

1 Das Lebesgue-Maß

1.1 Etwas Maßtheorie

Sei stets X eine nichtleere Menge mit Potenzmenge $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$.

Definition 1.1. Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ -Algebra, wenn:

- (A1) $X \in \mathcal{A}$
- (A2) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann auch $A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (A3) Wenn $A_j \in \mathcal{A}$, ($j \in \mathbb{N}$), dann auch $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

Beispiel 1.2. a) $\mathcal{P}(X)$ und $\{\emptyset, X\}$ sind σ -Algebren

b) Sei $\emptyset \neq A \subset X$. Dann ist $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ eine σ -Algebra

c) $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ ist σ -Algebra

Beweis. (A1) $X^c = \emptyset$ ist abzählbar, also $X \in \mathcal{A}$.

(A2) gilt per Definition.

(A3) Seien $A_j \in \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{N}$).

- i. Seien alle A_j abzählbar. Dann ist $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ abzählbar, denn: Es gilt $A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots\}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und gewisse $a_{jk} \in X$. Schreibe:

TODO: Grafik

Nach Streichen mehrfach auftretender a_{jk} liefert der Streckenzug eine Abzählung von $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

- ii. Wenn ein A_n nicht abzählbar ist, dann ist A_n^c abzählbar. Somit gilt:
 $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c \subset A_n^c \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c$ abzählbar. Damit folgt $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

□

Lemma 1.3. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X und $A_j \in \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{N}$). Dann:

- a) $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$
- b) $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

- c) $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$
d) $A_1 \setminus A_2 := A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{A}$

Fazit: Abzählbare Mengenoperationen bleiben in der σ -Algebra.

Beweis. a) Klar mit (A1) und (A2).

b) Folgt aus (A3) und a), da $A_1 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

c) Nach (A2) und (A3): $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{(A2)} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \right)^c \in \mathcal{A}$

d) Folgt aus c), (A1) und (A3), da $A_1 \cap A_2^c = A_1 \cap A_2^c \cap X \cap X$.

□

Lemma 1.4. Sei \mathcal{F} eine nichtleere Familie von σ -Algebren \mathcal{A} auf X .
Dann ist

$$\mathcal{A}_0 := \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathcal{F} \} := \{ A \subset X : A \in \mathcal{A} \ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \}$$

eine σ -Algebra.

Beweis. (A1) $X \in \mathcal{A} \ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow X \in \mathcal{A}_0$.

(A2) Sei $A \in \mathcal{A}_0 \xrightarrow{(A2)} A^c \in \mathcal{A} \ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_0$.

(A3) Sei $A_j \in \mathcal{A}_0 \ (j \in \mathbb{N}) \xrightarrow{(A3)} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A} \ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_0$.

□

Ana III, 24.10.2008

Definition 1.5. Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ nicht leer. Dann heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}$$

die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra.

Bemerkung: Da $\mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra ist, ist $\sigma(\mathcal{E})$ nicht leer und nach [Lem 1.4](#) ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra.

Lemma 1.6. Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann gelten:

- a) Wenn \mathcal{A} eine σ -Algebra ist und $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, dann $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.
b) $\sigma(\mathcal{E})$ ist die einzige σ -Algebra, die a) erfüllt, d.h. $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste \mathcal{E} enthaltende σ -Algebra auf X .
c) Wenn \mathcal{E} eine σ -Algebra ist, dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.
d) Wenn $\mathcal{E} \subset \bar{\mathcal{E}} \subset \mathcal{P}(X)$, dann gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\bar{\mathcal{E}})$.

Beweis. a) folgt direkt aus Def 1.5.

b) Sei \mathcal{A}_0 eine σ -Algebra mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ für jede σ -Algebra \mathcal{A} mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Wähle $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset \sigma(\mathcal{E})$. Nach a) gilt mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 : \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_0$.

c) folgt aus a) mit $\mathcal{A} = \mathcal{E}$.

d) folgt aus a) mit $\mathcal{A} = \sigma(\overline{\mathcal{E}})$.

□

Beispiel 1.7. a) Sei $\mathcal{E} = \{A\}$ für ein nicht leeres $A \subset X$. Jede σ -Algebra \mathcal{A} mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ umfasst $\{X, \emptyset, A, A^c\}$ nach (A1) und (A2).

Nach Beispiel 1.2b) ist dies eine σ -Algebra.

Lem 1.6 $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

b) Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Die σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ enthält folgende Elemente:

$\{1\}, \{2\} = \{1, 2\} \setminus \{1\}$ und somit auch $\{1\}^c = \{2, 3, 4, 5\}$ und $\{1, 2\}^c = \{3, 4, 5\}$.

Ferner $\emptyset, X \in \sigma(\mathcal{E})$.

Prüfe: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, X\}$ ist eine σ -Algebra.

Aus Lem 1.6 folgt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$.

Definition 1.8. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nicht leer und $\mathcal{O}(X)$ das System der in X offenen Mengen. Dann heißt

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}(X))$$

die Borel σ -Algebra von X . Setze $\mathcal{B}_d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkung: \mathcal{B}_d enthält alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^d , alle abzählbaren Vereinigungen und Schnitte offener und abgeschlossener Menge, usw.

Intervalle in \mathbb{R}^d sind Mengen der Form $I = I_1 \times \cdots \times I_d$, wobei $I_1, \dots, I_d \subset \mathbb{R}$ Intervalle in \mathbb{R} sind. Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ (d.h: $a_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq b_d$) schreibe:

$$\begin{aligned} (a, b) &:= (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d), \\ (a, b] &:= (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]. \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \{1, \dots, d\}$ schreibe $H_k^-(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^d : x_k \leq \alpha\}$.

