

Kapitel 2.

Tangentialvektoren und Tangentialräume

Betrachte in der nebenstehenden Abbildung eine differenzierbare Kurve $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$ mit $c(0) = p$. Dann gilt:

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle c(t), c(t) \rangle = 2 \langle \dot{c}(0), c(0) \rangle = 2 \langle \dot{c}(0), p \rangle \Rightarrow \dot{c}(0) \in p^\perp.$$

Die Kurven heißen **äquivalent**, wenn es eine Karte (φ, U) von M und p gibt, so dass gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_2)$$

Lemma 2.1 *Der oben definierte Begriff der Äquivalenz ist unabhängig von der Wahl der Karte.*

Beweis Es sei (ψ, V) eine weitere Karte von M um p . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ c_1) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_1) = D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_1) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_2) = \dots = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ c_2). \quad \square \end{aligned}$$

Definition 2.2 (Geometrische Definition des Tangentialraums) *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein (geometrischer) **Tangentialvektor** an M in p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven c mit $c(0) = p$. Die Menge*

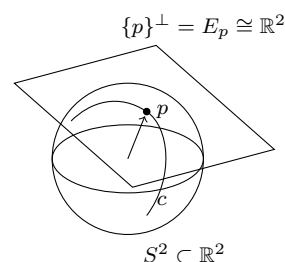
$$T_p^{\text{geo}} M = \{[c] \mid c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ glatt}, c(0) = p\}$$

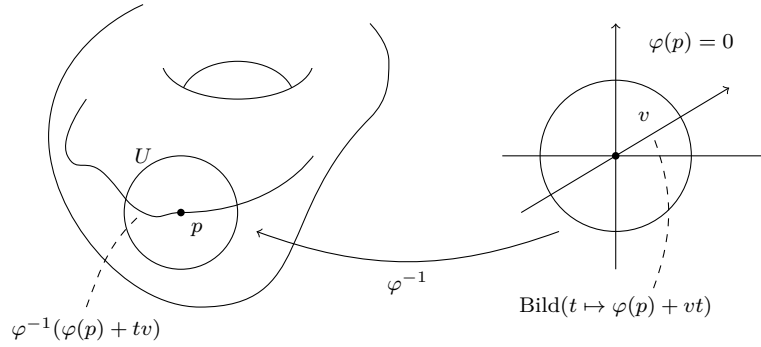
*heißt (geometrischer) **Tangentialraum** an M in p .*

Bemerkung Mit den Bezeichnungen wie oben ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$A: T_p^{\text{geo}} M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad [c] \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c).$$

Beweis Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ sei $B(v) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)]$ die Äquivalenzklasse der abgebildeten Kurve auf der Mannigfaltigkeit.





$$AB(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ B(v)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi(p) + tv) = v.$$

$$BA(\underbrace{[c]}_{\exists c}) = B(v_c) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_c)] \text{ wobei } v_c = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c).$$

Die Kurven c und $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_c)$ sind äquivalent, also ist $BA[c] = [c]$ und somit A bijektiv. \square

Damit erhält $T_p^{\text{geo}} M$ die Struktur eines reellen Vektorraumes vermöge der folgenden Verknüpfung:

$$\lambda[c_1] + \mu[c_2] = A^{-1}(\lambda A[c_1] + \mu A[c_2]).$$

Dabei gilt $\lambda[c_1] + \mu[c_2] = [c]$ für $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(\lambda v_1 + \mu v_2))$ mit $v_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_i)$.

Lemma 2.3 Die oben definierte Lineare Struktur ist unabhängig von der Wahl der Karte.

Beweis Es sei (ψ, V) eine Karte von M um p und $A'[c] = \frac{d}{dt} \Big|_t (\psi \circ c)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} AA'^{-1}(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ (\psi^{-1}(\psi(p) + tv))) \\ &= D(\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ \psi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = D(\varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot v. \end{aligned}$$

Also ist AA'^{-1} linear,

$$\begin{aligned} A'^{-1}(\lambda A'[c_1] + \mu A'[c_2]) &= A^{-1}(AA'^{-1}(\lambda A'[c_1] + \mu A'[c_2])) \\ &= A^{-1}(\lambda AA'^{-1}[c_1] + \mu AA'^{-1}[c_2]) \\ &= A^{-1}(\lambda A[c_1] + \mu A[c_2]). \end{aligned} \quad \square$$

