

# 1 Grundlagen: Maß und Integral

## 1.1 Äußere Maße und Messbarkeit

### Definition

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

heißt *äußeres Maß* auf  $X$ , falls gilt:

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0$
- (2) Für  $A, A_n \subset X$ ,  $i \in \mathbb{N}$  mit  $A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i$  gilt

$$\mu(A) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(A_i).$$

Beobachte folgende einfache Folgerungen der Definition:

- $A \subset B \subset X \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- $A \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(B)$

### Beispiele

$$\mu_1(A) = \begin{cases} \#A, & A \text{ endlich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 1, & A \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_3(A) = \begin{cases} \infty, & A \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_4(A) = \begin{cases} \infty, & A^c \text{ endlich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_5(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Konstruktion eines äußeren Maßes aus Rohdaten ist folgender Satz nützlich:

### Satz 1.1

Sei  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  mit  $\emptyset \in \mathcal{E}$ , sei  $\eta : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\eta(\emptyset) = 0$ . Dann wird durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \eta(A_i) : A_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i \right\}$$

$(\inf \emptyset = \infty)$  für  $A \subset X$  ein äußeres Maß erklärt, das von  $(\mathcal{E}, \eta)$  induzierte äußere Maß.

**Beweis**

Es ist  $0 \leq \mu(\emptyset) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta(\emptyset) = 0$ , da  $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset$  und  $\emptyset \in \mathcal{E}$ .

Seien  $A, A_i \subset X$  und  $A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i$ . Wir müssen zeigen:  $\mu(A) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$ .

Ist für ein  $i \in \mathbb{N}$  bereits  $\mu(A_i) = \infty$ , so sind wir fertig. Sei also  $\mu(A_i) < \infty$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $E_{ij} \in \mathcal{E}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  mit  $A_i \subset \bigcup_{j \geq 1} E_{ij}$  und

$$\mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \sum_{j \geq 1} \eta(E_{ij}) \quad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Also gilt

$$A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i \subset \bigcup_{i, j \geq 1} E_{ij},$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \sum_{i, j \geq 1} \eta(E_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \eta(E_{ij}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt dies

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

■

**Definition**

Sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Eine Menge  $A \subset X$  heißt  $\mu$ -messbar, falls für alle  $M \subset X$  gilt:

$$\mu(M) = \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c).$$

Die Menge aller  $\mu$ -messbaren Mengen wird mit  $\mathcal{A}_\mu$  bezeichnet.

Es genügt bereits:  $A$  ist  $\mu$ -messbar genau dann, wenn für alle  $M \subset X$  gilt:

$$\mu(M) \geq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c).$$

Denn wegen

$$M \subset (M \cap A) \cup (M \cap A^c) \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$$

gilt

$$\mu(M) \leq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c) + \mu(\emptyset) + \dots.$$

Es gilt stets  $\emptyset, X \in \mathcal{A}_\mu$ .

**Bemerkung:** Für  $Y \subset X$  ist  $\mu|_Y$  das durch

$$(\mu|_Y)(M) := \mu(M \cap Y), \quad M \subset X$$

erklärte äußere Maß. Ferner ist  $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_{\mu|_Y}$ . Denn für  $A \in \mathcal{A}_\mu$  und  $M \subset X$  ist

$$\begin{aligned} \mu|_Y(M) &= \mu(Y \cap M) = \mu(Y \cap M \cap A) + \mu(Y \cap M \cap A^c) \\ &= (\mu|_Y)(M \cap A) + (\mu|_Y)(M \cap A^c). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$A \in \mathcal{A}_\mu \iff \mu = (\mu|_A) + (\mu|_{A^c}).$$

### Proposition 1.2

Für ein äußeres Maß  $\mu$  auf  $X$  gelten die folgenden Aussagen:

- a)  $\emptyset, X \in \mathcal{A}_\mu$  sowie  $A \in \mathcal{A}_\mu \iff A^c \in \mathcal{A}_\mu$ .
- b) Für  $A \subset X$  mit  $\mu(A) = 0$  gilt  $A \in \mathcal{A}_\mu$ .
- c) Für  $A_i \in \mathcal{A}_\mu, i \in \mathbb{N}$  gilt  $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_\mu$  und  $\bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_\mu$ .
- d) Für  $A \in \mathcal{A}_\mu, B \subset X$  gilt

$$\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

- e) Für  $A_i \in \mathcal{A}_\mu, i \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkt, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

- f) Für  $A_i \in \mathcal{A}_\mu, i \in \mathbb{N}$  und  $A_i \subset A_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

- g) Für  $A_i \in \mathcal{A}_\mu, i \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(A_1) < \infty$  und  $A_i \supset A_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

### Beweis

- c) Seien  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_\mu, M \supset X$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \mu(M \cap A_1) + \mu(M \cap A_1^c) \\ &= \mu(M \cap A_1) + \mu(M \cap A_1^c \cap A_2) + \mu(M \cap A_1^c \cap A_2^c) \\ &\geq \mu(M \cap (A_1 \cup (A_1^c \cap A_2))) + \mu(M \cap A_1^c \cap A_2^c) \\ &= \mu(M \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(M \cap (A_1 \cup A_2)^c). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_\mu$ . Per Induktion sieht man dann, dass für  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_\mu$  gilt:  
 $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}_\mu$ .

e) Sind  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_\mu$  und paarweise disjunkt, dann gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu((A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

woraus

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

folgt. Wegen

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

und damit Gleichheit.

f) Wir definieren  $B_1 := A_1$ ,  $B_2 := A_2 \setminus A_1$ ,  $B_3 := A_3 \setminus A_2 \dots$ . Nun ist  $B_i \in \mathcal{A}_\mu$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und die  $B_i$  sind paarweise disjunkt. Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \mu(B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) && \text{(nach e))} \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right). \end{aligned}$$

g) Es ist

$$\mu(A_1) = \mu(A_2 \cup (A_1 \setminus A_2)) = \mu(A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2),$$

das heißt

$$\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2).$$

Damit zeigt man

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i \geq 1} A_i\right) &= \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i \geq 1} A_i\right) \\
&= \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{i \geq 1} A_i\right)^c\right) \\
&= \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i^c\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} (A_1 \cap A_i^c)\right) \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{\mu(A_1 \cap A_i^c)}_{=A_1 \setminus A_i} \quad (\text{nach f))} \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_i)) \\
&= \mu(A_1) - \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

c) Sei  $M \subset X$ . Wir definieren  $C_k := \bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}_\mu$ . Damit gilt  $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ .

