§ 5.

Differentiation

Vereinbarung: Stets in dem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, also $f = (f_1, \dots, f_m)$

Definition

(1) Sei $k \in \mathbb{N}$. $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m) :\iff f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$ $(j = 1, \dots, m)$

(2) Sei $x_0 \in D$. f heißt **partiell differenzierbar** in $x_0 :\iff$ jedes f_j ist in x_0 partiell differenzierbar. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** von f in x_0.

Beachte:

(1) $J_f(x_0)$ ist eine $(m \times n)$-Matrix.

(2) Ist $m = 1$ folgt $J_f(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0)$.

Erinnerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$. φ ist in x_0 differenzierbar

$$\begin{aligned} &\overset{\text{ANA 1}}{\iff} \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = a \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{h} = 0 \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{|h|} = 0 \end{aligned}$$

Definition

(1) Sei $x_0 \in D$. f heißt **differenzierbar** (db) in $x_0 :\iff \exists (m \times n)$-Matrix A, sodass gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0 \tag{$*$}$$

(2) f heißt differenzierbar auf D $:\iff$ f ist in jedem $x \in D$ differenzierbar.

Bemerkungen:

(1) f ist differenzierbar in $x_0 \iff \exists (m \times n)$-Matrix A:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

(2) Ist $m = 1$, so gilt: f ist differenzierbar in x_0

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{\|h\|} = 0 \qquad (**)$$

(3) Aus 2.1 folgt: f ist differenzierbar in $x_0 \iff$ jedes f_j ist differenzierbar in x_0.

Satz 5.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)
f sei in $x_0 \in D$ differenzierbar

(1) f ist in x_0 stetig

(2) f ist in x_0 partiell differenzierbar und die Matrix A in $(*)$ ist eindeutig bestimmt: $A = J_f(x_0)$. $f'(x_0) := A = J_f(x_0)$ (**Ableitung** von f in x_0).

Beweis
Sei A wie in $(*)$, $A = (a_{jk})$, $\varrho(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{\|h\|}$, also: $\varrho(h) \to 0$ $(h \to 0)$. Sei $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$. 2.1 $\implies \varrho_j(h) \to 0$ $(h \to 0)$ $(j = 1, \dots, m)$

(1) $f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{Ah}_{\overset{3.5}{\to} 0} + \underbrace{\|h\|\varrho(h)}_{\to 0\ (h \to 0)} \to f(x_0)$ $(h \to 0)$

(2) Sei $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Zu zeigen: f_j ist partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$. $\varrho_j(h) = \frac{1}{\|h\|}(f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \cdot h) \to 0$ $(h \to 0)$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $h = te_k \implies \varrho(h) = \frac{1}{|t|}(f(x_0+te_k) - a_{jk}t) \to 0$ $(t \to 0) \implies \left| \frac{f(x_0+te_k)-f(x_0)}{t} - a_{jk} \right| \to 0$ $(t \to 0) \implies f_j$ ist in x_0 partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$. ■

Beispiele:

(1)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{, falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bekannt: f ist in $(0, 0)$ **nicht** stetig, aber partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 0)$
5.1 $\implies f$ ist in $(0, 0)$ **nicht** differenzierbar.

(2)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{, falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für $(x, y) \neq (0, 0) : |f(x, y)| = (x^2 + y^2) \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq x^2 + y^2 \overset{(x,y) \to (0,0)}{\to} 0 \implies f$ ist in $(0, 0)$ stetig. $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} t^2 \sin \frac{1}{|t|} = t \sin \frac{1}{|t|} \to 0$ $(t \to 0) \implies f$ ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach x und $f_x(0, 0) = 0$. Analog: f ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach y und $f_y(0, 0) = 0$. $\varrho(h) = \frac{1}{\|h\|} f(h) \overset{h=(h_1,h_2)}{=} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} (h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{h_1^2+h_2^2} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \underbrace{\sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}_{\text{beschränkt}} \to 0$ $(h \to 0) \implies f$ ist differenzierbar in $(0, 0)$ und $f'(0, 0) = \operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 0)$

(3)

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{, falls} (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Übung: f ist in $(0,0)$ stetig.

$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{t^3}{t^2} = 1 \to 1 \ (t \to 0)$. $\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \to 0 \ (t \to 0)$.

$\implies f$ ist in $(0,0)$ partiell db und $\operatorname{grad} f(0,0) = (1,0)$.

Für $h = (h_1, h_2) \neq (0,0) : \rho(h) = \frac{1}{\|h\|}(f(h) - f(0,0) - \operatorname{grad} f(0,0) \cdot h) = \frac{1}{\|h\|}(\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1) = \frac{1}{\|h\|}\frac{-h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \frac{-h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$.