Motivation: Richtungsableitungen im \mathbb{R}^n

Bemerkung Für $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist die **Richtungsableitung** wie folgt definiert:

$$\partial_v f(x) = Df(x) \cdot v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x + tv).$$

Diese erfüllt die Leibniz-Regel:

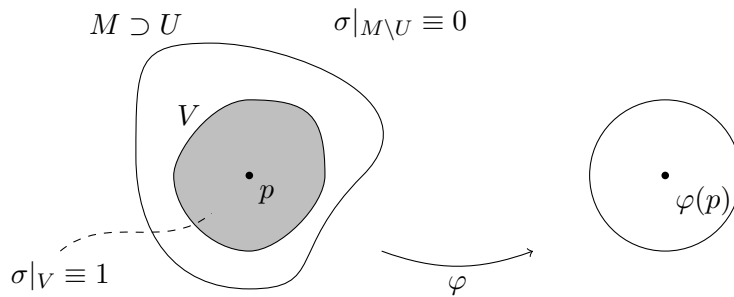
$$\partial_v(fg)(x) = \partial_v f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial_v g(x).$$

Definition 2.4 (Algebraische Definition des Tangentialraumes) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein (algebraischer) **Tangentialvektor** an M in p ist eine Lineare Abbildung $X_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Leibniz-Regel erfüllt:

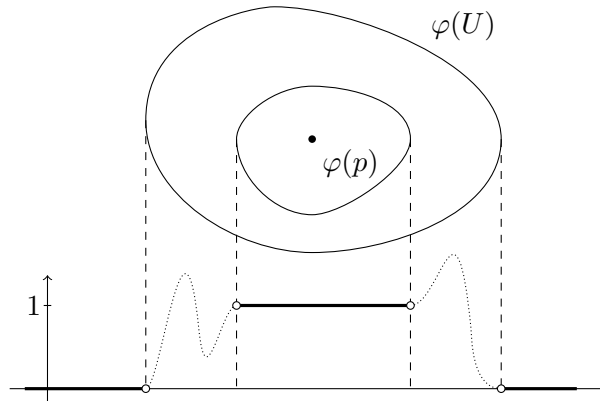
$$X_p(fg) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g).$$

Die algebraischen Tangentialvektoren bilden einen reellen Vektorraum $T_p^{\text{alg}} M$, den Tangentialraum an M in p .

Lemma 2.5 Es sei U eine Umgebung von $p \in M$. Dann existiert eine Umgebung $V \subset U$ von p und eine glatte reellwertige Funktion $\sigma \in C^\infty(M)$ mit den Eigenschaften $\sigma|_V \equiv 1$ und $\text{supp}(\sigma) \subset U$.



Beweis Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass U das Kartengebiet einer Karte φ von M um p ist und $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Es sei nun $\varepsilon > 0$ so, dass $\overline{B}_\varepsilon(0) \subset \varphi(U)$ gilt.



Ist dann η eine glatte Funktion auf \mathbb{R} mit $\eta \equiv 1$ auf $\left[-\frac{\varepsilon^2}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2}\right]$ und $\eta \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$, so hat für $U_1 = \varphi^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0))$ die Funktion

$$\sigma(q) = \begin{cases} \eta(\|\varphi(q)\|^2) & \text{für } q \in U_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

die gewünschten Eigenschaften. □

Lemma 2.6 Für alle $X_p \in T_p^{\text{alg}} M$ gilt:

- (i) $X_p(f) = 0$ falls f in einer Umgebung von p konstant ist.
- (ii) $X_p(f) = X_p(g)$ falls f und g auf einer Umgebung übereinstimmen.

Beweis (ii) Es sei U eine Umgebung von p mit $f|_U = g|_U$. Ist dann σ wie in Lemma 2.5, so gilt $\sigma f = \sigma g$ und aus

$$X_p(\sigma)f(p) + \sigma(p)X_p(f) = X_p(\sigma f) = X_p(\sigma g) = X_p(\sigma)g(p) + \sigma(p)X_p(g)$$

folgt $X_p(f) = X_p(g)$.

