

23. Analytische Geometrie

23.1. Quadriken

K sei ein Körper, $f \in K[X_1, \dots, X_n]$

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}}_{=: \underline{X}^{\underline{i}}} = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^n} \alpha_{\underline{i}} \cdot \underline{X}^{\underline{i}}$$

\underline{i} heißt **Multiindex**.

Definition: Für $\underline{i} \in \mathbb{N}^n$ sei $|\underline{i}| := i_1 + \dots + i_n$ der **Grad** von $\underline{X}^{\underline{i}}$.

Der **(Gesamt-)Grad** von f ist $\deg(f) := \max\{|\underline{i}| : \alpha_{\underline{i}} \neq 0\}$.

Ziel: Beschreibe die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(f) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ für ein Polynom f mit $\deg(f) = 2$.

Bemerkung: Den Fall eines oder mehrerer Polynome vom Grad 1 erledigt die lineare Algebra. Mehrere Polynome vom Grad ≥ 2 behandelt die **Kommutative Algebra und algebraische Geometrie**.

Vorarbeit: Klassifiziere die Menge $\mathcal{N}(f)$ durch Klassifizierung der Polynome. (Erinnerung: Klasseneinteilung entspricht einer Äquivalenzrelation)

Dazu sei $G \leq \text{Aut}_{\text{aff}}(K^n)$ (Untergruppe).

Definiere hiermit eine Äquivalenzrelation auf Polynomen bzw. auf Teilmengen $T \subseteq K^n$.

$$\begin{aligned} f_1 \approx_G f_2 &: \iff \exists \mu \in K^\times \exists \varphi \in G : f_2 = \mu \cdot (f_1 \circ \varphi) \\ M_1 \sim_G M_2 &: \iff \exists \varphi \in G : M_2 = \varphi(M_1) \end{aligned}$$

Klar: $f_1 \approx_G f_2 \implies \mathcal{N}(f_1) \sim_G \mathcal{N}(f_2)$

Ziel: Klassifiziere die Polynome für spezielle G .

- Affine Klassifikation (für $\text{Char}(K) \neq 2$):

$$G = \text{Aut}_{\text{aff}}(K^n) = \{\varphi = (A, b) \mid A \in \text{GL}_n(K), b \in K^n\}$$

- Euklidische Klassifikation:

$$G = \text{Aut}_{\text{aff}}(\mathbb{R}^n) = \{(A, b) \mid A \in O_n, b \in \mathbb{R}^n\}$$

23. Analytische Geometrie

Sei nun $\text{Char}(K) \neq 2$.

Vorbereitung: Jedes Polynom f mit $\deg(f) = 2$ hat die Form

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i X_i + \gamma$$

mit einer symmetrischen Matrix $A = (\alpha_{ij}) \neq 0$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in K^n$, $y \in K$.

Beweis: (Symmetrie von A)

Falls A nicht symmetrisch ist, ersetze A durch

$$\frac{1}{2} (A + A^\top) =: A'$$

■

Beachte: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt

$$f(x^\top) = x^\top A x + 2b^\top x + \gamma$$

mit $A^\top = A$.

$Q := \mathcal{N}(f)$ heißt **affine Quadrik**.

Lemma:

Für f wie oben und $\varphi = (C, d) \in \text{Aut}_{\text{aff}}(K^n)$ sei $g(y) := (f \circ \varphi)(y)$. Dann ist

$$g(y) = y^\top A' y + 2b'^\top y + \gamma'$$

wobei $A' := C^\top A C$, $b' := C^\top (A d + b)$, $\gamma' := f(d)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} f(\varphi(y)) &= f(Cy + d) \\ &= \underbrace{(Cy + d)^\top}_{y^\top C^\top + d^\top} A (Cy + d) + 2b^\top (Cy + d) + \gamma \\ &= y^\top \underbrace{C^\top A C}_{=: A'} y + d^\top A C y + \underbrace{y^\top C^\top A d}_{\substack{\in K^{1 \times 1} \\ = d^\top A^\top C y = d^\top A C y}} + 2b^\top C y + \underbrace{d^\top A d + 2b^\top d + \gamma}_{=: \gamma'} \\ &= y^\top A' y + 2b'^\top y + \gamma' \end{aligned}$$

■

Prinzip der Klassifikation: Zu gegebenem f finde (C, d) , so dass A' , b' , γ' eine einfache, übersichtliche "Normalform" annehmen.

