Kapitel 1

Affine Varietäten

§ 1 Polynomringe

Sei k ein Körper, $n \geq 1$, $k[X_1, \ldots, X_n]$ Polynomring

Bemerkung + Erinnerung 1.1

a) Für $a_1, \ldots, a_n \in k$ ist

$$\begin{array}{rccc} \phi_{a_1,\ldots,a_n}: & k[X_1, \ldots, X_n] & \to & k \\ & f & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_n) \end{array}$$

ein Homomorphismus von Ringen

b) Ist A eine k-Algebra, $a_1, \ldots, a_n \in A$, so ist $f \mapsto f(a_1, \ldots, a_n)$ ein k-Algebra Homomorphismus $k[X_1, \ldots, x_n] \to A$

c) (UAE des Polynomrings)

Sei A eine k-Algebra, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dann gibt es genau einen k-Algebra Homomorphismus $\phi : k[X_1, \ldots X_n] \to A$ mit $\phi(X_i) = a_i$

Folgerung 1.2

Jede endlich erzeugte k-Algebra ist Faktorring eines Polynomrings.

Denn: Seien $a_1, \ldots, a_n$ Erzeuger von A als k-Algebra. Sei $\phi : k[X_1, \ldots, X_n] \to A$ *der* k-Algebra Homomorphismus mit $\phi(X_i) = a_i$.(Bem. + Erinn. 1.1 c))

ϕ ist surjektiv

$$\overset{\text{Homomorphiesatz}}{\Longrightarrow} A \cong k[X_1, \ldots, X_n]/\operatorname{Kern}(\phi)$$

Erinnerung 1.3 (Euklidischer Algorithmus)

Für $f, g \in k[X]$ mit $g \neq 0$ gibt es (eindeutige!) $q, r \in k[X]$ mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$ oder $r = 0$.

Folgerung 1.4

$k[X]$ ist Hauptidealring

Beweis

Sei $I \subset [X]$ Ideal. $I = (0)$ wird von 0 erzeugt. Sei also $I \neq 0$. Wähle: $g \in I - \{0\}$ mit kleinstem Grad.

Beh.: $I = (g)$, *denn:* Sei $f \in I - \{0\}$. Schreibe $f = q \cdot g + r$. $\deg(r) < \deg(g)$ und $r = f - qg \in I$.

$\Rightarrow r = 0$ □

Folgerung 1.5
$k[X]$ ist faktoriell (eindeutige Zerlegung in Primfaktoren).

Erinnerung: R Ring, $f \in R$ keine Einheit

$$f \text{ unzerlegbar } \Leftrightarrow \text{ Aus } f = g \cdot h \text{ folgt } g \in R^x \text{ oder } h \in R^x$$

Proposition 1.6
$k[X_1, \dots, X_n]$ ist faktoriell für jedes $n \geq 1$.

Beweis (Beweisidee)
Induktion über n, $n = 1$ ist Folgerung 1.5.

Für Induktionsschritt: $k[X_1, \dots, X_n] = k[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ □

Satz 1 (Hilbertscher Basissatz)
Jedes Ideal in $k[X, \dots, X_n]$ ist endlich erzeugbar. *Kurz:* $k[X_1, \dots, X_n]$ ist noethersch

Definition 1.7
Ein Ring R heißt ***noethersch***, wenn jedes Ideal in R endlich erzeugbar ist.

Satz 1'
R noethersch $\Rightarrow$ $R[X]$ noethersch. Daraus folgt Satz 1: $k[X_1, \dots, X_n]$ ist noethersch mit Induktion über n.

Beweis (Beweis von Satz 1)
Annahme: Es gibt Ideal $I \subset R[X]$, das sich nicht von endlich vielen Elementen erzeugen lässt.

Wähle $f_0 \in I - \{0\}$ vom kleinsten Grad. Wähle $f_1 \in I - \{f_0\}$ vom kleinsten Grad. Wähle für $i \geq 2 \in I - \{f_0, f_1, \dots, f_{i-1}\}$ vom kleinsten Grad. Sei a_i der Leitkoeffizient von f_i, sei $J \subset R$ das von den $a_i, i \in \mathbb{N}$ erzeugte Ideal.

J ist endlich erzeugt. Œ J wird erzeugt von $a_1, \dots, a_n \Rightarrow$ es gilt $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i$

Sei

$$g := f_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i X^{d_{n+1} - d_i}$$

$\Rightarrow \deg(g) < \deg(f_{n+1})$ *Aber*: $g \notin (f_0, \dots, f_n)$, da sonst auch $f_{n+1} \in (f_0, \dots, f_n)$ wäre. ↯ □

Bemerkung 1.8
Sei R ein noetherscher Ring, $I \subset R$ Ideal. Dann ist auch R/I noethersch.

Beweis
Sei $J \subset R/I$ ein ideal. Sei $\Pi : R \to R/I$ die Restklassenabbildung. $\tilde{J} := \Pi^{-1}(J)$ ist nach Voraussetzung endlich erzeugbar. Die Bilder der Erzeuger von $\tilde{J}$ in J erzeugen J. □

Folgerung 1.9
Jede endlich erzeugbare k-Algebra ist noethersch.

Beweis
Siehe Folgerung 1.2, Bemerkung 1.8 und Satz 1 □

Proposition 1.10
Ein Ring R ist genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ von Idealen in R stationär wird. (Das heißt es gibt n_0 mit $I_n = I_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$)

Beweis

„⇒“: Sei $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ Kette von Idealen. Sei $I := \bigcup_{d=0}^{\infty} I_d$. I ist Ideal. I ist endlich erzeugbar, $I = (a_1, \dots, a_r), a_i \in I_{n_1}$, $n_0 = \max_{i=1}^{r} n_i \Rightarrow I_n = I_{n_0}$ für $n \geq n_0$

„⇐“: Sei I Ideal, $\mathcal{I} := \{J \subset I \mid J$ Ideal in R, J endlich erzeugt$\}$. $\mathcal{I} \neq \emptyset$, da $(0) \in \mathcal{I}$.

Behauptung: $\mathcal{I}$ enthält ein maximales Element I_0.

Wäre $I_0 \neq I$, so gäbe es $a \in I - I_0$. Dann wäre auch $(I_0, a) \in \mathcal{I}$ ↯ zu I_0 maximal.

Beweis der Behauptung: Ist (0) nicht maximal, so gibt es $(0) \subsetneq I_1 \subset \mathcal{I}$. Ist auch I_1 nicht maximal, so gibt es $I_1 \subsetneq I_2 \in \mathcal{I}$. $\Rightarrow$ erhalte Kette $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$

Nach Voraussetzung wird diese Kette stationär ab einem n_0. $\Rightarrow I_0$ ist maximal in I. □

§ 2 Nullstellenmengen und Verschwindungsideale

Sei k ein Körper.

Definition 2.1
Eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ heißt ***affine Varietät***, wenn es eine Menge $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ von Polynomen gibt, sodass

$$V = V(F) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$$

Beispiel
$\emptyset = V(1) = V(k[X_1, \dots, X_n])$

$k^n = V(0) = V(\emptyset)$

$V(X(X-1)(Y-1))$ affine Varietät

Bemerkung 2.2

i) Für $F_1 \subseteq F_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ist $V(F_1) \supseteq V(F_2)$
ii) $V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$
iii) für $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ist
$$V(F) = V((F))$$
wobei (F) das von F erzeugte Ideal ist.
iv) Für jede affine Varietät $V \subseteq k^n$ gibt es endlich viele Polynome $f_1, \dots, f_r$ mit
$$V = V(f_1, \dots, f_r)$$

Beweis

iii) jedes $f \in (F)$ hat die Form $f = \sum_{i=1}^{r} r_i f_f$ mit $r_i \in k[X_1, \dots, X_n], f_i \in F$.
$$x \in V(F) \Rightarrow f_i(x) = 0, i = 1, \dots, r$$
$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in V((F))$ □

Definition 2.3
Für eine Teilmenge $V \subset k^n$ heißt

$$I(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] | f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

das ***Verschwindungsideal***.