Satz 1.9. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_d &= \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) =: A_1 \\ &= \sigma(\{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) =: A_2 \\ &= \sigma(\{H_k^-(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Q}, k \in \{1, \dots, d\}\}) =: A_3 \end{aligned}$$

Beweis. a) Es gilt:

$$(a, b] = \bigcap_{k=1}^d H_k^-(b_k) \cap H_k^-(a_k)^c \Rightarrow (a, b] \in A_3$$

$$\stackrel{\text{Lem 1.6}}{\Rightarrow} A_2 = \sigma(\{(a, b], a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) \subset A_3.$$

b) $H_k^-(\alpha)$ ist abgeschlossen, also $H_k^-(\alpha) \in \mathcal{B}_d$. [Lem 1.6](#) $\Rightarrow A_3 \subset \mathcal{B}_d$.

c) Wenn ein $a_k = b_k$, dann $(a, b) = \emptyset \in A_2$. Anderenfalls

$$(a, b) = \bigcup_{n \geq n_0} (a, b - \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T],$$

wobei $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_k + \frac{1}{n} \leq b_k \forall n \geq n_0, k = 1, \dots, d$. Dann folgt: $(a, b) \in A_2$.
Mit [Lem 1.6](#) folgt $\mathcal{A}_1 = \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) \subset A_2$.

Bislang wurde gezeigt: $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \mathcal{B}_d$.

d) Sei $O \subset \mathbb{R}^d$ offen, $J := \{(a, b) \subset O : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}$

Zeige: $\bigcup\{I : I \in J\} = O$

Da die Vereinigung abzählbar ist, folgt $O \in A_1$. Damit $\mathcal{B}_d \subset A_1$ nach [Lem 1.6](#) und $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d))$. Damit folgt die Behauptung.

Zu \supset : Sei $y \in O$. Dann $\exists \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}$, sodass die $\|\cdot\|_\infty$ -Kugel

$$I_0 = (y_1 - \epsilon, y_1 + \epsilon) \times \dots \times (y_d - \epsilon, y_d + \epsilon) \subset O.$$

Durch Verschiebung von y zu einem $z \in \mathbb{Q}^d$ nahe bei y erhält man ein $I \in J$ der Kantenlänge ϵ mit $y \in I \Rightarrow O \subset \bigcap\{I : I \in J\}$. Damit gilt die Gleichheit. \square

Für $Y \subset X, Y \neq \emptyset$ und $M \subset \mathcal{P}(X)$ definiert man die Spur:

$$M_y = M \cap Y := \{A \subset Y : A = \overline{M} \cap Y \text{ für ein } \overline{M} \in M\} \quad (1.1)$$

Lemma 1.10. *Sei $\emptyset \neq Y \subset X$. Dann gelten:*

- Wenn \mathcal{A} eine σ -Algebra ist, dann ist auch \mathcal{A}_y eine σ -Algebra auf Y . Ferner gilt $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A} \Leftrightarrow Y \in \mathcal{A}$.
- Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann $\sigma(\mathcal{E} \cap Y) = \sigma(\mathcal{E}) \cap Y$.
(Beides sind σ -Algebren auf Y .)

Beweis. a) Zu (A1): $Y = X \cap Y \in \mathcal{A}_y$, da $X \in \mathcal{A}$.

Zu (A2), (A3): Seien $B_j = A_j \cap Y \in \mathcal{A}_y$, d.h. $A_j \in \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{N}$). Dann folgt

$$Y \setminus B_1 = Y \cap \underbrace{(X \setminus A_1)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}_y,$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \left(\underbrace{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j}_{\in \mathcal{A}} \right) \cap Y \in \mathcal{A}_y.$$

Also ist \mathcal{A}_y eine σ -Algebra.

Zweite Behauptung: $Y \in \mathcal{A} \Rightarrow M \cap Y \in \mathcal{A}$ ($\forall M \in \mathcal{A}$), also $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A}$. Wenn $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A}$, folgt also $Y \in \mathcal{A}$.

b) $\mathcal{E} \cap Y \subset \sigma(\mathcal{E}) \cap Y$ ist nach a) σ -Algebra.

Zu \supset : Prinzip der guten Mengen

Setze $\mathcal{C} := \{A \subset X : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)\}$

(*) Behauptung: \mathcal{C} ist eine σ -Algebra. Ferner gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, da $E \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ für alle $E \in \mathcal{E} \xrightarrow{\text{Lem 1.6}} \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}$.

Aus der Definition von \mathcal{C} folgt: $\sigma(\mathcal{E}) \cap Y \subset \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$.

Beweis von (*): $Y = X \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow X \in \mathcal{C}$. Damit erfüllt \mathcal{C} (A1).

Zu (A2) und (A3): Seien $A_j \in \mathcal{C}$ ($j \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow A_j \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$. Dann gelten:

- $(X \setminus A_1) \cap Y = Y \setminus \underbrace{(A_1 \cap Y)}_{\in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)} \stackrel{(A2)}{\in} \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow X \setminus A_1 \in \mathcal{C}.$
- $(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap Y}_{\in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)} \stackrel{(A3)}{\in} \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist σ -Algebra auf X .

□

Ana III, 27.10.2008

Korollar 1.11. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_d \cap X = \{B \cap X : B \in \mathcal{B}_d\}$. Wenn $X \in \mathcal{B}_d$, dann $\mathcal{B}_d = \{A \in \mathcal{B}_d : A \subset X\}$

Beweis. Folgt aus [Lem 1.10](#) mit $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, da $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \cap X$.

(Wobei X in [Lem 1.10](#) \mathbb{R}^d in [Kor 1.11](#) entspricht und Y in [Lem 1.10](#) X in [Kor 1.11](#).) □

Beispiel. a) $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\} \in \mathcal{B}_d$, da $\{q_n\}$ abgeschlossen ist, wobei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$.

b) Die Menge

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ für } x \leq 0 \text{ oder } x^2 + y^2 < 1 \text{ für } x > 0\} \\ &= B(0, 1) \cup (\partial B(0, 1) \cap \{x \leq 0\}) \end{aligned}$$

ist abgeschlossen. Damit folgt $A \in \mathcal{B}_2$.

