

25. Stetige Abhängigkeit

In diesem Paragraphen: $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $D := I \times \mathbb{R}$, $f \in C(D, \mathbb{R})$.

Satz 25.1

Sei (f_n) eine Folge in $C(D, \mathbb{R})$, (x_n) eine Folge in I , (η_n) eine Folge in \mathbb{R} und $M \geq 0$. Es gelte:

- (a) $|f_n(x, y)| \leq M$, $|\eta_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x, y) \in D$
- (b) (f_n) konvergiere auf $R := I \times [-(b-a+1)M, (b-a+1)M]$ gleichmäßig gegen f .
- (c) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y' = f_n(x, y) \\ y(x_n) = \eta_n \end{cases}$$

auf I .

Dann gilt:

- (1) (y_n) enthält eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge (y_{n_k}) und $y(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}(x)$ ($x \in I$) so gilt: $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I$
- (2) Gilt $x_n \rightarrow x_0$ ($\in I$) und $\eta_n \rightarrow y_0$ und hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, so konvergiert (y_n) auf I gleichmäßig gegen y .

Beweis

$$(1) \quad 12.1 \implies y_n(x) = \eta_n + \int_{x_n}^x f_n(t, y_n(t)) dt \quad \forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Für $x, \tilde{x} \in I, n \in \mathbb{N}$: $|y_n(x)| \leq |\eta_n| + \left| \int_{x_n}^x |f_n(t, y_n(t))| dt \right| \leq M + M|x - x_n| \leq M + (b-a)M = (b-a+1)M \implies (x, y_n(x)) \in R \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad (**)$

$$|y_n(x) - y_n(\tilde{x})| \stackrel{\text{MWS}}{=} |y'_n(\xi_n)| |x - \tilde{x}| = |f_n(\xi_n, y_n(\xi_n))| |x - \tilde{x}| \leq M|x - \tilde{x}|$$

§1 $\implies (y_n)$ enthält eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge. o.B.d.A.: (y_n) konvergiert auf I gleichmäßig.

$y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ ($x \in I$); Analysis I $\implies y \in C(I, \mathbb{R})$. $(**) \implies (x, y(x)) \in R \quad \forall x \in I$. $g(t) := f(t, y(t))$, $g_n(t) := f_n(t, y_n(t))$ ($t \in I$). Übung: (g_n) konvergiert auf I

gleichmäßig gegen g . o.B.d.A: (x_n) konvergent, (η_n) konvergent, etwa $x_n \rightarrow x_0$, $\eta_n \rightarrow y_0$. (Bolzano-Weierstraß!).

$$\begin{aligned} (*) &\implies y_n(x) = \eta_n + \int_{x_n}^x g_n(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \forall x \in I \\ &\implies y(x_0) = y_0 \text{ und } y'(x) = g(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

(2) $a_n := \|y - y_n\|_\infty$. Zu zeigen ist: $a_n \rightarrow 0$.

Annahme: $a_n \not\rightarrow 0 \implies \exists \varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $(a_{n_k}) : a_{n_k} \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(1) $\implies (y_{n_k})$ enthält eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge $y_{n_{k_l}}; z(x) := \lim_{l \rightarrow \infty} y_{n_{k_l}} \quad (x \in I)$

(1) + Beweis von (1) $\implies z$ löst das Anfangswertproblem $y' = f(x, y); y(x_0) = y_0$. Die eindeutige Lösbarkeit liefert $z = y$ auf $I \implies a_{n_{k_l}} = \|y - y_{n_{k_l}}\|_\infty = \|z - y_{n_{k_l}}\|_\infty \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$, Widerspruch denn $a_{n_{k_l}} \geq \varepsilon_0 \quad \forall l \in \mathbb{N}$. ■

Satz 25.2

Es sei $x_0 \in I$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$, $L \geq 0$ und es gelte:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L(y - \tilde{y}) \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D.$$

Für $i = 1, 2$ sei $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ die (nach 13.1) eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \eta_i \end{cases}$$

Dann gilt:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{L(b-a)} |\eta_1 - \eta_2| \quad \forall x \in I.$$

Beweis

$\alpha := \|y_1 - y_2\|_\infty = \max\{|y_1(x) - y_2(x)| : x \in I\}$. Für $x \in I$:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \eta_1 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - (\eta_2 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt) \right| \\ &\leq |\eta_1 - \eta_2| + \left| \int_{x_0}^x \underbrace{|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|}_{L|y_1(t) - y_2(t)| \leq L\alpha} dt \right| \\ &\leq |\eta_1 - \eta_2| + L\alpha |x - x_0| \\ \text{Allgemein gilt: } &\leq \underbrace{\frac{L^{n+1}}{(n+1)!} \alpha |x - x_0|^{n+1}}_{=: \alpha_n(x)} + |\eta_1 - \eta_2| \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!}}_{=: \beta_n(x)} \end{aligned}$$

$$\beta_n(x) \rightarrow e^{L|x-x_0|} \ (n \rightarrow \infty), \ \alpha_n(x) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \implies |y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{L|x-x_0|} |\eta_1 - \eta_2| \leq e^{L(b-a)} |\eta_1 - \eta_2| \quad \blacksquare$$

