

# 3 Reihen

**Ziel.** Untersuche „unendliche Summen“  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  für eine gegebene Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

## 3.1 Konvergenzkriterien

**Definition 3.1.** Sei  $(a_j)_{j \geq 0}$  gegeben und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann heißt

$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j$$

$n$ -te *Partialsumme* und die Folge  $(s_n)_{n \geq 0}$  heißt *Reihe*. Man schreibt statt  $(s_n) \sum_{j \geq 0} a_j$  (oder  $\sum_j a_j$  oder  $\sum a_j$ ).

Die Reihe *konvergiert* (bzw. *divergiert*), wenn  $(s_n)_{n \geq 0}$  konvergiert (bzw. divergiert).

Wenn Konvergenz vorliegt, dann bezeichnet man den Grenzwert von  $(s_n)$  mit  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  („Reihenwert“).

**Beispiel 3.2.** a) Sei  $a_j = \frac{1}{j!}$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ).

$$\Rightarrow s_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow e \quad (n \rightarrow \infty), \text{ nach Bsp. 2.16.}$$

$$\Rightarrow \exists \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

b) Geometrische Reihe: Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$ ,  $a_j = z^j$ .

$$(\text{Also } s_n = \sum_{j=0}^n z^j, (s_n) = 1, 1+z, 1+z+z^2, \dots)$$

$$\text{Bsp. 0.2: } \sum_{j=0}^n z^j = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{n+1}}{1 - z}, \text{ Übung: } z^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$\Rightarrow \exists \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

Anderer Beweis: Sei  $|z| < 1$ . Setze  $b_n = |z^{n+1}| = |z|^{n+1}$ .

Dann:  $0 \leq b_{n+1} = |z| \cdot b_n \leq b_n$ .

Thm 2.14:  $\exists b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0$ . Ferner folgt mit  $n \rightarrow \infty$ :

$$0 \leq b = |z| \cdot b \xrightarrow{|z| < 1} b = 0.$$

c) Sei  $a_j = \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_n &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \exists \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1. \end{aligned}$$

d) Harmonische Reihe: Sei  $a_j = \frac{1}{j}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow s_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Behauptung:*  $s_{2j} \geq 1 + \frac{j}{2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ .

$\Rightarrow (s_n)$  unbeschränkt.

$\Rightarrow (s_n)$  divergiert, also  $\sum \frac{1}{j}$  divergiert.

*Beweis.* (IA)  $j = 1$ .

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$$

(IS): Es gelte:  $s_{2j} \geq 1 + \frac{j}{2}$  für ein  $j \in \mathbb{N}$  (IV).

$$\text{Dann: } s_{2^{j+1}} = \sum_{k=1}^{2^j} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \stackrel{(IV)}{\geq} 1 + \frac{j}{2} + \frac{2^j}{2^{j+1}} = 1 + \frac{j+1}{2}$$

(da in zweiter Summe  $k \leq 2^{j+1}$ ). □

e) Sei  $a_j = (-1)^j$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$s_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j = \begin{cases} 1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1, & n \text{ ungerade} \\ 1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1 + 1, & n \text{ gerade} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\implies (s_n)_n$  hat 2 verschiedene HP, 0 und 1.

Kor. 2.24  $\implies (s_n)$  divergiert, d.h. Reihe divergiert.

*Bemerkung.* Man definiert und behandelt Reihen, die bei  $k_0 \in \mathbb{Z}$  beginnen (statt  $k_0 = 0$  in Def. 3.1) genauso.

**Satz 3.3.** Seien  $\sum a_k, \sum b_k$  konvergente Reihen und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann:

$$\exists \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

*Beweis.*  $\sum_{j=0}^n (\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha \sum_{j=0}^n a_j + \beta \sum_{j=0}^n b_j \longrightarrow \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \beta \sum_{j=0}^{\infty} b_j \quad (n \rightarrow \infty)$   
(nach Voraussetzung und Satz 2.7). □

**Satz 3.4.** Sei  $a_j \geq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und die Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  seien beschränkt. Dann:

$$\exists \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sup s_n.$$

*Beweis.* Es gilt  $s_{n+1} - s_n = \sum_{j=0}^{n+1} a_j - \sum_{j=0}^n a_j = a_{n+1} \geq 0 \implies (s_n)$  wächst.

