

## 9 Übung vom 23.06.

### 29. Aufgabe

**Gegeben:** Bewerber  $B_1, \dots, B_m$ ; Posten  $P_1, \dots, P_n$

Wir definieren

$$\alpha_{i,j} := \begin{cases} 1, & B_i \text{ ist für } P_j \text{ geeignet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{i,j} := \begin{cases} 1, & B_i \text{ erhält } P_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Zuordnungsproblem hat die Form

$$(ZP) \quad \begin{array}{rcl} f(x) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} x_{i,j} & = & \max \\ \sum_{j=1}^n x_{i,j} & \leq & 1 \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{i,j} & \leq & 1 \quad j = 1, \dots, n \\ x_{i,j} & \leq & 0 \quad \forall i, j \end{array}$$

Wir definieren ein Netzwerk (NW):

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \{B_i \mid i = 1, \dots, m\} \cup \{P_j \mid j = 1, \dots, n\} \cup \{Q\} \cup \{S\} \\ \mathcal{B} &:= \{(Q, B_i) \mid i = 1, \dots, m\} \cup \{(B_i, P_j) \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\} \\ &\quad \cup \{(P_j, S) \mid j = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Auf dem Bogen  $(Q, B_i)$ ,  $(P_j, S)$  seien die Kapazitäten jeweils 1, auf den Bögen  $(B_i, P_j)$  seien sie gerade  $\alpha_{i,j}$ .

Für jeden Fluss von (NW) gilt:

$$(*) \quad \forall i : \sum_{j=1}^n \underbrace{y_{i,j}}_{\text{Fluss von } B_i \text{ zu } P_j} = y_{Q,i}; \quad \forall j : \sum_{i=1}^m y_{i,j} = y_{j,S}$$

1. Es sei  $y$  zulässiger Fluss in (NW). Mit  $(*)$  folgt für  $y$ :

$$\sum_{j=1}^n y_{i,j} = y_{Q,i} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^m y_{i,j} = y_{j,S} \leq 1.$$

Da  $y_{i,j} \geq 0$  ist, ist  $y$  auch zulässig in (ZP).

Es sei  $x$  zulässig in (ZP). Aufgrund der Nebenbedingungen von (ZP) erfüllen die  $x_{i,j}$  auch (\*).

Wir setzen

$$y_{i,j} := \alpha_{i,j} x_{i,j} \text{ für } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Dann gilt:

$$x_{i,j} \leq 1 \Rightarrow y_{i,j} \leq \underbrace{\alpha_{i,j}}_{\text{Kapazität des Bogens } B_i \text{ zu } P_j} \cdot 1$$

Setzen wir weiter

$$y_{Q,i} = \sum_{j=1}^n y_{i,j} \text{ und } y_{j,S} = \sum_{i=1}^m y_{i,j}$$

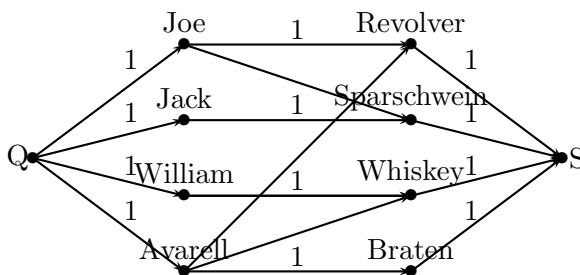
für  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$ , so ist (\*) erfüllt,  $y$  ist also zulässig in (NW).

**2.** Es sei  $y$  zulässiger Fluss,  $y_{S,Q}$  ist zu maximieren. Weiter sei  $x$  der zu  $y$  gehörende Punkt in (ZP). Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{i,j} \underbrace{\alpha_{i,j} x_{i,j}}_{=\alpha_{i,j} y_{i,j}=y_{i,j}} = \sum_i \left( \sum_j y_{i,j} \right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n y_{Q,i} = y_{S,Q}$$

### 30. Aufgabe

Als (NW) erhalten wir:



**Anmerkung:** Jeder Bogen hat Kapazität 1!!

Das ist ein maximaler Fluss in (NW), also eine Lösung unseres Zuordnungsproblems (ZP) und die Lösung ist eindeutig.

[...]

### 31. Aufgabe

Wir wählen  $A, B \in G$  beliebig und betrachten das (zunächst ungerichtete) Netzwerk mit Anfang A, Ende B und die zugehörigen Kanten aus G. Die Kapazität setzen wir überall auf 1. Außerdem ersetzen wir jede ungerichtete Kante durch zwei gerichtete (jeweils mit gleicher Kapazität wie die alte Kante).

Jeder disjunkte Kantenzug von A nach B ermöglicht den Transport einer Einheit von A nach B und umgekehrt. Die Behauptung folgt also, falls der maximale Fluss größer als  $m+1$  ist.

Nach dem Satz von Ford-Fulkerson ist dies äquivalent dazu, dass die minimale Schnittkapazität mindestens  $m+1$  ist.

Es sei  $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$  ein beliebiger Schnitt unseres Netzwerkes mit  $A \in \mathcal{K}_1, B \in \mathcal{K}_2$ . Die Schnittkapazität ist dann

$$k(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{C} \\ i \in \mathcal{K}_1, j \in \mathcal{K}_2}} c_{i,j} = \#\{(i,j) \in \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{Kantenmenge}} \mid i \in \mathcal{K}_1, j \in \mathcal{K}_2\}$$

**Annahme:**  $k(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \leq m$

Dann gibt es nur  $m$  Kanten, die Punkte aus  $\mathcal{K}_1$  mit Punkten aus  $\mathcal{K}_2$  verbinden. Wenn diese  $m$  Kanten entfernt werden, kann kein Punkt aus  $\mathcal{K}_1$  mit keinem Punkt aus  $\mathcal{K}_2$  mehr verbunden werden. Dies gilt insbesondere für A und B. Also ist der ursprüngliche Graph nicht  $m$ -zusammenhängend. Widerspruch!

Also ist  $k(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \geq m + 1$ . Dies gilt auch für die minimale Schnittkapazität. Also folgt die Behauptung.

### 32. Aufgabe

**Anmerkung:** Eigener Lösungsweg, eventuelle Abweichungen vom vorgestellten Lösungsweg in der Übung!

Startfluss  $X \equiv 0$

Durch scharfes Hinsehen zunächst (auch mit Markierungsverfahren möglich):

$$\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+2} 6 \\ 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 6 \\ 1 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 6 \end{array}$$

Markierungsverfahren:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 6 & & 1 & 1 & & \\ & & & 4 & 5 & \end{array} \implies 1 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 6$$

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 6 & & 1 & & & \\
 & 3 & & & & 2
 \end{array} \Rightarrow 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+2} 6$$

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 6 & & 1 & & & \\
 & & & 3 & 4 & 5
 \end{array} \Rightarrow 1 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{+1} 6$$

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 6 & & 1 & & & \\
 & & & 3 & & 
 \end{array} \Rightarrow \text{Der Algorithmus ist am Ende, weil 6 nicht markiert wurde.}$$

Damit ist dies ein maximaler Fluss im Netzwerk:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } i \xrightarrow{\hat{x}_{i,j}} j \quad i, j = 1, \dots, 6$$

[...]