Bemerkung: φ bewirkt Wechsel des Koordinatensystems $y = \varphi^{-1}(x) = D_{\mathcal{L}}(x)$. y beschreibt $Q = \mathcal{N}(f)$ im Koordinatensystem \mathcal{L} .

Satz 36 (Satz von der quadratischen Ergänzung):

Sei $A \in K^{n \times n}$ symmetrisch vom Rang r und $\text{Char}(K) \neq 2$. Dann existiert $C \in \text{GL}_n(K)$ so dass

$$C^{\top} A C = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$$

Beweis: Sei $A = (\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ für alle i, j .

Nutze eine Variante des Gaußalgorithmus; es genügt Diagonalgestalt zu erreichen, den Rest erledigen Vertauschungsmatrizen V_{ij} .

ν -ter Schritt: Angenommen die Zeilen (Spalten) mit einer Nummer kleiner ν haben die gewünschte Form. Dann ist:

$$A_{\nu} := \begin{pmatrix} * & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & * & & & 0 \\ 0 & & & * & \dots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Unterscheide folgende Fälle:

(1) $\alpha_{\nu\nu} \neq 0$:

Mache Zeilenumformung: Subtrahiere Vielfaches der ν -ten Zeile von der unteren Zeile, so dass dort die ν -te Spalte Null wird.

Dies geht mit

$$C' := I - \sum_{k=\nu+1}^n \frac{\alpha_{k\nu}}{\alpha_{\nu\nu}} E_{k\nu} : \quad C' A_{\nu} = (\beta_{ij})$$

mit $\beta_{\nu+1,\nu} = \dots = \beta_n = 0$. Die ν -te Zeile ist $\beta_{\nu j} = \alpha_{\nu j} (= \alpha_{j\nu})$.

(2) $\alpha_{\nu\nu} = 0$, $\alpha_{kk} \neq 0$ für ein $k > \nu$:

Bilde $A'_{\nu} := V_{\nu k} A_{\nu} V_{\nu k}$, dann weiter wie in Fall 1.

(3) $\alpha_{kk} = 0$ für $k = \nu, \dots, n$:

Ist $\alpha_{k\nu} = 0 \forall k \geq \nu$, so ist bereits A_{ν} diagonal bis Zeile ν .

Sonst sei $\beta := \alpha_{k\nu} \neq 0$ für ein $k > \nu$ (addiere die k -te Zeile zur ν -ten). Nutze die Additionsmatrix $T := A_{\nu k}(1) = I + E_{\nu k}$ mit $T^{\top} = I + E_{k\nu}$.

Dann folgt $A'_{\nu} := T A_{\nu} T^{\top}$ hat $\alpha'_{\nu\nu} = 2\beta \neq 0$ (da $\text{Char}(K) \neq 2$). Fahre fort wie in Fall 1. ■

Vorsicht: Die $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind im allgemeinen nicht eindeutig.

Satz 37 (Trägheitssatz von Sylvester):

Sei $A \in K^{n \times n}$ symmetrisch vom Rang r .

- (1) Für $K = \mathbb{C}$ existiert $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$C^\top A C = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0)$$

- (2) Für $K = \mathbb{R}$ existiert $C \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ mit

$$C^\top A C = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, 0, \dots, 0)$$

wobei p, q durch A eindeutig bestimmt sind.

Beweis: (1) Nach Satz 36 mit $D := \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r, 0, \dots, 0)$.

Weiteres umformen liefert:

$$D^\top \cdot \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) \cdot D = \text{diag}(\beta_1^2 \alpha_1, \dots, \beta_r^2 \alpha_r, 0, \dots, 0)$$

Falls β_i Nullstelle von $X^2 - \frac{1}{\alpha_i}$ ist, existiert in \mathbb{C} immer in eine Diagonalmatrix $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

- (2) Ähnlich für \mathbb{R} . Vorzeichen berücksichtigen

Restbehauptung: p ist eindeutig bestimmt durch A

Behauptung: $p = \max \{ \dim U \mid U \leq \mathbb{R}^n \text{ mit } s_A|_U \text{ positiv definit} \}$ wobei $s_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle$.