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mu(M) < \infty$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\infty > \mu(M) &= (\mu|_M)(X) \\
&= (\mu|_M)(C_k) + (\mu|_M)(C_k^c) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu|_M)(C_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu|_M)(C_k^c) \\
&= (\mu|_M)\left(\bigcup_{i \geq 1} C_i\right) + (\mu|_M)\left(\bigcap_{i \geq 1} C_i^c\right) \\
&= (\mu|_M)\left(\bigcup_{i \geq 1} C_i\right) + (\mu|_M)\left(\left(\bigcup_{i \geq 1} C_i\right)^c\right) \\
&= \mu\left(M \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)\right) + \mu\left(M \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)^c\right)
\end{aligned}$$

und somit  $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_\mu$ .

d) Für  $A \in \mathcal{A}_\mu$  und  $B \subset X$  gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(A \cup B) &= \mu((A \cup B) \cap A) + \mu((A \cup B) \cap A^c) \\
&= \mu(A) + \mu(B \cap A^c)
\end{aligned}$$

sowie

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c).$$

Hiermit so erhält man

$$\begin{aligned}\mu(A) + \mu(B) &= \mu(A) + \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) \\ &= \mu(B \cap A) + \mu(A \cup B).\end{aligned}$$

■

Hinweis: Es ist  $\mathcal{A}_\mu$  eine (bezüglich  $\mu$  vollständige)  $\sigma$ -Algebra und  $\mu$  ist ein  $\sigma$ -additives Maß auf  $\mathcal{A}_\mu$ , wobei „ $\mathcal{A}_\mu$  ist  $\mu$ -vollständig“ heißt, dass jede  $\mu$ -Nullmenge in  $\mathcal{A}_\mu$  liegt.  $(X, \mathcal{A}_\mu)$  ist ein messbarer Raum und  $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu)$  ist ein Maßraum.

### Definition

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Ein äußeres Maß  $\mu$  auf  $X$  heißt  $\mathcal{A}$ -regulär, falls  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$  gilt und zu jeder Menge  $M \subset X$  ein  $A \in \mathcal{A}$  existiert mit  $M \subset A$  und  $\mu(M) = \mu(A)$ . Das äußere Maß  $\mu$  heißt regulär, falls  $\mu$  ein  $\mathcal{A}_\mu$ -reguläres Maß ist.

### Proposition 1.3

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $X$ ,  $\mu$  ein  $\mathcal{A}$ -reguläres äußeres Maß auf  $X$ . Dann gilt:

a) Ist  $M_i \subset X$ ,  $M_i \subset M_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} M_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(M_i).$$

b) Zu jedem  $M \subset X$  mit  $\mu(M) < \infty$  existiert ein  $A \in \mathcal{A}$ , so dass für alle  $B \in \mathcal{A}_\mu$  gilt:

$$\mu(B \cap M) = \mu(B \cap A)$$

c) Ist  $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{A}$  und  $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) < \infty$ , so existieren  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  mit  $M_i \subset A_i$ ,  $i = 1, 2$  und  $\mu(A_i \setminus M_i) = 0$ . Insbesondere ist  $M_1, M_2 \in \mathcal{A}_\mu$ .

### Beweis

a) Zu jedem  $i \in \mathbb{N}$  finden wir ein  $A_i \in \mathcal{A}$  so dass  $M_i \subset A_i$  und  $\mu(M_i) = \mu(A_i)$ . Dazu definieren wir  $B_i := \bigcap_{j \geq i} A_j$ . Damit gilt  $M_i \subset B_i \subset A_i$ ,  $B_i \subset B_{i+1}$  und  $B_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Es folgt

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} M_i\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i) \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(M_i) \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} M_i\right).\end{aligned}$$

b) Zu  $M$  existiert ein  $A \in \mathcal{A}$  mit  $M \subset A$  und  $\mu(M) = \mu(A)$ . Sei  $B \in \mathcal{A}_\mu$ . Dann folgt

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(M) = \mu(M \cap B) + \mu(M \cap B^c) \\ &\leq \mu(A \cap B) + \mu(M \cap B^c) \\ &\leq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) = \mu(A),\end{aligned}$$

woraus Gleichheit in obigen Ungleichungen folgt. Wegen  $\mu(M) < \infty$  ist auch  $\mu(M \cap B^c) < \infty$ , und wir können dies von zwei obigen Termen abziehen und erhalten

$$\mu(M \cap B) = \mu(A \cap B).$$

c) Zu  $M_1$  existiert  $\tilde{A}_1 \in \mathcal{A}$  mit  $M_1 \subset \tilde{A}_1$  und  $\mu(M_1) = \mu(\tilde{A}_1)$ . Wir definieren  $A_1 := \tilde{A}_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ . Für diese Menge gilt nun  $M_1 \subset A_1 \subset M_1 \cup M_2$ . Wir folgern

$$\mu(M_1) \leq \mu(A_1) \leq \mu(\tilde{A}_1) = \mu(M_1)$$

und wegen  $M_1 \cup M_2 = A_1 \cup M_2$  weiter

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cap M_2) + \mu(A_1 \cup M_2) &= \mu(A_1) + \mu(M_2) \\ &= \mu(M_1) + \mu(M_2) \\ &= \mu(M_1 \cup M_2) \\ &= \mu(A_1 \cup M_2) < \infty,\end{aligned}$$

woraus  $\mu(A_1 \cap M_2) = 0$  folgt.

Nun ist  $A_1 \setminus M_1 \subset A_1 \cap M_2$ , also gilt  $\mu(A_1 \setminus M_1) = 0$  und somit  $A_1 \setminus M_1 \in \mathcal{A}_\mu$ . Damit gilt dann  $M_1 = A_1 \cap (A_1 \setminus M_1)^c \in \mathcal{A}_\mu$ . ■

#### Satz 1.4

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $X$  und  $\nu$  ein Maß auf  $\mathcal{A}$ . Dann wird durch

$$\mu(M) := \inf \{ \nu(A) : A \in \mathcal{A}, M \subset A \}$$

für  $M \subset X$  ein  $\mathcal{A}$ -reguläres äußeres Maß auf  $X$  erklärt mit  $\mu|_{\mathcal{A}} = \nu$ . Ist  $M \in \mathcal{A}_\mu$  und  $\mu(M) < \infty$ , so existiert ein  $A \in \mathcal{A}$  mit  $M \subset A$  und  $\mu(A \setminus M) = 0$ .

#### Beweis

Für  $M \subset X$  sieht man leicht, dass

$$\mu(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) : A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Also ist  $\mu$  das von  $(\mathcal{A}, \nu)$  induzierte äußere Maß. Da  $\nu$  monoton ist und nach der Definition von  $\mu$  ist  $\mu|_{\mathcal{A}} = \nu$ .

Um die  $\mathcal{A}$ -Regularität zu zeigen, nehmen wir ein  $A \in \mathcal{A}$  und ein  $M \subset X$ . Für  $B \in \mathcal{A}$  mit  $M \subset B$  gilt:

$$\begin{aligned}\mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c) &\leq \nu(B \cap A) + \nu(B \cap A^c) \\ &= \nu(B)\end{aligned}$$

und daher

$$\mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c) \leq \mu(M).$$

also ist  $A \in \mathcal{A}_\mu$ . Sei nun  $M \subset X$  beliebig und ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mu(M) < \infty$ . Es existiert also eine Folge  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  mit  $M \subset A_i$  und  $\nu(A_i) \rightarrow \mu(M)$ . Setze  $A := \bigcap_{i \geq 1} A_i$ . Dann gilt  $A \in \mathcal{A}$ ,  $M \subset A$ , sowie

$$\mu(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} \nu(A_i) \geq \nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A) \geq \mu(M),$$

woraus  $\mu(M) = \mu(A)$  folgt.

