

## § 3 Messbare Funktionen

In diesem Paragraphen seien  $\emptyset \neq X, Y, Z$  Mengen.

### Definition

Ist  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , so heißt  $(X, \mathfrak{A})$  ein **messbarer Raum**.

### Definition

Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ ,  $\mathfrak{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  und  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion.  $f$  heißt genau dann  **$\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}$ -messbar**, wenn gilt:

$$\forall B \in \mathfrak{B} : f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$$

**Bemerkung:** Seien die Bezeichnungen wie in obiger Definition, dann gilt:

- (1)  $f$  sei  $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}$ -messbar,  $\mathfrak{A}'$  eine weitere  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  mit  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$  und  $\mathfrak{B}'$  sei eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  mit  $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ .  
Dann ist  $f$   $\mathfrak{A}'$ - $\mathfrak{B}'$ -messbar.
- (2) Sei  $X_0 \in \mathfrak{A}$ , dann gilt  $\mathfrak{A}_{X_0} \subseteq \mathfrak{A}$  nach 1.5. Nun sei  $f : X \rightarrow Y$   $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}$ -messbar, dann ist  $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$   $\mathfrak{A}_{X_0}$ - $\mathfrak{B}$ -messbar.

### Beispiel

- (1) Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  und  $A \subseteq X$ .  $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann  $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}_1$ -messbar, wenn  $A \in \mathfrak{A}$  ist.
- (2) Sei  $X = \mathbb{R}^d$ . Ist  $A \in \mathfrak{B}_d$ , so ist  $\mathbb{1}_A$   $\mathfrak{B}_d$ - $\mathfrak{B}_1$ -messbar.
- (3) Ist  $C$  wie in 2.11, so ist  $\mathbb{1}_C$  nicht  $\mathfrak{B}_d$ - $\mathfrak{B}_1$ -messbar.
- (4) Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion und  $\mathfrak{B}$  ( $\mathfrak{A}$ ) eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  ( $X$ ), dann ist  $f$   $\mathcal{P}(X)$ - $\mathfrak{B}$ -messbar ( $\mathfrak{A}$ - $\{Y, \emptyset\}$ -messbar).

### Satz 3.1

Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$   $\sigma$ -Algebren auf  $X, Y$  bzw.  $Z$ . Weiter seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Funktionen.

- (1) Ist  $f$   $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}$ -messbar und ist  $g$   $\mathfrak{B}$ - $\mathfrak{C}$ -messbar, so ist  $g \circ f : X \rightarrow Z$   $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{C}$ -messbar.
- (2) Sei  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$  und  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}$ . Dann:

$$f \text{ ist } \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \text{-messbar, genau dann, wenn gilt: } \forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}$$

### Beweis

- (1) Sei  $C \in \mathfrak{C}$ ;  $g$  ist messbar, daraus folgt  $g^{-1}(C) \in \mathfrak{B}$ ;  $f$  ist messbar, daraus folgt  $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$

(2)  $\Rightarrow \checkmark$

$\Leftarrow \mathfrak{D} := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$  Übung:  $\mathfrak{D}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ .

Aus der Voraussetzung folgt:  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}$ . Dann:  $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}$ . Ist  $B \in \mathfrak{B}$ , so ist  $B \in \mathfrak{D}$ , also  $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ . ■

### Definition

Sei  $X \in \mathfrak{B}_d$ . Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$   $\mathfrak{B}(X) - \mathfrak{B}_k$ -messbar, so heißt  $f$  **(Borel-)messbar**.

Ab jetzt sei stets  $X \in \mathfrak{B}_d$ . (Erinnerung:  $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d \mid A \subseteq X\}$ )

### Satz 3.2

Seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- (1) Ist  $f$  auf  $X$  stetig, so ist  $f$  messbar.
- (2) Ist  $f = (f_1, \dots, f_k)$ , so gilt:  $f$  ist messbar  $\Leftrightarrow$  alle  $f_j$  sind messbar.
- (3) Sind  $f$  und  $g$  messbar, so ist  $\alpha f + \beta g$  messbar.
- (4) Sei  $k = 1$  und  $f$  und  $g$  seien messbar. Dann:
  - (i)  $fg$  ist messbar
  - (ii) Ist  $f(x) \neq 0 \forall x \in X$ , so ist  $\frac{1}{f}$  messbar
  - (iii)  $\{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} \in \mathfrak{B}(X)$

### Beweis

- (1) Sei  $G \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^k)$ . Mit  $f$  stetig folgt:  $f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(X) \in \mathfrak{B}(X)$

$\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^k)) = \mathfrak{B}_k$ . Die Behauptung folgt aus 3.1.(2).

