

## 24. Ober- und Unterfunktionen

**Vereinbarung:** I.d. Paragraphen:  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}, a > 0, I := [x_0, x_0 + a], I_0 := (x_0, x_0 + a], D := I \times \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Wir betrachten das AWP

$$(A) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

### Definition

$v, w : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar auf  $I$ .

$v$  heißt eine **Unterfunktion** (UF) bzgl.  $(A) : \iff$

$$v'(x) < f(x, v(x)) \quad \forall x \in I \text{ und } v(x_0) \leq y_0$$

$w$  heißt eine **Oberfunktion** (OF) bzgl.  $(A) : \iff$

$$w'(x) > f(x, w(x)) \quad \forall x \in I \text{ und } w(x_0) \geq y_0$$

### Hilfssatz 24.1

$\phi, \psi : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar auf  $I_0$ . Es sei  $\varepsilon > 0, \varepsilon < a$  und es gelte:  $\phi < \psi$  auf  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ . Weiter sei

$$\phi'(x) - f(x, \phi(x)) < \psi'(x) - f(x, \psi(x)) \quad \forall x \in I_0$$

Dann:  $\phi < \psi$  auf  $I_0$ .

### Beweis

Anname:  $\exists x_1 \in I_0 : \phi(x_1) \geq \psi(x_1)$ . Zwischenwertsatz  $\implies M := \{x \in I_0 : \phi(x) = \psi(x)\} \neq \emptyset$ .

$\xi := \inf M; \phi, \psi$  stetig  $\implies \phi(\xi) = \psi(\xi) \implies \xi = \min M$  und  $\phi < \psi$  auf  $(x_0, \xi)$ . Sei  $h > 0$  so, daß  $\xi - h > x_0 \implies \phi(\xi - h) < \psi(\xi - h)$

$$\begin{aligned} \implies \frac{\phi(\xi - h) - \phi(\xi)}{h} &< \frac{\psi(\xi - h) - \psi(\xi)}{h} \\ \implies \frac{\phi(\xi - h) - \phi(\xi)}{-h} &> \frac{\psi(\xi - h) - \psi(\xi)}{-h} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \phi'(\xi) \geq \psi'(\xi) \text{ Aber: } \phi'(\xi) - f(\xi, \phi(\xi)) < \psi'(\xi) - f(\xi, \underbrace{\psi(\xi)}_{=\phi(\xi)}) \implies \phi'(\xi) < \psi'(\xi), \text{ Widerspruch!}$$

■

### Satz 24.2 (Abschätzung von Lösungen mittels Ober- und Unterfunktionen)

Gegeben:  $v, w, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ .  $v$  sei eine Unterfunktion bezüglich  $(A)$ ,  $w$  sei eine Oberfunktion bezüglich  $(A)$  und  $y$  sei eine Lösung des AWP's  $(A)$  auf  $I$ . Dann:  $v < y < w$  auf  $I_0$ .

**Beweis**

Wir zeigen nur  $v < y$  auf  $I_0$ .

$$\forall x \in I : v'(x) - f(x, v(x)) < 0 = y'(x) - f(x, y(x)).$$

Wegen 24.1 genügt es z.z:

$$(*) \quad \exists \varepsilon \in (0, a) : v < y \text{ auf } (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

**Fall 1:**  $v(x_0) < y_0 = y(x_0)$ ;  $v, y$  stetig  $\implies$  es gilt  $(*)$ .

**Fall 2:**  $v(x_0) = y_0 = y(x_0)$ ;  $h := y - v$ ; dann:  $h(x_0) = 0$  und

$$v'(x_0) - f(x_0, v(x_0)) < 0 = y'(x_0) - f(x, \underbrace{y(x_0)}_{=v(x_0)})$$

$\implies v'(x_0) < y'(x_0)$ , also  $h'(x_0) > 0$ . Annahme:  $(*)$  gilt nicht. Dann existiert zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in (x_0, x_0 + \frac{1}{n})$ :  $h(x_n) \leq 0$

$$\implies \frac{h(x_n)}{x_n - x_0} = \frac{h(x_n) - h(x_0)}{x_n - x_0} \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h'(x_0) \leq 0$$

Widerspruch! ■

**Bemerkung:** Man kann auch folgende Situation betrachten:

$x_0, y_0 \in \mathbb{R}, a > 0, J := [x_0 - a, x_0], D := J \times \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{AWP} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dann lauten die Bedingungen für eine

Unterfunktion:  $v'(x) > f(x, v(x)) \quad \forall x \in I, v(x_0) \leq y_0$

Oberfunktion:  $w'(x) < f(x, w(x)) \quad \forall x \in I, w(x_0) \geq y_0$

( $\rightarrow$  Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen).

