# 12. Konvergenzkriterien

**Satz 12.1 (Leibnizkriterium)**
Sei $(b_n)$ eine monoton fallende Nullfolge und $a_n := (-1)^{n+1} b_n$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

**Beweis**
Wie bei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Von $(b_n) = (\frac{1}{n})$ wurde nur benutzt: $\frac{1}{n}$ ist eine fallende Nullfolge. ■

**Bemerkung:** Gilt $a_n = b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ist.

**Satz 12.2 (Majoranten- und Minorantenkriterium)**

(1) **Majorantenkriterium**: Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

(2) **Minorantenkriterium**: Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

**Beweis**

(1) $s_n := b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $\sigma_n := |a_1| + \ldots + |a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. O.b.d.A.: $|a_n| \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $(s_n)$ ist konvergent $\overset{6.1}{\Longrightarrow}$ $(s_n)$ ist beschränkt $\Longrightarrow$ $\exists c \geq 0 : a_n \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $0 \leq \sigma_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leq b_1 + b_2 + \ldots b_n = s_n \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $(\sigma_n)$ ist beschränkt $\xrightarrow{11.1(1)}$ $(\sigma_n)$ konvergent.

(2) Annahme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent. Widerspruch! ■

**Beispiele:**

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$. Bekannt: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\xrightarrow{12.2(2)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. Folgerung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{8}}$, $a_n = \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{8}}$, $b_n := \frac{1}{n^2}$, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2-n+\frac{1}{8}} \to 1$ $(n \to \infty)$ $\Longrightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{a_n}{b_n} \leq 2$ $\forall n \geq m$ $\Longrightarrow$ $a_n \leq 2b_n$ $\forall n \geq m$ $(|a_n| = a_n)$
$\sum_{n=1}^{\infty} 2b_n$ ist konvergent $\xrightarrow{12.2(1)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(3) Sei $\alpha \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$: $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xrightarrow{12.2(2)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist divergent.

(4) Sei $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{Q}$: $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xrightarrow{12.2(1)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent.

(5) In der Übung gezeigt: Ist $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent genau dann, wenn $\alpha > 1$. Bemerkung: Ist später die allgemeine Potenz $a^x$ $(a > 0, x \in \mathbb{R})$ bekannt, so zeigt man analog: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \iff \alpha > 1\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

**Definition ($\infty$ als Limes Superior)**
Ist $(\alpha_n)$ eine Folge und $\alpha_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und ist $(\alpha_n)$ nicht nach oben beschränkt, so setzte $\limsup \alpha_n := \limsup_{n\to\infty} \alpha_n := \infty$.

**Vereinbarung:** $x < \infty\ \forall x \in \mathbb{R}$

**Satz 12.3 (Wurzelkriterium)**
Sei $(a_n)$ eine Folge und $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

(1) Ist $\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

(2) Ist $\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

(3) Ist $\alpha = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Beweis**
(1) $\alpha < 1$. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $x := \alpha + \varepsilon < 1$. 9.2 $\implies$ $\sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon = x$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies$ $|a_n| < x^n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ist konvergent $\overset{12.1(1)}{\implies}$ Behauptung.

(2) (i) $\alpha > 1$, $\alpha < \infty$: Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $\alpha - \varepsilon > 1$. 9.2 $\implies$ $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies |a_n| > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies a_n \not\to 0 \overset{11.1}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

(ii) $\alpha = \infty \implies \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \overset{\text{wie eben}}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

(3) Siehe Beispiele ∎

**Beispiele:**
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, also $\alpha = 1$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2 \to 1$, also $\alpha = 1$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n(1+\frac{1}{n})^{-n^2}}_{=:a_n}$. $\sqrt[n]{|a_n|} = (1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

(4) Sei $(a_n)$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}$ mit $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ n \cdot x^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$.

Betrachte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\alpha_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{n}|x| & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$.
$\alpha_{2n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$. $\alpha_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{2n-1} \cdot |x| \to |x|$. A16 $\implies \mathscr{H}(\alpha_n) = \{\frac{1}{2}, |x|\}$.
Ist $|x| < 1 \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.
Ist $|x| > 1 \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.
Sei $|x| = 1$: $|a_{2n-1}| = |(2n-1)x^{2n-1}| = 2n-1 \implies a_n \not\to 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

(5) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$. **Behauptung:** $\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0$. **Beweis:** $a_n := n^p q^n$. $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^p}|q| = (\sqrt[n]{n})^p|q| \to |q| < 1 \overset{12.3}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\implies a_n \to 0$.

**Satz 12.4 (Quotientenkriterium)**
Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $\alpha_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (ffa $n \in \mathbb{N}$).

(1) Ist $|\alpha_n| \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

(2) Es sei $(\alpha_n)$ beschränkt, $\beta := \liminf |\alpha_n|$ und $\alpha := \limsup |\alpha_n|$.

   (i) Ist $\beta > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

   (ii) Ist $\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

   (iii) Ist $\alpha = \beta = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Beweis**
O.B.d.A.: $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

(1) Dann: $|a_2| \geq |a_1| > 0$, $|a_3| \geq |a_2| \geq |a_1| > 0$, ... allgemein: $|a_n| \geq |a_1| > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \nrightarrow 0 \implies$ die Behauptung.

(2) (i) Sei $\beta > 1$, Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $\beta - \varepsilon > 1$. 9.2 $\implies |\alpha_n| > \beta - \varepsilon > 1$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies$ die Behauptung.

   (ii) Sei $\alpha < 1$. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $x := \alpha + \varepsilon < 1$. 9.2 $\implies |\alpha_n| < \alpha + \varepsilon = x$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann: $|a_2| \leq |a_1|x$, $|a_3| \leq |a_2|x \leq |a_1|x^2$,... allgemein: $|a_n| \leq |a_n 1|x^{n-1}$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_1|x^{n-1}$ ist konvergent $\overset{12.2}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

   (iii) siehe Beispiele ■

**Beispiele:**
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$, also $\alpha = \beta = 1$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$, also $\alpha = \beta = 1$.

**Beispiel 12.5 (Exponentialfunktion)**
Für $x \in \mathbb{R}$ betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe (absolut)?.

Klar: für $x = 0$ konvergiert die Reihe.

Sei $x \neq 0$ und $a_n = \frac{x^n}{n!}$;

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad (\text{also } \alpha = \beta = 0)$$

12.4 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also wird durch $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$ eine Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Diese Funktion $E$ heißt die **Exponentialfunktion**.

$E(0) = 1$, $E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

**Bemerkung:** Später zeige wir: $E(r) = e^r \ \forall r \in \mathbb{Q}$. Dann *definieren* wir $e^x := E(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

**Motivation:** $b_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$, $b_n \nrightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots$ ist divergent.
$a_1 := b_1 + b_2$, $a_2 := b_3 + b_4$, … also: $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \ldots$ ist konvergent. Also: „Im Allgemeinen darf man Klammern in konvergenten Reihen nicht weglassen."

**Satz 12.6 (In konvergenten Folgen darf man Klammern setzen)**
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es seien $n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < \ldots$. Setze $b_1 := a_1 + \ldots + a_{n_1}$, $b_2 := a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}$, allgemein: $b_k := a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k} \quad (k \geq 2)$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Beweis**
$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $\sigma_k := b_1 + b_2 + \ldots b_k$. Es ist $\sigma_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_k} = s_{n_k} \implies \sigma_k$ ist eine Teilfolge von $s_n \overset{8.1(3)}{\implies} (\sigma_k)$ konvergent und $\lim_{k \to 0} \sigma_k = \lim_{n \to \infty} s_n$. ∎