Sei anderes C' mit zugehörigem p', q' . Setze

$$\begin{aligned} b_i &:= C e_i \\ b'_i &:= C' e_i \\ U &:= \langle b_1, \dots, b_p \rangle \\ U' &:= \langle b'_1, \dots, b'_{p'} \rangle \\ V &:= \langle b_{p+1}, \dots, b_{p+q} \rangle \\ V' &:= \langle b'_{p'+1}, \dots, b'_{p'+q'} \rangle \end{aligned}$$

Dann sind $s_A|_U, s_A|_{U'}, -s_A|_V, -s_A|_{V'}$ positiv definit.

Für $W := \text{Kern}(\Lambda_A) = \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle = \langle b'_{r+1}, \dots, b'_n \rangle$ gilt

$$\mathbb{R}^n = U \oplus V \oplus W = U' \oplus V' \oplus W$$

Damit folgt

$$U \cap (V' \oplus W) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned}\forall x \in U \cap (V' \oplus W) : s_A(x, x) \geq 0, s_A(x, x) \leq 0 &\implies s_A(x, x) = 0 \\ &\implies x = 0\end{aligned}$$

Damit folgt $p = \dim U \leq \dim U' = p'$, da

$$\begin{aligned}\dim U' + \dim(V' + W) &= n \\ &\geq \dim(U + V' + W) \\ &= \dim(U \oplus V' + W) \\ &= \dim U + \dim(V' + W)\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt $p = p'$. ■

Fortsetzung der Polynomklassifikation (deg = 2) über beliebigem Körper K : Aus obigem Lemma und Satz 37 folgt: Der quadratische Anteil der Polynome $f(x) = x^\top Ax + 2b^\top x + \gamma$ lässt sich durch eine geeignete affine Abbildung $\varphi = (C, d)$ auf folgende einfache Gestalt bringen:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

Beachte: Abändern von C , etwa $C_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, B)$ mit $B \in \text{GL}_{n-r}(K)$, ändert den quadratischen Anteil **nicht**.

Nächste Vereinfachung: linearer Term $2b'^\top y$
Kann eventuell $2b'^\top y = 0$ erreicht werden?

$$b' \stackrel{\text{Def.}}{=} C^\top (Ad + b) = 0 \iff Ad + b = 0$$

Das heißt das LGS $Az = -b$ hat die Lösung $z = d$.

Definition: Falls eine Lösung d existiert, so heißt d **Mittelpunkt** der Quadrik.

Beachte:

$$y = d + t \in \mathcal{N}(f) \implies d - t \in \mathcal{N}(f)$$

Beweis: $f(d + t) = 0$, das heißt:

$$\begin{aligned}(d + t)^\top A(d + t) + 2b^\top (d + t) + \gamma &= 0 \\ (d + t)^\top A(d + t) + 2(-Ad)^\top (d + t) + \gamma &= 0 \\ (d + t)^\top A(d + t) - 2d^\top A(d + t) + \gamma &= 0 \\ \iff (d - t)^\top A(d + t) + \gamma &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(d - t) &= (d - t)^\top A(d - t) + 2(-Ad)^\top (d - t) + \gamma \\ &= -(d - t)^\top A(d + t) + \gamma \\ &= 0\end{aligned}$$
■

Affine Klassifikation der Quadriken mit Mittelpunkt:(1) Fall $K = \mathbb{C}$:

(a) $f = X_1^2 + \dots + X_r^2 \quad (\gamma' = 0)$

(b) $f = X_1^2 + \dots + X_r^2 + 1 \quad (\gamma' \neq 0)$

(2) Fall $K = \mathbb{R}$:

(a) $f = X_1^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_{p+q}^2 \quad (\text{ohne Einschränkung } p \geq q)$

(b) $f = X_1^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_{p+q}^2 + 1 \quad (\gamma' \neq 0)$

Beispiel: $n = r = 2$

(1) Ellipse: $f = X_1^2 + X_2^2 - 1$

(2) Hyperbel: $f = X_1^2 - X_2^2 + 1$

Affine Klassifikation der Quadriken ohne Mittelpunkt:

Jetzt sei $Az = -b$ unlösbar. Es ist aber auch für A Diagonalform erreichbar: $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$, wobei $r = \text{rg}(A)$ ist.