Beispiel

i) $I(\emptyset) = k[X_1, \dots, X_n]$
$I(k^n) = (0)$ falls k unendlich ist
ii) $I((0,0)) = (X, Y)$

Bemerkung 2.4
Für jede Teilmenge $V \subseteq k^n$ gilt:

i) $I(V)$ ist Radikalideal
ii) $V \subseteq V(I(V))$
iii) $\bar{V} := V(I(V))$ ist die kleinste Varietät, die V enthält. Insbesondere: $V = V(I(V))$, falls V affine Varietät.

iv) für affine Varietäten V_1, V_2 gilt:

$$V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow I(V_1) \supseteq I(V_2)$$

Also insbesondere: $V_1 = V_2 \Leftrightarrow I(V_1) = I(V_2)$

Definition 2.5
Ein Ideal I in einem Ring R heißt ***Radikalideal***, wenn gilt: Ist $f \in R$ und gibt es $n \geq 0$ mit $f^n \in I$, so ist $f \in I$

Beweis (von Bemerkung 2.4)

iii) Folgt aus (iv)

iv) Sei V' affine Varietät mit $V \subseteq V'$. Sei $V' = V(I')$ für ein Ideal I'.

Behauptung: $I' \subseteq I(V)$

Dann ist $V' = V(I') \supseteq V(I(V)) = \bar{V}$

Beweis der Behauptung: $f \in I' \Rightarrow$ für alle $x \in V'$ ist $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ für alle $x \in V \Rightarrow f \in I(V)$

Beispiel
$f = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X], I = (f), V(I) = \emptyset \Rightarrow I(V(I)) = \mathbb{R}[X]$

Definition + Bemerkung 2.6
Für eine affine Varietät $V \subseteq k^n$ sei

$$A(V) := k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$$

i) $A(V)$ ist die reduzierte k-Algebra (d. h. ohne nilpotente Elemente)

ii) Ist $V \subseteq V'$, so gibt es ***surjektiven k-Algebra Homomorphismus*** $A(V') \to A(V)$

Beweis

i) Sei $g \in A(V)$ mit $g^d = 0$ für ein $d > 0$, sei $\bar{f} \in k[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\bar{f} = g$

$$\Rightarrow f^d \in I(V)$$

$$\overset{I(V)\text{Radikalideal}}{\Rightarrow} f \in I(V) \Rightarrow g = 0$$

□

ii) Es ist $I(V') \subseteq I(V)$.

Homomorphiesatz $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} k[X_1, \ldots, X_n] \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[drr, phantom, "///"] & & A(V) \\ & A'(V) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

§ 3 Zariski Topologie

Sei k ein Körper

Definition + Bemerkung 3.1
Die affinen Varietäten in k^n bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Diese Topologie heißt ***Zariski-Topologie***.

Schreibweise: $\mathbb{A}^n(k)$ sei k^n mit dieser Topologie

Beweis

i) $k^n = V(0), \emptyset = V(k[X_1, \dots, X_n])$ sind affine Varietäten

ii) Seien $V_1 = V(I_1)$ und $V_2 = V(I_2)$ affine Verietäten.
Behauptung: $V_1 \cup V_2 = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$
Zeige genauer: $V(I_1 \cdot I_2) \overset{a)}{\subseteq} V_1 \cup V_2 \overset{b)}{\subseteq} V(I_1 \cap I_2) \overset{c)}{\subseteq} V(I_1 \cdot I_2)$
  c) folgt aus $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$
  b) folgt aus $I_1 \cap I_2 \subset I_1$ und $I_1 \cap I_2 \subset I_2$
  a) Sei $x \in V(I_1 \cdot I_2), x \notin V_1$
  Dann gibt es $f \in I_1$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) \overset{x \in V(I_1 \cdot I_2)}{=} 0$ für alle $g \in I_2 \Rightarrow x \in V(I_2) = V_2$

iii) Seien $V_i = V(I_i), i \in J$ (J beliebige Menge), affine Verietäten.
Behauptung:
$$\bigcap_{i \in J} V_i = V(\underbrace{\bigcup_{i \in J} I_i}_{=\sum_{i \in J} I_i})$$
□

Beispiel 3.2

$$n = 1, V \subseteq \mathbb{A}^n(k) \Leftrightarrow V \text{ endlich oder } V = k$$

Bemerkung 3.3
Jeder Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ ist abgeschlossen in $\mathbb{A}^n(k)$.

Beweis

$$\{x\} = V(X_1 - x_1, X_2 - x_2, \dots, X_n - x_n)$$
□

Folgerung 3.4
Ist k endlicher Körper, so ist die Zariski-Topologie auf k^n die diskrete Topologie.

Bemerkung 3.5
Ist k unendlich, so ist $\mathbb{A}^n(k)$ nicht hausdorffsch.

Beweis
$n = 1$: ✓

$n \geq 2$: $x, y \in \mathbb{A}^n(k)$

Œ x und y liegen auf der X_1-Achse, das heißt

$$x, y \in V(X_2, \dots, X_n) =: W$$

Seien U_x, U_y offene Umgebungen von x bzw. y. Dann sind

$$\left.\begin{array}{rl} & V_x = V(I_x) = \mathbb{A}^n(k) - U_x \\ \text{und} & V_x = V(I_x) = \mathbb{A}^n(k) - U_x \end{array}\right\} \text{affine Verietäten}$$

Da $x \in W$ gibt es $f \in I_x$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin I(W) \Rightarrow V(f) \cap W$ endlich $\Rightarrow V_x \cap W$ endlich.

Genauso $V_y \cap W$ endlich $\Rightarrow (V_x \cup V_y) \cap W$ endlich.

$$\Rightarrow U_x \cap U_y \cap W \neq \emptyset$$ □

Bemerkung 3.6
Sei k unendlicher Körper.

i) Für jedes $f \in k[X_1, \dots, X_n] - k$ (nicht-konstante Polynome) ist $D(f) := \mathbb{A}^n(k) - V(f)$ offene Teilmenge.

ii) Die $D(f)$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis

ii) Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ offen.
Zeige: Zu jedem $x \in U$ gibt es $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $x \in D(f) \subseteq U$
denn: Sei $V := \mathbb{A}^n(k) - U, V = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$.
Da $x \notin V$ gibt es $f \in I$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$ und $D(f) \subseteq U$, da $V(f) \supseteq V(I) = V$ □

Definition + Erinnerung 3.7

a) Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$. Definiere Topologie auf Y durch:

$$U \subseteq Y \text{ offen } \Leftrightarrow \exists \tilde{U} \subseteq X \text{ offen mit } U = \tilde{U} \cap Y$$

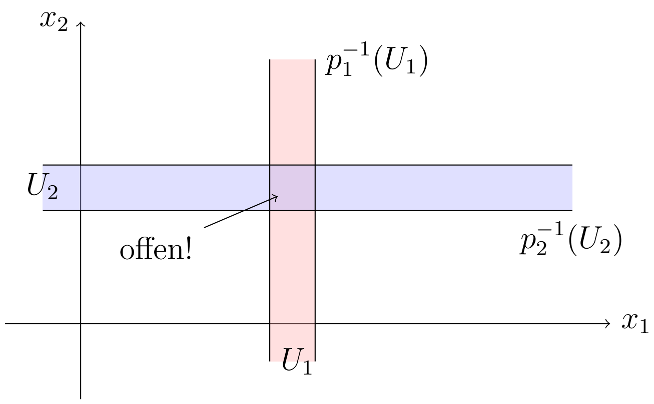
Diese Topologie heißt ***Spurtopologie***.

b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann heißt die Spurtopologie auf V auch ***Zariski-Topologie***.

c) Seien X_1, X_2 topologische Räume, $X_1 \times X_2$ das kartesische Produkt (als Mengen),

$$p_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$$

die Projektionen. Definiere die ***Produkttopologie*** auf $X_1 \times X_2$ als die gröbste Topologie, sodass p_1 und p_2 stetig sind. Das ist die kleinste Topologie, in der alle Mengen $p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)$ offen sind, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist.



