

1. Algebra Übung

Ferdinand Szekeresch

14. Mai 2016

Aufgabe 1

(M, \cdot) Magma, $\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge.

Für $A, B \subseteq M : A * B := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$, d.h. $x \in A * B \Leftrightarrow \exists a \in A, b \in B : x = ab$.

dabei auch: $x \in A * \emptyset \Leftrightarrow \exists a \in A, \underbrace{b \in \emptyset}_{\text{!}} : x = ab$

$\Rightarrow x \in A * \emptyset$ existiert nicht. $\Rightarrow A * \emptyset = \emptyset$

a) Sei M kommutativ. Für alle $A, B \subseteq M : A * B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\} = \{b \cdot a : b \in B, a \in A\} = B * A$
 $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$ ist kommutativ.

b) Sei M eine Halbgruppe, d.h. assoziativ. Für alle $A, B, C \subseteq M :$
 $(A * B) * C = \{x \cdot c : x \in A * B, c \in C\} = \{(a \cdot b) \cdot c : a \in A, b \in B, c \in C\} = \{a \cdot (b \cdot c) : a \in A, b \in B, c \in C\} = \{a \cdot y : a \in A, y \in B * C\} = A * (B * C)$
 $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$ ist assoziativ (Halbgruppe).

c) Sei M ein Monoid mit neutralem Element 1.

Zeige: $\{1\}$ ist neutrales Element von $\mathcal{P}(M)$.

Für alle $A \subseteq M : A * \{1\} = \{a \cdot 1 : a \in A\} = A = \{1 \cdot a : a \in A\} = \{1\} * A$

$\Rightarrow \mathcal{P}(M)$ ist Monoid mit neutralem Element $\{1\}$ (Assoziativität nach b)).

Welche $A \subseteq M$ sind invertierbar?

1. Fall $A = \emptyset$

$\Rightarrow \forall B \subseteq M : \emptyset * B = B * \emptyset = \emptyset \neq \{1\}$

$\Rightarrow \emptyset$ ist nicht invertierbar.

2. Fall $A = \{a_0\}$ einelementig

Behauptung: $\{a_0\} \in \mathcal{P}(M)^\times \Leftrightarrow a_0 \in M^\times$

„ \Rightarrow “ $\{a_0\}$ invertierbar $\Rightarrow \exists B \subseteq M, B \neq \emptyset : \{a_0\} * B = B * \{a_0\} = \{1\}$
 $b \in B \Rightarrow a_0 b = 1 = b a_0 \Rightarrow a_0$ invertierbar in M und $a_0^{-1} = b \Rightarrow$
 $B = \{a_0\}^{-1} = \{a_0^{-1}\}$

$$\begin{aligned}
\text{„} \Leftarrow \text{“} \quad & a_0 \in M^\times \\
& \Rightarrow \{a_0\} * \{a_0^{-1}\} = \{a_0 a_0^{-1}\} = \{1\} = \{a_0^{-1}\} * \{a_0\} \\
& \Rightarrow \{a_0\} \in \mathcal{P}(M)^\times \text{ und } \{a_0\}^{-1} = \{a_0^{-1}\}.
\end{aligned}$$

3. Fall $|A| \geq 2; a_1, a_2 \in A; a_1 \neq a_2$.

Annahme: $\exists B \subseteq M, B \neq \emptyset : A * B = B * A = \{1\}$

Sei $b \in B \Rightarrow a_1 b = 1 = b a_1 \Rightarrow a_1 = b^{-1}$

$a_2 b = 1 = b a_2 \Rightarrow a_2 = b^{-1} \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \nexists$

Fazit: $A \subseteq M$ ist invertierbar $\Leftrightarrow A = \{a_1\}$ für ein $a_1 \in M^\times$. In diesem Fall ist $A^{-1} = \{a_1^{-1}\}$.

d) Sei M eine Gruppe.

nach c): $\mathcal{P}(M)$ ist ein Monoid mit neutralem Element $\{1\}$.

$\mathcal{P}(M)^\times = \{\{a\} : a \in M\}$

$\Rightarrow \emptyset$ ist nicht invertierbar $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$ ist keine Gruppe.