Daraus folgt: es existiert ein d mit

$$Ad + b =: c \in \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle \quad (c \neq 0)$$

Nun wähle $C_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, B)$, so dass $C_1^\top c = -e_{r+1}$.

$$C_1^\top c = C_1^\top (Ad + b) =: b'$$

Beachte: c bleibt unverändert wenn d durch $d + y$ mit $y \in \langle e_{r+1}, \dots, e_n = \text{Kern}(\Lambda_A) \rangle$ ersetzt wird.

$$\text{Somit: } f = \alpha_1 X_1^2 + \dots + \alpha_r X_r^2 - \underbrace{2X_{r+1}}_{2b'^\top X} + \gamma'$$

Schließlich: affine Transformation $\varphi = (I, \frac{1}{2}\gamma'e_{r+1})$ führt zu

$$\begin{aligned} f &= \alpha_1 X_1^2 + \dots + \alpha_r X_r^2 - 2 \left(X_{r+1} + \frac{1}{2}\gamma' \right) + \gamma' \\ &= \alpha_1 X_1^2 + \dots + \alpha_r X_r^2 - 2X_{r+1} \end{aligned}$$

(1) Fall $K = \mathbb{C}$: $f = X_1^2 + \dots + X_r^2 - 2X_{r+1} \quad (\text{für } r < n)$

(2) Fall $K = \mathbb{R}$: $f = X_1^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_{p+q}^2 - 2X_{r+1} \quad (p \geq q)$

Euklidische Klassifikation

($\varphi = (x \mapsto Cx + d)$ mit $C \in O_n$ sei zugelassen)

Zur Diagonalisierung von A verwende den Spektralsatz. Das heißt, es existiert $C \in O_n$: $C^T AC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ sei.

Der Rest ist wie oben. Damit erhalten wir folgende Normalformen:

$$(1) \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_r X_r^2 \quad (\text{bis auf einen gemeinsamen Faktor } \mu \neq 0 \text{ eindeutig})$$

$$(2) \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_r X_r^2 + 1$$

$$(3) \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_r X_r^2 - 2X_{r+1}$$

Definition: Die Zahlen $|\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}$ heißen **Halbachsenlängen**, die Geraden $\langle e_i \rangle$ ($i = 1, \dots, r$) heißen die **Hauptachsen** der Quadrik in Normalform. Der Übergang in Normalform heißt auch **Hauptachsentransformation**.

23.2. Der Tangentialraum

Sei K ein beliebiger Körper.

Definition: Die Nullstellenmenge $\mathcal{F} = \mathcal{N}(f)$ eines Polynoms $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ heißt **Hyperfläche**.

Im folgenden sei stets $\mathcal{N}(f) \neq \emptyset$. Es sei $P \in \mathcal{F} \subseteq K^n$ ein Punkt auf der Hyperfläche. Betrachte die Geraden $G = P + \langle u \rangle$ mit $u \in K^n$.

$$Q \in G : Q = P + \tau u \quad \text{mit } u \in K^n$$

Beachte: $P \in \mathcal{F}$ impliziert $T \mid f(P + Tu) \in K[T]$ (da Nullstelle bei $T = 0$).

Definition: Eine Gerade heißt **Tangente** an \mathcal{F} in P , falls $T^2 \mid f(P + Tu)$ gilt.

Ziel: Bestimme alle Tangenten durch P (d.h. u variiert).

Dazu schreibe:

$$f(P + Tu) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots \quad \text{mit } \alpha_i = \alpha_i(u)$$

Es gilt: $\alpha_1 \in \text{Hom}(K^n, K)$. Daraus folgt: es existiert ein Vektor $J_p(f) := J_p \in K^{1 \times n}$ mit $\alpha_1(u) = J_p \cdot u$. J_p heißt **Jacobi-Matrix**.

In Analogie zur Analysis schreibe

$$J_p =: \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p}$$

Es gilt

$$J_p = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right) \Big|_{x=p}$$

Das heißt:

$$G = P + \langle u \rangle \text{ ist Tangente} \iff J_p u = 0 \iff u \in J_p^\perp$$

Definition: (a) $P \in \mathcal{F}$ heißt **regulär**, falls $J_p \neq 0$.
Die Hyperebene $T_p(\mathcal{F}) := P + J_p^\perp$ heißt **Tangentialraum**.

(b) Sonst heißt P **singulär** (oder **Singularität**).

