21. Differenzierbarkeit

In diesem Paragraphen seien stets: $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition

(1) f heißt in $x_0 \in I$ **differenzierbar** (db) genau dann, wenn der $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert und $\in \mathbb{R}$ ist. ($\iff$ $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und ist $\in \mathbb{R}$). In diesem Fall heißt $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ die **Ableitung von** f **in** x_0.

(2) f heißt auf I differenzierbar genau dann, wenn f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall wird durch $x \mapsto f'(x)$ eine Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ definiert, die **Ableitung von** f **auf** I.

Beispiele:

(1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c \ \forall x \in I$. f ist differenzierbar auf I, $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$.

(2) Sei $I = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^n$. Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x$. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} \overset{\S 1}{=} x^{n-1} + x_0^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \cdots + x_0 x^{n-2} + x^{n-1} \to n x_0^{n-1}$ $(x \to x_0)$. f ist also differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und $f'(x) = nx^{n-1} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Kurz: $(x^n)' = nx^{n-1}$ auf $\mathbb{R}$.

(3) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. $x \neq 0 : \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \implies f$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. (Beachte: f ist stetig in x_0)

(4) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. 17.3 $\implies \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$. Kurz: $(e^x)' = e^x$.

Satz 21.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)
Ist f differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f stetig in x_0

Beweis
$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0) \cdot 0 = 0$ $(x \to x_0)$ $\implies \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ■

Satz 21.2 (Ableitungsregeln)
$g : I \to \mathbb{R}$ sei eine weitere Funktion, f und g ableitbar in $x_0 \in I$.

(1) Für α, $\beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in x_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(2) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Es sei $g(x) \neq 0\ \forall x \in I$. $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 und

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis

(1) Klar. Für (2) und (3) beachte: $f(x) \to f(x_0), g(x) \to g(x_0)$ $(x \to x_0)$ (wegen 21.1)

(2) $\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0) \to f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$ $(x \to x_0)$

(3) $h := \frac{f}{g}$: $\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0) - \frac{g(x)-g(x_0)}{x \to x_0}f(x_0)\right) \to \frac{1}{g(x_0)^2}(f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0))$ $(x \to x_0)$. ■

Beispiele:

(1) $f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}\ \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $(\cosh x)' = (\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$ auf $\mathbb{R}$.
$(\sinh x)' = (\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}))' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ auf $\mathbb{R}$.

Satz 21.3 (Kettenregel)
Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g : J \to \mathbb{R}$ eine Funktionen und $g(J) \subseteq I$. Weiter sei g differenzierbar in $x_0 \in J$ und f differenzierbar in $y_0 := g(x_0)$. Dann ist $f \circ g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

Beweis
$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & , y \in I \backslash \{y_0\} \\ f'(y_0) & , y = y_0 \end{cases}$ ist differenzierbar in $y_0 \implies h(y) \to f'(y) = f'(g(x))$ $(y \to y_0)$. 21.1 $\implies g(x) \to g(x_0) = y_0$ $(x \to x_0)$ $\implies h(g(x)) \to f'(g(x_0))$ Es ist $f(y) - f(y_0) = h(y)(y - y_0)\ \forall y \in I \implies \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} = h(g(x))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to f'(g(x))g'(x_0)$ $(x \to x_0)$ ■

Beispiele:

(1) Sei $I = \mathbb{R}$, $a > 0$, $a^x = e^{x \log a} = f(g(x))$ mit $f(x) = e^x$, $g(x) = x \log a \implies (a^x)' = f'(g(x))g'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$ auf $\mathbb{R}$

(2) $I = [0, \infty), f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f'(0) = 0$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0, \infty))$.
Es gilt: $x = f(f^{-1}(x))(*)\ \forall x \geq 0$ Annahme: f^{-1} ist differenzierbar in $x_0 = 0 \xRightarrow{21.3,\ (*), x_0 = 0}$
$1 = \underbrace{f'(f^{-1}(0))}_{0} \cdot (f^{-1})'(0) = 0$ Widerspruch!
Das heißt $f^{-1}(x_0)$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Satz 21.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)
$f \in C(I)$ sei streng monoton, f differenzierbar in $x_0 \in I$ und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : f(I) \to I$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Beweis
Sei (y_n) eine Folge in $f(I)\backslash\{y_0\}$ und $y_n \to y_0$ und $\alpha_n = \frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{y_n-y_0}$. Zu zeigen: $\alpha_n \to \frac{1}{f'(x_0)}$ $(n \to \infty)$ $x_n := f^{-1}(y_n) \implies y_n = f(x_n)$, $x_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N} \implies \alpha_n = \frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}$ $(n \to \infty)$ ■

Beispiele:

(1) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \log y$ $(y > 0)$. Sei $y > 0$, also $y = e^x$ $(x \in \mathbb{R}) \implies (f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$. Kurz: $(\log x)' = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$.

