III. Algorithmen

25.04.2005

Literatur

- Thomas H. Cormen, Charles. E. Leiserson, Ronald Rivest, Clifford Stein: *Algorithmen – Eine Einführung.*
- Donald E. Knuth: *The Art of Computer Programming.*

Konventionen Pseudocode

- Blockstruktur wird nur durch Einrücken gekennzeichnet (keine Klammern).
- Schleifenkonstrukte **while** und **repeat** wie üblich.
- Bei **for** bleibt der Wert nach Verlassen der Schleife erhalten.
- Alles nach „//“ ist Kommentar. (Buch: $\triangleright[, \%] \dots$)
- Mehrfachzuweisungen $x \leftarrow y \leftarrow z$ bedeutet $y \leftarrow z; x \leftarrow y$.
- Variablen sind lokal (local).
- Zugriff auf die Feldelemente: $A[i]$ das i-te Element.
- Datenattribute z. B. länge(A).
- Parameter einer Prozedur: **call by value**.
- „und“ und „oder“ sind träge (lazy) Operatoren.

Rundungsfunktion / Gaußklammer

$\lceil p/q \rceil$ „ceiling function“
$\lfloor p/q \rfloor$ „floor function“

$p = 7, q = 3$
$p/q = 7/3 = 2, 3...$

$\lceil p/q \rceil = \lceil 7/3 \rceil = 3$
$\lfloor p/q \rfloor = \lfloor 7/3 \rfloor = 2$

III.1. Definition

(mehrere Definitionen, Anzahl Bücher $\gg 100$)

- Algorithmus $\equiv$ Berechnungsprozedur (allgemeine $\rightarrow$ sehr spezialisierte)
- Prozedur ist deterministisch oder nicht
- deterministisch $\equiv$ {endlich, definiert, eindeutig}

Algorithmus $\equiv$ Analyse, Komplexität, effiziente Berechnungsmethoden

III.2. Analyse von Algorithmen

III.2.1. Das Sortierproblem

- Eingabe: Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- Ausgabe: Eine Permutation $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ der Eingabefolge mit $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.

III.2.2. Implementierung: Insertion-Sort

INSERTION-SORT(A)

```
1  for j ← 2 to laenge[A]
2        do schluessel ← A[j]
3           ▷ Füge A[j] in die sortierte Sequenz A[1..j − 1] ein.
4           i ← j − 1
5           while i > 0 und A[i] > schluessel
6                 do A[i + 1] ← A[i]
7                    i ← i − 1
8           A[i + 1] ← schluessel
```

Beispiel:

(a) | 5 | **2** | 4 | 6 | 1 | 3 |

(b) | 2 | 5 | **4** | 6 | 1 | 3 |

(c) | 2 | 4 | 5 | **6** | 1 | 3 |

(d) | 2 | 4 | 5 | 6 | **1** | 3 |

(e) | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | **3** |

(f) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

III.2.3. Aufwandsklassen

- Obere asymptotische Schranke

$$O(g(n)) = \{f(n) | \text{ es gibt } c, n_0 > 0 \text{ mit } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ für alle } n > n_0\}$$

- Untere asymptotische Schranke

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) | \text{ es gibt } c, n_0 > 0 \text{ mit } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$$

- Asymptotisch scharfe Schranke

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) | \text{ es gibt } c_1, c_2, n_0 > 0 \text{ mit } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$$

III.2.4. Analyse von Insertion Sort

```
0  INSERTION-SORT(A)                          Kosten  Zeit
1  for j <- 2 to länge[A]                     c1      n
2     do schlüssel <- A[j]                    c2      n-1
3     //setze A[j] ein ...                    0       n-1
4     i <- j - 1                              c4      n-1
5     while i > 0 und A[i] > schlüssel        c5      sum_{j=2}^{n} t_j
6        do A[i + 1] <- A[i]                  c6      sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)
7        i <- i - 1                           c7      sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)
8     A[i + 1] <- schlüssel                   c8      n-1
```

III.3. Aufwandsanalyse

Durch Summieren der Produkte aus Kosten und Zeit:

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1)$$

Günstigster Fall: Das Feld ist schon sortiert

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_6) \\ &\Rightarrow \text{lineare Laufzeit} \end{aligned}$$

Schlechtester Fall: Das Feld ist in umgekehrter Reihenfolge sortiert

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\ &\quad + c_6 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) + c_7 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) + c_8(n-1) \\ &= \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2} \right) n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8 \right) - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) \\ &\Rightarrow \text{quadratische Laufzeit} \end{aligned}$$

Im Folgenden werden wir meistens nur die Laufzeit im schlechtesten Fall analysieren, denn

- der schlechteste Fall bietet eine obere Schranke für die maximale Laufzeit,
- für einige Algorithmen tritt der schlechteste Fall häufig auf: z. B. Suche in einer Datenbank,
- der „mittlere Fall“ ist oft annähernd genauso schlecht wie der schlechteste Fall.

III.3.1. Methode: Teile und Beherrsche

- Teile das Problem in eine Anzahl von Teilproblemen auf
- Beherrsche die Teilprobleme durch rekursives Lösen bis sie so klein sind, dass sie direkt gelöst werden können.
- Verbinde die Lösungen der Teilprobleme zur Lösung des Ausgangsproblems.

III.3.2. Laufzeiten

- $\lg n$
- $\sqrt{n}$
- n
- $n \cdot \lg n$
- n^2
- n^3
- 2^n
- $n!$

III.3.3. Implementierung: Merge-Sort

- **Teile** die zu sortierende Sequenz der Länge n in zwei Teilsequenzen der Länge $\frac{n}{2}$
- **Beherrsche** durch rekursives Anwenden von Merge-Sort auf die zwei Teilsequenzen
- **Verbinde** die zwei Teilsequenzen durch Mischen (merge)

Pseudocode

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1  if p < r
2     then q ← ⌊(p + r)/2⌋
3          MERGE-SORT(A, p, q)
4          MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5          MERGE(A, p, q, r)
```

