Kapitel 3

2 Hauptsätze der Operatorentheorie

3.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (PUB)

Theorem 3.1 (Baire) *Sei (M, d) ein vollständiger Raum, $O_n \subseteq M$ offen und dicht, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in M.*

Beweis Sei $x_0 \in M,\ \delta > 0,\ B_0 = B(x_0, \delta)$. z.z: $B_0 \cap D \neq \emptyset$.
Da O_1 offen und dicht $\exists\, x_1 \in O_1 \cap B_0,\ \delta_1 \in (0, \frac{1}{2}\delta)$ mit $\overline{B(x_1, \delta_1)} \subseteq O_1 \cap B_0$. Induktiv findet man $x_n \in O_n \cap B_{n-1},\ \delta_n \in (0, \frac{1}{2}\delta_{n-1})$. $B_n = B(x_n, \delta_n)$ mit $\overline{B_n} \subseteq O_n \cap B_{n-1} \subseteq O_n \cap O_{n-1} \cap B_{n-2} \subseteq \cdots \subseteq O_1 \cap \ldots O_n \cap B_0$ $(*)$. Da $\delta_m < 2^{-m}\delta$ gilt ferner, dass $x_n \in \overline{B_m} \subseteq B(x_m, 2^{-m}\delta)$ für $n \geq m$.
$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist CF. $\overset{\text{vollst.}}{\Longrightarrow} \exists\, x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{B_m}\ \forall\, m \in \mathbb{N}$.
$\overset{(*)}{\Rightarrow} x \in \cap_{n=1}^{\infty} O_n \cap B_0$. ∎

Korollar 3.2 *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, $A_n \subseteq M$ abg $(n \in \mathbb{N})$ mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = M$. Dann $\exists\, N \in \mathbb{N}$, sodass $\mathring{A}_N \neq \emptyset$.*

Beweis Annahne: $\mathring{A}_n = \emptyset\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Setze $O_n = M \backslash A_n \Rightarrow O_n$ ist offen und dicht (nach Satz 1.12), $n \in \mathbb{N} \overset{\text{Theo 3.1}}{\Rightarrow} \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ ist dicht in M.
Aber: $M \backslash \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} M \backslash O_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = M$. Wid! ∎

Theorem 3.3 (PUB) *Seien X ein BR, Y ein normierter VR und $\mathcal{T} \subseteq B(X, Y)$. Wenn $\mathcal{T}$ punktweise beschränkt ist ($\forall x \in X\ \exists\, c_x > 0 :\ \|Tx\| \leq c_x\ \forall T \in \mathcal{T}$), dann ist $\mathcal{T}$ gleichmäßig beschränkt (d.h. $\exists c > 0 :\ \|T\| \leq c\ \forall\, T \in \mathcal{T}$)*

Beweis Sei $A_n = \{x \in X :\ \|Tx\| \leq n\ \forall T \in \mathcal{T}\}$ $n \in \mathbb{N}$. Nach Vor: $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.
Sei $x_k \in A_n,\ x_k \mapsto x$ in X $(k \to \infty)$. Dann: $\|Tx\| = \lim_{k\to\infty} \|Tx_k\| \leq n\ \forall T \in \mathcal{T}$.
Korollar 3.2 $\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N},\ y \in A_N,\ \varepsilon > 0 :\ B(y, \varepsilon) \subseteq A_N$.
Da $\mathcal{T} \subseteq B(X, Y) : A_N$ ist konvex und aus $x \in A_N$ folgt $-x \in A_N$, also $-B(y, \varepsilon) \subseteq -A_N = A_N$.

Damit $\|z\| < \varepsilon \Rightarrow z = \frac{1}{2}(\underbrace{y+z}_{\in B(y,\varepsilon)} + \underbrace{z-y}_{\in -B(y,\varepsilon)} \Rightarrow z \in \frac{1}{2}(A_N + A_N) \overset{A_N \text{ konvex}}{\subseteq} A_N$ $(*)$.

Sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1$. Dann: $z = \varepsilon x \in A_N$ nach $(*) \Rightarrow N \geq \|Tz\| = \varepsilon\|Tz\|$ $\forall T \in \mathcal{T} \Rightarrow \|T\| \leq \frac{N}{\varepsilon}$ $\forall T \in \mathcal{T}$. ■

Beispiel 3.4 Sei $X = c_\infty$ mit sup Norm (kein BR!), $Y = \mathbb{K}$, $T_n x = nx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann: $T_n \in B(X,Y) = X^*$, $\|T_m\| = n \to \infty$. Sei $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots) \in c_\infty \Rightarrow |T_n x| \leq m||x||_\infty =: c_x \Rightarrow$ Theorem 3.3 benötigt vollst. von X.