(2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$, dann: $f(x) = e^{\alpha \log x} \implies f'(x) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \log x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. Kurz: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ auf $(0, \infty)$

(3) Für $\alpha = \frac{1}{2}$ liefert Beispiel (2): $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ auf $(0, \infty)$

Definition
Zu $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in M$. x_0 heißt ein **innerer Punkt** von M genau dann, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(x_0) \subseteq M$.

Beispiele:

(1) M ist offen genau dann, wenn jedes $x \in M$ ein innerer Punkt von M ist.

(2) Sei $a < b$, $M \in \{[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]\}$. $x_0 \in M$ ist innerer Punkt von M genau dann, wenn $x_o \in (a, b)$

(3) $\mathbb{Q}$ hat keine inneren Punkte

Definition
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, g hat in x_0 ein **relatives Maximum** $:\iff \exists \delta > 0 : g(x) \leq g(x_0)\ \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, g hat in x_0 ein **relatives Minimum** $:\iff \exists \delta > 0 : g(x) \geq g(x_0)\ \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.

Ein **relatives Extremum** ist ein relatives Maximum oder Minimum.

Satz 21.5 (Erste Ableitung am relativen Extremum)
f sei differenzierbar in $x_0 \in I$, f habe in x_0 ein relatives Extremum und x_0 sei ein innerer Punkt von I. Dann gilt: $f'(x_0) = 0$.

Beweis
f habe in x_0 ein relatives Maximum. Dann existiert $\delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$ und $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in U_\delta(x_0)$.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Sei } x \in U_\delta(x_0) \text{ und } x < x_0 & \implies & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 & \implies & f'(x_0) & (x \to x_0-) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad > & & \quad\quad\quad\ \leq & & & (x \to x_0+)
\end{array}
$$

Also: $f'(x_0) = 0$. ■

Bemerkungen:

(1) Die Voraussetzung „x_0 ist ein innerer Punkt von I" ist wesentlich. Beispiel: $f(x) = x,\ x \in [0,1],\ x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$.

(2) Ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = 0$, so muss f in x_0 *kein* relatives Extremum haben. Beispiel: $f(x) = x^3,\ x_0 = 0$.

Satz 21.6 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)
Sei $I = [a,b]$ $(a < b)$, $f, g \in C(I)$ und f und g seien differenzierbar auf (a,b). Weiter sei $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$.

(1) **Satz von Rolle**: Es sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert $\xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = 0.$$

(2) **Mittelwertsatz (MWS) der Differenzialrechnung**:

$$\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

(3) **Erweiteter Mittelwertsatz**: Es ist $g(b) \neq g(a)$ und $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis

(1) 18.3 $\implies \exists s, t \in [a,b] : f(s) \leq f(x) \leq f(t)\ \forall x \in [a,b]$.

Fall 1: $s, t \in \{a, b\} \implies f$ ist auf I konstant $\implies f' = 0$ auf $I \implies$ Beh.

Fall 2: $s \in (a,b)$ oder $t \in (a,b)$. Etwa: $s \in (a,b) \implies s$ ist ein innerer Punkt von I und f hat in s ein Minimum. 21.5 $\implies f'(s) = 0$.

(2) folgt aus (3) mit $g(x) = x$.

(3) $h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ $(x \in I)$. Dann gilt: $h \in C(I)$, h ist differenzierbar auf (a,b).

$$h(a) = h(b) \overset{(1)}{\implies} \exists \xi \in (a,b) : 0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

$$\implies (f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Aus (1) folgt: $g(a) \neq g(b)$ (sonst existierte $x_0 \in (a,b)$ mit $g'(x_0) = 0$).

$$\implies \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

■

Folgerungen 21.7
$f, g : I \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf I.

(1) Ist $f' = 0$ auf $I \implies f$ ist auf I konstant
$\geq$ wachsend
$\leq$ fallend
$>$ streng wachsend
$<$ streng fallend

(2) Ist $f' = g'$ auf $I \implies \exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$ auf I.

