§ 17 Das Integral im Komplexen

In diesem Paragraphen sei $\varnothing \neq X \in \mathfrak{B}_d, f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $u := \mathrm{Re}(f), v := \mathrm{Im}(f)$, also: $u, v : X \to \mathbb{R}, f = u + iv$.

Wir versehen $\mathbb{C}$ mit der σ-Algebra $\mathfrak{B}_2$ (wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$).

Definition
f heißt (Borel-)**messbar**, genau dann wenn gilt: f ist $\mathfrak{B}_d$-$\mathfrak{B}_2$-messbar.

Aus 3.2 folgt: f ist messbar genau dann, wenn u und v messbar sind.

Definition
Sei f messbar. f heißt **integrierbar** (ib.) genau dann, wenn u und v integrierbar sind. In diesem Fall setze

$$\int_X f \, \mathrm{d}x := \int_X u \, \mathrm{d}x + i \int_X v \, \mathrm{d}x \quad (\in \mathbb{C})$$

Es gilt: $|u|, |v| \leq |f| \leq |u| + |v|$ auf X. Hieraus und aus 4.9 folgt: f ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist.

Definition

$$\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C}) := \{f : X \to \mathbb{C} | f \text{ ist messbar und } \int_X |f|^p \, \mathrm{d}x < \infty\}$$

(Achtung: mit den Betragsstrichen in ob. Integral ist der komplexe Betrag gemeint!)

$$\mathcal{N} := \{f : X \to \mathbb{C} | f \text{ ist messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\}$$

$\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Vektorraum (siehe 17.1) und $\mathcal{N}$ ist ein Untervektorraum von $\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C})$.

$$L^p(X, \mathbb{C}) := \mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C}) / \mathcal{N}$$

Definition
Für $f, g \in L^2(X, \mathbb{C})$ setze

$$(f|g) := \int_X f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

sowie

$$f \perp g :\Longleftrightarrow (f|g) = 0 \qquad (f \text{ und } g \text{ sind } \textbf{orthogonal}).$$

($\overline{z}$ bezeichne hierbei die komplex Konjugierte von z, vgl. Lineare Algebra).

Klar:

(1) $L^p(X, \mathbb{C})$ ist mit $\|f\|_p := (\int_X |f|^p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$ ein komplexer normierter Raum (NR).

(2) $(f|g)$ definiert ein Skalarprodukt auf $L^2(X,\mathbb{C})$. Es ist

$$(f|g) = \overline{(g|f)},$$

$$(f|f) = \int_X f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_X |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \|f\|_2^2, \text{ also:}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} \quad (f,g \in L^2(X,\mathbb{C}))$$

(Beachte: es ist $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ für $z \in \mathbb{C}$).

Inoffizielle Anmerkung: Dieses Skalarprodukt ist auf $\mathbb{C}$ nur linear in der ersten Komponente! Wenn man einen $\mathbb{C}$-Skalar aus der zweiten Komponente rausziehen möchte, muss man diesen komplex konjugieren:

$$\alpha \in \mathbb{C}: \quad \begin{aligned}(f|\alpha g) &= \overline{\alpha}(f|g)\\ (\alpha f|g) &= \alpha(f|g)\end{aligned}$$

Satz 17.1

(1) Seien $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_X f\,dx + \beta \int_X g\,dx$$

(ii) $\mathrm{Re}\left(\int_X f\,dx\right) = \int_X \mathrm{Re}(f)\,dx$ und $\mathrm{Im}\left(\int_X f\,dx\right) = \int_X \mathrm{Im}(f)\,dx$

(iii) $\overline{f}$ ist integrierbar und

$$\int_X \overline{f}\,dx = \overline{\int_X f\,dx}$$

(2) Die Sätze 16.1 bis 16.3 und das Beispiel 16.6 gelten in $L^p(X,\mathbb{C})$.

(3) $L^p(X,\mathbb{C})$ ist ein komplexer Banachraum, $L^2(X,\mathbb{C})$ ist ein komplexer Hilbertraum.

Beispiel 17.2

Sei $X = [0, 2\pi]$. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$e_k(t) := e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt) \qquad \text{und} \qquad b_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_k$$

Dann gilt: $b_k, e_k \in L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ und

$$\int_0^{2\pi} e_0(t)\,dt = 2\pi$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$ ist

$$\int_0^{2\pi} e_k(t)\,dt = \frac{1}{ik} e^{ikt}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{ik}\left(e^{2\pi k i} - 1\right) = 0$$

Damit ist

$$(b_k \mid b_l) = \int_0^{2\pi} b_k \overline{b_l}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ilt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}\, dt = \begin{cases} 1, \text{falls } k = l \\ 0, \text{falls } k \neq l \end{cases}$$

Insbesondere ist $\|b_k\|_2 = 1$. Das heißt $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist ein **Orthonormalsystem** in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.
Zur Übung: $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist linear unabhängig in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

Definition
Sei $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $L^2(X, \mathbb{C})$.

(1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$s_n := \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k = \sum_{|k|\leq n} \alpha_k = \alpha_{-n} + \alpha_{-(n-1)} + \cdots + \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

Existiert $\lim_{n\to\infty} s_n$ in $\mathbb{C}$, so schreiben wir $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k := \lim_{n\to\infty} s_n$

(2) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$\sigma_n := \sum_{k=-n}^{n} f_k = \sum_{|k|\leq n} f_k$$

Gilt für ein $f \in L^2(X, \mathbb{C})$: $\|f - \sigma_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, so schreiben wir

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \quad \Big(= \lim_{n\to\infty} \sigma_n \text{ im Sinne der } L^2\text{-Norm}\Big)$$

Definition
Sei $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ wie in 17.2. $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ heißt eine **Orthonormalbasis (ONB)** von $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ genau dann, wenn es zu jedem $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ eine Folge

$$(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$$

gibt, mit

$$(*) \qquad f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k b_k$$

Frage: Ist $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$?
Antwort: Ja! In 18.5 werden wir sehen, dass $(*)$ gilt mit $c_k = (f \mid b_k)$.