Kapitel 12

Charakteristische Funktionen

In §10 haben wir für diskrete Zufallsvariablen die erzeugende Funktion betrachtet. Jetzt betrachten wir eine andere Transformierte, die für beliebige Zufallsvariablen X definiert ist. Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 12.1
Es sei X eine Zufallsvariable. Dann heißt $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_X(t) := Ee^{itX}$$

*die **charakteristische Funktion zu X***

Bemerkung 12.1

a) Man kann im Reellen rechnen.
$Ee^{itX} = E\cos(tX) + iE\sin(tX)$
Insbesondere existieren die Erwartungswerte ohne weitere Bedingung.

b) $\varphi_X(t)$ hängt nur von der Verteilung von X ab

c) Ist X diskret, so gilt: $\varphi_X(t) = g_X(e^{it})$

d) Ist X absolutstetig, so gilt: $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx$ (Fourier-Transformierte von f_X)

Beispiel 12.1
Es sei $X \equiv \mu \in \mathbb{R}$ Dann ist $\varphi_X(t) = Ee^{it\mu} = e^{it\mu}$

Beispiel 12.2
Es sei $X \sim N(0,1)$ Also:

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) = Ee^{itX} &= Ecos(tX) + iEsin(tX) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}_{=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -x sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \underbrace{= \cdots =}_{\text{part. Integration}} - \int_{-\infty}^{\infty} t cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -t\varphi_X(t)
\end{aligned}
$$

und $\varphi_X(0) = 1$ Lösung der Dgl. $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Satz 12.1
Es sei φ_X die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X. Dann gilt:

a) $\varphi_X(0) = 1$

b) $|\varphi_X(t)| \leq 1 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$

c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\qquad \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$

Beweis

a) $\varphi_X(0) = Ee^{i0X} = 1$

b) $|\varphi_X(t)| \leq E|e^{itX}| = 1$

c) $\varphi_{aX+b}(t) = Ee^{it(aX+b)} = e^{itb} \overbrace{Ee^{itaX}}^{=\varphi_X(at)}$

Beispiel 12.3
Es sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Es gilt: $\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, falls $Z \sim N(0, 1)$ (Lemma 6.1)

$$\text{Also:} \qquad \varphi_X(t) = \varphi_{\mu+\sigma Z}(t) \overset{\text{Satz 12.1 c)}}{=} e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Satz 12.2
Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$ so gilt für die charakteristische Funktion $\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}$ von $\sum_{i=1}^n X_i$:

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Beweis

$$\varphi_{X+Y}(t) = Ee^{it(X+Y)} = E(e^{itX}e^{itY}) \overset{X,Y \text{ unabh.}}{=} Ee^{itX} \cdot Ee^{itY} = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

Satz 12.3
Falls $E|X|^n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, so ist φ_X n-mal differenzierbar und es gilt:

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n EX^n \qquad \text{(n-te Moment)}$$

Beweis
Man darf E (= Integral) und Differentiation vertauschen.
($\rightarrow$ Majorisierte Konvergenz Stochastik II)

$$\varphi_X^{(n)}(t) = \frac{d^n}{(dt)^n} Ee^{itX} = E\left(\frac{d^n}{(dt)^n} e^{itX}\right) = E((iX)^n e^{itX}) = i^n EX^n e^{itX}$$

$\Rightarrow \varphi_X^{(n)}(0) = i^n EX^n$

Beispiel 12.4
Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad E|X|^n < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\text{Beispiel 12.3} \quad \Rightarrow \varphi_X(t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\overset{\text{Satz 12.2}}{\underset{(n=1)}{\Longrightarrow}} \; EX = \frac{1}{i}(\varphi_X^i(0)) = \frac{1}{i}((i\mu - \sigma^2 t)e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\Big|_{t=0} = \mu$$

Satz 12.4 (Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen)
Sind X und Y Zufallsvariablen mit derselben charakteristischen Funktion, so haben X und Y dieselbe Verteilung.

Beweis
Siehe zum Beispiel: Hesse Seite 94

Beispiel 12.5
Es seien $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X_1, X_2 unabhängig.

$$\text{Beispiel 12.3} \quad \Rightarrow \varphi_{X_1}(t) = e^{it\mu_1} e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \qquad \text{(entsprechend für } X_2\text{)}$$

$$\text{Satz 12.2:} \quad \varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) = e^{it(\mu_1+\mu_2)} \cdot e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

$\overset{Satz 12.4}{\Longrightarrow} X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ (vgl. Beispiel 9.4 bzw. Übung)

Satz 12.5 (Stetigkeitssatz bei charakteristischen Funktionen)
Es sei (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $F_{X_n}(x)$ und charakteristischen Funktionen $\varphi_{X_n}(t)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $X_n \xrightarrow{d} X$

b) $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$ *und φ ist stetig in 0.*

In diesem Fall ist φ die charakteristische Funktion von X.

ohne Beweis