

### iii Geometrische Eigenschaften

In diesem Kapitel sei stets  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

#### 1 Lokale Ringe zu Punkten



Gegeben die Strukturgarbe zu einer Varietät wollen wir „Funktionskeime“ in einem Punkt betrachten.

DEFINITION 1.1: Sei  $W$  eine quasi-projektive Varietät und  $p \in W$ .

(a) Es sei

$$\mathcal{O}_{W,p} = \{(U, f) \mid p \in U \subseteq W \text{ offen, } f \in \mathcal{O}_W(U)\} / \sim,$$

wobei  $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$  bedeuten soll, dass es eine offene Menge  $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$  mit  $p \in U_3$  gibt, sodass  $f_1|_{U_3} = f_2|_{U_3}$  gilt. Das ist eine  $K$ -Algebra und heißt *lokaler Ring von  $W$  in  $p$* .

(b) Die Elemente in  $\mathcal{O}_{W,p}$  heißen *Funktionskeime*.

Für die Äquivalenzklasse eines  $(U, f)$  schreiben wir auch  $f_p$ .

BEISPIEL 1.2: Sei  $W = \mathbb{A}^1(K)$  und  $x = 0$ . Wir wissen, dass die nichtleeren offenen Teilmengen von  $\mathbb{A}^1(K)$  alle von der Form  $\mathbb{A}^1(K) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  sind und reguläre Funktionen auf einer solchen Menge sind Quotienten von Polynomen  $\frac{f}{g}$  mit  $g(x) \neq 0$  für  $x \neq x_i, i = 1, \dots, n$ . Also ist  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(K),0} \cong K[X]_{(X)}$ .

BEMERKUNG 1.3: (a) Die Abbildung

$$\varphi_p: \mathcal{O}_{W,p} \longrightarrow K, \quad f_p = [(U, f)] \longmapsto f_p(p) := f(p),$$

ist ein wohldefinierter  $K$ -Algebrenhomomorphismus und heißt *Auswertung*.

(b)  $\mathcal{O}_{W,p}$  ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_p = \{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{W,p} \mid f(p) = 0\}.$$

*Beweis:* (a) Die Wohldefiniertheit folgt direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation.

(b) Die Abbildung  $\varphi_p$  ist surjektiv, denn die konstanten Abbildungen definieren Elemente in  $\mathcal{O}_{W,p}$ , und Kern  $\varphi_p = \mathfrak{m}_p$ . Damit gilt  $\mathcal{O}_{W,p}/\mathfrak{m}_p \cong K$ , also ist  $\mathfrak{m}_p$  ein maximales Ideal. Es bleibt noch zu zeigen, dass es kein weiteres maximales Ideal gibt. Sei dazu  $I \subseteq \mathcal{O}_{W,p}$  ein Ideal mit  $I \not\subseteq \mathfrak{m}_p$ . Dann gibt es ein  $[(U, f)] \in I$  mit  $[(U, f)] \notin \mathfrak{m}_p$ , also  $f(p) \neq 0$ . Wir definieren  $\tilde{U} = \mathfrak{D}(f) \ni p$

und  $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_W(\tilde{U})$ . Dann gilt  $[(U, f)] \cdot [(\tilde{U}, g)] = [(\tilde{U}, 1)] = 1$ , also ist  $[(U, f)] \in I$  invertierbar und damit  $I = \mathcal{O}_{W,p}$ .  $\square$

BEMERKUNG 1.4: Die Abbildung

$$\psi_p: \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,p}, \quad f \longmapsto [(U, f)] = f_p,$$

heißt *kanonische Keim-Abbildung*.

Sei  $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$  die Zerlegung von  $W$  in irreduzible Komponenten. Wir wissen: ist  $U \subseteq W$  offen und  $p \in U$ , so ist  $U \cap W_i$  dicht in  $W_i$ , falls  $p \in W_i$ .

Falls  $U \cap W_j = \emptyset$  für alle  $W_j$  mit  $p \notin W_j$ , dann ist  $\psi_p: \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,p}$  injektiv.

Denn wenn  $\psi_p(f) = 0$  ist, gibt es ein offenes  $\tilde{U} \subseteq U$  mit  $f|_{\tilde{U}} = 0$ . Da  $\tilde{U}$  dicht in  $U$  ist, gilt  $f|_U = 0$ , denn „ $= 0$ “ ist eine abgeschlossene Bedingung.

PROPOSITION 1.5: Ist  $V$  eine affine Varietät, so gilt

$$\mathcal{O}_{V,p} \cong K[V]_{\mathfrak{m}_p^V}.$$

Hierbei ist  $\mathfrak{m}_p^V = \{f \in K[V] \mid f(p) = 0\}$ .

*Beweis:* Wir definieren

$$\varphi: K[V]_{\mathfrak{m}_p^V} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}, \quad \frac{f}{g} \longmapsto \left[ \left( \mathfrak{D}(g), x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right].$$

$\varphi$  ist wohldefiniert:  $\varphi$  wird induziert von

$$\psi_p: \mathcal{O}_V(V) = K[V] \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}, \quad f \longmapsto [(V, x \longmapsto f(x))],$$

denn für  $g \notin \mathfrak{m}_p^V$  gilt  $g(p) \neq 0$ , also ist  $\psi_p(g)$  eine Einheit in  $\mathcal{O}_{V,p}$ .

$\varphi$  ist injektiv: Sei  $\varphi(\frac{f}{g}) = 0$ , dann gibt es ein  $U \subseteq \mathfrak{D}(g)$  mit  $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$  für alle  $x \in U$ . Für  $h \in K[V]$  mit  $p \in \mathfrak{D}(h) \subseteq U$  gilt dann  $h(p) \neq 0$ , also  $h \in \mathfrak{m}_p^V$ . Also gilt  $h(x)f(x) = 0$  für alle  $x \in V$ , also  $f = 0$  in  $K[V]_{\mathfrak{m}_p^V}$ .

$\varphi$  ist surjektiv: Sei  $[(U, f)] \in \mathcal{O}_{V,p}$ . Ohne Einschränkung ist

$$U = \mathfrak{D}(h) \text{ für ein } h \in K[V].$$

Es gilt dann  $f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(h)) = K[V]_h$ , also ist  $f = \frac{g}{h^k}$  für ein  $g \in K[V]$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Damit ist  $[(U, f)] = \varphi(\frac{g}{h^k})$ .  $\square$

KOROLLAR 1.6: Sei  $W$  eine quasi-projektive Varietät und  $x \in W$ . Sei weiter  $V_0 \subseteq W$  offen und affin mit  $p \in V_0$ . Dann gilt

$$\mathcal{O}_{W,p} \cong \mathcal{O}_{V_0,p} \cong K[V_0]_{\mathfrak{m}_p^{V_0}}.$$

PROPOSITION 1.7: Seien  $W_1, W_2$  quasi-projektive Varietäten. Seien weiter  $p \in W_1$ ,  $q \in W_2$  und  $\mathcal{O}_{W_1,p} \cong \mathcal{O}_{W_2,q}$ . Dann gibt es offene Umgebungen  $U_1$  und  $U_2$  von  $p$  bzw.  $q$  mit  $U_1 \cong U_2$ , d.h. „der lokale Ring kennt die Umgebung eines Punktes“.

*Beweis:* Sei  $\varphi: \mathcal{O}_{W_1,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2,p}$  ein Isomorphismus.

