

1. Komplexe Zahlen

$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ Für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir :
 $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d); (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$
Wir setzen abkürzend: $i := (0, 1)$ (**imaginäre Einheit**). Dann: $i^2 = (-1, 0)$

Satz 1.1

\mathbb{R}^2 ist mit obiger Addition und Multiplikation ein Körper. Dieser wird mit \mathbb{C} bezeichnet und heißt **Körper der Komplexen Zahlen**.

- (1) $(0, 0)$ ist das neutrale Element bzgl. der Addition. $(1, 0)$ ist das neutrale Element bzgl. der Multiplikation.
- (2) Für $(a, b) \in \mathbb{C}$ ist $(-a, -b)$ das inverse Element bzgl. der Addition Für $(a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ ist $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ das inverse Element bzgl. der Multiplikation

Beweis

Nachrechnen! ■

Definiere $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\varphi(a) := (a, 0)$ ($a \in \mathbb{R}$). Dann gilt:
 $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \varphi(0) = (0, 0), \varphi(1) = (1, 0)$. φ ist also ein injektiver Körperhomomorphismus. Also: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
Wir schreiben a statt $(a, 0)$ für $a \in \mathbb{R}$. Insbesondere: $i^2 = -1$.

Satz 1.2

Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
 $\operatorname{Re} z := a$ (**Realteil von z**), $\operatorname{Im} z := b$ (**Imaginärteil von z**)

Beweis

Sei $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$); $z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$
Eindeutigkeit: klar ■

Definition

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

- (1) $\bar{z} := a - ib$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**

- (2) $|z| := (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (= \|(a, b)\| = \text{eukl. Norm von } (a, b) \in \mathbb{R}^2)$ heißt **Betrag von z** ; $|z| \geq 0$

Geometrische Veranschaulichung von \mathbb{C} : Komplexe Ebene

$|z|$ = Abstand von z und 0

Satz 1.3

Seien $z, w \in \mathbb{C}$

- (1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}); z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}; \bar{\bar{z}} = z; z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w, \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w; |z| = 0 \iff z = 0$
- (2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}; \overline{\frac{1}{w}} = \frac{1}{\bar{w}}, \text{ falls } w \neq 0$
- (3) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|; |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- (4) $|\bar{z}| = |z|; |z|^2 = z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z; \text{ f\"ur } z \neq 0: \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- (5) $|zw| = |z| \cdot |w|; \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|} \text{ falls } w \neq 0$
- (6) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$
- (7) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Beweis

(1) - (5): nachrechnen!

(7) folgt aus (6) w\"ortlich wie in \mathbb{R}

$$(6) \quad |z + w|^2 \stackrel{(3)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \stackrel{(2)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$\stackrel{(1),(3)}{=} |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \quad \blacksquare$$

Polarkoordinaten

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad r := |z|$

Bekannt: $\exists \varphi \in \mathbb{R} : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

Dann: $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Die Zahl φ heißt **ein** Argument von z und wird mit $\arg z$ bezeichnet. Mit φ ist auch $\varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ein Argument von z .

Aber: es gibt genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Dieses φ heißt der **Hauptwert des Arguments** und wird mit $\operatorname{Arg} z$ bezeichnet.

Seien $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R})$.

Aus Additionstheoremen von Sinus und Cosinus folgt:

$$(*) \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Aus (*) folgt induktiv:

Satz 1.4 (Formel von de Moivre)

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Wurzeln:

Beachte: $z^0 := 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Definition

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt eine **n -te Wurzel aus a** .

Satz 1.5

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R})$

Für $k = 0, 1, \dots, n-1$ setze $z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right)$

Dann:

$$(1) \quad z_j \neq z_k \text{ für } j \neq k$$

$$(2) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} : z^n = a \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$$

Spezialfall: $a = 1$

$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \dots, n-1)$ n -te Einheitswurzeln

Beispiel

$a = 1, n = 4, z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (k = 0, \dots, 3)$

$z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i$

Beweis (von 1.5)

(1) Übung

$$(2) \quad " \Leftarrow " : z_k^n \stackrel{1.4}{=} |a| (\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = |a| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = a$$

$$" \Rightarrow " : \text{Sei } z^n = a \implies |z| = \sqrt[n]{|a|}, z \neq 0;$$

$$\text{Sei } z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z^n \stackrel{1.4}{=} \underbrace{|z|^n}_{=|a|} (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

$$\implies \cos \varphi = \cos(n\alpha), \sin \varphi = \sin(n\alpha)$$

$$\implies \exists j \in \mathbb{Z} : n\alpha = \varphi + 2\pi j \implies \alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi j}{n}$$

$$\exists l \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, n-1\} : j = ln + k$$

$$\implies \frac{j}{n} = l + \frac{k}{n} = \alpha = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\left(l + \frac{k}{n}\right) = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi l$$

$$\implies \cos \alpha = \cos \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \sin \alpha = \sin \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

$$\implies z = z_k$$

