

## 23. Minimal- und Maximallösung

Stets in diesem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^2, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $(x_0, y_0) \in D$ . Wieder betrachten wir das AWP

$$(A) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$L_{(A)}$  und  $I_y$  für  $y \in L_{(A)}$  seien wie in Paragraph 22 definiert.

### Definition

$y^* \in L_{(A)}$  heißt eine **Maximallösung** von (A) :  $\iff y \leq y^*$  auf  $I_y \cap I_{y^*} \forall y \in L_{(A)}$ .

$y_* \in L_{(A)}$  heißt eine **Minimallösung** von (A) :  $\iff y \geq y_*$  auf  $I_y \cap I_{y_*} \forall y \in L_{(A)}$

### Beispiel

$D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = \sqrt{|y|}$ , AWP

$$(A) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Für  $\alpha \geq 0 : y_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & , x \leq \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4} & , x \geq \alpha \end{cases}$

Es gilt weiterhin  $\tilde{y}_\alpha(x) := -y_\alpha(-x)$ .

Nachrechnen:  $y_\alpha(x), \tilde{y}_\alpha(x)$  lösen das AWP auf  $\mathbb{R}$ .

Für  $\alpha, \beta \geq 0 : y_{\alpha, \beta} := \begin{cases} y_\alpha(x) & , x \geq \alpha \\ 0 & , -\beta \leq x \leq \alpha \\ \tilde{y}_\beta(x) & , x \leq -\beta \end{cases}$

Übung: Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $0 \in I$ .  $y$  löst das AWP auf  $I$   $\iff y = 0$  auf  $I$  oder  $\exists \alpha \geq 0 : y = (y_\alpha)|_I$  oder  $\exists \alpha \geq 0 : y = (\tilde{y}_\alpha)|_I$  oder  $\exists \alpha, \beta \geq 0 : y = (y_{\alpha, \beta})|_I$ .

Damit ist  $y_0$  eine Maximallösung und  $\tilde{y}_0$  eine Minimallösung. Ab jetzt sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, D := I \times \mathbb{R}, f \in C(D, \mathbb{R})$  sei beschränkt,  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, M := \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in D\}$ .

Vorbemerkungen:

- (1) Das AWP (A) hat Lösungen auf  $I$  (12.4, Peano)
- (2)  $\mathcal{X} := C(I, \mathbb{R})$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  ist ein BR.
- (3)  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  sei definiert durch  $(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$  ( $y \in \mathcal{X}, x \in I$ ),  $T$  ist stetig;  
Für  $y \in \mathcal{X}$  gilt:  $y$  löst das AWP auf  $I$   $\iff Ty = y$ .
- (4) Sei  $y \in \mathcal{X}$  eine Lösung von (A) auf  $I$ : für  $x, \tilde{x} \in I$ :  $|y(x) - y(\tilde{x})| = |y'(\xi)||x - \tilde{x}| = |f(\xi, y(\xi))||x - \tilde{x}| \leq M|x - \tilde{x}|$

**Satz 23.1**

Das AWP (A) hat eine Maximallösung  $y^* : I \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Minimallösung  $y_* : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beweis**

Wir zeigen nur die Existenz von  $y^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\mathcal{L} := \{y \in \mathcal{L}_{(A)} : I_y = I\}$ . 12.4  $\implies \mathcal{L} \neq \emptyset$ . Sei  $y \in \mathcal{L}, x \in I : |y(x)| = |y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt| \leq |y_0| + |\int_{x_0}^x f(t, y(t))dt| \leq |y_0| + M|x - x_0| \leq \underbrace{|y_0| + M|b - a|}_c$ .

Also:  $y(x) \leq c \forall y \in \mathcal{L} \forall x \in I$ . Es existiert also  $y^*(x) := \sup\{y(x) : y \in \mathcal{L}\} (x \in I)$ . Sei  $y \in \mathcal{L}$  (also  $I_y = I$ ). Dann  $y \leq y^*$  auf  $I$ . Sei  $y \in \mathcal{L}_{(A)}$  (also  $I_y \subseteq I$ ).

22.3  $\implies \exists \hat{y} \in \mathcal{L} : y = \hat{y}|_{I_y} \implies y \leq \hat{y} \leq y^*$  auf  $I_y$ .

Noch zu zeigen:  $y^* \in \mathcal{L}$ .