```
MERGE(A, p, q, r)
 1  n_1 ← q − p + 1
 2  n_2 ← r − q
 3  Erzeuge die Felder L[1..(4_1 + 1)] und R[1..(n_2 + 1)]
 4  for i ← 1 to n_1
 5        do L[i] ← A[p + i − 1]
 6  for j ← 1 to n_2
 7        do R[j] ← A[q + j]
 8  L[n_1 + 1] ← R[n_2 + 1] ← ∞ ▷ Wächter
 9  i ← j ← 1
10  for k ← p to r
11        do if L[i] ← R[i]
12              then A[k] ← L[i]
13                   i ← i + 1
14              else  A[k] ← R[j]
15                   j ← j + 1
```

III.3.4. Laufzeitanalyse

- Im allgemeinen Teile- und Beherrsche-Fall gilt: Sei $T(N)$ die Laufzeit für ein Problem der Größe n. Ist n hinreichend klein $n \leq c$, dann benötigt die direkte Lösung eine konstante Zeit $\Theta(1)$. Führt die Aufteilung des Problems zu a Teilproblemen der Größe $1/b$ und braucht die Aufteilung $D(n)$ Zeit und das Verbinden zum ursprünglichen Problem die Zeit $C(n)$ so gilt:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{falls } n \leq c \\ a(T(n/b)) + D(n) + C(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

- Im Fall von Merge-Sort ist $a = b = 2$ und $c = 1$, also

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{falls } n = 1 \\ 2(T(n/2)) + dn & \text{sonst} \end{cases}$$

- Man kann die Problemgröße nur $\log_2(n)$ oft aufteilen.
- Beim i-ten Aufteilen hat man 2^i Teillisten der Größe $n/2^i$ zu lösen und benötigt dafür dn Zeit
- Somit braucht man insgesamt $dn \log_2 n + dn$ Zeit.

III.4. Wachstum von Funktionen

27.04.2005

Zeitaufwand eines Algorithmus:

$$T(n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

III.4.1. Asymptotische Notation - Θ-Notation

Asymptotisch scharfe Schranke:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) | \text{ es gibt } c_1, c_2, n_0 > 0 \text{ mit } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$$

Bemerkung: $f \in \Theta(g)$ folgt f ist asymptotisch nicht negativ, d.h. es gibt ein n_0 mit $f(n) \geq 0$ für alle $n \geq n_0$

Beispiele:

- Konstanten: $\Theta(c), c \geq 0$: $\Theta(c) = \Theta(1)$ $(c_1 = c_2 = c, n_0 = 0)$
- Monome: $f(x) = ax^n$. zu zeigen: $f \in \Theta(x^n)$. Wegen der Bemerkung gilt: $a > 0$. Somit $c_1 = a, c_2 = a, n_0 = 0$. Aber: $ax^n \notin \Theta(x^{n+1})$, denn für alle $c > 0$ gilt: für alle $x > \frac{a}{c_2}$ ist $ax^n < c_2 x^{n+1}$
- Polynome: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_n \neq 0$. zu zeigen: $f(x) \in \Theta(x^n)$. Auch hier: $a_n > 0$ wegen Bemerkung und Monomen. Wähle $c_1 = \min_{c=0}^{n} |a_i|$, $c_2 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$, $n_0 > c_2$. $c_1 x^n \leq \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \leq c_2 x^n$

III.4.2. Obere Asymptotische Schranke - O-Notation

$$O(g(n)) = \{f(n)| \text{ es gibt } c, n_0 > 0 \text{ mit } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ für alle } n > n_0\}$$

Klar: $ax^k \in O(x^m)$ für $k \leq m$.
$a > 0$, Die Bemerkung gilt auch hier! ($c = a, n_0 = 0$). Ebenso: $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i \in O(x^m)$ für $k \leq m$.

III.4.3. Untere Asymptotische Schranke: Ω-Notation

$$\Omega(g(n)) = \{f(n)| \text{ es gibt } c, n_0 > 0 \text{ mit } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$$

Klar: $a^k \in \Omega(x^m)$ für $m \leq k$. Wähle $c = a$, $n_0 = 0$.
ebenso: $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i \in \Omega(x^m)$ für $m \leq k$.

III.4.4. Verhältnis der Mengen

für beliebige $f(n)$ und $g(n)$ gilt:

$$f(n) \in \Theta(g) \text{ genau dann, wenn } f(n) \in O(g) \text{ und } f(n) \in \Omega(g)$$

Anmerkung: Θ ist eine Äquivalenzklasse, Ω, O sind keine Äquivalenzklassen, da die Symmetriebedingung nicht erfüllt ist. [1]

III.5. Rekurrenzen - Rekursionsgleichungen

Problem: Gegeben ist eine Rekurrenz F_n.
Gesucht: $f(X)$ in geschlossener Form mit $F_n \in \Theta(f)$.

III.5.1. 1. Methode: „Raten und Induktion“

Beispiel: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

n	F_n		
1	1	+0	+1
2	1	+1	+0
3	2	+1	+1
4	3	+2	+1
5	5	+3	+2
6	8	+5	+3
7	13		

Vermutung: $f(x) = ae^{bx} + c$

Weiteres Beispiel:

n	F_n		
0	-4	+1	·2
1	-3	+2	·2
2	-1	+4	·2
3	3	+8	·2
4	11	+16	·2
5	27		

Ansatz: $F(n) = a2^n + c$

[1] War wohl zunächst in der Übung falsch, wurde aber gleich korrigiert.

III.5.2. Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + cn^2$$

Komischesschaubildwomaneigentlichnichtserkenntundworausmanwasfolgernkann.

III.5.3. Weitere Methoden

- Jordan-Normalform:
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$
- Z-Transformierte.

III.6. Die o-Notation

02.05.2005

$$o(g(n)) = \left\{ \begin{array}{l} f(n): \text{ für jede positive Konstante } c > 0 \\ \text{existiert eine Konstante } n_0 > 0, \text{ sodass} \\ 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \text{ für alle } n \geq n_0 \end{array} \right\}$$

Die Definition der O-Notation und der o-Notation sind einander ähnlich. Der Unterschied besteht darin, dass in $f(n) = O(g(n))$ die Schranke $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ für eine Konstante $c > 0$ gilt, während sie in $f(n) = o(g(n))$ für alle Konstanten gilt.

Die Funktion $f(n)$ (in der o-Notation) is unbedeutend gegenüber $g(n)$, wenn

$$n \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

III.7. Die ω-Notation

$$\omega(g(n)) = \left\{ \begin{array}{l} f(n): \text{ für jede positive Konstante } c > 0 \\ \text{existiert eine Konstante } n_0 > 0, \text{ sodass} \\ 0 \leq c \cdot g(n) < f(n) \text{ für alle } n \geq n_0 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$
$\left[n^2/2 = \omega(n); n^2/2 \neq \omega(n^2)\right]$

III.8. Lösen von Rekurrenzen mit der Generierenden-Funktion

(*generating function*)

Gegeben sei eine Folge $< g_n >$

Gesucht ist eine geschlossene Form für g_n. Die folgenden 4 Schritte berechnen diese (*closed form*)

1. Finde eine einzige Gleichung, die g_n anhand anderer Elemente der Folge ausdrückt. Die Gleichung sollte unter der Annahme $g_{-1} = g_{-2} = \ldots = 0$ für alle ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) gelten.

2. Multipliziere beide Seiten mit z^n und summiere über alle n. Auf der linken Seite steht nun
$$\sum_n g_n z^n = G(z) \text{ die generierende Funktion}$$
Die rechte Seite der Gleichung sollte nun so manipuliert werden, dass sie andere Ausdrücke in $G(z)$ enthält.

3. Löse die resultierende Gleichung und erhalte damit eine geschlossene Form für $G(z)$.

4. Expandiere diese Form von $G(z)$ in eine Potenzreihe und betrachte die Koeffizienten von z^n. Das ist eine geschlossene Form für g_n.

Beispiel Die Fibonacci-Zahlen

$$g_0 = 0;\ g_1 = 1;\ g_n = g_{n-1} + g_{n-2}\ (n \geq 2)$$

Schritt 1: Die Gleichung $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ ist nur für $n \geq 2$ zulässig, denn unter der Annahme $g_{-1} = 0,\ g_{-2} = 0$ ist $g_0 = 0,\ g_1 = 0,\ \ldots$

$$g_n \stackrel{?}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1 \\ 1, & \text{falls } n = 2 \\ g_{n-1} + g_{n-2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nein

$$[n = 1] = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + [n = 1]$

Schritt 2:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_n g_n z^n = \sum_n g_{n-1} z^n + \sum_n g_{n-2} z^n + \sum [n = 1] z^n \\ &= \sum_n g_n z^{n+1} + \sum_n g_n z^{n+2} + z \\ &= z \sum_n g_n z^n + z^2 \sum_n g_n z^n + z \\ &= zG(z) + z^2 G(z) + z \end{aligned}$$

Schritt 3: ist hier einfach

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Schritt 4: Gesucht ist eine Darstellung von

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{z}{(1 - \Phi z)(1 - \widehat{\Phi} z)}\ (\Phi :\ \text{„}\textit{Goldener Schnitt (engl.: golden ratio}\text{“})$$

$$\text{mit } \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};\ \widehat{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

als formale Potenzreihe. Eine Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1/\sqrt{5}}{1-\Phi z} - \frac{1/\sqrt{5}}{1-\widehat{\Phi} z}$$

Es existiert folgende Regel

$$\frac{a}{(1-pz)^{m+1}} = \sum_{n\geq 0} \left(\begin{array}{c} m+n \\ m \end{array} \right) a p^n z^n$$

Somit ist

$$\frac{1/\sqrt{5}}{1-\Phi z} - \frac{1/\sqrt{5}}{1-\widehat{\Phi} z} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} \Phi^n z^n + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} \widehat{\Phi}^n z^n$$

und für den n-ten Koeffizienten gilt $F_n = \frac{\Phi^n - \widehat{\Phi}^n}{\sqrt{5}}$

III.9. Notationen

Die *floor* und die *ceiling* Funktion:

$\lceil z \rceil$ kleinste obere Ganzzahl
the least integer greater than or equal to z
$\lfloor z \rfloor$ größte untere Ganzzahl
the greatest integer less than or equal to z

III.10. Die Mastermethode

„Rezept“: Methode zur Lösung von Rekurrenzgleichungen der Form

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei $a \geq 1$, $b > 1$ und $f(n)$ eine asymptotisch positive Funktion.

Beispiel Merge-Sort

$$a = 2,\ b = 2,\ f(n) = \Theta(n)$$

III.11. Mastertheorem

Seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten. Sei $f(n)$ eine Funktion und sei $T(n)$ über die nichtnegativen ganzen Zahlen durch die Rekursionsgleichung $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ definiert, wobei wir n/b so interpretieren, dass damit entweder $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$ gemeint ist. Dann kann $T(n)$ folgendermaßen asymptotisch beschränkt werden.

1. Wenn $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$ erfüllt ist, dann gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. Wenn $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ erfüllt ist, dann gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$
3. Wenn $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ für $\epsilon > 0$ erfüllt ist und wenn $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ für eine Konstante $c < 1$ und hinreichend große n gilt, dann ist $T(n) = \Theta(f(n))$.

$\Longrightarrow$ Im ersten Fall muss $f(n)$ nicht nur kleiner als $n^{\log_b a}$ sein, sondern sogar polynomial kleiner. Das heißt $f(n)$ muss für $t > 0$ und den Faktor n^2 asymptotisch kleiner sein, als $n^{\log_b a}$.

$\Longrightarrow$ Im dritten Fall muss $f(n)$ nicht nur größer sein als $n^{\log_b a}$, sondern polynomial größer und zusätzlich die „Regularitätsbedingung“ $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ erfüllen.

Beispiel 1 $T(n) = 9T(n/3) + n$
$a = 9,\ b = 3,\ f(n) = n$ und somit $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$. Da $f(n) = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$ mit $\epsilon = 1$ gilt, können wir Fall 1 anwenden und schlussfolgern, dass $T(n) = \Theta(n^2)$ gilt.

Beispiel 2 $T(n) = T(2n/3) + 1$
$a = 1,\ b = 3/2,\ f(n) = 1$ also $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$ da $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1) \Rightarrow$ Lösung: $T(n) = \Theta(\lg n)$

Beispiel 3 $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
$a = 3,\ b = 4,\ f(n) = n \lg n$ also $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0{,}793})$ Da $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + \epsilon})$ mit $\epsilon \approx 0,2$ gilt, kommt Fall 3 zur Anwendung $\Rightarrow T(n) = \Theta(n \lg n)$

Die Mastermethode ist auf $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$ nicht anwendbar auch wenn sie die korrekte Form hat: $a = 2,\ b = 2,\ f(n) = n \lg n$. Das Problem besteht darin, dass $f(n)$ nicht polynomial größer ist als $n^{\log_b a}$. Das Verhältnis $f(n)/(n^{\log_b a}) = (n \lg n)/n = \lg n$ ist asymptotisch kleiner als n^ϵ für jede Konstante $\epsilon > 0$.

III.12. Probabilistische Algorithmen (zufallsgesteuerte Algorithmen)

04.05.2005

Numerische Algorithmen $\approx 1950 \rightarrow$ Integration.

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n$$

- Monte-Carlo Methode $n = 2$ ¿¿ komische Graphiken ¡¡

Das Konzept wurde 1976 von Rabin effektiver formuliert.

III.12.1. Einführung

Wir beginnen mit der Definition eines deterministischen Algorithmus nach Knuth.

1. Eine Berechnungsmethode ist ein Quadrupel (Q, I, O, F) mit $I \subset Q, O \subset Q, f : Q \rightarrow Q$ und $f(p) = p', \forall p \in J$. Q ist der Zustand der Berechnung, I: Eingabe, O: Ausgabe und f: Berechnungsregeln.
   - Jedes $x \in J$ ergibt eine Folge $x_0, x_1, \ldots$ die durch $x_{k+1} = f(x_k), k \geq 0, x_0 = x$ definiert ist.
   - Die Folge terminiert nach k Schritten (K: kleiner als die k's, sodass gilt: $x_k \in O$
2. Eine Algorithmus ist eine Berechnungsmethode, die in endlich vielen Schritten für alle $x \in I$ terminiert.
3. Ein deterministischer Algorithmus ist eine formale Beschreibung für eine *endliche*, *definite* Prozedur, deren Ausgaben zu beliebigen Eingaben *eindeutig* sind.

Hauptmotivation zur Einführung von probalistischen Algorithmen stammt aus der Komplexitätsanalyse. Man unterscheidet zwischen dem *Verhalten im schlechtesten Fall* und dem *Verhalten im mittleren Fall* eines Algorithmus. Diese Fälle sind festgelegt, sobald das Problem und die Daten bestimmt sind.
Die hervorgehobenen Wörter in den Definitionen eines deterministischen Algorithmus sind die Schlüssel zur Definition von drei Arten von probalistischen Algorithmen:

1. Macao-Algorithmus (1. Art) (auch Sherwood Algorithmus)
   - mindestens bei einem Schritt der Prozedur werden einige Zahlen zufällig ausgewählt (nicht definit)
   - sonst: deterministisch

   $\Rightarrow$ immer eine korrekte Antwort

   Wird benutzt, wenn irgendein bekannter Algorithmus (zur Lösung eines bestimmten Problems) im mittleren Fall viel schneller als im schlechtesten Fall läuft.

2. Monte-Carlo-Algorithmus (2. Art)
   - gleich wie Algorithmus 1. Art (nicht definit)
   - mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \epsilon$, wobei ϵ sehr klein ist (nicht eindeutig)

   $\Rightarrow$ immer eine Antwort, wobei die Antwort nicht unbedingt richtig ist
   ($\epsilon \to 0$ falls $t \to \infty$)

3. Las-Vegas-Algorithmus (3. Art)
   - Gleich wie Macao-Algorithmus (nicht definit).
   - Eine Folge von zufälligen Wahlen kann unendlich sein (mit einer Wahrscheinlichkeit $\epsilon \to 0$) (nicht endlich).

III.12.2. Macao-Algorithmen („Nähestes-Paar"-Algorithmus)

Problem: $x_1, ..., x_n$ seien n Punkte in einem k-dimensionalen Raum R^k. Wir möchten das näheste Paar x_i, x_j finden, sodass gilt:

$$d(x_i, x_j) = \min\{d(x_p, x_q)\} \qquad (1 \leq p < q \leq n),$$

wobei d die gewöhnliche Abstandsfunktion aus R^k ist.

III.12.3. Brute-Force-Methode („Brutaler Zwang"-Methode)

Evaluiert alle $\frac{n(n-1)}{2}$ relevanten gegenseitigen Abstände.
$\Rightarrow$ minimaler Abstand
$\Rightarrow O(n^2)$

III.12.4. Deterministische Algorithmen (Yuval)

$\Rightarrow O(n \log n)$

Idee: man wählt eine Hülle $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und sucht das näheste Paar innerhalb dieser Hülle.

Schlüsselidee: eine Teilmenge von Punkten wird zufällig ausgewählt $\Rightarrow$ Parl. (???) Alg. (Macaos) mit $O(n)$ und mit sehr günstiger Konstante.

1. Wähle zufällig $S_1 = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$
   $m = n^{2/3}$
   m = Kardinalität S_1 (= Anzahl von Elementen in S_1)

2. Berechne $\delta(S_1) = \min\{(x_p, x_q)\}$
   für $x_p, x_q \in S_1 \Rightarrow O(n)$
   Wir iterieren einmal den gleichen Algorithmus für S_1, indem man $S_2 \subset S_1$ mit $c(S_2) = m^{2/3} = n^{4/9}$ zufällig auswählt.
   $\ldots O(n)$

3. Konstruieren eines quadratischen Verbandes Γ mit der Netzgröße (*mesh size*) $\delta = \delta(S_1)$.

4. Finde für jedes Γ_i die Dekomposition $S = S_1^{(i)} \cup \ldots \cup S_k^{(i)}, 1 \leq i \leq 4$ (anders als Hashing-Techniken)

5. $\forall x_p, x_q \in S_j^{(i)}$ berechne $d(x_p, x_q) \Rightarrow$ Das nächste Paar ist unter diesen Paaren zu finden.
   Leite ab aus Γ durch Verdopplung der Netzgröße auf 2δ

Lemma zu 3.: Gilt $\delta(S) \leq \delta$ (δ ist Netzgröße von Γ), so existiert ein Verbandpunkt y auf Γ, so dass das nächste Paar im Quadrupel von Quadraten aus Γ direkt und rechts von y liegt.
$\Rightarrow$ es ist garantiert, dass das nächste Paar x_i, x_j aus S innerhalb eines gleichen Quadrats aus Γ_i liegt $(1 \leq i \leq 4)$

III.12.5. Monte-Carlo-Algorithmus

$\rightarrow$ Miller-Rabin Primzahl Algorithmus
Ganze Zahlen: 2 Probleme

- Primzahltest
- Faktorisierung

Algorithmus stellt fest, ob eine Zahl n prim ist (pseudo-prim). In diesem Algorithmus werden m Zahlen $1 \leq b_1, \ldots, b_m < n$ zufällig ausgewählt. Falls für eine gegebene Zahl n und irgendein $\epsilon > 0$ $\log_2 \frac{1}{\epsilon} \leq m$ gilt, dann wird der Algorithmus die korrekte Antwort mit Wahrscheinlichkeit größer als (1-ϵ) liefern.
Grundidee: Ergebnisse aus Zahlentheorie (*Millers Bedingung*) für eine ganze Zahl b.

09.05.2005

Einschub Modular-Arithmetik (Gauß (1801))

Definition Seien $a, b, N \in \mathbb{Z}$. Dann schreibt man:

$$a \equiv b \ (mod\ N) \Leftrightarrow N \mid (a - b)$$

„|“ bedeutet „teilt“

Beispiele

- $7 \mod 5 = 2$
- „mod 5“ bedeutet Rechnen mit $0, 1, 2, 3, 4$
- $a \equiv b \mod N \wedge c \equiv d \mod N \Rightarrow a + c \equiv (b + d) \mod N$
- $a \mod N + b \mod N = (a + b) \mod N$

Witnessfunktion

Für eine ganze Zahl b erfülle $W_n(b)$ folgende Bedingungen:

1. $1 \leq b < n$
2. a) $b^{n-1} \neq 1 \mod n$ oder

   b) $\exists i : 2^i | (n-1)$ und $1 < \text{ ggT}(b^{\frac{n-1}{2^i}} - 1, n) < n \left[\frac{n-1}{2^i} \equiv m\right]$

Eine ganze Zahl, die diese Bedingung erfüllt, wird *Zeuge (witness)* für die Teilbarkeit von m genannt.
$\overset{2a}{\Rightarrow}$ Die *Fermat'sche Relation* ist verletzt. (Fermat: $b^{n-1} \equiv 1 \; mod \; n$) $\overset{2b}{\Rightarrow}$ n hat einen echten Teiler $\Rightarrow$ ist n teilbar, so gilt $W_n(b)$ (**FIXME:** Stimmt das so?) $\Rightarrow$ n ist keine Primzahl.
Ist n teilbar, so gibt es viele Zeugen.

Theorem (Anzahl der Zeugen) Wenn $n \geq 4$ teilbar ist, dann gilt

$$3(n-1)/4 \leq c(\{b | 1 \leq b < n, W_n(b) \text{ gilt } \})$$

$\Rightarrow$ nicht mehr als $1/4$ der Zahlen $1 \leq b < n$ sind keine Zeugen.

Algorithmus: Rabins Algorithmus

Eingabe: n ungerade, ganze Zahl mit $n > 1$
Ausgabe: $b = \pm 1$, falls entschieden ist, dass n prim ist
$b = 0$, falls n teilbar ist

RABIN(n)