- (1) Wir wählen  $U_1$  offen und affin in  $W_1$  mit  $p \in U_1$  und so, dass  $U_1$  nur die irreduziblen Komponenten von  $W_1$  schneidet, die  $p$  enthalten. Entsprechend wählen wir ein  $\widetilde{U}_2$  für  $q$ . Wir haben dann

$$\mathcal{O}(U_1) \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{O}_{W_1,p} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathcal{O}_{W_2,q} \xleftarrow{\psi_q} \mathcal{O}(\widetilde{U}_2).$$

Wir hätten gerne, dass  $\varphi \circ \psi_p(\mathcal{O}(U_1)) \subseteq \psi_q(\mathcal{O}(\widetilde{U}_2))$  gilt (sogar „=“).

- (2) Da  $U_1$  affin ist, gilt  $\mathcal{O}(U_1) = K[U_1]$ . Seien  $f_1, \dots, f_k$  Erzeuger von  $K[U_1]$ . Wir betrachten  $\varphi((f_1)_p), \dots, \varphi((f_k)_p)$  in  $\mathcal{O}_{W_2,q} \cong K[\widetilde{U}_2]_{\mathfrak{m}_q}$ : es ist

$$\varphi((f_i)_p) = \frac{g_i}{h_i} \text{ mit } g_i, h_i \in K[U_2] \text{ und } h_i \notin \mathfrak{m}_q^{\widetilde{U}_2}.$$

Wir wählen nun eine offene und affine Teilmenge  $U_2 \subseteq \widetilde{U}_2 \cap \mathfrak{D}(h_1) \cap \dots \cap \mathfrak{D}(h_n)$  mit  $q \in U_2$ . Es gilt dann  $\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}(U_2)$  und  $\psi_q\left(\frac{g_i}{h_i}\right) = \varphi(\psi_p(f_i))$ . Wir haben dann

$$\mathcal{O}(U_1) \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{O}_{W_1,p} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathcal{O}(U_2) \subseteq \mathcal{O}_{W_2,p}.$$

Insbesondere definiert ein injektiver Homomorphismus

$$K[U_1] \cong \mathcal{O}(U_1) \hookrightarrow \mathcal{O}(U_2) \cong K[U_2]$$

einen surjektiven Morphismus  $U_2 \twoheadrightarrow U_1$  von affinen Varietäten.

- (3) Wir haben jetzt  $p \in U_1 \subseteq W_1$ ,  $q \in U_2 \subseteq W_2$  und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K[U_1] & \xrightarrow{\varphi} & K[U_2] \\ \downarrow \psi_p & & \downarrow \psi_q \\ \mathcal{O}_{W_1,p} & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & \mathcal{O}_{W_2,q}, \end{array}$$

sodass  $\varphi \circ \psi_p(K[U_1]) \subseteq K[U_2]$ . Dadurch erhalten wir einen Morphismus

$$f: U_2 \longrightarrow U_1 \text{ mit } f(q) = p,$$

$f^\# = \varphi: K[U_1] \longrightarrow K[U_2]$  und  $f_p^\# = \varphi: \mathcal{O}_{W_1,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2,p}$ . Analog erhalten wir einen Morphismus  $g: \widetilde{U}_1 \longrightarrow \widetilde{U}_2$  (es ist ohne Einschränkung  $\widetilde{U}_1 \subseteq U_1$ ,  $\widetilde{U}_2 \subseteq U_2$ ) mit  $g(p) = q$ ,  $g^\# = \varphi^{-1}: K[\widetilde{U}_2] \longrightarrow K[\widetilde{U}_1]$  und  $g_p^\# = \varphi^{-1}: \mathcal{O}_{W_2,q} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_1,p}$ .

Wir setzen jetzt  $\widehat{U}_1 = \widetilde{U}_1$  und  $\widehat{U}_2 = f^{-1}(\widetilde{U}_1) \subseteq U_2$ . Wir haben dann Abbildungen

$$f \circ g: \widehat{U}_1 \longrightarrow U_1, \quad g \circ f: \widehat{U}_2 \longrightarrow \widetilde{U}_2.$$

Auf den lokalen Ringen induziert  $g \circ f$  die Identität, also ist  $g \circ f$  die Einbettung  $\widehat{U}_2 \hookrightarrow U_2$ . Analog ist  $f \circ g$  die Einbettung  $\widehat{U}_1 \hookrightarrow U_1$ . Daraus folgt

$$f \circ g(\widehat{U}_1) \subseteq \widehat{U}_1, \text{ also } g(\widehat{U}_1) \subseteq f^{-1}(\widehat{U}_1) = \widehat{U}_2,$$

und analog  $f(\widehat{U}_2) \subseteq \widehat{U}_1$ . Hier gilt dann  $f \circ g = \text{id}_{\widehat{U}_1}$  und  $g \circ f = \text{id}_{\widehat{U}_2}$ .

Also sind  $f$  und  $g$  Isomorphismen.  $\square$

BEMERKUNG 1.8: (a) Morphismen von Varietäten induzieren Homomorphismen zwischen den lokalen Ringen: Sei  $\varphi: W_1 \longrightarrow W_2$  ein Morphismus von quasi-projektiven Varietäten und  $x \in W_1$ . Dann ist

$$\varphi_x^\sharp: \mathcal{O}_{W_2, \varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_1, x}, \quad [(U, f)] \longmapsto [(\varphi^{-1}(U), f \circ \varphi)],$$

ein wohldefinierter  $K$ -Algebrenhomomorphismus mit  $\varphi_x^\sharp(\mathfrak{m}_{\varphi(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$ .

(b) Es gilt  $\text{id}_x^\sharp = \text{id}_{\mathcal{O}_{V, x}}$  und  $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_x^\sharp = \varphi_{1x}^\sharp \circ \varphi_{2x}^\sharp$ . Wir erhalten also einen Funktor von der Kategorie der punktierten quasi-projektiven Varietäten in die Kategorie der lokalen Ringe.

## 2 Dimension von Varietäten



WÜNSCHE:

- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathfrak{V}(XZ, YZ) = 2$  im  $\mathbb{A}^3$  („Ebene“)
- $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) = 2$  im  $\mathbb{A}^3$
- $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - 1) = 1$  im  $\mathbb{A}^2$  („Kreis“)

DEFINITION 2.1: Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{d \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{ Kette } \emptyset \neq X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d \text{ mit } X_i \text{ abg. und irred. in } X\}$$

die *Krulldimension* von  $X$ .



Für Mannigfaltigkeiten stimmen Krulldimension und Dimension nicht überein, da in Hausdorffräumen Punkte die einzigen irreduziblen, nichtleeren Teilmengen sind (vgl. Beispiel 2.7 in Kapitel 1).

Insbesondere ist die Krulldimension von  $\mathbb{C}^n$  mit euklidischer Topologie 0.

Ab jetzt: Mit Dimension ist stets die Krulldimension gemeint!

BEMERKUNG 2.2: (a) Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $Y \subseteq X$  mit Spurtopologie versehen, so ist  $\dim(Y) \leq \dim(X)$ .

(b) Ist  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$  mit  $X_i$  abgeschlossene Teilmengen von  $X$ , so gilt:

$$\dim(X) = \sup_i \dim(X_i).$$

*Beweis:* (a) Sei  $\emptyset \neq y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq y_k$  eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen in  $Y$ .

Dann ist auch  $\emptyset \neq \overline{y_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{y_n}$  Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen in  $X$ . Denn:

- $\overline{y_i}$  ist irreduzibel nach Übungsblatt 2,
- $y_i = \overline{y_i} \cap Y$ , da  $y_i$  in  $Y$  abgeschlossen ist. Also  $\overline{y_i} \neq \overline{y_{i+1}}$ .

Damit ist  $\dim Y \leq \dim X$ .

(b) Nach (a) gilt „ $\geq$ “.

Wähle Kette  $\emptyset \neq A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$  in  $X$  von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen.

$A_k = \bigcup_{i=1}^n (A_k \cap X_i)$  und die Irreduzibilität von  $A_k$  impliziert nun  $A_k = A_k \cap X_i$  für ein  $i$ , d.h.  $A_k \subseteq X_i$ .