Sei  $I \cap \mathbb{Q} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

Seien  $j, k \in \mathbb{N}$ . Dann ex. ein  $y_{jk} \in \mathcal{L} : y_{jk}(x_j) \geq y^*(x_j) - \frac{1}{k}$ .

Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $x \in I : y_k(x) := \max\{y_{1k}(x), y_{2k}(x), \dots, y_{kk}(x)\}$ .

Übung:  $y_k \in \mathcal{L} \forall k \in \mathbb{N}$ . Für  $k, j \in \mathbb{N}, j \leq k : y_k(x_j) \geq y_{jk}(x_j) > y^*(x_j) - \frac{1}{k}$ .

Vorbemerkung (4) und 11.4  $\implies (y_k)$  enthält eine auf  $I$  gleichmäßig konvergente Teilfolge. o.B.d.A  $(y_k)$  konvergiert gleichmäßig auf  $I$ .  $\hat{y}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) (x \in I)$ .  $Ty_k = y_k \forall k \in \mathbb{N}, T$  stetig  $\implies T\hat{y} = \hat{y} \implies \hat{y} \in \mathcal{L}$ .

Es ist  $\hat{y} \leq y^*$  auf  $I$ . Sei  $x_j \in I \cap \mathbb{Q}$ .  $\hat{y}(x_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x_j) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} (y^*(x_j) - \frac{1}{k}) = y^*(x_j) \implies \hat{y} = y^*$  auf  $I \cap \mathbb{Q}$ .

Annahme:  $\exists \xi \in I : \hat{y}(\xi) < y^*(\xi) \implies \exists u \in \mathcal{L} : \hat{y}(\xi) < u(\xi)$ . Für  $x_\mu \in I \cap \mathbb{Q}$  hinreichend nahe bei  $\xi : \hat{y}(x_\mu) < u(x_\mu) \leq y^*(x_\mu)$ , Widerspruch.

D.h.  $\hat{y} \geq y^*$  auf  $I$ . Also  $y^* = \hat{y}$  auf  $I$ , somit gilt  $y^* \in \mathcal{L}$ . ■

**Definition**

$T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y_*(x) \leq y \leq y^*(x)\}$  heißt **Lösungstrichter** von (A).

**Satz 23.2**

Sei  $(\sigma, \tau) \in T$ . Dann existiert eine Lösung  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  von (A) auf  $I$  mit  $v(\sigma) = \tau$ .

**Beweis**

Betrachte das AWP (B)  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(\sigma) = \tau \end{cases}$ . 12.4 (Peano)  $\implies$  (B) hat eine Lösung  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$

auf  $I$ . Ist  $\sigma = x_0 \implies \tau = y_0 \implies v := w$  leistet das Verlangte. Sei also  $\sigma \neq x_0$ , etwa  $x_0 < \sigma$ . Ist  $w(x_0) = y_0 \implies v := w$  leistet das Verlangte. Sei also  $w(x_0) \neq y_0$ . Es ist  $y_*(\sigma) \leq \tau = w(\sigma) \leq y^*(\sigma)$ .

Fall 1:  $w(x_0) > y_0 = y^*(x_0) \implies w(x_0) - y^*(x_0) > 0$  und  $w(\sigma) - y^*(\sigma) \leq 0$ . Zwischenwertsatz  $\implies \exists \xi \in [x_0, \sigma] : w(\xi) = y^*(\xi)$

Definiere:  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $v(x) := \begin{cases} y^*(x), & x \in [a, \xi] \\ w(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$   $v(x_0) = y^*(x_0) = y_0, v(\sigma) = w(\sigma) = \tau$ .  
12.3  $\implies v$  löst das AWP (A) auf  $I$ .

Fall 2:  $w(x_0) < y_0 = y_*(x_0) \implies w(x_0) - y_*(x_0) < 0$  und  $w(\sigma) - y_*(\sigma) \geq 0$ . Zwischenwertsatz  
 $\implies \exists \xi \in [x_0, \sigma] : w(\xi) = y_*(\xi)$

Definiere:  $v : I \in \mathbb{R}$  durch  $v(x) := \begin{cases} y_*(x), & x \in [a, \xi] \\ w(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$   $v(x_0) = y_*(x_0) = y_0, v(\sigma) = w(\sigma) = \tau$ .  
12.3  $\implies v$  löst das AWP (A) auf  $I$  ■