```
1  Wähle zufällig a aus 1 ≤ a < n
2  Faktorisiere (n − 1) zu 2^l m so, dass n − 1 = 2^l m, m ungerade
3  (Teste) b = a^m mod n, i = 1
4  while b ≠ −1 und b ≠ 1 und i < l
5        do b ← b^2 mod n
6           i ← i + 1
7  if b = 1 oder b = −1
8     then n ist Primzahl (prime)
9     else n ist keine Primzahl (composite), (b = 0)
```

Bemerkung: Der Algorithmus braucht $m(2+l)\log_2(n)$ Schritte $\Rightarrow$ sehr effizient.

III.12.6. Las-Vegas-Algorithmen

Beispiel 1: M sei eine n-elementige Menge, $S_0, \ldots, S_{k-1} \subseteq S$ mit $|S_i| = r > 0$ seien paarweise verschiedene Teilmengen von S, $k \leq 2^{r-2}$
Wir wollen die Elemente von M so mit den Farben *rot* und *schwarz* färben, dass S_i wenigstens *ein* rotes und *ein* schwarzes Element enthält.

Beispiel 2: Rabin (1980)
Problem: irreduzible Polynome in endlichen Körpern zu finden.
irreduzibel: ∃ kein Teiler, d.h.

$$n \text{ ist irreduzibel} \Leftrightarrow \forall b: \text{ nicht } b|n$$

d.h. $Q(x)$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ ∃ kein Polynom $q(x)$ so dass $q(x)|Q(x)$

Algorithmus: Irreduzibles Polynom

Eingabe: Primzahl p und ganze Zahl n
Ausgabe: irreduzibles Polynom

Algorithmus

```
0  repeat
1     Generiere ein zufälliges Polynom g ∈ GF(p)[n] (FIXME: Stimmt das so?)
2     Teste die Irreduzibilität
3  until Erfolg
```

Bemerkung: Die Irreduzibilität wird durch 2 Theoreme geprüft:

Theorem (Prüfung auf Irreduzibilität) Seien $l_1, \ldots, l_n$ alle Primteiler von n und bezeichne $n/l_i = m_i$. Ein Polynom $g(x) \in GF(\phi)[x]$ vom Grad n ist irreduzibel in $GF(\phi)$:⇔

1. $g(x)|(x^{p^n} - x)$
2. $\text{ggT}(g(x), x^{p^{m_i}} - n) = i$ für $1 \leq i \leq k$

III.13. Gierige Algorithmen

auch: *greedy algorithms* bzw. *Raffke-Algorithmen*

- normalerweise sehr einfach
- zum Lösen von Optimierungsproblemen

Typische Situation: Wir haben

- eine Menge von Kandidaten (Jobs, Knoten eines Graphen)
- eine Menge von Kandidaten, die schon benutzt worden sind
- eine Funktion, die feststellt, ob eine bestimmte Menge von Kandidaten eine Lösung zu diesem Problem ist
- eine Funktion, die feststellt, ob eine Menge von Kandidaten eine zulässige Menge ist, um die bisherige Menge so zu vervollständigen, dass mindestens eine Lösung gefunden wird
- eine Wahlfunktion (*selection function*), die in beliebiger Zeit den geeignetsten Kandidaten aus den unbenutzten Kandidaten bestimmt.
- eine Zielfunktion (*target function*), die den Wert einer Lösung ergibt (die Funktion, die zu optimieren ist)

III.13.1. Beispiel:

Wechselgeldausgabe an einen Kunden

Kandidaten: Menge von Geldstücken $(1, 5, 10, \dots)$, wobei jede Sorte aus mindestens einem Geldstück besteht

Lösung: Gesamtbetrag

Zulässige Menge: die Menge, deren Gesamtbetrag die Lösung nicht überschreitet

Wahlfunktion: Wähle das am höchsten bewertete Geldstück, das noch in der Menge der Kandidaten übrig ist

Zielfunktion: Die Anzahl der in der Lösung benutzten Geldstücke

Bemerkung: Gierige Algorithmen arbeiten schrittweise:

1. Zu Beginn ist die Liste der Kandidaten leer.
2. Bei jedem Schritt versucht man, mit Hilfe der Wahlfunktion den besten Kandidaten hinzuzufügen.
3. Falls die erwartete Menge nicht mehr zulässig ist, entfernen wir den gerade hinzugefügten Kandidaten. Er wird später nicht mehr berücksichtigt.
4. Falls die gewählte Menge noch zulässig ist, gehört der gerade Kandidat dieser Menge für immer an
5. Nachdem wir die Menge erweitert haben, überprüfen wir, ob die Menge eine Lösung des gegebenen Problems ist.

III.13.2. Gierige Algorithmen abstrakt:

$C = \{$Menge aller Kandidaten$\}$
$S \leftarrow \emptyset$ $\{$Lösungsmenge$\}$

GREEDY-ALGORITHM

```
1  while nicht Lösung(S) und C ≠ ∅
2        do x ← ein Element aus C, das Wahl(X) maximiert
3           C ← C \ x
4  if Lösung(S)
5     then return S
6     else return „keine Lösung“
```

III.13.3. Beispiel

Minimale, zusammenhängende Bäume

Einführung Sei $G =< N, A >$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph

- N: Menge von Knoten
- A: Menge von Kanten (Wobei jeder Kante eine nichtnegative Länge zugeordnet wird)

11.05.2005

Problem Finde eine Teilmenge T von A, so dass alle Knoten zusammenhängend bleiben, wenn man nur die Kanten aus T benutzt. Dabei soll die Kantenlänge aus T so klein wie möglich gehalten werden.

FIXME: Bild vom Baum

Terminologie

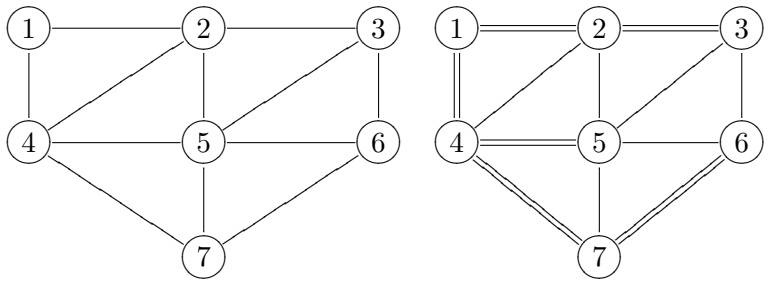
1. Eine Menge von Kanten ist eine `Lösung`, wenn sie einen zusammenhängenden Baum bildet.
2. Sie ist `zulässig`, wenn sie keinen Zyklus enthätlt.
3. Eine zulässige Menge von Kanten heißt `günstig` $\Rightarrow$ optimale Lösung.
4. Eine Kante `berührt` eine gegebene Menge von Kanten, wenn genau ein Ende der Kante ein Element aus dieser Menge ist.

III.13.4. Kruskalscher Algorithmus

Beispiel Die aufsteigende Reihenfolge der Kantenlänge ist:
$\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\},\{1,4\},\{2,5\},\ \{4,7\},\{3,5\},\{2,4\},\{3,6\},\{5,7\},\{5,6\}$

Schritte	Berücksichtigte Kanten	Zusammengebundene Komponenten
Initialisierung	–	$\{1\}\{2\}\{3\}\ldots\{7\}$
1	$\{1,2\}$	$\{1,2\}\{3\}\{4\}\ldots\{7\}$
2	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}\{4\}\{5\}\ldots\{7\}$
3	$\{4,5\}$	$\{1,2,3\}\{4,5\}\{6\}\{7\}$
4	$\{6,7\}$	$\{1,2,3\}\{4,5\}\{6,7\}$
5	$\{1,4\}$	$\{1,2,3,4,5\}\{6,7\}$
6	$\{2,5\}$	nicht angenommen
7	$\{4,7\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$

T enthält die Kanten $\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\},\{1,4\}$ und $\{4,7\}$



Initialisierung Schritt 7

Algorithmus Kruskal

- $find(x)$, der feststellt in welcher Komponente der Knoten x zu finden ist.
- $merge(A,B)$: Mischen von zwei disjunkten Mengen

ALGORITHMUS KRUSKAL($G =< N, A >$)

Input: N, A (mit Längenangabe)
Output: Menge von Kanten

Initialisierung
1 Sortiere A nach aufsteigender Länge
2 $n = \sharp N \triangleright \sharp$ Anzahl Knoten
3 $T \leftarrow \emptyset \triangleright$ Lösungsmenge
4 Initialisiere n disjunkte Mengen, wobei jede Menge ein Element aus N enthält.
5 **repeat**
6 $\{u, v\} \leftarrow$ noch nicht berücksichtigte, kürzeste Kanten
7 ucomp $\leftarrow$ find(u) $\triangleright$ In der Menge der bereits verbundenen Kanten
8 vcomp $\leftarrow$ find(v)
9 **if** ucomp $\neq$ vcomp
10 **then** merge(ucomp, vcomp)
11 $T \leftarrow T \cup \{\{u, v\}\}$
12 **until** $T = n - 1$
13 **return** T

Analyse: n Knoten, a Kanten

- $O(a \log a)$: Kanten zu sortieren $\left[n - 1 \leq a \leq \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow \approx O(n \log n)\right]$
- $O(n)$: n disjunkte Mengen zu initialisieren
- „find“ and „merge“. Höchstens $2a$ Operationen (find), $n - 1$ Operationen (merge) $\rightarrow$ „worst case“ $O((2a + n - 1) \log^* n)$

Def: $\log^{(0)} n = n$
$\log^{(k)} n = \log(\log^{k-1} n)$ $k \geq 1 \Rightarrow \log^* n = min\left\{i | \log^{(i)}(n) \leq 1\right\}$

Man erhält:

n	$\log^* n$
1	0
2	1
3,4	2
$5 \rightarrow 16$	3
$17 \rightarrow 65536$	4

$\Rightarrow \log^*$ wächst sehr langsam. Höchstens $O(a)$ für die restlichen Operationen.

III.13.5. Primscher Algorithmus

ALGORITHMUS PRIM($G =< N, A >$)

Initialisierung
1 $T \leftarrow \emptyset$
2 $B \leftarrow$ {ein willkürliches Element aus N}
Greedy-Schleife
3 **while** $B \neq N$
4 **do** Finde $\{u, v\}$ von minimaler Länge, so dass $u \in N \backslash B$ und $v \in B$
5 $T \leftarrow T \cup \{\{u, v\}\}$
6 $B \leftarrow B \cup \{u\}$
7 **return** T

Schritt	$\{u, v\}$	B
Initialisierung	-	$\{1\}$
1	$\{2, 1\}$	$\{1, 2\}$
2	$\{3, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$
3	$\{4, 1\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
4	$\{5, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
5	$\{7, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
6	$\{6, 7\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Analyse und Vergleich:
Hauptschleife (Prim) $(n-1)$mal ausgeführt.
Bei jeder Iteration benötigen die for-Schleifen eine Zeit von $O(n) \Rightarrow O(n2)$ für Prim.
Kruskal $O(a \log n)$

- Für dicht besetzte Graphen:

$$a \approx \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow O(n^2 \log n)$$

  $\Rightarrow$ Prim ist „besser“.

- Für dünn besetzte Graphen:

$$a \approx n \Rightarrow O(n \log n)$$

  $\Rightarrow$ Prim ist „weniger effizient“.

Kürzeste Pfade (im „Skript“)
(Dijkstra-Algorithmus)

III.13.6. Zeitplanerstellung (Scheduling)

Komplexitätsklassen: P, NP

$$P =^{?} NP$$

Das P/NP-Problem ist ein offenes Problem der theoretischen Informatik, speziell der Komplexitätstheorie.

Es ist die Frage, ob die Klasse NP, der von nichtdeterministischen Turingmaschinen in Polynomialzeit entscheidbaren Probleme, mit der Klasse P, der von deterministischen Turingmaschinen in Polynomialzeit entscheidbaren Probleme, übereinstimmt.

> Es ist also lediglich zu zeigen, dass das Finden einer Lösung für ein Problem wesentlich schwieriger ist, als nur zu verifizieren, ob eine gegebene Lösung korrekt ist. Dies ist allerdings bisher noch nicht gelungen. [...]
>
> Das P/NP-Problem gilt derzeit als die wichtigste Fragestellung der Informatik überhaupt und wurde vom Clay Mathematics Institute in seine Liste der Millennium-Probleme aufgenommen. (Wikipedia)

Problem: Ein Server (Prozessor, Kassiererin einer Bank, ...) habe n Kunden in einem gegebenem System zu bedienen.
Bedienzeit für jeden Kunden ist bekannt: Bedienzeit t_i für Kunde i ($1 \leq i \leq n$)

$$T = \sum_{i=1}^{n} (\text{Gesamtzeit für Kunde } i)$$

Wir möchten T minimieren.

Beispiel: $n = 3,\ t_1 = 5,\ t_2 = 10,\ t_3 = 3 \Rightarrow 3! = 6$ Reihenfolgen möglich

Reihenfolge 123 bedeutet Kunde 1 wird bedient und Kunde 2 und 3 warten.

Reihenfolge	T	
123	5+(5+10)+(5+10+3) = 38	
132	5+(5+3)+(5+3+10) = 31	
213	10+(10+5)+(10+5+3) = 43	
231	10+(10+3)+(10+3+5) = 43	
312	3+(3+5)+(3+5+10) = 29	← Optimum
321	3+(3+10)+(3+10+5) = 34	

III.13.7. Greedy-Algorithmus

Füge ans Ende des Zeitplans $t_{i_1} + \ldots + t_{i_m}$ den Kunden ein, der am meisten Zeit benötigt.
Dieser triviale Algorithmus liefert die korrekte Anwort für {3,1,2}.

Theorem: Dieser Algorithmus ist immer optimal.

III.13.8. Zeitplanerstellung mit Schlußterminen (deadline)

Beispiel: $n = 4$

i	g_i	d_i
1	50	2
2	10	1
3	15	2
4	30	1

→ Reihenfolge (3,2) wird nicht berücksichtigt, da dann Auftrag 2 zum Zeitpunkt $t = 2$ nach Schlußtermin $t = 1$ verarbeitet wird.

Reihenfolge	Gewinn	
1	50	
2	10	
3	15	
4	30	
(1,3)	65	
(2,1)	60	
(2,3)	25	
(3,1)	65	
(4,1)	80	←
(4,3)	45	

⇒ es ist nicht notwendig alle $n!$ Auftragsfolgen zu untersuchen. Es genügt eine Auftragsfolge in der Reihenfolge aufsteigender Schlußtermine zu untersuchen (→ (4,1), aber nicht (1,4)).

III.14. Teile und Herrsche

18.05.2005

Die Effizenz der Teile und Herrsche-Methode liegt darin, dass Teilinstanzen schneller gelöst werden können als das Gesamtproblem.

ALGORITHMUS TEILE & HERRSCHE $DQ(x)$