Nach (a) folgt nun  $k \leq \dim A_k \leq \dim X_i$  und damit die Behauptung.  $\square$

ERINNERUNG 2.3: Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Für ein Primideal  $\wp \subseteq R$  definiert man die *Höhe von  $\wp$*  durch

$$\text{ht } \wp = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_n := \wp \text{ Kette von Primidealen}\}.$$

(b) Man definiert die *Krulldimension von  $R$*  durch

$$\dim R = \sup\{\text{ht } \wp \mid \wp \subseteq R \text{ ist Primideal}\}.$$

PROPOSITION 2.4: Sei  $V$  eine affine Varietät. Dann ist  $\dim V = \dim K[V]$ .

*Beweis:* Erinnerung an Erinnerung/Bemerkung 7.1 aus Kapitel 1:

$$\{\text{nichtleere irreduzible Untervarietäten von } V\} \longleftrightarrow \{\text{Primideale in } K[V]\}$$

durch  $W \longmapsto \mathfrak{J}(W)$  bzw.  $\wp \longmapsto \mathfrak{V}(\wp)$ . Diese Zuordnungen sind inklusionsumkehrend, also entsprechen aufsteigende Primidealketten absteigenden Ketten von irreduziblen Varietäten.  $\square$

ERINNERUNG 2.5 (aus Algebra II): Sei  $K$  ein Körper,  $A$  eine endlich erzeugte nullteilerfreie  $K$ -Algebra. Dann gilt:

- $\dim K[X_1, \dots, X_n] = n$
- Ist  $\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow A$  surjektiver  $K$ -Algebrenhomomorphismus, so gilt:

$$\dim A + \text{ht}(\text{Kern}(\varphi)) = n.$$

- Alle maximalen Primidealketten in  $A$  haben dieselbe Länge. Diese ist  $\dim A$ . Insbesondere: Alle maximalen Primideale haben die Höhe  $\dim(A)$ .
- Allgemein gilt: Ist  $R$  lokaler Ring mit maximalen Ideal  $\mathfrak{m}$ , so ist  $\text{ht } \mathfrak{m} = \dim R$ . Für einen beliebigen Ring  $R$  gilt:  $\text{ht } \mathfrak{m} = \dim R_{\mathfrak{m}}$ .

KOROLLAR 2.6: (a)  $\dim \mathbb{A}^n = n$

(b) Ist  $V$  irreduzible affine Varietät im  $\mathbb{A}^n$ , so gilt

$$\dim V + \text{ht } \mathfrak{I}(V) = n.$$

(c) Für  $x \in V$  ist

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim K[V]_{\mathfrak{m}_x^V} = \text{ht } \mathfrak{m}_x^V = \dim K[V] = \dim V.$$

PROPOSITION 2.7: Sei  $W$  eine quasi-projektive Varietät,  $x \in W$ ,  $V_0$  eine affine, offene Umgebung von  $x$ . Dann nennen wir

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} =: \dim_x W$$

*lokale Dimension von  $x$  in  $W$ .* Es gilt:

- (a)  $\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{V_0,x} = \text{ht } \mathfrak{m}_x^{V_0}$
- (b) Ist  $W$  irreduzibel, so gilt für alle  $x, y \in W$ :  $\dim_x W = \dim_y W = \dim W$ .  
Außerdem: Ist  $\emptyset \neq U$  offen und affin in  $W$ , so ist  $\dim U = \dim W$ .
- (c)  $\dim_x W = \dim \mathcal{O}_{W,x} = \max\{\dim Z \mid Z \text{ irreduzible Komponente von } W, x \in Z\}$ .

*Beweis:* (a) folgt mit Erinnerung 2.5 direkt aus  $\mathcal{O}_{W,x} \cong \mathcal{O}_{V_0,x} \cong K[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$ .

(b) Wir zeigen zunächst:  $\dim_x W = \dim_y W \forall x, y \in W$ .

Seien  $U_1, U_2$  offene, affine Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$ . Da  $W$  irreduzibel ist, ist  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

Sei  $z \in U_1 \cap U_2$ . Dann folgt mit Korollar 2.6:

$$\begin{aligned} \dim_x W &= \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{U_1,x} = \dim \mathcal{O}_{U_1,z} \\ &= \dim \mathcal{O}_{U_2,z} = \dim \mathcal{O}_{U_2,y} = \dim \mathcal{O}_{W,y} = \dim_y W \end{aligned}$$

Nun zeigen wir:  $\dim W = d := \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim U$  für ein beliebiges, offenes, affines  $U \neq \emptyset$  in  $W$ .

Wir sehen:  $\dim W \geq d = \dim U$ , da  $U \subseteq W$ .

Angenommen, es gäbe eine Kette  $\{x\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_k$  von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen mit  $k > d$ . Dann wählen wir  $U$  offen und affin mit  $x \in U$  und sehen, dass

$$U \cap W_0 = \{x\} \subsetneq U \cap W_1 \subsetneq \dots \subsetneq U \cap W_k \subseteq U$$

eine Kette von abgeschlossen, irreduziblen Teilmengen von  $U$  ist, denn  $\overline{W_i \cap U} = W_i$ , da  $W_i$  irreduzibel ist. Damit wäre  $d = \dim U \geq k > d$ , was einen Widerspruch ergibt.

- (c) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $W$  affin ist. Dann folgt mit Erinnerung 2.5:

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim K[W]_{\mathfrak{m}_x^W} = \text{ht } \mathfrak{m}_x^W = \sup\{k \mid 0 \neq \wp_0 \subsetneq \dots \subsetneq \wp_k = \mathfrak{m}_x^W\}$$

Ohne Einschränkung sei  $\wp_0$  minimales Primideal und die Kette maximal. Also entspricht  $\wp_0$  einer irreduziblen Komponente  $Z$  mit  $x \in Z$ . Wieder mit Erinnerung 2.5 ist  $\dim Z = k$ .  $\square$

DEFINITION 2.8: (a) Eine quasi-projektive Varietät von Dimension 1 heißt *Kurve*.

- (b) Eine quasi-projektive Varietät von Dimension 2 heißt *Fläche*.

BEISPIEL 2.9: (a) Nach Proposition 2.7 ist  $\dim \mathbb{P}^n = n$ .

- (b) Betrachte eine Hyperfläche  $\mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n(K)$  mit  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ ,  $\deg f \geq 1$ .

$$\text{Dann gilt: } \dim \mathfrak{V}(f) = n - 1.$$

Denn: Nach Bemerkung 2.2 kann man  $f$  ohne Einschränkung als irreduzibel voraussetzen. Damit ist  $\dim \mathfrak{V}(f) = \dim K[V] = n - \text{ht}(f)$ .

Angenommen, es gäbe ein Primideal  $\wp$  mit  $0 \subsetneq \wp \subsetneq (f)$ . Wähle nun  $h \in \wp$  mit minimalem Grad. Da  $f$  irreduzibel ist, folgt  $h \in (f)$ .

Folglich:  $h = h'f$  und  $h \neq f$ , also  $h' \in \wp$ . Aber der Grad von  $h'$  ist kleiner als der von  $h$ —ein Widerspruch!

Insgesamt:  $\text{ht}(f) = 1$  und die Behauptung gilt.

- (c) Betrachte die Varietät  $V = \mathfrak{V}(XZ, YZ) = \mathfrak{V}(Z) \cup \mathfrak{V}(X, Y)$  (Ebene mit senkrechter Gerade durch den 0-Punkt).