Sei schließlich  $M \in \mathcal{A}_\mu$  mit  $\mu(M) < \infty$ . Es gibt ein  $A \in \mathcal{A}$  mit  $M \subset A$  und  $\mu(M) = \mu(A) < \infty$ . Dann folgt

$$\begin{aligned}\infty > \mu(A) &= \mu(A \cap M) + \mu(A \cap M^c) \\ &= \mu(M) + \mu(A \cap M^c) \\ &= \mu(A) + \mu(A \setminus M).\end{aligned}$$

Wegen  $\mu(A) = \mu(M) < \infty$  gilt also  $\mu(A \setminus M) = 0$ . ■

**Anwendung:** Sei  $\vartheta$  ein beliebiges äußeres Maß auf  $X$ . Dann ist  $\vartheta|_{\mathcal{A}_\vartheta}$  ein Maß. Durch

$$\mu(M) := \inf\{\vartheta(A) : A \in \mathcal{A}_\vartheta, M \subset A\}$$

wird also ein  $\mathcal{A}_\vartheta$ -reguläres äußeres Maß auf  $X$  erklärt, das  $\vartheta$  fortsetzt (also  $\mu|_{\mathcal{A}_\vartheta} = \vartheta|_{\mathcal{A}_\vartheta}$ ).

### Definition

Seien  $X, Y$  Mengen,  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$  und  $f : X \rightarrow Y$ . Dann wird durch

$$(f\mu)(M) := \mu(f^{-1}(M))$$

für  $M \subset Y$  ein äußeres Maß  $f\mu$  auf  $Y$  erklärt. Man nennt  $f\mu$  das *Bild* von  $\mu$  unter  $f$  oder auch „push forward“ von  $\mu$  bezüglich  $f$  und schreibt hierfür auch  $f_\# \mu$ .

**Bemerkung:** Für  $B \subset Y$  gilt

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu \iff \forall M \subset X : B \in \mathcal{A}_{f(\mu|_M)}.$$

Seien hierzu  $M \subset X$ ,  $A, B \subset Y$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}&\mu(M \cap f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) + \mu(M \cap f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)^c) \\ &= (\mu|_M)(f^{-1}(A \cap B)) + (\mu|_M)(f^{-1}(A \cap B^c)) \\ &= f(\mu|_M)(A \cap B) + f(\mu|_M)(A \cap B^c).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt: Ist  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_\mu$ , so ist  $A \in \mathcal{A}_{f(\mu)}$ .



**Sprechweisen:** Sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Eine Menge  $N \subset X$  heißt  $\mu$ -Nullmenge, falls  $\mu(N) = 0$ . Eine Eigenschaft  $\mathcal{E}$  gilt für  $\mu$ -fast-alle  $x \in X$  bzw.  $\mu$ -fast-überall, falls

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{E} \text{ gilt für } x \text{ nicht}\}) = 0.$$

Mit  $\mathbb{F}_\mu(X, Y)$  wird die Menge aller Abbildungen  $f : D \rightarrow Y$  bezeichnet mit  $D \subset X$  und  $\mu(X \setminus D) = 0$ .

**Definition**

Seien  $X, Y$  Mengen,  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$  und  $\mathcal{C}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $Y$ . Dann heißt  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, Y)$   $\mu$ -messbar bezüglich  $\mathcal{C}$ , falls  $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_\mu$ .

Beachte, dass für  $f : D \rightarrow Y$  mit  $\mu(X \setminus D) = 0$  gilt:  $D = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}_\mu$ .

**Lemma 1.5**

Seien  $X, Y$  Mengen,  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$  und  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ . Für  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, Y)$  sind äquivalent:

- a)  $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_\mu$
- b)  $f$  ist  $\mu$ -messbar bezüglich  $\sigma(\mathcal{E})$ .

**Definition**

Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, so nennt man die von den offenen Mengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{T})$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra des topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  mit der Notation  $\mathfrak{B}(X)$ .

Spezielle Borelsche Algebren sind  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \in \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$ .

**Definition**

Sei  $X$  eine Menge,  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$  und  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ . Man nennt  $f$  eine  $\mu$ -messbare Abbildung, falls  $f$  dies bezüglich  $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$  ist.

Im Folgenden schreiben wir für eine Relation  $\varrho$  auf  $\bar{\mathbb{R}}$ , Mengen  $D, D' \subset X$  und Abbildungen  $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, g : D' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ :

$$\{f \varrho g\} := \{x \in D \cap D' : f(x) \varrho g(x)\}$$

**Lemma 1.6**

Sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$  und  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ . Genau dann ist  $f$  eine  $\mu$ -messbare Abbildung, wenn eine der folgenden Bedingungen für alle  $a \in \mathbb{R}$  erfüllt ist:

$$\{f > a\} \in \mathcal{A}_\mu, \quad \{f \geq a\} \in \mathcal{A}_\mu, \quad \{f < a\} \in \mathcal{A}_\mu, \quad \{f \leq a\} \in \mathcal{A}_\mu.$$

**Lemma 1.7**

Sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$ , seien  $f, g, f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu$ -messbar. Dann gilt

(a)  $\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$  sind  $\mu$ -messbare Mengen.

(b) Die Funktionen

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g \text{ (falls } \mu\text{-fast-überall definiert),}$$

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n,$$

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := -\min\{f, 0\}, \quad |f|,$$

$$\limsup_n f_n, \quad \liminf_n f_n$$

sind  $\mu$ -messbar.

### Satz 1.8

Ist  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$ , so ist  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  genau dann  $\mu$ -messbar, wenn für alle  $M \subset X$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  gilt

$$\mu(M) \geq \mu(M \cap \{f \leq a\}) + \mu(M \cap \{f \geq b\}).$$

### Beweis

Sei  $f$  zunächst  $\mu$ -messbar. Dann gilt mit  $a < b$ ,  $M \subset X$ :

$$\begin{aligned} \mu(M) &\geq \mu(M \cap \{f \leq a\}) + \mu(M \cap \{f > a\}) \\ &\geq \mu(M \cap \{f \leq a\}) + \mu(M \cap \{f \geq b\}) \end{aligned}$$

Jetzt gelte die Bedingung des Satzes für alle  $M \subset X$ ,  $a < b$ . Zu zeigen ist:  $\{f \leq r\} \in \mathcal{A}_\mu$  für beliebige  $r \in \mathbb{R}$ . Sei  $M \subset X$  beliebig mit  $\mu(M) < \infty$ . Für  $i \in \mathbb{N}$  sei

$$A_i := M \cap \left\{ r + \frac{1}{i+1} \leq f \leq r + \frac{1}{i} \right\}.$$

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^n A_{2i+1}\right) \geq \sum_{i=1}^n \mu(A_{2i+1})$$

gilt.