Da  $(s_n)$  beschränkt, folgt Beh. aus Thm. 2.14. □

**Satz 3.5 (CAUCHY-Kriterium).** Sei  $(a_j)_{j \geq 0}$  gegeben.

Die Reihe  $\sum_j a_j$  konvergiert genau dann, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > m \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{j=n+1}^n a_j \right|. \quad (3.1)$$

*Beweis.*  $\sum a_j$  konvergiert  $\xLeftrightarrow{\text{Thm. 2.26}} (s_n)_n = \left( \sum_{j=0}^n a_j \right)_n$  ist CF.

$$\xLeftrightarrow{\text{Def. 2.25}} \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > m \geq N_\varepsilon : \varepsilon \geq |s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right|. \quad \square$$

**Korollar 3.6.** Wenn  $\sum a_j$  konvergiert, dann gilt  $a_j \longrightarrow 0$  für  $(j \rightarrow \infty)$ .

*Bemerkung.* Umkehrung ist falsch!  $\frac{1}{j} \longrightarrow 0$ , aber  $\sum \frac{1}{j}$  divergiert.

*Beweis des Korollars.* Wähle in (3.1)  $n = m + 1 > N_\varepsilon$  und erhalte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m \geq N_\varepsilon : |a_{m+1}| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Beispiel 3.7.** Für  $|z| \geq 1$  ist  $\sum_{j \geq 0} z^j$  divergent, da dann  $|z^j| = |z|^j \geq 1$  keine Nullfolge (NF). (Spezialfall:  $z = -1$ , schon im Bsp. 3.25 behandelt.)

**Satz 3.8** (LEIBNIZ-Kriterium). Sei  $b_k \geq b_{k+1} \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $b_k \rightarrow 0$  für  $(k \rightarrow \infty)$ . Dann:

$$\exists \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k.$$

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n+2} (-1)^j b_j - \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j b_j \\ &= (-1)^{2n+2} b_{2n+2} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1} \\ &= b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0 \text{ n.V.} \\ &\implies (s_n)_n \text{ fällt.} \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} s_{2n+3} - s_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} b_{2n+3} + (-1)^{2n+2} b_{2n+2} \\ &= -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geq 0 \text{ n.V.} \\ &\implies (s_{2n+1})_n \text{ wächst.} \end{aligned}$$

Damit:  $s_1 \leq s_{2n+1} = \underbrace{(-1)^{2n+1} b_{2n+1}}_{\leq 0} + s_{2n} \leq s_{2n} \leq s_2$ .

$\implies (s_{2n})_n, (s_{2n+1})_n$  sind beschränkt.

Thm. 2.14  $\implies \exists s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}, t = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$ .

Ferner:  $t - s = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = 0$  (weil

$$|(-1)^{2n+1} b_{2n+1}| = b_{2n+1} \rightarrow 0$$

nach Voraus.).

Lemma 2.22  $\implies s = t$  ist einziger HP von  $(s_n)_n$ . Nach Kor. 2.24 konvergiert  $(s_n)$ .  $\square$

**Beispiel 3.9.**  $\exists \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} [\stackrel{!}{=} -\ln 2]$ . Denn:  $b_k = \frac{1}{k}$  ist fallende NF („alternierende Reihe“).

Beachte:  $\sum_k |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_k \frac{1}{k}$  divergiert nach Bsp. 3.2.

**Definition 3.10.** Eine Reihe  $\sum a_k$  konvergiert absolut, wenn die Reihe  $\sum_k |a_k|$  der Beträge konvergiert.

*Bemerkung 3.11.* a) Konv.  $\nRightarrow$  absolute Konvergenz (siehe Bsp. 3.9).

b)  $a_k \geq 0$ : Konvergenz = absolute Konvergenz.

c) absolute Konvergenz  $\implies$  Konvergenz.

*Beweis.* Nach Satz 3.5 und der absoluten Konvergenz gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ .

$$\forall n > m \geq N_\varepsilon : \varepsilon \geq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \stackrel{3.5}{\implies} \text{Beh.}$$

□

**Satz 3.12** (Majorantenkriterium). *Gegeben seien  $a_k, b_k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann:*

a) *Wenn  $0 \leq |a_k| \leq |b_k| \forall k \in \mathbb{N}_0$  und  $\sum_k b_k$  konvergiert, dann konvergiert  $\sum a_k$  absolut und*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

b) *Wenn  $a_k \geq b_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$  und  $\sum b_k$  divergiert, dann divergiert  $\sum a_k$ .*

*Beweis.* a)  $\sum_{j=0}^n |a_j| \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=0}^n b_j \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$

Satz 3.4  $\implies \exists \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$

b) *Annahme:  $\sum a_k$  konvergiere  $\implies \sum b_k$  konvergiert  $\nmid$  Voraussetzung in 2.*  
 $\implies$  Beh. 2.

