20. Lineare Differentialgleichungen m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir gehen wie in §17 den Weg über das Komplexe:
$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}, b : I \to \mathbb{C}$ sei stetig;$x_0 \in I, y_0, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{C}$
Wir betrachten die DGL:

$$Ly := y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

§18/19 obiger Gleichung entspricht das folgende System

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Aus §17 folgt:

Satz 20.1

(1)
$$\text{das AWP} \begin{cases} Ly = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$$
hat auf I genau eine Lösung.

(2) Die Definitionen und Sätze des §en 19 gelten auch im Komplexen. $\mathbb{L}$ ist ein komplexer VR, $\dim \mathbb{L} = m$.
Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung (H) $Ly = 0$
$p(\lambda) := \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ heißt das charakteristische Polynom von (H).
Beachte: $p(\lambda) = \det(\lambda E - A)$.

Satz 20.2 (ohne Beweis)
Sie p das char. Polynom von (H)

(1) λ_0 sei eine q-fache Nullstelle von p. Dann sind $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{q-1}e^{\lambda_0 x}$ linear unabhängige Lösungen von (H).

(2) Führt man (1) für jede Nullstelle von p durch, so erhält man ein (komplexes) FS von (H).

(3) Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$. Dann erhält man ein reelles FS von (H) wie folgt: Sei λ eine Nullstelle von p.

   (i) Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so übernehme die Lösungen aus (1).

   (ii) Ist $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$, und y eine Lösung aus (1), so bilde die reellen Lösungen $\operatorname{Re} y$ und $\operatorname{Im} y$ und streiche die zu $\overline{\lambda_0}$ gehörenden Lösungen.

Beispiele:

(1) $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 9y^{(4)} = 0$
$p(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^5 + 9\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^4(\lambda - 3)^2$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 : 1, x, x^2, x^3 \\ \lambda_2 = 3 : e^{3x}, xe^{3x} \end{array}\right\} \text{FS obiger Gleichung}$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^{3x} + c_6 x e^{3x}$

(2) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$
$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 2)(\lambda - i)(\lambda + i)$
$\lambda_1 = i$: komplexe Lösung $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
$\lambda_2 = 2 : e^{2x}$
FS : $e^{2x}, \cos x, \sin x$
Allgemeine Lösung : $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(3) Löse das AWP:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

Allgemeine Lösung der DGL: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$
$0 = y(0) = c_1 + c_2 \quad c_1 = -c_2$
$1 = y'(0) = 2c_1 e^{2 \cdot 0} - c_2 \sin 0 + c_3 \cos 0 = 2c_1 + c_3$
$y''(x) = 4c_1 e^{2x} - c_2 \cos x - c_3 \sin x \implies 0 = 4c_1 - c_2$
$\implies c_1 = c_2 = 0, c_3 = 1$ Lösung des AWPs: $y(x) = \sin x$

(4) $y'' - 2y' + 5y = 0$
$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - (1 + 2i))(\lambda - (1 - 2i))$
$\lambda = 1 + 2i$: komplexe Lösung $e^{1+2i}x = e^x e^{2ix} = e^x(\cos 2x + i \sin 2x)$
FS: $e^x \cos(2x), e^x \sin(2x)$

(5) Löse das **Randwertproblem** (RWP):
$y'' + y = 0, y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 1$
$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$. FS: $\cos x, \sin x$
Allgemeine Lösung der DGL: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
$1 = y(0) = c_1, 1 = y(\frac{\pi}{2}) = c_2$ Lösung des RWPs: $y(x) = \cos x + \sin x$

(6) Löse das RWP: $y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = y(1) = 0$
$p(\lambda) = \lambda^2 + \pi^2 = (\lambda - i\pi)(\lambda + i\pi)$

Allgemeine Lösung der DGL $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$
$0 = y(0) = c_1, 0 = y(1) = c_2 \sin \pi$
Lösungen des RWPs: $y(x) = c \cdot \sin(\pi x) \quad c \in \mathbb{R}$

Wir betrachten nun den inhomogenen Fall:

$$(IH)\, Ly = b(x)$$

Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu finden, kann man 19.6 anwenden (Lösung eines inhomogenen Systems).

Sei dazu p das charakteristische Polynom von (H).

Definition (0-fache Nullstelle)
$\mu \in \mathbb{C}$ ist eine **0-fache Nullstelle** von $p :\Leftrightarrow p(\mu) \neq 0$

Satz 20.3 (Regel - ohne Beweis)
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n, q \in \mathbb{N}_0$ und b sei von der Form:

$b(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ bzw.

$b(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$

Ist $\alpha + i\beta$ eine q-fache Nullstelle von p, so gibt es eine spezielle Lösung y_s von (IH) der Form

$y_s(x) = x^q \cdot e^{\alpha x}((A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)\ cos \beta x + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n) \sin \beta x)$

Beispiel
(1) $y''' - y' = x - 1$

Erster Schritt: Lösung der homogenen Gleichung $y''' - y' = 0$. Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$
Fundamentalsystem: $1, e^x, e^{-x}$

Zweiter Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. System ist von obiger Form mit $\alpha = \beta = 0$; $\alpha + i\beta = 0$ ist 1-fache Nullstelle von p. Ansatz: Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$y_s(x) = x(A_0 + A_1 x) = A_0 x + A_1 x^2$

$y_s'(x) = A_0 + 2xA_1$

$y_s'''(x) = 0$

$x - 1 \stackrel{!}{=} y_s''' - y_s' = -A_0 - 2xA_1 \Rightarrow A_0 = 1; A_1 = -\frac{1}{2}$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x - \frac{1}{2}x^2\ (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(2) $y'' - y = xe^x$

1. Schritt: Lösung der homogenen Gleichung $y'' - y = 0$. Charakteristisches Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

Fundamentalsystem: e^x, e^{-x}

2. Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. System ist von obiger Form mit $\alpha = 1, \beta = 0$; $\alpha + i\beta = 1$ ist einfach Nullstelle von p. Ansatz für eine spezielle Lösung:

$y_s(x) = x(A_0 + A_1 x)e^x$

Nachrechnen: $y_s''(x) - y_s(x) = (2A_0 + 2A_1 + 4A_1 x)e^x \stackrel{!}{=} xe^x \Leftrightarrow 2A_0 + 2A_1 + 4A_1 x = x \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}, A_0 = -\frac{1}{4}$

$y_s(x) = \frac{1}{4}x(x-1)e^x$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4}x(x-1)e^x \ (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$