Für $h_2 = h_1 > 0 : \rho(h) = \frac{-h_1^3}{(\sqrt{2})^3 h_1^3} = -\frac{1}{(\sqrt{2})^3} \implies \rho(h) \nrightarrow 0 \ (h \to 0) \implies f$ ist in $(0,0)$ *nicht* db.

Satz 5.2 (Stetigkeit aller partiellen Ableitungen)
Sei $x_0 \in D$ und *alle* partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ seien auf D vorhanden und in x_0 stetig $(j = 1, \dots, m, \ k = 1, \dots, n)$. Dann ist f in x_0 db.

Beweis
O.B.d.A: $m = 1$ und $x_0 = 0$. Der Übersicht wegen sei $n = 2$.

Für $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$:

$$\rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(f(h) - f(0,0) - (\underbrace{h_1 f_x(0,0) + h_2 f_y(0,0)}_{=\operatorname{grad} f(0,0)\cdot h}))$$

$$f(h) - f(0) = f(h_1,h_2) - f(0,0) = \underbrace{f(h_1,h_2) - f(0,h_2)}_{=:\Delta_1} + \underbrace{f(0,h_2) - f(0,0)}_{=:\Delta_2}$$

$\varphi(t) := f(t, h_2)$, t zwischen 0 und $h_1 \implies \Delta_1 = \varphi(h_1) - \varphi(0)$, $\varphi'(t) = f_x(t, h_2)$

Aus dem Mittelwertsatz aus Analysis I folgt: $\exists \xi = \xi(h)$ zw. 0 und $h_1 : \Delta_1 = h_1\varphi(\xi) = h_1 f_x(\xi, h_2)$
$\exists \eta = \eta(h)$ zw. 0 und $h_2 : \Delta_2 = h_2\varphi(\eta) = h_2 f_x(\eta, h_2)$

$$\implies \rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(h_1 f_x(\xi,h_2) - h_2 f_y(0,\eta) - (h_1 f_x(0,0) + h_2 f_y(0,0)))$$
$$= \frac{1}{\|h\|} h (\underbrace{f_x(\xi,h_2) - f_x(0,0), \ f_y(0,\eta) - f_y(0,0)}_{=:v(h)}) = \frac{1}{\|h\|} h \cdot v(h)$$

$$\implies |\rho(h)| = \frac{1}{\|h\|}|h \cdot v(h)| \overset{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{\|h\|}\|h\|\|v(h)\| = \|v(h)\|$$

f_x, f_y sind stetig in $(0,0) \implies v(h) \to 0 \ (h \to 0) \implies \rho(h) \to 0 \ (h \to 0)$ ■

Folgerung 5.3
Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) \implies f$ ist auf D db.

Definition
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$. Dann heißt f **auf** D k**-mal stetig db**.

Beispiele:

(1) $f(x,y,z) = (x^2+y, xyz)$. $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

$\overset{5.3}{\implies}$ f ist auf $\mathbb{R}^3$ db und $f'(x,y,z) = J_f(x,y,z)\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linear*, es ex. also eine $(m \times n)$-Matrix $A : f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gilt:
$\rho(h) = \frac{1}{\|h\|}(f(x_0+h) - f(x_0) - Ah) = \frac{1}{\|h\|}(f(x_0) + f(h) - f(x_0) - f(h)) = 0$.

Also: f ist auf $\mathbb{R}^n$ db und $f'(x) = A\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(2.1) $n = m$ und $f(x) = x = Ix$ ($I = (m \times n)$-Einheitsmatrix). Dann: $f'(x) = I\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(2.2) $m = 1 :\ \exists a \in \mathbb{R}^n : f(x) = ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ (Linearform). $f'(x) = a\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(3)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, falls}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bekannt: f ist in $(0,0)$ db. Übungsblatt: f_x, f_y sind in $(0,0)$ *nicht* stetig.

(4) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g = (g_1, \ldots, g_m) : I \to \mathbb{R}^m;\ g_1, \ldots, g_m : I \to \mathbb{R}$.

g ist in $t_0 \in I$ db $\iff$ $g_1, \ldots, g_m$ sind in $t_0 \in I$ db. In diesem Fall gilt: $g'(t_0) = (g_1'(t_0), \ldots, g_m'(t_0))$.

(4.1) $m = 2 : g(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$. $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

(4.2) Seien $a, b \in \mathbb{R}^m,\ g(t) = a + t(b-a),\ t \in [0,1],\ g'(t) = b - a$.

Satz 5.4 (Kettenregel)
f sei in $x_0 \in D$ db, $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$, E sei offen, $f(D) \subseteq E$ und $g : E \to \mathbb{R}^p$ sei db in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ db in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \text{ (Matrizenprodukt)}$$

Beweis
$A := f'(x_0),\ B := g'(y_0) = g'(f(x_0)),\ h := g \circ f$.