Für  $n = 0$  ist dies klar. Die Ungleichung gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=0}^{n+1} A_{2i+1}\right) &\geq \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n+1} A_{2i+1} \cap \underbrace{\{f \geq r + \frac{1}{2n+2}\}}_b\right) + \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n+1} A_{2i+1} \cap \underbrace{\{f \leq r + \frac{1}{2n+3}\}}_a\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=0}^n A_{2i+1}\right) + \mu(A_{2n+3}) \\
&\geq \sum_{i=0}^n \mu(A_{2i+1}) + \mu(A_{2n+3}) \\
&\geq \sum_{i=0}^{n+1} \mu(A_{2i+1})
\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_{2i}\right) \geq \sum_{i=1}^n \mu(A_{2i})$$

und erhält zusammen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq 2\mu(M) < \infty.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{i \geq n} \mu(A_i) < \varepsilon$ . Zunächst schätzen wir ab

$$\begin{aligned}
\mu\left(M \cap \left\{r < f < r + \frac{1}{n}\right\}\right) &\leq \mu\left(M \cap \left\{r < f \leq r + \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&= \mu\left(M \cap \bigcup_{i=n}^{\infty} \left\{r + \frac{1}{i+1} \leq f \leq r + \frac{1}{i}\right\}\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\
&\leq \sum_{i \geq n} \mu(A_i) < \varepsilon
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\mu(M \cap \{f \leq r\}) + \mu(M \cap \{f > r\}) \\
&\leq \mu(M \cap \{f \leq r\}) + \mu(M \cap \{r < f < r + \frac{1}{n}\}) + \mu(M \cap \{f \geq r + \frac{1}{n}\}) \\
&\leq \mu(M) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

### Satz 1.9

Seien  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$ ,  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  eine  $\mu$ -messbare Abbildung und  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $[0, \infty)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$ . Dann gibt es eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\mu$ -messbarer Mengen mit

$$f = \sum_{n \geq 1} r_n \mathbb{1}_{A_n}.$$

### Beweis

Setze  $A_1 := \{f \geq r_1\}$  und  $A_n := \{f \geq r_n + \sum_{j=1}^{n-1} r_j \mathbb{1}_{A_j}\}$ ,  $n > 1$ .

**Behauptung:** Es ist  $f \geq \sum_{i=1}^n r_i \mathbb{1}_{A_i}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dies gilt für  $n = 1$ , und wenn es für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dann folgt: Ist  $x \notin A_{n+1}$ , dann ist

$$f(x) \geq \sum_{i=1}^n r_i \mathbb{1}_{A_i}(x) + \underbrace{r_{n+1} \mathbb{1}_{A_{n+1}}(x)}_{=0}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Ist dagegen  $x \in A_{n+1}$ , so gilt nach der Definition von  $A_{n+1}$

$$f(x) \geq \sum_{i=1}^n r_i \mathbb{1}_{A_i}(x) + r_{n+1} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbb{1}_{A_i}(x) + r_{n+1} \underbrace{\mathbb{1}_{A_{n+1}}(x)}_{=1}.$$

Folglich ist  $f \geq \sum_{i=1}^{\infty} r_i \mathbb{1}_{A_i}$ .

**Annahme:** Es gelte  $f(x) > \sum_{i=1}^{\infty} r_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$  für ein  $x \in X$ .

Also ist  $\sum_{i=1}^{\infty} r_i \mathbb{1}_{A_i}(x) < \infty$ . Da  $\sum_{i=1}^{\infty} r_i = \infty$  gilt, muss es eine Folge natürlicher Zahlen  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  geben mit  $\mathbb{1}_{A_{j_k}}(x) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_{j_k} = 0$  gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$r_{j_k} < f(x) - \sum_{j=1}^{\infty} r_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$$

und damit

$$\begin{aligned} f(x) &> \sum_{j=1}^{\infty} r_j \mathbb{1}_{A_j}(x) + r_{j_k} \\ &\geq \sum_{j=1}^{j_k-1} r_j \mathbb{1}_{A_j}(x) + r_{j_k}. \end{aligned}$$

Das bedeutet  $x \in A_{j_k}$  im Widerspruch zu  $\mathbb{1}_{A_{j_k}}(x) = 0$ . ■

## 1.2 Integration

In diesem Abschnitt wird generell vorausgesetzt, dass  $X$  eine Menge und  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $X$  ist.

### Definition

Eine  $\mu$ -Treppenfunktion auf  $X$  ist eine  $\mu$ -messbare Abbildung  $h \in \mathbb{F}_{\mu}(X, \mathbb{R})$  mit abzählbarer Wertemenge  $\text{im}(h)$  und

$$\sum_{\substack{r \in \text{im}(h) \\ r < 0}} r \cdot \mu(\{h = r\}) > -\infty \quad \text{oder} \quad \sum_{\substack{r \in \text{im}(h) \\ r > 0}} r \cdot \mu(\{h = r\}) < \infty.$$

Ist  $h$  eine  $\mu$ -Treppenfunktion auf  $X$ , so wird durch

$$\int h d\mu = \sum_{r \in \text{im}(h)} r \cdot \mu(\{h = r\})$$

das  $\mu$ -Integral von  $h$  erklärt, wobei „ $0 \cdot \infty := 0$ “ gelte.

**Bemerkung:** (1) Es gilt

$$\int h d\mu = \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu.$$

(2)  $h = \mathbb{1}_A$ ,  $A \in \mathcal{A}_\mu$  ist eine  $\mu$ -Treppenfunktion,  $\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$ .

**Lemma 1.10**

Seien  $h, g$   $\mu$ -Treppenfunktionen auf  $X$ . Es gelte  $\int h^+ d\mu < \infty$  und  $\int g^+ d\mu < \infty$  oder  $\int h^- d\mu < \infty$  und  $\int g^- d\mu < \infty$ . Dann ist  $h + g$  eine  $\mu$ -Treppenfunktion und es gilt

$$\int (h + g) d\mu = \int h d\mu + \int g d\mu.$$

**Beweis**

Es gilt zunächst  $h + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \mathbb{R})$ . Zur Additivität: Wir definieren  $A(r, s) := \{h = r\} \cap \{g = s\}$  für  $r, s \in \mathbb{R}$ . Die Voraussetzungen des Lemmas stellen sicher, dass die nachfolgend vorgenommenen Vertauschungen der Summationsreihenfolge zulässig sind. Es gilt damit

$$\begin{aligned} \int h d\mu + \int g d\mu &= \sum_{r \in \text{im}(h)} r \cdot \mu(\{h = r\}) + \sum_{s \in \text{im}(g)} s \cdot \mu(\{g = s\}) \\ &= \sum_{r \in \text{im}(h)} r \cdot \sum_{s \in \text{im}(g)} \mu(A(r, s)) + \sum_{s \in \text{im}(g)} s \cdot \sum_{r \in \text{im}(h)} \mu(A(r, s)) \\ &= \sum_{\substack{r \in \text{im}(h) \\ s \in \text{im}(g)}} (r + s) \cdot \mu(A(r, s)) \\ &= \sum_{t \in \text{im}(g+h)} t \cdot \sum_{\substack{r \in \text{im}(h) \\ s \in \text{im}(g) \\ r+s=t}} \mu(A(r, s)) \\ &= \sum_{t \in \text{im}(g+h)} t \cdot \mu\left(\bigcup_{\substack{r \in \text{im}(h) \\ s \in \text{im}(g) \\ r+s=t}} A(r, s)\right) \\ &= \sum_{t \in \text{im}(g+h)} t \cdot \mu(\{g + h = t\}) \\ &= \int (h + g) d\mu. \end{aligned}$$

Übung: Zeige, dass  $\int (g + h)^+ d\mu < \infty$  oder  $\int (g + h)^- d\mu < \infty$  gilt. ■

**Bemerkung:** Sei  $h$  eine  $\mu$ -Treppenfunktion mit  $h \geq 0$ , dann gilt  $\int h d\mu \geq 0$ . Mit Lemma 1.10 folgt für  $\mu$ -Treppenfunktionen  $h, g$ :

$$h \leq g \implies \int h d\mu \leq \int g d\mu$$

**Definition**

Sei  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ . Eine  $\mu$ -Oberfunktion (bzw.  $\mu$ -Unterfunktion) von  $f$  ist eine  $\mu$ -Treppenfunktion  $h$  auf  $X$  mit  $f \leq h$   $\mu$ -fast-überall auf  $X$  (bzw.  $h \leq f$   $\mu$ -fast-überall auf  $X$ ).