- (2)  $\Leftarrow$ : Sei  $I = (a, b] = \prod_{j=1}^k (a_j, b_j] \in I_k$  ( $a = (a_1, \dots, a_k)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_k)$ ,  $a \leq b$ )

$$\text{Dann: } f^{-1}(I) = \bigcap_{j=1}^k f_j^{-1}(\underbrace{(a_j, b_j]}_{\substack{\in \mathfrak{B}_1 \\ \in \mathfrak{B}(X)}}) \in \mathfrak{B}(X)$$

Aus  $\sigma(I_k) = \mathfrak{B}_k$  folgt mit 3.1.(2):  $f$  ist messbar.

$\Rightarrow$ : Für  $j = 1, \dots, k$  sei  $p_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $p_j(x_1, \dots, x_k) := x_j$

$p_j$  ist stetig, also messbar (nach (1)). Es ist  $f_j = p_j \circ f$ . Mit 3.1.(1) folgt:  $f_j$  ist messbar.

- (3)  $h := (f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ ; aus (2):  $h$  ist messbar.

$$\varphi(x, y) := \alpha x + \beta y \quad (x, y \in \mathbb{R}^k)$$

$\varphi$  ist stetig, also messbar (nach (1)). Es ist  $\alpha f + \beta g = \varphi \circ h$ . Mit 3.1.(1) folgt:  $\alpha f + \beta g$  ist messbar.

- (4) (i)  $h := (f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  ist messbar (nach (2));  $\varphi(x, y) := xy$ ,  $\varphi$  ist stetig, also messbar.

Es ist  $fg = \varphi \circ h$ . Mit 3.1.(1) folgt:  $fg$  ist messbar.

- (ii)  $\varphi(x) := \frac{1}{x}$ ,  $\varphi$  ist stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , also messbar.

$\frac{1}{f} = \varphi \circ f$ . Mit 3.1.(1) folgt:  $\frac{1}{f}$  ist messbar.

- (iii)  $A := \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X \mid f(x) - g(x) \in [0, \infty)\} = \underbrace{(f - g)^{-1}}_{\text{messbar nach (3)}} \left( \overbrace{[0, \infty)}^{\in \mathfrak{B}_1} \right) \in \mathfrak{B}(X)$  ■

### Folgerungen 3.3

- (1) Seien  $A, B \in \mathfrak{B}(X)$ ,  $A \cap B = \emptyset$  und  $X = A \cup B$ . Weiter seien  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$  messbar. Dann ist  $h : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ , definiert durch

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases},$$

messbar.

- (2) Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  messbar und  $g(x) := \|f(x)\|$  ( $x \in X$ ), so ist  $g$  messbar.

### Beweis

- (1) Sei  $C \in \mathfrak{B}_k$ . Dann:

$$h^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}(A) \subseteq \mathfrak{B}(X)} \cup \underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}(B) \subseteq \mathfrak{B}(X)} \in \mathfrak{B}(X)$$

- (2) Definiere  $\varphi(z) = \|z\|$  ( $z \in \mathbb{R}^k$ );  $\varphi$  ist stetig, also messbar.

Es ist  $g = \varphi \circ f$ . Mit 3.1 folgt:  $g$  ist messbar. ■

### Beispiel

$$X = \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(y)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

für  $x \neq 0$ :  $f(x, x) = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \neq 0 = f(0, 0)$ , daraus folgt:  $f$  ist nicht stetig.

$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ ,  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ ,  $X = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ .  $A$  ist abgeschlossen, das heißt:  $A \in \mathfrak{B}_2$ ,  $B = A^C \in \mathfrak{B}_2$

$$f_1(x, y) := 0 \quad ((x, y) \in A)$$

$$f_2(x, y) := \frac{\sin(y)}{x} \quad ((x, y) \in B)$$

$f_1$  ist stetig auf  $A$ ,  $f_2$  ist stetig auf  $B$ . Also:  $f_1, f_2$  ist messbar; mit 3.3.(1) folgt:  $f$  ist messbar.

**Ein neues Symbol kommt hinzu:**  $-\infty$

$$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

In  $\overline{\mathbb{R}}$  gelten folgende Regeln, wobei  $a \in \mathbb{R}$ :

$$(1) \quad -\infty < a < +\infty$$

$$(2) \quad \pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(3) \quad \pm\infty + a := a + (\pm\infty) := \pm\infty$$

$$(4) \quad a \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ \mp\infty & a < 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad \frac{a}{\pm\infty} := 0$$

**Definition**

(1) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$ .  $x_n \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R} \exists n_c \in \mathbb{N} : x_n \geq c \forall n \geq n_c$   
Analog für  $-\infty$ .

(2) Seien  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann:

$$\{f \leq g\} := \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$$

$$\{f \geq g\} := \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\}$$

$$\{f \neq g\} := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

$$\{f < g\} := \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$$

$$\{f > g\} := \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$$

(3) Sei  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann:

$$\{f \leq a\} := \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$$

$$\{f \geq a\} := \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$

$$\{f \neq a\} := \{x \in X \mid f(x) \neq a\}$$

$$\{f < a\} := \{x \in X \mid f(x) < a\}$$

$$\{f > a\} := \{x \in X \mid f(x) > a\}$$

**Definition**

$\overline{\mathfrak{B}}_1 := \{B \cup E \mid B \in \mathfrak{B}_1, E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$ . Dann:  $\mathfrak{B}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{B}}_1$

Übung:  $\overline{\mathfrak{B}}_1$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}$ .

$\overline{\mathfrak{B}}_1$  heißt **Borelsche  $\sigma$ -Algebra** auf  $\overline{\mathbb{R}}$ . Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .  $f$  heißt **(Borel-)messbar** (mb) :  $\Leftrightarrow f$  ist  $\mathfrak{B}(X) - \overline{\mathfrak{B}}_1$ -messbar.

**Beispiel**

$f(x) := +\infty \quad (x \in X)$ , also:  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Sei  $B \in \overline{\mathfrak{B}}_1$ ,  $A := f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Fall 1:  $+\infty \notin B$ , dann:  $A = \emptyset \in \mathfrak{B}(X)$

Fall 2:  $+\infty \in B$ , dann:  $A = X \in \mathfrak{B}(X)$

$f$  ist messbar.

**Satz 3.4**

(1) Definiere die Mengen:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &:= \{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{Q}\} & \mathcal{E}_2 &:= \{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\} \\ \mathcal{E}_3 &:= \{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{Q}\} & \mathcal{E}_4 &:= \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\overline{\mathfrak{B}_1} = \sigma(\mathcal{E}_j) \quad \text{für } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

(2) Für  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $f$  ist messbar.
- (ii)  $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{B}(X)$ .
- (iii)  $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \geq a\} \in \mathfrak{B}(X)$ .
- (iv)  $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f < a\} \in \mathfrak{B}(X)$ .
- (v)  $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f > a\} \in \mathfrak{B}(X)$ .

(3) Die Äquivalenzen in (2) gelten auch für Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beweis**

Die folgenden Beweise erfolgen exemplarisch für einen der Unterpunkte und funktionieren fast analog für die anderen.

(1) Für  $a \in \mathbb{Q}$  gilt:

$$[-\infty, a]^c = (a, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}_1)$$

D.h. es gilt  $\mathcal{E}_3 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$  und damit auch  $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ .

(2) Es gilt:

$$\{f \leq a\} = \{x \in X \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

Die Äquivalenz folgt dann aus (1) und 3.1.

(3) Die Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  kann aufgefasst werden als Funktion  $\overline{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Es ist  $f$  genau dann  $\mathfrak{B}(X)$ - $\mathfrak{B}_1$ -messbar wenn  $\overline{f}$   $\mathfrak{B}(X)$ - $\overline{\mathfrak{B}_1}$ -messbar ist. ■

**Definition**

Sei  $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ .

(1) Ist  $M = \emptyset$  oder  $M = \{-\infty\}$ , so sei

$$\sup M := -\infty$$

(2) Ist  $M \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$  und nach oben beschränkt (also insbesondere  $\infty \notin M$ ), so sei

$$\sup M := \sup(M \setminus \{-\infty\})$$

### 3. Messbare Funktionen

(3) Ist  $M \setminus \{-\infty\}$  nicht nach oben beschränkt oder  $\infty \in M$ , so sei

$$\sup M := \infty$$

(4) Es sei  $\inf M := -\sup(-M)$ , wobei  $-M := \{-m \mid m \in M\}$ .

#### Definition

Sei  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

(1) Die Funktion  $\sup_{n \in \mathbb{N}}(f_n) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ( $\inf_{n \in \mathbb{N}}(f_n) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ) ist definiert durch:

$$\begin{aligned} (\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) &:= \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad x \in X \\ \left( (\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) &:= \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad x \in X \right) \end{aligned}$$

(2) Die Funktion  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ( $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ) ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n &:= \inf_{j \in \mathbb{N}} (\sup_{n \geq j} f_n) \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n &:= \sup_{j \in \mathbb{N}} (\inf_{n \geq j} f_n) \end{aligned} \quad (*)$$

**Erinnerung:** Für eine beschränkte Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  war

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf\{\sup\{a_n \mid n \geq j\} \mid j \in \mathbb{N}\}$$

(3) Sei  $N \in \mathbb{N}$  und  $g_j := f_j$  (für  $j = 1, \dots, N$ ),  $g_j := f_N$  (für  $j > N$ ). Definiere:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} f_n &:= \sup_{j \in \mathbb{N}} g_j \\ \min_{1 \leq n \leq N} f_n &:= \inf_{j \in \mathbb{N}} g_j \end{aligned}$$

(4) Ist  $f_n(x)$  für jedes  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  konvergent, so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definiert durch:

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

(In diesem Fall gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ .)

#### Satz 3.5

Sei  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und jedes  $f_n$  messbar.

(1) Dann sind ebenfalls messbar:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

(2) Ist  $(f_n(x))$  für jedes  $x \in X$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  konvergent, so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbar.

### Beweis

(1) Sei  $a \in \mathbb{Q}$ , dann gilt (nach 3.4(2)):

$$\{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\} \in \mathfrak{B}(X)$$

Also ist  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  messbar. Analog lässt sich die Messbarkeit von  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$  zeigen, der Rest folgt dann aus (\*).

(2) Folgt aus (1) und obiger Bemerkung in der Definition. ■

### Beispiel

Sei  $X = I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf  $I$  differenzierbar.

Für  $x \in I, n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n := n(f(x - \frac{1}{n}) - f(x))$ . Da  $f$  stetig ist, ist auch jedes  $f_n$  stetig, also insbesondere messbar und es gilt:

$$f_n(x) = \frac{f(x - \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)$$

Aus 3.5(2) folgt, dass  $f'$  messbar ist.

### Definition

Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion.

- (1)  $f_+ := \max\{f, 0\}$  heißt **Positivteil** von  $f$ .
- (2)  $f_- := \max\{-f, 0\}$  heißt **Negativteil** von  $f$ .

Es gilt  $f_+, f_- \geq 0$ ,  $f = f_+ - f_-$  und  $|f| = f_+ + f_-$ .

### Satz 3.6

Seien  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- (1) Sind  $f, g$  messbar und ist  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  für jedes  $x \in X$  definiert, so ist  $\alpha f + \beta g$  messbar.
- (2) Sind  $f, g$  messbar und ist  $f(x)g(x)$  für jedes  $x \in X$  definiert, so ist  $fg$  messbar.
- (3)  $f$  ist genau dann messbar, wenn  $f_+$  und  $f_-$  messbar sind. In diesem Fall ist auch  $|f|$  messbar.

### Beweis

(1)+(2) Für alle  $n \in \mathbb{N}, x \in X$  seien  $f_n$  und  $g_n$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \max\{-n, \min\{f(x), n\}\} \\ g_n(x) &:= \max\{-n, \min\{g(x), n\}\} \end{aligned}$$

Dann sind  $f_n(x), g_n(x) \in [-n, n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}, x \in X$ . Nach 3.2(3) sind also  $\alpha f_n + \beta g_n$  und  $f_n g_n$  messbar. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \alpha f_n(x) + \beta g_n(x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha f(x) + \beta g(x) \\ f_n(x) g_n(x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) g(x) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus 3.5(2).