(i) Wegen der \mathbb{R} -Linearität und (ii) genügt es $f \equiv 1$ zu betrachten. Es gilt

$$X_p(1) = X_p(1 \cdot 1) = X_p(1) \cdot 1 + 1 \cdot X_p(1) = 2 \cdot X_p(1),$$

$$\text{also } X_p(1) = 0.$$

□

Bemerkung Also gilt für $f \in C^\infty(M)$ und $g \in C^\infty(U)$ direkt:

$$\sigma g = \begin{cases} \sigma g|_U & \sigma g \in C^\infty(M) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus $\sigma g \in C^\infty(M)$ folgt $X_p(g) = X_p(\sigma g)$. Für eine Karte $\varphi: U \rightarrow V$ von M und p seien algebraische Tangentialvektoren definiert:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \in T_p^{\text{alg}} M \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) = \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} e_i.$$

Satz 2.7 Die Vektoren $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$ bilden eine Basis von $T_p^{\text{alg}} M$.

Lemma 2.8 Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $g \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$. Dann existieren glatte Funktionen $h_i \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$ mit $h_i(x_0) = \partial_i g(x_0)$ und

$$g(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) h_i(x).$$

Beweis (Beweis des Satzes) Die j -te Komponente φ^j der Karte ist glatt und es gilt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (\varphi^j) = \partial_i(\varphi^j \circ \varphi^i)(\varphi(p)) = \partial_i x^j(\varphi(p)) = \delta_i^j.$$

Damit sind die Vektoren linear unabhängig.

Es sei $X_p \in T_p^{\text{alg}} M$ und $f \in C^\infty(M)$. Für $x_0 = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$, $B_\varrho(x_0) \subset \varphi(U)$ und für $g = f \circ \varphi^{-1}|_{B_\varrho(x_0)}$ gilt mit den Bezeichnungen wie im letzten Lemma:

$$\begin{aligned} X_p(f) &= X_p(g \circ \varphi) = X_p\left((g(\varphi(p))) + \sum (\varphi^i - \varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)\right) \\ &= \underbrace{X_p(g(\varphi(p)))}_{=0} + \sum X_p\left((\varphi^i - \varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)\right) \\ &= \sum X_p(\varphi^i)(h_i \circ \varphi)(p) - X_p(\varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)(p) + \sum (\varphi^i - \varphi(p)^i)(p) X_p(h_i \circ \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^n X_p(\varphi^i) \underbrace{(h_i \circ \varphi)(p)}_{\substack{=h_i(\varphi(p))=h_i(x_0)=\partial_i g(x_0) \\ =\partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))=\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f)}} \\ &= \sum_{i=1}^n X_p(\varphi^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f). \end{aligned}$$

□

Bemerkung Ist $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, so gilt $\xi^i = X_p(\varphi^i)$.

Beweis (Beweis des Lemmas) Es gilt:

$$g(x) - g(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tx + (1-t)x_0) dt = \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \underbrace{\int_0^1 \partial_i g(tx + (1-t)x_0) dt}_{=: h_i(x)} \square$$

Satz 2.9 (Äquivalenz der Tangentialraumbegriffe) Die Abbildung

$$J_p: T_p^{geo} M \rightarrow T_p^{alg} M \quad J_p[c](f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c)$$

ist ein linearer *Isomorphismus* „ $c(0)(f)$ “.

Beweis Wegen

$$\begin{aligned} J_p[c](f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c) \\ &= D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c) = D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} A[c] \end{aligned}$$

ist $J_p = D(\cdot) \circ A$ linear.

Ist $[c] \in \text{Kern } J_p$, so folgt aus $0 = J_p[c](\varphi^i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi^i \circ c)$, dass $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c) = 0$ gilt, also $[c] = 0$. Damit ist J_p injektiv, also ein Isomorphismus. \square

Bemerkung 1) Ist $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, so gilt $X_p = \dot{c}(0)$ für $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\xi)$.

2) Für jede glatte Kurve c durch p ist $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c)$ der Koeffizientenvektor von $\dot{c}(0)$ in der Basis $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$.

Satz 2.10 (Transformationsverhalten bei Kartenwechsel) Es seien φ und ψ Karten in M um p und es bezeichnen $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ und $\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$ die damit assoziierten Basen von $T_p M$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

Es sei $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$. Dann gilt:

$$\eta^j = \sum \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \xi^i \quad \text{bzw.} \quad \eta = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \xi.$$

Beweis Es gelte $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$ und nach obiger Bemerkung zum vorletzten Satz gilt:

$$\alpha_i^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (\psi^j) = \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \quad \square$$