Sei $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (wobei: $+\infty = \infty$) versehen mit den Rechenregeln:

- $\pm a + \infty = \infty \pm a = \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$
- $\infty + \infty = \infty$
- Verboten: $\infty - \infty$!

Ordnung: $a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$

Konvergenz: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists N_c \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n \geq c \quad \forall n \geq N_c$.

Für $a_j \in [0, \infty]$ ($j \in \mathbb{N}$) gilt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$, falls (mindestens) ein $a_j = \infty$ ist, oder falls die Reihe in \mathbb{R} divergiert.

Da $a_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$, kann die Reihe umgeordnet werden.

Definition. Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt (paarweise) disjunkt, wenn $\overline{M} \cap N \neq \emptyset$ für alle $\overline{M}, N \in \mathcal{M}$ mit $\overline{M} \neq N$. Für disjunkte Mengenvereinigung schreibe $\dot{\cup}$ und $\dot{\biguplus}$.

Definition 1.12. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt Maß (auf \mathcal{A}), wenn gelten:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M2) Für jede disjunkte Folge $A_j, j \in \mathbb{N}$ mit $A_j \in \mathcal{A} \quad (\forall j \in \mathbb{N})$ gilt

$$\mu \left(\dot{\biguplus}_{j \in \mathbb{N}}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Erfüllt μ (M1) und (M2), dann heißt (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum.

Wenn $\mu(X) < \infty$, dann heißt μ endlich. Gilt $\mu(X) = 1$, dann heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß.

Bemerkung: Wenn $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n) &= \mu(A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \dots) \\ &\stackrel{(M2)}{=} \mu(A_1) + \dots \mu(A_n) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots \\ &\stackrel{(M1)}{=} \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n). \end{aligned}$$

Beispiel 1.13. a) Sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $x \in X$ fest. Für $A \subset X$ definiere:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in A \\ 0, & \text{für } x \notin A \end{cases}.$$

Dann heißt δ_x Punktmaß (Dirac-Maß).

(M1) gilt offensichtlich.

(M2): Seien $A_j \subset X$ disjunkt für $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x \in \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j \Leftrightarrow \exists! k \in \mathbb{N} : x \in A_k$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta_x\left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) &\stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} 0, x \notin \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j \\ 1, x \in \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j \end{cases} = \begin{cases} 0, x \notin A_k \\ 1, x \in A_k \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, x \notin A_k \\ \delta_x(A_k), x \in A_k \end{cases} = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_x(A_j) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \delta_x$ ist Maß.

b) Sei $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Seien $p_k \in [0, \infty]$ für $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Setze

$$\mu(A) := \sum_{k \in A} p_k \text{ für } A \subset X.$$

Klar $\mu(\emptyset) = 0$. Seien $A_j \subset \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$ disjunkt. Dann gilt

$$\mu\left(\biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k \in \biguplus_{j \in \mathbb{N}} A_j} p_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in A_j} p_k \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

$\Rightarrow \mu$ ist Maß. μ heißt Zählmaß, wenn $p_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$. (Dann $\mu(A) = |A|$)

c) Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, $X_0 \subset X$ und \mathcal{A}_0 σ -Algebra auf X_0 mit $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$. Dann definiert $\mu_0(A) := \mu(A)$ (für alle $A \in \mathcal{A}_0$) ein Maß auf \mathcal{A}_0 .

Für $X_0 \in \mathcal{A}$ setze $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_{X_0} := \{A \in \mathcal{A} : A \subset X_0\}$ (vgl. [Lem 1.10](#)). Dann ist $\mu|_{X_0}$ definiert durch $\mu|_{X_0}(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}_{X_0}$ ein Maß auf \mathcal{A}_{X_0} . $\mu|_{X_0} : \mathcal{A}_{X_0} \rightarrow [0, \infty]$ heißt Einschränkung von μ .

Satz 1.14. Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $A, B, A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

a) Aus $A \subset B$ folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$. (Monotonie)

Wenn zusätzlich $\mu(A) < \infty$, dann gilt: $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

(Speziell: $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$)

b) $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ (σ -Subadditivität)

c) Wenn $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, dann gilt

$$\mu(A_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

d) Wenn $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, und $\mu(A_1) < \infty$, dann gilt

$$\mu(A_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

Beweis. a) Es gilt: $B = A \dot{\cup} B \setminus A$ (beachte: $A \subset B$). Dann folgt

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

b) Setze $B_1 := A_1$, $B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ für $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt $B_k \cap B_j = \emptyset \ \forall j < k \Rightarrow \{B_j, j \in \mathbb{N}\}$ ist disjunkt.

Ferner gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, da $B_k \subset A_k$ und jedes $x \in A_k$ in einem B_j , $j \in \mathbb{N}$, enthalten ist. Somit gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) \stackrel{(M2)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \stackrel{a)}{B_k \subset A_k}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

c) Nach Voraussetzung gilt nun in a), dass $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, $k \geq 2$.

Ferner gilt $A_n = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$. Wie in b) folgt dann

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \\ &\stackrel{(M2)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Somit folgt c).

□

1.2 Das Lebesgue-Maß

Ansatz: Für $I = (a, b] \subset \mathbb{R}^d$ setze:

$$\lambda(I) := \lambda_d(I) := (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \quad (1.2)$$

Setze ferner $\mathcal{J}_d := \{(a, b] \subset \mathbb{R}^d : a \leq b\}$. Beachte: $\sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$ ([Satz 1.9](#)).

Ziel: Setze λ_d von \mathcal{J}_d auf \mathcal{B}_d fort.