Durch

$$\int^* f d\mu := \inf \left\{ \int h d\mu : h \text{ ist eine } \mu\text{-Oberfunktion von } f \right\}$$

wird das  $\mu$ -Oberintegral von  $f$  erklärt. Analog wird durch

$$\int_* f d\mu := \sup \left\{ \int h d\mu : h \text{ ist eine } \mu\text{-Unterfunktion von } f \right\}$$

das  $\mu$ -Unterintegral von  $f$  erklärt.

**Lemma 1.11**

Für  $f, g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  gelten die folgenden Aussagen:

- (1)  $\int_* f d\mu = -\int^* (-f) d\mu$ .
- (2) Gilt  $\mu$ -fast-überall  $f \leq g$ , so ist  $\int^* f d\mu \leq \int^* g d\mu$  und  $\int_* f d\mu \leq \int_* g d\mu$ .
- (3) Gilt  $\mu$ -fast-überall  $f \geq 0$ , so ist  $\int^* f d\mu \geq 0$  und  $\int_* f d\mu \geq 0$ .
- (4) Gilt  $\int^* f d\mu < \infty$ , so auch  $\int^* f^+ d\mu < \infty$  und  $f < \infty$   $\mu$ -fast-überall.
- (5) Für  $c \in (0, \infty)$  gilt  $\int^* (cf) d\mu = c \cdot \int^* f d\mu$  und  $\int_* (cf) d\mu = c \cdot \int_* f d\mu$ .
- (6) Ist  $\int^* f d\mu < \infty$  und  $\int^* g d\mu < \infty$ , so ist  $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  und

$$\int^* (f + g) d\mu \leq \int^* f d\mu + \int^* g d\mu.$$

Analog gilt: Ist  $\int_* f d\mu > -\infty$  und  $\int_* g d\mu > -\infty$ , so ist  $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  und

$$\int_* (f + g) d\mu \geq \int_* f d\mu + \int_* g d\mu.$$

- (7)  $\int_* f d\mu \leq \int^* f d\mu$ .

**Beweis**

Übung ■

**Bemerkung:** Ist  $h$  eine  $\mu$ -Treppenfunktion, so ist  $h$  eine  $\mu$ -Oberfunktion und eine  $\mu$ -Unterfunktion von  $h$ . Das heißt insbesondere

$$\int h d\mu \leq \int_* h d\mu \leq \int^* h d\mu \leq \int h d\mu.$$

**Definition**

Ist  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  eine  $\mu$ -messbare Abbildung und stimmt das  $\mu$ -Oberintegral mit dem  $\mu$ -Unterintegral von  $f$  überein, so wird durch

$$\int f d\mu := \int^* f d\mu = \int_* f d\mu$$

das  $\mu$ -Integral von  $f$  erklärt. Man sagt in diesem Fall, dass das  $\mu$ -Integral von  $f$  existiert. Ist  $\int f d\mu \in \mathbb{R}$ , so heißt  $f$   $\mu$ -integrierbar.

**Satz 1.12**

Sei  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  nicht-negativ und  $\mu$ -messbar. Dann existiert das  $\mu$ -Integral von  $f$ . Es gilt  $\int f d\mu \geq 0$  und

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int h d\mu : h \text{ ist } \mu\text{-Unterfunktion, } \text{im}(h) \text{ ist endlich} \right\}.$$

**Beweis**

Ist  $\mu(\{f = \infty\}) > 0$ , dann ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $n \cdot \mathbb{1}_{\{f = \infty\}}$  eine  $\mu$ -Unterfunktion von  $f$  und

$$\int^* f d\mu \geq \int_* f d\mu \geq \int n \cdot \mathbb{1}_{\{f = \infty\}} d\mu = n \cdot \mu(\{f = \infty\}) \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Also ist  $\int^* f d\mu = \int_* f d\mu = \infty$ .

Sei jetzt  $f < \infty$   $\mu$ -fast-überall. Für  $t \in (1, \infty)$  sei

$$U_t := \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \cdot \mathbb{1}_{\{t^n \leq f < t^{n+1}\}}.$$

Offenbar ist

$$U_t \leq f \leq tU_t$$

$\mu$ -fast-überall, d.h.  $U_t$  ist eine  $\mu$ -Unterfunktion von  $f$ ,  $tU_t$  eine  $\mu$ -Oberfunktion von  $f$ . Damit gilt

$$\int^* f d\mu \leq \int tU_t d\mu = t \cdot \int U_t d\mu \leq t \int_* f d\mu.$$

Ist  $\int_* f d\mu < \infty$ , dann folgt  $\int^* f d\mu \leq \int_* f d\mu$  aus  $t \rightarrow 1$ . Ist dagegen  $\int_* f d\mu = \infty$ , so ist  $\int^* f d\mu = \int_* f d\mu = \infty$ . ■

**Satz 1.13**

Seien  $f, g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$   $\mu$ -messbar. Dann gilt:

- (1) Sei  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Es existiert  $\int f d\mu$  genau dann, wenn  $\int (cf) d\mu$  existiert. In diesem Fall ist

$$\int (cf) d\mu = c \cdot \int f d\mu.$$

- (2) Angenommen, es existieren  $\int f d\mu$  und  $\int g d\mu$  und  $(\int f d\mu, \int g d\mu) \neq (\pm\infty, \mp\infty)$ . Dann ist  $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ ,  $\int(f + g)d\mu$  existiert und

$$\int(f + g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

- (3) Ist  $f \leq g$   $\mu$ -messbar und existiert  $\int g d\mu$  (bzw.  $\int f d\mu$ ), so existiert auch  $\int f d\mu$  (bzw.  $\int g d\mu$ ), und es gilt in jedem Fall

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

### Beweis

- (1) Es existiere  $\int f d\mu$ . Sei  $c > 0$ . Dann folgt

$$\int^*(cf)d\mu = c \cdot \int^* f d\mu = c \cdot \int_* f d\mu = \int_*(cf)d\mu.$$

Sei  $c < 0$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \int^*(cf)d\mu &= \int^*(-c)(-f)d\mu = (-c) \cdot \int^*(-f)d\mu = (-c) \cdot (-1) \int_* f d\mu \\ &= c \cdot \int_* f d\mu = c \int^* f d\mu = (-c) \int_*(-f)d\mu = \int_*(-c)(-f)d\mu = \int_*(cf)d\mu. \end{aligned}$$

- (2) Seien  $f, g$   $\mu$ -integrierbar. Dann ist  $f, g < \infty$   $\mu$ -fast-überall, und somit ist  $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int f d\mu + \int g d\mu &= \int^* f d\mu + \int^* g d\mu \geq \int^*(f + g)d\mu \\ &\geq \int_*(f + g)d\mu \geq \int_* f d\mu + \int_* g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu, \end{aligned}$$

woraus die Aussage folgt.