Beispiel: (1) "Kurven" $y = p(x)$ mit $p(x) \in K[x]$

$$f(X, Y) = Y - p(X)$$

$\mathcal{N}(f)$ ist Singularitätenfrei, da

$$\begin{aligned} J_p &= \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \Big|_{(X,Y)=P} \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial X}, 1 \right) \Big|_{(X,Y)=P} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

(2) Kurve $y^2 - x^3$ $f(X, Y) = Y^2 - X^3$

$$J_p = (3X^2, 2Y)_{(X,Y)=P} = 0 \iff P = (0, 0)$$

Also: $(0, 0)$ ist die einzige Singularität.

Satz 38:

Sei φ eine Affinität von K^n und \mathcal{F} eine Hyperfläche. Dann gilt

(1) $P \in \mathcal{F}$ regulär $\iff \varphi(P)$ regulär in $\varphi(\mathcal{F})$

(2) P regulär $\iff T_{\varphi(P)}(\varphi(\mathcal{F})) = \varphi(T_P(\mathcal{F}))$

Beweis: (1) $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{N}(f \circ \varphi^{-1})$

Taylorentwicklung von $f \circ \varphi^{-1}$ bei $\varphi(P)$

Schreibe:

$$\varphi^{-1}(x) = Ax + b$$

mit $A = (\alpha_{ij}) \in \text{GL}_n(K)$.

Kettenregel anwenden auf $f \circ \varphi^{-1}(X) = f(AX + b)$ mit

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad AX + b = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X_i}(AX + b) \Big|_{X=\varphi(P)} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_j} \Big|_{Y=P} \cdot \frac{\partial (AX + b)_j}{\partial X_i} \Big|_{X=\varphi(P)} \\ &= J_P(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$J_{\varphi(P)}(f \circ \varphi^{-1}) = J_P(f) \cdot A$$

$$P \text{ regulär in } \mathcal{F} \iff J_P(f) \neq 0$$

$$\stackrel{\exists A^{-1}}{\iff} J_{\varphi(P)}(f \circ \varphi^{-1}) \neq 0$$

$$\iff \varphi(P) \text{ regulär in } \varphi(\mathcal{F})$$

(2)

$$\begin{aligned} T_{\varphi(P)}(\varphi(\mathcal{F})) &= \varphi(P) + J_{\varphi(P)}(f \circ \varphi^{-1})^\perp \\ &\stackrel{!}{=} \varphi(\underbrace{P + J_P(f)^\perp}_{=T_P(\mathcal{F})}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_P(f)Av &= 0 \iff Av \in J_P(f)^\perp \\ &\iff v \in A^{-1}(J_P(f)^\perp) \end{aligned}$$

Beachte: $A^{-1} = \Lambda_\varphi$

Beispiel: $\mathcal{F} = Q$ Quadrik mit $f(P) = P^\top AP + 2b^\top P + \gamma = 0$ ($A = A^\top$). Damit folgt:

$$\begin{aligned} f(P + Tu) &= \underbrace{f(P)}_{=0} + 2TP^\top Au + 2Tb^\top u + T^2 u^\top Au \\ &= T \cdot 2(P^\top A + b^\top)u + T^2 u^\top Au \\ &= T \cdot J_P(f) \cdot u + T^2 u^\top Au \end{aligned}$$

P singulär genau dann wenn $f(P) = 0$ und $AP = -b$ (das liefert entweder eine Hyperebene oder die leere Menge).

Folgerung (aus Satz 38):

- (1) Alle Singularitäten bleiben bei Affinitäten erhalten
- (2) Es genügt die Normalformen der affinen Klassifikation auf Singularitäten zu untersuchen

23.3. Die oskulierende Quadrik

Sei $\mathcal{F} = \mathcal{N}(f) \in K^n$ Hyperfläche, $P \in \mathcal{F}$ regulärer Punkt mit

$$T_P(\mathcal{F}) = \left\{ P + (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top, \lambda_i \in K, \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_{X=P} \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top = 0 \right\}$$

Die definierende Gleichung ist aus der formalen Taylorentwicklung um P ablesbar.

$$f\left(P + (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top\right) = f(P) + \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X=P} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{X=P} \lambda_i \lambda_j + \text{höhere Terme}$$

(Dabei ist $\text{Char}(K) \neq 2$)

Daher sagt man: Der Tangentialraum approximiert \mathcal{F} in einer Umgebung von P in "erster" Näherung (d.h. Terme vom Grad größer 2 weglassen). Die Approximation wird besser je höher der Grad der zugelassenen Terme ist.

