2장 분할정복법
(divide-and-conquer)

분할정복(Divide-and-Conquer)식 설계 전략

- 분할(Divide): 해결하기 쉽도록 문제를 여러 개의 작은 부분으로 나눈다.
- 정복(Conquer): 나눈 작은 문제를 각각 해결한다.
- 통합(Combine): (필요하다면) 해결된 해답을 모은다.

이러한 문제 해결 방법을 **하향식(top-down)** 접근방법이라고 한다.

이분검색(binary search): 재귀적 방식

- 문제: 크기가 n인 정렬된 배열 S에 x가 있는지를 결정하라.
- 입력: 자연수 n, 비내림차순으로 정렬된 배열 $S[1..n]$, 찾고자 하는 항목 x
- 출력: *location*, x가 S의 어디에 있는지의 위치. 만약 x가 S에 없다면 0
- 설계전략:
  - ✓ x가 배열의 중간에 위치하고 있는 항목과 같으면, x 찾음. 그렇지 않으면:
  - ✓ **분할**: 배열을 반으로 나누어서 x가 중앙에 위치한 항목보다 작으면 왼쪽에 위치한 배열 반쪽을 선택하고, 그렇지 않으면 오른쪽에 위치한 배열 반쪽을 선택한다.
  - ✓ **정복**: 선택된 반쪽 배열에서 x를 찾는다.
  - ✓ 통합: (필요 없음)

이분검색(Binary Search): 재귀 알고리즘

```
index location (index low, index high) {
   index mid;

   if (low > high)
       return 0;                          // 찾지 못했음
   else {
       mid = (low + high) / 2   // 정수 나눗셈 (나머지 버림)
       if (x == S[mid])
        return mid;                       //  찾았음
       else if (x < S[mid])
        return location(low, mid-1); // 왼쪽 반을 선택함
       else
        return location(mid+1, high);// 오른쪽 반을 선택함
   }
}
…
locationout = location(1, n);
...
```

Discussion

1. 입력 파라미터 *n*, *S*, *x*는 알고리즘 수행 중 변하지 않는 값이다. 따라서 함수를 재귀호출(recursive call)할 때 마다 이러한 변하지 않는 파라미터를 가지고 다니는 것은 극심한 낭비이다. 따라서 *n*, *S*, *x*를 전역(global) 변수로 지정하고, 재귀호출에는 인덱스만 넘겨 줌

```
index location (index low, index high) {
      index mid;

      if (low > high)
          return 0;
      else {
          mid = (low + high) / 2
          if (x == S[mid])
                return mid;
             else if (x < S[mid])
                return location(low, mid-1);
          else
               return location(mid+1, high);
      }
}
```

2. 재귀 알고리즘(recursive algorithm)에서 모든 재귀호출이 알고리즘의 마지막(꼬리) 부분에서 이루어 질 때 꼬리 재귀호출(tail recursion)이라고 함

- 그 알고리즘은 반복 알고리즘(iterative algorithm)으로 변환하기가 수월하다. 일반적으로 재귀 알고리즘은 재귀 호출할 때마다 그 당시의 상태를 활성 레코드(activation records) 스택에 저장해 놓아야 하는 반면, 반복 알고리즘은 그럴 필요가 없기 때문에 일반적으로 더 효율적이다(빠르다). 그렇다고 반복 알고리즘의 계산복잡도가 재귀 알고리즘보다 좋다는 의미는 아니다. 반복 알고리즘이 상수적(constant factor)으로만 좋다(빠르다)는 말이다.

```
index location (index low, index high) {
      index mid;

      if (low > high)
          return 0;
      else {
          mid = (low + high) / 2
          if (x == S[mid])
                return mid;
         else if (x < S[mid])
                return location(low, mid-1);
          else
               return location(mid+1, high);
      }
}
```

최악의 경우 시간복잡도 분석

- **단위연산**: *x*와 S[mid]의 비교
- **입력 크기**: 배열의 크기 n (= $high$ - low + 1)
- 단위연산으로 설정한 조건 문을 2번 수행하지만, 사실상 비교는 한번 이루어진다고 봐도 된다. 그 이유는:
  - (1) 어셈블리 언어로는 하나의 조건 명령으로 충분히 구현할 수 있기 때문이기도 하고;
  - (2) *x*를 찾기 전까지는 항상 2개의 조건 문을 수행하므로 하나로 묶어서 한 단위로 취급을 해도 되기 때문이기도 하다. 이와 같이 단위연산은 최대한 효율적으로(빠르게) 구현된다고 일반적으로 가정하여, 1 단위로 취급을 해도 된다.

```
index location (index low, index high) {
      index mid;

      if (low > high)
          return 0;
      else {
          mid = (low + high) / 2
          if (x == S[mid])
                return mid;
         else if (x < S[mid])
                return location(low, mid-1);
          else
               return location(mid+1, high);
      }
}
```

- **경우 1: 검색하게 될 반쪽 배열의 크기가 항상 정확하게 $n/2$ 이 되는 경우**

  $W(n) = W(n/2) + 1$, $n > 1$ 이고, $n = 2^k$, $(k \geq 1)$ $W(1) = 1$

  이 식의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

W(1)=1
W(2)=W(1)+1=2
W(4)=W(2)+1=3
W(8)=W(4)+1=4
W(16)=W(8)+1=5
.
.
W(2^k)=k+1
.
.
W(n)=lg n +1

반복대입법(iterative substitution or iteration)

$$
\begin{aligned}
W(n) &= W(n/2)+1 \\
&= (W(n/2^2)+1)+1 \\
&= W(n/2^2)+2 \\
&= \bullet\bullet \\
&= \bullet\bullet \\
&= W(n/2^k)+k\text{ , }(n=2^k\text{가정}) \\
&= 1+k \\
&= \lg n+1
\end{aligned}
$$

연습문제

$$W(n) = W(n/2) + n\ ,\ n \geq 2,\ n = 2^k\ ,\ k \geq 1$$
$$W(1) = 1$$

추정 후 증명방법(substitution)

$W(n) = W(n/2) + 1$, $n > 1$ 이고, $n = 2^k$, $(k \geq 1)$
$W(1) = 1$ 일 때
$W(n) = \lg n+1$ 을 수학적귀납법 사용하여 증명

귀납출발점: $n = 1$이면, $W(1) = 1 = \lg 1 + 1$.

귀납가정: 2의 거듭제곱(power)인 양의 정수 n에 대해서, $W(n) = \lg n + 1$라고 가정한다.

귀납단계: $W(2n) = \lg(2n) + 1$임을 보이면 된다. 재현식을 사용하면,

$$
\begin{aligned}
W(2n) &= W(n) + 1 && \text{재현식에 의해서} \\
&= \lg n + 1 + 1 && \text{귀납가정에 의해서} \\
&= \lg n + \lg 2 + 1 \\
&= \lg(2n) + 1
\end{aligned}
$$

그러므로 $W(n) = \lg n+1$

- **경우 2: 일반적인 경우 - 반쪽 배열의 크기는 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$이 됨**

$\lfloor y \rfloor$란 y보다 작거나 같은 수 중 최대 정수를 나타낸다고 할 때, n에 대해서 가운데 첨자는 $mid = \left\lfloor \frac{1+n}{2} \right\rfloor$ 이 되는데, 이 때 각 부분배열의 크기는 다음과 같다.

n	왼쪽 부분배열의 크기	mid	오른쪽 부분배열의 크기
짝수	$n/2$ - 1	1	$n/2$
홀수	(n-1)/2	1	(n-1)/2

위의 표에 의하면 알고리즘이 다음 단계에 찾아야 할 항목의 개수는 기껏해야 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 개가 된다. 따라서 다음과 같은 재현식으로 표현할 수 있다.

$$W(n) = 1 + W\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) \quad n > 1 \text{ 일 때}$$
$$W(1) = 1$$

- 이 재현식의 해가 $W(n)=\lfloor \lg n \rfloor+1$가 됨을 n에 대한 수학적귀납법으로 증명한다.

증명: 수학적귀납법

귀납출발점: $n = 1$이면, 다음이 성립한다.

$$\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lfloor \lg 1 \rfloor + 1 = 0 + 1 = 1 = W(1)$$

귀납가정: $n > 1$이고, $1 < k < n$인 모든 k에 대해서, $W(k)=\lfloor \lg k \rfloor+1$가 성립한다고 가정한다.

귀납단계: (1) n이 짝수이면 (즉, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$),

$$
\begin{aligned}
W(n) &= 1 + W(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) && \text{재현식에 의해서} \\
&= 1 + \lfloor \lg \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \rfloor + 1 && \text{귀납가정에 의해서} \\
&= 2 + \lfloor \lg \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \rfloor \\
&= 2 + \lfloor \lg \tfrac{n}{2} \rfloor && n\text{이 짝수이므로} \\
&= 2 + \lfloor \lg n - 1 \rfloor \\
&= 2 + \lfloor \lg n \rfloor - 1 \\
&= 1 + \lfloor \lg n \rfloor
\end{aligned}
$$

- (2) n이 홀수이면 (즉, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$),

$$
\begin{aligned}
W(n) &= 1 + W\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) && \text{재현식에 의해서} \\
&= 1 + \left\lfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1 && \text{귀납가정에 의해서} \\
&= 2 + \left\lfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \right\rfloor \\
&= 2 + \left\lfloor \lg \tfrac{n-1}{2} \right\rfloor && n\text{이 홀수이므로} \\
&= 2 + \left\lfloor \lg(n-1) - 1 \right\rfloor \\
&= 2 + \left\lfloor \lg(n-1) \right\rfloor - 1 \\
&= 1 + \left\lfloor \lg(n-1) \right\rfloor \\
&= 1 + \left\lfloor \lg n \right\rfloor && n\text{이 홀수이므로}
\end{aligned}
$$

n이 짝수라면 n이 2의 지수승값일 수도 있다.
if n=16, floor(lg(16-1))=3, floor(lg(16))=4
if n=15, floor(lg(15-1))=3, floor(lg(15))=3

따라서, $W(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1 \in \Theta(\lg n)$.

