

# Kapitel 10

## Erzeugende Funktionen

In diesem Kapitel sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine diskrete Zufallsvariable mit Zähldichte  $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , also  $p_X(k) = P(X = k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$

### Definition 10.1

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Zufallsvariable mit Zähldichte  $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ . Die Funktion  $g_X : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) s^k = E s^X$$

heißt *erzeugende Funktion von X*.

### Bemerkung 10.1

a)  $g_X(s)$  ist wohldefiniert für  $|s| \leq 1$ , da

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) |s|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$$

Insbesondere:  $g_X(1) = 1$

b)  $g_X^{(n)}(s)$  ist wohldefiniert für  $s \in (-1, 1)$

c) Es gilt:

$$p_X(k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

Es sei  $g_X(s^-) = \lim_{z \uparrow s} g_X(z)$  „linksseitiger Grenzwert“

### Satz 10.1

Besitzt die  $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariable  $X$  die erzeugende Funktion  $g_X$ , so gilt:

a)  $EX = g_X'(1^-)$ , falls  $EX$  existiert

b)  $\text{Var}(X) = g_X''(1^-) + g_X'(1^-) - (g_X'(1^-))^2$  falls  $\text{Var}(X)$  existiert.

**Beweis**

a)

$$g'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k)k \cdot s^{k-1} \xrightarrow{s \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k)k = EX$$

b) ähnlich

**Beispiel 10.1**Sei  $X \sim B(n, p)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (0, 1)$ 

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Es gilt:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k = (sp + 1 - p)^n$$

$$g'_X(s) = n(sp + 1 - p)^{n-1} p$$

$$g''_X(s) = n(n-1)(sp + 1 - p)^{n-2} p^2$$

Also:

$$EX = g'_X(1^-) = np$$

$$\text{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

**Satz 10.2 (Eindeutigkeitssatz für erzeugende Funktionen)**

Sind  $X$  und  $Y$  zwei diskrete Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathbb{N}_0$ , Zähldichten  $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\{p_Y(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  und erzeugenden Funktionen  $g_X(s)$ ,  $g_Y(s)$ , so gilt:

$$p_X(k) = p_Y(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \iff g_X(s) = g_Y(s) \quad \forall s \in [-1, 1]$$

**Beweis**

Identitätssatz für Potenzreihen.

**Satz 10.3**

Sind  $X$  und  $Y$  zwei unabhängige, diskrete Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathbb{N}_0$ , dann gilt:

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s) \cdot g_Y(s) \quad \forall s \in [-1, 1]$$

**Beweis**Für  $s \in [-1, 1]$  gilt:

$$\begin{aligned} g_{X+Y}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot P(X+Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{s^k}^{=s^i s^{k-i}} \sum_{i=0}^k \underbrace{P(X=i, Y=k-i)}_{\substack{X, Y \text{ unabh.} \\ \implies P(X=i) \cdot P(Y=k-i)}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k s^i P(X=i) s^{k-i} P(Y=k-i) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} s^i P(X=i) \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(Y=j) \right) \\ &= g_X(s) \cdot g_Y(s) \end{aligned}$$

**Beispiel 10.2**

Es sei  $X \sim B(n, p)$ ,  $Y \sim B(m, p)$ ,  $X$  und  $Y$  unabhängig.

Mit Beispiel 10.1 gilt:  $g_X(s) = (sp + 1 - p)^n$ ,  $g_Y(s) = (sp + 1 - p)^m$

Also folgt mit Satz 10.3:

$$g_{X+Y}(s) = (sp + 1 - p)^{n+m} \Rightarrow X + Y \sim B(n + m, p)$$

Insbesondere ist  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , wobei  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und identisch verteilt mit  $X_i \sim B(1, p)$

**Beispiel 10.3 (Ruinspiel)** • Spieler I besitzt  $n$  Euro

- Spieler II besitzt  $(N - n)$  Euro
- Pro Runde: Spieler I gewinnt von Spieler II einen Euro mit Wahrscheinlichkeit  $p$ , sonst verliert er einen Euro an Spieler II
- Die Runden sind unabhängig
- Gespielt wird bis ein Spieler pleite ist

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler I gewinnt? Sei dabei  $N \in \mathbb{N}$  fest. Wir definieren die Ereignisse  $A_n$  = Spieler I gewinnt bei Anfangskapital  $n$  und  $B$  = Spieler I gewinnt die erste Runde. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$P(A_n) = P(A_n|B) \cdot P(B) + P(A_n|B^c) \cdot P(B^c) \text{ für } 0 < n < N$$

Sei  $p_n := P(A_n)$ :  $p_n = p_{n+1} \cdot p + p_{n-1} \cdot (1 - p)$ ,  $0 < n < N$  und  $p_0 = 0$  und  $p_N = 1$ . Die ist eine sogenannte Differenzengleichung. Sei  $\rho := \frac{1-p}{p}$  und  $\rho \neq 1$  (d.h.  $p \neq \frac{1}{2}$ ).

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1 + \rho)p_n - \rho p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \\ s^{n+1}p_{n+1} &= (1 + \rho)s^{n+1}p_n - \rho s^{n+1}p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Sei  $\hat{g}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) - p_1 \cdot s &= (1 + \rho)s\hat{g}(s) - \rho s^2\hat{g}(s) \\ \Rightarrow \hat{g}(s) &= \frac{p_1 \cdot s}{1 - (1 + \rho)s + \rho s^2} = \frac{p_1}{\rho - 1} \left( \frac{1}{1 - \rho s} - \frac{1}{1 - s} \right) \\ &= \frac{p_1}{\rho - 1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (\rho s)^k - \sum_{k=0}^{\infty} s^k \right) \\ \Rightarrow p_n &= \frac{p_1}{s - 1} (\rho^n - 1) \end{aligned}$$

Randbedingung:  $p_N = 1$  ergibt  $p_1 = \frac{\rho - 1}{\rho^N - 1}$ . Insgesamt:

$$p_n = \frac{\rho^n - 1}{\rho^N - 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Bei  $\rho = 1$ :

$$p_n = \frac{n}{N}, \quad n = 1, 2, \dots$$