□

**Beispiel 3.13.** *Beh.* Sei  $p \in \mathbb{Q}$ . Dann konvergiert  $\sum_{k \geq 1} k^{-p}$  für  $p \geq 2$  und divergiert für  $p \leq 1$ .

*Beweis.*  $p = 2$ : Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann  $k(k+1) \leq 2k^2 \implies \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)} = b_k$

Bsp. 3.2, Satz 3.4  $\implies \exists \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 2$ . Satz 3.121  $\implies \exists \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ .

Sei  $p > 2$ :  $k^p = \underbrace{k^{p-2}}_{\geq 1_{p-2}=1} k^2 \geq k^2. \implies \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2} \stackrel{3.121}{\implies} \exists \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Sei  $p \leq 1$ : Dann:  $k^p = \underbrace{k^{p-1}}_{\leq 1} k \leq k \implies \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^p}$ . Bsp. 3.2:  $\sum \frac{1}{k} \text{ div. } \stackrel{3.121}{\implies} \sum \frac{1}{k^p} \text{ div. } \quad \square$

**Satz 3.14** (Quotientenkriterium). *Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$ , sodass es ein  $k_0 \geq 0$  gibt mit  $a_k \neq 0$  für  $k \geq k_0$  und sodass  $\left( \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \right)_{k \geq k_0}$  beschränkt sei. Dann gelten:*

a)  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \implies \sum_k a_k \text{ konvergiert absolut.}$

$$b) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \implies \sum_k a_k \text{ divergiert.}$$

*Beweis.* a) Wähle  $\varepsilon > 0$ , sodass  $q = \varepsilon + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ .

Nach Lemma 2.27  $\implies \exists K \in \mathbb{N} : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$  für alle  $k \geq K$ , wobei  $K \geq k_0$ .

Sei  $k \geq K$ . Dann:

$$|a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k| \leq q^2 |a_{k-1}| \leq \dots \leq q^{k-K+1} |a_K|.$$

$$\text{Bsp 3.2: } \exists \sum_{k=K}^{\infty} q^{k-K+1} \xrightarrow{3.121} \exists \sum_{k=K}^{\infty} |a_{k+1}| \implies \exists \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ (da } q < 1\text{)}.$$

b) Ähnlich:  $\exists K \geq k_0$  mit  $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$  für alle  $k \geq K$ .

$$\implies |a_j| \geq |a_k| \neq 0 \quad \forall j \geq K$$

$$\implies (a_k)_k \text{ ist keine Nullfolge} \xrightarrow{3.6} \sum a_k \text{ divergiert.}$$

□

**Beispiel 3.15.** a) Sei  $z \in \mathbb{C}$  und  $a_k = \frac{z^k}{k!}$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ). Damit:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\left| \frac{z^k}{k!} \right|} = \frac{z^{k+1} k!}{(k+1)! |z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\xrightarrow{3.141} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ konvergiert absolut } \forall z \in \mathbb{C}.$$

b) Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq 1 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ , (\*) dann ist in 3.14 keine allgemeine Aussage möglich, denn (vgl. Bsp. 3.13):

a)  $a_k = \frac{1}{k}$ . Dann  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k}{k+1} \longrightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) \implies (*)$  gilt, also  $\sum \frac{1}{k}$  divergiert.

b)  $a_k = \frac{1}{k^2}$ . Dann  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \longrightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) \implies (*)$  gilt, aber  $\sum \frac{1}{k^2}$  konvergiert.

**Satz 3.16** (Wurzelkriterium). Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  eine Folge, sodass  $\left( \sqrt[k]{|a_k|} \right)_{k \geq 0}$  beschränkt ist. Dann:

$$a) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \implies \sum a_k \text{ konvergiert absolut.}$$

$$b) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies \sum a_k \text{ divergiert.}$$

*Beweis.* a) Wähle  $q \in \left( \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}, 1 \right)$ .

$$\text{Lemma 2.27} \implies \exists K \in \mathbb{N} : |a_k|^{\frac{1}{K}} \leq q, \forall k \geq K \implies |a_k| \leq q^K \quad (\forall k \geq K).$$

$$q < 1 : \text{Bsp. 3.2} \implies \exists \sum_{k=0}^{\infty} q^k \xrightarrow{3.141} \exists \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

b) Nach Voraussetzung  $\exists$  TF mit  $|a_{kj}|^{\frac{1}{k_j}} \geq 1 \quad (\forall j)$ .