- floor function(바닥(마루)함수)

$\lfloor x \rfloor$ 실수 x 에 대해, x 보다 작거나 같은 정수 중 가장 큰 정수

(예) $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ $\lfloor -3.1 \rfloor = -4$

- ceiling function(천장함수)

$\lceil x \rceil$ 실수 x 에 대해, x 보다 크거나 같은 정수 중 가장 작은 정수

(예) $\lceil 2.5 \rceil = 3$ $\lceil -2.5 \rceil = -2$

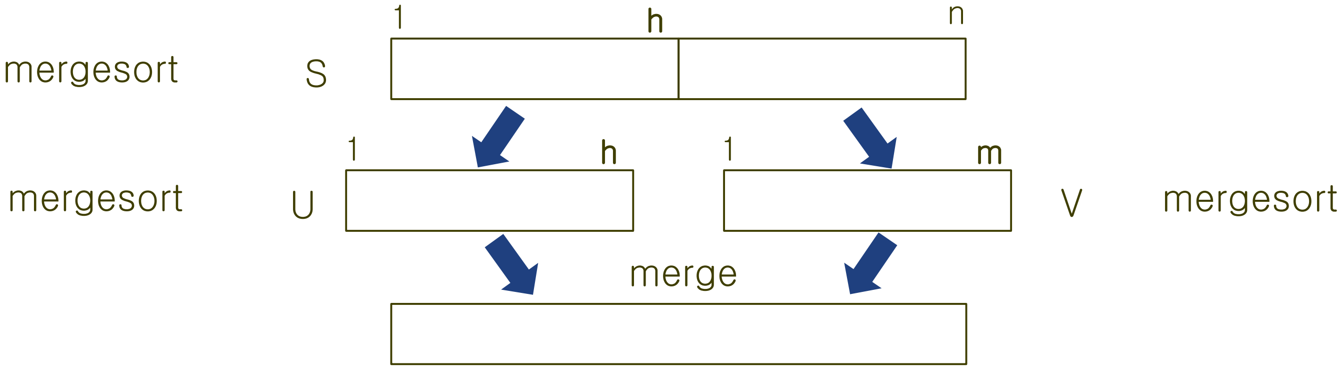
합병정렬(mergesort)

- 문제: *n*개의 정수를 비내림차순으로 정렬하시오.
- 입력: 정수 *n*, 크기가 *n*인 배열 *S*[1..*n*]
- 출력: 비내림차순으로 정렬된 배열 *S*[1..*n*]
- 보기: 27, 10, 12, 20, 25, 13, 15, 22

합병정렬

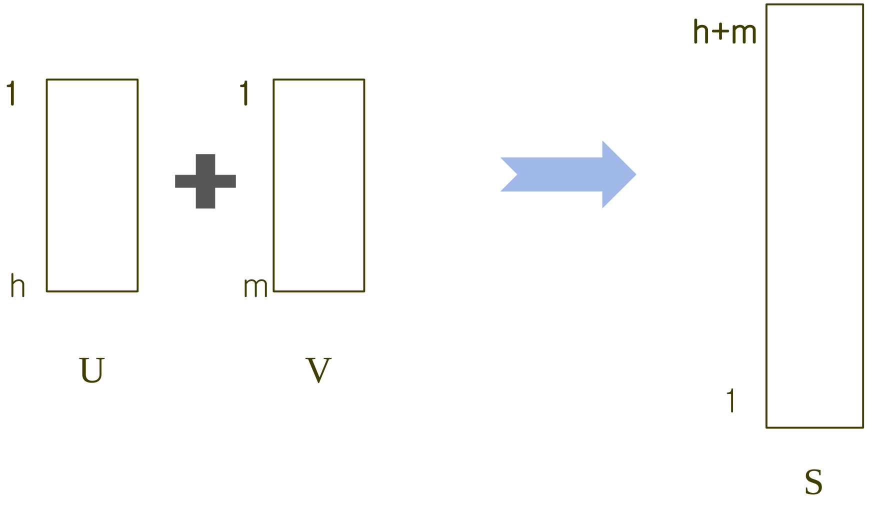
- 알고리즘:

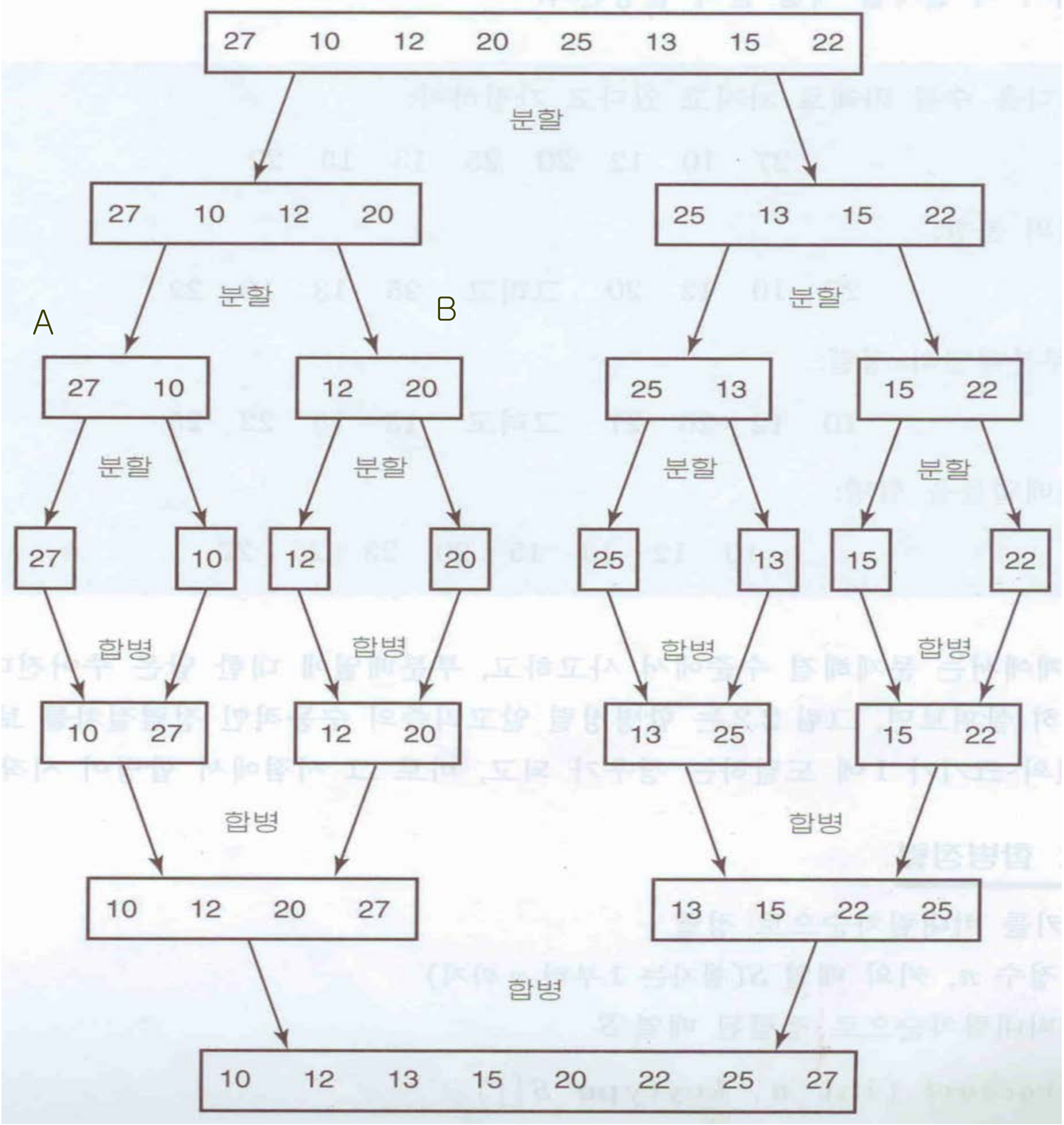
```
void mergesort (int n, keytype S[]) {
     const int h = n / 2, m = n - h;
     keytype U[1..h], V[1..m];

     if (n > 1) {
         copy S[1] through S[h] to U[1] through U[h];
         copy S[h+1] through S[n] to V[1] through V[m];
         mergesort(h,U);
         mergesort(m,V);
         merge(h,m,U,V,S);
     }
}
```



합병(merge)

- 문제: 두 개의 정렬된 배열을 하나의 정렬된 배열로 합병하시오.
- 입력: (1) 양의 정수 h, m, (2) 정렬된 배열 U[1..h], V[1..m]
- 출력: U와 V에 있는 키들을 하나의 배열에 정렬한 S[1..h+m]





- Fig 2.2 The steps done by a human when sorting with Mergesort

k	*U*	*V*	*S* (결과)
1	**10** 12 20 27	**13** 15 22 25	10
2	10 **12** 20 27	**13** 15 22 25	10 12
3	10 12 **20** 27	**13** 15 22 25	10 12 13
4	10 12 **20** 27	13 **15** 22 25	10 12 13 15
5	10 12 **20** 27	13 15 **22** 25	10 12 13 15 20
6	10 12 20 **27**	13 15 **22** 25	10 12 13 15 20 22
7	10 12 20 **27**	13 15 22 **25**	10 12 13 15 20 22 25
—	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13 15 20 22 25 27 ← 최종값

* 비교되는 아이템은 진하게 표시되어 있다.

- 표 2.1 2개의 배열 U와 V를 하나의 배열 S로 합병하는 예

```
void  merge(int h, int m, const keytype U[], const keytype V[],
            keytype S[]) {
    index i, j, k;
    i = 1; j = 1; k = 1;
    while (i <= h && j <= m) {
          if (U[i] < V[j]) {
              S[k] = U[i];
              i++;}
          else {
              S[k] = V[j];
              j++;}
          k++;
    }
    if (i > h)
        copy V[j] through V[m] to S[k] through S[h+m];
    else
        copy U[i] through U[h] to S[k] through S[h+m];
}
```

시간복잡도 분석

- 합병 알고리즘의 <u>최악의 경우 </u>시간복잡도 분석

  - ✓ **단위연산**: U[i]와 V[j]의 비교
  - ✓ **입력크기**: 2개의 입력 배열에 각각 들어 있는 항목의 개수: h와 m
  - ✓ **분석**: $i = h+1$이고, $j = m$인 상태로 루프(loop)에서 빠져 나가는 때가 최악의 경우로서(V에 있는 처음 m - 1개의 항목이 S의 앞부분에 위치하고, U에 있는 h개의 모든 항목이 그 뒤에 위치하는 경우), 이 때 단위연산의 실행 횟수는 $h + m - 1$이다. 따라서, 최악의 경우 합병하는 시간복잡도는 $W(h,m) = h + m - 1$.

