Circonferenza, Ellisse e Iperbole

Eugenio Barbieri Viale

24 febbraio 2024

1 Circonferenza

- La circonferenza è il luogo di punti equidistanti da un centro C.
- Forma centro-raggio con centro $C(x_0; y_0)$ e raggio r:

  $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

  Forma canonica:

  $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

- Per la forma canonica:

  $$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

- Condizione di realtà:

  $$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$$

  I coefficienti di x^2 e y^2, se non sono uguali a 1, devono essere uguali tra loro ma diversi da zero. Se $r = 0$ allora la circonferenza è degenere.

- Casi particolari:

  $$a = 0 \rightarrow \text{Il centro è sull'asse y}$$
  $$b = 0 \rightarrow \text{Il centro è sull'asse x}$$
  $$c = 0 \rightarrow \text{La circonferenza passa per l'origine}$$
  $$a = 0 \land c = 0 \rightarrow r = C_y$$
  $$b = 0 \land c = 0 \rightarrow r = C_x$$

- Posizioni reciproche tra una retta e una circonferenza (d è la distanza tra la retta e il centro):

  $$\text{Retta esterna:} \quad d > r, \quad \Delta < 0$$
  $$\text{Retta tangente:} \quad d = r, \quad \Delta = 0$$
  $$\text{Retta secante:} \quad d < r, \quad \Delta > 0$$

- Per trovare le tangenti passanti per un punto $P(x_0, y_0) \notin \gamma$ a una circonferenza si può porre $\Delta = 0$ oppure porre la distanza retta-centro uguale al raggio. La distanza centro-retta:
$$d = \frac{|ax_c + by_c + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
- Per trovare le tangenti passanti per un punto $P(x_0, y_0) \in \gamma$ a una circonferenza la retta deve passare per P ed essere perpendicolare al raggio ($m_{raggio} m_{retta} = -1$) oppure si può usare la formula di sdoppiamento, sostituendo $x^2 = xx_0$ e $y^2 = yy_0$, mentre $x = \frac{x+x_0}{2}$ e $y = \frac{y+y_0}{2}$. In questo modo:
$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0$$
- Le posizioni reciproche tra due circonferenze sono 6: secanti, tangenti interne, tangenti esterne, interne, esterne, concentriche. Le due circonferenze sono concentriche quando hanno uguale a e b. Sottraendo membro a membro le due equazioni, si ottiene una retta detta asse radicale. L'asse radicale passa per i punti di intersezione se le circonferenze sono secanti, per il punto di tangenza se sono tangenti. Inoltre, esso è perpendicolare alla retta passante per i centri.
- Un fascio di circonferenze è la combinazione lineare tra due generatrici. Quella moltiplicata per k è la circonferenza esclusa. L'asse radicale è la circonferenza degenere del fascio. Se il fascio è di circonferenze tangenti, anche il punto base è una circonferenza degenere. L'asse radicale è perpendicolare all'asse centrale, ovvero la retta passante per i centri delle circonferenze.

2 Ellisse

- L'ellisse è il luogo di punti P tali che sia costante la somma delle distanze di P dai due fuochi. In particolare, la somma è uguale a 2a. L'ellisse è la dilatazione di una circonferenza.
- L'equazione:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
dove a è la metà della distanza dei vertici su x, b dei vertici su y. La distanza focale è c.
- Se i fuochi sono su x:
$$a > b \qquad c^2 = a^2 - b^2 \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$
Se i fuochi sono su y:
$$a < b \qquad c^2 = b^2 - a^2 \qquad e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

- L'eccentricità e indica quanto è schiacciata l'ellisse. Maggiore è e, maggiore è lo schiacciamento sull'asse maggiore. Inoltre $0 \leq e < 1$.
- Le posizione reciproche tra un'ellisse e una retta sono 3: secante, tangente, esterna.
- Per trovare la tangente all'ellisse in suo punto $P(x_0; y_0) \in \gamma$ bisogna usare la formula di sdoppiamento. Si ottiene sostituendo $x^2 = xx_0$ e $y^2 = yy_0$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- Per trovare le tangenti a un'ellisse passanti per un punto $Q(x_q; y_q) \notin \gamma$ immaginiamo di far scorrere lungo l'ellisse un punto $P(x_0; y_0)$ insieme alla tangente alla stessa in quel punto. La tangente giusta sarà quella che passerà anche per Q. Per fare ciò bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_0 x_q}{a^2} + \frac{y_0 y_q}{b^2} = 1 \end{cases} \tag{1}$$

  dove le incognite sono x_0 e y_0. Una volta risolto si avranno i punti di tangenza. Per trovare le equazioni delle rette, basta imporre il passaggio per P e per Q.

