrightarrow r < R$$

Il campo in funzione della variazione di potenziale:

$$E_s = -\frac{dV}{ds}$$

dove E_s è la componente del campo elettrico sul vettore spostamento $d\vec{s}$

3.7 Circuitazione

La circuitazione del campo elettrico lungo una curva γ:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = 0$$

3.8 Capacità

Per definizione:

$$C = \frac{q}{V}$$

In una sfera:

$$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

In un condensatore piano di area A e con le armature a distanza d:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

dove ε_r è la costante dielettrica relativa del materiale tra le armature, **non** delle armature

3.9 Energia immagazzinata in un campo elettrico

L'energia potenziale elettrica immagazzinata in un condensatore con differenza di potenziale V e carica q:

$$U = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

In funzione del campo:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r A d E^2$$

La densità di energia:

$$\delta_{energia} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

4 Elettromagnetismo

4.1 Autoinduzione

$$\Phi(\vec{B}) = LI$$

Dove $\Phi(\vec{B})$ è il flusso e L è l'induttanza, in Henry (H).

$$\text{fem} = -L\frac{dI}{dt}$$

Dove la fem è la forza elettromotrice.

$$L = \mu_0\mu_r\frac{N^2}{l}A$$

Dove L è l'induttanza di un solenoide e μ_r è la permeabilità relativa del materiale.

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{t}{L/R}})$$

Dove I è la corrente in un circuito RL con tensione continua che si genera chiudendo il circuito. Inoltre la costante di tempo si definisce come $\tau = \frac{L}{R}$.

$$I(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{L/R}}$$

Dove I è la corrente autoindotta che si genera aprendo il circuito. Si chiama extra-corrente di apertura.

4.2 Mutua induzione

$$\text{fem}_s = -M\frac{dI_p}{dt}$$

Dove la fem è la forza elettromotrice che la spira primaria (con corrente variabile I_p) genera sulla spira secondaria. Anche M si esprime in Henry (H).

4.3 Energia immagazzinata in un campo magnetico

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

Dove U è l'energia immagazzinata in un induttore con induttanza L.

$$\delta_{energia} = \frac{U}{\text{vol}} = \frac{1}{2\mu_0\mu_r}B^2$$