```
1  if (x ist klein genug oder einfach)
2     then return ADHOC(x)
3  Teile x in kleinste Teilinstanzen, x_1, x_2, ..., x_k
4  for i ← 1 to k
5        do y_i ← DQ(z_i)
6  Kombiniere die y_is um eine Lösung y für x zu erhalten.
```

ADHOC: Grundalgorithmus zur Lösung der Teilinstanzen
Spezialfall: Wenn $k = 1 \Rightarrow$ Vereinfachung statt Teile und Herrsche

Bedingungen

- Es ist möglich eine Instanz in Teilinstanzen zu teilen
- Es ist möglich die Teilergebnisse effizient zu kombinieren
- Die Größe der Teilinstanzen soll möglichst gleich sein
- Problem: Grundalgorithmus anstatt weiter rekursiv zu arbeiten
- Es muss gut überlegt werden, wie man den Grenzwert wählt

Beispiele

- Binäres Suchen
- Mergesort
- Quicksort

III.14.1. Quicksort (C.A.R. Hoare, 1960)

Die Funktionsweise und Analyse von Quicksort steht in nahezu allen Algorithmenbüchern.

QUICKSORT(A,P,R)

```
1  if p < r
2     then q ← PARTITION(A, p, r)
3          QUICKSORT(A, p, q − 1)
4          QUICKSORT(A, q + 1, r)
```

PARTITION$(A, p, r) \Rightarrow A[p, \ldots, r]$ neu geordnet.

```
1  x ← A[r]
2  i ← p − 1
3  for j ← p to r − 1
4        do if A[j] ≤ x
5              then i ← i + 1
6                   exchange A[i] ↔ A[j]
7  exchange A[i + 1] ↔ A[r]
8  return i+1
```

ZEILEN 3-6

```
1  if p ≤ k ≤ i
2     then A[k] ≤ x
3  if i + 1 ≤ k ≤ j − 1
4     then A[k] > x
5  if k = r
6     then A[k] = x
```

III.14.2. Selektion und Median

Sei $T[1, \ldots, n]$ eine Reihung der ganzen Zahlen. m ist der Median von $T \Leftrightarrow$

1. $m \in T$
2. $\sharp\{i \in [1, \ldots, n] \mid T[i] < m\} < n/2$ und
   $\sharp\{i \in [1, \ldots, n] \mid T[i] \leq m\} \leq n/2$

So sind auch die Möglichkeiten berücksichtigt, bei denen m ungerade ist oder nicht alle Elemente von T verschieden sind.

Naiver Algorithmus

Die Reihung ist in aufsteigender Ordnung zu sortieren und man erhält das $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-te Element. Mit MERGESORT benötigt man dafür eine Zeit von $O(n \log n)$.

Selektion-Problem

T ist Reihung der Größe n, sowie $k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq n$. Das k-te kleinste Element von T ist m, so dass

$$\sharp\{i \in [1, \ldots, n] \mid T[i] < m\} < k \text{ während}$$
$$\sharp\{i \in [1, \ldots, n] \mid T[i] \leq m\} \geq k$$

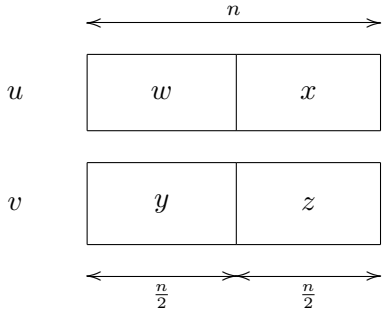
Es ist also das k-te Element aus T, wenn die Reihung in aufsteigender Ordnung sortiert ist. Analog zum Quicksort ist es möglich folgenden Algorithmus zu entwerfen, um dieses Element zu finden:

```
SELEKTION(T[1,...,n], k)
 1  if n ist klein
 2     then SORT(T)
 3          return T[k]
 4  p ← irgendein Element aus T[1,...,n]
    {p ist unser „Pivot"-Element}
 5  u ← ♯{i ∈ [1,...,n] | T[i] < p}
 6  v ← ♯{i ∈ [1,...,n] | T[i] ≤ p}
 7  if k ≤ u
 8     then array U[1,...,n]
 9          U ← die Elemente aus T kleiner als p
            {das kleinste Element aus T ist auch das kleinste Element aus U}
10          return SELECTION(U, k)
11  if k ≤ v
12     then return p {Die Lösung}
13     else array V[1,...,n − v]
14          V ← die Elemente aus T größer als p
            {das k-te kleinste Element aus T, ist auch das (k − v)-te kleinste Element aus V}
15          return SELECTION(V, k − v)
```

Welches Element aus T sollen wir als Pivotelement p benutzen? Die beste Wahl ist sicherlich der Median von T, so dass die Größen von U und V möglichst gleich sind.

III.14.3. Langzahlarithmetik

Multiplikationen zweier ganzen Zahlen von n Dezimalziffern wobei n sehr groß sein kann.



$$\begin{array}{rclcccl} u & = & 10^s w + x & \quad & 0 & \leq & x \leq 10^s \\ v & = & 10^s y + z & & 0 & \leq & z \leq 10^s \end{array}$$

Wir suchen das Produkt

$$uv = 10^{2s} wy + 10^s (wz + xy) + xz$$

Das führt zum Algorithmus

```
MULT(u, v)
1  n ← die kleinste ganze Zahl so dass u und v von Größe n sind
2  if n klein
3     then return CLASSIC-PRODUCT(u, v)
4  s ← n div 2
5  w ← u div 10^s; x ← u mod 10^s
6  y ← v div 10^s; z ← v mod 10^s
7  return
8  MULT(w, y) · 10^(2s) + (MULT(w, z) + MULT(x, y)) · 10^s + MULT(x, z)
```

Eine triviale Verbessung wird dadurch erreicht, dass man den letzten Schritt durch folgendes ersetzt:

```
1  r ← MULT(w + x, y + z)
2  p ← MULT(w, y)
3  q ← MULT(x, z)
4  return p · 10^(2s) + (r − p − q) · 10^s + q
```

Bemerkungen

- Die Komplexitätsanalyse zeigt, dass der Algorithmus eine Zeit von $O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1,59})$ benötigt
- mittels „Schneller Fourier-Transformation“ und Teile & Herrsche kann die Komplexität auf $O(n \cdot \log n \cdot \log\log n)$ reduziert werden.
- Eine spezielle Version dieses Algorithmus ist als „Karatsuba-Algorithmus“ bekannt. Sei n gerade mit $n = 2m$ und u,v ganze Zahlen der Länge n (in Bits):

$$\begin{aligned} u &= a2^m + b \\ v &= c2^m + d \\ w &= uv = y2^{2m} + (x - y - z)2^n + z \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} x &= (a + b)(c + d) \\ y &= ac \\ z &= bd \end{aligned}$$

III.14.4. Matrixmultiplikation

A, B: 2 $n \times n$-Matrizen; $C = A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
m_1 &= (a_{21} + a_{22} - a_{11})(b_{22} - b_{12} + b_{11}) \\
m_2 &= a_{11}b_{11} \\
m_3 &= a_{12}b_{21} \\
m_4 &= (a_{11} - a_{21})(b_{22} - b_{12}) \\
m_5 &= (a_{21} - a_{22})(b_{12} - b_{11}) \\
m_6 &= (a_{12} - a_{21} + a_{11} - a_{22})b_{22} \\
m_7 &= a_{22}(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} m_1 + m_3 & m_1 + m_2 + m_5 + m_6 \\ m_1 + m_2 + m_4 + m_7 & m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \end{pmatrix}
$$

Normalerweise hat der Algorithmus eine Komplexität von $\Theta(n^2)$. Hier jedoch nur $\Theta(n)$.

III.15. Abstrakte Datentypen (ADT)

23.05.2005

III.15.1. Bool

Signaturen

- Konstruktoren:
  Wahr: Bool
  Falsch: Bool

- Destruktoren:
  $\wedge, \vee$: Bool $\times$ Bool $\to$ Bool
  $\neg$: Bool $\to$ Bool

Axiome

$x \wedge$ Wahr $= x$
$x \wedge$ Falsch $=$ Falsch
$x \vee$ Wahr $=$ Wahr
$x \vee$ Falsch $= x$
$\neg$Wahr $=$ Falsch
$\neg x =$ Wahr
(von oben nach unten die erste passende Regel anwenden)

III.15.2. Schlange (queue, fifo)

Signaturen

- Konstruktoren:
  $\perp$: Schlange a
  Einf: $a \times$ Schlange $a \to$ Schlange a

- Destruktoren:
  kopf: Schlange $a \to a$
  schwanz: Schlange $a \to$ Schlange a

- Verhalten:
  länge: Schlange $a \to$ Int

Axiome

Seien S: Schlange a, x: a
kopf(Einf(x,$\perp$))=x
kopf(Einf(x,S))=kopf(S)
schwanz(Einf(x,$\perp$)) = $\perp$
schwanz(Einf(x,S))=Einf(x,schwanz(S))
länge($\perp$)=0
länge(Einf(x,S))=1+länge(S)

Eine konkrete Implementierung muss natürlich nicht $\Theta(n)$ für Kopf haben.

Bewusst ausgelassen wurde schwanz($\perp$) da die Behandlung dieses Falles den Umfang der Axiome erhöhen würde da, würde man einen Fehler einführen, dieser sich durch alle Axiome durchschlängeln müsste. (Was 6 zusätzliche Axiome bedeuten würde)

III.15.3. First In Last Out – Keller, Stack

Signaturen

Stack a

- Konstruktoren:
  $\perp$: Keller a
  push: ($a \times$ Keller a) $\to$ Keller a

- Destruktoren:
  top: Keller $a \to a$
  pop: Keller $a \to$ Keller a

- Verhalten:
  laenge: Keller $a \to$ Int

Axiome

Seien K:Keller a, x:a
top(push(x,K)) = x
pop(push(x,K)) = K
laenge($\perp$) = 0
laenge(push(x,K))=1+laenge(K)

Normalformen

Kann man auf einen Ausdruck A kein Axiom mehr anwenden, so ist eine Normalform erreicht.

Beispiel

- A = push(3,pop(push(2,⊥))
  = push (3,⊥) Normalform!!
- top(⊥)

III.15.4. Liste

Signaturen

list a

- Konstruktoren:
  ⊥ : list a
  Cons: $a \times$ list $a \rightarrow$ list a
- Destruktoren:
  head: list $a \rightarrow a$
  tail: list $a \rightarrow$ list a

Axiome

head(cons(x,L))=x
tail(cons(x,L))=L

III.15.5. Konkrete Implementierung

Verkettete Liste

→[Element][Zeiger]→
Die Liste ist dann ein Verweis (Zeiger) auf ein Listenelement. **FIXME:** skizze von listenelement

- type Listenelement a
  Element:a
  next: ↑Listenelement a
- type Liste a
  kopf: ↑Listenelement a

Wie geht man mit einer leeren Liste um?

1. Möglichkeit:
   spezieller Speicherbereich (Nil,Null,NULL,...)
2. Möglichkeit: Selbstverweis **FIXME:** skizze

(Wir entscheiden uns für erste Möglichkeit)

- tail(L: Liste a) : Liste a
  if L.kopf = Nil then error "..."
  else
  L.kopf = L.Kopf.next
  return L

- head(L:Liste a):a
  if L.kopf = Nil then error "..."
  else
  return L.kopf.Element

- cons (x:a, l:Liste a):Liste a
  ne = new(Listenelement a)
  ne.element = x
  ne.next = l.Kopf
  L.Kopf=↑ne
  return l

III.16. Hash-Funktionen

Problem:

Gegeben: $D_1, .., D_n$ Datensätze, $n \in \{1, .., N\}$ mit zugehörigen Schlüsseln: $k_i, i \in \{1, .., n\}$
{Schlüssel: Indexierbarer Datentyp, d.h. k_i sind geordnet und $D_i \neq D_j \Rightarrow k_i \neq k_j$ }

Gesucht:

Ist Datensatz D in $D_1, .., D_n$ enthalten?

Lösung:

- Speichere $D_1, .., D_n$ in Liste
- Suchaufwand im worst case $\Theta(n)$

Vereinfachung: N ist zwar gross aber nicht riesig groß...

- A: Reihung (Array) [1,..,N]
- Speichere in A an alle Plätze "leer"
- Füge alle $D_1, \ldots, D_n$ in Stelle k_i ein $i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow$ Suchaufwand $\Theta(1)$

Problem:

Meist ist N zu groß! z.b. 2^{64} mögliche Schlüssel, aber „nur" bla 2^{20} Datensätze...

Deshalb: Hash-Funktion

Suche eine Funktion n mit $h : N \to \{1, \ldots, m\}$ mit $m > n$ aber $m << N$
Dann initialisiere die Reihung $A[1, \ldots, m]$ wieder mit „leer“ und füge D_i an Stelle $h(k_i)$ ein
D_i=A$[h(k_i)]$

Problem:

h kann nicht injektiv sein. d. h.:
Es gibt y und z mit $h(x) = h(y)$ aber $x \neq y \Rightarrow$ Kollision (h: Hashfunktion)

Lösung:

verkettetes Hashen statt D_i speichere Liste D_i
FIXME: skizze [ ][$h(k_i)$][ ][ ][ ][ ][ ] — -→ $[D_i, D_j]$
$h(k_i) = h(k_j), i \neq j$
25.05.2005 h muss gut gewählt werden, sonst verkettete Liste, also $\Theta(n)$!

2. Lösung (Sondierung):

Idee: Im Fall einer Kollision suche deterministisch den nächsten freien Platz.

Konkret: Sondierungsfunktion $S : \{0, .., m\} \to \mathbb{N}$
Ist der Platz $h(k_i)$ schon belegt, dann teste für $j = 1, 2, 3 \ldots$

$$h'(k_i, j) = (h(k_i) + S(J)) \; mod \; m$$

Sobald eine Stelle frei ist, speichere den Datensatz D_i dort. Es ist dann $h'(k_i, j) \neq h(k_i)$, d.h. der Datensatz steht auch später nachvollziehbar an der falschen Stelle. Ist $j = m$ und S ist injektiv, dann ist die Tabelle voll. Folgende Situationen können auftreten:

1. Beim Versuch D_i an der Position $h(k_i)$ zu speichern, ist die Position mit einem Datensatz D_j belegt und $h(k_i) = h(k_j)$: *Kollision erster Ordnung*
2. Ist $h(k_i) \neq h(k_j)$: *Kollision zweiter Ordnung*

Wie suche ich? Tritt eine Kollision auf, d. h. $h(k_i)$ ist belegt, suche weiter bei $h'(k_i, j)$ für $j = 1, 2, 3 \ldots$ bis entweder

- D_i gefunden,
- die aktuelle Position leer ist $\Rightarrow$ D_i ist nicht in der Tabelle,
- $j = m \Rightarrow$ Tabelle ist voll

Beispiele:

- Lineares Sondieren: $h'(k_i, j) = (h(k_i) + j) \; mod \; m$
- Quadratisches Sondieren: $h'(k_i, j) = (h(k_i) + c_1 j^2 + c_2 j) \; mod \; m$
- Doppeltes Hashen: $h'(k_i, j) = (h(k_i) + j h_1(k_i)) \; mod \; m$, h_1 eine weitere Hashfunktion

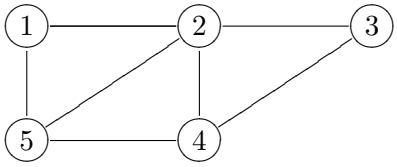
Problem: Wie lösche ich ein Element? Wenn einfach „leer“ in die tabelle eingetragen wird, dann werden Elemente unter Umständen nicht mehr gefunden. Die Suche kann fehlschlagen.

Lösung: Trage „gelöscht“ ein.

Beispiel: $0, \ldots, D_i, D_j, \ldots, m$, $h(k_i) = h(k_j)$ (Lineares Sondieren) Nach Löschen von D_i kann D_j nicht mehr gefunden werden, falls nicht „gelöscht“ eingetragen wurde.

III.17. Graphenalgorithmen und Datenstrukturen für Graphen

Frage: Wie speichere ich einen Graphen im Rechner?



Beispielgraph

III.17.1. 1. Möglichkeit: Adjazenzliste

1	$\rightarrow$	[2,5]
2	$\rightarrow$	[1,5,4,3]
3	$\rightarrow$	[2,4]
4	$\rightarrow$	[5,2,3]
5	$\rightarrow$	[1,2,4]

III.17.2. 2. Möglichkeit: Adjazenzmatrix

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

III.17.3. Speicherbedarf:

- Worst-Case
  - Adjazenzliste: $\Theta(n^2)$ Knoten
  - Adjazenzmatrix: $\Theta(n^2)$ Bits
- Best-Case
  - Adjazenzliste: $\Theta(n)$
  - Adjazenzmatrix: $\Theta(n^2)$

III.17.4. Zugriff auf eine Kante:

- Worst-Case
  - Adjazenzliste: $\Theta(n)$
  - Adjazenzmatrix: $\Theta(1)$
- Best-Case
  - Adjazenzliste: $\Theta(1)$
  - Adjazenzmatrix: $\Theta(1)$

III.17.5. Einfache Graphenalgorithmen:

Suche im Graphen: z.B. gibt es einen Ausweg aus dem Labyrinth?
Einfacher: Gibts es einen Weg von Knoten A nach Knoten B?

III.17.6. Einfache Strategien:

Tiefensuche:

Idee: Im Knoten k mit Kanten $E_1, \ldots, E_j$:
Nimm Kante E_1 und suche dort weiter.
Stoße ich auf eine Sackgasse, gehe eins zurück und nimm dort E_2 usw.

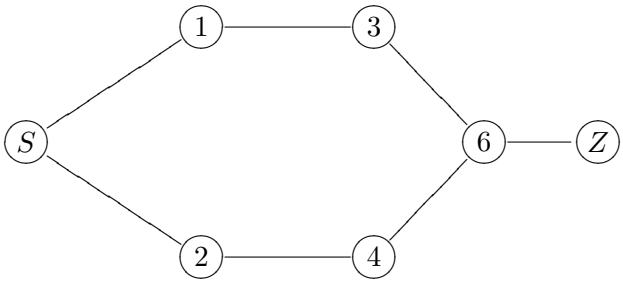
Konkret: Benutze einen Keller K (Knoten)
Am Anfang enthält der Keller den Startknoten.
Wiederhole:
Ist K_j=top(K) das Ziel $\Rightarrow$ fertig
Sonst: pop(K), push($K_{j1}, \ldots, K_{jl}, K$), wobei $K_{j1}, \ldots, K_{jl}$ die Folgeknoten von K_j sind.

Breitensuche:

Idee: Gehe erst einmal einen Schritt bei allen Nachfolgeknoten. Ist das Ziel dann noch nicht gefunden, gehe zwei Schritte usw.

Konkret: Benutze eine Schlange $Schl$
Am Anfang enthält $Schl$ nur den Startknoten.
Wiederhole:
$K_i = Kopf(Schl)$
ist K_i das Ziel $\Rightarrow$ Heureka!
sonst $Einfügen(K_{i1}, \ldots, K_{ij}, tail(S))$, wobei $K_{i1}, \ldots, K_{ij}$ die Folgeknoten von K_i sind.

Beispiele:



Beispielgraph

Tiefensuche: Zu Beginn: [S] ← Keller $\Rightarrow push(1, 2, K) \Rightarrow K = [2, 1, S] \Rightarrow push(4, S, pop(K))$ $\Rightarrow K = [1, 4, S] \Rightarrow$ Der nächste Schritt beginnt wieder bei S. Ausweg: Zufällige Reihenfolge beim *push*

Breitensuche: Zu Beginn: [S] ← Schlange
$\Rightarrow einfügen(1, 2, Schl) \Rightarrow Schl = [2, 1]$
$\Rightarrow einfügen(3, S, tail(Schl)) \Rightarrow Schl = [S, 3, 2]$
$\Rightarrow einfügen(S, 4, tail(Schl)) \Rightarrow Schl = [4, S, S, 3] \ldots$

III.18. Binäre Suchbäume

30.05.2005

(nach Cormen) Suchbäume sind Datenstrukturen. Sie sind nützlich für Operationen auf dynamischen Mengen (Größe und Elemente sind nicht fest!) wie z.B. SEARCH, MINIMUM, MAXIMUM, PREDECESSOR, SUCCESSOR, INSERT oder DELETE.

III.18.1. Definition/Einführung

Ein binärer Suchbaum(B.S.) ist als binärer Baum (siehe Abbildung III.1) organisiert. Außer dem Attribut *Schlüssel* sind für jeden Knoten noch die Attribute *links* (linker Sohn), *rechts* (rechter Sohn) und p(Vater) gegeben. Wenn ein Sohn oder der Vater fehlt, erhält dieses Attribut den Wert *NIL*[2]. Der Wurzelknoten ist der einzige Knoten dessen Vater *NIL* ist.

Die Schlüssel werden immer so gespeichert dass die folgende Binäre-Suchbaum-Eigenschaft (B.S.E.) immer erhalten bleibt:

- Sei x Knoten in einem binären Suchbaum. Wenn y ein Knoten im linken Teilbaum von x ist, dann gilt
$$schlüssel[y] \leq schlüssel[x]$$
- Wenn y ein Knoten im rechten Teilbaum von x ist, dann gilt
$$schlüssel[x] < schlüssel[y]$$

III.18.2. Traversierung

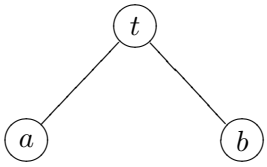
Die B.S.E. erlaubt mittels einem einfachen rekursiven Algorithmus alle Schlüssel eines B.S. in sortierter Reihenfolge auszugeben.

[2]Not In List

⇒ In-Order-Traversierung (es wird zuerst der linke Teilbaum, dann die Wurzel und danach der rechte Teilbaum ausgegeben (a, t, b))

Es gibt auch noch zwei andere Arten der Traversierung (auf diese wird hier aber nicht näher eingegangen):

- Pre-Order-Traversierung (die Wurzel wird vor den beiden Teilbäumen ausgegeben (t, a, b))
- Post-Order-Traversierung (die Wurzel wird nach den beiden Teilbäumen ausgegeben (a, b, t))



InOrderTreeWalk(x)
1 **if** $x \neq NIL$
2 **then** InOrderTreeWalk($links[x]$)
3 print schlüssel[x]
4 InOrderTreeWalk($rechts[x]$)

Beispiel Die InOrder-Traversierung des Baumes in Abbildung III.1 ergibt: $2, 3, 5, 5, 7, 8$

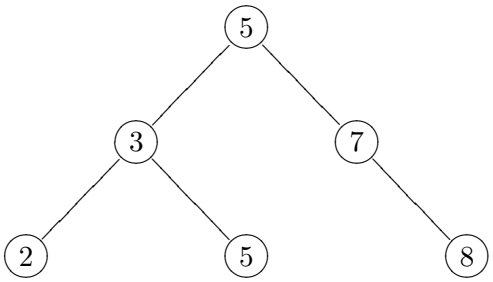


Abbildung III.1.: Beispiel InOrder-Traversierung

Theorem Wenn x die Wurzel eines Teilbaums mit n Knoten ist, dann benötigt InOrderTreeWalk die Zeit $O(n)$.

III.18.3. Suchen

Abfragen in einem B.S. machen sich ebenfalls die B.S.E. zu nutze um schneller zum Ziel zu gelangen.

TreeSearch(x, k)
1 **if** $x = NIL$ oder $k = schlüssel[x]$
2 **then return** x
3 **if** $k < schlüssel[x]$
4 **then return** TreeSearch($links[x], k$)
5 **else return** TreeSearch($rechts[x], k$)

Beispiel Die Abfragen nach 13 und 8 liefern für den Baum x aus Abbildung III.2 folgende Ergebnisse:

- TreeSearch$(x, 13)$: $15 \overset{\text{L}}{\to} 6 \overset{\text{R}}{\to} 7 \overset{\text{R}}{\to} 13 \Rightarrow 13$
- TreeSearch$(x, 8)$: $15 \overset{\text{L}}{\to} 6 \overset{\text{R}}{\to} 7 \overset{\text{R}}{\to} 13 \overset{\text{L}}{\to} NIL \Rightarrow NIL$

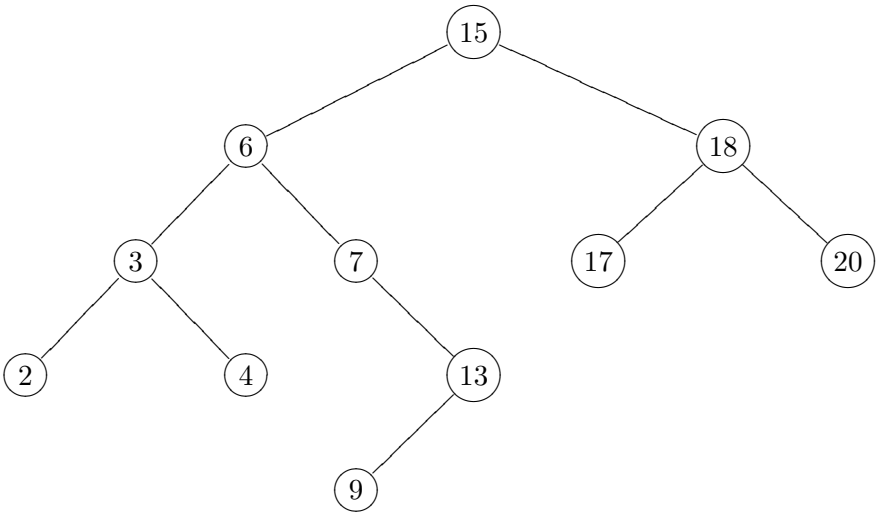


Abbildung III.2.: Beispiel-Baum x

Das Finden des Elementes dauert dabei $O(h)$, wobei h für die Höhe des Baumes steht.

Die gleiche Prozedur kann auch iterativ geschrieben werden (d.h. in Form einer **while** - Schleife)

```
IterativeTreeSearch(x, k)
1  while x ≠ NIL und k ≠ schlüssel[x]
2        do if k < schlüssel[x]
3              then x ← links[x]
4              else  x ← rechts[x]
5  return x
```

III.18.4. Minimum und Maximum

```
TreeMinimum(x)
1  while links[x] ≠ NIL
2        do x ← links[x]
3  return x
```

```
TreeMaximum(x)
1  while rechts[x] ≠ NIL
2        do x ← rechts[x]
3  return x
```

III.18.5. Vorgänger und Nachfolger

TreeSuccessor(x)

```
1  if rechts[x] ≠ NIL
2     then return TreeMinimum(rechts[x])
3  y ← p[x]
4  while y ≠ NIL und x = rechts[y]
5        do x ← y
6           y ← p[y]
7  return y
```

TreePredecessor(x)

