

## 22. Nicht fortsetzbare Lösungen

In diesem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$  und  $I, J, K, \dots$  seien Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

Wir betrachten das AWP

$$(A) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

**Bemerkung:** Die Definitionen und Sätze dieses Paragraphen gelten allgemeiner für Systeme, also  $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  (vgl. Paragraph 15).

### Definitionen und Bezeichnungen

- (1)  $\mathcal{L}_{(A)} :=$  Menge aller Lösungen von (A).
- (2) Für  $y \in \mathcal{L}_{(A)}$  bezeichne  $I_y$  das Definitionsintervall von  $y$ .
- (3) Seien  $u, v \in \mathcal{L}_{(A)}$ .  $v$  heißt eine **Fortsetzung** von  $u$ , gdw.  $I_u \subseteq I_v$  und  $u = v$  auf  $I_u$ . I.d. Fall schreiben wir  $u \otimes v$ .
- (4)  $v \in \mathcal{L}_{(A)}$  heißt **nicht fortsetzbar (nf)**, gdw. aus  $y \in \mathcal{L}_{(A)}$  und  $v \otimes y$  folgt  $I_v = I_y$  (also  $y = v$ ).

**Erinnerung:** (A) ist eindeutig lösbar  $\iff$  aus  $y_1, y_2 \in \mathcal{L}_{(A)}$  folgt:  $y_1 = y_2$  auf  $I_{y_1} \cap I_{y_2}$ .

#### Satz 22.1

Sei  $u \in \mathcal{L}_{(A)}$ . Dann existiert ein  $v \in \mathcal{L}_{(A)}$  :  $v$  ist eine nicht fortsetzbare Fortsetzung von  $u$  („Maximale Fortsetzung von  $u$ “).

#### Beweis

$\mathcal{L} := \{y \in \mathcal{L}_{(A)} : u \otimes y\}$ ,  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ , denn  $u \in \mathcal{L}$ .  $\otimes$  ist eine Ordnungsrelation auf  $\mathcal{L}$ . Weiter gilt für  $v \in \mathcal{L}$  :  $v$  ist ein maximales Element in  $\mathcal{L} \iff v$  ist nicht fortsetzbar. Wegen des Zornschen Lemmas ist z.z.: jede Kette in  $\mathcal{L}$  hat eine obere Schranke in  $\mathcal{L}$ . Sei also  $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$  eine Kette in  $\mathcal{L}$ .  $I := \bigcup_{y \in \mathcal{K}} I_y$ . Wegen  $x_0 \in I_y \forall y \in \mathcal{K}$  :  $I$  ist ein Intervall.

Definiere  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt: Ist  $x \in I \implies \exists y \in \mathcal{K} : x \in I_y$ .  $z(x) := y(x)$ . Gilt auch noch  $x \in I_{\tilde{y}}$ ,  $\tilde{y} \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}$  Kette  $\implies y \otimes \tilde{y}$  oder  $\tilde{y} \otimes y$ . Etwa:  $y \otimes \tilde{y}$ . D.h.:  $I_y \subseteq I_{\tilde{y}}$  und  $y = \tilde{y}$  auf  $I_y \implies y(x) = \tilde{y}(x)$ .

$z$  ist wohldefiniert. Klar:  $z(x_0) = y_0$ . 12.2  $\implies z \in \mathcal{L}_{(A)}$  Nach Konstruktion:  $y \otimes z \forall y \in \mathcal{K}$ .

Sei  $y \in \mathcal{K} \implies u \otimes y$  und  $y \otimes z \implies u \otimes z \implies z \in \mathcal{L}$ .  $z$  ist also eine obere Schranke von  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{L}$ . ■

**Satz 22.2**

Sei  $D$  offen und  $f \in C(D, \mathbb{R})$ .

- (1)  $\exists y \in \mathcal{L}_{(A)} : x_0 \in I_y^\circ$
- (2) Ist  $y \in \mathcal{L}_{(A)}$ , so existiert eine nicht fortsetzbare Fortsetzung  $\hat{y} \in \mathcal{L}(A)$  von  $y$  mit  $I_{\hat{y}}$  ist offen.
- (3) Ist  $(A)$  eindeutig lösbar, so hat  $(A)$  eine eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung  $y : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\omega_- < \omega_+$ ,  $\omega_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\omega_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  („die“ Lösung des AWP's).

**Beweis**

(1) 12.6 (Peano, III)

(2) Wegen 22.1 ist nur zu zeigen:  $I_{\hat{y}}$  ist offen.

