

## 4 Übung vom 19.05.

### 9. Aufgabe

**Gegeben:**  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{Rang } A \leq k$  und ein LP

$f$	$=$	$\max$
$Ax$	$=$	$b$
$x$	$\geq$	$0$

**zu zeigen:** Existiert ein zulässiger Punkt  $x$ , so gibt es auch einen zulässigen Punkt  $y$  mit höchstens  $n+1$  positiven Komponenten und  $f(x) = f(y)$ .

**Beweis:**

Es sei  $x$  ein zulässiger Punkt von (LP) und  $f = \langle p, \cdot \rangle$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ .

Wir setzen

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ p^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}, \quad \tilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

und  $\tilde{M} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}y = \tilde{b}, y \geq 0\}$ .  $\tilde{M} \neq \emptyset$  (da  $x \in \tilde{M}$ ), polyedrisch und geradenfrei (wegen der Vorzeichenbedingung).

Satz d. V.  $\tilde{M}$  besitzt eine Ecke, wir bezeichnen diese als  $y$

Satz d. V. mit  $\tilde{A} = (a^1 \mid \dots \mid a^n)$  ist  $\{a^i \mid y_i > 0\}$  l.u.

Aus der Voraussetzung ergibt sich  $\text{Rang } \tilde{A} \leq \text{Rang } A + 1 \leq k + 1$ .

Dann folgt  $|\{a^i \mid y_i > 0\}| \leq k + 1$  (weil die Menge l.u. sein soll), und wir erhalten: Höchstens  $k+1$  der  $y_i$  können echt größer als Null sein.

Für  $y$  gilt:  $Ay = b$ ,  $f(y) = f(x)$ ,  $y \geq 0$  (da  $y$  zulässiger Punkt ist)

Und wir haben die Aufgabe gelöst. :)

## 10. Aufgabe

(a)

$$\begin{aligned}
 Ax = 0, x \geq 0, x \neq 0 \text{ lösbar} &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -A & & & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{array} \right) \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{x} \geq 0 \text{ lösbar} \\
 &\stackrel{\text{Farkas}}{\Leftrightarrow} \left( \begin{array}{ccc|c} -A^T & & & 1 \\ & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 \end{array} \right) u \geq 0, \langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u \rangle < 0 \text{ unlösbar} \\
 &\stackrel{\text{NR}}{\Leftrightarrow} A^T \tilde{u} \leq \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} \text{ für alle } t < 0 \text{ unlösbar} \\
 &\Leftrightarrow A^T \tilde{u} < 0 \text{ unlösbar}
 \end{aligned}$$

NR:

$$A = (a_1 | \dots | a_n), u = \left( \frac{\tilde{u}}{t} \right)$$

Dann folgt (aus der ersten „Ungleichung“): für  $i = 1, \dots, n$

$$-a_i^T \cdot \tilde{u} + t \geq 0 \Leftrightarrow a_i^T \tilde{u} \leq t$$

[Die nächste Zeile folgt dann, wenn man noch die zweite „Ungleichung“ beachtet.]

(b) Es sei  $A = (a^1 | \dots | a^n)$ .

$$\begin{aligned}
 [A^T u \leq 0, A^T u \neq 0 \text{ lösbar} &\Leftrightarrow Ax = 0, x > 0 \text{ unlösbar}] \\
 \Leftrightarrow [A^T u \leq 0, A^T u \neq 0 \text{ unlösbar} &\Leftrightarrow Ax = 0, x > 0 \text{ lösbar}]
 \end{aligned}$$

$$A^T u \leq 0, A^T u \neq 0 \text{ unlösbar}$$

$$\Leftrightarrow A^T u \leq 0 \text{ und } (\langle a^1, u \rangle < 0 \text{ oder } \dots \text{ oder } \langle a^n, u \rangle < 0) \text{ unlösbar}$$

$$\Leftrightarrow \text{Keines der folgenden Systeme ist lösbar für } i = 1, \dots, n:$$

$$\boxed{
 \begin{array}{rcl}
 -A^T u & \geq & 0 \\
 \langle a^i, u \rangle & < & 0
 \end{array}
 }$$

$\stackrel{\text{Farkas}}{\Leftrightarrow}$  Jedes der folgenden Systeme ist lösbar ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$\boxed{
 \begin{array}{rcl}
 -Ax & = & a^i \\
 x & \geq & 0
 \end{array}
 }$$

$\stackrel{\text{NR}}{\Leftrightarrow} Ax = 0, x > 0$  lösbar

NR:

(i) Seien die Systeme

$$\begin{array}{rcl} -Ax & = & a^i \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

$i = 1, \dots, n$  lösbar und sei  $x^i$  eine entsprechende Lösung.