  - ✓ (예) U: 4 5 6 7 V: 1 2 3 8

시간복잡도 분석

- 합병정렬 알고리즘의 <u>최악의 경우 </u>시간복잡도 분석
  - ✓ **단위연산**: 합병 알고리즘 merge에서 발생하는 비교
  - ✓ **입력크기**: 배열 S에 들어 있는 항목의 개수 n
  - ✓ **분석**: 최악의 경우 수행시간은 $W(h,m) = W(h) + W(m) + h + m - 1$이 된다. 여기서 $W(h)$는 U를 정렬하는데 걸리는 시간, $W(m)$은 V를 정렬하는데 걸리는 시간, 그리고 $h + m - 1$은 합병하는데 걸리는 시간이다. 정수 n을 2^k, $(k \geq 1)$이라고 가정하면, $h = \frac{n}{2}, m = \frac{n}{2}$ 이 된다. 따라서 최악의 경우 재현식은: $W(n) = 2W(\frac{n}{2}) + n - 1 \quad n > 1$이고, $n = 2^k (k \geq 1)$

    $W(1) = 0$

    이 재현식의 해는 2장의 끝 도사정리의 2번을 적용하면,

$$W(n) \in \Theta(n \lg n)$$

$$W(n) = 2W(\frac{n}{2}) + n - 1, \quad \text{for } n \geq 2 \text{ with } W(1) = 0.$$

Assume that $n = 2^k$. $k = \log_2 n = \lg n$

$$W(n) = 2W(\frac{n}{2}) + n - 1$$

$$= 2(2W(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2} - 1) + n - 1 = 2^2 W(\frac{n}{2^2}) + (n-2) + (n-1)$$

$$= 2^2(2W(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2} - 1) + (n-2) + (n-1) = 2^3 W(\frac{n}{2^3}) + (n-2^2) + (n-2) + (n-1)$$

.....

$$= 2^k W(\frac{n}{2^k}) + (n - 2^{k-1}) + (n - 2^{k-2}) + \cdots + (n-2) + (n-1)$$

$$= kn - (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} + 2^{k-1})$$

$$= n \lg n - \frac{2^k - 1}{2 - 1}$$

$$= n \lg n - (n-1)$$

시간복잡도 분석

- n이 2의 승(power)의 형태가 아닌 경우의 재현식

$$W(n) = W(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + W(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n - 1 \qquad n > 1 \text{ 일 때}$$
$$W(1) = 0$$

그러나 이 재현식의 정확한 해를 구하기는 복잡하다.

그러나, 앞의 이분검색 알고리즘의 분석에서도 보았듯이, $n = 2^k$라고 가정해서 해를 구하면, 이 재현식의 해와 같은 카테고리의 시간복잡도를 얻게 된다.

따라서 앞으로 이와 비슷한 재현식의 해를 구할 때, $n = 2^k$라고 가정해서 구해도 점근적으로는 같은 해를 얻게 된다.

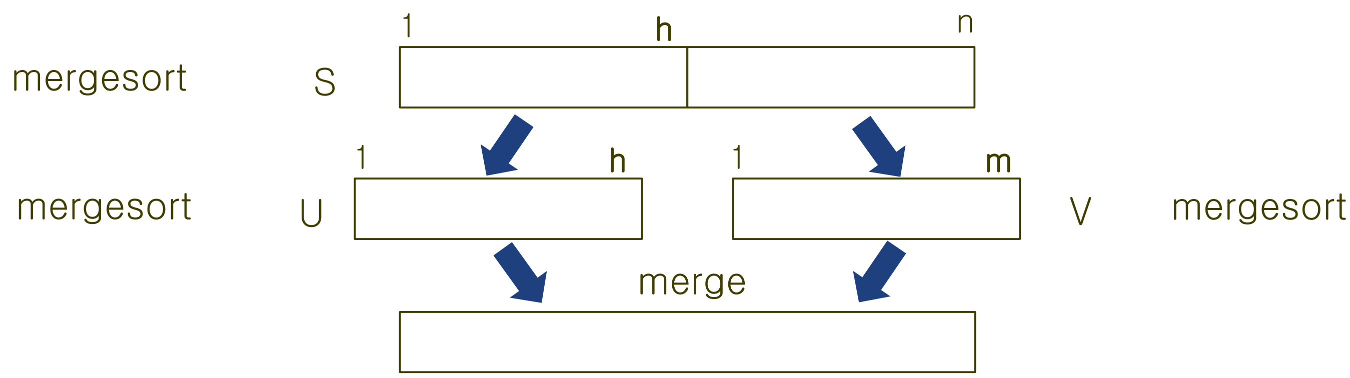
공간복잡도 분석

- 추가적인 저장장소를 사용하지 않고 정렬하는 알고리즘

  - **제자리정렬(in-place sort) 알고리즘**

- 합병정렬 알고리즘은 제자리정렬 알고리즘이 아님. 입력배열 S이외에 U와 V를 추가로 만들어서 사용

- 하단의 재귀호출이 종료될 때까지 상위의 재귀호출이 생성하는 공간이 유지되어야 함.



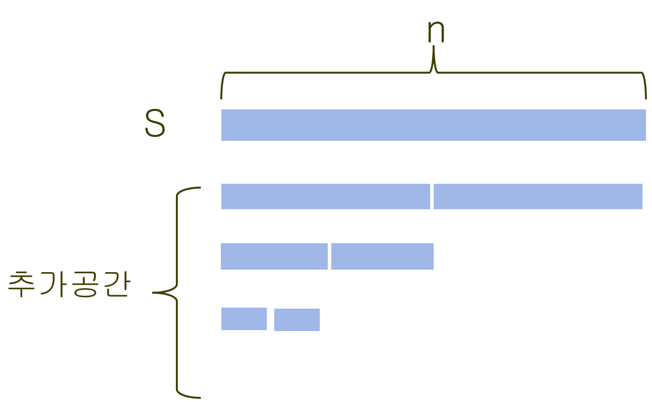
공간복잡도 분석

- 추가적인 저장장소: mergesort를 재귀호출할 때마다 크기가 S의 반이 되는 U와 V가 추가적으로 필요. (Merge 는 추가적인 저장장소 불필요).

  처음 S의 크기가 n이면, 추가적으로 필요한 U와 V의 저장장소 크기의 합은 n이 된다. 다음 재귀 호출에는 $n/2$의 추가적으로 필요한 총 저장장소의 크기는

$$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\ \dots = 2n \qquad 2n \in \Theta(n)$$

- 추가적으로 필요한 저장장소가 n이 되도록, 즉, 공간복잡도가 n이 되도록 알고리즘을 향상시킬 수 있다(다음 절의 알고리즘). 그러나 합병정렬 알고리즘이 제자리정렬 알고리즘이 될 수는 없다.




```
void mergesort (int n, keytype S[]) {
        ………..

  if (n > 1) {
    copy S[1] through S[h] to U[1] through U[h];
    copy S[h+1] through S[n] to V[1] through V[m];
    mergesort(h,U);
    mergesort(m,V);
    merge(h,m,U,V,S);
         }
}
```

