

$$Av = (v \cdot w^\top) = v \underbrace{(w^\top v)}_{\in \mathbb{R}} = (w^\top v) \cdot v = \text{Spur}(A)v$$

Weil $v \neq 0$ ist also $\text{Spur } A$ EW von A . □

0.18 Übung 18, 06.06.2005

0.18.1 Aufgabe 1

$$\text{a) } \langle A, B \rangle = \text{Spur}(A^\top B) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ji} \quad (**)$$

$$\bullet \text{ Spur}(((c_{ij}))) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$$

$$\bullet A^\top B = ((c_{ij})), \text{ dann gilt } c_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ji} \text{ wobei } A = ((a_{ij})) \text{ und } B = ((b_{ij})) \text{ sein soll.}$$

Aus (**) ergibt sich die Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ebenso wie die Linearität im ersten Argument direkt.

$$\text{Für } \langle A, A \rangle \stackrel{(**)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji}^2 \geq 0 \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle = 0 &\Leftrightarrow a_{ji}^2 = 0, \text{ für alle } i, j \in \{1, n\} \\ &\Leftrightarrow a_{ji} = 0, \text{ für alle } i, j \in \{1, n\} \\ &\Leftrightarrow A = 0 \end{aligned}$$

b)

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}_{\text{j-te Komp. des Vektors Ax}} \right)^2 \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = \langle A, A \rangle \cdot \|x\|^2$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \|A\|^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

0.18.2 Aufgabe 2

Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ induzierten Normen.

Weiter seien $x, y \in V$ mit $\|x\|_1 = \|y\|_1$.

Beweis:

$$\text{Dann gilt: } \langle x+y, x-y \rangle_1 = \langle x, x \rangle_1 + \overbrace{\langle y, x \rangle_1 - \langle x, y \rangle_1}^{=0} - \langle y, y \rangle_1 = \|x\|_1^2 - \|y\|_1^2 = 0$$

$$\text{Daraus folgt: } 0 = \langle x+y, x-y \rangle_2 = \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2, \text{ also } \|x\|_2 = \|y\|_2$$

Sei $x_0 \in V$ mit $\|x_0\|_1 = 1$ und $x \in V$

$$\|x\|_1 = \|x\|_1 \cdot \|x_0\|_1 = \| \|x\|_1 \cdot x_0 \|_1 \Rightarrow \|x\|_2 = \| \|x\|_1 \cdot x_0 \|_2 = \|x\|_1 \cdot \underbrace{\|x_0\|_2}_{=c}$$

Nun gilt aber auch für $x, y \in V$:

$$\langle x, y \rangle_2 \stackrel{\text{Vorl.}}{=} \frac{1}{4} (\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2) = \frac{1}{4} \cdot (c' \|x+y\|_1^2 - c' \|x-y\|_1^2) = c' \langle x, y \rangle_1$$

□

0.18.3 Übungsaufgabe 1

Es seien G, G' Gruppen und $\Phi : G \rightarrow G'$ und $\Psi : G \rightarrow G'$ Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie:

Ist $H \subsetneq G$ eine (echte) Untergruppe von G und gilt:

$$\Phi(a) = \Psi(a) \text{ für alle } a \in G \setminus H$$

so ist $\Phi = \Psi$. **Beweis:** Sei $a \in G \setminus H, b \in H$.

Ist $a \circ b \in G \setminus H$? Ja, denn:

$$\left. \begin{array}{l} a \circ b \in H \\ b^{-1} \in H \end{array} \right\} \underbrace{(a \circ b)}_{\in H} \underbrace{\circ b^{-1}}_{\in H} = a \circ (b \circ b^{-1}) = a \in H$$

Also gilt: $\Phi(a \circ b) \stackrel{\text{Vor}}{=} \Psi(a \circ b) = \Psi(a) \circ' \Psi(b)$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \Psi(a) \circ' \Phi(b) &= \Psi(a) \circ' \Psi(b) \\ \Rightarrow \Psi(a)^{-1} \circ \Psi(a) \circ \Phi(b) &= \Psi(a)^{-1} \circ \Psi(b) \Leftrightarrow \Phi(b) = \Psi(b) \end{aligned}$$

Also gilt: $\Phi = \Psi$

0.18.4 Übungsaufgabe 2

Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}_6, +)$ nach $(\mathbb{Z}_7, +)$ an.

$$\mathbb{Z}_m := \{[z]_{\sim} : z \in \mathbb{Z}\}$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z} : z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = k \cdot m \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

$$[z_1]_{\sim} + [z_2]_{\sim} := [z_1 + z_2]_{\sim} \quad (+ \text{ ist wohldefiniert})$$

Sei $z'_1 \in [z_1]_{\sim}$ und $z'_2 \in [z_2]_{\sim}$, $z'_1 = z_1 + k \cdot m$ und $z'_2 = z_2 + l \cdot m$

$$z'_1 + z'_2]_{\sim} = [z_1 + km + z_2 + lm]_{\sim} = [z_1 + z_2 + (k+l) \cdot m]_{\sim} = [z_1 + z_2]_{\sim}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist \mathbb{Z}_m eine Gruppe

$$\mathbb{Z}_6 := \{[z]_6 : z \in \mathbb{Z}\} \text{ und } \mathbb{Z}_7 := \{[z]_7 : z \in \mathbb{Z}\}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $(\mathbb{Z}_m, +)$ ist zyklisch.

$$[k]_m = \underbrace{[1]_m + \dots + [1]_m}_{k\text{-mal}}$$

D.h.: Für jede Gruppe G' gilt: $\Phi : \mathbb{Z}_m \rightarrow G'$ ist eindeutig durch $\Phi(1)$ festgelegt.

$$\Phi([0]_m) = e_{G'}$$

Sei $\Phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ Gruppenhomomorphismus

Dann muss gelten: $\Phi([0]_6) = [0]_7$ (Eigenschaften eines Grp.-hom)

$$[3]_6 + [3]_6 = [6]_6 = [0]_6, \text{ d.h. } [3]_6 \text{ ist selbstinvers}$$

$$\Psi(x^{-1} = \Psi(x)^{-1}, \text{ d.h. } x = x^{-1}, \text{ so ist } \Psi(x)^{-1} = \Psi(x)$$

also: selbstinverse Elemente werden auf selbstinverse Elemente abgebildet.

Also gilt: $\Phi([3]_\sim) = [0]_\sim$

$$\Phi([1]_6) = [k]_7 \text{ für ein } k \in \{0, \dots, 6\}$$

$$\Phi([3]_6) = \Phi([1]_6 + [1]_6 + [1]_6) = \Phi([1]_6) + \Phi([1]_6) + \Phi([1]_6) = [k]_7 + [k]_7 + [k]_7 = [3k]_7 = [3]_7 \cdot [k]_7 = [0]_7$$

$$\mathbb{Z}_7 \text{ ist Körper} \Rightarrow k = 0, \text{ also } \Phi([1]_6) = [0]_7$$

Also ist: $\Phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_7, [k]_6 \mapsto [0]_7$. Es gibt also nur einen Grp.-homo. von \mathbb{Z}_6 nach \mathbb{Z}_7 . \square