Aufgabe 2

(M, \cdot) Monoid mit neutralem Element 1. Voraussetzung: $\forall x \in M : x^2 = 1$.

- Zeige M ist Gruppe, also jedes $x \in M$ ist invertierbar. Wähle $y = x$.
- M ist abelsch. Seien $x, y \in M \Rightarrow (xy)^2 = 1 \Rightarrow xyxy = 1 \Rightarrow xyxyx = yx \Rightarrow xyx^2 = yx \Rightarrow xy = yx$.

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\text{a) } f &= X^3 + aX^2 + bX + c, \\
Y &:= X + \frac{a}{3} \text{ bzw. } X = Y - \frac{a}{3} \\
\Rightarrow f &= (Y - \frac{a}{3})^3 + a(Y - \frac{a}{3})^2 + b(Y - \frac{a}{3}) + c \\
&= (Y^3 - aY^2 + \frac{a^2}{3}Y - \frac{a^3}{27}) + a(Y^2 - \frac{2a}{3}Y + \frac{a^2}{9}) + b(Y - \frac{a}{3}) + c = Y^3 + \\
&\underbrace{(b - \frac{a^3}{3})Y}_{=:p} + \underbrace{(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c)}_{=:q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } g &= Y^3 + pY + q, D := -4p^3 - 27q^2, D < 0 \\
\zeta &:= e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dritte Einheitswurzel} \\
\zeta^2 &= e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\zeta^3 &= 1 \\
1 + \zeta + \zeta^2 &= 1 + (-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0. \\
\text{damit:} \\
(Y - (u + v))(Y - (\zeta u + \zeta^2 v))(Y - (\zeta^2 u + \zeta v)) &= \\
(Y - u - v)(Y - \zeta u - \zeta^2 v)(Y - \zeta^2 u - \zeta v) &= \dots = Y^3 + \underbrace{(-u(1 + \zeta + \zeta^2))}_{=0} - \underbrace{v(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} Y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-u^2 \underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} + v^2 \underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} + 3uv \underbrace{(\zeta + \zeta^2)}_{=-1} \right) Y + \left(-u^3 - v^3 - uv^2 \underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} - u^2 v \underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} \right) \\
& = Y^3 - 3uvY - (u^3 + v^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad -3uv &= -3 \left(\frac{1}{2} \left(-q + \frac{1}{9} \sqrt{-3D} \right) \cdot \left(-q - \frac{1}{9} \sqrt{-3D} \right) \right)^{\frac{1}{3}} = -3 \left(\frac{1}{4} \left(q^2 - \frac{1}{81} (-3D) \right) \right)^{\frac{1}{3}} = \\
& -3 \left(\frac{1}{4} \left(q^2 + \frac{1}{27} (-4p^3 - 27q^2) \right) \right)^{\frac{1}{3}} = -3 \left(-\frac{1}{27} p^3 \right)^{\frac{1}{3}} = p \\
\bullet \quad -u^3 - v^3 &= -\frac{1}{2} \left(-q + \frac{1}{9} \sqrt{-3D} \right) - \frac{1}{2} \left(-q - \frac{1}{9} \sqrt{-3D} \right) = q
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (Y - (u + v)) (Y - (\zeta u + \zeta^2 v)) (Y - (\zeta^2 u + \zeta v)) = Y^3 - 3uvY - (u^3 + v^3) = Y^3 + pY + q$$

■

Beispiel: $f = X^3 + X^2 - X - 1, \quad Y = X + \frac{1}{3}$

$$\text{damit: } f = Y^3 - \underbrace{\frac{4}{3} Y}_{=:p} - \underbrace{\frac{16}{27}}_{=:q}, D = 0 \Rightarrow u = v = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f &= \left(Y - \frac{4}{3} \right) \left(Y - \frac{2}{3} (\zeta + \zeta^2) \right)^2 = \left(Y - \frac{4}{3} \right) \left(Y + \frac{2}{3} \right)^2 \\
&\stackrel{Y=X+\frac{1}{3}}{=} (X - 1)(X + 1)^2.
\end{aligned}$$