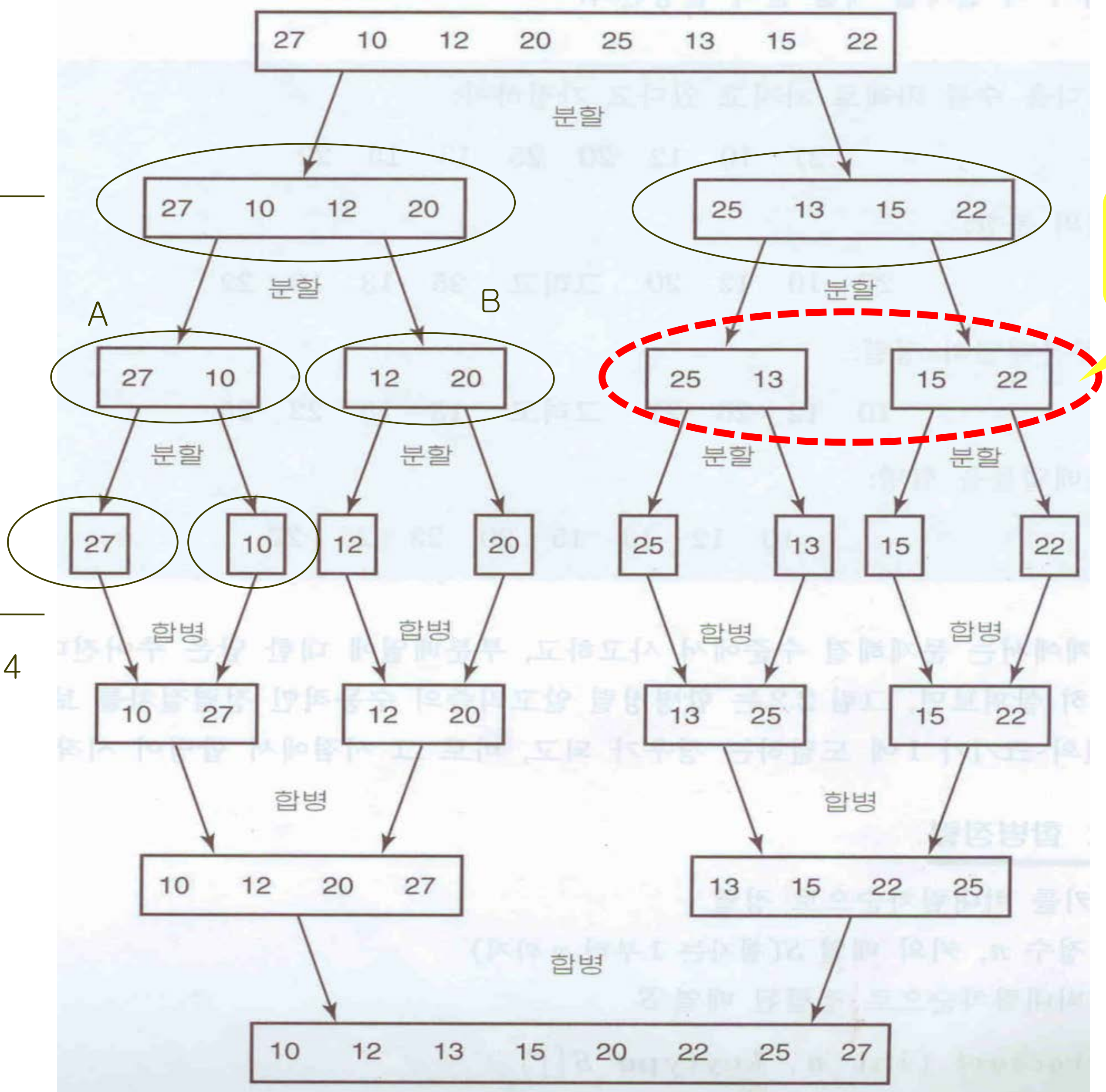
추가 공간

4+4

2+2

1+1

총추가 공간 14



-A,B 사용이 끝난 후 필요한 공간
-A,B를 재사용

• 그림 2.2 합병정렬 알고리즘의 정렬절차

공간복잡도가 향상된 알고리즘

- 합병정렬(mergesort)
  - ✓ 문제: *n*개의 정수를 비내림차순으로 정렬하시오.
  - ✓ 입력: 정수 *n*, 크기가 *n*인 배열 S[1..*n*]
  - ✓ 출력: 비내림차순으로 정렬된 배열 S[1..*n*]
  - ✓ 알고리즘:

```
void  mergesort2(index low, index high) {
        index mid;
        if (low < high) {
             mid = (low + high) / 2;
             mergesort2(low, mid);
             mergesort2(mid+1, high);
             merge2(low, mid, high);
         }
}
   …
   mergesort2(1, n);
   ...
```

공간복잡도가 향상된 알고리즘

- 합병(merge2)
  - ✓ 문제: 두 개의 정렬된 배열을 하나의 정렬된 배열로 합병하시오.
  - ✓ 입력: (1) 첨자 low, mid, high,

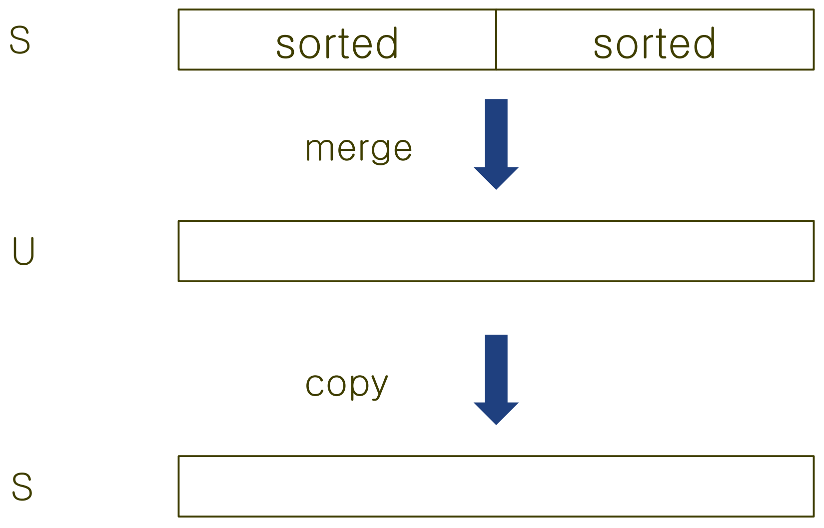
    (2) 부분 배열S[low..high], 여기서 S[low..mid]와 S[mid+1..high]는

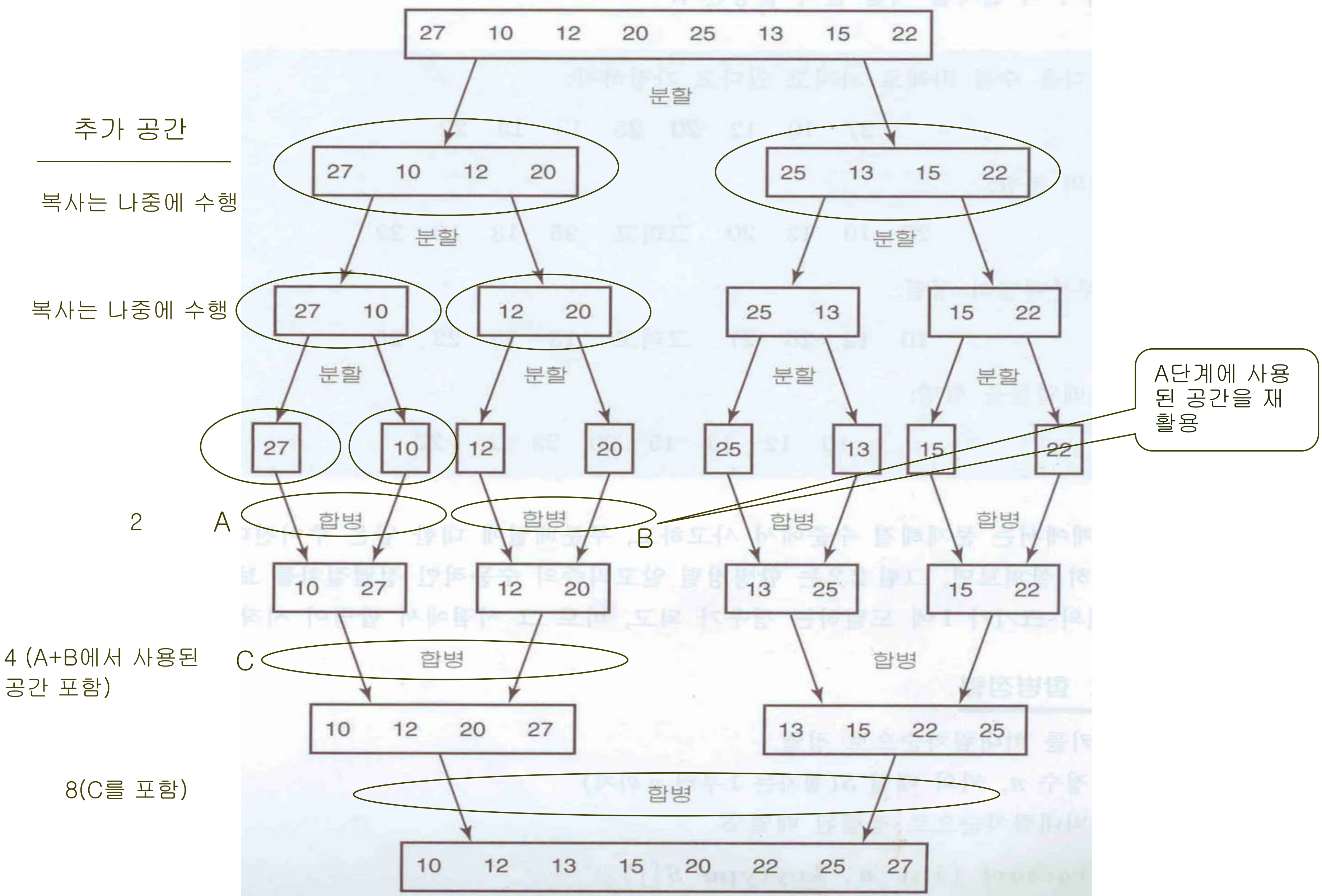
    이미 각각 정렬이 완료되어 있음.
  - ✓ 출력: 정렬이 완료된 부분배열 S[1ow..high]

- 알고리즘:

```
void merge2(index low, index mid, index high) {
        index i, j, k;   keytype U[low..high];   // 합병하는데 필요한 지역 배열
        i = low; j = mid + 1; k = low;
        while (i <= mid && j <= high) {
              if (S[i] < S[j]) {
                        U[k] = S[i];
                        i++;
              }
              else {
                        U[k] = S[j];
                        j++;
              }
              k++;
        }
        if (i > mid)
            copy S[j] through S[high] to U[k] through U[high];
        else
            copy S[i] through S[mid] to U[k] through U[high];
        copy U[low] through U[high] to S[low] through S[high];
}
```

merge2





총추가 공간 8

- mergesort2의 절차. Additional space is *n*.

빠른정렬(Quicksort)