Korollar 3.5 (Banach-Steinhaus) *Seien X, Y BRe, $D \subsetneq X$ dichter UVR, $T_n \in B(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$.*
Dann sind äquivalent:

1. *$\exists T \in B(X,Y)$ mit $T_n x \to Tx$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in X$ ("starke Konvergenz")*
2. *$T_n x$ konvergiert für $n \to \infty$ und alle $x \in X$.*
3. *$T_n x$ konvergiert für $n \to \infty$ und alle $x \in D$ und $\|T_n\| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis a) $\Rightarrow$ b) trivial.

b) $\Rightarrow$ c) Nach Vor. gilt $\|T_n x\| \leq c_x$ $\forall n \in \mathbb{N} \overset{\text{PUB}}{\Rightarrow} \exists c > 0 : \|T_n\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) $\Rightarrow$ a) Setze $T_0 x = \lim T_n x$ für $x \in D$. Da T_n linear ist, ist T_0 linear. Ferner: $\|T_0 x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \overset{c)}{\leq} c\|x\|$ für alle $x \in D \Rightarrow T_0 \in B(D,Y) \overset{\text{Lemma 1.64}}{\Longrightarrow} \exists T \in B(X,Y)$ mit $Tx = T_0 x$ $\forall x \in D$.
Sei $\varepsilon > 0$, $x \in X$. Dann existiert ein $y \in D$ mit $\|x - y\| \leq \varepsilon$ (da $\overline{D} = X$).
Damit $\overline{\lim}\|T_n x - Tx\| \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(\|T_n(x-y)\| + \|T_n y - Ty\| + \|T(y-x)\|) \overset{c)}{\leq} c\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \|T_n y - Ty\| + c\varepsilon = 2c\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow}$ Beh. ■

Beispiel 3.6 Sei $X = Y = c_0$, $T_n x = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, 0, \dots)$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in X) \Rightarrow T_n \in B(c_0)$ mit $\|T_n\| \geq \|T_n e_n\| = n \Rightarrow \infty$.
Aber: Für $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots) \in c_0$ gilt: $T_n x \to (x_1, 2x_2, \dots, mx_m, 0, \dots) \Rightarrow$ man kann in c) die Beh $\|T_n\| \leq c$ nicht weglassen.

Beispiel 3.7 (Fourierreihen) Sei $X = \{f \in C(\mathbb{R}) :\ f(t) = f(t + 2\pi),\ t \in \mathbb{R}\}$ mit sup Norm (BR). Setze

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt,\ k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Wie in Bsp 2.22 kovergiert $s_n(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ für $n \to \infty$ in $L^2([-\pi, \pi])$, Werner S.130 zeigt:

$$\begin{aligned} s_n(f,t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(s+t)D_n(s)ds \text{ mit} \\ D_n(t) &= \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}, & t \in [-\pi,\pi]\backslash\{0\} \\ n + \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Setze $T_n f = s_n(f,0) \Rightarrow T_n \in X^*$.
Annahme: T_n konvergiert für alle $f \in X \overset{\text{Kor 3.5}}{\Rightarrow} \|T_n\| \leq c\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Aber: Wie in Bsp 1.67 gilt: $\|T_n\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt \overset{n\to\infty}{\to} \infty$. (Werner IV, 2.10) Wid!
$\Rightarrow \exists\, f \in X:\ s_n(f,0)$ divergiert.

"richtiges Gegenbeispiel" (Du Bois-Raymond 1876)