Wir lassen nun nur Terme bis zum Grad 2 zu.

Definition: Die Quadrik

$$Q_{P,\mathcal{F}} := \left\{ P + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mid \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X=P} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{X=P} \cdot \lambda_i \lambda_j = 0 \right\}$$

heißt **oskulierende** Quadrik zu \mathcal{F} im Punkt P (auch **Schmiege-Quadrik** genannt).

Bemerkung: Die oskulierende Quadrik ist eine affine Invariante wie der Tangentialraum, d.h. für jede Affinität φ gilt:

$$Q_{\varphi(P),\varphi(\mathcal{F})} = \varphi(Q_{P,\mathcal{F}})$$

Beweis: wie für den Tangentialraum. ■

Beispiel: Die **Torusfläche**

$$\mathcal{T} = \mathcal{N}(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ für}$$

$$f(x, y, z) = (R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) - 4R^2(x^2 + y^2)$$

Wir benötigen eine Liste der partiellen Ableitungen:

$$f_x = 4x(-R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

$$f_y = 4y(-R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

$$f_z = 4z(R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

Welche singulären Punkte $f|_P = 0 = f_x|_P = f_y|_P = f_z|_P$ existieren?

- Fall $0 < r < R$:

$$R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2 > 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Aus $P = (x, y, z)$ singular folgt $z = 0$ (da $f_z|_P = 0$). Währe $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, so ergäbe $f_x = f_y = 0$

$$x^2 + y^2 = R^2 + r^2$$

In f einsetzen:

$$(2R^2)^2 = 4R^2(R^2 + r^2) \quad \text{Widerspruch!}$$

Also folgt $x = y = z = 0$. Aber: $f(0, 0, 0) = R^2 - r^2 > 0$, da $R > r$, d.h. $(0, 0, 0) \notin \mathcal{T}$.

Damit sind alle Punkte auf \mathcal{T} regulär.

- Fall $r \geq R > 0$:
Es gibt singuläre Punkte. Welche? Übung.

23.4. Durchschnitte von Hyperebenen

Sei K ein beliebiger Körper, $R = K[X_1, \dots, X_n]$.

Problem: Beschreibe die (gemeinsamen) Nullstellen endlich vieler vorgegebener Polynome $f_i \in \mathbb{R}$.

Mit $\mathcal{F}_i := \mathcal{N}(f_i)$ betrachte also

$$\mathcal{D} := \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \mathcal{N}(f_1, f_2, \dots, f_m)$$

Eine Gerade $G = P + \langle u \rangle$ heißt Tangente an \mathcal{D} in $P \in \mathcal{D}$, wenn G Tangente an jede Hyperfläche \mathcal{F}_i ist, d.h.

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial X_n} \right)_{X=P} \cdot u = 0 \quad \forall i$$

d.h. mit der **Jacobi-Matrix**:

$$J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{X=P} \in K^{m \times n}$$

Es gilt: $J_P \cdot u = 0$.

Definition: Die $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ schneiden sich in $P \in \mathcal{D}$ **transversal** wenn $\text{rg}(J_P) = m$. Dann heißt P regulärer Punkt von \mathcal{D} und

$$T_{P,\mathcal{D}} := P + \text{Kern}(\Lambda_{J_P})$$

heißt Tangentialraum.

Bemerkung: $T_{P,\mathcal{D}} = T_{P,\mathcal{F}_1} \cap \dots \cap T_{P,\mathcal{F}_n}$ bei transversalem Schneiden.

Beispiel: Die orthogonale Gruppe $O_n = \{A = (\alpha_{rs}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^\top = I\}$

- (1) O_n ist der Durchschnitt von Hyperflächen (Quadriken) im \mathbb{R}^3 .

Der zugehörige Polynomring ist

$$R = \mathbb{R}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}, X_{21}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{nn}] \in \mathbb{R}[X]$$

Nach Definition von O_n gilt:

$$O_n = \left\{ (\alpha_{rs}) \mid \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \cdot \alpha_{jk} = \delta_{ij} \right\}$$

d.h. $\alpha_{rs} \in \mathbb{R}^{n^2}$ ist Nullstelle des Polynoms

$$f_{ij}(X) = \sum_{k=1}^n X_{ik} X_{jk} - \delta_{ij} \in \mathbb{R}$$

Beachte: $f_{ij} = f_{ji}$, daraus folgt $O_n = \bigcap_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathcal{F}_{ij}$ mit $\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{N}(f_{ij})$.