- 1962년에 영국의 호아(C.A.R. Hoare)의 의해서 고안

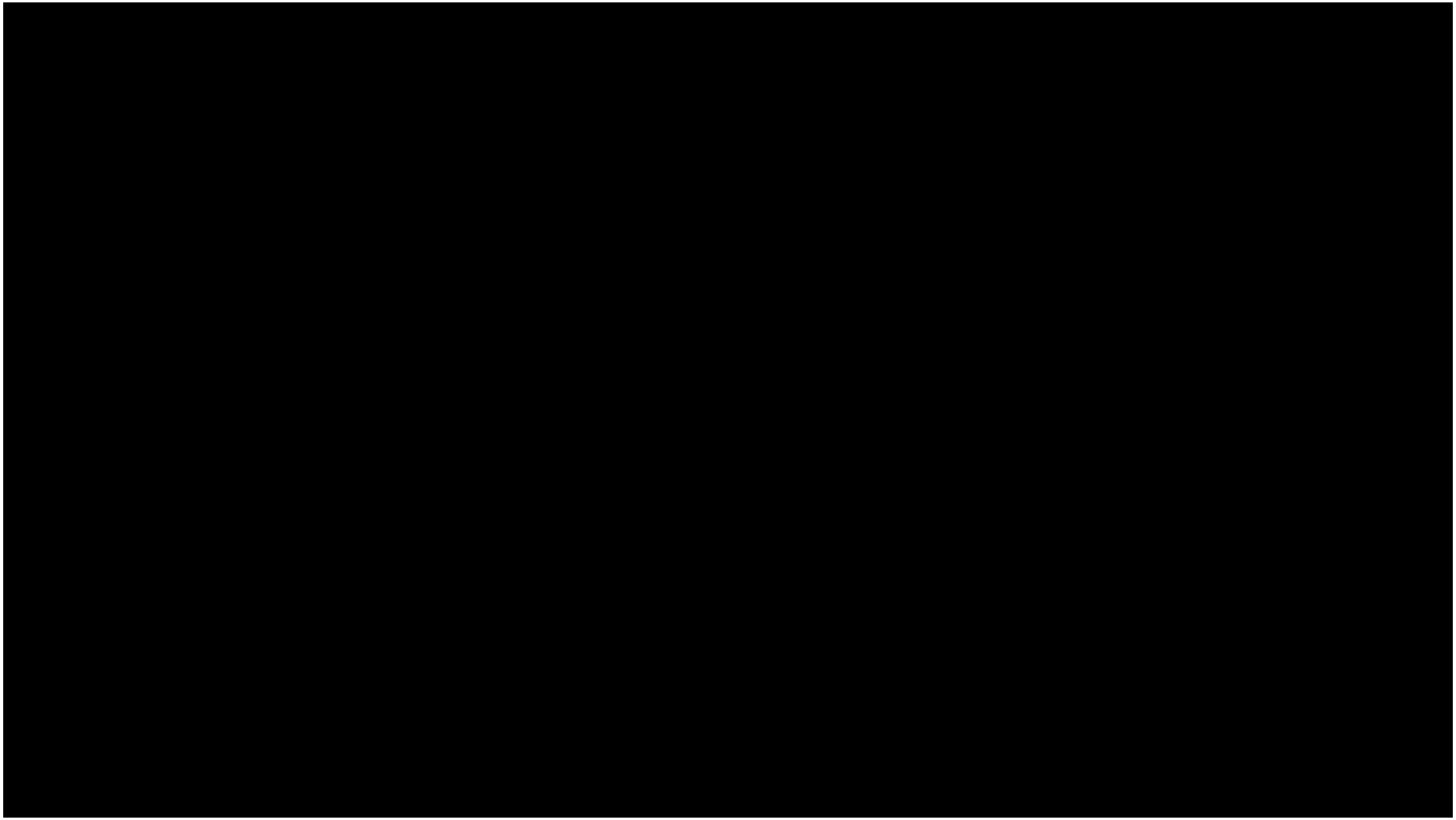
- 빠른정렬(quicksort)란 이름이 오해의 여지가 있음. 왜냐하면 사실 절대적으로 가장 빠른 정렬 알고리즘이라고 할 수는 없기 때문이다. 차라리 “분할교환정렬(partition exchange sort)”라고 부르는 게 더 정확함.

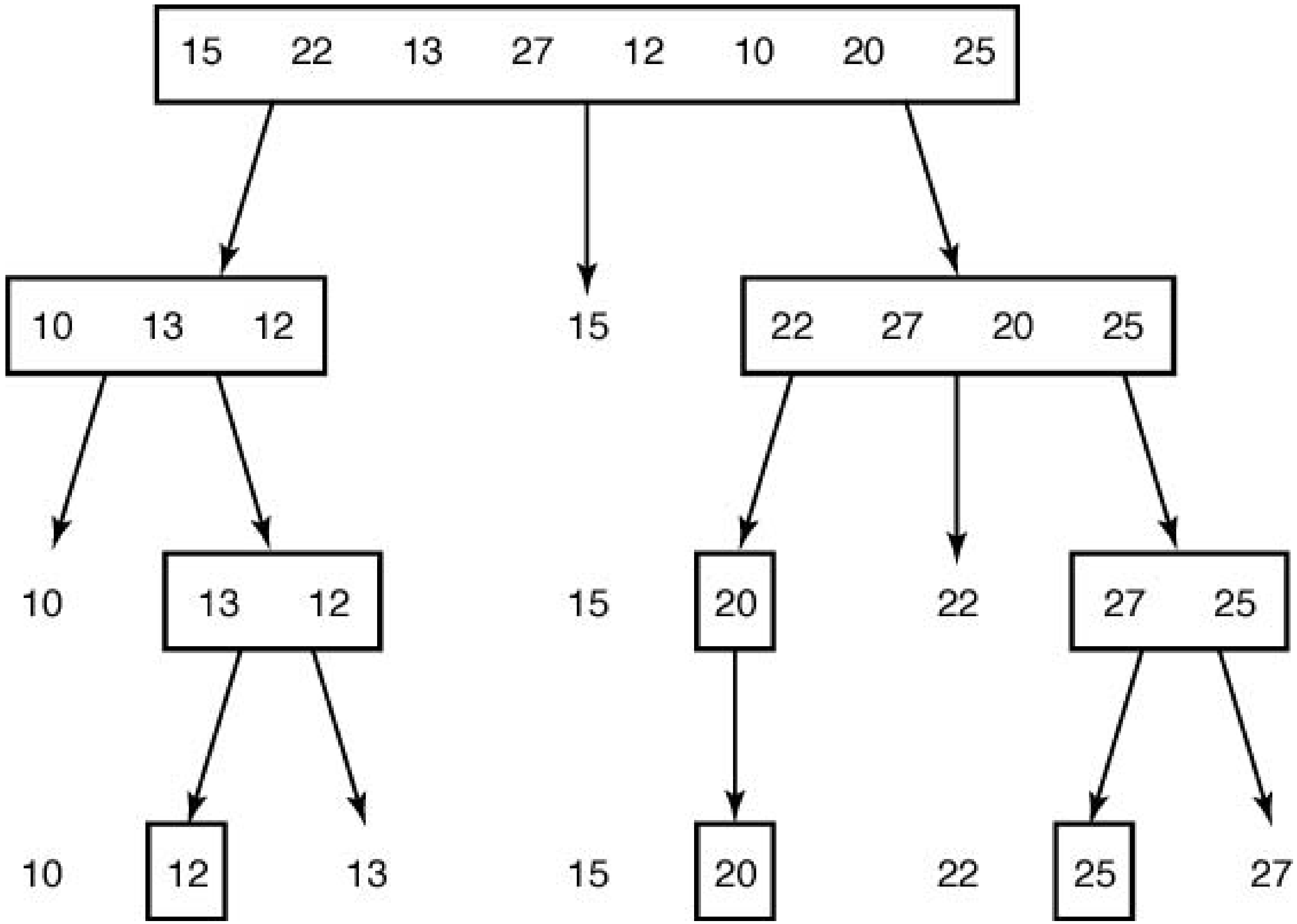
- 보기: 15 22 13 27 12 10 20 25

빠른정렬 영상

https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=cVMKXKoGu_Y

선택정렬과 빠른정렬





- 그림 2.3 빠른정렬 알고리즘의 수행절차. 부분배열은 네모로 둘러싸여 있는 데 반해, 기준 아이템은 그렇지 않다.

빠른정렬 알고리즘

- 문제: n개의 정수를 비내림차순으로 정렬
- 입력: 정수 $n > 0$, 크기가 n인 배열 S[1..n]
- 출력: 비내림차순으로 정렬된 배열 S[1..n]
- 알고리즘:

```
void quicksort (index low, index high) {
     index pivotpoint;
     if (high > low) {
          partition(low,high,pivotpoint);
          quicksort(low,pivotpoint-1);
          quicksort(pivotpoint+1,high);
     }
}
```

분할 알고리즘

- 문제: 빠른정렬을 하기 위해서 배열 S를 둘로 나눈다.
- 입력: (1) 첨자 low, high (2) S의 부분배열 (첨자는 low에서 high)
- 출력: 첨자 low에서 high까지의 S의 부분배열의 기준점(pivot point), pivotpoint

```
void partition (index low, index high, index& pivotpoint) {
     index i, j;
     keytype pivotitem;
     pivotitem = S[low];    //pivotitem으로 첫번째 항목을 고른다
     j = low;
     for(i = low + 1; i <= high; i++)
           if (S[i] < pivotitem) {
             j++;
             exchange S[i] and S[j];
           }
     pivotpoint = j;
     exchange S[low] and S[pivotpoint];// pivotitem 값을 pivotpoint에 넣는다
}
```

j: pivotitem 보다 작은 그룹의 제일 우측끝 데이터의 위치

– not stable

i	*j*	S[1]	S[2]	S[3]	S[4]	S[5]	S[6]	S[7]	S[8]	
—	—	15	22	13	27	12	10	20	25	← 초기값
2	1	**15**	**22**	13	27	12	10	20	25	
3	1	**15**	22	**13**	27	12	10	20	25	
4	2	**15**	$\boxed{13}$	$\boxed{22}$	**27**	12	10	20	25	
5	2	**15**	13	22	27	**12**	10	20	25	
6	3	**15**	13	$\boxed{12}$	27	$\boxed{22}$	**10**	20	25	
7	4	**15**	13	12	$\boxed{10}$	22	$\boxed{27}$	**20**	25	
8	4	**15**	13	12	10	22	27	20	**25**	
—	4	$\boxed{10}$	13	12	$\boxed{15}$	22	27	20	25	← 최종값

* 비교되는 아이템은 진하게 표시되어 있다. 바로 교환된 아이템은 상자로 둘러싸여 있다.

```
void partition (index low, index high,
 index& pivotpoint) {
 index i, j; keytype pivotitem;
 pivotitem = S[low];
 j = low;
 for(i = low + 1; i <= high; i++)
   if (S[i] < pivotitem) {
        j++;
        exchange S[i] and S[j];
         }
 pivotpoint = j;
 exchange S[low] and S[pivotpoint]
}
```

pivot point

- 표 2.2 partition 프로시저의 예

분할알고리즘(partition) 분석

- 분할 알고리즘의 모든 경우를 고려한 시간복잡도 분석
  - ✓ **단위연산**: $S[i]$와 pivotitem과의 비교
  - ✓ **입력크기**: 부분배열이 가지고 있는 항목의 수, $n = high - low + 1$
  - ✓ **분석**: 배열의 첫번째 항목만 제외하고 모든 항목을 한번씩 비교하므로, $T(n) = n - 1$이다.

quicksort 분석

- 빠른정렬 알고리즘의 최악의 경우를 고려한 시간복잡도 분석
  - ✓ **단위연산**: 분할알고리즘의 $S[i]$와 pivotitem과의 비교
  - ✓ **입력크기**: 배열이 S가 가지고 있는 항목의 수, n
  - ✓ **분석**: 입력이 비내림차순으로 정렬이 되어 있는 경우가 최악. 첫번째(기준점) 항목보다 작은 항목은 없으므로, 크기가 n인 배열은 크기가 0인 부분배열은 왼쪽에 오고, 크기가 n-1인 부분배열은 오른쪽에 오도록 하여 계속 쪼개진다. 따라서, $T(n) = T(0) + T(n - 1) + n - 1$

    그런데, $T(0) = 0$이므로, 재현식은 다음과 같이 된다.