Sei nun  $\int f d\mu = \infty$ . Nach Voraussetzung gilt dann  $\int g d\mu > -\infty$  und damit  $g > -\infty$   $\mu$ -fast-überall. Das heißt  $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ . Ferner gilt

$$\infty \geq \int^*(f + g)d\mu \geq \int_*(f + g)d\mu \geq \int_* f d\mu + \int_* g d\mu = \infty.$$

Analog kann der Fall  $\int f d\mu = -\infty$  gezeigt werden.

- (3) Sei  $\int g d\mu < \infty$ , das heißt  $f \leq g < \infty$   $\mu$ -fast-überall. Dann ist  $(f - g)\mathbb{1}_{\{g > -\infty\}} \in F_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  nicht positiv. Wegen  $f \leq g < \infty$   $\mu$ -fast-überall ist  $g + (f - g)\mathbb{1}_{\{g > -\infty\}} = f$  und damit ergibt (2)

$$\int g d\mu \geq \int g d\mu + \int (f - g)\mathbb{1}_{\{g > -\infty\}} d\mu = \int f d\mu. \quad \blacksquare$$



**Satz 1.14**

Sei  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$   $\mu$ -messbar. Dann gilt:

- (1)  $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$  existieren stets. Es existiert  $\int f d\mu$  genau dann, wenn  $\int f^+ d\mu < \infty$  oder  $\int f^- d\mu < \infty$ . In diesem Fall ist

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Ferner ist

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

- (2) Ist  $f$   $\mu$ -integrierbar, so auch  $|f|$ .

**Beweis**

- (1) Es existiere  $\int f d\mu$ . Ist  $\int f d\mu < \infty$ , so ist  $\int f^+ d\mu < \infty$  nach Lemma 1.11 (4). Ist dagegen  $\int f d\mu = \infty$ , so ist  $\int (-f) d\mu = -\infty$  und daher  $\int f^- d\mu = \int (-f)^+ d\mu < \infty$ .

Umgekehrt sei  $\int f^+ d\mu < \infty$  oder  $\int f^- d\mu < \infty$ . Dann existiert nach Satz 1.13 (2) das Integral  $\int (f^+ - f^-) d\mu$  wegen Satz 1.13 (1) ist  $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ .

Stets existiert das Integral von  $|f|$  und

$$\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \geq \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| = \left| \int f d\mu \right|.$$

- (2) Ist  $f$   $\mu$ -integrierbar, so folgt aus (1), dass  $\int f^+ d\mu < \infty$  und  $\int f^- d\mu < \infty$ . ■

**Satz 1.15 (Lemma von Fatou)**

Sei  $f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $f_n \geq 0$  und  $\mu$ -messbar. Dann gilt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

**Beweis**

Sei  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Sei  $h$  eine  $\mu$ -Unterfunktion von  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  mit  $\text{im}(h) = \{r_1, \dots, r_m\} \subset [0, \infty)$  (vergleiche Satz 1.12). Für  $i = 1, \dots, m$  und  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$A_{i,n} := \{h = r_i\} \cap \left\{ \inf_{k \geq n} f_k \geq \varepsilon \cdot r_i \right\} \in \mathcal{A}_\mu.$$

Es gilt  $A_{i,n} \subset A_{i,n+1}$  für  $i = 1, \dots, m$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $\mu$ -fast-alle  $x \in X$  mit  $h(x) = r_i$  gilt:

$$\varepsilon r_i < r_i \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\varepsilon r_i < \inf_{k \geq n} f_k(x)$ , das heißt  $x \in A_{i,n}$ . Also

$$\mu(\{h = r_i\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{i,n}\right).$$

Die Mengen  $A_{i,n}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sind paarweise disjunkt und aus ihrer Definition folgt, dass

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon r_i \mathbb{1}_{A_{i,n}}$$

eine  $\mu$ -Unterfunktion von  $f_n$  ist.

Hiermit gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \varepsilon r_i \mu(A_{i,n}) \\ &= \sum_{i=1}^m \varepsilon r_i \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{i,n}) \\ &= \sum_{i=1}^m \varepsilon r_i \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{i,n}\right) \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^m r_i \mu(\{h = r_i\}) \\ &= \varepsilon \int h d\mu. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

für ein beliebiges  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Lässt man  $\varepsilon$  gegen 1 gehen, so folgt die Behauptung. ■

**Satz 1.16 (von der monotonen Konvergenz)**

Ist  $f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \mathbb{R})$   $\mu$ -messbar,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

**Beweis**

Grenzwerte und Integrale existieren offenbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu &\leq \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu. \end{aligned} \quad \text{(nach Satz 1.15)} \quad \blacksquare$$

**Satz 1.17 (Lebesgue)**

Sei  $f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  eine konvergente Folge  $\mu$ -messbarer Funktionen. Es existiere eine  $\mu$ -integrierbare Funktion  $g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  mit  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -fast-überall für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sind  $f_n$  und  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$   $\mu$ -integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Schärfer gilt sogar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0.$$

**Beweis**

Wegen  $|f_n|, |f| \leq g$  ist  $\int |f_n| d\mu < \infty$  und  $\int |f| d\mu < \infty$ . Die Folge  $(2g - |f_n - f|)_{n \in \mathbb{N}}$  nichtnegativer Funktionen in  $\mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$   $\mu$ -fast-überall gegen  $2g$ . Mit dem Lemma von Fatou (Satz 1.15) folgt:

$$\begin{aligned} \int 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &\geq \int \underbrace{\liminf_{n \rightarrow \infty} (2g - |f_n - f|)}_{=2g} d\mu = \int 2g d\mu \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

**Notation:** Für  $A \subset X$  und  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  sei

$$\int_A^* f d\mu := \int^* \mathbb{1}_A f d\mu \quad \text{und} \quad \int_{*A} f d\mu := \int_* \mathbb{1}_A f d\mu.$$

Existiert das  $\mu$ -Integral von  $\mathbb{1}_A \cdot f$ , so setzt man

$$\int_A f d\mu := \int \mathbb{1}_A f d\mu.$$

**Lemma 1.18**

(Übungsblatt 2, Aufgabe 4) Sei  $f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge nichtnegativer Funktionen. Dann gilt

$$\int^* \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int^* f_n d\mu.$$

**Satz 1.19**

Sei  $g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  eine nichtnegative Funktion. Dann wird durch

$$\psi(A) := \int_A^* g d\mu, \quad A \subset X,$$

ein äußeres Maß auf  $X$  definiert. Es gilt  $\mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{A}_\psi$ . Ist  $g$  sogar  $\mu$ -messbar und  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$   $\mu$ -messbar, dann existiert  $\int f d\psi$  genau dann, wenn  $\int f g d\mu$  existiert. In diesem Fall gilt

$$\int f d\psi = \int f g d\mu.$$

**Beweis**

Es gilt  $\psi(\emptyset) = 0$ . Die Subsigmaadditivität folgt direkt aus Lemma 1.18.

