12 Übung vom 14.07.

41. Aufgabe

Es sei $\widetilde{f}(x) := \sup\{g(x) : \ g : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ affin}, g \leq f\}$.
Klar: $\widetilde{f} \leq f$ (nach Definition)

z.z.: $\widetilde{f} \geq f$
Bew.: Annahme: Es existiert ein $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\widetilde{f}(x^0) < f(x^0)$
Dann gilt

$$z := (x^0, \frac{\widetilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und liegt nicht in epi f.

Nach dem Trennungssatz aus der Vorlesung existiert eine Hyperebene $H = \{h = \alpha\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$h(z) \leq \alpha \text{ und epi } f \subset \{h \geq \alpha\}$$

Wir schreiben nun h in der Form

$$h((\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n}, x_{n+1})) = \langle u, x \rangle + x_{n+1} \cdot u_{n+1}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (i) \qquad & h((x^0, \frac{\widetilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2})) = \langle u, x^0 \rangle + \frac{\widetilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2} u_{n+1} \leq \alpha \\ (ii) \qquad & h((x, r)) = \langle u, x \rangle + r \cdot u_{n+1} \geq \alpha \ \forall x \in \mathbb{R}^n, r \geq f(x) \end{aligned}$$

Nun gilt $u_{n+1} \geq 0$ wegen (ii).
Annahme: $u_{n+1} = 0$
Dann: $\langle u, x \rangle = \langle u, x \rangle + f(x) \cdot u_{n+1} \overset{(ii)}{\geq} \alpha \geq \langle u, x^0 \rangle + \frac{\widetilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2} \cdot u_{n+1} = \langle u, x^0 \rangle$
Widerspruch (mit $x = x^0 - u$; Kette gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$)!

Also gilt $u_{n+1} > 0$.
Nach (ii) gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle u, x \rangle + f(x) \cdot u_{n+1} \geq \alpha$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{\alpha}{u_{n+1}} - \langle \frac{1}{u_{n+1}} \cdot u, x \rangle =: g(x)$$

g ist affin, $g \leq f$ und nach (i) gilt:

$$g(x^0) = \frac{\alpha}{u_{n+1}} - \langle \frac{1}{u_{n+1}} \cdot u, x^0 \rangle \overset{(i)}{\geq} \frac{1}{u_{n+1}} \left(\frac{\widetilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2} \cdot u_{n+1} \right) > \widetilde{f}(x^0)$$

Widerspruch zur Konstruktion von $\widetilde{f}$.

42. Aufgabe

Es sei x^0 Lösung von (KP).
z.z.:

$$x \text{ ist Lösung} \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \nabla f(x) = \nabla f(x^0) \\ (ii) & \langle x^0 - x, \nabla f(x^0) \rangle = 0 \end{cases}$$

„$\Leftarrow$“ Da f konvex ist, gilt:

$$f(x^0) - f(x) \overset{\text{Vorl.}}{\geq} \langle x^0 - x, \nabla f(x) \rangle \overset{(i)}{=} \langle x^0 - x, \nabla f(x^0) \rangle \overset{(ii)}{=} 0$$

D.h. $f(x) = f(x^0)$, weil x^0 Lösung ist.

„$\Rightarrow$“ Es sei $\alpha \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} f(x^0) &\overset{x^0 \text{ Lsg.}}{\leq} f(\alpha x + (1-\alpha)x^0) \\ &\overset{f \text{ konvex}}{\leq} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x^0) \\ &\overset{x \text{ Lsg.}}{=} \alpha f(x^0) + (1-\alpha) f(x^0) \\ &= f(x^0) \end{aligned}$$

Also ist f konstant auf der Verbindungsstrecke von x und x^0.
Daraus folgt (ii), da f an der Stelle x^0 in Richtung $x - x^0$ konstant ist.

Es fehlt noch (i).
Dazu definieren wir $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$y \mapsto f(y) - \langle y - x^0, \nabla f(x^0) \rangle$$

Es gilt:

- h ist konvex, stetig differenzierbar und

$$\nabla h(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x^0)$$

  [Ableitung der linearen Funktion $\langle y - x^0, \nabla f(x^0) \rangle$ ist $\nabla f(x^0)$.]

- $h(x) = f(x) = f(x^0)$
  [wegen (ii) und x Lösung]

Annahme: $\nabla h(x) = \nabla f(x) - \nabla f(x^0) \neq 0$
Wir betrachten die Abbildung $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto h(x + \lambda w)$ mit $w = \nabla h(x)$.
Es gilt:

- $g'(\lambda) = \langle \nabla h(x + \lambda w), w \rangle$

- $g'(0) = \|h'(x)\|^2 > 0$

Da g' stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass g auf $[-\delta, \delta]$ streng monoton wachsend ist. D.h. $g(0) > g(-\delta)$.