```
1  if links[x] ≠ NIL
2     then return TreeMaximum(links[x])
3  y ← p[x]
4  while y ≠ NIL und x = links[y]
5        do x ← y
6           y ← p[y]
7  return y
```

III.18.6. Theorem

Die Operationen Search, Minimum, Maximum, Predecessor und Successor für dynamische Mengen, können auf einem B.S. der Höhe h in der Zeit $O(h)$ ausgeführt werden.

III.18.7. Einfügen und Löschen

WICHTIG: Beim Einfügen und Löschen soll die B.S.E. beibehalten werden.

⇒ „Einfügen“: relativ unkompliziert

⇒ „Löschen“: etwas kniffelig

Einfügen Mit der Prozedur TreeInsert soll ein Wert v in den B.S. T eingefügt werden. Als Parameter bekommt sie den Knoten z, für den $schlüssel[z] = v$, $links[z] = NIL$ und $rechts[z] = NIL$ gilt.

TreeInstert(T, z)

```
 1  y ← NIL
 2  x ← Wurzel[T]
 3  while x ≠ NIL
 4        do y ← x
 5           if schlüssel[z] < schlüssel[x]
 6              then x ← links[x]
 7              else  x ← rechts[x]
 8  p[z] ← y
 9  if y = NIL
10     then Wurzel[T] ← z
                {T war also leer}
11  if schlüssel[z] < schlüssel[y]
12     then links[y] ← z
13     else  rechts[y] ← z
```

Der Algorithmus beginnt an der Wurzel des Baum und arbeitet sich an einem Pfad nach unten. Der Zeiger x verfolgt den Pfad und y wird als Vater von x gehalten.

Nach der Initialisierung bewirkt die **while** -Schleife (Zeilen 3-7) dass diese beiden Zeiger im Baum abwärts laufen und dabei nach links oder rechts gehen (durch Vergleich der Schlüssel).

Dies geschiet so lange bis x gleich NIL gesetzt wird. Dieses NIL belegt den Platz an dem wir das Eingabeelement z einfügen wollen. Die Zeilen 8-13 setzen die Zeiger so, dass das Element x gerade an der Stelle eingeführt wird ⇒ Zeitaufwand $O(h)$. 01.06.05

Löschen Argument: Zeiger auf z
Die Prozedur unterscheidet die drei (in 12.4) gezeigten Fälle.

- Falls z keine Kinder hat, modifizieren wir seinen Vater $p[z]$ so, dass sein Kind durch NIL ersetzt wird.
- Falls z nur ein Kind hat, schneiden wir z aus, indem wir eine Verbindung zwischen seinem Kind und seinem Vater einfügen.
- Falls z zwei Kinder hat, nehmen wir z's Nachfolger y heraus, der kein linkes Kind hat und ersetzen den Schlüssel und die Satellitendaten von z durch Schlüssel und Satellit von y.

III.18.8. Theorem

Die Operationen Insert und Delete können so implementiert werden, dass sie auf einem binären Suchbaum der Höhe h in der Zeit $O(h)$ laufen.

III.19. Rot.Schwarz-Bäume

Binäre Suchbäume ⇒ Search, Successor, Predecessor, Minimum, Maximum, Insert und Delete ⇒ $O(n)$
Verbesserung ist möglich ⇒ $O(lgn)$

III.19.1. Eigenschaften von R.S.Bäumen

Ein R.S-Baum ist ein binärer Suchbaum, der ein zusätzliches Bit Speicherplatz zur Verfügung stellt. Diese Bit dient seiner Farbe: rot oder schwarz.

FIXME: Bild: R.S-Baum

Attribute: farbe, schlüssel, links, rechts und p
Wenn ein Kind oder der Vater eines Knotens nicht existiert, dann erhält das entsprechende Zeigerattribut den Wert NIL.

Eigenschaften Ein binärer Suchbaum ist ein R.S-Baum, falls er die folgenden Eigenschaften, die als R.S-Eigenschaften bezeichnet werden, erfüllt.

1. Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.
2. Die Wurzel ist schwarz.
3. Jedes Blatt (NIL) ist schwarz.
4. Wenn ein Knoten rot ist, dann sind seine beiden Kinder schwarz.

5. Für jeden Knoten enthalten alle Pfade, die an diesem Knoten starten und in einem Blatt des Teilbaums dieses Knotens enden, die gleiche Anzahl schwarzer Knoten.

Lemma

Ein R.S-Baum mit n inneren Knoten hat höchstens die Höhe $2lg(n+1)$

Beweis: Der Teilbaum zu einem beliebigen Knoten x hat mindestens $2^{bh(x)}-1$ innere Knoten.

IA Höhe von $x = 0$:
$2^0 - 1 = 0$

IV es ist wahr für n:
$2^{bh(x)} - 1$ innere Knoten

IS nächster Schritt:
$(2^{bh(x)-1} - 1) + (2^{bh(x)-1} - 1) + 1 = 2^{bh(x)} - 1$

$\Rightarrow$ Operationen SEARCH, SUCCESSOR, PREDECESSOR,
MINIMUM, MAXIMUM für dynamische Mengen auf R.S-Bäumen können in der Zeit $O(lgn)$ implementiert werden, da sie auf einem Suchbaum der Höhe h in der Zeit $O(h)$ laufen.

III.19.2. Rotationen

Um die Zeigerstruktur zu verändern, benutzen wir eine Rotation.

06.06.2005 **FIXME:** Beispiel

III.19.3. Einfuegen

"Introduction to Algorithms, Chapter 13.3, Second Edition"

- Rot-Schwarz-Baum mit n Knoten $\Rightarrow O(lgn)$
- eine leicht modifizierte Version der Tree-Insertion
- Anschliessend färben wir den Knoten rot. Um sicherzustellen, dass die Rot-Schwarz-Eigenschaften erhalten bleiben rufen wir $RB_Insert_Fixup(T, z)$ um die Knoten neu zu färben. $\Rightarrow$ um die Knoten neu zu färben Rotation auszufuehren.

RB-INSERT(T, z)

```
 1  y ← nil[T]
 2  x ← wurzel[T]
 3  while x ≠ nil[T]
 4        do y ← x
 5           if schlüssel[z] < schlüssel[x]
 6              then x ← links[x]
 7              else  x ← rechts[x]
 8  p[z] ← y
 9  if y = nul[T]
10     then wurzel[T] ← z
11  elseif schlüssel[z] < schlüssel[y]
12     then links[y] ← z
13     else  rechts[y] ← z
14  links[z] ← nil[T]
15  rechts[z] ← nil[T]
16  farbe[z] ← ROT
17  RB-INSERT-FIXUP(T, z)
```

Es gibt vier Unterschiede zwischen TREE-INSERT und RB-INSERT

1. alle Instanzen von NIL in TREE-INSERT werden durch $nil[T]$ ersetzt

2. wir setzen $links[z]$ und $rechts[z]$ (Zeilen 14,15 RB-INSERT) auf $nil[T]$ um die korrekte Baumstruktur aufrecht zu erhalten.

3. wir färben z rot (in Zeile 16 von RB-INSERT)

4. wegen einer mögliche Verletzung der Rot-Schwarz-Eigenschaft durch Schritt 3 rufen wir RB-INSERT-FIXUP(T, z) auf, um die RS-Eigenschaften wieder herzustellen.

RB-INSERT-FIXUP(T, z)