1. Schritt

Die Menge der Figuren ist

$$\mathcal{F}_d := \left\{ A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ mit } n \in \mathbb{N}, I_1, \dots, I_n \in \mathcal{J}_d \right\}.$$

Beachte: $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{F}_d \subset \sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$. Mit [Lem 1.6](#) folgt dann $\sigma(\mathcal{F}_d) = \mathcal{B}_d$.

Lemma 1.15. *Seien $I, I' \in \mathcal{J}_d$. Dann gelten*

- a) $I \cap I' \in \mathcal{J}_d$.
- b) $I \setminus I'$ ist eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus $\mathcal{J}_d \Rightarrow I \setminus I' \in \mathcal{F}_d$.
- c) Jedes $A \in \mathcal{F}_d$ ist eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus \mathcal{J}_d .
- d) \mathcal{F}_d ist ein Ring, d.h. es gilt für alle $A, B \in \mathcal{F}_d$
 - (R1) $\emptyset \in \mathcal{F}_d$
 - (R2) $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$
 - (R3) $A \cup B \in \mathcal{F}_d$.

Beweis. a) Sei $I = (\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times (\alpha_d, \beta_d]$, $I' = (\alpha'_1, \beta'_1] \times \dots \times (\alpha'_d, \beta'_d]$. Dann folgt $I \cap I' = (\overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1}] \times \dots \times (\overline{\alpha_d}, \overline{\beta_d}]$ mit:
 $\overline{\alpha_k} = \max\{\alpha_k, \alpha'_k\}$, $\overline{\beta_k} = \min\{\beta_k, \beta'_k\}$, wobei $I \cap I' = \emptyset$, wenn ein $\overline{\alpha_k} \geq \overline{\beta_k}$. Also $I \cap I' \in \mathcal{J}_d$.

- b) (IA): Die Behauptung ist klar für $d = 1$.
- (IV): Die Behauptung gelte für ein $d \geq 2$.
- (IS): Seien $I, I' \in \mathcal{J}_{d+1}$. Dann gibt es $I_1, I'_1 \in \mathcal{J}_1$ und $I_2, I'_2 \in \mathcal{J}_d$ mit

$$\begin{aligned} I &= I_1 \times I_2, \quad I' = I'_1 \times I'_2 \\ \Rightarrow I \setminus I' &= ((I_1 \setminus I'_1) \times I_2) \cup ((I_1 \cap I'_1) \times (I_2 \setminus I'_2)). \end{aligned}$$

Nach (IV) ist dies eine disjunkte Vereinigung $\hat{I}_k \in \mathcal{J}_{d+1}$.

- c) (IA): Die Behauptung ist klar, wenn $A = I_1$ für ein $I_1 \in \mathcal{J}_d$.
- (IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung für alle $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ mit beliebigen $I_j \in \mathcal{J}_d$.
- (IS): Sei nun $A = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j$ für beliebige $I_j \in \mathcal{J}_d$
- ^(IV) \Rightarrow Es existieren disjunkte $I'_1, \dots, I'_n \in \mathcal{J}_d$ mit $\bigcup_{j=1}^n I_j = \biguplus_{k=1}^n I'_k$.

$$\Rightarrow A = I_{n+1} \cup \biguplus_{k=1}^n I'_k = I_{n+1} \cup \biguplus_{k=1}^n \underbrace{(I'_k \setminus I_{n+1})}_{\substack{\text{b) disjunkte, endliche} \\ \text{Vereinigung von } I \text{ in } \mathcal{J}_d}}.$$

d) (R1) gilt, da $\emptyset = (a, a] \in \mathcal{F}_d$.

(R3) gilt nach Definition von \mathcal{F}_d .

Zu (R2): Seien $A, B \in \mathcal{F}_d$, also $A = \bigcup_{j=1}^n I_j, B = \bigcup_{k=1}^m I'_k$ für beliebige $I_j, I'_k \in \mathcal{F}_d, n, m \in \mathbb{N}$. Sei m fest aber beliebig. Induktion über n :

(IA): Sei $n = 1$. Dann gilt $B \setminus A = \bigcup_{k=1}^m \underbrace{I'_k \setminus I_1}_{\in \mathcal{F}_d \text{ nach b)}}$.

(IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$ für alle obigen A und B .

(IS): Sei nun $A' = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = A \cup I_{n+1}$ (für $I_j \in \mathcal{F}_d$). Dann gilt6

$$B \setminus A' = B \setminus (A \cup I_{n+1}) = \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{F}_d \text{ nach (IV)}} \setminus I_{n+1} \Rightarrow B \setminus A' \in \mathcal{F}_d.$$

□

Schritt 2: Fortsetzung von λ_d aus (1.2) auf \mathcal{F}_d

Idee: TODO BILD

Lemma 1.16. Seien $A = \biguplus_{j=1}^n I_j = \biguplus_{k=1}^m I'_k$ für disjunkte $I_j \in \mathcal{J}_d$ ($j = 1, \dots, n$) und disjunkte $I'_k \in \mathcal{J}_d$ ($k = 1, \dots, m$). Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_d(I'_k).$$

Beweis. 1) Sei $d = 2, I = (a, b] \times (c, d], \alpha \in (a, b]$. Dann folgt $I = ((a, \alpha] \times (c, d]) \cup ((\alpha, b] \times (c, d]) = I' \cup I''$.

Ferner $\lambda(I) \stackrel{(1.2)}{=} (b-a) \cdot (d-c) = ((b-\alpha) + (\alpha-a)) \cdot (d-c) \stackrel{(1.2)}{=} \lambda(I') + \lambda(I'')$.

Genauso: Dies gilt auch für $d \geq 3$ und für Zerlegungen in der k -ten Koordinate. Per Induktion folgt: Wenn man ein $I \in \mathcal{J}_d$ mit endlich vielen Zwischenstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in Intervalle $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_l$ zerlegt, dann gilt: $\lambda_d(I) = \lambda_d(\tilde{I}_1) + \dots + \lambda_d(\tilde{I}_l)$.