**Anwendung von 24.2, schwer klausurrelevant! :-)** :  $f(x, y) = \frac{x^2+1}{2} + y^2$ .

$$\text{AWP } (+) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $f$  ist partiell differenzierbar nach  $y$  und  $f_y \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  Paragraph 22  $\implies (+)$  hat eine eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung  $y : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}$ . ( $\omega_- < 0 < \omega_+$ ). Wir untersuchen diese Lösung für  $x \geq 0$ .

**Behauptung:**

$$(1) \quad w_+ \in [\frac{\pi}{4}, 1]$$

$$(2) \quad \frac{1}{1-x} < y(x) \quad \forall x \in (0, \omega_+)$$

$$(3) \quad \frac{1}{1-x} < y(x) < \tan(x + \frac{\pi}{4}) \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{4})$$

**Beweis**

$f_1(x, y) = y^2 \implies f_1 < f$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Das

$$\text{AWP} \begin{cases} v' = v^2 = f_1(x, v) \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

hat die Lösung  $v(x) = \frac{1}{1-x}$  auf  $(-\infty, 1)$  (TDV!). ■

Sei  $a \in (0, 1)$ ,  $a < \omega_+$ . Für  $x \in [0, a]$ :

$$v'(x) = f_1(x, v(x)) < f(x, v(x)), \quad v(0) = 1$$

$v$  ist eine Unterfunktion bezüglich  $(+)$  auf  $[0, a]$ . 24.2  $\implies v < y$  auf  $(0, a]$  (i).

Annahme:  $\omega_+ > 1 \implies (i)$  gilt  $\forall a \in (0, 1) \implies v < y$  auf  $(0, 1)$ .  $\implies \lim_{x \rightarrow 1-} y(x) = \infty$ . Aber:  $1 \in (\omega_-, \omega_+) \implies y(x) \rightarrow y(1)$  ( $x \rightarrow 1-$ ), Widerspruch! (also:  $\omega_+ \leq 1$ ).

Weiter: (i) gilt  $\forall a \in (0, \omega_+) \implies v < y$  auf  $(0, \omega_+)$ .  $f_2(x, y) := 1 + y^2$ , dann:  $f_2 > f$  auf  $[0, 1) \times \mathbb{R}$ . Das

$$\text{AWP} \begin{cases} w' = 1 + w^2 \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

hat die Lösung  $w(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$  auf  $(-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$  (TDV!). Sei  $a \in (0, \omega_+)$ ,  $a < \frac{\pi}{4}$ ; für  $x \in [0, a]$ :  $w'(x) = f_2(x, w(x)) > f(x, w(x))$ ,  $w(0) = 1 \implies w$  ist eine Oberfunktion bzgl  $(+)$  auf  $[0, a]$ . 24.2  $\implies y < w$  auf  $(0, a]$  (ii).

Annahme:  $\omega_+ < \frac{\pi}{4} \implies (ii)$  gilt  $\forall a \in (0, \omega_+) \implies y < w$  auf  $(0, \omega_+)$ .  $y'(x) = \frac{x^2+1}{2} + y(x)^2 > 0 \implies y$  ist streng wachsend.  $y$  ist nach oben beschränkt auf  $[0, \omega_+) \implies \exists \beta := \lim_{x \rightarrow \omega_+ -} y(x)$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ .

$$z(x) := \begin{cases} y(x), & x \in (\omega_-, \omega_+) \\ \beta, & x = \omega_+ \end{cases} \quad (\implies z \in C(\omega_-, \omega_+))$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \omega_+ -} \frac{z(x) - z(\omega_+)}{x - \omega_+} &= \lim_{x \rightarrow \omega_+ -} \frac{y(x) - \beta}{x - \omega_+} \stackrel{\text{r'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow \omega_+ -} y'(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \omega_+ -} f(x, y(x)) = f(\omega_+, \beta) \end{aligned}$$

$\implies z$  ist in  $\omega_+$  differenzierbar und  $z'(\omega_+) = f(\omega_+, \beta) = f(\omega_+, z(\omega_+)) \implies z$  löst das AWP  $(+)$  auf  $(\omega_-, \omega_+]$ , Widerspruch!, denn  $y$  ist nicht fortsetzbar. Also:  $\omega_+ \geq \frac{\pi}{4}$ . Dann gilt (ii)  $\forall a \in (0, \frac{\pi}{4}) \implies y < w$  auf  $(0, \frac{\pi}{4})$ .