Frage

Ist die Zariski-Topologie auf k^2 die Produkttopologie auf $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$?

§ 4 Irreduzible Komponenten

Definition + Bemerkung 4.1
Sei X ein topologischer Raum.

a) X heißt ***reduzibel***, wenn es abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt mit $A \cup B = X$ und $A \neq X \neq B$. Eine Teilmenge von X heißt irreduzibel, wenn sie mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.
b) Eine (bezüglich Inklusion) maximale irreduzibel Teilmenge von X heißt ***irreduzible Komponente*** von X
c) Irreduzible Komponenten sind abgeschlossen (Übung)

Beispiel 4.2
Sei X nichtleerer Hausdorffraum. Dann sind die einelementigen Teilmengen die irreduziblen Komponenten.

Denn: Sei X hausdorffsch, $x \neq y \in X$, *zeige:* X ist irreduzibel

Seien U_x, U_y offene Umgebungen von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$

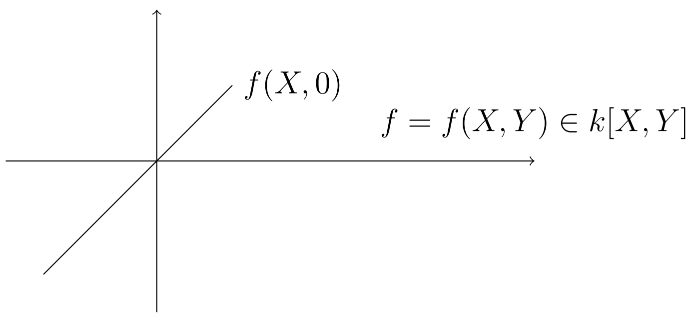
$$\Rightarrow V_x \cup V_y = X, V_x = X - U_x, V_y = X - U_y$$

$$x \notin V_x \neq X \neq V_y \not\ni y$$

Beispiel 4.3
$\mathbb{A}^1(k)$ ist irreduzibel, wenn k unendlich ist. *Denn:* echte abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^1(k)$ sind endlich.

Frage
Ist $\mathbb{A}^2(k)$ irreduzibel? Sei $\mathbb{A}^2(k) = V_1 \cup V_2, V_i = V(I)$. Seien $f_1, f_2 \in I_1$ bzw. $I_2, f_i \neq 0$. $\Rightarrow V_i \subset V(f_i), i = 1, 2$

$$\Rightarrow \underbrace{V(f_1) \cup V(f_2)}_{=V(f_1 \cdot f_2)} = \mathbb{A}^2$$



$V(f) \cup V(Y) = V(f(X,0)) \subset \mathbb{A}^1(k)$

Entweder $V(f(X,0))$ ist endlich *oder* $f(X,0) = 0$, dann ist durch Y teilbar. **Genauso:** f ist durch $Y - \alpha X$ teilbar für jedes $\alpha \in k \Rightarrow f = 0$. **Antwort auf die Frage:** ja!

Proposition 4.4
Eine affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ ein Primideal ist.

Beweis
„$\Rightarrow$“: Seien $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $f \cdot g \in I(V)$. Sei $f \notin I(V)$, zu zeigen: $g \in I(V)$

$f \notin I(V) \Rightarrow \exists x \in V$ mit $f(x) \neq 0$

Nach Voraussetzung ist $V \subseteq V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$

$$\Rightarrow V = (V(f) \cap V) \cup (V(g) \cap V) \overset{V \text{ irred.}}{\Rightarrow} V(g) \cap V = V$$

$\Rightarrow V \subseteq V(g) \Rightarrow g \in I(V)$

„$\Leftarrow$“: Sei $I(V)$ Primideal, $V = V_1 \cup V_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen V_1, V_2, also $V_i = V(I_i), i = 1, 2$, für Ideale I_1, I_2. Sei $V \neq V_1$, also $V \subsetneq V(I_1)$.

$$\Rightarrow \exists x \in V, f \in I_1 \text{ mit } f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin I(V)$$

Wegen $V = V_1 \cup V_2 = V(I_1) \cup V(I_2) \overset{3.1}{=} V(I_1 \cdot I_2)$ ist $I_1 \cdot I_2 \subseteq I(V) \Rightarrow f \cdot g \in I(V)$ für jedes $g \in I_2$

$$\underset{I(V) \text{ prim}}{\overset{f \notin I(V)}{\Rightarrow}} g \in I(V) \text{ für jedes } g \in I_2$$

$\Rightarrow I_2 \subseteq I(V) \Rightarrow \underbrace{V(I_2)}_{=V_2} \supseteq \underbrace{V(I(V))}_{=V}$ $\square$

Folgerung 4.5
Eine affine Varietät$V \subset \mathbb{A}^n(k)$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow A(V) = k[X_1, \dots X_n]/I(V)$ ist nullteilerfrei.

Satz 2
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann gilt:

a) V ist endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten.

b) V hat nur endlich viele irreduzible Komponenten, diese sind eindeutig bestimmt.

Beweis

a) Sei $\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, V ist *nicht* endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten$\}$

$$\mathcal{I} = \{I(V) : V \in \mathcal{B}\}$$

zu zeigen: $\mathcal{B} = \emptyset$, also auch $\mathcal{I} = \emptyset$

Wäre $\mathcal{I} \neq \emptyset$, so enthielte $\mathcal{I}$ ein maximales Element $I_0 = I(V_0)$ für ein $V_0 \in \mathcal{B}$. (*denn:* $k[X_1, \dots, X_n]$ ist noethersch, jede aufsteigende Kette von Elementen in $\mathcal{I}$ wird also stationär.) Da $V_0 \in \mathcal{B}$ ist V_0 reduzibel.

Sei also $V_0 = V_1 \cup V_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen $V_1 \neq V_0 \neq V_2$ von V_0. Aus $V_i \subsetneq V_0$ folgt $I(V_i) \supsetneq \underbrace{I(V_0)}_{=I_0}$ (Bem. 2.4 iv))

$$\Rightarrow I(V_i) \notin \mathcal{I} \Rightarrow V_i \notin \mathcal{B}, i = 1, 2$$

$\Rightarrow V_i$ ist endliche Vereinigung von irreduziblen Varietäten, also auch $V_0 \notin \mathcal{B} \lightning$

b) Sei $V = V_1, \dots, V_r$ mit irreduziblen Varietäten $V_1, \dots, V_r$. Œ $V_i \not\subseteq V_j$ für $i \neq j$ (sonst lasse V_i weg)

Behauptung: Dann ist jedes V_i irreduzible Komponente.

denn: Sei $W \subseteq V$ irreduzible Komponente mit $V_i \subseteq W$. Es gilt

$$W = \bigcup_{j=1}^{r} (V_i \cap W)$$

$\overset{W \text{ irred.}}{\Longrightarrow} \exists j$ mit $V_j \cap W = W$, also $W \subseteq V_j \Rightarrow V_i \subseteq V_j \Rightarrow i = j \Rightarrow W = V_i$

Eindeutigkeit: Sei W irreduzible Komponente von V. Aus $W = \bigcup_{j=1}^{r}(V_j \cap W)$ folgt $W \cap V_j = W$ für ein $j \Rightarrow W \subseteq V_j \overset{W \text{ irred. Komp.}}{\Longrightarrow} W = V_j$ $\square$

Proposition 4.6
Die irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes X ist enthalten in einer irreduziblen Komponente von X.