TODO: BILD

2) Setze $I''_{jk} = I_j \cap I'_k \in \mathcal{J}_d$ ($j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$). Die I''_{jk} sind per Definition disjunkt und $I_j = \bigcup_{k=1}^m I''_{jk}, I'_k = \bigcup_{j=1}^n I''_{jk}$. (*)

Zerlege alle I''_{jk} weiter durch Schneiden mit allen Hyperebenen, auf denen Seiten eines der I''_{jk} liegen.

Erhalte dabei disjunkte $\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_l \in \mathcal{J}_d$, wobei jedes \hat{I}_i in genau einem I''_{jk} und damit in genau einem I_j und genau einem I'_k liegt. Weiter werden alle I_j und alle I'_k durch die jeweils in ihnen liegenden \hat{I}_k wie in 1) zerlegt. Damit gilt:

$$\sum_{j=1}^n \lambda(I_j) \stackrel{1)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i: \hat{I}_i \subset I_j} \lambda(\hat{I}_i) = \sum_{i=1}^l \lambda(\hat{I}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j: \hat{I}_j \subset I'_k} \lambda(\hat{I}_j) \stackrel{1)}{=} \sum_{k=1}^m \lambda(I'_k)$$

□

Für $A \in \mathcal{F}_d$ setze

$$\lambda(A) := \lambda_d(A) := \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j), \quad (1.3)$$

wobei $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ für disjunkte $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{J}_d$. Nach [Lem 1.16](#) definiert dies eine Abbildung $\lambda_d : \mathcal{F}_d \rightarrow \mathbb{R}_+$. Seien $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$, $B = \bigcup_{k=1}^m I'_k$ für disjunkte $I_j, I'_k \in \mathcal{J}_d$ und es sei $A \cap B = \emptyset$. Setze

$$I''_i := \begin{cases} I_i, & i = 1, \dots, n \\ I'_i, & i = n+1, \dots, n+m \end{cases}.$$

Dann sind die I''_j disjunkt und es folgt

$$\lambda_d(A \cup B) \stackrel{(1.3)}{=} \sum_{i=1}^{n+m} \lambda_d(I''_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) + \sum_{k=1}^m \lambda_d(I'_k) \stackrel{(1.3)}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B).$$

Per Induktion folgt für disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_d$, dass

$$\lambda_d(A \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n) = \lambda_d(A_1) + \dots + \lambda_d(A_n). \quad (1.4)$$

Weiter gilt nach [Lem 1.15](#) für $A, B \in \mathcal{F}_d$ und ein $I \in \mathcal{J}_d$ mit $A, B \subset I$, dass

$$\begin{aligned} A \cap B &= I \cap ((I^c \cup A) \cap (I^c \cup B)) = I \cap ((I \cap A^c) \cup (I \cap B^c))^c \\ &= I \setminus ((I \setminus A) \cup (I \setminus B)) \in \mathcal{F}_d \end{aligned} \quad (1.5)$$

Wenn $A \subset B$, dann gilt

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d(B). \quad (1.6)$$

(Beweis genau wie in 1.14a))

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \lambda_d(A \cup B) &= \lambda_d(A \cup B \setminus A) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.14}}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B \setminus A) \stackrel{(1.6)}{\leq} \lambda_d(A) + \lambda_d(B). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Satz 1.17. Die Abbildung $\lambda_d : \mathcal{F}_d \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist ein Prämaß auf dem Ring \mathcal{F}_d , d.h es gelten:

(M1) $\lambda_d(\emptyset) = 0$

(M2*) Für disjunkte $A_j \in \mathcal{F}_d$, $j \in N$ mit $A := \biguplus_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}_d$ gilt

$$\lambda_d(A) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_d(A_j).$$

Beweis. (M1) folgt aus [\(1.2\)](#), da $\emptyset = (a, a]$.

- 1) Beh1: Seien $B_n \in \mathcal{F}_d$ mit $B_{n+1} \subset B_n$ ($n \in \mathbb{N}$) und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Dann gilt $\lambda_d(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
(Übung: 2.1, Beh1, [Lem 1.15](#) und (1.4) \Rightarrow [Satz 1.17](#))

- 2) Beweis von Beh1:

Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} \exists C_n \in \mathcal{F}_d$ mit $\overline{C_n} \subset B_n \subset B_1$ und

$$\lambda_d(\underbrace{B_n \setminus C_n}_{\in \mathcal{F}_d}) \leq 2^{-n} \cdot \epsilon.$$

(Ersetze in allen Teilintervallen von B_n der Form $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ a_j durch $a_j + \delta_n(\epsilon)$ für ein genügend kleines $\delta_n(\epsilon) \geq 0$ und $\delta_n(\epsilon) = 0$ falls ein $a_j = b_j$)

Da weiterhin $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{C_n} = \emptyset$, gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{C_n}^c = \mathbb{R}^d \Rightarrow \{\overline{C_n}^c, n \in \mathbb{N}\}$ ist eine offene Überdeckung von $\overline{B_1}$, wobei $\overline{B_1}$ beschränkt und abgeschlossen ist. Dann folgt mit Heine-Borel: $\exists n_1 < \cdots < n_m$ mit $\overline{B_1} \subset \overline{C_{n_1}}^c \cup \cdots \cup \overline{C_{n_m}}^c \Rightarrow \overline{C_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{n_m}} \subset \overline{B_1}^c$. Mit $C_{n_j} \subset B_1$ folgt dann $\overline{C_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{n_m}} = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{j=1}^n \overline{C_j} = \emptyset \forall n \geq n_m =: N_\epsilon$ (*)
Setze $D_n := \bigcap_{j=1}^n C_j \in \mathcal{F}_d$ (nach (1.5)), $n \in \mathbb{N}$.