```
 1  while farbe[p[z]] = ROT
 2        do if p[z] = links[p[p[z]]]
 3              then y ← rechts[p[p[z]]
 4                   if farbe[y] = ROT
 5                      then farbe[p[z]] ← SCHWARZ                  ▷ FALL1
 6                           farbe[y] ← SCHWARZ                     ▷ FALL1
 7                           farbe[p[p[z]]] ← ROT                   ▷ FALL1
 8                           z ← p[p[z]]                            ▷ FALL1
 9                   elseif z = recht[p[z]]
10                      then z ← p[z]                               ▷ FALL2
11                           LEFT-ROTATE(T, z)                      ▷ FALL2
12                   farbe[p[z]] ← SCHWARZ                          ▷ FALL3
13                   farbe[p[p[z]]] ← ROT                           ▷ FALL3
14                   RIGHT-ROTATE(T, p[p[z]])                       ▷ FALL3
15     else  (wie then-Zweig mit "rechts" und "links" vertauscht)
16  farbe[wurzel[T]] ← SCHWARZ
```

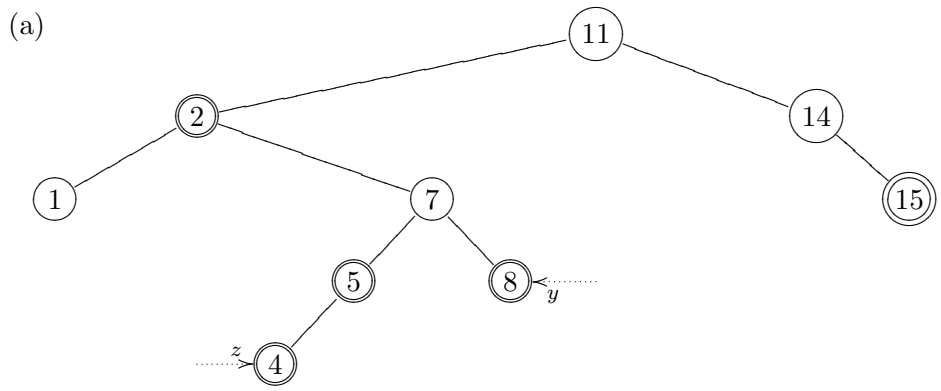


Abbildung III.3.: 13.4 (a)

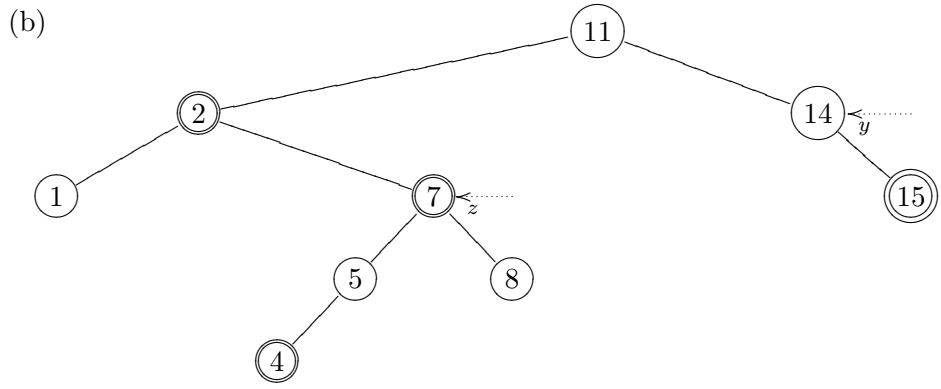


Abbildung III.4.: 13.4 (b)

(a) da z und sein Vater p[z] beide rot sind erfolgt eine Verletzung der Eigenschaft 4. Da der Onkel y von Z rot ist, kann Fall 1 des Codes angewendet werden. Die Knoten werden neu gefärbt und der Zeiger z wird im Baum nach oben bewegt, wodurch der in (b) gezeigte Baum entsteht.

(b) wieder sind z sein Vater p[z] beide rot, aber z's Onkel y ist schwarz. Da z das rechte Kind von p[z] ist kann Fall 2 angewendet werden. Eine LinksRotation wird durchgefuehrt und der dadurch entstandene Baum wird in (c) gezeigt.

(c) Nun ist z das linke Kind seines Vaters und Fall 3 kann angewendet werden.

(d) Eine Rechtsrotation fuehrt zu dem Baum gezeigt in (d), welches ein korrekter Baum ist.

Welche rot-schwarz Eigenschaften koennen durch den Aufruf von RB-Insert-Fixup verletzt sein?

Eigentschaft 1 und 3 gelten mit Sicherheit weiterhin, denn beide Kinder des neu eingefaerbten roten Knotens sind der Waechter nil[T]. Eigenschaft 5 ist erfuellt, weil der Knoten z den (schwarzen) Waechter ersetzt und Knoten z rot ist mit Waechter-Kindern.
Also koennen nur die Eigenschaften 2 (Wurzel ist schwarz → falls z die Wurzel ist)) und 4 (keine roten Kinder fuer rot Vater → falls der Vater von z rot ist) verletzt sein. Eigenschaft 2 ist Verletzt, wenn z die Wurzel ist, Eigenschaft 4 wenn z's Vater rot ist.

Die while-Schleife (Zeilen 1 - 15) enthält die folgende dreiteilige Schleifeninvariante:
Zu Beginn jeder Iteration der Schleife gilt:

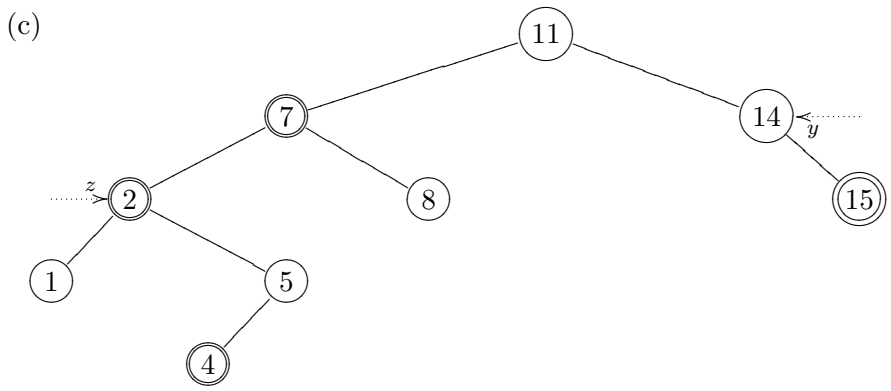


Abbildung III.5.: 13.4 (c)

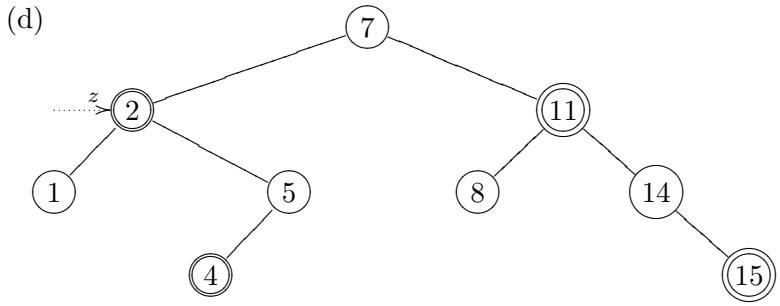


Abbildung III.6.: 13.4 (d)

a. Knoten z ist rot.

b. falls p[z] die wurzel ist, dann ist p[z] schwarz.

c. falls es eine Verletzung der rot-schwarz Eigenschaften gibt, so gibt es hoechstens eine solche Verletzung. Entweder von Eig. 2 oder von Eig. 4. Wenn Eig. 2 verletzt wird, dann weil z die Wurzel ist und weil z rot ist. Eine Verletztung der Eigenschaft 4 tritt auf, wenn z und p[z] beide rot sind.

Initialisierung:

rot-schwarz-Baum ohne Verletzungen und roter Knoten z hinzugefuegt. Wir zeigen, dass zu dem Zeitpunkt zu dem RB-Insert-Fixup angerufen wird, jeder Teil der Schleifeninvariante gilt:

a) Wenn RB-Insert-Fixup aufgerufen wird ist z der rote Knoten der hinzugefuegt wurde.

b) wenn p[z] die Wurzel ist war p[z] anfangs schwarz und seine Farbe hat sich vor dem Aufruf von RB-Insert-Fixup nicht geaendert.

c) Wir haben schon gesehen, dass die Eigenschaften 1,3 und 5 gelten.
Wenn es eine Verletzung der Eig. 2 gibt, dann muss die rote Wurzel der neu hinzugefügte Knoten z sein, welches der einzige innere Knoten des Baumes ist. Da der Vater und beide Kinder von z der (schwarze) Waechter sind gibt es nicht auch noch eine Verletzung der Eigenschaft 4.
$\Rightarrow$ die Verletzung der Eigenschaft 2 ist die einzige Verletzung der rot-schwarz Eigenschaften.

Wenn es eine Verletzung der Eigenschaft 4 gibt, dann weil die Kinder des Knoten der schwarze Waechter sind und der Baum vor dem hinzufügen von z, keine andere Verletzungen hatte. Die Verletzung muss daher ruehren, dass z und p[z] rot sind. Weiterhin gibt es keine Verletzungen der rot-schwarz Eigenschaften.

Terminierung:

keine moegliche Verletzung der 4. (weil p[z] schwarz ist)
Die einzige Verletzung ist fuer 2.
aber zeilen 16 $\Rightarrow$ alles ist gut.

Fortsetzung:

Es existieren 6 Faelle die zu beachten sind. 3 davon sind zu den anderen symmetrisch. (links rechtsch)

je nachdem, ob z's Vater p[z] ein linkes oder rechtes Kind von z's Grossvater p[p[z]] ist. Fall 1 unterscheidet sich von Faellen 2 und 3 durch die Farbe, die der Bruder von z's Vater (Onkel) hat. Zeile 3 sorgt dafuer, dass y auf z's Onkel rechts[p[p[z]]] zeigt. in zeile 4 wird die Farbe getestet. Falls y rot ist wird Fall 1 ausgefuehrt. Anderenfalls sind die Faelle 2 und 3 auszufueheren. In allen drei Faellen ist der Grossvater p[p[z]] von z schwarz da p[z] rot ist. und eigenschaft 4 nur zwischen z und p[z] verletzt ist.

FIXME: Beispiel page 285 fig 13.5 Fall 1: z's Onkel ist rot. Fall 2: z ist ein rechtes Kind Fall 3: z's Onkel ist schwarz und z ist ein linkes Kind.

08.06.2005 **FIXME:** 3. bild (Falle 2 und 3 der RB-Insert) page 286 fig 13.6

III.20. Dynamisches Programmieren

III.20.1. Optimierungsproblem:

Zu einem Problem gibt es viele Lösungen, gesucht ist eine optimale (maximal, minimal) Lösung.

Beispiel: Labyrinth
Es gibt viele mögliche Wege zum Ausgang, gesucht ist der kürzeste.

Lösung: Vollständige Suche (Tiefensuche, Breitensuche).
Oft kann man Optimierungsprobleme mit der Methode der dynamischen Programmierung effizienter lösen. Entwicklung eines dynamischen Programms in vier Schritten (nach Cormen):

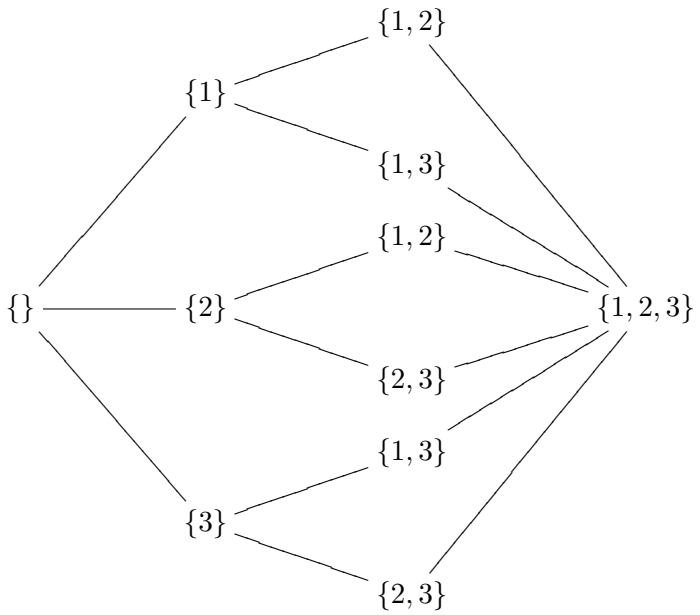
1. Charakterisiere die Struktur einer optimalen Lösung.
2. Definiere den Wert einer optimalen Lösung rekursiv.
3. Berechne den Wert „bottom-up“.
4. Verwendung von Zwischenergebnissen.

III.20.2. Beispiel:

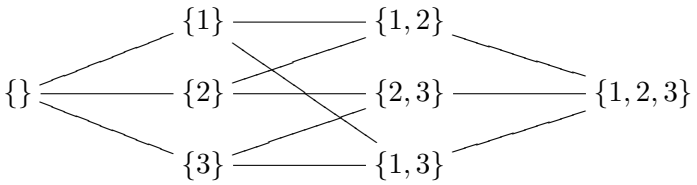
Gegeben: Matrizen $A_1, \ldots, A_n$ passend
Gesucht: $A_{1\ldots n} := A_1 * \ldots * A_n$ Optimierung: Möglichst wenig skalare Multiplikationen Beispiel: A_1 mit Format 10×100, A_2 mit Format 100×5 und A_3 mit Format 5×50. $(A_1 * A_2) * A_3$ benötigt 7500 Multiplikationen $A_1 * (A_2 * A_3)$ benötigt 75000 Multiplikationen

Aufstellen eines Baumes:

Idee: Nummeriere die Operatoren, bilde Mengen, z.B. bedeutet $\{i_1, i_2\}$, dass die Operationen i_1 und i_2 ausgeführt werden. Beispiel: $A_1 \ldots A_4$



Dieser Baum wird in einen sog. *Trellis (Tree-like-structure)* überführt:
(trellis: englisch fuer Gitter, Rankgitter)



Es gibt hier zwei Möglichkeiten, um z.B. zum Knoten $\{1, 2\}$ zu kommen:

1. Mit Kosten von $\{1\}$
2. Mit Kosten von $\{2\}$

Wähle die bessere!

Situation **FIXME:** Hier war ein Bild, aber ich kanns nicht entziffern!
Für die optimale Lösung ist nur der Pfad mit den geringsten Kosten interessant. Die anderen Pfade werden verworfen. Eine optimale Lösung muss einen optimalen Anfang haben.

Algorithmus:

Es ist nicht nötig, den Trellis aufzustellen. Es genügt jeweils eine Ebene, falls zu jedem Knoten alle Vorgänger und alle Nachfolger berechnet werden können.

Konkret:

- Vorgänger von $\{i_1, \ldots, i_k\}$
  Alle Teilmengen mit 1 Element weniger

- Nachfolger von $\{i_1, \ldots, i_k\}$
  Alle Teilmengen N von $\{1, \ldots, n\}$ mit $i_1, \ldots, i_k \in N$ und $|N| = k + 1$

III.20.3. Beispiel 2:

Fehlerkorrigierende Codes:

Begriffe:

- *Informationswort*
  $(i_0, \ldots, i_k) \in \mathbb{F}_2^k$

- Darstellung als Polynom
  $i(x) = \sum_{j=0}^{k} i_k x^j$

- *Generatorpolynom*
  $g(x) = \sum_{j=0}^{n-k} g_j x^j$

- Codewort als Polynom
  $c(x) = i(x)g(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$
  $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{F}_2^n$

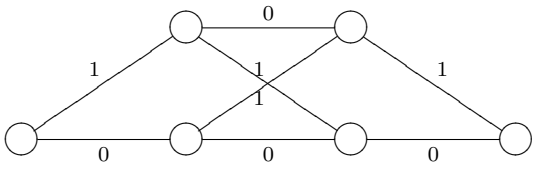
Kanalmodell:

Codewort $c \in \mathbb{F}_2^n \to$ moduliertes Codewort $m \in \mathbb{R}^n \to$ Empfangswort $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y = e + m$, Fehler $e \in \mathbb{R}^n$

Fragen: Wie komme ich zurück zu $0, 1$? Welches Codewort passt am besten zu y?
$c \to m$, $0 \mapsto 1 \in \mathbb{R}$, $1 \mapsto -1 \in \mathbb{R}$
Wie suche ich ein passendes Codewort?

Beispiel:

$i = (0, 1)$, $i(x) = x$, $g(x) = x + 1$, $c(x) = g(x)i(x) = x^2 + x \Rightarrow c = (0, 1, 1)$, $m = (1, -1, -1)$
$00 \mapsto (0, 0, 0)$
$01 \mapsto (0, 1, 1)$
$10 \mapsto (1, 1, 0)$
$11 \mapsto (1, 0, 1)$
Trellis:



Aufwandsanalyse:

Paritätscode: $k+1$-Bits
Es gibt 2^{k+1} Codeworte, $n = k+1$. Der Aufwand für das Durchsuchen ist im Trellis $(n+2)2)$.
FIXME: Hat jemand das mit dem Reed Solomon Code verstanden?? 13.06.05

III.21. Vorbestimmung und Vorberechnung

(vergleiche: AlgotechSkript Calmet 99/00, Kapitel 5)

III.21.1. Vorbestimmung

Einfuehrung

Sei I:Menge von Instanzen eines gegebenen Problems. Angenommmen $i \in I$ kann in zwei Komponenten $j \in J$ und $k \in K$ aufgeteilt werden, d.h.: $I \subseteq J \times K$.
Ein "Vorbestimmungsalgorithmus" (fuer dieses Problem) ist ein Algorithmus A der irgendein Element $j \in J$ als Eingabe akzeptiert und einen neuen Algorithmus B_j als Ausgabe liefert.

B_j genügt also folgender Bedingung:
$k \in K$ und $< j, k > \in I \Rightarrow$ Anwendung von B_j auf k liefert die Lösung zu $< j, k >$ (Originalproblem)

Beispiel:

J: Menge von Grammatiken für eine Familie von Programmiersprachen. (z.B.: Grammatiken in Backus-Naur-Form fuer Sprachen wie Algol, Pascal, Simula,...)
K: Menge von Programmen

Algemeines Problem: Ist ein gegebenes Programm bezüglich einer Sprache syntaktisch korrekt? In diesem Fall ist I die Menge von Instanzen des Typs

"Ist $k \in K$ ein gültiges Programm in der Sprache, die durch die Grammatik $j \in J$ definiert ist?"

Ein Möglicher Vorbestimmungsalgorithmus ist ein Compiler-Generator:
Angewendet auf die Grammatik $j \in J$ generiert er einen Compiler B_j. Danach um festzustellen, ob $k \in K$ ein Programm in der Sprache J ist, wenden wir einfach den Compiler B_j auf k an.
Es seien

$$\begin{aligned} a(j) &= \text{Zeit, um } B_j \text{ zu produzieren.} \\ b_j(k) &= \text{Zeit, um } B_j \text{ auf k anzuwenden.} \\ t(j,k) &= \text{Zeit, um } < j,k > \text{ direkt zu loesen.} \end{aligned}$$

Normalerweise gilt:

$$b_j(k) \leq t(j,k) \leq a(j) + b_j(k).$$

Vorbestimmung ist Zeitverschwendung wenn

$$b_j(k) > t(j,k).$$

Vorbestimmung kann in zwei Situationen sinnvoll sein:

(a) Man muss $i \in I$ sehr schnell lösen. (schnelle Antwort in Echtzeitanwendungen, wo es manchmal unpraktisch alle $\#I$ Lösungen zu den relevanten Instanzen im voraus zu berechnen und zu speichern. $\#J$ Algorithmen vorzubestimmen koennte jedoch von Vorteil sein. Z.B.:

(i) Einen laufenden Kern-Reaktor zu stoppen.

(ii) Die von einem Studenten verbrauchte Zeit zur Vorbereitung einer Prüfung.

(b) Wir müssen eine Reihe von Instanzen $< j, k_1 >, < j, k_2 >, \ldots, < j, k_n >$ mit gleichem j lösen.
Ohne Vorbestimmung: $t_1 = \sum_{i=1}^{n} t(j, k_i)$.
Mit Vorbestimmung: $t_2 = a(j) + \sum_{i=1}^{n} b_j(k_i)$
Wenn n gross genug ist, dann ist t_2 oft viel kleiner als t_1.

Beispiel:

J: Menge von Schlüsselwörtermengen
$J = \{\{if, then, else, endif\}, \{for, to, by\}, \ldots, \}$
K: Menge von Schlüsselwörtern
$K = \{begin, function, \ldots\}$ Wir müssen eine grosse Anzahl von Instanzen des folgenden Typs lösen:

"Gehört das Schlüsselwort $k \in K$ der Menge $j \in J$ an?"

Wenn wir jede Instanz direkt lösen, kommen wir auf $t(j, k) \in \Theta(n_j)$, wobei n_j die Anzahl der Elemente in der Menge j ist.

Idee: zunachst j Sortieren ($\Theta(n_j log(n_j))$ (Vorbestimmung) dann koennen binären Suchalgorithmus benutzen. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a(j) &\in \Theta(n_j log(n_j))(Sortieren) \\ b_j(k) &\in \Theta(log(n_j))(Suchen) \end{aligned}$$

Muss oft in der gleichen Menge(Instanz) gesucht werden, so ist das vorherige Sortieren gar nicht so dumm.

Vorgänger in einem Wurzelbaum

J: Menge aller Bäume
K: Menge von Knotenpaaren (Kanten) $< v, w >$

Für ein gegebenes Paar $k =< v, w >$ und einm gegebenen Baum j möchten wir feststellen, ob Knoten v der Vorgänger von w im Baum j ist. (Per def.: Jeder Knoten ist sein eigener Vorgänger)
Direkte Lösung dieser Instanz (schlimmster Fall): $\Omega(n)$. (j besteht aus n Knoten)

Es ist immer möglich, Vorbestimmung für j in Zeit $\Theta(n)$ durchzuführen, so dass wir eine bestimmte Instanz des Problems bezüglich j in $\Theta(1)$ lösen können.

FIXME: Beispielbaum mit 13 Knoten mit preorder(links) und postorder(rechts) nummerierung...

Vorbestimmung:
Pre-Order-Traversierung und Post-Order-Traversierung. Dabei nummerieren wir die Knoten wie sie durchlaufen werden. Für Knoten v sei $prenum[v]$ und $postnum[v]$ die ihm zugeordneten Nummern.

- Bei der Pre-Order-Traversierung nummerieren wir zunächst einen Knoten und dann die Teilbäume von links nach rechts.
- Bei der Post-Order-Traversierung nummerieren wir die Teilbäume eines Knotens von links nach rechts und danach den Knoten.

Es gilt:

$$prenum[v] \leq prenum[w] \Leftrightarrow v \text{ ist ein Vorgänger von } w \textbf{ oder } v \text{ ist links von } w$$

$$postnum[v] \geq postnum[w] \Leftrightarrow v \text{ ist ein Vorgänger von } w \textbf{ oder } v \text{ ist rechts von } w$$

Und somit:

$$prenum[v] \leq prenum[w] \textbf{ und } postnum[v] \geq postnum[w] \Leftrightarrow v \text{ ist ein Vorgänger von } w.$$

Wurde der Baum so in $\Theta(n)$ vorbereitet, so kann die Bedingung in $\Theta(1)$ gepruft werden.

Wiederholte Auswertung eines Polynoms

J: Menge der Polynome (in einer Variablen x)
K: Wertemenge von x

Problem: Auswertung

Bedingungen:

1) ganzzahliger Koeffizient
2) normierte Polynome (führender Koeffizient = 1; “monic”)
3) Grad $n = 2^k - 1, k \in \mathbb{N}$

Wir messen die Effizienz der verschiedenen Methoden an der Anzahl von Multiplikationen (Anzahl der Additionen nur zweitrangig)

Beispiel: $p(x) = x^7 - 5x^6 + 4x^5 - 13x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 5x - 17$
Naive Methode: Berechne zunaechst die Reihe von Werten $x^2, x^3, \ldots, x^7$, damit $5x, -10x^2, \ldots$, und dann $p(x)$.
$\Rightarrow$ 12 Multiplikationen und 7 Additionen.
leichte Verbesserung:

$$p(x) = ((((((x-5)x+4)x-13)x+3)x-10)x+5)x-17$$

$\Rightarrow$ 6 Multiplikationen und 7 Additionen.

Noch besser:

$$p(x) = (x^4+2)[(x^2+3)(x-5)+(x+2)] + [(x^2-4)x + (x+9))]$$

$\Rightarrow$ 5 Multiplikationen (2 zur Berechnung von x^2 und x^4) und 9 Additionen.

Wie:
$p(x)$ ist nach Vorrausetzung ein normiertes Polynom vom Grad $n = 2^k - 1$. Also koennen wir $p(x)$ so ausdrücken:

$$p(x) = (x^{\frac{n+1}{2}} + a)q(x) + r(x)$$

wobei a:konst.; $q(x)$ und $r(x)$ normierte Polyome vom Grad $2^{k-1} - 1$
Nun wird $p(x)$ als Polynom der Form $(x^i + c)$, wobei i eine 2-er Potenz ist, ausgedrückt:

$$p(x) = (x^4 + a)(x^3 + q_2 \cdot x^2 + q_1 \cdot x + q_0) + (x^3 + r_2 \cdot x^2 + r_1 \cdot x + r_0)$$

Koeffizientenvergleich:

$$q_2 = -5, q_1 = 4, q_0 = -13, a = 2, r_2 = 0, r_1 = -3, r_0 = 9$$

$$\Rightarrow p(x) = (x^4 + 2)(x^3 - 5x^2 + 4x - 13) + (x^3 - 3x + 9)$$

Ähnlich: $x^3 - 5x^2 + 4 \cdot x - 13 = (x^2 + 3)(x - 5) + (x - 2)$. Daraus erhält man das im Beispiel gegebene Ergebnis. (Diese Methode wurde von Belaga (im "Problemi Kibernitiki", vol 5, pp 7 – 15, 1961) vorgeschlagen.

III.21.2. Vorberechnung für Zeichenreihe-Suchprobleme

Problem:

$S = s_1 s_2 \dots s_n$ Zeichenreihe aus n Zeichen. (haystack, text) $P = p_1 p_2 \dots p_m$ Zeichenreihe aus m Zeichen. (needle, pattern) "Ist P eine Teilzeichenreihe von S?" und "Wo in S kommt P vor?"
OBdA: $n \geq m$

Naiver Algorithmus:

Liefert r, falls das erste Vorkommen von P in S in der Position r beginnt. (r ist die kleinste ganze Zahl, so dass $s_{r+i-1} = p_i, i = 1, 2, \dots, m$ gilt) Und 0 falls P keine Teilzeichenreihe von S ist.

..