$$\implies |a_{kj}| \geq 1 \quad (\forall j \in \mathbb{N}) \implies (a_k)_k \text{ ist keine NF.} \xrightarrow{3.6} \sum a_k \text{ divergiert.}$$

□

**Beispiel 3.17.** a) Sei  $a_k = 2^k z^k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und ein festes  $z \in \mathbb{C}$ . Dann:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = (2^k |z|^k)^{\frac{1}{k}} = 2|z| \begin{cases} < 1, & |z| < \frac{1}{2} \\ > 1, & |z| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Satz 3.16  $\implies \sum_{k \geq 0} 2^k z^k$  konvergiert absolut wenn  $|z| < \frac{1}{2}$  und divergiert, wenn  $|z| > \frac{1}{2}$ .

b) Es ist keine allgemeine Aussage in 3.16 möglich, wenn  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ . (Gleiches Beispiel wie in Bsp. 3.152).

## 3.2 Einige Vertiefungen/Vermischtes

**Beispiel 3.18** (Dezimaldarstellung). Sei  $r \in \mathbb{R}$ . Setze  $m := \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq r\} =: [r]$  („Gaußklammer“).  $\implies x := r - m \in [0, 1) \implies \exists! x_1 \in \{0, \dots, 9\}$  mit  $x_1 \cdot 10^{-1} \leq x < (x_1 + 1) \cdot 10^{-1}$ . Induktiv findet man für jedes  $n$  eine „Ziffer“  $x_n \in \{0, \dots, 9\}$  mit

$$x_n \cdot 10^{-n} \leq x - x_1 \cdot 10^{-1} - \dots - x_{n-1} \cdot 10^{-(n-1)} \leq (x_n + 1) \cdot 10^{-n}$$

$$\implies 0 \leq x - \sum_{j=1}^n x_j 10^{-j} < 10^{-n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exists x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 10^{-j} \text{ und } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( m + \sum_{j=1}^n x_j 10^{-j} \right)}_{\in \mathbb{Q}} = m + \sum_{j=0}^{\infty} x_j 10^{-j}.$$

Schreibweise:  $r = m, x_1 x_2 x_3 \dots$

Frage: Hat  $r$  genau eine solche Darstellung?

Problem: Sei  $x_k = 9$  für alle  $k \geq l + 1$  und  $x_l < 9$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ , also

$$r = m, x_1 \dots x_l 9999 \dots \quad (*)$$

Beachte

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{10} \right)^k - \sum_{k=0}^l \left( \frac{1}{10} \right)^k \right) \\ \stackrel{0.2,3.2}{=} 9 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1 - 10^{-(l+1)}}{1 - \frac{1}{10}} \right) = 9 \frac{10^{-l-1}}{\frac{9}{10}} = 10^{-l}$$

$r$  hat also zwei verschiedene Darstellungen, nämlich  $(*)$  und

$$r = m + \sum_{k=1}^{l-1} x_k 10^{-k} + (x_l + 1) 10^{-l} = m, x_1 \dots x_{l-1} (x_l + 1) \quad (**)$$

Man verwendet  $(**)$  statt  $(*)$ . Also setzt man

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} x_k & , k = 1, \dots, l-1 \\ x_l + 1 & , k = l \\ 0 & , k > l \end{cases}$$

und verwendet  $\tilde{x}_k$  statt  $x_k$ . Entsprechend schreibt man statt  $r = m,999\dots$  nun  $r = m+1$ . *Behauptung.* Mit dieser Vereinbarung hat jedes  $r \in \mathbb{R}$  genau eine Dezimaldarstellung  $r = m, x_1 x_2 \dots$ . Umgekehrt definiert jede Folge  $(x_k)_{k \geq 1}$  mit  $x_k \in \{0, \dots, 9\}$  ein  $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 10^{-k} \in [0, 1]$ .

*Beweis.* siehe Amann/Escher, Thm. II 7.11 □

*Bemerkung.* Hier kann man 10 durch jedes  $b \in \mathbb{N}$  mit  $b \geq 2$  ersetzen. Dann gilt  $x_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ .

*Beachte.* Wir haben gezeigt:  $\forall r \in \mathbb{R} \exists q_n \in \mathbb{Q} : q_n \rightarrow r \ (n \rightarrow \infty)$ .

**Definition 3.19** (CANTOR). Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$  ist.  $M$  heißt *überabzählbar*, wenn  $M$  weder abzählbar unendlich noch endlich ist.

