

# 15. Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Dgl.Systeme 1. Ordnung

Stets in diesem Paragraphen:  $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}, (x_0, y_0) \in D$  und  $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^m$  und  $f = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion.

Ein **System von Dgl. 1. Ordnung** hat die Form:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

Setzt man  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , so schreibt sich das System in der Form  $y' = f(x, y)$ . Wir betrachten auch noch das AWP (A)  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Wir übertragen die Sätze aus den Paragraphen 12 und 13 auf Systeme. Die Beweise dort lassen sich fast wörtlich für Systeme wiederholen. (beachte 14.2) ( $\|\cdot\|$  anstatt  $|\cdot|$ ).

## Satz 15.1 (Peano)

- (1) Sei  $D = I \times \mathbb{R}^m$  und  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^m$  und  $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$  sei beschränkt. Dann hat das AWP (A) eine Lösung auf I.
- (2) Es sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^m, s > 0$  und  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|y - y_0\| < s\}$ . Es sei  $f \in C(D, \mathbb{R}^m), M := \max\{\|f(x, y)\| : (x, y) \in D\}$  und  $J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$ . Dann hat das AWP (A) eine Lösung auf J.
- (3) Sei  $D$  offen,  $(x_0, y_0) \in D$  und  $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$ . Dann ex. eine Lösung  $y : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  von (A) mit  $x_0 \in K$  und  $K \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

## Definition

- (1)  $f$  **genügt auf  $D$  einer Lipschitzbedingung (LB) bzgl.  $y$**  :  $\iff \exists \gamma \geq 0 : \|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq \gamma \|y - \bar{y}\| \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in D$  (\*)
- (2) Sei  $D$  offen.  $f$  **genügt auf  $D$  einer lokalen LB bzgl.  $y$**  :  $\iff \forall (x_0, y_0) \in D \exists$  Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0)$  mit:  $U \subseteq D$  und  $f$  genügt auf  $U$  einer LB bzgl.  $y$ .

## Satz 15.2 (Picard-Lindelöf)

- (1)  $I, x_0, y_0, D$  seien wie in 15.1(1) und  $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$  genüge auf  $D$  einer LB bzgl.  $y$ . Dann hat das AWP (A) auf I genau eine Lösung. Ist  $y^{[0]} \in C(I, \mathbb{R}^m)$  beliebig und

setzt man  $y^{[n+1]}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y^{[n]}(t)) dt$  ( $x \in I, n \in \mathbb{N}$ ). Dann konvergiert  $(y^{[n]})$  auf  $I$  glm. gegen die Lösung von (A).

- (2)  $I, x_0, y_0, D, s, M$  und  $J$  seien wie in 15.1(2) und  $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$  genüge auf  $D$  eine LB bzgl.  $y$ . Dann hat (A) auf  $J$  genau eine Lsg.
- (3) Es sei  $D$  offen,  $f$  genüge auf  $D$  einer lokalen LB bzgl.  $y$ . Dann ist das AWP (A) eindeutig lösbar.