- Un ellisse traslata di vettore $\vec{v}(x_c; y_c)$ ha centro $C(x_c; y_c)$ e ha equazione:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

  Ci si riconduce a questa forma utilizzando il completamento del quadrato.

- L'area racchiusa da un'ellisse è $A = \pi ab$

3 Iperbole

- L'iperbole è il luogo di punti P tali che sia costante la differenza dai due fuochi. In particolare vale 2a.
- L'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{Se i fuochi sono sull'asse x (asse trasverso } 2a\text{)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{Se i fuochi sono sull'asse y (asse trasverso } 2b\text{)}$$

  Mentre i coefficienti di x^2 e y^2 nell'ellisse sono concordi, nell'iperbole sono discordi.

- L'asse trasvero è l'asse che contiene i fuochi. Contiene inoltre i vertici detti reali. L'asse non trasvero contiene invece i vertici non reali.
- La semidistanza focale c:
$$c^2 = a^2 + b^2$$
- L'eccentricità e:
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \qquad \text{Se i fuochi sono sull'asse x}$$
$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \qquad \text{Se i fuochi sono sull'asse y}$$
Maggiore è l'eccentricità, maggiormente sono aperti i rami dell'iperbole. Inoltre $e > 1$, poichè $c > a > 0$
- L'iperbole ha due asintoti passanti per l'origine. Uno passa per $P_1(a, b)$, l'altro passa per $P_2(a, -b)$. La loro equazione è:
$$y = \pm\frac{b}{a}x$$
- Le posizioni reciproche tra iperbole e retta sono 4: secante in due punti, tangente, esterna, secante in un punto (la retta è parallela a un asintoto)
- Per trovare le tangenti a un iperbole basta applicare il metodo spiegato con l'ellisse. La formula di sdoppiamento:
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \pm 1$$
- Un'iperbole traslata di vettore $\vec{v}(x_c; y_c)$ ha centro $C(x_c; y_c)$ e ha equazione:
$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = \pm 1$$
- Si dice equilatera un'iperbole che ha gli asintoti perpendicolari. Di conseguenza:
$$a = b \qquad e = \sqrt{2} \qquad \text{Asintoti:} \quad y = \pm x$$
Gli asintoti sono quindi le bisettrice degli quadranti.
- L'iperbole equilatera si riferisce: agli assi di simmetria, in cui gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti, agli asintoti, in cui gli asintoti coincidono con gli assi cartesiani.
- Ruotando in senso antiorario di 45° l'iperbole equilatera, si ottiene una funzione con dominio D_0 ed è chiamata omografica. C'è inoltre proporzionalità inversa tra x e y:
$$xy = k \qquad \text{con} \qquad k = \pm\frac{a^2}{2}$$
Le coordinate dei vertici sono $A_1(\sqrt{k}; \sqrt{k})$ e $A_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$

- L'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti (asintoti paralleli a assi cartesiani) è detta funzione omografica:

  $$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{con} \quad c \neq 0 \quad \text{e} \quad ad - bc \neq 0$$

  Gli asintoti sono:

  $$x = -\frac{d}{c} \qquad \text{ovvero il valore di x che annulla il denominatore}$$
  $$y = \frac{a}{c} \qquad \text{ovvero il valore di y per } x \to \infty$$

  Il centro di simmetria è:
  $$C(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$$

  In realtà si può disegnare ogni funzione omografica facendo a meno del parametro c. Dividendo numeratore e denominatore per c e rinominando i parametri si ottiene infatti:

  $$y = \frac{Ax+B}{x+C}$$