21. Die Eulersche Differentialgleichung

Darunter versteht man eine Differentialgleichung der Form

(i) $x^m y^{(m)} + a_{m-1}x^{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$ mit $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$

Wir suche Lösungen von (i) auf $(0,\infty)$. Beachte: Ist $y : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (i) auf $(0,\infty) \Rightarrow z(x) := y(-x)$ ist eine Lösung von (i) auf $(-\infty, 0)$.

Satz 21.1 (Lösungsansatz)
Sei also $x > 0$. Substituiere $x = e^t$ und setze $u(t) := y(e^t) = y(x)$, also $y(x) = u(\log x)$ Dann:

$u'(t) = y'(e^t)e^t = y'(x) \cdot x = x \cdot y'(x)$

$u''(t) = y''(e^t)(e^{2t}) + e^t y'(e^t) = y''(x) \cdot x^2 + x \cdot y'(x) = x^2 \cdot y'' + x \cdot y'$

etc.

Dies führt auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für u:

Übung: Ist $y : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $u(t) := y(e^t), t \in \mathbb{R}$, so gilt: y ist eine Lösung von (i) auf $(0,\infty) \Leftrightarrow u$ ist eine Lösung von (ii) auf $\mathbb{R}$.

Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung:

(iii) $x^m y^{(m)} + a_{m-1}x^{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = b(x)$

Diese Gleichung heißt ebenfalls Eulersche Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung von (iii) erhält man wie folgt:

Setze $x = e^t$ und bestimme die allg. Lösung von $u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u = b(e^t)$. Setze in der allgemeinen Lösung dieser Gleichung $t = \log x$.

Beispiel

(1) $x^2 y'' - 3xy' + 7y = 0(*)$

Setze $x = e^t$, $u(t) = y(e^t)$

Dann (s.o.):

$u'(t) = xy'(x)$

$u''(t) = x^2 y''(x) + xy'(x) = x^2 y''(x) + u'(t)$

$\Rightarrow x^2y''(x) = u''(t) - u'(t)$

$\Rightarrow u'' - u' - 3u' + 7u = u'' - 4u' + 7u = 0$

Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 7 = (\lambda - (2 + i\sqrt{3}))(\lambda - (2 - i\sqrt{3}))$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 \cdot x^2 \cos(\sqrt{3} \log x) + c_2 \cdot x^2 \sin(\sqrt{3} \log x)$ für $x > 0$, $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

(2) $x^2y'' - 7xy' + 15y = x(**)$

Setze $x = e^t$, $u(t) = y(e^t) \Rightarrow u'' - 8u' + 15u = e^x$

Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung: $u(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{5t} + \frac{1}{8}e^t$

Die allgemeine Lösung von $(**)$: $y(x) = c_1x^3 + c_2x^5 + \frac{1}{8}x$ $(x > 0; c_1, c_2 \in \mathbb{R})$