§ 5 Der Hilbertsche Raum

V affine Varietät in $\mathbb{A}^n(k) \Rightarrow V(I(V)) = V$; $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ Ideal $\Rightarrow I(V(I)) \supseteq I$

Beispiel
$I = (X^2 + 1) \subset \mathbb{R}[X]$
$V(I) = \emptyset \Rightarrow I(V(I)) = \mathbb{R}[X]$

Satz 3
Sei k algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Ist $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$ Ideal, so ist $V(I) \neq \emptyset$.

b) Für jedes Ideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ gilt

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

Der Beweise benutzt

Satz 3'
Ist k Körper, $n \geq 1, m \subset k[X_1, \dots, X_n]$ maximales Ideal, so ist $L := k[X_1, \dots X_n]/m$ *algebraische* Körpererweiterung von k. Das heißt für jedes $\alpha \in L$ gibt es ein $f \in k[X]$ mit $f(\alpha) = 0$, also gibt es $d \geq 1$ und $b_0, \dots, b_{d-1} \in k$ mit

$$\alpha^d + b_{d-1}\alpha^{d-1} + \dots + b_1\alpha + b_0 = 0$$

$k(\alpha) := k[X]/(f)$ ist Körper, der kleinste Teilkörper von L, der k und α enthält.

Folgerung 5.1
Ist k algebraisch abgeschlossen, so gibt es Bijektion zwischen den Mengen der

i) Punke $x = (x_1, \dots, x_n)$ in k^n
ii) Ideale $m_x = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ in $k[X_1, \dots, X_n]$
iii) maximalen Ideale in $k[X_1, \dots, X_n]$

Beweis
(i)⇒(ii): ✓

(ii)⇒(iii): m_x ist maximales Ideal. Die Abbildung $\varphi_x : k[X_1, \dots, X_n] \to k, X_i \mapsto x_i, f \mapsto f(x)$ ist der Einsetzungshomomorphismus. Kern$(\varphi_x) = m_x$

(iii)⇒(i): Sei m maximales Ideal, $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to k[X_1, \dots, X_n]/m \xrightarrow[\text{Satz 3'}]{\sim} k \Rightarrow m =$ Kern(φ)
Sei $x_i = \varphi(X_i)$, dann ist $\varphi = \varphi_x$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow m = m_x$ □

Beweis (Beweis von Satz 3)

a) Sei $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$ echtes Ideal. Sei m maximales Ideal mit $I \subseteq m$ (gibt es !) $\Rightarrow V(I) \supseteq V(m) \neq \emptyset$, da $m = m_x$ für ein $x \in k^n$ und $\{x\} = V(m_x)$

Beweis (von Satz 3')
Sei $x_i \in L$ die Restklasse von X_i. *Zu zeigen:* $x_1, \dots, x_n$ sind algebraisch über k.

Induktion über n:

n=1: $m = (f)$ für ein irreduzibles Polynom $f \Rightarrow L = k[X]/(f)$ ist k-Verktorraum der Dimension $d = \deg(f)$

$n \geq 2$: *Annahme:* x_1 ist transzendent.

Dann ist $k' = k(x_1) \cong \underbrace{k(X_1)}_{=\mathrm{Quot}\,(k[X_1])}$ Teilkörpererweiterung von L. L wird über k' von $x_2, \ldots, x_n$ erzeugt $\Rightarrow L \cong k'[X_2, \ldots, X_n]/m'$ für ein maximales Ideal m' in $k'[X_2, \ldots, X_n]$

Nach Induktionsvoraussetzung ist L algebraisch über k', das heißt:

$$\begin{array}{rclll} x_i^{d_i} + \sum_{j=0}^{d_i-1} a_{ij} x_i^j & = & 0 & i = 2, \ldots, n, d_i \geq 1 & a_{ij} \in k' \\ a_{ij} & = & \frac{c_{ij}}{b_{ij}} & & b_{ij}, c_{ij} \in k[X_1] \end{array}$$

□

(1) Sei $R \subset k'$ die von den a_{ij} erzeugte k-Algebra.

(2) Dann sind $x_1, \ldots, x_n$ ganz über $R \Rightarrow L$ ist ganze Ringerweiterung von R

(3) $\Rightarrow R = k$ oder R ist kein Körper.

   (1) $\Rightarrow R = k$ oder R ist kein Körper.

   $R = k \Rightarrow$ für $\tilde{k} = k(x_2, \ldots, x_n)$ ist $L = \tilde{k}[X_1]/m$, also algebraisch abgeschlossen.

   $R \neq k \Rightarrow k(X_1)$ ist nicht endlich erzeugbar als k-Algebra.

   (2) $\Rightarrow R$ ist Körper: Sei $a \in R\backslash\{0\}$. In L gibt es $\frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^d + \sum_{j=0}^{d-1} b_j \left(\frac{1}{a}\right)^j \text{ für ein } d \geq 1, b_j \in R$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{j=0}^{d-1} b_j a^{d-j} = 0, 1 = a\left(-\sum_{j=0}^{d-1} b_j a^{d-1-j}\right)$$

b) Sei $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n], g \in I(V(I))$.

Zu zeigen: es gibt $d \geq 0$ mit $g^d \in I$.

Wähle Erzeuger $f_1, \ldots, f_n$ von I (geht nach Satz 1). Betrachte in $k[X_1, \ldots, X_n, Y]$ das von $f_1, \ldots, f_n$ und $g \cdot Y - 1$ erzeugte Ideal J.

Behauptung: $V(J) = \emptyset$

denn: Sei $x = (x_1, \ldots, x_n, y) \in V(J)$

Dann ist $f_i(x) = 0$ für $i = 1, \ldots, m$. $\Rightarrow$ für $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ ist $f_i(x') = 0 \Rightarrow x' \in V(I)$ $\Rightarrow g(x') = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow (gY - 1)(x) = g(x) \cdot y - 1 = -1 \neq 0$

Dann ist nach Satz 3 a) $J = k[X_1, \ldots, X_n, Y]$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{m} b_i f_i + b(gY - 1) \text{ für geeignete } b_i, b \in k[X_1, \ldots, X_n, Y]$$

Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n, Y]/(gY - 1)$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i f_i \text{ für } \bar{b}_i = b_i \bmod (gY - 1)$$

Es gilt:

$$R \cong k[X_1, \ldots, X_n][\frac{1}{g}]$$

$$\bar{b}_i = \frac{a_i}{g^{d_i}}, a_i \in k[X_1, \ldots, X_n], d_i \geq 0$$

$\Rightarrow$ Für $d = \max d_i$ gilt

$$g^d = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(g^d \bar{b}_i\right)}_{\in k[X_1,\ldots,X_n]} \cdot f_i \in I$$

□

Folgerung 5.2
Sei k algebraisch abgeschlossen, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &:= \{V \subseteq k^n : V \text{ affine Varietät}\} \\ \mathcal{I}_n &:= \{I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n] : I \text{ Radikalideal}\} \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{aligned} I :&\ \mathcal{V}_n \to \mathcal{I}_n, \quad V \mapsto I(V) \\ V :&\ \mathcal{I}_n \to \mathcal{V}_n, \quad I \mapsto V(I) \end{aligned}$$

bijektiv und zueinander invers.

Bemerkung 5.3
Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann entsprechen die Punkte in V bijektiv den maximalen Idealen in

$$k(V) = A(V) := k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$$

Beweis
Die maximalen Ideale in $A(V)$ entsprechen bijektiv den maximalen Idealen in $k[X_1, \ldots, X_n]$, die $I(V)$ enthalten, also (Folgerung 5.1) den Punkten in k^n, die in V liegen. □

$x = (x_1, \ldots, x_n), m_x = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) = I(\{x\})$
$I(V) \subseteq I(\{x\})$
$V = V(I(V)) \supseteq V(I(\{x\})) = \{x\}$

§ 6 Morphismen affiner Varietäten

Definition + Bemerkung 6.1
Sei k ein Körper, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten.

a) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt ***Morphismus***, wenn es Polynome $f_1, \ldots, f_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gibt mit
$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$
für alle $x \in V$.

b) Ein Morphismus $f : V \to W$ heißt ***Isomorphismus***, wenn es einen Morphismus $g : W \to V$ gibt mit
$$g \circ f = \mathrm{id}_W \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_V$$

c) Die affinen Varietäten über k bilden mit den Morphismen aus a) eine Kategorie $\mathrm{Aff}(k)$.

d) Jeder Morphismus $f : V \to W$ ist Einschränkung eines Morphismus $\tilde{f} : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k)$

Beispiel 6.2

1) • Einbettungen
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^n(k) & \to & \mathbb{A}^m(k)(n \leq m) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

• Projektionen
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^n(k) & \to & \mathbb{A}^m(k)(n \geq m) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_m) \end{array}$$

• Permutation der Komponenten
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

2) Jedes $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ definert einen Morphismus
$$f : \mathbb{A}^n(k) \to A^1(k), x \mapsto f(x)$$

3) Sei $V = \mathbb{A}^1(k)$, $W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$.
$f : V \to W$, $x \mapsto (x^2, x^3)$ ist Morphismus. f ist bijektiv mit Umkehrabbildung
$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{y}{x} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$
$g(f(x)) = g(x^2, x^3) = \frac{x^3}{x^2} = x$ (für $x \neq 0$)
$f(g(x,y)) = f(\frac{y}{x}) = (\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}) = (\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2})$
Ist k unendlich, so ist g kein Morphismus!

4) Sei $\mathrm{char}(k) = p > 0$
$$f : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^n(k), (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^p, \ldots, x_n^p)$$
heißt ***Frobenius-Homomorphismus***.
Die Fixpunkte von f sind genau die Punkte, deren Koordninaten alle in $\mathbb{F}_p$ liegen („$\mathbb{F}_p$-wertige Punkte“)
$$(a^p = a \Leftrightarrow a \text{ Nullstelle von } X^p - X \Leftrightarrow a \in \mathbb{F}_p)$$

Bemerkung 6.3
Morphismen affiner Varietäten sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

Beweis
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten, $f : V \to W$ Morphismus. Sei $Z \subseteq W$ abgeschlossen, also $Z = V(J)$ für ein Ideal $J \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$. Sei $I = \{g \circ f \in k[X_1, \dots, X_n] : g \in J\}$.
Behauptung: $V(I) = f^{-1}(Z)$
denn:

$$x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow f(x) \in Z \Leftrightarrow f(x) \in V(J) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \forall g \in J \Leftrightarrow x \in V(I) \qquad \square$$

Definition + Bemerkung 6.4
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.

a) $k[V] := \{f : V \to \mathbb{A}^1(k) : f \text{ ist Morphismus}\}$ heißt ***affiner Koordinatenring*** von V.
b)

$$k[V] \cong A(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

Beweis
b) Sei $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to k[V], f \mapsto f_{|V}$ Einschränkungshomomorphismus. φ ist surjektiv (Bemerkung 6.1 d))
Kern$(\varphi) = I(V) \overset{\text{Homomorphiesatz}}{\Longrightarrow}$ Behauptung $\square$

Proposition 6.5
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietät.

a) Jeder Morphismus $\varphi = f : V \to W$ induziert k-Algebrahomomorphismus

$$f^{\#} : k[W] \to k[V], g \mapsto g \circ f$$

b) Die Abbildung $\mathrm{Mor}(V, W) \to \mathrm{Hom}_k(k[W], k[V]), f \mapsto f^{\#}$ ist bijektiv.

Beweis
a) ✓
b) *injektiv:* Seien $f, \tilde{f} : V \to W$ Morphismen mit $f^{\#} = \tilde{f}^{\#}$
$\Rightarrow g \circ f = g \circ \tilde{f}$ für alle$g \in k[W]$
Insbesondere ist $\underbrace{p_i \circ f}_{=f_i} = \underbrace{p_i \circ \tilde{f}}_{=\tilde{f}_i}$ für die Projektion

$$p_i : W \to \mathbb{A}^1(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

$\Rightarrow f = \tilde{f}$
surjektiv: Sei $\varphi : k[W] \to k[V]$ k-Algebra-Homomorphismus.
Definiere $f : V \to \mathbb{A}^m(k)$ durch $f(x) = (\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_n)(x))$
Behauptung:
(i) $f^{\#} = \varphi$
(ii) $f(V) \subseteq W$

Zu (i): für $i = 1, \dots, m$ gilt:

$$f^\#(p_i) = p_i \circ f = \varphi(p_i)$$

Da die p_i $k[V]$ erzeugen (als k-Algebra), folgt $f^\# = \varphi$
Zu (ii): Sei $g \in I(W), x \in V$
Zu zeigen: $g(f(x)) = 0$

$$\begin{tikzcd} k[X_1,\dots,X_n] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & k[X_1,\dots,X_n] \arrow[d] \\ k[W] \arrow[r, "\varphi"] & k[V] \end{tikzcd}$$

Lifte φ zu $\tilde{\varphi}$. Wähle dazu für jedes i ein Urbild von $\varphi(p_i)$. Dann ist $\tilde{\varphi}(I(W)) \subseteq I(V)$
$\Rightarrow g(f(x)) = g(\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_m)(x)) = \tilde{\varphi}(g)(x) = 0$ □

Bemerkung 6.6
Seien V, W affine Varietäten über k, $\varphi : k[W] \to k[V]$ k-Algebra-Homomorphismus und $f = f_\varphi : V \to W$ mit $f^\# = \varphi$. Dann gilt für jedes $x \in V$:

$$m_{f(x)} = \varphi^{-1}(m_x)$$

Beweis
$m_x = \{f \in k[V] : g(x) = 0\}$

$$\varphi^{-1}(m_x) = (f^\#)^{-1}(m_x) = \{h \in k[W] : h \circ f \in m_x\} = \{h \in k[W] : h(f(x)) = 0\} = m_{f(x)}$$ □

Beispiel 6.7
$V = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$
$f : \mathbb{A}^1(k) \to V, x \mapsto (x^2, x^3)$

$$f^\# : \underbrace{k[V]}_{=k[X,Y]/(Y^2-X^3)} \to k[\mathbb{A}^1(k)] = k[T]$$

$f^\#(\overline{X}) = T^2$
$f^\#(\overline{Y}) = T^3$
$f^\#$ ist injektiv, aber nicht nicht surjektiv! ($T \notin \mathrm{Bild}(f^\#)$)
Es gilt aber: der von $f^\#$ auf dem Quotientenkörper induzierte Homomorphismus ist ein Isomorphismus $f^\#(\frac{Y}{X}) = T$.