    $T(n) = T(n - 1) + n - 1$, $n > 0$이면

    $T(0) = 0$

    [예] S = [1,2,3,4,5,6,7,8]

분석

이 재현식을 풀면,

$$T(n) = T(n - 1) + n - 1$$
$$T(n - 1) = T(n - 2) + n - 2$$
$$T(n - 2) = T(n - 3) + n - 3$$
$$\cdots$$
$$T(2) = T(1) + 1$$
$$T(1) = T(0) + 0$$
$$T(0) = 0$$
$$T(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

결론적으로 빠른정렬 알고리즘의 최악의 시간복잡도는 $n(n\text{-}1)/2$.

그러면 시간이 더 많이 걸리는 경우는 있을까? 이 경우가 최악의 경우이며, 따라서 이 보다 더 많은 시간이 걸릴 수가 없다는 사실을 수학적으로 엄밀하게 증명해 보자.

- 모든 정수 n에 대해서, $W(n) \le \frac{n(n-1)}{2}$ 임을 증명하시오.

증명: (수학적귀납법)

귀납출발점: $n = 0$일 때, $W(0) \le \frac{0(0-1)}{2}$

귀납가정: $0 \le k < n$인 모든 k에 대해서, $W(k) \le \frac{k(k-1)}{2}$

귀납단계: $W(n) \le \frac{n(n-1)}{2}$

$$W(n) \le W(p-1) + W(n-p) + n - 1$$ pivotpoint 값이 p인 경우 재현식에 의해서

$$\le \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(n-p)(n-p-1)}{2} + n - 1$$ 귀납가정에 의해서

$$= \frac{p^2 - 3p + 2 + (n-p)^2 - n + p + 2n - 2}{2}$$

$$= \frac{p^2 + (n-p)^2 + n - 2p}{2}$$

여기서 p가 n - 1일 때 최대값을 가진다. 따라서

$$max_{1 \le p \le n-1}(p^2 + (n-p)^2) = 1^2 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$$

가 되고, 결과적으로

$$W(n) \le \frac{p^2 + (n-p)^2 + n - 2p}{2} \le \frac{n^2 - 2n + 2 + n - 2}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

가 된다. 따라서 최악의 경우 시간복잡도는

$$W(n) = \frac{n(n-1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

- **평균의 경우**를 고려한 시간복잡도 분석
  - ✓ **단위연산**: 분할알고리즘의 $S[i]$와 pivotitem과의 비교
  - ✓ **입력크기**: 배열 S가 가지고 있는 항목의 수, n
  - ✓ **분석**: $A(n)$을 n개의 데이터를 정렬하는데 걸리는 평균시간이라고 한다. pivotitem이 정렬 후 p번째 데이터가 될 확률은 $1/n$. 기준점이 p일 때 두 부분배열을 정렬하는데 걸리는 평균시간은 $[A(p-1)+A(n-p)]$이고, 분할하는데 걸리는 시간은 $n-1$이므로, 평균적인 시간복잡도는

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n}[A(p-1)+A(n-p)]+n-1 \\
&= \frac{1}{n}\Big[(A(0)+A(n-1)) \\
&\quad +(A(1)+A(n-2)) \\
&\quad \cdots \\
&\quad +(A(n-2)+A(1)) \\
&\quad +(A(n-1)+A(0))\ \Big]+n-1 \\
&= \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} A(p-1)+n-1
\end{aligned}
$$

양변을 n으로 곱하면,

$$nA(n) = 2\sum_{p=1}^{n} A(p-1) + n(n-1) \qquad (1)$$

n대신 n - 1을 대입하면,

$$(n-1)A(n-1) = 2\sum_{p=1}^{n-1} A(p-1) + (n-1)(n-2) \qquad (2)$$

(1)에서 (2)를 빼면,

$$nA(n) - (n-1)A(n-1) = 2A(n-1) + 2(n-1)$$

간단히 정리하면,

$$\frac{A(n)}{n+1} = \frac{A(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

여기서,

$$a_n = \frac{A(n)}{n+1}$$

라고 하면, 다음과 같은 재현식을 얻을 수가 있다.

$$a_n = a_{n-1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \qquad n > 0 \text{ 이면}$$

$$a_0 = 0$$

그러면,

$$a_n = a_{n-1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}, \quad a_{n-1} = a_{n-2} + \frac{2(n-2)}{(n-1)n}, \ \ldots, \ a_2 = a_1 + \tfrac{1}{3}, \ \ a_1 = a_0 + 0$$

따라서, 해는

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{i(i+1)}$$
$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\right)$$

여기에서 오른쪽 항은 무시해도 될 만큼 작으므로 무시한다.

$\ln n = \log_e n$이고,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

이므로, 해는 $a_n \approx 2 \ln n$. 그리고 $\lg n = \ln n / \ln 2$따라서,

$$\begin{aligned} A(n) &= (n+1)a_n \\ &\approx (n+1) 2 \ln n \\ &= (n+1) 2 (\ln 2)(\lg n) \\ &\approx 1.38 (n+1) \lg n \quad (\ln 2 \approx 0.693) \\ &\in \Theta(n \lg n) \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{A(n)}{n+1}$$

Quicksort는 평균적으로 $O(n \lg n)$ 시간의 우수한 알고리즘

Best 경우: 문제가 매번 반씩으로 나누어질 때

$$T(n) = 2T(n/2)+n-1 \in \Theta(n\lg n)$$

행렬 곱셈(matrix multiplication)

- 단순한 행렬곱셈 알고리즘
  - ✓ **문제**: $n \times n$ 크기의 행렬의 곱을 구하시오.
  - ✓ **입력**: 양수 n, $n \times n$ 크기의 행렬 A와 B
  - ✓ **출력**: 행렬 A와 B의 곱인 C

```
void matrixmult (int n, const number A[][], const number B[][],
                                                number C[][]) {
      index i, j, k;
       for (i = 1; i <= n; i++)
                for (j = 1; j <= n; j++) {
                      C[i][j] = 0;
                      for (k = 1; k <= n; k++)
                           C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j];
                  }
}
```

```
void matrixmult (. . .     ) {
index i, j, k;
for (i = 1; i <= n; i++)
   for (j = 1; j <= n; j++) {
      C[i][j] = 0;
      for (k = 1; k <= n; k++)
         C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j];
     }
}
```

- 시간복잡도 분석 I:
  - **단위연산**: 가장 안쪽의 루프에 있는 곱셈하는 연산
  - **입력크기**: 행과 열의 수, *n*
  - **모든 경우** 시간복잡도 분석: 총 곱셈의 횟수

$$T(n) = n \times n \times n = n^3 \in \Theta(n^3)$$

- 시간복잡도 분석 II (알고리즘을 약간 수정)
  - **단위연산**: 가장 안쪽의 루프에 있는 덧셈하는 연산
  - **입력크기**: 행과 열의 수, *n*
  - **모든 경우** 시간복잡도 분석: 총 덧셈의 횟수

$$T(n) = (n-1) \times n \times n = n^3 - n^2 \in \Theta(n^3)$$

2×2 행렬곱셈(단순한 방법):

- 문제: 두 2×2 행렬 A와 B의 곱(product) C,

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} \end{bmatrix}$$

- 시간복잡도 분석: 8번의 곱셈과 4번의 덧셈이 필요

쉬트라쎈(Strassen)의 방법

- 문제: 두 2 × 2 행렬 A와 B의 곱(product) C,

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- 쉬트라쎈(Strassen)의 해:

$$C = \begin{bmatrix} m_1 + m_4 - m_5 + m_7 & m_3 + m_5 \\ m_2 + m_4 & m_1 + m_3 - m_2 + m_6 \end{bmatrix}$$

여기서

$$\begin{aligned}
m_1 &= (a_{11} + a_{22}) \times (b_{11} + b_{22}) \\
m_2 &= (a_{21} + a_{22}) \times b_{11} \\
m_3 &= a_{11} \times (b_{12} - b_{22}) \\
m_4 &= a_{22} \times (b_{21} - b_{11}) \\
m_5 &= (a_{11} + a_{12}) \times b_{22} \\
m_6 &= (a_{21} - a_{11}) \times (b_{11} + b_{12}) \\
m_7 &= (a_{12} - a_{22}) \times (b_{21} + b_{22})
\end{aligned}$$

- 시간복잡도 분석: 쉬트라쎈의 방법은 7번의 곱셈과 18번의 덧셈/뺄셈을 필요.
- 언뜻 봐서는 전혀 좋아지지 않았다!
- 그러나 행렬의 크기가 커지면 쉬트라쎈의 방법이 효율적임.