*Bemerkung.* Wenn  $M$  abzählbar unendlich ist, dann setze  $x_n = \varphi^{-1}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wenn  $\varphi$  bijektive Abbildung  $m \rightarrow \mathbb{N}$  ist, und schreibe  $M = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  als Folge.

**Beispiel 3.20.** a) *Behauptung.*  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar unendlich.

*Beweis.* Betrachte

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & , n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

zeige:  $\varphi$  ist bijektiv

TODO hier scheint in meinen Mitschrieb was zu fehlen...

□



b) *Behauptung.*  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.

*Beweis.* Schreibe  $\mathbb{Q}$  in einem Schema (streiche ungekürzte Brüche).

TODO

$\rightsquigarrow$  Bild für Bijektion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

$\implies \mathbb{Q}$  ist abzählbar, d.h. mit  $q_n = \varphi(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\mathbb{Q} = (q_n)_{n \geq 1} = (0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2, \dots)$ .

Nach Bsp. 3.17 ist  $\mathbb{R}$  die Menge aller Häufungspunkte von  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

c) *Behauptung.* (CANTOR)  $M = (0, 1)$  ist überabzählbar. (Damit ist auch  $\mathbb{R}$  überabzählbar, da es eine Bijektion  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$  gibt, z.B.  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{1+2|x|}$ ).

*Beweis.* Annahme:  $(0, 1)$  sei abzählbar. Also existiert bijektives  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$  mit  $(0, 1) = (x_n)_{n \geq 1}$ , wobei  $x_n = \varphi(n)$ . Sei  $\xi_n$  die  $n$ -te Dezimalstelle von  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Setze

$$\eta_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0 \\ 1, & \xi_n \neq 0 \end{cases} \neq \xi_n$$

$$\text{Bsp. 3.17} \implies \begin{cases} y = 0, \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots & \in (0, 1) \\ \text{Da } \eta_k \neq \xi_k \forall k \in \mathbb{N}, \text{ ist } y \neq x_n \forall n \in \mathbb{N} & \implies y \notin (0, 1) \end{cases} \quad \nexists$$

$\square$

## Umordnung von Reihen

**Beispiel 3.21.** Nach Bsp. 3.9 konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ . Definiere rekursiv eine „Umordnung“  $(b_k)_{k \geq 1}$  von  $a_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Setze:  $m = 1$ :  $b_1 := 1, b_2 := -\frac{1}{2} \implies b_1 + b_2 \geq \frac{1}{4}$

$m = 2$ :  $b_3 := \frac{1}{3}, b_4 := \frac{1}{5}, b_5 := -\frac{1}{4} \implies b_3 + b_4 + b_5 \geq \frac{1}{2}$

Definiert seien  $b_{n_m} = -\frac{1}{2m}$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 2$ , sowie

$$b_{n_{m-1}+1} = \frac{1}{2l_{m+1}+1}, \dots, b_{n_m-1} = \frac{1}{2l_m-1}$$

für ein  $l_m \in \mathbb{N}$ . Da  $\sum_{k \geq l_m} \frac{1}{2k+1}$  divergiert (Übung) finden wir ein  $j \in \mathbb{N}$

$$b_{n_m+1} = \frac{1}{2l_m+1}, \dots, b_{n_m+j} = \frac{1}{2l+j},$$

sodass:  $b_{n_m+1} + \dots + b_{n_m+j} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2m+2}$ .

Setze  $n_{m+1} = n_m + j + 1$  und  $b_{n_{m+1}} = -\frac{1}{2m+2} \implies$  erhalten rekursiv  $(b_k)_{k \geq 1}$  mit

$$\sum_{k=1}^{n_m+1} b_n \geq (m+1) \frac{1}{4} \rightarrow \infty, \quad (m \rightarrow \infty)$$

**Fazit.**  $\sum_{k \geq 0} a_k$  divergiert, *obwohl* die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit den gleichen Summanden konvergiert! Also: Hier gilt kein „unendliches Kommutativgesetz“.

**Definition 3.22.** Sei  $\sum_{k \geq 0} a_k$  eine Reihe und  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Bijektion. Setze  $b_k = a_{\varphi(k)}$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Die Reihe  $\sum_k b_k$  heißt Umordnung von  $\sum_k a_k$ .