Beh2: $\lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq (1 - 2^{-n}) \cdot \epsilon$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Nach (*) gilt: $D_n = \emptyset$ für $n \geq N_\epsilon$. Beh2 zeigt: $\lambda_d(B_n) = \lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq (1 - 2^{-n}) \cdot \epsilon < \epsilon \forall n \geq N_\epsilon$. Damit ist der Beweis von [Satz 1.17](#) erbracht.

- 3) Beweis von Beh2:

(IA): Beh2 gilt für $n = 1$ nach der Ungleichung zu Beginn von 2).

(IV): Beh2 gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS): Es gilt mit $D_{n+1} = D_n \cap C_{n+1}$

$$\begin{aligned} \lambda_d(B_{n+1} \setminus D_{n+1}) &= \lambda_d(B_{n+1} \setminus (D_n \cap C_{n+1})) \\ &= \lambda_d((B_{n+1} \setminus D_n) \cup (B_{n+1} \setminus C_{n+1})) \\ &\stackrel{(1.7)}{\leq} \lambda(B_{n+1} \setminus D_n) + \lambda(B_{n+1} \setminus C_{n+1}) \\ &\stackrel{(1.6)}{\leq} \lambda(B_n \setminus D_n) + \lambda(B_{n+1} \setminus C_{n+1}) \\ &\stackrel{(IV)}{\leq} (1 - 2^{-n}) \cdot \epsilon + 2^{-(n+1)} \epsilon = (1 - 2^{-(n+1)}) \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

□

Schritt 3: Fortsetzung von λ_d auf \mathcal{B}_d

Theorem 1.18 (Caratheodory, Fortsetzungssatz, 1914). Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß.

Dann existieren eine σ -Algebra $\mathcal{A}(\mu)$ auf X und ein Maß $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{A}(\mu)$, sodass $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}(\mu)$ und $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$ gelten. Also ist $\bar{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ (vgl. Beispiel 1.13c)).

Theorem 1.19 (Eindeutigkeitssatz). Seien $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ und μ, ν Maße auf \mathcal{A} mit $\mu(E) = \nu(E) \forall E \in \mathcal{E}$. Weiter gelte:

A) $E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{E}$ (\cap -stabil)

B) $\exists E_n \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E_n) < \infty$, $E_n \subset E_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$, und $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$

Dann gilt $\mu = \nu$ (auf \mathcal{A}).

Bemerkung. a) B) ist nötig.

Bsp: Seien μ, ν Maße auf X mit $\mu(X) = 1$, $\nu(X) = 0$, $\mathcal{E} = \{\emptyset\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \mu \neq \nu$, aber $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset)$, d.h. A) gilt.

b) A) ist nötig.

Bsp: Seien $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) = \sigma(\mathcal{E})$,
 $\mathcal{E} = \{X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$ und μ, ν auf $\mathcal{P}(X)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mu(\{a\}) &= \mu(\{d\}) = \nu(\{b\}) = \nu(\{c\}) = 1 \\ \mu(\{b\}) &= \mu(\{c\}) = \mu(\{a\}) = \mu(\{d\}) = 2\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu \neq \nu$, aber $\mu(X) = \nu(X) = 6$, $\mu(E) = \nu(E) \forall E \in \mathcal{E} \setminus \{X\}$, d.h. B) gilt ohne Monotonie.

Theorem 1.20. Es gibt genau eine Fortsetzung von λ_d aus (1.2) auf \mathcal{B}_d . Man schreibt λ_d (oder λ) für diese Fortsetzung und nennt sie Lebesgue-Maß.

Beweis. Aus Lem 1.15 und Satz 1.17 folgt: λ_d aus (1.2) hat eine Fortsetzung zu einem Prämaß λ_d auf dem Ring \mathcal{F}_d . Da $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{F}_d \subset \mathcal{B}_d$, liefern Satz 1.9 und Lem 1.6, dass $\sigma(\mathcal{F}_d) = \sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$. Aus Thm 1.18 folgt dann die Existenz der Fortsetzung von λ_d auf \mathcal{B}_d . Ferner folgt aus (1.5), dass \mathcal{F}_d \cap -stabil ist. Da die Folge $E_n := (-n, n]^d$ B) aus Thm 1.19 erfüllt (wegen (1.2)), liefert Thm 1.19 die Eindeutigkeit der Fortsetzung. \square

Bemerkung 1.21. a) Sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$. Gemäß Beispiel 1.13 und Korollar 1.11 definiert die Einschränkung von λ_d auf $\mathcal{B}(X) = \{\mathcal{A} \subset X : \mathcal{A} \in \mathcal{B}_d\} \subset \mathcal{B}_d$ ein Maß, das wir auch mit λ_d bezeichnen und Lebesgue-Maß nennen.

$$\text{b) } \lambda_1([a, b]) = \lambda_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right]\right) \stackrel{\text{Satz 1.14}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lambda_1\left(\left(a - \frac{1}{n}, b\right]\right)}_{\stackrel{1.2}{=} b - a + \frac{1}{n}} = b - a$$

(Entsprechend für $d \geq 2$ und andere Intervalltypen.)

Sei $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow \lambda_1(\mathbb{Q}) = \lambda_1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}\right) \stackrel{\text{Def 1.12}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_1([q_n, q_n])}_{=0} = 0$$

- c) Sei $H := \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\} \Rightarrow H$ ist abgeschlossen, also $H \in \mathcal{B}_d$. Da $H = \bigcup_{n=1}^{\infty}([-n, n]^{d-1} \times \{0\})$ und $\lambda_d([-n, n]^{d-1} \times \{0\}) = 0$ (vgl. b)), gilt $\lambda_d(H) = \lambda_d(\bigcup_{n=1}^{\infty}([-n, n]^{d-1} \times \{0\})) \stackrel{\text{Satz 1.14}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_d([-n, n]^{d-1} \times \{0\}) = 0$

Zum Fortsetzungssatz

Sei $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf dem Ring \mathcal{R} und $A \subset X$. Setze

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : B_k \in \mathcal{R} \text{ für } n \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right\} \quad (1.8)$$

(Dabei ist $\inf \emptyset := \infty$.)