Beispiel 3.8 (Links-Translation) Sei $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Setze $(T(t)f)(s) = f(s+t),\ s \in \mathbb{R},\ (t \in \mathbb{R},\ f \in X)$. Klar. $T(t)f$ ist mb, $T(t)$ ist linear, $\|T(t)f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(\underbrace{s+t}_{=r})|^p dt)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \Rightarrow T(t) \in B(X)$ ist Isometrie. Seien $f \in X, t, s, r \in \mathbb{R},\ (T(t), T(s), f) = (T(s)f)(r+t) = f(r+t+s) = (T(t+s)f)(r) \Rightarrow T(t)T(s) = T(t+s) = T(s)T(t)$.
Weiter $T(0) = T \Rightarrow T(t)$ ist invertierbar mit $T(t)^{-1} = T(-t),\ t \in \mathbb{R}$.
Sei $f \in C_0(\mathbb{R}),\ t, t_0 \in \mathbb{R}: ||T(t)f - T(t_0)f||_\infty := \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s+t) - f(s+t_0)| \to 0$ $(t \to t_0)$, da f glm stetig. Sei supp $\subseteq [a,b]$ und $|t - t_0| \leq 1$. Dann supp $(T(t)f - T(t_0)f) \subseteq [a - t_0 - 1, b + b_0 + 1] \overset{1.39}{\Rightarrow} \|T(t)f - T(t_0)f\|_p \leq c_{a,b}||T(t)f - T(t_0)f||_\infty \to 0$ $(t \to t_0) \overset{\text{Kor 3.5,Sa 1.44}}{\Longrightarrow} T(t)(f) \to T(t_0)f$ für $f \in X,\ t \to t_0$.
$(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ heißt **stark stetige Operatorengruppe**.

Bemerkung $t \mapsto T(t) \in B(X)$ ist bzgl der Operatornorm unstetig.

Beweis Sei $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f &= t^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[0,t]},\ t > 0 \Rightarrow \|f\|_p = 1 \\ (T(t)f)(s) &= t^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[0,t]}(s+t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}}, & -t \leq s \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T(t) - I\| \geq \|T(t)f - f\|_p = t^{-\frac{1}{p}} (\int_{-t}^{t} |1|^p dt)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \Rightarrow T(t) \not\to I = T(0),\ t \to 0$ (in $B(X)$).
(entsprechend für $X = C_c(\mathbb{R})$) ∎

Beispiel 3.9 (Faltungsoperatoren) Seien $k \in L^1(\mathbb{R}),\ f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 1 \leq p < \infty$.
AE, Lemma X 7.2 zeigt: $\mathbb{R}^{d+d} \ni (x,y) \mapsto k(x-y) \in \mathbb{K}$ ist mb $\Rightarrow (x,y) \mapsto \varphi(x,y) = k(x-y)f(y)$ ist mb.
Sei $p = 1$. Fubini a) $\int_{\mathbb{R}^{d+d}} |\varphi(x,y)|d(x,y) = \int_{R^d}\int_{R^d} |k(\underbrace{x-y}_{=z})||f(y)|dxdy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |k(z)|dz|f(y)|dy = \|k\|_1\|f\|_1 \Rightarrow \varphi \in L^1(\mathbb{R}^{d+d})$. Fubini b) zeigt: $Tf(x) := (k*f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} k(x-y)f(y)dy$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert, in x int'bar und $\|Tf\|_X \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+d})} \leq \|k\|_1\|f\|_X$.
Sei $p \in (1,\infty)$. Dann

$$\begin{aligned} \Psi(x) &:= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x,y)|dy \\ &= \int_{R^d} |k(x-y)|^{\frac{1}{p}}|k(x-y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|dy \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} (\int_{\mathbb{R}^d} |k(x-y)|^{\frac{p'}{p'}}dy)^{\frac{1}{p'}} \cdot (\int_{\mathbb{R}^d} |k(x-y)|^{\frac{p}{p}}|f(y)|^p dy)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|k\|_1^{\frac{1}{p'}}(|k| + |f|^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

für f.a. $x \in \mathbb{R}^d$ (vgl. Fubini a))
Da $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$ liefert Fubini a): $\Psi^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|\Psi\|_p^p = \|\Psi^p\|_p \overset{a)}{\leq} \|k\|_1^{\frac{p}{p'}} \cdot \|k\|_1 \cdot \||f|^p\|_1 = \|k\|_1^p \cdot \|f\|_p^p \ (*)$$

$\overset{\text{Fub a),Kor 1.35}}{\Longrightarrow} \varphi \in L^1(B(0,n) \times \mathbb{R}^d) \ \forall n \in \mathbb{N}.$
$\overset{\text{Fub b)}}{\Longrightarrow} Tf = k * f$ ist f.ü. definiert, mb und $(*)$ liefert:

$$\textbf{Youngsche Ungleichung} \quad \|\Psi\|_p = \|k + f\|_p \leq \|k\|_1 \|f\|_p \tag{3.1}$$

für $1 \leq p < \infty$.
Insbesondere: $T \in B(L^p(\mathbb{R})^d)$ mit $\|T\| \leq \|k\|_1$.