

13. Der Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard - Lindelöf

EuE = Existenz und Eindeigkeit

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

f genügt auf D einer Lipschitzbedingung (LB) bzgl. $y : \iff$
 $\exists \gamma \geq 0 : |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq \gamma |y - \bar{y}| \quad \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in D \quad (*)$

Vorbetrachtungen: Sei $I = [a, b], x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, S := I \times \mathbb{R}$ und $f \in C(S, \mathbb{R})$ genüge auf S einer LB bzgl. y mit $\gamma \geq 0$ wie in $(*)$, $T : C(I) \rightarrow C(I)$ sei def. durch $T_y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (x \in I)$

$$\text{Aus 12.1 folgt: das AWP } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat auf I genau eine Lösung $\iff T$ hat genau einen Fixpunkt.

Frage: ist T bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ kontrahierend?

$$\begin{aligned} \text{Seien } u, v \in C(I), x \in I : |T_u(x) - T_v(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) - f(t, v(t)) dt \right| \\ &\leq \gamma \left| \int_{x_0}^x \underbrace{|u(t) - v(t)|}_{\leq \|u-v\|_\infty} dt \right| \leq \gamma \|u - v\|_\infty \left| \int_{x_0}^x dt \right| = \gamma |x - x_0| \|u - v\|_\infty \\ &\leq \gamma(b-a) \|u - v\|_\infty \\ \implies \|T_u - T_v\| &\text{ ist nur dann kontrahierend, wenn } \gamma(b-a) < 1. \end{aligned}$$

Sei $\varphi(x) := e^{-2\gamma|x-x_0|} \quad (x \in I)$ Auf $C(I)$ def. die folgende Norm:

$$\|y\| := \max\{\varphi(x)|y(x)| : x \in I\} (= \|\varphi y\|_\infty)$$

$$\alpha := \min\{\varphi(x) : x \in I\} \implies 0 < \alpha < \varphi < 1 \text{ auf } I$$

$$\implies \alpha \|y\|_\infty \leq \|y\| \leq \|y\|_\infty \quad \forall y \in C(I)$$

Sei (y_n) eine Folge in $C(I)$ und $y \in C(I)$

$$\alpha \|y_n - y\|_\infty \leq \|y_n - y\| \leq \|y_n - y\|_\infty$$

Fazit: Konvergenz bzgl. $\|\cdot\| =$ Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty =$ gleichmäßige Konvergenz auf I .

(y_n) ist CF bzgl. $\|\cdot\| \iff (y_n)$ ist CF bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$(C(I), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Behauptung

T ist bzgl. $\|\cdot\|$ kontrahierend. Seien $u, v \in C(I), x \in I$.

$$|T_u(x) - T_v(x)| \stackrel{s.o.}{\leq} \gamma \left| \int_{x_0}^x |u(t) - v(t)| dt \right| = \gamma \left| \int_{x_0}^x \underbrace{|u(t) - v(t)| \varphi(t)}_{\leq \|u-v\|} \frac{1}{\varphi(t)} dt \right|$$

$$\leq \gamma \|u - v\| \left| \int_{x_0}^x e^{-2\gamma|t-x_0|} dt \right| = \gamma \|u - v\| \frac{1}{2\gamma} (e^{-2\gamma|x-x_0|} - 1) \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \frac{1}{\varphi(x)} \implies \varphi(x) |(T_u)(x) - (T_v)(x)| \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \quad \forall x \in I$$

13. Der Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard - Lindelöf

$$\implies \|T_u - T_v\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|$$

Aus 11.2 und 12.1 folgt: 13.1

Satz 13.1 (EuE - Satz von Picard - Lindelöf (Version I))

I, x_0, y_0, S und f seien wie in der Vorbetrachtung und f genüge auf S einer LB bzgl. y . Dann hat das AWP:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung. Sei $z_0 \in C(I)$ beliebig und $z_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_n(t))dt$ ($x \in I$), (also $z_{n+1} = T_{z_n}$), dann konvergiert die Folge der sukzessiven Approximationen (z_n) auf I gleichmäßig gegen die Lösung des AWP.

Beispiel

Zeige (mit 13.1): das AWP: $\begin{cases} y' = 2x(1+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ hat auf \mathbb{R} genau eine Lösung. Berechne diese.

$f(x, y) = 2x(1+y)$ Sei $a > 0$ und $I = [-a, a]$ Für $(x, y), (x, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$:

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |2x||y - \bar{y}| \leq 2a|y - \bar{y}|$$

13.1 \implies das AWP hat auf I genau eine Lösung y . Sei $z_0(x) = 0$.

$$z_1(x) = \int_0^x 2tdt = x^2; z_2(x) = \int_0^x 2t(1+t^2)dt = x^2 + \frac{1}{2}x^4;$$

$$z_3(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$$

$$\text{Induktiv: } z_n(x) = x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \dots + \frac{1}{n!}x^{2n}$$

Analysis I $\implies (z_n)$ konvergiert auf I gleichmäßig gegen $e^{x^2} - 1$

13.1 $\implies y(x) = e^{x^2} - 1$ auf I

$a > 0$ beliebig $\implies y(x) = e^{x^2} - 1$ ist die Lösung des AWP auf \mathbb{R} .