Annahme:  $I_{\hat{y}}$  ist *nicht* offen. Dann existiert  $\max I_{\hat{y}}$  oder  $\min I_{\hat{y}}$ . Etwa:  $\exists b := \max I_{\hat{y}}$ .

$$x_1 := b, y_1 := \hat{y}(b). \text{ AWP (B) } \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_1) &= y_1 \end{cases}$$

Wende (1) auf (B) an. Dann existiert eine Lösung  $\tilde{y} : K \rightarrow \mathbb{R}$  von (B) mit  $x_1 = b \in K^\circ \implies$

$$\exists \varepsilon > 0 : [b, b+\varepsilon) \subseteq K. \text{ Definiere } z : I_{\hat{y}} \cup [b, b+\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \text{ durch } z(x) := \begin{cases} \hat{y}(x), & x \in I_{\hat{y}} \\ \tilde{y}(x), & x \in [b, b+\varepsilon) \end{cases}.$$

Klar:  $z(x_0) = \hat{y}(x_0) = y_0$ . 12.3  $\implies z \in \mathcal{L}_{(A)}$ .

Weiter:  $I_{\hat{y}} \subsetneq I_z = I_{\hat{y}} \cup [b, b+\varepsilon)$  und  $\hat{y} = z$  auf  $I_{\hat{y}}$ . Widerspruch, denn  $\hat{y}$  ist nicht fortsetzbar.

(3) folgt aus (2). ■

**Folgerung 22.3**

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $f \in C(D, \mathbb{R})$ ,  $f$  sei auf  $D$  partiell differenzierbar nach  $y$  und  $f_y \in C(D, \mathbb{R})$ . Dann hat (A) eine eindeutig bestimmte nicht fortsetzbare Lösung  $y : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beweis**

13.3, 13.4, 22.2 ■

**Beispiele:**

$$(1) D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = 1 + y^2, \text{ AWP } \begin{cases} y' &= 1 + y^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Voraussetzungen obiger Folgerung sind erfüllt.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \implies \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx + c \implies \arctan y = x + c \implies y(x) = \tan(x + c), 0 = y(0) = \tan c \implies c = 0.$$

Die eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung des AWP's lautet:  $y(x) = \tan x$ ,  $x \in (\omega_-, \omega_+)$ ,  $\omega_- = -\pi/2$ ,  $\omega_+ = \pi/2$  (also:  $\omega_+ = -\omega_-$ ).

(2)  $f$  erfülle die Voraussetzungen obiger Folgerung und es gelte  $D = \mathbb{R}^2$  und

$$(*) \quad f(x, y) = f(-x, y) = f(-x, -y) = f(x, -y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt für die eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung  $y : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}$  des AWP<sub>s</sub>  $\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(0) &= 0 \end{cases} : \omega_+ = -\omega_-$ .

### Beweis

Klar:  $\omega_- < 0 < \omega_+$ . Wir zeigen  $\omega_+ \geq -\omega_-$  (analog:  $\omega_+ \leq \omega_-$ ). Annahme:  $\omega_+ < -\omega_-$ .

Sei  $x \in [0, -\omega_-) \implies -x \in (\omega_-, 0] \subseteq (\omega_-, \omega_+)$ . Definiere  $z : [0, -\omega_-) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $z(x) := -y(-x)$ .

$z(0) = -y(0) = 0$ ,  $z'(x) = -y'(-x)(-1) = y'(-x) = f(-x, y(-x)) \stackrel{(*)}{=} f(x, y(-x)) \stackrel{(*)}{=} f(x, -y(-x)) = f(x, z(x))$ . Also:  $z$  löst das AWP auf  $[0, -\omega_-)$ . Eindeutige Lösbarkeit  $\implies y = z$  auf  $[0, \omega_+)$ . Definiere  $u : (\omega_-, -\omega_-) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $u(x) := \begin{cases} y(x), & x \in (\omega_-, 0] \\ z(x), & x \in [0, -\omega_-) \end{cases}$ .

$u(0) = y(0) = 0$ , 12.3  $\implies u$  löst das AWP auf  $(\omega_-, -\omega_-)$ . ■

Ohne Beweis:

### Satz 22.4

Sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $D := I \times \mathbb{R}$  und  $f \in C(D, \mathbb{R})$  sei auf  $D$  beschränkt. (12.4  $\implies \exists u \in \mathcal{L}_{(A)} : I_u = I$ ).

Ist  $y \in \mathcal{L}_{(A)}$ , so existiert ein  $\tilde{y} \in \mathcal{L}_{(A)} : I_{\tilde{y}} = I$  und  $y = \tilde{y}$  auf  $I_y$ .

