8. Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Stets in diesem Paragraphen: I, J seien Intervalle in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I, y_0 \in J$.

Wir betrachten: $(i) \quad y' = g(y)f(x)$, **Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen** und das zugehörige AWP $(ii) \begin{cases} y' = g(y)f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Satz 8.1 (AWP mit getrennten Veränderlichen)
Sei $y_0 \in J^0$ und $g(y) \neq 0 \; \forall y \in J$. Dann esistiert ein Intervall $I_{x_0} \in I$ und $x_0 \in I_{x_0}$ und es gilt:

(1) Das AWP (ii) hat eine Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$

(2) Die Lösung aus (1) erhält man durch Auflösen der Gl

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{nach } y(x)$$

(3) Ist $U \subseteq I$ ein Intervall und $u : U \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWPs, $x_0 \in U$, $\implies U \subseteq I_{x_0}$ und $u = y$ auf U.

(4) Das AWP (ii) ist eindeutig lösbar.

Beweis
(4) folgt aus (3)

- Definiere $G : J \to \mathbb{R}$ durch $G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}$, G ist stetig db, $G' = \frac{1}{g}$ auf J und $G(y_0) = 0$. g stetig, $g(y) \neq 0 \; \forall y \in J \implies G' > 0$ auf J oder $G' < 0$ auf $J \implies \exists G^{-1} : G(J) \to J$, $K := G(J)$, K ist ein Intervall, $0 \in K$, $y_0 \in J^0 \implies 0 \in K^0 \implies \exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq K$
Definiere $F : I \to \mathbb{R}$ durch $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$; F ist stetig db, $F' = f$, $F(x_0) = 0$. F stetig in $x_0 \implies \exists \delta > 0 : |F(x) - F(x_0)| = |F(x)| < \varepsilon \; \forall x \in \underbrace{U_\delta(x_0) \cap I}_{=:M_0}$
M_0 ist ein Intervall, $x_0 \in M_0$, $M_0 \subseteq I$, $F(M_0) \subseteq K$
$\mathfrak{M} := \{M \subseteq I : M \text{ ist ein Intervall}, x_0 \in M, \; F(M) \subseteq K\}$, $M_0 \in \mathfrak{M} \neq \emptyset$; $I_{x_0} := \cup_{M \in \mathfrak{M}} M \implies I_{x_0} \in \mathfrak{M}$
Definiere $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ durch $y(x) := G^{-1}(F(x))$. y ist stetig db auf I_{x_0}, $y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$; $\forall x \in I_{x_0} : G(y(x)) = F(x) \implies$ (2) und (Diff): $\underbrace{G'(y(x))}_{=\frac{1}{g(y(x))}} y'(x) =$

$F'(x) = f(x) \implies y'(x) = g(y(x))f(x) \ \forall x \in I_{x_0} \implies (1)$

(3) Sei $u : U \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWPs, $U \subseteq I$. $u(x_0) = y_0$ und $u'(t) = g(u(t))f(t) \ \forall t \in U \implies f(t) = \frac{u'(t)}{g(u(t))} \ \forall t \in U, \ u(U) \subseteq J$

$\forall x \in U : F(X) = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x \frac{u'(t)}{g(u(t))}\mathrm{d}t = \begin{array}{l}\text{Subst:}\\ s = u(t)\\ \mathrm{d}s = u'(t)\mathrm{d}t\end{array} = \int_{y_0}^{u(x)} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} = G(u(x))$ Also:
$F(x) = G(u(x)) \ \forall x \in U)$. $x \in U \implies u(x) \in J \implies G(u(x)) \in G(J) = K \implies F(x) \in K \implies F(U) \subseteq K \implies U \in \mathfrak{M} \implies U \subseteq I_{x_0}$.
$F(x) = G(u(x)) \ \forall x \in U \implies u(x) = G^{-1}(F(x)) = y(x) \ \forall x \in U$

Der Fall $G(y_0) = 0$. $y(x) = y_0$ ist eine Lösung des AWPs. ■

Beispiel
Untersuchung des AWPs:

$$AWP : \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (I = J = \mathbb{R})$$

$y_1(x) = 0$ ist eine Lösung des AWPs
$y_2(x) = \frac{x^2}{4}$ ist eine Lösung des AWPs auf $[0, \infty)$

$$y_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist eine Lösung des AWPs auf $\mathbb{R}$. Mehrdeutige Lösbarkeit, da nicht gilt: $g(y) \neq 0$ auf J.

Verfahren für die Praxis: Trennung der Veränderlichen (TDV): Schreibe (i) in der Form: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$. TDV: $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x \implies (iii) \ \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + c \ (c \in \mathbb{R})$

Die allgemeine Lösung von (i) erhält man durch Auflösen von (iii) in der Form $y = y(x;\ c)$. Die Lösung von (ii) erhält man, indem man c der Bedingung $y(x_0) = y_0$ anpasst.

Beispiele:

(1) $y' = -2xy^2 \ (*) \ (g(y) = y^2)$. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy^2$
TDV: $\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -2x\mathrm{d}x \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int(-2x)\mathrm{d}x + c \implies -\frac{1}{y} = -x^2 + c \implies y = \frac{1}{-c+x^2}$.
Allgemeine Lösung von $(*)$ $y(x) = \frac{1}{x^2-c} \ (c \in \mathbb{R})$

(1.1)

$$\text{AWP: } \begin{cases} (*) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$-1 = y(0) = -\frac{1}{c} \implies c = 1 \implies$ Lösung des AWPs: $y(x) = \frac{1}{x^2-1}$ auf $(-1, 1)$ $(= I_{x_0})$

(1.2)

$$\text{AWP: } \begin{cases} (*) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$1 = y(0) = -\frac{1}{c} \implies c = -1 \implies$ Lösung des AWPs: $y(x) = \frac{1}{x^2+1}$ auf $\mathbb{R}$ $(= I_{x_0})$

(1.3)

$$\text{AWP: } \begin{cases} (*) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$0 = y(0) = -\frac{1}{c} \implies$ AWP hat die Lösung $y \equiv 0$, allerdings ist das Verfahren hier nicht anwendbar.

(2)

$$\text{Dgl: } y' = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2}$$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2} \implies \frac{y^2}{1+y}\mathrm{d}y = \frac{x^2}{1-x} \implies \int \frac{y^2}{1+y}\mathrm{d}y = \int \frac{x^2}{1-x}\mathrm{d}x + c$
Nachrechnen: $\frac{y^2}{2} - y + \log(1+y) = -\frac{x^2}{2} - x - \log(1-x) + c$ (Lösungen in impliziter Form).