**Satz 3.23.** Sei  $\sum_k a_k$  eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung von  $\sum_k a_k$  gegen den Wert  $\sum_k^{\infty} a_k$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da  $\sum |a_k|$  konvergiert, gilt:

$$\exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_{\varepsilon} : \sum_{j=N_{\varepsilon}+1}^n |a_j| \leq \varepsilon \quad \text{nach Satz 3.5} \quad (*)$$

Sei  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bijektiv. Sei  $M_{\varepsilon} = \max\{\varphi^{-1}(0), \dots, \varphi^{-1}(N_{\varepsilon})\} \implies \{0, \dots, N_{\varepsilon}\} \subseteq \{\varphi(0), \dots, \varphi(M_{\varepsilon})\}$ .

Seien  $n \geq N_{\varepsilon}$ ,  $m \geq M_{\varepsilon}$ . Setze

$$D_{m,n} = \sum_{j=0}^m a_{\varphi(j)} + \sum_{j=0}^n (-a_j).$$

Als Summanden treten in  $D_{m,n}$  nur  $\pm a_k$  auf mit  $k > N_{\varepsilon}$ . (alle  $a_k$  mit  $k \leq N_{\varepsilon}$  treten doppelt auf und kürzen sich).

$$\implies |D_{m,n}| \leq \sum_{k=N_{\varepsilon}+1}^{\infty} |a_k| \stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon \quad \forall n \geq N_{\varepsilon}, m \geq M_{\varepsilon}$$

Da  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  existiert, folgt mit  $n \rightarrow \infty$  und Satz 2.9, dass:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |D_{m,n}| = \left| \sum_{j=0}^m a_{\varphi(j)} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right| \leq \varepsilon, \forall m \geq M_{\varepsilon}$$

Das ist die Behauptung. □

## Cauchyprodukte

Frage: Wie multipliziert man Reihen?

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \sum_{j=0}^n a_j \right)}_{=: A_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n a_k \right)}_{=: B_n} \\ &\stackrel{2.7}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Schema für Summanden  $a_j b_k$ :

TODO

Setze  $Q_n = \{0, \dots, n\}^n$ ,  $D_n = \{(j, k) \in Q_n, k + j \leq n\}$ . Summiere  $A_n B_n$  „diagonal“, das heißt bilde zuerst

$$c_n = \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l}, n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

$c_n$  = Summe über  $a_j b_k$  mit  $j + k = n$ .

**Satz 3.24.** Seien  $\sum_k a_k$ ,  $\sum_k b_k$  absolut konvergente Reihen. Seien  $c_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) in (3.3) definiert. Dann konvergiert  $\sum_{n \geq 0} c_n$  absolut und es gilt:

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \quad (3.4)$$

*Bemerkung.* Satz ist (im Allgemeinen) falsch für konvergente, nicht absolut konvergente Reihen (siehe Übung).

*Beweis.* Seien  $A_n, B_n$  aus (3.2),  $A_n^* = \sum_{j=0}^n |a_j|$ ,  $B_n^* = \sum_{k=0}^n |b_k|$ ,  $C_n = \sum_{j=0}^n c_j$ . Nach Voraussetzung  $\exists A^* = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ ,  $B^* = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ . Dann:

$$\begin{aligned} |A_n B_n - C_n| &= \left| \sum_{(j,k) \in Q_n \setminus D_n} a_j b_k \right| \leq \sum_{(j,k) \in Q_n \setminus Q(\frac{n}{2})} |a_j| |b_k| \\ &= \sum_{(j,k) \in Q_n} |a_j| |b_k| - \sum_{(j,k) \in Q(\frac{n}{2})} |a_j| |b_k| \\ &= \underbrace{A_n^* B_n^*}_{\rightarrow A^* B^* \text{ nach Satz 2.7}} - \underbrace{A_{(\frac{n}{2})}^* B_{(\frac{n}{2})}^*}_{\rightarrow A^* B^* \text{ (da TF) } (n \rightarrow \infty)} \\ &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n B_n - C_n| = 0 \end{aligned}$$

Da  $A_n B_n \rightarrow AB$  ( $n \rightarrow \infty$ ), folgt  $\exists \sum_{n=0}^{\infty} C_n - AB \implies (3.4)$ . Ferner:

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \stackrel{(3.3)}{\leq} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n |a_j| |b_{n-j}| \leq A_N^* B_N^* \leq A^* B^*$$

für alle  $N \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 3.4 folgt die absolute Konvergenz von  $\sum c_n$ .  $\square$

**Beispiel 3.25** (Exponentialreihe). Sei  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ . Die Reihe konvergiert absolut nach Bsp. 3.15 ( $\forall z \in \mathbb{C}$ ). Beachte:  $\exp(0) = 1$ ,  $\exp(1) = e$  (Bsp. 3.17)