Es ist  $\mathfrak{V}(Z) \cong \mathbb{A}^2$ , d.h.  $\dim \mathfrak{V}(Z) = 2$ , und  $\mathfrak{V}(X, Y) \cong \mathbb{A}^1$ , d.h.  $\dim \mathfrak{V}(X, Y) = 1$ .

Nach Bemerkung 2.2 ist also  $\dim V = 2$ .

- (d) Es ist  $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) = 2$ , da Hyperfläche.

- (e) Genauso ist  $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - 1) = 1$ , da Hyperfläche.

Die Wünsche, die zu Beginn des Abschnitts geäußert wurden, sind also erfüllt.

### 3 Der Tangentialraum



- BEISPIEL: (a) Wir betrachten die elliptische Kurve  $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X)$  und  $P = (0, 0)$ . Die Tangente an  $V$  in  $P$  ist die  $Y$ -Achse, also  $\mathfrak{V}(X)$ .
- (b) Nun betrachten wir den Newton-Knoten  $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X^2)$ . Dann gibt es in  $P = (0, 0)$  zwei „Tangenten“. Aber wie könnte der Tangentialraum aussehen?
- (c) Jetzt die Neilsche Parabel:  $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$ . Dann ist die  $X$ -Achse „doppelte Tangente“ in  $P = (0, 0)$ , aber auch hier ist der Tangentialraum nicht intuitiv klar.

ERINNERUNG 3.1: Sei  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  und  $p = (p_1, \dots, p_n) \in K^n$ . Dann haben wir die *Taylor-Entwicklung*

$$f = \sum_{\substack{\alpha = (k_1, \dots, k_n) \\ k_i \geq 0}} \frac{1}{(k_1 + \dots + k_n)!} \frac{\partial^{k_1}}{\partial X_1} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial X_n} f(p) (X_1 - p_1)^{k_1} \cdots (X_n - p_n)^{k_n}.$$

Insbesondere gilt dann:

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot (X_i - p_i) + \text{Restterme},$$

wobei die Restterme vom Grad mindestens 2 sind, also in  $\mathfrak{m}_p^2$ , wobei

$$\mathfrak{m}_p := (X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n).$$

DEFINITION 3.2: Sei  $p \in K$  mit  $p = (p_1, \dots, p_n)$ .

(a) Für  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  sei

$$f_p^{(1)} := f^{(1)} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot X_i =: \mathcal{D}_p(f).$$

(b) Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$  eine affine Varietät,  $p \in V$  und  $I := \mathfrak{I}(V)$ . Seien zusätzlich

$$\mathcal{I}_p := \langle f_p^{(1)} \mid f \in I \rangle \text{ und } \mathcal{T}_p := \mathcal{T}_{V,p} := \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) \subseteq \mathbb{A}^n(K).$$

Dann heißt  $\mathcal{T}_p$  *Tangentialraum an  $V$  in  $p$* .

BEISPIEL 3.3: Seien  $f = X^2 + Y^2 - 1$ ,  $V = \mathfrak{V}(f)$ ,  $I = (f)$  und  $p = (a, b) \in V$ . Dann ist

$$f_p^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial X}(p) \cdot X + \frac{\partial f}{\partial Y}(p) \cdot Y = 2aX + 2bY,$$

also  $\mathcal{I}_p = \langle 2aX + 2bY \rangle$  und  $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \{(x, y) \in K^2 \mid bY = -aX\}$ , denn es gilt

$$(h \cdot f)_p^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(h \cdot f)}{\partial X_i}(p) \cdot X_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial X_i}(p) \cdot f(p) \cdot X_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot h(p) \cdot X_i = h(p) \cdot f_p^{(1)},$$

denn  $f(p) = 0$ , da  $p \in V$ , und damit ist  $\mathcal{I}_p$  auch nicht größer.



BEMERKUNG 3.4: (a) Die Taylor-Entwicklung liefert

$$f = f(p) + f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p) + \text{Restterme},$$

wobei die Restterme in  $\mathfrak{m}_p^2$  liegen.

- (b)  $\mathcal{D}_p(f + g) = (f + g)_p^{(1)} = f_p^{(1)} + g_p^{(1)} = \mathcal{D}_p(f) + \mathcal{D}_p(g)$   
 $\mathcal{D}_p(f \cdot g) = (f \cdot g)_p^{(1)} = f(p) \cdot g_p^{(1)} + g(p) \cdot f_p^{(1)} = f(p) \cdot \mathcal{D}_p(g) + g(p) \cdot \mathcal{D}_p(f)$ ,  
 vgl. auch Beispiel 3.3.
- (c) Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$  eine affine Varietät,  $I = \mathfrak{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  und  $p \in V$ . Dann ist
- $\mathcal{I}_p = \langle f_1^{(1)}, \dots, f_r^{(1)} \rangle$  analog zu Beispiel 3.3,
  - $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$  ein linearer Unterraum von  $\mathbb{A}^n(K) = K^n$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{V,p} &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(K) \mid \forall f \in I : \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_j}(p) \cdot x_j = 0\} \\ &= \text{Kern} \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}} \right), \end{aligned}$$

also der Kern der Jacobi-Matrix.

BEISPIEL 3.5: Damit können wir jetzt ganz viele Tangentialräume bestimmen. Sei  $p = (0, 0)$ .

- (a) Sei  $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X)$ , dann ist  $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(2 \cdot 0 \cdot Y - 3 \cdot 0^2 \cdot X + 1 \cdot X) = \mathfrak{V}(X)$ .  
 (b) Sei  $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X^2)$ , dann ist  $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^2(K)$ .  
 (c) Sei  $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$ . Dann ist  $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^2(K)$ .  
 (d) Sei  $V = \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2)$ , dann ist

$$\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^3(K) \text{ und } \mathcal{T}_{V,(0,1,1)} = \mathfrak{V}(2Y - 2Z).$$



Bisher hängt unsere Definition von  $\mathcal{T}_{V,p}$  von der Einbettung von  $V$  in den  $\mathbb{A}^n(K)$  ab.

BEMERKUNG 3.6: Sei  $\varphi: \mathbb{A}^n \supseteq V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$  ein Morphismus zwischen affinen Varietäten. Dann induziert  $\varphi$  in natürlicher Weise eine  $K$ -lineare Abbildung

$$d_p \varphi: \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{T}_{V,p} \longrightarrow \mathcal{T}_{W,\varphi(p)} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_{\varphi(p)}).$$

*Beweis:* Gegeben seien also  $\varphi: V \longrightarrow W$ ,  $I := \mathfrak{I}(V)$  und  $J := \mathfrak{I}(W)$ .

Dann wählen wir eine Fortsetzung  $\widehat{\varphi}: \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$  und

$$\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1, \dots, \widehat{\varphi}_m) \text{ mit } \widehat{\varphi}_i \in K[X_1, \dots, X_n].$$

So erhalten wir

$$\widehat{\varphi}^\sharp: K[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]$$

mit  $\widehat{\varphi}^\sharp(Y_i) = \widehat{\varphi}_i$  und  $\widehat{\varphi}^\sharp(J) \subseteq I$ . Wir definieren den  $K$ -Algebrenhomomorphismus

$$\alpha: K[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n] \text{ durch } \alpha(Y_i) = \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}^\sharp(Y_i)) = \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}_i) = \widehat{\varphi}_{i_p}^{(1)}.$$

Nun genügt es  $\alpha(\mathcal{I}_{\varphi(p)}) \subseteq \mathcal{I}_p$  zu zeigen, denn dann induziert  $\alpha$  das gewünschte  $d_p \varphi$ .