Sei  $A \in \mathcal{A}_\mu$  und  $M \subset X$  mit  $\psi(M) < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert eine  $\mu$ -Oberfunktion  $h$  zu  $\mathbb{1}_M \cdot g$  mit  $h \geq 0$  und

$$\int h d\mu \leq \int^* \mathbb{1}_M g d\mu + \varepsilon.$$

Dann ist  $\mathbb{1}_A \cdot h$  eine  $\mu$ -Oberfunktion zu  $\mathbb{1}_{M \cap A} \cdot g$  und  $\mathbb{1}_{A^c} \cdot h$  ist eine  $\mu$ -Oberfunktion zu  $\mathbb{1}_{M \cap A^c} \cdot g$ . Daher folgt

$$\begin{aligned} \psi(M \cap A) + \psi(M \cap A^c) &= \int^* \mathbb{1}_{M \cap A} g d\mu + \int^* \mathbb{1}_{M \cap A^c} g d\mu \\ &\leq \int \mathbb{1}_A \cdot h d\mu + \int \mathbb{1}_{A^c} \cdot h d\mu \\ &= \int h d\mu \leq \int^* \mathbb{1}_M g d\mu + \varepsilon = \psi(M) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Sei nun  $g$   $\mu$ -messbar und  $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  und sei zunächst  $f \geq 0$ . Also existieren  $\int f d\psi$  und  $\int f g d\mu$ . Es gibt eine Folge  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $(0, \infty)$  und  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{A}_\mu$  mit  $f = \sum_{j=1}^\infty r_j \mathbb{1}_{A_j}$ . Zweimalige

Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz (Satz 1.16) ergibt

$$\begin{aligned}
 \int f d\psi &= \int \sum_{j=1}^{\infty} r_j \mathbb{1}_{A_j} d\psi \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} r_j \int \mathbb{1}_{A_j} d\psi \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} r_j \psi(A_j) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} r_j \int \mathbb{1}_{A_j} g d\mu \\
 &= \int \left( \sum_{j=1}^{\infty} r_j \mathbb{1}_{A_j} \right) g d\mu \\
 &= \int f g d\mu.
 \end{aligned}$$

Sei nun  $f$  eine beliebige  $\mu$ -messbare Funktion. Wegen  $(fg)^{\pm} = f^{\pm} \cdot g$  gilt  $\int f^{\pm} d\psi < \infty$  genau dann, wenn  $\int (fg)^{\pm} d\mu < \infty$ . Somit existiert  $\int f d\psi$  genau dann, wenn  $\int f g d\mu$  existiert und

$$\int f d\psi = \int f^{+} d\psi - \int f^{-} d\psi = \int f^{+} g d\mu - \int f^{-} g d\mu = \int (f^{+} - f^{-}) g d\mu = \int f g d\mu. \quad \blacksquare$$

**Satz 1.20**

Sei  $f \in \mathbb{F}_{\mu}(X, \bar{\mathbb{R}})$   $\mu$ -integrierbar. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass für alle  $A \in \mathcal{A}_{\mu}$  mit  $\mu(A) < \delta$  gilt

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

**Beweis**

Betrachte  $g_n := \min\{|f|, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $0 \leq g_n \nearrow |f|$  für  $n \rightarrow \infty$ . Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int |f| d\mu < \infty.$$

Zu einem vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$0 \leq \int |f| d\mu - \int g_N d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für  $A \in \mathcal{A}_\mu$  mit  $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2N} =: \delta$  folgt nun

$$\begin{aligned} \int_A |f| d\mu &= \int_A \underbrace{(|f| - g_N)}_{\geq 0} d\mu + \int_A g_N d\mu \\ &\leq \int \underbrace{(|f| - g_N)}_{\geq 0} d\mu + N \cdot \mu(A) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Seien  $X, Y \neq \emptyset$  Mengen mit äußeren Maßen  $\mu$  auf  $X$ ,  $\nu$  auf  $Y$ . Durch

$$(\mu \times \nu)(M) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) : A_i \in \mathcal{A}_\mu, B_i \in \mathcal{A}_\nu, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i) \right\}$$

wird ein äußeres Maß auf  $X \times Y$  erklärt, nämlich das von  $\mathcal{E}_0 := \{A \times B : A \in \mathcal{A}_\mu, B \in \mathcal{A}_\nu\}$  und  $\lambda$  mit  $\lambda(A \times B) := \mu(A) \cdot \nu(B)$  für  $A \in \mathcal{A}_\mu, B \in \mathcal{A}_\nu$  induzierte äußere Maß.

**Satz 1.21 (Fubini)**

Seien  $X, Y \neq \emptyset$  Mengen mit äußeren Maßen  $\mu$  auf  $X$  und  $\nu$  auf  $Y$ . Dann gelten folgende Aussagen:

- (1)  $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{A}_\nu \subset \mathcal{A}_{\mu \times \nu}$  und  $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$  für  $A \in \mathcal{A}_\mu, B \in \mathcal{A}_\nu$ .
- (2) Das Maß  $\mu \times \nu$  ist  $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{A}_\nu$ -regulär.
- (3) Existiert das  $(\mu \times \nu)$ -Integral von  $f \in \mathbb{F}_{\mu \times \nu}(X \times Y, \bar{\mathbb{R}})$  und gilt  $\{f \neq 0\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ ,  $M_i \in \mathcal{A}_{\mu \times \nu}$ ,  $(\mu \times \nu)(M_i) < \infty$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , so gilt:

$f(\cdot, y) \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$  ist  $\mu$ -messbar für  $\nu$ -fast-alles  $y \in Y$ . Es ist  $\int f(x, y) \mu(dx)$   $\nu$ -messbar und  $\iint f(x, y) \mu(dx) \nu(dy)$  existiert (und symmetrisch in  $x$  und  $y$ ) und schließlich:

$$\int f d(\mu \times \nu) = \iint f(x, y) \mu(dx) \nu(dy) = \iint f(x, y) \nu(dy) \mu(dx).$$

**Beweis**

Wir setzen

$$\mathcal{E} := \{M \subset X \times Y : \mathbb{1}_M(\cdot, y) \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}}) \text{ ist } \mu\text{-messbar für } \nu\text{-fast-alles } y \in Y,$$

$$\int \mathbb{1}_M(x, y) \mu(dx) \in \mathbb{F}_\nu(Y, \bar{\mathbb{R}}) \text{ ist } \nu\text{-messbar}\}.$$

Für  $M \in \mathcal{E}$  sei

$$\varrho(M) := \iint \mathbb{1}_M(x, y) \mu(dx) \nu(dy).$$

Wir zeigen zwei Hilfsbehauptungen:

( $\alpha$ ) Ist  $M_j \in \mathcal{E}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , eine Folge paarweise disjunkter Mengen, so ist  $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \mathcal{E}$ , denn:

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j}(\cdot, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{M_j}(\cdot, y)$$

ist  $\mu$ -messbar für  $\nu$ -fast-alles  $y \in Y$  und

$$\int \mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j}(x, y) \mu(dx) = \sum_{j=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{M_j}(x, y) \mu(dx)$$

ist  $\nu$ -messbar.