Beweis
(1) Seien $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$. 21.6 (2) $\implies \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \implies$ Beh.

(2) $h := f - g \implies h' = 0$ auf $I \overset{(1)}{\implies}$ Beh. ∎

Beispiele:
(1) Es existiert genau ein $x_0 \in \mathbb{R} : e^{-x_0} = x_0$.

Beweis
$f(x) := e^{-x} - x \ (x \in \mathbb{R}) \quad f(0) = 1 > 0,\ f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0.$ 18.2 $\implies \exists x_0 \in (0, 1) : f(x_0) = 0$, also: $e^{-x_0} = x_0$.

$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \overset{21.7}{\implies} f$ ist streng fallend $\implies f$ hat genau eine Nullstelle, nämlich x_0. $\implies$ Beh. ∎

(2) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und $f' = f$ auf $\mathbb{R} \implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x \ (x \in \mathbb{R})$.

Beweis
$h(x) := \frac{f(x)}{e^x} \implies h'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{(e^x)^2} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \overset{21.7}{\implies} \exists c \in \mathbb{R} : h(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R} \implies$ Beh. ∎

Satz 21.8 (Die Regeln von de l'Hospital)
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien auf (a, b) differenzierbar und es sei $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$ ($a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen). Weiter existiere $L := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \to b}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ($L = \pm\infty$ zugelassen) und es gelte

(I) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \to b}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \to b}} g(x) = 0$ *oder*

(II) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \to b}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \to b}} g(x) = \pm\infty$.

Dann gilt: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \to b}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Beweis
Nur unter der Voraussetzung (I) und nur für $x \to a$.

<u>Fall 1</u>: $a \in \mathbb{R}$. $f(a) := g(a) := 0 \overset{(I)}{\underset{21.1}{\Longrightarrow}} f, g \in C[a,b)$.

Sei $x \in (a,b)$. 21.6 (3) $\Longrightarrow \exists \xi = \xi(x) \in (a,x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$ (für $x \to a$, da dann auch $\xi \to a$).

<u>Fall 2</u>: $a = -\infty$. Substituiere $x = \frac{1}{t}$, also $t = \frac{1}{x}$ ($x \to a = -\infty \iff t \to 0-$).

$\varphi(t) := f(\frac{1}{t}) = f(x)$, $\psi(t) := g(\frac{1}{t}) = g(x)$. z.z.: $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \to L$ $(t \to 0-)$

$\varphi'(t) = f'(\frac{1}{t})(\frac{1}{-t^2}) = f'(x)(-x^2)$
$\psi'(t) = g'(x)(-x^2)$

$\Longrightarrow \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$ $(t \to 0-) \overset{\text{Fall 1}}{\Longrightarrow} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \to L$ $(t \to 0-)$. ∎

Beispiele:

(1) $a, b > 0 : \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1$

(4) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\log(1+tz)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+tz} \cdot t}{1} = t$ $(t \in \mathbb{R})$

(5) Für $t \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{t}{x})^x = e^t$ (insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{t}{n})^n = e^t,\ n \in \mathbb{N}$)

Beweis
$\varphi(x) := (1 + \frac{t}{x})^x$.
$\lim_{x\to\infty} \log \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} x \log(1 + \frac{t}{x}) \overset{z=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+tz)}{z} = t$

$\Longrightarrow \varphi(x) \to e^t$ $(x \to \infty)$. ∎

Satz 21.9 (Ableitung von Potenzreihen)
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0, I := (x_0 - r, x_0 + r)$, ($I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n (x \in I)$

(1) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ hat den Konvergenzradius r.

(2) f ist auf I differenzierbar und $f'(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ $\forall x \in I$, also $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x - x_0)^n)'$

Beweis

(1) $\limsup \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \Longrightarrow$ Behauptung.

(2) Später ∎

Beispiele:

(1) $(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ auf $\mathbb{R}$.

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

Satz 21.10 (Eigenschaften trigonometrischer Funktionen)

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1,\ |\cos x| \leq 1,\ |\sin x| \leq 1,\ |\sin x| \leq |x|$

(2) Additionstheoreme: $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

(3) $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} > 0\ \forall x \in (0,2)$; insbesondere: $\sin 1 > \frac{5}{6}$.