Satz 4
a) Die Zuordnung $V \mapsto k[V]$ induziert einen volltreuen kontravarianten Funktor

$$\Phi : \underline{\mathrm{Aff}(k)} \to \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}^{\mathrm{red}}} \text{ (endl. erzeugte } k\text{-Alg.)}$$

b) Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist Φ eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis

a) ✓

b) Noch zu zeigen: zu jeder k-Algebra $A \in k\,\mathrm{Alg}^{\mathrm{red}}$ gibt es affine Varietät V über k mit $k[V] \cong A$. A werde als k-Algebra erzeugt von $a_1, \dots, a_n$. Sei $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to A$ der durch $\varphi(X_i) = a_i$ definierte k-Algebra-Homomophismus. φ ist surjektiv, da A von den a_i erzeugt wird.

$$\Rightarrow A \cong k[X_1, \dots, X_n]/\,\mathrm{Kern}(\varphi)$$

Sei $V = V(\mathrm{Kern}(\varphi)) \Rightarrow I(V) \overset{\mathrm{HNS}}{=} \sqrt{\mathrm{Kern}(\varphi)} = \mathrm{Kern}(\varphi) \Rightarrow k[V] = k[X_1, \dots, X_n]/I(V) \cong A$ □

§ 7 Die Garbe der regulären Funktionen

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper

Bemerkung 7.1
Sei $V \subset \mathbb{A}^n(k)$affine Varietät über k, $h \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gilt: $\overline{h}$ ist Einheit in $k[V] \Leftrightarrow V(h) \cap V = \emptyset$

Beweis

$$\begin{aligned} V \cap V(h) &= V(I(V) + (h)) = \emptyset \overset{\text{HNS}}{\Longleftrightarrow} I(V) + (h) = k[X_1, \ldots, X_n] \\ &\Leftrightarrow 1 = f + gh \text{ für gewisse } f \in I(V), g \in k[X_1, \ldots, X_n] \\ &\Leftrightarrow \overline{1} = \overline{g} \cdot h \text{ in } k[V] \end{aligned}$$

□

Definition + Bemerkung 7.2
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen, $p \in U$.

a) Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{A}^1(k)$ heißt ***regulär in p***, wenn es eine Umgebung $U_p \subseteq U$ von p gibt und $g, h \in k[V]$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U_p$ und $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ für alle $x \in U_p$.
b) $f : U \to \mathbb{A}^1(k)$ heißt ***regulär***, wenn f in jedem $p \in U$ regulär ist.
c) $\mathcal{O}(U) := \{f : U \to \mathbb{A}^1(k) : f \text{ regulär}\}$ heißt k-Algebra (oder Ring) der ***regulären Funktionen*** auf U.
d) Für jedes offene $U \subseteq V$ ist
$$\alpha_U : k[V] \to \mathcal{O}_V(U), f \mapsto f_{|U}$$
ein k-Algebra-Homomophismus.
Zusatz: Ist U dicht, so ist α_U injektiv (Übung?)

Beispiel

1) $V = \mathbb{A}^1(k), U = \mathbb{A}^1(k) - \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$
2) $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2(k), U = V - \{0, 0\} \Rightarrow g = \frac{y}{x} \in \mathcal{O}_V(U)$
3) $f \in k[X_1, \ldots, , X_n] \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)}(D(f))$

Bemerkung 7.3
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

a) Für offene Teilmengen $U'' \subseteq U' \subseteq U$ gilt:
   (i) $\varrho^U_{U'} : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_V(U'), f \mapsto f_{|U'}$ ist k-Algebra Homomorphismus
   (ii) $\varrho^U_{U''} = \varrho^{U'}_{U''} \circ \varrho^U_{U'}$
b) Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U (mit Indexmenge I).Dann gilt:
   (i) Für $f \in \mathcal{O}_V(U)$ ist $f = 0 \Leftrightarrow f_{|U_i} = 0 \forall i \in I$
   (ii) Für jedes $i \in I$ sei $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gegeben.
   Ist $f_{i|U_i \cap U_j} = f_{j|U_i \cap U_j}$ für alle i, j, so gibt es $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit $f_{|U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Folgerung + Definition 7.4
Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}_V(U)$ ist eine Garbe von Ringen auf dem topologischen Raum V.

Allgemeiner:

a) ist ***Prägarbe***

b) ist die ***Garbeneigenschaft***

Beispiel
X topologisher Raum, R ein Ring. Für $U \subseteq X$ offen sei $\mathcal{F}(U) = R, \varrho^U_{U'} = \mathrm{id}_R$. Ist $\mathcal{F}$ Garbe? Prägarbe: JA! Garbe nein, falls es disjunkte offene Mengen gibt!

Bemerkung 7.5
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

a) Jede absteigene Kette $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ von abgeschlossenen Teilmengen von V wird stationär („V ist noetherscher topologischer Raum“)
b) U ist quasikompakt, das heißt jede offene Überdeckung von U hat endliche Teilüberdeckung.

Beweis
a) $V_i = V(I_i)$, I_i Ideal in $k[V]$
$V_i \supseteq V_{i+1} \Rightarrow I_{i+1} \supseteq I_i$
$k[V]$ ist noethersch $\Rightarrow$ Behauptung
b) Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U.
Besitzt (U_i) keine endliche Teilüberdeckung, so gibt es Folge $(U_{I_k})_{k=1,2,\dots}$ mit $U_{i_{k+1}} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$.
$W_k := \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$ ist offen in $V \overset{a)}{\Rightarrow} (W_k)$ wird stationär. $\square$

Satz 5
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.

a) $\mathcal{O}_v(V) \cong k[V]$
b) $\mathcal{O}_v(\underbrace{D(f)}_{=\mathbb{A}^n(k)\setminus V(f)}) \cong k[V]_f = k[f]_{\{f^d : d \geq 0\}}$ für alle $f \in k[V] \setminus \{0\}$

Beweis
a) Ist ein Spezielfall von b) für $f = 1$.
b) Definiere
$$\begin{aligned} \alpha : k[V]_f &\to \mathcal{O}_V(D(f)) \\ \tfrac{g}{f^d} &\mapsto (x \mapsto \tfrac{g(x)}{f(x)^d}) \qquad (x \in D(f)) \end{aligned}$$
α wohldefiniert: Sei $\frac{g_1}{f^{d_1}} = \frac{g_2}{f^{d_2}}$ in $k[V]_f$
$\Rightarrow f^d(g_1 \cdot f^{d_2} - g_2 \cdot f^{d_1}) = 0$ für ein $d \geq 0$
für $x \in D(f)$ ist $g_1(x)f(x)^{d_2} - g_2(x)f(x)^{d_1} = 0$
$\Rightarrow \frac{g_1(x)}{f(x)^{d_1}} = \frac{g_2(x)}{f(x)^{d_2}}$
α injektiv: Sei $\frac{g(x)}{f(x)^d} = 0$ für alle $x \in D(f)$
$\Rightarrow g(x) = 0$ für alle $x \in V$
$\Rightarrow f \cdot g = 0$ in $k[V]$
$\Rightarrow g = 0$ in $k[V]_f$
α surjektiv: Sei $g \in \mathcal{O}_V(D(f))$
$\Rightarrow$ für jedes $p \in D(f)$ gibt es Umgebung $U_p \subseteq D(f)$ und $g_p, h_p \in k[V]$ mit $g(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} \forall x \in U_p$

Behauptung 1: ŒE $U_p = D(h_p)$
denn: es gibt $\tilde{h}_p \in k[V]$ mit $D(\tilde{h}_p) \subseteq U_p (\subseteq D(h_p))$
$\Rightarrow V(\tilde{h}_p) \supset V(h_p) \Rightarrow \tilde{h}_p \in I(V(h_p)) \overset{HNS}{=} \sqrt{(h_p)}$
$\Rightarrow \exists d \geq 0, h \in k[V]$ mit $\tilde{h}_p^d = h \cdot h_p$
Setze $\hat{g}_p = hg_p, \hat{h} = \tilde{h}_p^d = h \cdot h_p$
Dann gilt für jedes $x \in D(\hat{h}_p) = D(\tilde{h}_p)$

$$g(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} = \frac{g_p(x) \cdot h(x)}{h_p(x) \cdot h(x)} = \frac{\hat{g}_p(x)}{\hat{h}_p(x)}$$

