

18. Der Satz von Montel

Satz 18.1 (Satz von Montel)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine Folge in $H(D)$ und es gelte mit einem $c \geq 0$: $|f_n(z)| \leq c \forall z \in D \forall n \in \mathbb{N}$. (*)

Dann enthält (f_n) eine auf D lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge.

Beweis

Wegen (*) und des Satzes von Arzelà-Ascoli (Ana3) genügt es zu zeigen:

Zu $\epsilon > 0$ und $z_0 \in D$ existiert ein $\delta > 0$: $|f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \forall z, w \in U_\delta(z_0)$

Sei $\epsilon > 0$ und $z_0 \in D$. $\exists r > 0$: $\overline{U_{2r}(z_0)} \subseteq D$

$\gamma(t) := z_0 + 2re^{it} \ (t \in [0, 2\pi])$

$\delta := \frac{1}{2} \min\{\frac{\epsilon r}{2c}, 2r\}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $z, w \in U_\delta(z_0)$. Für $\lambda \in \text{Tr}(\gamma)$: $|\lambda - z|, |\lambda - w| \geq r$

$$\implies \frac{|f_n(\lambda)|}{|\lambda - z||\lambda - w|} \leq \frac{c}{r^2}$$

$$\text{Dann: } |f_n(z) - f_n(w)| \stackrel{9.4}{=} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - z} - \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - w} d\lambda \right|$$

$$= \frac{|z - w|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(\lambda)}{(\lambda - z)(\lambda - w)} d\lambda \right| \leq \frac{|z - w|}{2\pi} \frac{c}{r^2} 2\pi 2r = \frac{2c}{r} |z - w|$$

$$= \frac{2c}{r} |z - z_0 + z_0 - w| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{2c}{r} (|z - z_0| + |w - z_0|) < \frac{2c}{r} 2\delta$$

$$\leq \frac{2c}{r} \frac{\epsilon r}{2c} = \epsilon.$$

