

§ 16.

Folgen, Reihen und Potenzreihen in \mathbb{C}

\mathbb{C} und \mathbb{R}^2 sind Vektorräume **über** \mathbb{R} der Dimension zwei. Sie unterscheiden sich als Vektorräume über \mathbb{R} nur dadurch, dass ihre Elemente mit:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \text{bzw.} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

bezeichnet werden. Mit dem **komplexen Betrag** $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt:

$$|z| = \|(x, y)\|$$

Man sieht, dass alle aus der Addition, der Skalarmultiplikation und der Norm entwickelten Begriffe und Sätze aus §1 und §2 auch in \mathbb{C} gelten.

Beispiel (Konvergente Folgen)

Sei (z_n) eine Folge in \mathbb{C} und $z_0 \in \mathbb{C}$. (z_n) konvergiert genau dann gegen z_0 , wenn gilt:

$$\begin{aligned} |z_n - z_0| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Leftrightarrow^{2.1} \operatorname{Re}(z_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_0) \wedge \operatorname{Im}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_0) \end{aligned}$$

Außerdem ist (z_n) genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Also nach Cauchy Kriterium genau dann, wenn (z_n) konvergent ist.

Satz 16.1 (Produkte und Quotienten von Folgen)

Seien $(z_n), (w_n)$ Folgen in \mathbb{C} mit $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0, w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w_0$.

(1) Es gilt:

$$z_n w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 w_0$$

(2) Ist $z_0 \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : z_n \neq 0$ und:

$$\frac{1}{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_0}$$

Beweis

Wie in Ana I. ■

Definition

Sei (z_n) eine Folge in \mathbb{C} , $s_n := z_1 + \dots + z_n$ ($n \in \mathbb{N}$). (s_n) heißt **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ bezeichnet.

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ heißt genau dann **konvergent** (**divergent**), wenn (s_n) konvergent (bzw. divergent) ist. Im Konvergenzfall gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Die Definitionen und Sätze der Paragraphen 11, 12, 13 aus Ana I gelten wörtlich auch in \mathbb{C} , bis auf diejenigen Definitionen und Sätze, in denen die Anordnung auf \mathbb{R} eine Rolle spielt (z.B. das Leibniz- und das Monotoniekriterium).

Beispiele:

- (1) Sei $z \in \mathbb{C}$. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ heißt **geometrische Reihe**.

Fall 1: Ist $|z| < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \text{ konvergiert} \\ \implies & \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert absolut} \\ \implies & \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert} \end{aligned}$$

Fall 2: Ist $|z| \geq 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & |z|^n = |z^n| \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \implies & z^n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \implies & \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ divergiert} \end{aligned}$$

Ist $|z| < 1$, so zeigt man wie in \mathbb{R} :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

- (2) Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \text{ konvergiert} \\ \implies & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ konvergiert absolut} \end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ definiere die (komplexe) **Exponentialfunktion** wie folgt:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- (3) Wie in Beispiel (2) sieht man, dass $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren.

Dadurch lassen sich auch **Cosinus** und **Sinus** auf ganz \mathbb{C} definieren:

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Satz 16.2 (Eigenschaften von Exponentialfunktion, Cosinus und Sinus)

Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

- (1) $e^{z+w} = e^z e^w$
- (2) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, insbesondere ist: $|e^{iy}| = 1$
- (3) $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$
- (4) $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
 Insbesondere ist für alle $t \in \mathbb{R}$: $\cos(it) = \frac{e^{-t} + e^t}{2}$, $\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i}$
 Also sind Cosinus und Sinus auf \mathbb{C} **nicht** beschränkt.
- (5) $\forall k \in \mathbb{Z} : e^{z+2\pi i k} = e^z$
- (6) $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$
- (7) $e^{i\pi} + 1 = 0$

Beweis

- (1) Wie in Ana I.
- (2) Nachrechnen!
- (3) Folgt aus (1) und (2).
- (4) Nachrechnen!
- (5) Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &\stackrel{(1)}{=} e^z e^{2k\pi i} \\ &\stackrel{(2)}{=} e^z (\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)) \\ &= e^z \end{aligned}$$

- (6) Die Äquivalenz folgt aus Implikation in beiden Richtungen:

„ \Leftarrow “ Folgt aus (5) mit $z = 0$.

„ \Rightarrow “ Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$1 = e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y)$$

Daraus folgt:

$$\sin(y) = 0 \implies \exists j \in \mathbb{Z} : y = j\pi$$

Und damit:

$$\begin{aligned} 1 &= e^x \cos(j\pi) = e^x (-1)^j \\ \implies x &= 0 \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = 2k \end{aligned}$$

Also ist $z = i2k\pi$.

(7) Es gilt:

$$e^{i\pi} \stackrel{(2)}{=} \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$$

■

Beispiel

Im Folgenden wollen wir alle $z \in \mathbb{C}$ bestimmen, für die $\sin(z) = 0$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z) = 0 &\stackrel{16.2(4)}{\iff} e^{iz} = e^{-iz} \\ &\stackrel{16.2(1)}{\iff} e^{2iz} = e^{-iz} e^{iz} = e^0 = 1 \\ &\stackrel{16.2(6)}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : 2iz = i2k\pi \\ &\iff z = k\pi \end{aligned}$$

Der Sinus hat also nur reelle Nullstellen.

Definition

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{C} und $z_0 \in \mathbb{C}$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heißt eine **Potenzreihe** (PR). Sei nun:

$$\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Dabei ist $\rho = \infty$, falls $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt ist. Dann heißt

$$r := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \rho = \infty \\ \infty & , \text{ falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & , \text{ falls } 0 < \rho < \infty \end{cases}$$

der **Konvergenzradius** (KR) der PR.

Satz 16.3 (Konvergenz von Potenzreihen)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und r seien wie oben.

- (1) Ist $r = 0$, so konvergiert die PR **nur** für $z = z_0$.
- (2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die PR absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (3) Sei $0 < r < \infty$. Es gilt:
 - (i) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| < r$, so konvergiert die PR absolut in z .
 - (ii) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| > r$, so divergiert die PR in z .
 - (iii) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| = r$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis

Wie in Ana I. ■

Beispiele:

- (1) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den KR $r = 1$ und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert} \iff |z| < 1$$

- (2) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den KR $r = 1$. Für $|z| = 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ absolut. Insgesamt gilt also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{ konvergiert} \iff |z| \leq 1$$

- (3) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hat KR $r = 1$, divergiert in $z = 1$ und konvergiert in $z = -1$.

- (4) Die PRe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

haben jeweils KR $r = \infty$ (siehe 16.3).