$\Rightarrow h(x) > h(x - \delta w) = f(x - \delta w) - \langle (x - \delta w) - x^0, \nabla f(x^0) \rangle$
$\overset{h(x)=f(x^0)}{\Rightarrow} f(x - \delta w) - f(x^0) < \langle (x - \delta w) - x^0, \nabla f(x^0) \rangle$

Widerspruch zu f konvex.
[Für konvexe Funktionen gilt: $f(y) - f(x) \geq \langle y - x, \nabla f(x) \rangle$]

43. Aufgabe

Es sei x^0 zulässig.
z.z.:

$$x^0 \text{ ist keine Lösung} \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1 : \begin{cases} (i) \\ (ii) \end{cases}$$

(i): $\sup\{\alpha \geq 0 : \; x^0 + \alpha v \in M\} > 0$
(ii): $\langle v, \nabla f(x^0) \rangle < 0$

„$\Rightarrow$“ x^0 ist keine Lösung und $M \neq \varnothing$, also existiert $x \in M$ mit $f(x) < f(x^0)$.
Wir setzen

$$v := \frac{x - x^0}{\|x - x^0\|}$$

Dann gilt:

$$\sup\{\alpha \geq 0 : \; x^0 + \alpha v \in M\} \geq \|x - x^0\|$$

D.h. (i) gilt.

$$\langle v, \nabla f(x^0) \rangle = \frac{1}{\|x - x^0\|} \langle x - x^0, \nabla f(x^0) \rangle \leq \frac{1}{\|x - x^0\|} (\underbrace{f(x) - f(x^0)}_{<0}) < 0$$

Also gilt (ii).

„$\Leftarrow$“ Es sei v so, dass (i) und (ii) erfüllt sind.
Wegen (ii) existiert ein $\tilde{\alpha} > 0$ mit

$$\langle v, \nabla f(x^0 + \alpha v) \rangle < 0 \quad \forall \alpha \in [0, \tilde{\alpha}],$$

da $\alpha \mapsto \langle v, \nabla f(x^0 + \alpha v) \rangle$ stetig ist.

O.E.: $\tilde{\alpha} \leq \sup\{\alpha \geq 0 : \; x^0 + \alpha v \in M\}$.
Es gilt:

$$f(x^0) - f(x^0 + \tilde{\alpha} v) \geq \langle (x^0 - (x^0 + \tilde{\alpha} v)), \nabla f(x^0 + \tilde{\alpha} v) \rangle$$

$$\Leftrightarrow f(x^0) \geq f(x^0 + \tilde{\alpha} v) \underbrace{- \underbrace{\tilde{\alpha}}_{>0} \underbrace{\langle v, \nabla f(x^0 + \tilde{\alpha} v)\rangle}_{<0}}_{>0}$$

$\Rightarrow f(x^0) > f(x^0 + \tilde{\alpha} v)$
$\Rightarrow x^0$ keine Lösung.

44. Aufgabe

(a) **z.z.:** $(SB) \Leftrightarrow (SB^*)$

„$\Rightarrow$“ Setze $x^i := x$ für $i = 1, \dots, m$.
„$\Leftarrow$“ Wir setzen

$$x := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x^i$$

$$g_j(x) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} g_j(x^i) \leq \frac{1}{m} g_j(x^j) \overset{\text{Vor.}}{<} 0$$

für $j = 1, \dots, m$.
[$g_j(x^i) \leq 0$ für jedes x^i, weil die x^i zulässig sein sollen.]

(b) **z.z.:** $(SB) \Leftrightarrow (K)$

„$\Rightarrow$“ Es sei $u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0, u \neq 0$, d.h. es existiert $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $u_j > 0$.
Nach Voraussetzung existiert ein $x \geq 0$ mit $g_i(x) < 0$ für $i = 1, \dots, m$.

$$\langle u, g(x)\rangle = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \leq \underbrace{u_j}_{>0} \underbrace{g_j(x)}_{<0} < 0$$

„$\Leftarrow$“ Es seien

$$A = \operatorname{conv}\{g(x) : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$$
$$B = \{v \in \mathbb{R}^m : \ v < 0\}$$

A,B sind nichtleer und konvex.
Falls $A \cap B \neq \varnothing$, dann existiert ein $z < 0$ mit $z \in A$, d.h. es existieren $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n, x^1, \dots, x^k \geq 0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i g(x^i) = z$$

Wir definieren:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$$

Es gilt:

- $x \geq 0$
- $g(x) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i g(x^i) = z < 0$

Annahme: $A \cap B = \varnothing$
Dann existiert Hyperebene $H = \{\langle u^0, \cdot \rangle = \alpha\}, u^0 \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$, die A und B trennt, d.h.

$$A \subset \{\langle u^0, \cdot \rangle \geq \alpha\} \text{ und } B \subset \{\langle u^0, \cdot \rangle \leq \alpha\}$$

Da $0 \in \mathrm{cl}\, B$ ist, muss $\alpha \geq 0$ sein.
Es sei $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $k \in \mathbb{N}$.

$$v^i := (0, \ldots, 0, \underbrace{-k}_{\text{i-te Stelle}}, 0, \ldots, 0) \in B \subset \{\langle u^0, \cdot \rangle \leq \alpha\}$$

$$\langle v^i, u^0 \rangle = -k \cdot u_i^0 \leq \alpha$$

$$\overset{i \in \{1,\ldots,m\} \text{ bel.}}{\Longrightarrow} u^0 \geq 0$$

Wir haben nun: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0$ ist

$$g(x) \in A \subset \{\langle u^0, \cdot \rangle \geq \alpha\}$$

d.h.

$$\langle u^0, g(x) \rangle \geq \alpha \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Widerspruch zu (K)!