7.5 $\Rightarrow D(f) = \boxed{D(h_1) \cup \cdots \cup D(h_r)}$ (1) für geeignete $h_i := h_{p_i}, 1 = 1, \ldots, r$
Nach Behauptung 1 ist ŒE $g = \frac{g_i}{h_i}$ auf $D(h_i)$
Behauptung 2: $g_i h_j = g_j h_i$ in $k[V]$ für alle i, j
denn: es ist $g_i h_j = g_j h_i$ auf $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$
$\Rightarrow h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0$ in $k[V]$ (*)
setze $\tilde{g}_i = g_i h_i, \tilde{h}_i = h_i^2$. Dann wird aus (*)

$$\tilde{g}_i \tilde{h}_j - \tilde{g}_j \tilde{h}_i = 0$$

(1) $\Rightarrow V(f) = \bigcup_{i=1}^r V(h_i) \Rightarrow f \in I(V(h_1, \ldots, h_r)) \overset{HNS}{\Rightarrow} f \in \sqrt{(h_1, \ldots, h_n)}$
$\Rightarrow \exists d \geq 0, b_i \in k[V]$ mit $f^d = \sum_{i=1}^r b_i h_i$
Setze $\tilde{g} := \sum_{i=1}^r b_i g_i \in k[V]$
Dan gilt für alle $i = 1, \ldots, r$ und alle $x \in D(h_j)$:

$$g(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)} = \frac{g_j(x) f(x)^d}{h_j(x) f(x)^d} = \frac{(g_j \sum_{i=1}^r b_i h_i)(x)}{(h_j f^d)(x)} \overset{\text{Beh. 2}}{=} \frac{h_j (\sum_{i=1}^r b_i g_i)}{h_j f^d}(x) = \frac{\tilde{g}(x)}{f(x)^d} \qquad \square$$

Proposition 7.6
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten. Dann gilt: $f : V \to W$ ist Morphismus $\Leftrightarrow f$ stetig und für jedes offene $U \subseteq W$ und jedes $g \in \mathcal{O}_W(U)$ ist $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

Beweis
„$\Rightarrow$“: f stetig nach Bemerkung 6.3. Sei $g \in \mathcal{O}_W(U), p \in f^{-1}(U)$. In einer Umgebung U' von $p' = f(p)$ ist $g(y) = \frac{g_{p'}(y)}{h_{p'}(y)}$ für geeignete $g_{p'}, h_{p'} \in k[W]$. Für $x \in f^{-1}(U')$ ist also $g(f(x)) = \frac{g_{p'}(f(x))}{h_{p'}(f(x))}$. Dabei ist

$$\begin{aligned} g_p' \circ f &= f^\#(g_p') \in k[V] \\ h_p' \circ f &= f^\#(h_p') \in k[V] \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Zu zeigen: für $i = 1, \ldots, m$ ist $p_i \circ f$ ein Polynom, wobei $p_i \in k[W]$ die Restklasse von X_i ist.
Nach Satz 5 a) ist $k[W] = \mathcal{O}_W(W) \Rightarrow p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(V) = k[V]$ $\square$

Definition + Bemerkung 7.7
a) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ heißt ***quasi-affine Varietät***, wenn U Zariski-offen in einer affinen Varietät V ist.

b) Eine Abbildung $f : U_1 \to U_2$ zwischen quasi-affinen Varietäten U_1, U_2 heißt ***Morphismus*** (oder ***reguläre Abbildung***), wenn f stetig ist und für jedes offene $U \subseteq U_2$ und jedes $g \in \mathcal{O}_{U_2}(U)$ gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}_{U_1}(f^{-1}(U))$$

(hier sei $\mathcal{O}_{U_2} := \mathcal{O}_{\bar{U}_2}$, $\bar{U}_2$ der Z-Abschluss von U_2)

c) $f : \overbrace{U_1}^{\subseteq \mathbb{A}^n(k)} \to \overbrace{U_2}^{\subseteq \mathbb{A}^m(k)}$ ist genau dann regulär, wenn es reguläre Funktionen $f_1, \dots, f_n$ auf U_1 gibt mit $f(x) = (f_1(x), \dots, n_m(x))$ für alle $x \in U_1$

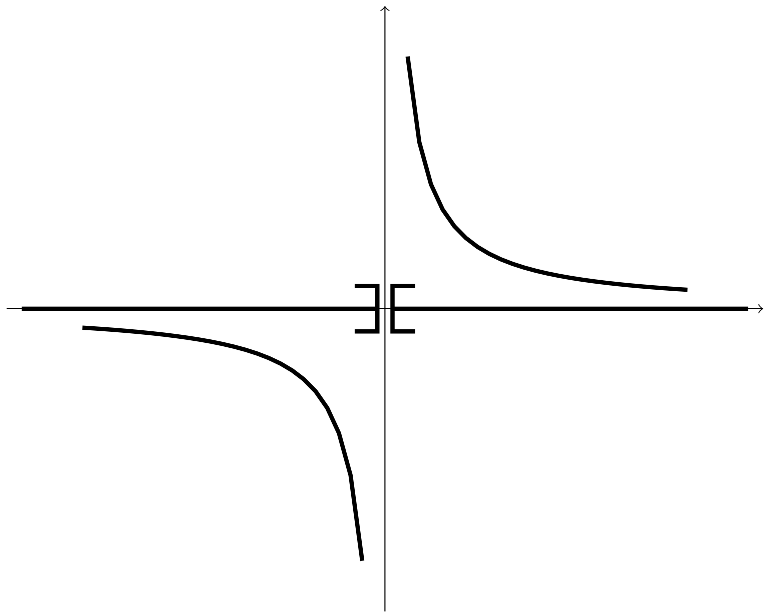
d) Die quasi-affinen Varietäten über k bilden eine Kategorie, die $\underline{\mathrm{Aff}(k)}$ als volle Unterkategorie enthält.

e) Eine quasi-affine Varietät heißt ***affin*** (als abstrakte Varietät), wenn sie isomorph ist zu einer affinen Varietät.

Bemerkung 7.8
Für $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ist $D(f)$ (abstrakt) affin.

Beispiel: $n = 1, f(x) = x, D(f) = \mathbb{A}^1(k) - \{0\}$

$V = V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$
$\varphi : V \to \mathbb{A}^1(k)$
$(x, y) \mapsto x$
$\Psi : \mathbb{A}^1(k) - \{0\} \to V, x \mapsto (x, \frac{1}{x})$



Beweis
Sei $g = f \cdot X_{n+1} - 1 \in k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ und $V = V(g) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$, V ist affine Varietät, $\varphi : D(f) \to V, x \mapsto (x, \frac{1}{f(x)})$ ist Morphismus mit Umkehrabbildung $\Psi : V(g) \to D(f), (x_1, \dots, x_(n+1)) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. $\square$

§ 8 Rational Abbildungen und Funktionenkörper

k sei wieder algebraisch abgeschlossen

Definition + Bemerkung 8.1
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ (quasi-)affine Varietät.

a) Eine ***rationale Funktion*** auf V ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f), wobei $U \subseteq V$ offen und dicht und $f \in \mathcal{O}(U)$ ist. Dabei ist $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow f|_{U\cap U'} = f'|_{U\cap U'}$

b) In jeder Äquivalenzklasse gibt es ein maximales Element $(U_{\max}, f_{\max}), U_{\max} =: \mathrm{Def}(f)$ heißt ***Definitionsbereich*** der natürlichen Funktion. $V \setminus \mathrm{Def}(V)$ heißt ***Polstellenmenge*** der rationalen Funktion.

c) Die rationalen Funktionen auf V bilden eine k-Algebra $\mathrm{Rat}(V)$.

d) Ist V irreduzibel, so ist $\mathrm{Rat}(V) = \mathrm{Quot}(k[V]) =: k(V)$. $k(V)$ heißt ***Funktionenkörper***.

