E58-59

Eugenio Barbieri Viale

4 marzo 2024

Il centro di massa del sistema assa-proiettile si muove di moto rettilineo uniforme parallelamente alla direzione y. Ha quindi legge oraria:

$$y(t) = v_{cm}t$$

La distanza percorsa dal centro di massa in un periodo di rotazione T è quindi:

$$\Delta y = v_{cm}T$$

Fissando l'origine del sistema di riferimento inerziale nel centro geometrico dell'asta prima dell'urto, il centro di massa ha coordinata x_{cm} e velocità v_{cm}:

$$x_{cm} = \frac{m}{2(m+M)}l \qquad v_{cm} = \frac{m}{m+M}v_0$$

Se β è il rapporto tra la massa dell'asta M e la massa del proiettile m, allora si ottiene che $M = \beta m$. Sostituendo risulta che:

$$x_{cm} = \frac{1}{2(\beta+1)}l \qquad v_{cm} = \frac{1}{\beta+1}v_0$$

La distanza percorsa dal CM in un periodo di rivoluzione dell'asta è perciò:

$$\Delta y = \frac{1}{\beta+1}v_0T$$

Ora, sapendo che il sistema assa-proiettile è un sistema isolato, poichè la risultante dei momenti esterni è nulla (le forze tra asta e proiettile sono interne), il momento angolare si conserva. Inoltre, per il teorema di König:

$$L_0 = L_f \qquad \to \qquad L_0 = L_{trasl} + L_{rot}$$

L_0 e L_{trasl} hanno come polo l'orgine del sistema di riferimento, mentre L_{rot} è calcolato rispetto al CM. Dato che all'inizio l'asta è ferma:

$$mv_0\frac{l}{2} = (m+M)v_{cm}x_{cm} + I_{cm}\omega$$

Ora è necessario calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto al suo centro di massa. Applicando il teorema di Steiner:

$$\begin{aligned}
I_{cm} &= \frac{1}{12}Ml^2 + Mx_{cm}^2 + m(\frac{1}{2}l - x_{cm})^2 && (1)\\
&= \frac{\beta}{12}ml^2 + \beta ml^2\frac{1}{4(\beta+1)^2} + \frac{1}{4}ml^2(1 - \frac{1}{\beta+1}) && (2)\\
&= ml^2\left(\frac{\beta}{12} + \frac{\beta}{4(\beta+1)^2} + \frac{1}{4(\beta+1)^2} - \frac{1}{2(\beta+1)} + \frac{1}{4}\right) && (3)\\
&= ml^2\left(\frac{\beta}{12} + \frac{\beta+1}{4(\beta+1)^2} - \frac{1}{2(\beta+1)} + \frac{1}{4}\right) && (4)\\
&= ml^2\left(\frac{\beta}{12} + \frac{1}{4(\beta+1)} - \frac{1}{2(\beta+1)} + \frac{1}{4}\right) && (5)\\
&= ml^2\left(\frac{\beta^2+\beta+3-6+3\beta+3}{12(\beta+1)}\right) && (6)\\
&= ml^2\frac{\beta^2+4\beta}{12(\beta+1)} && (7)
\end{aligned}$$

Facendo tutte le sostituzioni necessarie nell'equazione dei momenti angolari:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}mlv_0 = (1+\beta)m\frac{1}{\beta+1}v_0\frac{1}{2(\beta+1)}l + ml^2\frac{\beta^2+4\beta}{12(\beta+1)}\frac{2\pi}{T} && (8)\\
&\frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2(\beta+1)}v_0 + \frac{2\pi l\beta(\beta+4)}{12T(\beta+1)} && (9)\\
&\frac{1}{2}(\beta+1)v_0 = \frac{1}{2}v_0 + \frac{2\pi l\beta(\beta+4)}{12T} && (10)\\
&6(\beta+1)v_0 - 6v_0 = \frac{2\pi l\beta(\beta+4)}{T} && (11)
\end{aligned}$$

Alla fine si ottiene che il periodo:

$$T = \frac{\pi l(\beta+4)}{3v_0}$$

Sostituendo nella legge oraria del CM e facendo qualche altra semplificazione, si ottiene:

$$y = \frac{\pi l(\beta+4)}{3(\beta+1)}$$

Ora calcoliamo il rapporto tra la distanza percorsa e la lunghezza l dell'asta, in modo da ottenere una quantità adimensionale:

$$y(\beta) = \frac{\pi\beta+4\pi}{3\beta+3}$$

Questa è evidentemente un'iperbole equilatera riferita agli asintoti. I suoi asintoti sono $x = -1$ e $y = \frac{\pi}{3}$. Ricordando che $\beta > 0$, poichè è il rapporto tra due masse, e anche che $y \geq 0$, dato che è una distanza, la massima distanza percorsa si trova all'intersezione con l'asse y.

Perciò la massima distanza percorsa durante una rivoluzione dell'asta si trova al tendere a 0 del rapporto β tra le due masse.