

## 21. Cauchyscher Integralsatz (Homotopieversionen)

### **Satz 21.1 (CIS, Version I)**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$  und  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  seien Wege mit  $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$ ,  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ .

Sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  in  $D$  homotop, so gilt:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

### **Beweis**

Ohne Beweis

### **Satz 21.2 (CIS, Version II)**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$  und  $\gamma$  sei ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ .

Ist  $\gamma$  nullhomotop in  $D$ , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

### **Beweis**

21.1

### **Satz 21.3 (CIS, Version III)**

$G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei  $f \in H(G)$  und  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ . Dann

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

### **Beweis**

21.2

**Satz 21.4 (Charakterisierung von Elementargebieten, II)**

Sei  $G$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ .

$G$  ist ein Elementargebiet  $\Leftrightarrow G$  ist einfach zusammenhängend

**Beweis**

„ $\Rightarrow$ “ Fall 1:  $G = \mathbb{C} \Rightarrow G$  konvex, also einfach zusammenhängend (siehe 20.4)

Fall 2:  $G \neq \mathbb{C} \xrightarrow{19.1} \exists f \in H(G) : f(G) = \mathbb{D}$  und  $f$  ist auf  $G$  injektiv.

Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .  $z_0 :=$  Anfangspunkt von  $\gamma$ .

Zu zeigen:  $\gamma$  und  $\gamma_{z_0}$  sind in  $G$  homotop

$\Gamma := f \circ \gamma$ .  $\Gamma$  ist ein geschlossener Weg in  $\mathbb{D}$ .  $\mathbb{D}$  ist konvex  $\xrightarrow{10.4} \mathbb{D}$  ist einfach zusammenhängend.

Also existiert eine Homotopie  $\tilde{H}$  von  $\Gamma$  nach  $\gamma_{f(z_0)}$  in  $\mathbb{D}$ .  $H := f^{-1} \circ \tilde{H}$  ist eine Homotopie von  $\gamma$  nach  $\gamma_{z_0}$  in  $G$

„ $\Leftarrow$ “ Zu zeigen:  $\forall f \in H(G) \exists F \in H(G) : F' = f$  auf  $G$

Sei  $f \in H(G)$ . Sei  $z_0 \in G$  (fest).

Für  $z \in G$  sei  $\gamma^{(z)}$  ein Weg mit  $\text{Tr}(\gamma^{(z)}) \subseteq G$ ,  $\gamma^{(z)}(0) = z_0$ ,  $\gamma^{(z)}(1) = z$ . (Parameterintervall von  $\gamma^{(z)}$  sei  $[0,1]$ )

$$F(z) := \int_{\gamma^{(z)}} f(w) dw \quad (z \in G)$$

Voraussetzung + 21.1, 21.3  $\Rightarrow$  diese Definition ist unabhängig von der Wahl von  $\gamma^{(z)}$ .

Fast wörtlich wie im Beweis von 9.2.:  $F \in H(G)$ ,  $F' = f$  auf  $G$ . ■

**Satz 21.5 (Charakterisierung von Elementargebieten, III)**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1)  $G$  ist ein Elementargebiet
- (2)  $G$  ist einfach zusammenhängend
- (3)  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H(G)$  und für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$
- (4)  $\forall f \in H(G)$  mit  $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g' = f$  auf  $G$
- (5)  $\forall f \in H(G)$  mit  $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g^2 = f$  auf  $G$
- (6)  $G = \mathbb{C}$  oder  $G \sim \mathbb{D}$

**Beweis**

(1) $\Leftrightarrow$ (2): 21.4

(3) $\Rightarrow$ (1): wie im Beweisteil „ $\Leftarrow$ “ von 21.4

(3) $\Rightarrow$ (4),(5): 11.4

(4) $\Rightarrow$ (5): siehe Beweis von 11.4

(5) $\Rightarrow$ (6): 19.6

(6) $\Rightarrow$ (1): wie im Beweisteil „ $\Rightarrow$ “ von 21.4

(2) $\Rightarrow$ (3): 21.2

■

### Definition

Sei  $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ .  $A$  heißt in  $\hat{\mathbb{C}}$  zusammenhängend  $:\Leftrightarrow$  jede lokal konstante Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  ist auf  $A$  konstant.

### Satz 21.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, IV)

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann sind äquivalent:

(1)  $G$  ist einfach zusammenhängend

(2)  $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$  ist zusammenhängend in  $\hat{\mathbb{C}}$

(3) Aus  $\mathbb{C} \setminus G = A \cup K$ ,  $A \subseteq \mathbb{C}$  abgeschlossen,  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt und  $A \cap K = \emptyset$  folgt:  
 $K = \emptyset$

### Beweis

Ohne Beweis.

