

9. Einige Typen von Differentialgleichungen

1. Ordnung

(I): $y' = f(\frac{y}{x})$. Setze $u := \frac{y}{x}$. Dies führt auf eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen für u .

Beispiel

$$\text{AWP: } \begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &:= \frac{y}{x} \implies y = xu \\ y' = u + xu' &\implies u + xu' = u - \frac{1}{u^2} \\ &\implies u' = -\frac{1}{xu^2} \\ &\implies \frac{du}{dx} = -\frac{1}{xu^2} \\ &\implies u^2 du = -\frac{1}{x} dx \\ &\implies \frac{1}{3} u^3 = -\log x + c \\ &\implies u^3 = -3 \log x + 3c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ u(1) = \frac{y(1)}{1} = 1 &\implies 1 = u^3(1) = 3c \\ &\implies c = \frac{1}{3} \\ u^3 = 1 - 3 \log x &\implies y(x) = x \sqrt[3]{1 - 3 \log x} \text{ auf } (0, \sqrt[3]{e}) \text{ (Lösung des AWP)} \end{aligned}$$

(II) **Bernoullische Differentialgleichung:** $y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$, wobei p und q stetig sind und $0 \neq \alpha \neq 1$. Dividiere durch y^α und setze $u := y^{1-\alpha}$. Dies führt auf eine lineare Differentialgleichung für u .

Beispiel

(*) $y' - xy + 3xy^2 = 0$ ($\alpha = 2$). Dann: $\frac{y'}{y^2} - \frac{x}{y} + 3x = 0$; $u := \frac{1}{y} \implies u' = -\frac{y'}{y^2} \implies -u' - xu + 3x = 0 \implies u' = -xu + 3x$. Allgemeine Lösung hiervon: $u(x) = ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 3$ ($c \in \mathbb{R}$). Allgemeine Lösung von (*): $y(x) = \frac{1}{ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 3}$ ($c \in \mathbb{R}$)

(III) **Riccatische Differentialgleichung:** (*) $y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$, wobei g, h, k stetig sind. Sei y_1 eine bekannte Lösung von (*); setze $z := \frac{1}{y - y_1}$. Nachrechnen: (**) $z' = (g(x) +$

9. Einige Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$2y_1(x)h(x)z + h(x)$ (lin. Dgl für z). Die allgemeine Lösung von (*) lautet: $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ wobei z die allgemeinen Lösungen von (**) durchläuft.