$$x := x^1 + \dots + x^n + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

Dann gilt:  $Ax = -a^1 - \dots - a^n + a^1 + \dots + a^n = 0$

(ii) Sei  $x > 0$  eine Lösung von  $Ax = 0$  mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x_1 a^1 + \dots + x_n a^n = 0 \quad (*)$$

Sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Aus (\*) erhalten wir

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x_j}{x_i} a^j = -a^i$$

Wir setzen

$$x^i := \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 0, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \geq 0$$

und es gilt:  $Ax^i = -a^i \Leftrightarrow -Ax^i = a^i$

## 11. Aufgabe

$V$  sei ein endlich erzeugter Kegel, d.h. es existieren  $y^1, \dots, y^k \in \mathbb{S}^{n-1}$  mit  $V = \{\alpha_1 y^1 + \dots + \alpha_k y^k \mid \alpha_i \geq 0\}$   
 $[S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\} \text{ Einheitssphäre}]$  a)

$$\begin{aligned} V^\circ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \alpha_1 y^1 + \dots + \alpha_k y^k \rangle \leq 0 \text{ für alle } \alpha_i \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y^i \rangle \leq 0 \text{ für } i = 1, \dots, k\} \\ &= \bigcap_{i=1}^k \{\langle \cdot, y^i \rangle \leq 0\} \quad (+) \end{aligned}$$

$V^\circ$  ist nicht leer ( $0 \in V^\circ$ ), polyedrisch und ein Kegel.

Wir definieren

$$L := \bigcup_{\substack{g \text{ Gerade} \\ g \subset V^\circ}} g$$

Dann ist  $L$  ein linearer Unterraum.

( $\forall x, y \in V^\circ : x + y \in V^\circ$ , da  $x + y = 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \in V^\circ$ ) (\*)

$L$  ist endlich erzeugt.

Wir definieren weiter:  $U := V^\circ \cap L^\perp$ .

Dann gilt:  $U$  ist nicht leer, polyedrisch und geradenfrei. Damit ist  $U$  endlich erzeugt (Satz der Vorlesung).

Noch zu zeigen:  $V^\circ = L + U$  (dann ist  $V^\circ$  endlich erzeugt)

Klar:  $L + U \subset V^\circ$  wegen (+)

Sei also  $x \in V^\circ$  und  $z := p_{L^\perp}(x)$  (Orthogonalprojektion).

Dann gilt:  $z - x \in L$  und  $z = \underbrace{x}_{\in V^\circ} + \underbrace{(z - x)}_{\in V^\circ} \in V^\circ$  wegen (\*)

Dann ist  $z \in U$  und  $x = \underbrace{z}_{\in U} + \underbrace{(x - z)}_{\in L} \in U + L$

b) Es gilt  $V = \{\alpha_1 y^1 + \dots + \alpha_k y^k \mid \alpha_i \geq 0\}$  und  $A = (y^1 \mid \dots \mid y^k)$ .

$$\begin{aligned} b \in V^{\circ\circ} &\Leftrightarrow \langle b, z \rangle \leq 0 \text{ für alle } z \in V^\circ \\ &\Leftrightarrow [\langle z, y^i \rangle \leq 0 \text{ für } i = 1, \dots, k \Rightarrow \langle b, z \rangle \leq 0] \\ &\stackrel{u := -z}{\Leftrightarrow} [A^T u \geq 0 \Rightarrow \langle b, u \rangle \geq 0] \\ &\stackrel{\text{Farkas}}{\Leftrightarrow} \exists x \geq 0, x = (x_1, \dots, x_k) : Ax = b \\ &\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_k \geq 0 : b = x_1 y^1 + \dots + x_k y^k \\ &\Leftrightarrow b \in V \end{aligned}$$

## 12. Aufgabe

$$\begin{array}{cc} \text{(PP)} & \boxed{\begin{array}{rcl} f(x) = \langle x, p \rangle & = & \max \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}} & \text{(DP)} & \boxed{\begin{array}{rcl} g(u) = \langle u, b \rangle & = & \min \\ A^T u & \geq & p \\ u & \geq & 0 \end{array}} \end{array}$$

Wählt man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

so sind (PP) und (DP) beide nicht lösbar.

$$\begin{array}{l} \text{(PP)} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} f(x)=x_2 & = & \max \\ x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 + x_2 & \leq & -1 \\ x & \geq & 0 \end{array}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(DP)} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} g(u)=-u_2 & = & \min \\ u_1 - u_2 & \geq & 0 \\ -u_1 + u_2 & \geq & 1 \\ u & \geq & 0 \end{array}} \end{array}$$

**Anmerkung:** Beide haben keine zulässigen Punkte. Die beiden Nebenbedingungen schließen sich jeweils gegenseitig aus.