Satz 13.2 (Der EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version II))

Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $R := I \times [y_0 - s, y_0 + s]$ und $f \in C(R, \mathbb{R})$. $M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$. f genüge auf R einer LB bzgl. y . Dann hat das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung auf $J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$. Diese Lösung kann iterativ gewonnen werden (vgl. 13.1).

Beweis

Ähnlich wie 12.5 aus 12.4 gewonnen wurde. ■

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f **genügt auf D einer lokalen LB bzgl. y** : $\iff \forall (x_0, y_0) \in D \exists$ Umgebung U von (x_0, y_0) mit: $U \subseteq D$ und f genügt auf U einer LB bzgl. y .

Satz 13.3 (Partielle Differenzierbarkeit und lokale Lipschitzbedingung)

D und f seien wie in obiger Definition. Ist f auf D partiell db nach y und ist $f_y \in C(D, \mathbb{R}) \implies f$ genügt auf D einer lokalen LB bzgl. y .

Beweis

Sei $(x_0, y_0) \in D$. D offen $\implies \exists \varepsilon > 0 : U := \overline{U_\varepsilon(x_0, y_0)} \subseteq D$. f_y ist stetig $\implies \exists \gamma := \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in U\}$.

Seien $(x, y), (x, \bar{y}) \in U : |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \stackrel{\text{MWS}}{=} \underbrace{|f_y(x, \xi)|}_{\leq \gamma} |y - \bar{y}| \leq \gamma |y - \bar{y}|$ mit ξ zwischen y und \bar{y} ($\implies (x, \xi) \in U$). ■

Bemerkung: Ist $I = [a, b]$ und $R := I \times [c, d]$ ($S := I \times \mathbb{R}$) und $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ ($f : S \rightarrow \mathbb{R}$) stetig und partiell db nach y auf R (S) und f_y ist beschränkt auf R (S). Wie im Beweis von 13.3 zeigen wir: f genügt auf R (S) einer LB bzgl. y .

Beispiel

$R := [0, 1] \times [-1, 1]$, $f(x, y) = e^{x+y^2}$. Zeige: das AWP $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$ hat auf $[0, \frac{1}{e^2}]$ genau eine Lösung.

Beweis

$|f(x, y)| = e^x e^{y^2} \leq e \cdot e = e^2$, $f(1, 1) = e^2 \implies M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\} = e^2$.

$|f_y(x, y)| = |2ye^{x+y^2}| = 2|y|e^{x+y^2} \leq 2e^2 \forall (x, y) \in R \implies f$ genügt auf R einer LB bzgl. y .

13.2 \implies das AWP hat auf $J = [0, 1] \cap [-\frac{s}{M}, \frac{s}{M}] \stackrel{s=1}{=} [0, 1] \cap [-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}] = [0, \frac{1}{e^2}]$ genau eine Lösung. ■

Satz 13.4 (Der EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version III))

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f \in C(D, \mathbb{R})$ genüge auf D einer lokalen LB bzgl. y . Dann ist das AWP

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

eindeutig lösbar. (zur Erinnerung d.h.: das AWP hat eine Lösung. $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I ein Intervall) und für je zwei Lösungen $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ (I_1, I_2 Intervalle) gilt: $y_1 \equiv y_2$ auf $I_1 \cap I_2$).

Beweis

12.6 \implies das AWP hat eine Lösung. Seien $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen des AWP (I_1, I_2 Intervalle).

Annahme: $\exists x_1 \in I_1 \cap I_2 : y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. Dann: $x_1 \neq x_0$, etwa $x_1 > x_0$, dann: $[x_0, x_1] \subseteq I_1 \cap I_2$.

$M := \{x \in [x_0, x_1] : y_1(x) = y_2(x)\} \subseteq [x_0, x_1]$, $x_0 \in M$. $\xi_0 := \sup M$, y_1, y_2 stetig $\implies y_1(\xi_0) = y_2(\xi_0) =: \eta_0$.

Es gilt: $y_1(x) \neq y_2(x) \forall x \in (\xi_0, x_1]$ (*)

13. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard - Lindelöf

Wähle $r, s > 0$, dass $\xi_0 + r < x_1$, $R := [\xi_0, \xi_0 + r] \times [\eta_0 - s, \eta_0 + s] \subseteq D$ und f genügt auf R einer LB bzgl. y .

Aus 13.2 folgt: $\exists \alpha \in (0, r)$: das AWP $(+)$ $\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(\xi_0) &= \eta_0 \end{cases}$ hat auf $[\xi_0, \xi_0 + \alpha]$ genau eine Lösung. y_1 und y_2 sind Lösungen von $(+)$ auf $[\xi_0, \xi_0 + \alpha] \implies y_1 \equiv y_2$ auf $[\xi_0, \xi_0 + \alpha]$, Widerspruch zu $(*)$. ■