

Skript zur Vorlesung

Algebraische Geometrie I

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Wintersemester 2010/2011

Jonathan Zachhuber, Jens Babutzka und Michael Fütterer
Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

i	Die Kategorie der affinen Varietäten	7
1	Affine Varietäten und Verschwindungsideale	7
2	Zariski-Topologie	8
3	Der Hilbertsche Nullstellensatz	13
4	Morphismen zwischen affinen Varietäten	16
5	Die Garbe der regulären Funktionen	20
6	Rationale Abbildungen	26
7	Spektrum eines Rings	30
ii	Projektive Varietäten	39
1	Der Projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$	39
2	Projektive Varietäten	40
3	Quasi-projektive Varietäten	48
4	Reguläre Funktionen	49
5	Morphismen	53
6	Graßmann-Varietäten	59
iii	Geometrische Eigenschaften	63
1	Lokale Ringe zu Punkten	63
2	Dimension von Varietäten	66
3	Der Tangentialraum	70
4	Der singuläre Ort einer Varietät	76
5	Reguläre Ringe und Krullscher Hörsatz	79
iv	Nicht-singuläre Kurven	83
1	Divisoren	83
2	Verzweigungsindizes	86
3	Das Geschlecht einer Kurve	92
4	Der Satz von Riemann-Roch	96
v	Liste der Sätze	99
	Stichwortverzeichnis	101

Motivation

Ziel: *Untersuche Nullstellenmengen von Polynomen: Für eine Menge von Polynomen*

$$p_1, \dots, p_r \in k[X_1, \dots, X_n]$$

über einem Körper k möchte man die Menge der Nullstellen

$$\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid p_i(x) = 0 \text{ für alle } i\}$$

analysieren.

- BEISPIEL: (a) Betrachte $ax^2 + by^2 = 1 \iff ax^2 + by^2 - 1 = 0$ über $k = \mathbb{R}$. Das liefert eine Ellipse, für $a = b = 1$ einen Kreis.
- (b) Betrachte $x^2 + y^2 = z^2$.
- (c) Betrachte (b) mit $x = 1$: Dann ist $1 + y^2 = z^2 \iff 1 = z^2 - y^2$, also eine Hyperbel.
- (d) Bei linearen Gleichungen sehen wir mit Hilfe der linearen Algebra, dass wir affine Unterräume erhalten.
- (e) Die Lösungsmengen sind abhängig vom Körper, z.B. sehen wir, dass das Polynom $X^3 - X$ für $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Lösungsmenge ganz k hat.

Der Inhalt der Vorlesung wurde in großen Teilen von der Algebraischen-Geometrie-Vorlesung von Prof. Dr. Frank Herrlich inspiriert.