$n \times n$ 행렬곱셈: 쉬트라쎈의 방법

- 문제: n이 2의 거듭제곱이고, 각 행렬을 4개의 부분행렬(submatrix)로 나눈다고 가정하자. 두 $n \times n$ 행렬 A와 B의 곱 C:

$$\left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

- 쉬트라쎈(Strassen)의 해:

$$C = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 + M_3 - M_2 + M_6 \end{bmatrix}$$

여기서

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22}) \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22}) \times B_{11} \\
M_3 &= A_{11} \times (B_{12} - B_{22}) \\
M_4 &= A_{22} \times (B_{21} - B_{11}) \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12}) \times B_{22} \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12}) \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22})
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c c c} \mathrm{A}_{11} & \multirow{2}{*}{$\left(\begin{array}{cc|cc} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{array}\right)$} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & & \mathrm{A}_{22} \end{array}$$

쉬트라센의 알고리즘

- **문제**: n이 2의 거듭제곱일 때, $n \times n$ 크기의 두 행렬의 곱을 구하시오.
- **입력**: 정수 n, $n \times n$ 크기의 행렬 A와 B
- **출력**: 행렬 A와 B의 곱인 C

```
void strassen (int n, n*n_matrix A, n*n_matrix B, n*n_matrix& C) {
     if (n <= 임계점)
          단순한 알고리즘을 사용하여 C = A * B를 계산;
     else {
          A를 4개의 부분행렬 A11, A12, A21, A22로 분할;
          B를 4개의 부분행렬 B11, B12, B21, B22로 분할;
          쉬트라센의 방법을 사용하여 C = A * B를 계산;
          // 되부르는 호출의 예: strassen(n/2, A11+A12, B11+B22,M1)
     }
}
```

- 용어: 임계점(threshold)이란? 두 알고리즘의 효율성이 교차하는 문제의 크기.

분석

- 단순한 방법의 시간복잡도 분석
  - $T(n)$: $n \times n$ 크기의 행렬 A와 B를 곱하는데 걸리는 시간
  - **단위연산**: 곱셈하는 연산
  - **입력크기**: 행과 열의 수, n
  - **모든 경우** 시간복잡도 분석: 임계값을 1이라고 하자. (임계값은 차수에 전혀 영향을 미치지 않는다.)

    재현식은 $T(n) = 8T(\frac{n}{2}),\ n > 1$이고, $n = 2^k (k \geq 1)$

    $T(1) = 1$

    이 식을 전개해 보면,

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 8 \times 8 \times \cdots \times 8 \quad (k\text{번}) \\
&= 8^k \\
&= 8^{\lg n} \\
&= n^{\lg 8} \\
&= n^3 \\
&\in \Theta(n^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21} & A_{11} \times B_{12} + A_{12} \times B_{22} \\ A_{21} \times B_{11} + A_{22} \times B_{21} & A_{21} \times B_{12} + A_{22} \times B_{22} \end{bmatrix}
$$

쉬트라센 방법의 시간복잡도 분석 I

- **단위연산**: 곱셈하는 연산
- **입력크기**: 행과 열의 수, n
- **모든 경우** 시간복잡도 분석: 임계값을 1이라고 하자. (임계값은 차수에 전혀 영향을 미치지 않는다.)

재현식은

$$T(n) = 7T(\tfrac{n}{2}),\ n > 1 \text{ 이고},\ n = 2^k (k \geq 1)$$

$$T(1) = 1$$

이 식을 전개해 보면,

$$\begin{aligned} T(n) &= 7 \times 7 \times \ldots \times 7 \quad (k\text{번}) \\ &= 7^k \\ &= 7^{\lg n} \\ &= n^{\lg 7} \\ &= n^{2.81} \\ &\in \Theta(n^{2.81}) \end{aligned}$$

행렬의 크기가 2의 지수가 아닌 경우에는 크기를 2의 지수로 만들기 위해 필요한 만큼의 0 데이터를 넣는다.

<u>쉬트라센방법</u>의 시간복잡도 분석 II

- ✓ **단위연산:** 덧셈/뺄셈하는 연산
- ✓ **입력크기:** 행과 열의 수, n
- ✓ **모든 경우** 시간복잡도 분석: 위에서와 마찬가지로 임계값을 1이라고 하자. 재현식은

7회의 곱셈 문제

$$T(n) = 7T(\tfrac{n}{2}) + 18(\tfrac{n}{2})^2, \quad n > 1 \text{ 이고, } n = 2^k (k \ge 1)$$

$$T(1) = 0$$

18회의 덧셈

도사정리의 3가지 중에서 1번을 이용하면 간단히 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T(n) &= 6n^{\lg_2 7} - 6n^2 \\ &= 6n^{2.81} - 6n^2 \\ &\in \Theta(n^{2.81}) \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 + M_3 - M_2 + M_6 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22})$$
$$M_2 = (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}$$
$$M_3 = A_{11} \times (B_{12} - B_{22})$$
$$M_4 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11})$$
$$M_5 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}$$
$$M_6 = (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12})$$
$$M_7 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22})$$

	표준알고리즘	쉬트라센 알고리즘
곱셈	n^3	$n^{2.81}$
덧셈/뺄셈	$n^3 - n^2$	$6n^{2.81} - 6n^2$

표2.3 $n \times n$ 행렬을 곱하는 두 알고리즘의 비교

Discussion

- 두 개의 행렬을 곱하기 위한 문제에 대해서 시간복잡도가 $\Theta(n^2)$이 되는 알고리즘을 만들어 낸 사람은 아무도 없다.

- 게다가 그러한 알고리즘을 만들 수 없다고 증명한 사람도 아무도 없다.

- Shumel Winograd: 덧셈/뺄셈 15회만 수행하는 변형된 쉬트라센 알고리즘 고안

$$T(n) = 5n^{2.81} - 5n^2$$

- Coppersmith와 Winograd(1987): 곱셈을 단위연산으로 한 시간복잡도가

$$T(n) = 5n^{2.38}$$

인 알고리즘 제안- 비효율적

큰 정수 계산법

- 하드웨어의 용량을 초과하는 정수연산 – 천문학
  - ✓ 정수 배열을 이용한 큰 정수의 표현
  - ✓ (예) 543,127

5	4	3	1	2	7
S[6]	S[5]	S[4]	S[3]	S[2]	S[1]

  - ✓ n: 큰 정수의 숫자(digit) 개수
    - 단순 곱셈은 n^2시간 걸림. 덧셈/뺄셈은 1차 시간에 수행 가능
    - 1차시간 가능: $u \times 10^m$, u divide 10^m , u mod 10^m
  - ✓ $567{,}832 = 567 \times 10^3 + 832$,
  - ✓ $9{,}423{,}723 = 9423 \times 10^3 + 723$

$$u = \underbrace{x}_{\lceil n/2 \rceil \text{ digits}} \times 10^m + \underbrace{y}_{\lfloor n/2 \rfloor \text{ digits}}$$

n digits

$$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

```
     aaaa
x    bbbb
---------
     cccc
    cccc
   cccc
  cccc
```

$$u = x \times 10^m + y, \; v = w \times 10^m + z$$

$$u \times v = (x \times 10^m + y) \times (w \times 10^m + z)$$
$$= xw \times 10^{2m} + (xz + wy) \times 10^m + yz$$

- 큰 정수곱셈
  - **문제**: 2개의 큰 정수 *u*와 *v*를 곱하라
  - **입력**: 큰 정수 *u*와 *v*, 크기 *n*
  - **출력**: prod(*u*와 *v*의 곱)

```
large_integer prod(large_integer u, large_integer v){
       large_integer x, y, w, z;
       int n, m;

       n = maximum(u의 자리수, v의 자리수);
       if(u == 0 || v == 0) return 0;
       else if( n <= threshold)
           return 일반적인 방법으로 구한 u × v ;
       else{
         m = ⌊n/2⌋;
         x = u divide 10^m; y = u mod 10^m;
         w = v divide 10^m; z = v mod 10^m;
         return prod(x, w) × 10^2m +
               (prod(x, z)+prod(w, y)) × 10^m + prod(y, z);
         }
}
```

- prod 최악의 경우 시간복잡도 분석:
  - ✓ **단위연산**: 덧셈, 뺄셈, divide 10^m, mod 10^m, $\times 10^m$
  - ✓ **입력크기**: 정수의 자리수, n
  - ✓ n이 2의 거듭제곱 형태라고 가정
  - ✓ 덧셈, 뺄셈, divide 10^m, mod 10^m, $\times 10^m$ 에 있는 1차시간 연산은 모두 cn으로 표시

$$W(n) = 4W(\frac{n}{2}) + cn, \quad n > s \text{ 이고}, n\text{이 2의 거듭제곱인 경우}$$

$$W(s) = 0$$

s=threshold보다 작거나 같은 문제크기. W(s)의 단위연산 횟수는 0

$$W(n) \in \Theta(n^{\lg 4}) = \Theta(n^2)$$

Appendix Theorem B.5
The Master Theorem

- 개선된 방법:
  - ✓ 이전 방법에서는 xw, $xz+yw$, yz의 계산 필요 ➔ 4회의 곱셈
  - ✓ 개선방법: r 계산 추가

$$r = (x+y) \times (w+z) = xw + (xz+yw) + yz$$

① ② ③

$$xz+yw = r - xw - yz$$

$$u \times v = (x \times 10^m + y) \times (w \times 10^m + z)$$
$$= xw \times 10^{2m} + (xz+wy) \times 10^m + yz$$

(1) ① 계산 수행

(2) ②, ③ 계산 : xw, yz 구함

(3) r의 값에서 ②, ③의 계산 결과를 빼줌 : $xz+yw$ 구함

- 결과적으로 xw, $xz+yw$, yz을 계산하는데, 덧셈/뺄셈의 회수는 증가지만, 곱셈은 3회 필요

- 큰 정수곱셈2
  - **문제**: 2개의 큰 정수 *u*와 *v*를 곱하라
  - **입력**: 큰 정수 *u*와 *v*, 크기 *n*
  - **출력**: prod2(*u*와 *v*의 곱)

```
large_integer prod2(large_integer u, large_integer v){
       large_integer x, y, w, z, r, p, q;
       int n, m;
       n = maximum(u의 자리수, v의 자리수);
       if(u == 0 || v == 0) return 0;
       else if( n <= threshold)
           return 일반적인 방법으로 구한 u × v ;
       else{
         m = ⌊n/2⌋;
         x = u divide 10^m; y = u mod 10^m;
         w = v divide 10^m; z = v mod 10^m;
         r = prod2(x+y,w+z);
         p = prod2(x, w);
         q = prod2(y, z);
         return p×10^2m + (r-p-q)×10^m + q;
         }
}
```

- prod2 최악의 경우 시간복잡도 분석:
  - ✓ prod2(x+y, w+z) $n/2 \le$ 입력크기 $\le n/2+1$
  - ✓ prod2(x, w) $n/2$
  - ✓ prod2(y,z) $n/2$

$$3W(\frac{n}{2}) + cn \le W(n) \le 3W(\frac{n}{2}+1) + cn,\quad n > s\text{이고}, n\text{이 2의 거듭제곱인 경우}$$

$$W(s) = 0$$

$$W(n) \in \Theta(n^{\lg 3}) \approx \Theta(n^{1.58})$$

임계값결정

- divide-and-conquer방법에서 큰 문제를 어느 크기의 문제가 될 때까지 분할 할 것인가
- optimal threshold value를 결정하는 방법
- 문제 크기가 줄어들면 재귀호출을 계속 수행하는 것 보다는 다른 알고리즘을 활용하는 것이 효과적
- mergesort2의 분할하고 재합병하는데 걸리는 시간(running time): $32n\ \mu s$로 가정

$$W(n) = W(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + W(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + 32n\ \mu s, \qquad W(1) = 0\ \mu s$$

- 단순화 시키면

$W(n) = 2W(n/2) + 32n\ \mu s$, $n > 1$이고, n이 2의 거듭제곱인 경우

$W(1) = 0\ \mu s$

$$W(n) = 32n \lg n\ \mu s$$

- 교환정렬을 이용하면

$$W(n) = \frac{n(n-1)}{2}\ \mu s$$

교환정렬을 호출해야하는 최적의 임계점은

$$\frac{n(n-1)}{2}\mu s < 32n\lg n\ \mu s$$ 를 만족하는 *n*.