(4) $\exists \xi_0 \in (0,2)$ mit $\cos \xi_0 = 0$ und $\cos x \neq 0\ \forall x \in [0, \xi_0), \pi := 2\xi_0$ (Pi). Also: $\pi \in (0,4)$ $(\pi \approx 3,14..), \cos\frac{\pi}{2} = 0, \cos x \neq 0\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

(5) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

(6) $\sin(-x) = -\sin x,\quad \cos(-x) = \cos x$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x,\quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
$\sin(x + \pi) = -\sin x, \cos(x + \pi) = -\cos x$
$\sin(x + 2\pi) = \sin x,\quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$

(7) Für $x \in [0, \pi] : \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$

(8) $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$.
$\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Beweis

(1) $f(x) := \cos^2 x + \sin^2 x - 1$. $f'(x) = 2\cos x(-\sin x) + 2\sin x \cos x = 0$. 21.7 $\Longrightarrow$ f ist auf $\mathbb{R}$ konstant. $f(0) = 0$ $|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \leq \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$, ObdA $x \neq 0$. $\sin x = \sin x - \sin 0 \overset{\text{MWS}}{=} \underbrace{|\cos \xi|}_{\leq 1} |x| \leq |x|$

(2) Sei $y \in \mathbb{R}$ und $f(x) := (\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y)^2 + (cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y)^2$. Klar: $f(0) = 0$. Nachrechnen: $f' = 0$ auf $\mathbb{R}$. 21.7 $\Longrightarrow$ $f \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$.

(3) Für $x \in (0,2) : \sin x = \underbrace{(x - \frac{x^3}{3!})}_{>0} + \underbrace{(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!})}_{>0} + \cdots \Longrightarrow$ Behauptung.

(4) $cos 0 = 1 > 0$. $\cos 2 = \cos(1+1) = \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 1 - 2\sin^2 1 = 1 - 2\sin^2 1 \overset{(3)}{<} 1 - 2\frac{25}{36} < 0$. 18.2 $\Longrightarrow$ $\exists \xi_0 \in (0,2) : \cos \xi_0 = 0$, In $(0,2)$: $(\cos x)' = -\sin x \overset{(3)}{<} 0 \Longrightarrow \cos x$ ist in $(0,2)$ streng monoton fallend $\Longrightarrow \cos x \neq 0\ \forall x \in [0, \xi_0)$

(5) $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 \Longrightarrow \sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$. (3) $\Longrightarrow \sin\frac{\pi}{2} > 0 \Longrightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

(6) Die erste Behauptung mit kann mit Potenzreihen, der Rest mit den Additionstheoremen bewiesen werden.

(7) „$\Leftarrow$“: klar, „$\Rightarrow$“: Sei $x \in [0, \pi]$ und $\cos x = 0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} x \geq \frac{\pi}{2}, y := \pi - x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $\cos y = \cos(x + \pi) \overset{(6)}{=} -\cos(-x) = -\cos(x) \overset{(4)}{\Longrightarrow} y \leq \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$.

(8) In den gr. Übungen ■

Definition 21.11 (Tangens)

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $f(x) := \tan x$ $(x \in I)$. Dann: $f \in C(I)$. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$, $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$ auf $I \implies f$ ist auf I streng monoton wachsend $\implies \exists f^{-1} : \mathbb{R} \to I$, $\arctan x := f^{-1}(x) (x \in \mathbb{R})$ **Arcustangens**. Sei $y = \tan x$ $(x \in I)$. $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$. Also: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$.

Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall; $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. f wird in einer Umgebung von x_0 durch eine Potenzreihe dargestellt $:\iff \exists \delta > 0$ und $\exists$ eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius $\geq \delta$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ $\forall x \in I \cap U_\delta(x_0)$.

Beispiele:

(1) $I = (-\infty, 1), f(x) = \frac{1}{1-x}$. Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $x \in (-1, 1)$. Also: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $x \in (-1, 1)$

(2) $I = \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ $(x \in (-1, 1))$

(3) $I = (-1, \infty), f(x) = \log(1 + x)$. Behauptung: $(*)$

$\boxed{\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \ (x \in (-1, 1))}$

Beweis

$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(x \in (-1, 1))$ 21.9 $\implies$ g ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar und $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = f'(x)$ $\forall x \in (-1, 1)$. 21.7 $\implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in (-1, 1) \overset{x=0}{\implies} 0 = f(0) = g(0) + c = c \implies f(x) = g(x)$ $\forall x \in (-1, 1) \implies$ Behauptung. In den gr. Übungen wird gezeigt (Abelscher Grenzwert-Satz): $(*)$ gilt noch für $x = 1$. Also: $\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ ■