

# 13. Isolierte Singularitäten

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei stets  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in D$ ,  $\dot{D} := D \setminus \{z_0\}$  und  $f \in H(\dot{D})$ .

$z_0$  heißt dann eine **isolierte Singularität** von  $f$ .

## Definition

$z_0$  heißt eine **hebbare Singularität** von  $f : \Leftrightarrow \exists h \in H(D) : h = f$  auf  $\dot{D}$ . I.d. Fall ist  $h$  eindeutig bestimmt und wir sagen kurz:  $f \in H(D)$ .

## Beispiel

$D = \mathbb{C}, z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \dots \right) = \underbrace{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + \dots}_{=: h(z)}$$

Dann:  $h \in H(\mathbb{C})$ .  $h = f$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $f$  hat also in 0 eine hebbare Singularität.

## Satz 13.1 (Riemannscher Hebbbarkeitssatz)

$f$  hat in  $z_0$  eine hebbare Singularität  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $f$  ist auf  $\dot{U}_\delta(z_0)$  beschränkt.

## Beweis

$\Rightarrow$ : klar

$\Leftarrow$ :  $M := \sup_{z \in U_\delta(z_0)} |f(z)|$ . Def:  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch:

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & , z \in \dot{D} \\ 0 & , z = z_0 \end{cases}$$

Für  $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right| = \left| \frac{g(z)}{z - z_0} \right| = |f(z)(z - z_0)| \leq M|z - z_0|$

$\Rightarrow g$  ist komplex db in  $z_0$ , also  $g \in H(D)$  und  $g'(z_0) = 0$ .

Fall 1:  $g = 0$  auf  $D$ . Dann:  $f = 0$  auf  $\dot{D}$

Fall 2:  $g \neq 0$  auf  $D$ . Es ist  $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ . 11.8  $\Rightarrow \exists h \in H(D) : g(z) = (z - z_0)^2 h(z) \forall z \in D$ .

Dann:  $h = f$  auf  $\dot{D}$ . ■

**Satz 13.2**

$z_0$  ist ein **Pol** von  $f : \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \exists g \in H(D)$  mit:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \forall z \in \dot{D} \text{ und } g(z_0) \neq 0.$$

I. d. Fall ist  $m$  eindeutig bestimmt und heißt die **Ordnung des Pols**  $z_0$  von  $f$

**Beweis**

Seien  $m, l \in \mathbb{N}$ ,  $g, h \in H(D)$ ,  $g(z_0) \neq 0 \neq h(z_0)$  und  $\frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^l} \quad \forall z \in \dot{D}$ .

Annahme:  $m > l$ , also  $m - l \geq 1$ .  $h(z_0) \neq 0$ .  $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $h(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_\delta(z_0)$ .

Für  $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \frac{g(z)}{h(z)} = (z - z_0)^{m-l} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} g(z_0) = 0$ . Wid! Also:  $m \leq l$ . Analog:  $l \leq m$ . ■

**Satz 13.3**

Hat  $f$  in  $z_0$  einen Pol, so gilt:  $|f(z)| \rightarrow \infty (z \rightarrow z_0)$

**Beweis**

Folgt aus 13.2 ■

**Beispiele:**

(1)  $f(z) = \frac{1}{z}$ .  $f$  hat im Nullpunkt einen einfachen Pol.

(2)  $f(z) = \frac{e^z}{z^{17}}$ .  $f$  hat in 0 einen Pol der Ordnung 17.

**Definition**

$z_0$  heißt eine **wesentliche Singularität** von  $f : \Leftrightarrow z_0$  ist nicht hebbbar und kein Pol von  $f$ .

**Beispiel**

$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \quad (D = \mathbb{C}, z_0 = 0)$

$z_n := \frac{1}{n}$ ,  $f(z_n) = e^n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ ,  $z_n \rightarrow 0$ . 13.1  $\Rightarrow 0$  ist nicht hebbbar.

$w_n := \frac{i}{n} = -\frac{1}{in}$ .  $|f(w_n)| = |e^{-in}| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n \rightarrow 0$ . 13.3  $\Rightarrow z_0 = 0$  ist kein Pol von  $f$ .  $f$  hat also in  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität.

**Satz 13.4 (Satz von Casorati-Weierstraß)**

$f$  habe in  $z_0$  eine wesentliche Singularität und es sei  $\delta > 0$  so, dass  $U_\delta(z_0) \subseteq D$ . Dann:

$$\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$$

d.h. ist  $b \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon > 0$ , so existiert ein  $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : |f(z) - b| < \varepsilon$ .

**Beweis**

Sei  $b \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon > 0$ . Ann:  $|f(z) - b| \geq \varepsilon \quad \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ .  $g := \frac{1}{f-b}$ . Dann:  $g \in H(\dot{U}_\delta(z_0))$  und  $|g| \leq \frac{1}{\varepsilon}$  auf  $\dot{U}_\delta(z_0)$ . 13.1  $\Rightarrow g$  hat in  $z_0$  eine hebbare Singularität. Kurz:  $g \in H(U_\delta(z_0))$

Fall 1:  $g(z_0) \neq 0$ . O.B.d.A:  $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_\delta(z_0)$ .  $f = \frac{1}{g} + b$  auf  $\dot{U}_\delta(z_0) \Rightarrow f$  hat in  $z_0$  eine

hebbare Singularität.

Fall 2:  $g(z_0) = 0$ . 11.8  $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \varphi \in H(U_\delta(z_0)) : g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) \forall z \in U_\delta(z_0)$  und  $\varphi(z_0) \neq 0$ . O.B.d.A:  $\varphi(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$ . Def:  $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(z)} & , z \in U_\delta(z_0) \\ (z - z_0)^m (f(z) - b) & , z \in \dot{D} \end{cases}$$

$\Psi$  ist wohldefiniert: Für  $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{(z - z_0)^m}{g(z)} = (z - z_0)^m (f(z) - b)$ . Dann:  $\Psi \in H(D)$  und  $\Psi(z_0) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$ .

$h(z) := \Psi(z) + b(z - z_0)^m (z \in D)$ . Klar:  $h \in H(D)$

$h(z_0) = \Psi(z_0) \neq 0$ . Weiter:  $\frac{h(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{\Psi(z)}{(z - z_0)^m} + b = f(z) - b + b = f(z) \forall z \in \dot{D} \xrightarrow{13.2} f$  hat in  $z_0$  einen Pol. Wid! ■

### Satz 13.5 (Klassifikation)

Die isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  ist

- (1) hebbbar  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $f$  ist auf  $U_\delta(z_0)$  beschränkt.
- (2) ein Pol von  $f \Leftrightarrow |f(z)| \rightarrow \infty (z \rightarrow z_0)$
- (3) wesentlich  $\Leftrightarrow \forall \delta > 0$  mit  $U_\delta(z_0) \subseteq D$  gilt:  $\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$

### Beweis

- (1) 13.1
- (2)  $\Rightarrow$ : 13.3  
 $\Leftarrow$ : Vorr. und 13.1  $\Rightarrow z_0$  nicht hebbbar. Vorr. und 13.4  $\Rightarrow z_0$  nicht wesentlich
- (3)  $\Rightarrow$ : 13.4  
 $\Leftarrow$ : Vorr. und 13.1  $\Rightarrow z_0$  ist nicht hebbbar. Vorr. und 13.3  $\Rightarrow z_0$  ist kein Pol! ■

### Beispiele:

- (i)  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ . Übung:  $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \forall \delta > 0$ .
- (ii)  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ . Übung:  $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \forall \delta > 0$ .