*Behauptung:*

- a)  $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$   
 b)  $\exp(z) \neq 0, \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$   
 c) Sei  $p \in \mathbb{Q}$ :  $\exp(p) = e^p$

*Beweis.* a)

$$\exp(z)\exp(w) \stackrel{\text{Satz 3.24}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{n!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j w^{n-j}}_{=\text{Bsp. 0.3: } (z+w)^n} = \exp(z+w)$$

b)  $1 = \exp(0) = \exp(z-z) \stackrel{\text{a)}}{=} \exp(z)\exp(-z) \implies \text{b)}$

c) Sei  $p = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für  $m > 0$

$$\exp(p)^n = \underbrace{\exp(p) \cdots \exp(p)}_{n\text{-mal}} \stackrel{\text{a)}}{=} \exp(\underbrace{np}_m) = \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m\text{-mal}}) = \exp(1)^m = e^m$$

$$\implies \exp(p) = e^{\frac{m}{n}}. \text{ Fall } m < 0 \text{ mit b).}$$

□

### 3.3 Potenzreihen

**Definition 3.26.** Es sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  gegeben. Für  $z \in \mathbb{C}$  heißt  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  *Potenzreihe*.

*Bemerkung.* Sei  $D$  die Menge der  $z \in \mathbb{C}$ , sodass die Potenzreihe konvergiert, dann ist  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  eine Funktion. Es gilt stets  $0 \in D$ ,  $f(0) = a_0$ . (Man setzt  $0^0 := 1$ )

**Definition 3.27.** Der *Konvergenzradius*  $\varrho$  von  $\sum a_k z^k$  ist gegeben durch:

$$\varrho = \begin{cases} \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}, & \text{wenn } \left( \sqrt[k]{|a_k|} \right) \text{ beschränkt und keine NF,} \\ 0, & \text{wenn } \left( \sqrt[k]{|a_k|} \right) \text{ unbeschränkt,} \\ \infty, & \text{wenn } \left( \sqrt[k]{|a_k|} \right) \text{ NF.} \end{cases}$$

**Theorem 3.28.** Sei  $\varrho$  der Konvergenzradius von  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ . Dann gelten:

- a)  $0 < \varrho < \infty$ , dann konvergiert  $\sum a_k z^k$  absolut für  $|z| < \varrho$  und divergiert für  $|z| > \varrho$ , wobei  $z \in \mathbb{C}$ .  
 b) Wenn  $\varrho = 0$ , dann divergiert  $\sum a_k z^k$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$   
 c) Wenn  $\varrho = \infty$ , dann konvergiert  $\sum a_k z^k$  absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$

Also:  $\varrho = \sup \{ r \geq 0 : \sum a_k z^k \text{ konvergiert } \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq r \}$  (dabei ist  $\sup \mathbb{R}_+ := \infty$ ).

*Beweis.* Es gilt  $\sqrt[k]{|a_k z^k|} = \left( |a_k| |z|^k \right)^{\frac{1}{k}} = |z| \sqrt[k]{|a_k|} =: b_k$

a)  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_k \stackrel{5}{=} |z| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ . Nach Wurzelkriterium:

$$\implies \begin{cases} |z| < \varrho \iff \overline{\lim} b_k < 1 \implies \sum a_k z^k \text{ konvergiert absolut} \\ |z| > \varrho \iff \overline{\lim} b_k > 1 \implies \sum a_k z^k \text{ divergiert} \end{cases}$$

c)  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0 \implies \sum a_k z^k \text{ konvergiert absolut } \forall z \in \mathbb{C} \text{ nach Wurzelkriterium}$

b) Falls  $|z| \neq 0$ , dann ist  $(b_k)$  unbeschränkt  $\implies (b_k^k)$  ist unbeschränkt  $\implies (a_k z^k)$  ist keine NF. Nach Kor. 3.6  $\implies \sum a_k z^k$  divergiert

□

**Beispiel 3.29.** a) Polynome  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  ( $z \in \mathbb{C}$ ), wobei  $a_1, \dots, a_n$  gegeben. Setze  $a_j = 0$  für  $j > n \implies \varrho = \infty \implies \text{konvergiert } \forall z \in \mathbb{C}$

b)  $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  konvergiert  $\forall z \in \mathbb{C}$  nach Bsp. 3.15. Nach Thm. 3.28 gilt:

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \quad (3.5)$$

da  $\varrho = \infty$  und  $a_k = \frac{1}{k!}$

c) Geometrische Reihe  $\sum_{k \geq 0} z^k$ . Hier ist  $a_k = 1 \implies \varrho = 1$ . Genauer: Bsp. 3.2 liefert  $\exists \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$  für  $|z| < 1$ . Bsp. 3.7  $\implies$  Divergenz wenn  $|z| \geq 1$ .

d) Sei  $a_k = k!$ . Nach (3.5)  $\forall n \in \mathbb{N} \exists K_n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \leq \frac{1}{n} \ (\forall k \geq K_n) \implies n \leq \sqrt[k]{k!}$  ( $\forall k \geq K_n$ )  $\implies (\sqrt[k]{k!})_k$  ist unbeschränkt. Thm. 3.28  $\implies \sum_k k! z^k$  konvergiert *nur* für  $z = 0$ , da  $\varrho = 0$ .

e) Betrachte  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (2z)^k$ , d. h.  $a_k = \frac{2^k}{k}$ . Damit  $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 2$  ( $k \rightarrow \infty$ , Üb.)  $\implies \varrho = \frac{1}{2}$ . Also absolute Konvergenz für  $|z| < \frac{1}{2}$ , Divergenz für  $|z| > \frac{1}{2}$ . Hier gilt Konvergenz für  $z = -\frac{1}{2}$ , Divergenz für  $z = \frac{1}{2}$  (nach Bsp. 3.9 und 3.2)

*Bemerkung.* Im Fall  $|z| = \varrho \in (0, \infty)$  ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Satz 3.30.** Es seien  $\sum a_k z^k, \sum b_k z^k$  Potenzreihen mit Konvergenzradius  $\varrho_a, \varrho_b > 0$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gelten für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$  (wobei  $\min\{x, \infty\} = x$  für  $x \in \mathbb{R}$ )

$$a) \exists \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) z^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

$$b) \exists \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) z^n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right)$$

*Beweis.* a) Thm. 3.28 und Satz 3.3

b) Thm. 3.28 und Satz 3.24, wobei in (3.3) gilt:

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j z^j b_{n-j} z^{n-j} = z^n \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$$

□

**Beispiel 3.31** (Sinus und Cosinus). Für  $z \in \mathbb{C}$  konvergieren absolut:

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Das sind Potenzreihen mit Koeffizienten

$$\sin: a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k+1 \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}, \quad \cos: a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^k}{(2k)!}, & n = 2k \text{ gerade} \end{cases}$$

*Beweis.* Zeige  $\varrho = \infty$ .

$$\sin: \sqrt[n]{|a_k|} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \xrightarrow{(3.5)} 0, \quad n \rightarrow \infty$$

cos genauso.

□

Aus Reihen folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \cos x, \sin x \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \quad (3.7)$$

**Satz 3.32.** Sei  $z \in \mathbb{C}$ . Dann gelten:

$$\text{Euler: } \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z), \quad (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) \quad (3.8)$$

Für  $x \in \mathbb{R}$  folgt mit (3.6)  $\operatorname{Re} \exp(ix) = \cos x$ ,  $\operatorname{Im} \exp(iz) = \sin x$ ,  $|\exp(iz)| = 1$ ,  $|\cos x|, |\sin x| \leq 1$ .

*Beweis.* Es gilt:  $\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i(i^2)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \stackrel{i^2=-1}{=} \cos z + i \sin z$ . Ferner  $1 = \exp(iz - iz) \stackrel{(3.25)}{=} \exp(iz) \cdot \exp(i(z-z)) \stackrel{(3.7), \text{ Euler}}{=} (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = (\cos z)^2 + (\sin z)^2$ . (3.8) folgt ähnlich aus Euler, (3.7) □

**Korollar 3.33.** *Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ . Dann:*

$$\begin{aligned}
& -2 \sin \left( \frac{z+w}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{z-w}{2} \right) \stackrel{3.8}{=} \\
& \frac{-2}{(2i)^2} \left( \exp \left( \frac{i}{2}(z+w) \right) - \exp \left( -\frac{i}{2}(z+w) \right) \right) \cdot \left( \exp \left( \frac{i}{2}(z+w) \right) - \exp \left( -\frac{i}{2}(z-w) \right) \right) \\
& \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1}{2} \left( \exp \left( \frac{i}{2}2z \right) - \exp \left( \frac{i}{2}2w \right) - \exp \left( \frac{i}{2}(-2w) \right) + \exp \left( \frac{i}{2}(-2z) \right) \right) \\
& \stackrel{(3.8)}{=} \cos z - \cos w
\end{aligned}$$