( $\beta$ ) Ist  $M_j \in \mathcal{E}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $M_1 \supset M_2 \supset \dots$  sowie  $\varrho(M_1) < \infty$ , so gilt  $\bigcap_{j \geq 1} M_j \in \mathcal{E}$ , denn:

$$\mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j}(\cdot, y) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{M_j}(\cdot, y)$$

ist  $\mu$ -messbar für  $\nu$ -fast-alles  $y \in Y$  und

$$\int \mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j}(x, y) \mu(dx) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{M_j}(x, y) \mu(dx)$$

ist  $\nu$ -messbar.

Betrachte nun folgende Mengensysteme:

$$\mathcal{E}_0 := \{A \times B : A \in \mathcal{A}_\mu, B \in \mathcal{A}_\nu\},$$

$$\mathcal{E}_1 := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i : G_i \in \mathcal{E}_0 \right\},$$

$$\mathcal{E}_2 := \left\{ \bigcap_{j \geq 1} H_j : H_j \in \mathcal{E}_1 \right\}.$$

Für  $A \times B \in \mathcal{E}_0$  ist  $\mathbb{1}_{A \times B}(\cdot, y) = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B(y)$   $\mu$ -messbar für alle  $y \in Y$  und  $\int \mathbb{1}_{A \times B}(x, y) \mu(dx) = \mu(A) \cdot \mathbb{1}_B(y)$  ist  $\nu$ -messbar. Also ist  $A \times B \in \mathcal{E}$ , und damit  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ .

Für  $A \times B \in \mathcal{E}_0$ ,  $C \times D \in \mathcal{E}_0$  ist

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{E}_0$$

und

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \underbrace{((A \setminus C) \times B)}_{\in \mathcal{E}_0} \dot{\cup} \underbrace{((A \cap C) \times (B \setminus D))}_{\in \mathcal{E}_0}.$$

Jede abzählbare Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{E}_0$  kann als abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen aus  $\mathcal{E}_0$  erhalten werden, das heißt  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$  nach ( $\alpha$ ).

Da  $\mathcal{E}_1$  stabil bezüglich der Bildung endlicher Durchschnitte ist, folgt mit Hilfe von ( $\beta$ )

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i : H_i \in \mathcal{E}_1, i \in \mathbb{N}, \varrho(H_1) < \infty \right\} \subset \mathcal{E}.$$

**Behauptung:** Für  $M \subset X \times Y$  gilt

$$(\mu \times \nu)(M) = \inf\{\varrho(V) : M \subset V, V \in \mathcal{E}_1\}$$

und es gibt zu  $M$  ein  $W \in \mathcal{E}_2$  mit  $M \subset W$  und  $(\mu \times \nu)(M) = (\mu \times \nu)(W) = \varrho(W)$ .

**Nachweis:** Für  $i \in \mathbb{N}$  sei  $A_i \times B_i \in \mathcal{E}_0$  mit  $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i) =: V \in \mathcal{E}_1$ . Dann gilt

$$\mathbb{1}_V \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i \times B_i},$$

wobei Gleichheit gilt, falls die Mengen  $A_i \times B_i$  paarweise disjunkt sind. Somit erhält man

$$\varrho(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varrho(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i),$$

wobei auch hier Gleichheit gilt, falls die Mengen  $A_i \times B_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkt sind.

Der erste Teil der Behauptung folgt somit aus

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(M) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) : A_i \times B_i \in \mathcal{E}_0, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)\right\} \\ &= \inf\{\varrho(V) : M \subset V, V \in \mathcal{E}_1\}. \end{aligned}$$

Ist  $(\mu \times \nu)(M) < \infty$ , so existieren  $V_i \in \mathcal{E}_1$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $M \subset V_i$  mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varrho(V_i) = (\mu \times \nu)(M).$$

Setze  $M \subset W := \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i \in \mathcal{E}_2$ . Es gilt

$$(\mu \times \nu)(M) \leq (\mu \times \nu)(W) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \varrho(V_i) = \varrho(W) = (\mu \times \nu)(M).$$

Ist  $(\mu \times \nu)(M) = \infty$ , so setze  $W := X \times Y \in \mathcal{E}_2$ .

Nun beweisen wir die eigentlichen Aussagen des Satzes:

(1) Sei  $A \times B \in \mathcal{E}_0$ . Zunächst gilt offenbar

Für ein beliebiges  $V \in \mathcal{E}_1$  mit  $A \times B \subset V$  gilt

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \inf\{\varrho(V) : A \times B \subset V, V \in \mathcal{E}_1\} = \varrho(A \times B) = \mu(A) \nu(B).$$

Für  $T \subset X \times Y$  und  $U \in \mathcal{E}_1$  mit  $T \subset U$  sind  $U \cap (A \times B)$  und  $U \cap (A \times B)^c$  disjunkte Mengen in  $\mathcal{E}_1$ . Wir erhalten so

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)^c) \\ \leq \varrho(U \cap (A \times B)) + \varrho(U \cap (A \times B)^c) = \varrho(U). \end{aligned}$$

Bildet man das Infimum über alle  $U \in \mathcal{E}_1$  mit  $U \supset T$ , so ergibt diese Ungleichung

$$(\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)^c) \leq (\mu \times \nu)(T),$$

woraus  $A \times B \in \mathcal{A}_{\mu \times \nu}$  folgt.



- (2) Ist  $M \subset X \times Y$  und  $(\mu \times \nu)(M) < \infty$ , so gibt es  $W \in \mathcal{E}_2$  mit  $\varrho(W) < \infty$  und mit der gewünschten Eigenschaft  $(\mu \times \nu)(M) = (\mu \times \nu)(W)$ .
- (3) Sei  $f = \mathbb{1}_M$ ,  $M \in \mathcal{A}_{\mu \times \nu}$  und  $(\mu \times \nu)(M) < \infty$ . Zu  $M$  existiert ein  $W \in \mathcal{E}_2$  mit  $M \subset W$  und  $(\mu \times \nu)(M) = (\mu \times \nu)(W) = \varrho(W)$ .

Fall 1:  $(\mu \times \nu)(M) = 0$ . Dann gilt  $\varrho(W) = 0$  und  $\mathbb{1}_M(\cdot, y) = 0$   $\mu$ -fast-überall für  $\nu$ -fast-alles  $y \in Y$ . Insbesondere ist  $M \in \mathcal{E}$  und  $\varrho(M) = 0$ .

Fall 2:  $(\mu \times \nu)(M) > 0$ . Dann gilt  $(\mu \times \nu)(W \setminus M) = 0$ ,  $M \subset W$ . Fall 1 liefert  $W \setminus M \in \mathcal{E}$  und  $\varrho(W \setminus M) = 0$ . Also ist  $\mathbb{1}_M(\cdot, y) = (\mathbb{1}_W - \mathbb{1}_{W \setminus M})(\cdot, y)$   $\mu$ -messbar für  $\nu$ -fast-alles  $y \in Y$  und  $\mathbb{1}_M(\cdot, y) = \mathbb{1}_W(\cdot, y)$   $\mu$ -fast-überall für  $\nu$ -fast-alles  $y \in Y$ . Insbesondere ist  $M \in \mathcal{E}$  und  $\varrho(M) = \varrho(W) = (\mu \times \nu)(M)$ . ■