Seien also  $g \in J$  und  $\bar{g} := \mathcal{D}_p(g) \in \mathcal{I}_{\varphi(p)}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{g}) &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial \varphi_j}(\varphi(p)) \cdot \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}_j) = \sum_{i=1}^n X_i \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial \varphi_j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial X_i}(p) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial (g \circ \widehat{\varphi})}{\partial X_i}(p) = \mathcal{D}_p(g \circ \widehat{\varphi}) \in \mathcal{I}_p, \end{aligned}$$

denn  $g \circ \widehat{\varphi}$  liegt in  $I$ . □

DEFINITION/BEMERKUNG 3.7: (a) Wir nennen  $\mathcal{D}: \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$  eine *Derivation an  $p$* , wenn  $\mathcal{D}$   $K$ -linear ist und

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = g(p) \cdot \mathcal{D}(f) + f(p) \cdot \mathcal{D}(g).$$

- (b)  $\mathcal{D}$  ist bereits durch  $\mathcal{D}|_{\mathfrak{m}_p}$  für das maximale Ideal  $\mathfrak{m}_p = \{f \mid f(p) = 0\}$  festgelegt, denn für  $c$  konstant ist  $\mathcal{D}(c) = 0$ , also gilt, für beliebiges  $f \in \mathcal{O}_{V,p}$ ,  $\tilde{f} := f - f(p)$  ist in  $\mathfrak{m}_p$  und  $\mathcal{D}(\tilde{f}) = \mathcal{D}(f)$ .
- (c) Sei  $f \in \mathfrak{m}_p^2$ . Dann ist  $\mathcal{D}(f) = 0$ , denn wir können, ohne Einschränkung,  $f = g \cdot h$  mit  $g, h \in \mathfrak{m}_p$  wählen und sehen

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(gh) = g(p)\mathcal{D}(h) + h(p)\mathcal{D}(g) = 0,$$

da  $g(p) = h(p) = 0$ .  $\mathcal{D}$  definiert also eine lineare Abbildung

$$\mathfrak{l}: \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow K.$$

- (d) Jedes solche  $\mathfrak{l}$  kommt von einer Derivation her. Dazu definieren wir

$$\mathcal{D}(f_p) := \mathfrak{l}(f_p - f_p(p)).$$

Wir müssen also zeigen, dass  $\mathcal{D}$  eine Derivation an  $p$  ist, also dass:

$$\mathcal{D}(f_p \cdot g_p) = f_p(p)\mathcal{D}(g_p) + g_p(p)\mathcal{D}(f_p)$$

gilt. Dazu verwenden wir, dass  $(f_p - f_p(p)) \cdot (g_p - g_p(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$ , also

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{l}((f_p - f_p(p))(g_p - g_p(p))) \\ &= \mathfrak{l}(f_p g_p - f_p(p)g_p(p) - f_p(p)g_p - g_p(p)f_p + 2f_p(p)g_p(p)) \end{aligned}$$

und sehen damit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}(f_p g_p - f_p(p)g_p(p)) &= \mathfrak{l}(f_p(p)g_p - f_p(p)g_p(p)) + \mathfrak{l}(g_p(p)f_p - f_p(p)g_p(p)) \\ &= f_p(p)\mathcal{D}(g_p) + g_p(p)\mathcal{D}(f_p). \end{aligned}$$

Die Derivationen an  $p$  auf  $\mathcal{O}_{V,p}$  können demnach mit dem Dualraum  $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$  identifiziert werden. Wir erhalten so einen Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen. Genauer:

PROPOSITION 3.8: (a) Jedes  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$  definiert eine Derivation

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} &\cong K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_p} \longrightarrow K, \\ f &\longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot a_i = f_p^1(a) = \mathcal{D}_p(f)(a), \end{aligned}$$

dabei war  $\mathfrak{m}_p = (X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n)$  für  $p = (p_1, \dots, p_n)$ .

- (b) Falls  $a \in \mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{B}(\mathcal{I}_p)$ , steigt  $\mathcal{D}_a$  zu einer Derivation  $\tau_a: \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$  ab, via des von der Einbettung  $i: V \hookrightarrow \mathbb{A}^n$  induzierten Morphismus  $i^\sharp: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}$ .

*Beweis:* (a) Die Derivationseigenschaft kommt von der entsprechenden Eigenschaft der  $\frac{\partial}{\partial X_i}$ .

- (b) Ohne Einschränkung nehmen wir  $V$  als affin an. Zunächst gilt für alle  $f \in \mathfrak{I}(V)$ , dass  $\mathcal{D}_a(f) = \mathcal{D}_p(f)(a) = 0$ , da  $f_p^{(1)} \in \mathcal{I}_p$  und  $a \in \mathcal{T}_{V,p}$ .

Sei nun  $(\frac{f}{g})_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p}$  mit  $i^\sharp((\frac{f}{g})_p) = 0$ , das heißt  $g(p) \neq 0$  und  $\frac{f}{g}$  ist 0 in  $\mathcal{O}_{V,p}$ , also gibt es ein  $h$  mit  $h(p) \neq 0$ , so dass  $h \cdot f \in \mathfrak{I}(V)$ . Insbesondere ist  $\mathcal{D}_a(hf) = 0$  und  $f(p) = 0$ , da  $0 = (hf)(p) = h(p)f(p)$ . Damit gilt:

$$0 = \mathcal{D}_a(hf) = \mathcal{D}_a(h)f(p) + \mathcal{D}_a(f)h(p)$$

und da  $h(p) \neq 0$ , muss schon  $\mathcal{D}_a(f) = 0$  gelten. Damit ist auch

$$\mathcal{D}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(p) \cdot \mathcal{D}_a(f) - f(p) \cdot \mathcal{D}_a(g)}{g(p)^2} = 0$$

und damit ist  $\tau_a$  wohldefiniert. □

DEFINITION/PROPOSITION 3.9: Sei  $V$  eine affine Varietät und  $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$ .

(a)  $\mathcal{D}_a: \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$  induziert einen Vektorraumhomomorphismus

$$\tau_a: \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow K,$$

also ein Element  $\tau_a \in (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^\vee$ .

(b) Die Abbildung

$$\alpha_p: \mathcal{T}_{V,p} \longrightarrow (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^\vee, \quad a \longmapsto \tau_a$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

*Beweis:* (a) folgt sofort aus Definition/Bemerkung 3.7 (c) mit Proposition 3.8 (b).

(b) Wir definieren die Umkehrabbildung durch

$$\beta_p: (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^\vee \longrightarrow \mathcal{T}_{V,p}, \quad \mathfrak{l} \longmapsto (\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}), \dots, \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})).$$

Wir zeigen zuerst, dass  $\beta$  wohldefiniert ist, also  $\beta_p(\mathfrak{l}) =: a \in \mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$ .

Sei dazu  $f \in \mathfrak{I}(V)$ , also  $f_p^{(1)} \in \mathcal{I}_p$ . Dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} f_p^{(1)}(a) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot \mathfrak{l}(\overline{X_i - p_i}) \\ &= \mathfrak{l}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot (X_i - p_i)\right) = \mathfrak{l}(\overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}). \end{aligned}$$

In Bemerkung 3.4 (a) hatten wir gesehen, dass

$$f - f(p) - (f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$$

liegt, wobei hier natürlich  $f(p) = 0$  ist. In  $K[V]$  ist damit sogar  $f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p) \in \mathfrak{m}_p^2$ , also gilt

$$\text{in } \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \text{ ist } \overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)} = 0,$$

also ist  $f_p^{(1)}(a) = 0$  und damit ist  $a \in \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{T}_{V,p}$ .

Um einzusehen, dass es sich wirklich um die Umkehrabbildung handelt, erinnern wir uns daran, dass, für  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,

$$\tau_a: \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \ni f \longmapsto \mathcal{D}_p(f)(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot a_i \in K$$

gilt. Damit erhalten wir für  $\beta_p(\alpha_p(a))$ :

$$\beta_p(\tau_a) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_1 - p_1})}{\partial X_i}(p) \cdot a_1, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_n - p_n})}{\partial X_i}(p) \cdot a_n \right)$$

und da  $\frac{\partial(X_j - p_j)}{\partial X_i}$  genau dann 1, wenn  $i = j$  und ansonsten 0 ist, ergibt das gerade wieder  $a$ .