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0) - B(y-y_0)}{\|y-y_0\|} & \text{, falls } y \in E\backslash\{y_0\} \\ 0 & \text{, falls } y = y_0 \end{cases}$$

g ist db in $y_0 \implies \tilde{g}(y) \to 0$ $(y \to y_0)$. Aus Satz 5.1 folgt, dass f stetig ist in $x_0 \implies f(x) \to f(x_0) = y_0$ $(x \to x_0) \implies \tilde{g}(f(x)) \to 0$ $(x \to x_0)$

Es ist $g(y) - g(y_0) = \|y - y_0\|\tilde{g}(y) = B(y - y_0)\ \forall y \in E$.

$$\frac{h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \frac{1}{\|x - x_0\|}(g(f(x)) - g(f(x_0)) - BA(x - x_0))$$
$$= \frac{1}{\|x - x_0\|}(\|f(x) - f(x_0)\|\tilde{g}(f(x)) + B(f(x) - f(x_0)) - BA(x - x_0))$$
$$= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{=:D(x)}\underbrace{\tilde{g}(f(x))}_{\to 0} + \underbrace{B(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|}}_{\overset{f \text{ db}}{\to} 0\ (x \to x_0)})}_{\overset{3.5}{\to} 0\ (x \to x_0)}$$

Noch zu zeigen: $D(x)$ bleibt in der „Nähe" von x_0 beschränkt.

$$0 \leq D(x) = \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) + A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$
$$= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\to 0\ (x \to x_0)} + \underbrace{\frac{\|A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\leq \|A\|}.$$

■

Wichtigster Fall $g = g(x_1, \ldots, x_m)$ reellwertig,

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x_1, \ldots, x_n) \\ &= g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

$$h_{x_j}(x) = g_{x_1}(f(x))\tfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + g_{x_2}(f(x))\tfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) + \cdots + g_{x_m}(f(x))\tfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)$$

Beispiel
$g = g(x, y, z)$, $h(x, y) = g(xy, x^2 + y, x \sin y) = g(f(x, y))$.

$h_x(x, y) = g_x(f(x, y))y + g_y(f(x, y))2x + g_z(f(x, y)) \sin y$.
$h_y(x, y) = g_x(f(x, y))x + g_y(f(x, y))1 + g_z(f(x, y))x \cos y$.

Hilfssatz
Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix (reell), es sei B eine $(n \times m)$-Matrix (reell) und es gelte

(i) $BA = I (= (n \times n)$-Einheitsmatrix$)$ und

(ii) $AB = \tilde{I} (= (m \times m)$-Einheitsmatrix$)$

Dann: $m = n$.

Beweis
$\Phi(x) := Ax (x \in \mathbb{R}^n)$. Lin. Alg. $\implies$ Φ ist linear, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\overset{\text{(i)}}{\implies}$ Φ ist injektiv, also $Kern\Phi = 0$. (ii) Sei $z \in \mathbb{R}^m, x := Bz \overset{\text{(ii)}}{\implies} z = ABz = Ax = \Phi(x) \implies \Phi$ ist surjektiv. Dann: $n = \dim \mathbb{R}^n \overset{\text{LA}}{=} \dim \operatorname{Kern} \Phi + \dim\Phi(\mathbb{R}^n) = m$. ■

Satz 5.5 (Injektivität und Dimensionsgleichheit)
$f : D \to \mathbb{R}^m$ sei db auf D, es sei $f(D)$ offen, f injektiv auf D und $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}^n$ sei db auf $f(D)$. Dann:

(1) $m = n$

(2) $\forall x \in D : f'(x)$ ist eine invertierbare Matrix und $f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$

Beachte:

(1) Ist D offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ db, so muss i. A. $f(D)$ nicht offen sein. Z.B.: $f(x) = \sin x, D = \mathbb{R}, f(D) = [-1, 1]$

(2) Ist D offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ db und injektiv, so muss i.A. f^{-1} <u>nicht</u> db sein. Z.B.: $f(x) = x^3, D = \mathbb{R}, f^{-1}$ ist in 0 <u>nicht</u> db.

Beweis
von 5.5: $g := f^{-1}; x_0 \in D, z_0 := f(x_0)(\implies x_0 = g(z_0))$ Es gilt: $g(f(x)) = x \forall x \in D, f(g(z)) = z \forall z \in f(D) \overset{5.4}{\implies} g'(f(x)) \cdot f'(x) = I \forall x \in D; f'(g(z)) \cdot g'(z) = \tilde{I} \forall z \in f(D) \implies \underbrace{g'(z_0)}_{=:B} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=:A} = I, f'(x_0) \cdot g'(z_0) = \tilde{I} \overset{5.5}{\implies} m = n$ und $f'(x_0)^{-1} = g'(z_0) = (f^{-1})'(f(x_0))$. ■