Ferner:

$$\mathcal{A}(\mu) := \{A \subset X : \forall B \subset X \text{ gilt } \mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)\} \quad (1.9)$$

Lemma 1.22. μ^* ist ein äußeres Maß, d.h.:

- a) $\mu^*(\emptyset) = 0$
- b) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- c) $A_j \subset X, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$

Beweis. a) folgt mit $B_1 = B_2 = \dots = \emptyset$.

b) gilt, da in (1.8) die B_k für B auch für A ($\subset B$) genommen werden können.

c) Die Behauptung gilt, wenn ein $\mu^*(A_j) = \infty$. Andernfalls wähle $\epsilon > 0$. Dann folgt mit (1.8):

$$\begin{aligned} \exists B_{jk} \in \mathcal{R} \ (j, k \in \mathbb{N}) \text{ mit } A_j &\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}, \\ \mu^*(A_j) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{jk}) - 2^{-j} \cdot \epsilon \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} B_{jk} \end{aligned}$$

und

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \stackrel{(1.8)}{\leq} \sum_{j,k=1}^{\infty} \mu^*(B_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\mu^*(A_j) + 2^{-j} \cdot \epsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon.$$

Grenzwertbildung für $\epsilon \rightarrow 0$ liefert die Behauptung. □

Lemma 1.23. $\mathcal{A}(\mu)$ ist eine σ -Algebra und die Einschränkung $\bar{\mu}$ von μ^* auf $\mathcal{A}(\mu)$ ist ein Maß.

Beweis von Thm 1.18. Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$.

- 1) Da $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$, gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.
 Wenn $\mu^*(A) = \infty$, dann gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$. Sei also $\mu^*(A) < \infty$.
 Wähle $\epsilon > 0$. Dann existieren $A_j \in \mathcal{R}$ ($j \in \mathbb{N}$) mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Ferner gilt

$$A = A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A \cap A_j}_{\in \mathcal{R} \text{ nach Def 1.5}}.$$

Damit folgt

$$\mu(A) \stackrel{\text{wie Satz 1.14}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap A_j) \stackrel{\text{wie Satz 1.14}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Mit $\epsilon \rightarrow 0$ folgt dann $\mu(A) = \mu^*(A) \forall A \in \mathcal{R}$.

- 2) Zeige: $A \in \mathcal{A}(\mu)$.
 Denn dann folgt mit [Lem 1.6](#) $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}(\mu)$.

Sei $B \subset X$. Wenn $\mu^*(B) = \infty$, erfüllen A und B die Ungleichung in [\(1.9\)](#). Sei also $\mu^*(B) < \infty$. Wähle $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists A_j \in \mathcal{R}$ ($j \in \mathbb{N}$) mit

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(B) + \epsilon.$$

Daraus folgt $B \cap A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap A}_{\in \mathcal{R}}$. Nun gilt außerdem

$$B \cap A^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap A^c}_{\in \mathcal{R}}. \quad (*)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \epsilon + \mu^*(B) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu(A_j \cap A) + \mu(A_j \cap A^c)) \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c). \\ &\stackrel{(1.8)}{\geq} \end{aligned}$$

Mit $\epsilon \rightarrow 0$ folgt [\(1.9\)](#), also $A \in \mathcal{A}(\mu)$ ($\forall A \in \mathcal{R}$).

□

Satz 1.24. Sei $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}_d$. Dann gelten:

- a) $x + A \in \mathcal{B}_d$
- b) $\lambda_d(A) = \lambda_d(x + A)$
- c) Wenn μ ein Maß auf \mathcal{B}_d ist, dass b) erfüllt, dann:
 $\mu(B) = \mu((0, 1]^d) \cdot \lambda_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}_d$

Beweis. a) Seien $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}_d$ fest. Setze $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}_d \text{ mit } x + B \in \mathcal{B}_d\}$.

Zeige: $A \in \mathcal{A}$. Klar: $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{A}$, $\mathbb{R}^d \in \mathcal{B}_d$.

Wenn $B \in \mathcal{A}$, dann $x + B^c = \{y \in \mathbb{R}^d : y = x + d \text{ für ein } d \notin B\} \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra.}$

Wenn $B_j \in \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{N}$), dann $x + B_j \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} (x + B_j) = x + \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra.}$

Lem 1.6 sagt uns: $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{J}_d) \subset \mathcal{A}$. Damit folgt $A \in \mathcal{A}$.

- b) Sei $x \in \mathbb{R}^d$ fest. Setze $\mu(B) = \lambda_d(x + B) \quad \forall B \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \mu(\emptyset) = \lambda_d(\emptyset) = 0 \Rightarrow (M1)$.

Seien $B_j \in \mathcal{B}_d$ disjunkt ($j \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

$$\mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j) = \lambda_d(x + \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j) = \lambda_d(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (x + B_j))$$

$$\stackrel{\lambda_d \text{ ist Maß}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(x + B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \Rightarrow (M2) \text{ gilt für } \mu.$$

Sei $I \in \mathcal{J}_d \Rightarrow \mu(I) = \lambda_d(x + I) \stackrel{(1.2)}{=} \lambda_d(I) \Rightarrow \mu(I) = \lambda_d(I) \quad \forall I \in \mathcal{J}_d$. Da \mathcal{J}_d A), B) in **Thm 1.19** erfüllt und $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{J}_d)$, folgt mit **Thm 1.19**, dass $\mu = \lambda_d$ auf \mathcal{B}_d gilt.

