11. Extremwerte unter Nebenbedingungen

Definition
Seien M, N Mengen $\neq \emptyset$, $f : M \to N$ eine Funktion und $\emptyset \neq T \subseteq M$. Die Funktion $f_{|T} : T \to N$, $f_{|T}(x) := f(x)\ \forall x \in T$ heißt die **Einschränkung** von f auf T.

In diesem Paragraphen gelte stets: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$ und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$. Es sei $T := \{x \in D : \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$.

Definition
f hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Extremum unter der Nebenbedingung** $\varphi = 0 :\iff x_0 \in T$ und $f_{|T}$ hat in x_0 ein lokales Extremum.

Wir führen folgende Hilfsfunktion ein: Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ und $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ gilt:

$$H(x, \lambda) := f(x) + \lambda \cdot \varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \cdots + \lambda_p \varphi_p(x)$$

Es ist

$$H_{x_j} = f_{x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \cdots \lambda_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_j}\ (j = 1, \ldots, n),\ H_{\lambda_j} = \varphi_j$$

Für $x_0 \in D$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ gilt:

$H'(x_0, \lambda_0) = 0 \iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi(x_0) = 0$
$\iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0$ und $x_0 \in T$ (I)

Satz 11.1 (Multiplikationenregel von Lagrange)
f habe in $x_0 \in D$ eine lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$ und es sei Rang $\varphi'(x_0) = p$. Dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ mit: $H'(x_0, \lambda_0) = 0$ (λ_0 heißt **Multiplikator**).

Folgerung 11.2
T sei beschränkt und abgeschlossen. Wegen 3.3 gilt: $\exists a, b \in T : f(a) = \max f(T),\ f(b) = \min f(T)$. Ist Rang $\varphi'(\underset{b}{a}) = p \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}^p : H'(\underset{b}{a}, \lambda_0) = 0$.

Beweis
Es ist $x_0 \in T$ und

$$\varphi'(x_0) = \left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}(x_0) \end{array}}_{=:A} \end{array}\middle|\begin{array}{cc} \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x_0) \\ & \vdots \\ \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n}(x_0) \end{array}\right)$$

Rang $\varphi'(x_0) = p \implies$ o.B.d.A.: $\det A \neq 0$.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ schreiben wir $x = (y, z)$, wobei $y = (x_1, \dots, x_p),\ z = (x_{p+1}, \dots, x_n)$. Insbesondere ist $x_0 = (y_0, z_0)$. Damit gilt: $\varphi(y_0, z_0) = 0$ und $\det \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y_0, z_0) \neq 0$.

Aus 10.1 folgt: $\exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ von z_0, $\exists$ offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^p$ von y_0 und es existiert $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ mit:

(II) $g(z_0) = y_0$

(III) $\varphi(g(z), z) = 0\ \forall z \in U$

(IV) $g'(z_0) = -(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\underbrace{(g(z_0), z_0)}_{=x_0})^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\underbrace{(g(z_0), z_0)}_{=x_0}$ ■

(III) $\implies (g(z), z) \in T\ \forall z \in U$. Wir definieren $h(z)$ durch

$$h(z) := f(g(z), z)\ (z \in U)$$

Dann hat h in z_0 ein lokales Extremum (*ohne* Nebenbedingung). Damit gilt nach 8.1:

$$0 = h'(z_0) \overset{5.4}{=} f'(g(z_0), z_0)\cdot\begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \mid \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)g'(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)$$

$$\overset{(IV)}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0)\right)^{-1}}_{=:\lambda_0\in\mathbb{R}^p}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \implies \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) + \lambda_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0) = 0\ \text{(V)}$$

$$\lambda_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0)\right)^{-1} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) + \lambda_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0) = 0\ \text{(VI)}$$

Aus (V),(VI) folgt: $f'(x_0) + \lambda_0\varphi'(x_0) = 0 \overset{(I)}{\implies} H'(x_0, \lambda_0) = 0$.

Beispiel
$(n = 3, p = 2)$ $f(x, y, z) = x + y + z,\ T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\},\ \varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2, x + z - 1)$.

Bestimme $\max f(T),\ \min f(T)$. Übung: T ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{3.3}{\implies} \exists a, b \in T : f(a) = \max f(T),\ f(b) = \min f(T)$.

$$\varphi'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang $\varphi'(x, y, z) = 1 < p = 2 \iff x = y = 0$. $a, b \in T \implies$ Rang $\varphi'(a) =$ Rang $\varphi'(b) = 2$

$H(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$

$$
\begin{aligned}
H_x &= 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 && \overset{!}{=} 0 \ (1)\\
H_y &= 1 + 2\lambda_1 y && \overset{!}{=} 0 \ (2)\\
H_z &= 1 + \lambda_2 && \overset{!}{=} 0 \ (3)\\
H_{\lambda_1} &= x^2 + y^2 - 2 && \overset{!}{=} 0 \ (4)\\
H_{\lambda_2} &= x + z - 1 && \overset{!}{=} 0 \ (5)
\end{aligned}
$$

$(3) \implies \lambda_2 = -1 \overset{(1)}{\implies} 2\lambda_1 x = 0$; $(2) \implies \lambda_1 \neq 0 \implies x = 0 \overset{(5)}{\implies} z = 1$; $(4) \implies y = \pm\sqrt{2}$

$11.2 \implies a, b \in \{(0, \sqrt{2}, 1), (0, -\sqrt{2}, 1)\}$

$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2} = \max f(T)$; $f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2} = \min f(T)$

Anwendung Sei A eine reelle, *symmetrische* $(n \times n)$-Matrix. Beh: A besitzt einen reellen EW.

Beweis
$f(x) := x \cdot (Ax) = Q_A(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, $T := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\} = \partial U_1(0)$ ist beschränkt und abgeschlossen.

$\varphi(x) := ||x||^2 - 1 = x \cdot x - 1$; $\varphi'(x) = 2x$, $f'(x) = 2Ax$.

$3.3 \implies \exists x_0 \in T : f(x_0) = \max f(T)$; $\varphi'(x) = 2(x_1, \dots, x_n)$; $x_0 \in T \implies \text{Rang}\ \varphi'(x_0) = 1$ $(= p)$

$11.2 \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : H'(x_0, \lambda_0) = 0$; $h(x, \lambda) = f(x) + \lambda\varphi(x)$; $H'(x, \lambda) = 2Ax + 2\lambda x$

$\implies 0 = 2(Ax_0 + \lambda_0 x_0) \implies Ax_0 = (-\lambda_0)x_0$, $x_0 \neq 0 \implies -\lambda_0$ ist ein EW von A. ■