

## § 19.

# Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Paragraphen sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, s : I \rightarrow \mathbb{R}$  **stetig**. Weiter sei  $J \subseteq I$  ein Teilintervall von  $I$ .

### Definition

Die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + s(x) \quad (*)$$

heißt **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**. Sie heißt **homogen**, falls  $s \equiv 0$ , anderenfalls heißt sie **inhomogen**.  $s$  heißt **Störfunktion**.

Wir betrachten zunächst die zu  $(*)$  gehörende **homogene Gleichung**:

$$y' = a(x)y \quad (\text{H})$$

Aus Ana I 23.14 folgt, dass  $a$  auf  $I$  eine Stammfunktion  $A$  besitzt.

### Satz 19.1 (Lösung einer homogenen linearen Dgl 1. Ordnung)

Sei  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $y$  ist genau dann eine Lsg von (H), wenn ein  $c \in \mathbb{R}$  existiert mit:

$$y(x) = c \cdot e^{A(x)}$$

### Beweis

„ $\Leftarrow$ “ Es existiere ein  $c \in \mathbb{R}$ , sodass  $y(x) = ce^{A(x)}$  für  $x \in J$ . Dann gilt:

$$\forall x \in J : y'(x) = c \cdot e^{A(x)} \cdot A'(x) = a(x) \cdot c \cdot e^{A(x)} = a(x)y(x)$$

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $g(x) := \frac{y(x)}{e^{A(x)}}$ . Nachrechnen:  $\forall x \in J : g'(x) = 0$

Aus Ana I folgt, dass ein  $c \in \mathbb{R}$  existiert, sodass für alle  $x \in J$  gilt  $g(x) = c$ . ■

### Satz 19.2 (Eindeutige Lösung eines Anfangswertproblems)

Sei  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann hat das AwP

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf  $I$  genau eine Lösung.

**Beweis**

Sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = c \cdot e^{A(x)}$  für alle  $x \in I$ . Dann folgt aus 19.1, dass  $y$  eine Lösung von (H) ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) \\ \iff y_0 &= c \cdot e^{A(x_0)} \\ \iff c &= y_0 \cdot e^{-A(x_0)} \end{aligned}$$

■

**Beispiel**

Sei das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = \sin(x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung  $y' = \sin(x)y$  ist für  $c \in \mathbb{R}$ :

$$y(x) = c \cdot e^{-\cos(x)}$$

Außerdem gilt:

$$1 = y(0) = c \cdot e^{-\cos(0)} = \frac{c}{e}$$

Also folgt  $c = e$  und damit ist die Lösung des AwP  $y(x) = e^{1-\cos(x)}$ .

Nun betrachten wir die **inhomogene Gleichung**

$$y' = a(x)y + s(x) \tag{IH}$$

Für eine spezielle Lösung  $y_s$  von (IH) macht man den Ansatz  $y_s(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}$  mit einer (unbekannten) db Funktion  $c$ . Dies heißt **Variation der Konstanten**.

Mit diesem Ansatz gilt:

$$\begin{aligned} y'_s(x) &= c'(x) \cdot e^{A(x)} + c(x) \cdot e^{A(x)} \cdot a(x) \\ &\stackrel{!}{=} a(x)y_s(x) + s(x) \\ &= a(x)c(x) \cdot e^{A(x)} + s(x) \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass gilt:

$$\begin{aligned} c'(x) \cdot e^{A(x)} &= s(x) \\ \iff c'(x) &= s(x) \cdot e^{-A(x)} \\ \iff c(x) &= \int s(x) \cdot e^{-A(x)} \, dx \end{aligned}$$

Ist also  $c$  eine Stammfunktion von  $s \cdot e^{-A}$ , so ist  $y_s(x) := c(x) \cdot e^{A(x)}$  eine Lösung von (IH). Insbesondere besitzt (IH) auf  $I$  Lösungen.

**Beispiel**

Sei folgende inhomogene Gleichung gegeben:

$$y' = \sin(x)y + \sin(x) \tag{*}$$

Der Ansatz  $y_s(x) = c(x) \cdot e^{-\cos(x)}$  für eine spezielle Lösung von (\*) liefert wie oben:

$$c(x) = \int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)} \, dx = -e^{\cos(x)}$$

Dann ist  $y_s(x) = -e^{\cos(x)} \cdot e^{-\cos(x)} = -1$ .

**Definition**

Definiere die Lösungsmengen:

$$L_H := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y \text{ ist eine Lösung von (H)}\}$$

$$L_{IH} := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y \text{ ist eine Lösung von (IH)}\}$$

$$16.1 \implies L_H = \{c \cdot e^A \mid c \in \mathbb{R}\}. \text{ Bekannt: } L_{IH} \neq \emptyset.$$

**Satz 19.3 (Lösungen)**

Sei  $y_s \in L_{IH}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ .

$$(1) \quad y \in L_{IH} \iff \exists y_h \in L_H : y = y_h + y_s$$

(2) Das AwP:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + s(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat auf  $I$  genau eine Lösung

**Beweis**

Leichte Übung! ■

**Beispiele:**

(1) ( $I = \mathbb{R}$ ) Bestimme die allg. Lösung von

$$y' = 2xy + x \tag{*}$$

1. Bestimme die allg. Lösung der Gleichung  $y' = 2xy$ :  $y(x) = ce^{x^2} (c \in \mathbb{R})$ .

2. Bestimme eine spezielle Lösung von (\*):  $y_s(x) = ce^{x^2}$  mit  $c(x) = \int xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

Also:  $y_s(x) = -\frac{1}{2}$

3. Die Allgemeine Lösung von (\*) lautet:

$$y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2} \quad (c \in \mathbb{R})$$

(2) Löse das AwP:

$$\begin{cases} y' = 2xy + x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Allg. Lösung der Dgl:  $y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$

$$-1 = y(1) = ce - \frac{1}{2} \implies c = -\frac{1}{2e}$$

Lösung des AwPs:  $y(x) = -\frac{1}{2e}e^{x^2} - \frac{1}{2}$ .