```
 1  for i ← 0 to n − m
 2        do
 3           ok ← TRUE
 4           j ← 1
 5           while ok  &  j ≤ m
 6                 do if p[j] ≠ s[i + j]
 7                       ok ← FALSE
 8              else  j ← j + 1
 9  if ok return i + 1
10  return 0
```

Jede Position in S wird geprüft. Worst-Case: $\Omega(m(n-m)) \Rightarrow \Omega(nm)$, falls n viel grösser als m ist.
Es ist eine bessere Ausführung möglich, indem man verschiedene Methoden anwendet.

Signaturen

Sei $S = S_1, S_2, \ldots, S_n$ in Teilzeichenreihen zerlegt und falls P in S vorkommt muss P vollstaendig in einer der Teilzeichenreihen $S_l, 1 \leq l \leq n$ vorkommen. (z.b.: Zerlegung einer Textdatei in Zeilen) Grundidee: eine Boolesche Funktion T(P,S) benutzen. (sehr schnell berechnet) $T(P, S_i) = false \Rightarrow P \notin S_i$. Sonst: $P \in S_i$ möglich. (dann naiver Algorithmus...)

Mit Signaturen findet man ein einfaches Verfahren zur Implementation eines solchen Algorithmus.
Angenommen:

1) P ist a,b,c,..,y,z,other ("other": nicht-alphabetische Zeichen).

2) 32 Bit Rechner.

Eine mögliche Definition einer Signatur:

Definiton "Signatur":

(i) Definiere val("a")=0, val("b")=1,..., val("z")=25, val("other")=26

(ii) Falls c_1 und c_2 Zeichen sind, definiere:

$$B(c1, c2) = (27\text{val}(c1) + \text{val}(c2)) \mod 32$$

(iii) Definiere die Signaturen sig(C) einer Zeichenreihe $C = c_1 c_2 \ldots c_r$ als ein 32-Bit-Wort, wobeit die Bits mit den Nummern $B(c_1, c_2), B(c_2, c_3), \ldots, B(c_{r-1}, c_r)$ auf 1 und sonst auf 0 gesetzt sind.

Beispiel:

$C =$ "$computers$"

$$B(\text{“}c\text{”}, \text{“}o\text{”}) = (27 \times 2 + 14) mod 32 = 4$$

$$B(\text{“}o\text{”}, \text{“}m\text{”}) = (27 \times 14 + 12) mod 32 = 6$$

...

$$B(\text{“}r\text{”}, \text{“}s\text{”}) = (27 \times 17 + 18) mod 32 = 29$$

Wenn die Bit des Wortes von links nach rechts mit 0 bis 31 nummeriert werden, ist die Signatur dieser Zeichenreihe

$$sig(C) = 0000\ 1110\ 0100\ 0001\ 0001\ 0000\ 0000\ 0100$$

Nur 7 Bits sind auf 1 gesetzt, da $B(\text{“}e\text{”}, \text{“}r\text{”}) = B(\text{“}r\text{”}, \text{“}s\text{”}) = 29$ ist.
Wir berechnen jedes $sig(S_i)$, sowie $sig(P)$. Wenn $P \in S_i$ dann sind alle Bit die in der Signatur von P 1 sind, auch in der Signatur S_i auf 1 gesetzt.

$$T(P, S_i) = [sig(P) \textbf{ and } sig(S_i) = sig(P)]$$

(and: bitweise Konjunktion von zwei ganzen Wörtern.)
Berechnung der Signaturen in $O(n)$. Für Muster P brauchen wir $O(m)$. T(P,S) geht fix.

III.22. Vorberechnung für Zeichenreihen-Suchprobleme

20.06.2005

III.22.1. Algorithmus von Knuth-Morris-Pratt

Gegeben:

- lange Zeichenkette S (Text), Zeichen $1, \ldots, n$
- kurze Zeichenkette P (Suchwort), Zeichen $1, \ldots, m$

Gesucht:

- Finde die erste Position i, so dass

$$S[i+j] = P[j],\ j = 1, \ldots, m$$

  Also das erste Vorkommen von P in S.

Naive Methode

```
NaiveAlgorithm(S, P)
 1  n ← length(S)
 2  m ← length(P)
 3  i ← 0
 4  j ← 1
 5  while j ≤ m und i ≤ n − m
 6        do if P[j] = S[i + j]
 7              then j ← j + 1
 8              else  j ← 1
 9                    i ← i + 1
    { j Zeichen stimmten überein }
10  if j > m
11     then return i + 1
    { Suchwort nicht gefunden }
12  return -1
```

Der Algorithmus vergleicht P also zeichenweise mit S und verschiebt P um eins nach hinten, sobald ein Fehler auftritt. Kann auf diese Weise P komplett in S gefunden werden bricht der Algorithmus mit Erfolg ab (Startposition i von P in S, $i \geq 1$). Ansonsten läuft er S komplett durch und endet mit einem Fehler (-1).

S	=	A	B	R	A	K	A	D	A	B	R	A
P	=	**A**	K	A								
			A	K	A							
				A	K	A						
					A	**K**	**A**					

Aufwand im Worst-Case Das Wort P steht nicht in S und passt (fast) immer bis auf das letzte Zeichen $\Rightarrow \Theta(n \cdot m)$.
$\Rightarrow$ Versuche den Aufwand durch Vorberechnung zu reduzieren
$\Rightarrow$ KMP-Algorithmus

Idee: Optimiere das „Schieben“ und „Vergleichen“ indem man sich zuerst P genauer anschaut. Dazu wird eine Verschiebeliste ($next[j]$) auf Basis von P aufgebaut, aus der abgelesen werden kann, ob im Falle der Ungleichheit ab einem bestimmten Zeichen in P (Zeile) anschließend eventuell um mehr als 1 verschoben werden kann (vgl. Zeile).

j	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
$P[j]$	=	a	b	c	a	b	c	a	c	a	b			
			a	b	c	a	b	c	a	c	a	b		
				a	b	c	a	b	c	a	c	a	b	
					a	**b**	**c**	**a**	b	c	a	c	a	b
$next[j]$	=	0	1	1	0	1	1	0	5	0	1			

Um wie viel wird nun verschoben? Antwort $j - next[j]$

Aufwand: Im schlimmsten Foll kommt das erste Zeichen von P in S nicht vor $\Rightarrow$ es wird immer nur um 1 verschoben $\Rightarrow \Theta(n)$.
Für das Erstellen der Verschiebungstabelle fällt ein Zusatzaufwand an. Dieser kann aber vernachlässigt werden, da üblicherweise $m \ll n$ ist.

III.22.2. Algorithmus von Boyer-Moore

Idee Betrachte das Wort von hinten nach vorn,
DENN: wenn das aktuell betrachtete Zeichen (aus S) in P nicht vorkommt kann ich gleich um m schieben.

T	H	I	S		I	S		A		D	E	L	I	C	A	T	E		T	O	P	I	C	
C	A	T																						
			C	A	T																			
						C	**A**	T																
							C	A	T															
											C	A	T											
															C	**A**	**T**							

Aufwandsabschätzung

$$O\left(m + \tfrac{n}{m}\right) \text{ im best-case}$$

wenn das letzte Zeichen von P nicht in S vorkommt (falls $P \notin S$).

$$O(n) \text{ im worst-case}$$

wenn das letzte Zeichen von P auf (fast) jedes Zeichen von S passt (falls $P \notin S$).