Nun überlegen wir uns noch, dass  $\mathfrak{l}$  durch

$$\alpha_p(\beta_p(\mathfrak{l})) = \alpha_p(\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}), \dots, \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})),$$

nach gleicher Argumentation wie oben, gerade auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f \longmapsto \mathcal{D}_p(f)(\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}), \dots, \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot \mathfrak{l}(\overline{X_i - p_i}) \\ &= \overline{\mathfrak{l}(f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p))}, \end{aligned}$$

geschickt wird. In  $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  ist aber, wie oben gesehen,

$$\overline{f} = \overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}$$

und damit gilt tatsächlich

$$\alpha_p(\beta_p(\mathfrak{l})) = (f \longmapsto \mathfrak{l}(f)) = \mathfrak{l},$$

$\beta_p$  ist also, wie behauptet, die Umkehrabbildung.

Somit sind die Vektorräume isomorph. □

DEFINITION/BEMERKUNG 3.10: Sei  $V$  eine quasi-projektive Varietät,  $p \in V$ .

- (a)  $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$  heißt *(Zariski-)Tangentialraum*.
- (b) Der Punkt  $p$  heißt *regulär* (bzw. *nicht-singulär*), wenn  $\dim \mathcal{T}_{V,p} = \dim_p V$  ist. Andernfalls heißt  $p$  *singulär*.
- (c) Sei  $U \subseteq \mathbb{A}^n$  eine offene und affine Umgebung von  $p$  in  $V$  und  $\mathfrak{I}(U) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ . Dann gilt

$$p \text{ ist regulär} \iff \text{Rang} \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}} = n - \dim_p V,$$

denn nach Bemerkung 3.4 (c) ist  $\mathcal{T}_{V,p}$  gerade der Kern dieser Matrix.

Diese Äquivalenz nennt man das *Jacobi-Kriterium*.

BEISPIEL 3.11: (a) Sei  $V = \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$ . Dann ist  $\dim V = \dim_p V$  für alle Punkte  $v \in V$ . Für die Jacobi-Matrix gilt:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

und nach Definition/Bemerkung 3.10 (c) ist  $p$  genau dann regulär, wenn

$$\text{Rang } \mathcal{J} = 3 - 2 = 1$$

gilt. Also ist  $p = (0, 0, 0)$  der einzige singuläre Punkt.

- (b) Sei  $V = \mathfrak{V}(X^2 - Y^2) = \mathfrak{V}((X - Y)(X + Y)) \subseteq \mathbb{A}^3$ . Anschaulich sind das zwei Ebenen, die senkrecht aufeinander stehen. Ihr Schnitt ist die  $Z$ -Achse. Analog zu (a) finden wir

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

und demnach ist hier  $p$  genau dann singulär, wenn  $p = (0, 0, z)$  mit  $z \in K$ , also ist die Menge der singulären Punkte gerade die  $Z$ -Achse.

- (c) Sei  $V = \mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n$  eine Hyperfläche, also  $\deg f \geq 1$ . Dann ist

$$\mathcal{J}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) \end{pmatrix}$$

und  $p$  ist genau dann regulär, wenn  $\text{Rang } \mathcal{J} = n - (n - 1) = 1$ , d.h.

$$p \text{ ist singulär} \iff \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) = 0.$$

## 4 Der singuläre Ort einer Varietät



DEFINITION 4.1: Sei  $W$  quasi-projektive Varietät. Dann heißt

$$\text{Sing } W = \{p \in W \mid p \text{ singulär}\}$$

der *singuläre Ort*.

$$\text{Reg } W = \{p \in W \mid p \text{ regulär}\} = W \setminus \text{Sing } W$$

heißt *regulärer Ort*.

Wenn  $\text{Sing } W$  leer ist, nennen wir  $W$  *regulär* oder *nicht-singulär*.

DEFINITION/BEMERKUNG 4.2: (a) Ein noetherscher, lokaler Ring  $R$  mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  heißt *regulär*, wenn  $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$ . Dabei ist  $k = R/\mathfrak{m}$ .

- (b) Sei  $W$  quasi-projektive Varietät,  $p \in W$ . Dann gilt:

$$p \text{ ist regulär} \iff \mathcal{O}_{W,p} \text{ ist regulär.}$$

LEMMA 4.3: Sei  $(R, \mathfrak{m})$  ein lokaler, noetherscher Ring.

- (a) Ist  $R$  regulär, so ist  $R$  auch nullteilerfrei.  
 (b) Es gilt:  $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$

*Beweis:* siehe Lemma 5.4 und Proposition 5.5. □

**Satz 6:** Sei  $W$  eine quasi-projektive Varietät.

- (a) Ist  $p \in W$ , so ist  $\dim \mathcal{T}_{W,p} \geq \dim_p W$  und  $\text{Rang } \mathcal{J}_p \leq n - \dim_p W$ , wobei  $\mathcal{J}_p$  die Jacobi-Matrix zu  $V$  in  $p$  ist und  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  eine offene, affine Umgebung von  $p$  ist.
- (b) Sind  $W_1 \neq W_2$  irreduzible Komponenten von  $W$ ,  $p \in W_1 \cap W_2$ , dann ist  $p$  singulär.
- (c)  $\text{Sing } W$  ist abgeschlossen.
- (d) Es ist  $\text{Sing } W \neq W$ .

*Beweis:* (a) folgt aus Lemma 4.3 (b) sowie  $\mathcal{T}_{W,p} \cong \text{Kern } \mathcal{J}_p$ .

- (b) Da wir eine lokale Eigenschaft untersuchen, können wir ohne Einschränkung  $W$  als affin annehmen. Sei nun  $p \in W_1 \cap W_2$ .

Dann ist  $\mathfrak{m}_p^W \supseteq \mathfrak{I}(W_1), \mathfrak{I}(W_2)$  in  $K[W]$ .

Sind  $W_1, W_2$  irreduzible Komponenten, so sind  $\mathfrak{I}(W_1), \mathfrak{I}(W_2)$  minimale Primideale. Folglich sind die Bilder von  $\mathfrak{I}(W_1)$  und  $\mathfrak{I}(W_2)$  minimale Primideale in  $\mathcal{O}_{W,p}$  bzw.  $K[W]_{\mathfrak{m}_p^W}$  und verschieden (vgl. Aufgabe 2, Übungsblatt 6).

Damit ist (0) kein Primideal in  $\mathcal{O}_{W,p}$ . Also ist  $\mathcal{O}_{W,p}$  nicht nullteilerfrei und nach Lemma 4.3 (a) ist  $\mathcal{O}_{W,p}$  nicht regulär.

- (c) Sei  $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$  die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Ist  $p \in W_i$  und  $p \notin W_j$  für  $j \neq i$ , so ist  $p$  genau dann singulär in  $W$ , wenn  $p$  singulär in  $W \cap W_i$  ist.

Denn: Ist  $p \in W_i \cap W_j$  ( $i \neq j$ ), so ist  $p \in \text{Sing } W$  und damit

$$\text{Sing } W = \bigcup_{i=1}^k \text{Sing } W_i \cup \bigcup_{j \neq i} (W_i \cap W_j).$$

Da  $\bigcup_{j \neq i} (W_i \cap W_j)$  abgeschlossen ist, genügt es die Aussage für irreduzible Varietäten zu zeigen.