- (2) Die \mathcal{F}_{ij} schneiden sich transversal in $P = I$.

Also insbesondere

$$T_{I, O_n} = \bigcap_{i \leq j} T_{I, \mathcal{F}_{ij}}$$

mit

$$\begin{aligned} \dim T_{I, O_n} &= n^2 - \text{card} \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\} \\ &= n^2 - \sum_{j=1}^n j \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

Beweis (der Transversalität): Aus $\frac{\partial f_{ik}}{\partial X_{pq}} =: f_{ik,pq}$ folgt: Jacobi-Matrix $J_I = (\alpha_{ik,pq}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} \times n^2}$ mit $\alpha_{ik,pq} := f_{ik,pq}|_{X=I}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ik}}{\partial X_{pq}} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_{ij} X_{kj}}{\partial X_{pq}} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(X_{ij} \frac{\partial X_{kj}}{\partial X_{pq}} + X_{kj} \frac{\partial X_{ij}}{\partial X_{pq}} \right) \\ &= X_{iq} \delta_{kp} + X_{kq} \delta_{ip} \end{aligned}$$

Auswerten bei $P = I$ liefert $\delta_{iq} \delta_{kp} + \delta_{kq} \delta_{ip} = \alpha_{ik,pq}$.

Bilde das Skalarprodukt zweier Zeilen von J_I (Zeile ik mit Zeile jl):

$$\begin{aligned} \sum_{pq} \alpha_{ik,pq} \cdot \alpha_{jl,pq} &= \sum_{pq} (\delta_{iq}\delta_{kp} + \delta_{kq}\delta_{ip}) (\delta_{jq}\delta_{lp} + \delta_{lq}\delta_{jp}) \\ &= \delta_{ji}\delta_{lk} + \delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{jk}\delta_{li} + \delta_{lk}\delta_{ji} \\ &= 2(\delta_{ij}\delta_{lk} + \delta_{jl}\delta_{jk}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } ik \neq jl \\ 2 \vee 4 & \text{für } ik = jl \end{cases} \end{aligned}$$

$\delta_{il}\delta_{jk} = 1$ impliziert $i = l, j = k$ und wegen $i \leq k, j \leq l$ gilt $i \leq k = j \leq l = i$, also $ik = ii = il$.

Damit folgt: Die Zeilen von J_I sind paarweise orthogonal und jeweils ungleich Null. $\text{rg}(J_I)$ ist gleich der Anzahl Zeilen. Das heißt die \mathcal{F}_{ij} schneiden sich transversal bei I . ■

(3) Der Tangentialraum bei I ist

$$T_{I,O_n} = I + \bigoplus_{i < k} \mathbb{R} \underbrace{(E_{ik} - E_{ki})}_{=: B_{ik}}$$

Beweis: Die B_{ik} sind offenbar linear unabhängig im \mathbb{R}^{n^2} , also

$$\dim \langle B_{ik} \mid i < k \rangle = \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

und $B_{ik} \in \text{Kern}(\Lambda_{J_I})$, da $J_I \cdot B_{ik} = 0$ (leicht). ■

Definition: Eine Untergruppe $\mathcal{J} \leq \text{GL}_n(K)$ (wie hier O_n), die als Durchschnitt von Hyperflächen definiert ist, heißt **algebraische (Matrizen-)Gruppe**.

Bemerkung: Solche \mathcal{J} haben den großen Vorzug, dass Regularität an einem Punkt $Q \in \mathcal{J}$ sich auf alle anderen Punkte von \mathcal{J} überträgt.

Satz 39:

Sei \mathcal{J} eine algebraische Gruppe mit mindestens einem Punkt. Dann ist jeder Punkt $Q \in \mathcal{J}$ regulär und

$$T_{Q,\mathcal{J}} = Q \cdot T_{I,\mathcal{J}} = \{Q \cdot T \mid T \in T_{I,\mathcal{J}}\}$$

Beweis: $\Lambda_Q : B \mapsto Q \cdot B$ ist eine Affinität von $K^{n \times n}$.

Schon gesehen: Affinitäten erhalten die Regularität und führen Tangentialräume ineinander über. ■

Korollar:

Q_n ist Singularitätenfrei und die Dimension von T_{P,O_n} ist $\frac{n(n-1)}{2}$.