### 3. Messbare Funktionen

- (3) Nach 3.5(1) sind  $f_+$  und  $f_-$  messbar, wenn  $f$  messbar ist. Die umgekehrte Implikation folgt aus 3.6(1). Sind  $f_+$  und  $f_-$  messbar, so folgt ebenfalls aus 3.6(1), dass  $|f| = f_+ + f_-$  messbar ist. ■

#### Beispiel

Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  wie in 2.11, also  $C \notin \mathfrak{B}_d$ . Definiere  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in C \\ -1 & , x \notin C \end{cases}$$

Dann ist  $\{f \geq 1\} = C$ , also  $f$  **nicht** messbar. Aber für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  ist  $|f(x)| = 1$ , also  $|f| = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$  und damit messbar.

#### Definition

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei messbar.

- (1)  $f$  heißt **einfach** oder **Treppenfunktion**, genau dann wenn  $f(X)$  endlich ist.
- (2)  $f$  sei einfach und  $f(X) = \{y_1, \dots, y_m\}$  mit  $y_i \neq y_j$  für  $i \neq j$ . Sei weiter  $A_j := f^{-1}(\{y_j\})$  für  $j = 1, \dots, m$ . Dann sind  $A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{B}(X)$  und  $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$  disjunkte Vereinigung.

$$f = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

heißt **Normalform** von  $f$ .

#### Beispiel

Sei  $A \in \mathfrak{B}(X)$ . Definiere:

$$f := \mathbb{1}_A = 2 \cdot \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_X + \mathbb{1}_{X \setminus A} = \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}$$

Wobei das letzte die Normalform von  $f$  ist. Man sieht also, dass einfache Funktionen mehrere Darstellungen haben können.

#### Satz 3.7

Linearkombinationen und Produkte, sowie endliche Maxima und Minima einfacher Funktionen, sind einfach.

#### Satz 3.8

Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar.

- (1) Ist  $f \geq 0$  auf  $X$ , so existiert eine Folge  $(f_n)$  von einfachen Funktionen  $f_n : X \rightarrow [0, \infty)$ , sodass  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  auf  $X$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) und  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  ( $\forall x \in X$ ). In diesem Fall heißt  $(f_n)$  **zulässig** für  $f$ .
- (2) Es existiert eine Folge  $(f_n)$  von einfachen Funktionen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $|f_n| \leq |f|$  auf  $X$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) und  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  ( $\forall x \in X$ ).
- (3) Ist  $f$  beschränkt auf  $X$  (also insbesondere  $\pm\infty \notin f(X)$ ), so kommt in (2) noch hinzu, dass  $(f_n)$  auf  $X$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.



**Folgerungen 3.9 ((Beweis mit 3.8(2) und 3.5))**

Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion, dann ist  $f$  genau dann messbar, wenn eine Folge einfacher Funktionen  $(f_n)$  mit  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  für alle  $x \in X$  existiert.

**Beweis**

(1) Für  $n \in \mathbb{N}$  definiere  $\varphi_n : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty)$  durch

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} & , 0 \leq t < n \\ n & , n \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Dann ist  $\varphi_n (\mathfrak{B}_1)_{[0, \infty]}$ - $\mathfrak{B}_1$ -messbar, außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \infty] \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq t \\ \forall t \in [0, n] \forall n \in \mathbb{N} : t - \frac{1}{2^n} \leq \varphi_n(t) \leq t \end{aligned}$$

und es ist  $\varphi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$  für alle  $t \in [0, \infty]$ . Setze  $f_n := \varphi_n \circ f$ . Dann leistet  $(f_n)$  das gewünschte.

(2) Es ist  $f = f_+ - f_-$  und  $f_+, f_- \geq 0$  auf  $X$ . Seien  $(g_n), (h_n)$  zulässige Folgen für  $f_+$  bzw.  $f_-$ . Definiere  $f_n := g_n - h_n$ . Dann ist klar, dass gilt:

$$\forall x \in X : f_n(x) = g_n(x) - h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_+(x) - f_-(x) = f(x)$$

Weiter gilt:

$$|f_n| \leq g_n + h_n \leq f_+ + f_- = |f|$$

(3) Ohne Beweis. ■