- c) (Skizze für $d=1$). Sei μ wie in Behauptung c) und $c := \mu((0, 1]) \in [0, \infty)$. Dann gilt

$$c = \mu((0, \frac{1}{2}]) + \mu((\frac{1}{2}, 1]) \stackrel{\text{nach Vor.}}{=} 2 \cdot \mu((0, \frac{1}{2}])$$

$$\Rightarrow \mu((0, \frac{1}{2}]) = c \cdot \lambda_1((0, \frac{1}{2}])$$

Induktiv zeigt man: $\mu((0, 2^{-n}]) = c \cdot \lambda_1((0, 2^{-n}])$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Durch Verschieben und disjunkte Vereinigungen folgt $\mu(I) = c \cdot \lambda_1(I)$ für alle Intervalle der Form $I = (a, b]$ mit $a, b = m \cdot 2^{-n}$ für gewisse $m, n \in \mathbb{Z}$

Das System dieser Intervalle erzeugt \mathcal{B}_1 (Beweis von **Satz 1.9**) und erfüllt A), B) in **Thm 1.19**. Damit folgt die Behauptung. □

Theorem 1.25. λ_d ist regulär, d.h.: $\forall A \in \mathcal{B}_d$ gelten:

- a) $\lambda_d(A) = \inf\{\lambda_d(O) : O \text{ offen, } A \subset O\}$
- b) $\lambda_d(A) = \sup\{\lambda_d(K) : K \text{ kompakt, } K \subset A\}$

Beweis. a) “ \leq “ folgt aus der Monotonie von λ_d

“ $=$ “ klar. wenn $\lambda_d(A) = \infty$. Sei also $\lambda_d < \infty$. Wähle $\epsilon > 0$. Nach (1.8) gilt:

$$\exists I_j \in \mathcal{J}_d \ (j \in \mathbb{N}) \text{ mit } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(I_j) \leq \underbrace{\lambda_d(A)}_{=\lambda_d^*(A)} + \epsilon \quad (*)$$

Wie im Beweis von [Satz 1.17](#) findet man offene O_j mit $I_j \subset O_j$ und $\lambda_d(O_j) \leq \lambda_d(I_j) + 2^{-j} \cdot \epsilon$ ($\forall j \in \mathbb{N}$) (**)

$\Rightarrow O := \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ ist offen und $A \overset{(*)}{\subset} \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$.

$$\Rightarrow \lambda_d(O) \overset{\text{Satz 1.14}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(O_j) \overset{(**)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(I_j) + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \cdot \epsilon}_{=2} \overset{(*)}{\leq} \lambda_d(A) + 2 \cdot \epsilon.$$

Mit $\epsilon \rightarrow 0$ folgt a).

b) “ \geq “ folgt aus der Monotonie von λ_d . Sei $A \in \mathcal{B}_d$.

1) Sei zuerst $A \subset \overline{B}(0, r) =: B$ für ein $r > 0$. Sei $\epsilon > 0$. Nach a) für $B \setminus A$:

\exists offenes O mit $B \setminus A \subset O$ und $\lambda_d(0) \leq \lambda_d(B \setminus A) + \epsilon \overset{\text{Satz 1.14}}{=} \lambda_d(B) - \lambda_d(A) + \epsilon$ (+)

Daraus folgen:

– $K := B \setminus O = B \cap O^c$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

– $K \subset B \cap (B \setminus A)^c = B \cap (B \cap A^c)^c = A$

$$- \lambda_d(B) \overset{B \subset K \cup O}{\leq} \lambda_d(K \cup O) \overset{\text{Satz 1.14}}{\leq} \lambda_d(K) + \lambda_d(O) \overset{(+)}{\leq} \lambda_d(K) + \lambda_d(B) - \lambda_d(A) + \epsilon$$

alles in $\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_d(A) \leq \lambda_d(K) + \epsilon$. Damit folgt b) für beschränkte A .

2) Sei $A \in \mathcal{B}_d$ beliebig. Setze $A_n := A \cap \overline{B}(0, n)$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow A_n \subset A_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n = A$. Mit 1) folgt:

$\exists K_n$ kompakt, mit $K_n \subset A_n$ und $\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n}$.

Durch Grenzwertbildung für $n \rightarrow \infty$ folgt mit [Satz 1.14](#):

$\lambda_d(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_d(A)$, weiter $K_n \subset A$.

□

Bemerkung. Der Beweis von [Thm 1.25a](#)) zeigt, dass man O als eine Vereinigung offener Intervalle nehmen darf.

Auswahlaxiom. Sei M eine nichtleeres System nichtleerer Mengen $A \subset X$. Dann gibt es eine Abbildung $\phi : M \rightarrow \bigcup_{A \in M} A \subset X$ mit $\phi(A) \in A \forall A \in M$.

Satz 1.26. $\exists \Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{B}_d$.

Beweis. Betrachte auf $(0, 1]^d$ die Äquivalenzrelation gegeben durch $X \sim Y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^d$. Sei $\Omega := \{\phi(A) : A \in M\}$, wobei M die Menge der Äquivalenzklasse zu \sim ist und ϕ aus dem Auswahlaxiom. Damit folgt: $\Omega \subset (0, 1]^d$.

Sei $\{q_1, q_2, \dots\} := \mathbb{Q}^d \cap [-1, 1]^d$. Dann folgt

$$(0, 1]^d \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + \Omega) \subset [-1, 2]^d. \quad (*)$$

Diese Vereinigung ist disjunkt, da jedes $x \in (0, 1]^d$ in genau einer Äquivalenzklasse liegt.

Annahme: $\Omega \in \mathcal{B}_d$.

Dann $3^d = \lambda_d([-1, 2]^d) \stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \lambda_d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} q_n + \Omega) \stackrel{(\text{M2})}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(q_n + \Omega) \stackrel{\text{Satz 1.24}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(\Omega) \Rightarrow \lambda_d(\Omega) = 0$

Aber: $1 = \lambda_d((0, 1]^d) \stackrel{(*)}{\leq} \lambda_d(\bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + \Omega)) \stackrel{\text{wie oben}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(\Omega) = 0$, was ein Widerspruch ist. \square