Beweis

a) $\sim$ ist transitiv: Sei $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2), (U_2, f_2) \sim (U_3, f_3) \Rightarrow f_1|_{U_1\cap U_2\cap U_3} = f_3|_{U_1\cap U_2\cap U_3}$
$U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ist (offen und) *dicht* in $V \Rightarrow f_1|_{U_1\cap U_3} = f_3|_{U_1\cap U_3}$ (Ü4, A5)

b)
$$U_{\max} = \bigcup_{\substack{\exists\ f\in\mathcal{O}_V(U)\\ \mathrm{mit}(U,f)\in\ \mathrm{Klasse}}} U$$

c) $f \pm g, f \cdot g$ sind auf $\mathrm{Def}(f) \cap \mathrm{Def}(g)$ regulär

d) V irreduzibel $\Leftrightarrow I(V)$ Primideal $\Leftrightarrow k[V]$ ist nullteilerfrei
Definiere:
$$\begin{aligned} \alpha : k(V) &\to \mathrm{Rat}(V) \\ \tfrac{g}{h} &\mapsto (D(h), \tfrac{g}{h}) \end{aligned}$$
□

α *ist wohldefiniert*, weil $D(h)$ dicht (V irreduzibel)

α *ist injekiv*: ✓

α *ist surjektiv*: Sei $[(U, f)] \in \mathrm{Rat}(V)$, also $f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow \exists\ U' \subseteq U$ offen, $g, h \in k[V]$ mit $f = \frac{g}{h}$ auf U'. V irreduzibel, also U' dicht $\Rightarrow (U, f) \sim (U', \frac{g}{h}) \sim (D(h), \frac{g}{h}) \Rightarrow \alpha(\frac{g}{h}) = [(U, f)]$

Definition + Bemerkung 8.2
Seien V, W affine Varietäten.

a) Eine ***rationale Abbildung*** $f : V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U), wobei $U \subseteq V$ offen und dicht, $f_U : U \longrightarrow W$ regulär. Es ist $(U, f_U) \sim (U', f'_U) :\Leftrightarrow f_U|_{U\cap U'} = f_{U'}|_{U\cap U'}$.

b) Rationale Funktionen auf V sind rationale Abbildungen $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k)$.

c) Jede rationale Abbildung hat einen maximalen Definitionsbereich.

Warnung: $V \overset{f}{\dashrightarrow} W \overset{g}{\dashrightarrow} Z$ ist im Allgemeinen keine rationale Abbildung, denn $\mathrm{Def}(g) \cap f(\mathrm{Def}(f)) = \emptyset$ ist möglich.

Definition 8.3
Ein Morphismus $f : V \to W$ (von quasi-affinen Varietät) heißt ***dominant***, wenn $f(V)$ dicht in W ist.

Bemerkung + Definition 8.4

a) Die irreduziblen affinen Varietät bilden mit den dominanten rationalen Abbildungen eine Kategorie.

b) Die Isomorphismen in dieser Kategorie heißen ***birationale Abbildungen***.

Explizit: $f : V \dashrightarrow W$ birational $\Leftrightarrow \exists g : W \dashrightarrow V$, sodass $g \circ f$ und $f \circ g$ die Identität auf ihren Definitionsbereichen sind.

c) „birational" lässt sich auch für reduzible Varietäten definieren.

Beispiel 8.5

a) Sei $V = V(X,Y) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$, $\left.\begin{array}{rrcll} f: & V & \to & \mathbb{A}^1(k), & (x,y) \mapsto x \\ g: & \mathbb{A}^1(k) & \dashrightarrow & \mathbb{A}^1(k), & x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}\right\}$ beide dominant

$g \circ f$ ist auf $f^{-1}(D(g))$ regulär. Das ist *nicht dicht* in $\mathbb{A}^1(k)$!

b) $\begin{array}{rcl} \sigma : \mathbb{A}^2(k) & \dashrightarrow & \mathbb{A}^2(k) \\ (x,y) & \mapsto & (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) \end{array}$ ist rationale Abbildung mit

$$\mathrm{Def}(\sigma) = \mathbb{A}^2(k) - V(XY)$$

$\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{Def}(\sigma)}$

c) $V = V(Y^2 - X^3)$, $\begin{array}{rrcrcl} \varphi: & \mathbb{A}^1(k) & \to & V, & x \mapsto & (x^2, x^3) \\ \psi: & V & \dashrightarrow & \mathbb{A}^1(k), & (x,y) \mapsto & \frac{y}{x} \end{array}$ $\begin{array}{l} \text{bijektiver Morphismus} \\ \text{ist rationale Abbildung} \end{array}$

φ ist birational (ψ auch!)

Beweis

a) Sei $f : V \dashrightarrow W$ und $g : W \dashrightarrow Z$ dominante rationale Abbildung. Dann ist $f^{-1}(\mathrm{Def}(g)) \subseteq V$ nichtleer, offen und damit dicht $\Rightarrow g \circ f$ ist rationale Abbildung $V \dashrightarrow Z$

$\mathrm{Bild}(g \circ f) = g(\underbrace{f(\mathrm{Def}(f))}_{\text{dicht in } W})$ ist dicht in Z. $\square$

Proposition 8.6

Sei $f : V \to W$ Morphismus affiner Varietäten und $f^\# : k[W] \to k[V]$ der zugehörige k-Algebren-Homomophismus. Dann gilt:

$$f^\# \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ dominant}$$

Folgerung 8.7

Jede dominante rationale Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ zwischen irreduziblen affinen Varietäten induziert einen Körperhomomorphismus

$$f^\# : k(W) \to k(V)$$

Satz 6

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist die Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten über k mit dominanten rationalen Abbildungen äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen von k mit k-Algebrenhomomorphismus.

Beweis

Die Zuordnung $V \to k(V), f \mapsto f^\#$ ist Funktor. Zu zeigen bleibt:

i) zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung $K|k \exists V$ mit $k(V) \cong K$

ii) $f \mapsto f^\#$ ist Projektion $\Phi : \mathrm{Rat}(V,W) \to \mathrm{Hom}_k(k(W), k(V))$

Beweis:

i) Seien $g_1, \dots, g_n$ Erzeuger von K über k, sei $A := k[g_1, \dots, g_n]$. Dann ist $K = \text{Quot}(A)$
Sei $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to A$ gegeben durch $\varphi(X_i) = g_i$ und $V := K(\text{Kern}(\varphi))$
$\Rightarrow V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist affine Varietät mit $k[V] \cong A$
$\Rightarrow k(V) \cong K$

ii) Φ *injektiv:* Seien $f, g : V \dashrightarrow W$ mit $f^\# = g^\#$. Wähle $U = D(h) \subseteq \text{Def}(f) \cap \text{Def}(g)$ offen, affin. $f|_U$ und $g|_U$ sind Morphismen $U \to W$.

Die induzierten k-Algebren-Homomophismen $g_U^\#, f_U^\# : k[W] \to k[U] \subset k(V)$. Es gilt: $f_{U'}^\# = f^\#|_{k[U]}$

Φ *surjektiv:* Sei $\alpha : k(W) \to k(V)$ k-Algebren-Homomophismus. Wähle Erzeuger $g_1, \dots, g_n$ von $k[W]$ (als k-Algebra). Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist $\alpha(g_i)$ rationale Funktion auf V.

Da V irreduzibel, ist $\bigcap_{i=1}^n Def(\alpha(g_i))$ offen, affin (für geeignetes $g \in k[V]$). Nach Konstruktion induziert α einen k-Algebren-Homomophismus

$$\alpha : k \to \mathcal{O}_U(U) = k[U]$$

$\overset{\text{Satz 4}}{\Rightarrow} \alpha = f^\#$ für einen Morphismus $f : U \to W$

Außerdem U dicht in $V \Rightarrow (U, f)$ ist rationale Abbildung (f ist dominant, da $f^\#$ injektiv, dann α Homomophismus zwischen Körpern) $\square$