이를 풀면 $n < 591$.

- 그러나 잘못된 분석임.

$W(n) = 32n\lg n\ \mu s$은 문제 크기가 1 이 될 때까지 분할할 경우의 복잡도

[예 2.7]정확한 분석은 다음의 두 식이 같은 값을 갖는 *t*를 찾아야 함.

$$W(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{2}\mu s & (n \le t) \\ W(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + W(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 32n\ \mu s & (n > t) \end{cases}$$

교환정렬을 사용하는 것이 분할하는 것과 같은 효율이 되는 지점

$$W(\lfloor \tfrac{t}{2} \rfloor) + W(\lceil \tfrac{t}{2} \rceil) + 32t = \frac{t(t-1)}{2}$$

$$\frac{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor (\lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 1)}{2} + \frac{\lceil \frac{t}{2} \rceil (\lceil \frac{t}{2} \rceil - 1)}{2} + 32t = \frac{t(t-1)}{2}$$

*t*가 짝수; $t = 128$

홀수; $t = 128.008$

*t*가 threshold이므로 $n = t/2$인 경우는 t(t-1)/2 사용

[결론] 최적 $t = 128$

분할정복을 사용하지 말아야 하는 경우

- 크기가 n인 입력이 2개 이상의 조각으로 분할되며, 분할된 부분들의 크기가 거의 n에 가깝게 되는 경우 ⇒ 시간복잡도: 지수(exponential) 시간

(ex) $T(n) = 2T(n-1) + n$

- 크기가 n인 입력이 거의 n개의 조각으로 분할되며, 분할된 부분의 크기가 n/c인 경우. 여기서 c는 상수이다. ⇒ 시간복잡도: $\Theta(n^{\lg n})$

(ex) $T(n) = nT(n/2) + n$

도사 정리(The Master Theorem)

- a와 b를 1보다 큰 상수라 하고, $f(n)$을 어떤 함수라 하고, 음이 아닌 정수 n에 대해서 정의된 재현식 $T(n)$이 다음의 형태를 이룬다고 하자.

$$T(n) = a \times T\left(\tfrac{n}{b}\right) + f(n)$$

그러면 $T(n)$은 다음과 같이 점근적인 한계점(asymptotic bound)을 가질 수 있다.

1. 어떤 상수 $\varepsilon > 0$에 대해서, 만약 $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$이면, $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
2. If $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, then $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. 어떤 상수 $\varepsilon > 0$에 대해서, 만약 $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ 이고, 어떤 상수 $c < 1$ 과 충분히 큰 모든 n에 대해서, $a \times f\left(\tfrac{n}{b}\right) \le c \times f(n)$이면, $T(n) \in \Theta(f(n))$.

   여기서 $\frac{n}{b}$은 $\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$로 여겨도 되고, $\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil$으로 여겨도 된다.

도사정리 적용의 예

- $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

  여기서 $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$이고, $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} \in \Theta\left(n^2\right)$ 이므로, $\varepsilon = 1$일 때, $f(n) \in O(n^{\log_3 9 - \varepsilon})$이라고 할 수 있다. 도사정리 1번을 적용하면, $T(n) \in \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$ 이 된다.

- $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$

  여기서 $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $f(n) = 1$이고, $n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 \in \Theta(1)$ 이므로, $f(n) \in \Theta(1)$ 이라고 할 수 있다. 도사정리 2번을 적용하면,

  $T(n) \in \Theta(\lg n)$ 이 된다.

도사정리 적용의 예

- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\lg n$
  여기서 $a = 3$, $b = 4$, $f(n) = n \lg n$이고, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} \in O\left(n^{0.793}\right)$이므로, $\varepsilon \approx 0.2$일 때, $\varepsilon = 1$일 때, $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_4 3+\varepsilon}\right)$ 이라고 할 수 있다. 도사정리 3번을 적용할 수 있는지 보기 위해서, 충분히 큰 n에 대해서, $3f(\frac{n}{4}) \le c \times f(n)$이 성립하는 1보다 작은 c가 존재하는가를 보아야 한다. 여기서, $c = \frac{3}{4}$이면, $3\frac{n}{4}\lg(\frac{n}{4}) \le \frac{3}{4} n \lg n$은 충분히 큰 n에 대해서 항상 성립한다. 따라서 $T(n) \in \Theta(n \lg n)$이 된다.

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\lg n$
  여기서 $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n\lg n$이고, $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} \in \Theta\left(n\right)$ 이므로, $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_2 2+\varepsilon}\right)$ 이라고 할 수 있다. 여기서 도사정리 3번을 적용할 수 있는지 보기 위해서, 충분히 큰 n에 대해서, $2f(\frac{n}{2}) \le c \times f(n)$ 이 성립하는 1보다 작은 c가 존재하는가를 보아야 한다. 그러나, $2\frac{n}{2}\lg(\frac{n}{2}) \le cn\lg n$에서 충분히 큰 n에 대해서 항상 성립하는 c는 없다. 왜냐하면, 위의 식을 정리하면 $\frac{\lg n - 1}{\lg n} \le c$ 가 되고, 어떠한 c를 선택하더라도 이 부등식은 성립할 수 없다. 따라서 도사정리를 이용하여 해를 구할 수 없다. 이런 경우는 다음의 도사보조정리를 이용하여 해를 구할 수 있다.

도사보조정리

- $T(n) = a \times T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$
  에서, $k \geq 0$인 어떤 k에 대해서 $f(n)$이 $\Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ 이면 $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$이 된다. (증명 생략)
- 도사보조정리의 적용의 예
  위의 보기 4번의 해는 $f(n) \in \Theta(n \lg n)$이므로 $T(n) \in \Theta(n \lg^2 n)$이 된다.

이 절에서 공부한 도사정리는 재현식을 푸는데 상당히 유용하게 쓰인다.

Theorem B.5 in Appendix B.

$$T(n) = aT\left(\tfrac{n}{b}\right) + cn^k \quad (n > 1\text{이고}, n\text{이 } b\text{의 거듭제곱이면})$$
$$T(1) = d$$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & (if \;\; a < b^k) \\ \Theta(n^k \lg n) & (if \;\; a = b^k) \\ \Theta(n^{\log_b a}) & (if \;\; a > b^k) \end{cases}$$

(예)

$$T(n) = \underset{\overset{\downarrow}{a}}{8}T\left(n / \underset{\overset{\downarrow}{b}}{4}\right) + 5n^{\underset{\overset{\downarrow}{k}}{2}}$$
$$T(1) = 3$$

$8 < 4^2$ 이므로 $T(n) \in \Theta(n^2)$

(예)

$$T(n) = \underset{\overset{\downarrow}{a}}{8}T\left(n / \underset{\overset{\downarrow}{b}}{2}\right) + 5n^{\underset{\overset{\downarrow}{k}}{3}}$$
$$T(1) = 200$$

$8 = 2^3$ 이므로 $T(n) \in \Theta(n^3 \lg n)$

(예)

$$T(n) = \underset{\overset{\downarrow}{a}}{9}T\left(n / \underset{\overset{\downarrow}{b}}{3}\right) + 5n^{\underset{\overset{\downarrow}{k}}{1}}$$
$$T(1) = 7$$

$9 > 3^1$ 이므로 $T(n) \in \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$

Also,

$$T(n) \le aT\left(\tfrac{n}{b}\right) + cn^k \quad (n > 1,\ n \text{ is a power of } b) \qquad T(n) \in \begin{cases} O(n^k) & (if \quad a < b^k) \\ O(n^k \lg n) & (if \quad a = b^k) \\ O(n^{\log_b a}) & (if \quad a > b^k) \end{cases}$$

$$T(n) \ge aT\left(\tfrac{n}{b}\right) + cn^k \quad (n > 1,\ n \text{ is a power of } b) \qquad T(n) \in \begin{cases} \Omega(n^k) & (if \quad a < b^k) \\ \Omega(n^k \lg n) & (if \quad a = b^k) \\ \Omega(n^{\log_b a}) & (if \quad a > b^k) \end{cases}$$

prod

$$W(n) = 4W(\frac{n}{2}) + cn, \quad n > s \text{ 이고, } n\text{이 2의 거듭제곱인 경우}$$

$$W(s) = 0$$

$$W(n) \in \Theta(n^{\lg 4}) = \Theta(n^2)$$

prod2

$$3W(\frac{n}{2}) + cn \le W(n) \le 3W(\frac{n}{2}+1) + cn, \quad n > s\text{이고, } n\text{이 2의 거듭제곱인 경우}$$

$$W(s) = 0$$

$$W(n) \in \Theta(n^{\lg 3}) \approx \Theta(n^{1.58})$$


2장 끝
수고하셨습니다.