Sei also  $W$  irreduzibel und affin. Dann gilt:

$$\text{Sing } W = \{p \in W \mid \text{Rang } \mathcal{J}_p < n - \dim W\} = \{p \in W \mid \det M_p = 0 \forall M_p\},$$

wobei die  $M_p$  die  $(n - \dim W) \times (n - \dim W)$ -Minoren von  $\mathcal{J}_p$  sind. Diese Menge ist abgeschlossen.

- (d) Ist  $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$  die Zerlegung in irreduzible Komponenten und  $\text{Reg } W_i$  nicht leer, so ist  $\text{Reg } W_i$  dicht in  $W_i$ .

Also gibt es  $p \in W_i$ , so dass  $p \notin W_j$ , für alle  $i \neq j$ . Damit ist  $p \in \text{Reg } W$  und man kann ohne Einschränkung annehmen, dass  $W$  irreduzibel ist.

Sei jetzt also  $V = W$  affin und irreduzibel. Betrachte zuerst den Spezialfall, dass  $W = V = \mathfrak{V}(f)$  eine Hyperfläche ist, wobei  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  quadratefrei sein soll.

Nach Beispiel 3.11 gilt:

$$\text{Sing } V = \left\{ p \in V \mid \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) = 0 \right\}$$

Wäre  $\text{Sing } V = V$ , dann wäre  $\frac{\partial f}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}(V) = \langle f \rangle$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Hat  $K$  Charakteristik 0, so muss  $f$  bereits konstant sein.

Hat  $K$  Charakteristik  $p$ , so muss jeder Exponent, der auftritt, bereits durch  $p$  teilbar sein. Also ist  $f = g^p$  für ein  $g \in K[X_1, \dots, X_n]$ , was im Widerspruch zur Quadratfreiheit von  $f$  steht.

Nun der allgemeine Fall:

Nach Lemma 4.4 gibt es eine offene, dichte Teilmenge  $U \subseteq V$ , die via  $\varphi$  isomorph zu einer offenen, dichten Teilmenge  $U'$  in einer Hyperfläche  $\mathfrak{V}(f)$  ist.

Nach dem Spezialfall ist  $\text{Reg } \mathfrak{V}(f) \neq \emptyset$ . Damit ist  $U' \cap \text{Reg } \mathfrak{V}(f) \neq \emptyset$ , da  $U'$  dicht ist und  $\text{Reg } \mathfrak{V}(f)$  offen ist. Sei  $p' \in U' \cap \text{Reg } \mathfrak{V}(f)$ .

Dann ist  $p'$  regulär, d.h.  $\mathcal{O}_{U', p'}$  ist regulär. Also ist auch  $\varphi(p') \in U$  regulär, da  $\mathcal{O}_{U, p}$  regulär ist.  $\square$

LEMMA 4.4: Jede irreduzible quasi-projektive Varietät  $W$  von Dimension  $d$  ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche im  $\mathbb{A}^{d+1}(K)$ .

ERINNERUNG: (a) Sei  $A$  eine nullteilerfreie, endlich erzeugte  $K$ -Algebra.

- Die Noethernormalisierung impliziert, dass  $A$  ganz über dem Polynomring  $K[X_1, \dots, X_d]$  ist.
- Die Dimension bleibt unter ganzen Ringerweiterungen erhalten. Also gilt  $d = \dim A$  und der Transzendenzgrad von  $\text{Quot } A/K = d = \dim A$ . Damit gilt für eine irreduzible Varietät  $V$  die Formel  $\text{trdeg } K(V) = \dim V$ .

(b) Sei  $L/K(X_1, \dots, X_d)$  endliche Körpererweiterung,  $E := K(X_1, \dots, X_d)$ .

Hat  $K$  Charakteristik 0, so ist  $L/K$  separabel, d.h.  $L = E(\alpha)$  für ein  $\alpha \in L$  nach dem Satz vom primitiven Element.

Hat  $K$  Charakteristik  $p$ , so impliziert die algebraische Abgeschlossenheit von  $K$ , dass  $L/K$  separabel erzeugt ist, d.h. es gibt eine Transzendenzbasis  $\{\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_d\}$ , so dass  $L/K(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_d)$  separabel ist (siehe Bosch, Abschnitt 7.3, Satz 7).

Im Folgenden sei eine Transzendenzbasis mit dieser Eigenschaft gewählt.

*Beweis von Lemma 4.4:* Seien  $L = K(W)$  und  $\{X_1, \dots, X_d\}$  eine Transzendenzbasis wie in (b). Also gibt es ein primitives Element  $y \in L = K(W)$  von  $L/K(X_1, \dots, X_d)$ , d.h.

$$L = K(X_1, \dots, X_d, y) = K(X_1, \dots, X_d)[y].$$



Sei  $p(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \dots + a_0$  das Minimalpolynom von  $y$  über  $K(X_1, \dots, X_d)$  und  $a_0 =: \frac{f_i}{g_i}$  mit  $f_i, g_i \in K[X_1, \dots, X_d]$ .

Dann setzen wir  $g := \text{kgV}(g_0, \dots, g_{n-1})$  und damit

$$h := gY^n + ga_{n-1}Y^{n-1} + \dots + ga_0 \in K[X_1, \dots, X_d, Y],$$

denn die  $ga_i$  sind bereits in  $K[X_1, \dots, X_d]$ .

Nun definieren wir  $H := \mathfrak{V}(h) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$  und sehen, dass

$$K(H) = \text{Quot} \left( K[X_1, \dots, X_d, Y] / (h) \right) = L = K(W).$$

Also gibt es, nach Satz 4 und Definition/Bemerkung 5.6 (c), eine birationale Abbildung  $H \dashrightarrow W$ .  $\square$

## 5 Reguläre Ringe und Krullscher Höstensatz



**Ziel:** Sei  $I = (f_1, \dots, f_k)$ ,  $\text{ht } I := \{\inf \text{ht } \wp \mid \wp \supseteq I, \wp \text{ ist Primideal}\}$ .

Was kann man über  $\text{ht } I$  sagen?

**BEMERKUNG:** Ein Primideal  $\wp$  heißt *minimales Primoberideal* von einem Ideal  $I$ , wenn  $\wp \supseteq I$  und  $\wp$  minimal mit dieser Eigenschaft ist.

Zorns Lemma zeigt, dass es zu jedem  $x \in R \setminus R^\times$  ein minimales Primoberideal von  $(x)$  gibt.

(a) (Krullsches Hauptideallemma, vgl. Brodmann III.10.15)

Ist  $R$  ein noetherscher Ring,  $x \in R \setminus R^\times$  und  $\wp$  ein minimales Primoberideal von  $(x)$ , dann gilt  $\text{ht } \wp \leq 1$ .

(b) Jeder noetherscher Ring hat nur endlich viele minimale Primideale (vgl. auch Satz 1, Brodmann II, 9.17 (iii)).

(c) (Primidealvermeidungslemma, vgl. Brodmann III.11.10)

Sind  $\wp_1, \dots, \wp_n$  Primideale in  $R$  und  $I, J$  Ideale, mit  $I \not\subseteq \wp_i$  und  $I \not\subseteq J$ , dann gilt auch  $I \not\subseteq J \cup \wp_1 \cdots \cup \wp_n$ .

**LEMMA 5.1:** Sei  $R$  noethersch,  $q \in \text{Spec } R$ ,  $x \in q$ ,  $\text{ht } q \geq l \geq 1$ . Dann existiert eine Primidealkette

$$x \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-1} = q.$$

*Beweis:* Wir machen vollständige Induktion über  $l$ :

Für  $l = 1$  wählen wir  $\wp'_0 = q$ .

Sei nun  $l \geq 2$ . Da  $\text{ht } q \geq l$  gilt, gibt es eine Primidealkette  $\wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_l := q$ . Ist  $x \in \wp_{l-1}$ , so kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält die Behauptung.

Ab jetzt sei also  $x \notin \wp_{l-1}$ . Dann ist  $I := (x) + \wp_{l-2} \subseteq q$ . Sei  $s$  ein minimales Primoberideal von  $I$  mit  $I \subseteq s \subseteq q$ .

Es gilt  $\wp_{l-2} \subsetneq \wp_{l-1} \subsetneq q$ , also  $\bar{0} \subsetneq \overline{\wp_{l-1}} \subsetneq \bar{q}$  in  $R/\wp_{l-2}$  und damit ist  $\text{ht } \bar{q} \geq 2$ , und somit ist, nach dem Krullschen Hauptideallemma,  $\bar{q}$  kein minimales Oberprimideal von  $(\bar{x})$ . Damit ist aber auch  $q$  kein minimales Primoberideal von  $(x) + \wp_{l-2} = I$ , also ist  $s \neq q$ .

Nun können wir also die Induktionsvoraussetzung auf  $s$  anwenden, es gibt somit eine Primidealkette  $x \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-2}$  in  $s$ . Wenn wir diese durch  $q$  um 1 verlängern, sind wir fertig.  $\square$

KOROLLAR 5.2: Sei  $(R, \mathfrak{m})$  ein lokaler, noetherscher Ring und  $x \in \mathfrak{m}$ . Dann ist

$$\dim R/(x) \geq \dim R - 1.$$

Vermeidet  $x$  die Primideale  $\wp_i$  von  $R$ , d.h. gilt  $x \notin \wp_i$  für alle minimalen Primoberideale  $\wp_i$ , dann gilt  $\dim R/(x) = R - 1$ .

PROPOSITION 5.3: (Krullscher Hörsatz) Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $I = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  ein echtes Ideal in  $R$ . Dann gilt:  $\text{ht } \wp \leq k$  für jedes minimale Primoberideal von  $I$ . Insbesondere ist  $\text{ht } I \leq k$ .

*Beweis:* Wir machen Induktion über  $k$ :

Der Fall  $k = 1$  folgt aus dem Krullschen Hauptideallemma.

Sei also  $k \geq 2$ : Sei  $\wp$  ein minimales Primoberideal von  $I$  und  $\wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_l := \wp$  eine Primidealkette.

Nach Lemma 5.1 finden wir eine Primidealkette mit  $x_k \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-1} := \wp$ . In  $R/(x_k)$  gilt nun  $\overline{\wp'_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\wp'_{l-1}} = \bar{\wp}$  und  $\bar{\wp}$  ist ein minimales Primoberideal von  $I = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} \rangle$ . Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun:

$$l - 1 \leq \text{ht } \bar{\wp} \leq k - 1.$$

Also ist  $l \leq k$  und das zeigt die Behauptung.  $\square$

LEMMA 5.4: Sei  $(R, \mathfrak{m})$  ein noetherscher, lokaler Ring und  $k = R/\mathfrak{m}$ .

(a) Für  $m_1, \dots, m_n \in \mathfrak{m}$  gilt:

$$\{m_1, \dots, m_n\} \text{ ist minimales Erzeugendensystem von } \mathfrak{m} \iff \{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n}\} \text{ ist Basis von } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

(b) Alle minimalen Erzeugendensysteme von  $\mathfrak{m}$  haben dieselbe Anzahl:  $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ .

(c) Es ist  $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$ .

*Beweis:* (a) Sei zuerst  $\langle m_1, \dots, m_n \rangle = \mathfrak{m}$ . Betrachte die Projektionen

$$\pi_1: R \longrightarrow k = R/\mathfrak{m}, \quad \pi_2: \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Dann ist  $\overline{r m_1} := \pi_1(r) \pi_2(m_1)$  wohldefiniert und  $\{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n}\}$  ist ein Erzeugendensystem von  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Da  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  ein  $k$ -Vektorraum ist, ist  $\{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n}\}$  also – wie gewünscht – eine Basis.

Sei jetzt  $\langle \overline{m_1}, \dots, \overline{m_n} \rangle = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Definiere  $N = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ . Dann ist  $\mathfrak{m} = N + \mathfrak{m}^2$  und damit  $N = \mathfrak{m}$  nach dem Nakayama-Lemma aus Algebra 2.

- (b) folgt aus (a).  
 (c) Da  $R$  lokal ist, folgt  $\dim R = \text{ht } \mathfrak{m}$ . Außerdem folgt, mit Proposition 5.3 und (b),

$$\text{ht } \mathfrak{m} \leq |\{\text{minimales Erzeugendensystem von } \mathfrak{m}\}| = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2. \quad \square$$

PROPOSITION 5.5: Ist  $(R, \mathfrak{m})$  regulär, so ist  $R$  auch nullteilerfrei.

*Beweis:* Erinnerung aus Definition/Bemerkung 4.2:

$$\begin{aligned} (R, \mathfrak{m}) \text{ ist regulär} &\iff \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R \\ &\iff \mathfrak{m} \text{ kann durch } \dim R \text{ viele Elemente erzeugt werden.} \end{aligned}$$

Wir beweisen die Aussage nun via Induktion über  $d := \dim R = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ .

Ist  $d = 0$ , so kann  $\mathfrak{m}$  von 0 Elementen erzeugt werden, d.h.  $\mathfrak{m} = \{0\}$  und damit ist  $R$  ein Körper.

Sei nun  $d \geq 1$  und  $\wp_1, \dots, \wp_r$  die minimalen Primideale von  $R$  (das sind nur endlich viele, vgl. die Bemerkung zu Beginn des Abschnitts.)

Da  $\dim R = d > 0$  ist, kann  $\mathfrak{m}$  nicht minimal sein. Also ist  $\mathfrak{m} \not\subseteq \wp_i$  für alle  $i = 1, \dots, r$ . Außerdem gilt:  $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$ , da  $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 > 0$ .

Mit dem Primidealvermeidungslemma ist folglich  $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2 \cup \wp_1 \cup \dots \cup \wp_r$ .

Wähle nun  $x \in \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}^2 \cup \wp_1 \cup \dots \cup \wp_r)$  und ergänze  $\bar{x}$  zu einer Basis  $\{\bar{x}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_d\}$  von  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ .

$\pi: R \longrightarrow R/(x)$  bezeichne die kanonische Projektion. Nach Korollar 5.2 gilt

$$\dim R/(x) = d - 1.$$

Ferner gilt für das maximale Ideal  $\pi(\mathfrak{m})$  in  $R/(x)$ , nach Lemma 5.4,

$$\dim_k \pi(\mathfrak{m})/\pi(\mathfrak{m})^2 \leq |\{\text{Erzeuger von } \pi(\mathfrak{m})\}| \leq d - 1.$$

Auch ist  $\dim_k \pi(\mathfrak{m})/\pi(\mathfrak{m})^2 \geq \dim R/(x)$ , wieder nach Lemma 5.4.

Also gilt oben Gleichheit, d.h.  $R/(x)$  ist regulär. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit  $R/(x)$  nullteilerfrei, d.h.  $(x)$  ist Primideal in  $R$ .

Damit gibt es ein  $\wp_i$  mit  $(x) \supsetneq \wp_i$ . Sei nun  $b \in \wp_i$ . Also ist  $b = a \cdot x$  mit  $a \in R$ . Da  $\wp_i$  Primideal und  $x \notin \wp_i$  ist, muss  $a \in \wp_i$  gelten. Also ist

$$\wp_i = \wp_i x \text{ und damit } \wp_i = \wp_i \mathfrak{m}.$$

Nun liefert das Nakayama-Lemma  $\wp_i = 0$ , d.h.  $R$  ist nullteilerfrei.  $\square$

