

13 Übung vom 21.07.

45. Aufgabe

a) Es sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1, y > -1\}$.

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung von f sind:

$$\begin{aligned} f_{11} &= -a(a-1)(x+1)^{a-2}(y+1)^b \\ f_{22} &= -b(b-1)(x+1)^a(y+1)^{b-2} \\ f_{12} = f_{21} &= -ab(x+1)^{a-1}(y+1)^{b-1} \end{aligned}$$

Es gilt nach Vorlesung:

$$\begin{aligned} f \text{ ist auf } D \text{ konvex} &\Leftrightarrow A := ((f_{ij})) \text{ ist positiv semi-definit} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \text{EW von } A \text{ sind größergleich Null} \\ &\Leftrightarrow \text{Spur } A \geq 0 \text{ und } \det A \geq 0 \\ &\Leftrightarrow f_{11} + f_{22} \geq 0, f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow f_{11} \geq 0, f_{22} \geq 0, f_{11}f_{22} \geq f_{12}^2 \end{aligned}$$

[(*): A symmetrisch $\Rightarrow A$ diagonalisierbar]

- $f_{11} \geq 0 \Leftrightarrow -a(a-1) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$
- $f_{22} \geq 0 \Leftrightarrow b \leq 1$
- $f_{11}f_{22} \geq f_{12}^2 \Leftrightarrow ab(a-1)(b-1) \geq a^2b^2 \Leftrightarrow a+b \leq 1$

Also ist f auf D konvex genau dann, wenn $a+b \leq 1$. [Beachte: $a, b > 0$]

b) Es liegt ein konvexes Optimierungsproblem vor.

$(x^0, y^0) > 0$ und zulässig.

Wir definieren $g(x, y) = x + 2y - 2$.

Wir zeigen nun: Es existiert ein $u^0 \geq 0$, so dass (x^0, y^0, u^0) ein Sattelpunkt von

$$\Phi(x, y, u) = f(x, y) + u \cdot g(x, y)$$

ist.

Die Slater-Bedingung (S) ist erfüllt (z.B. durch $(0,0)$).

Also ist (x^0, y^0) genau dann Lösung, wenn ein $u^0 \geq 0$ existiert mit

$$\Phi(x^0, y^0, u) \leq \Phi(x^0, y^0, u^0) \leq \Phi(x, y, u^0) \quad \text{für } x, y, u \geq 0$$

Man rechnet nach: $g(x^0, y^0) = 0$.

Also ist die linke Ungleichung immer erfüllt.

Wir definieren $h(x, y) := \Phi(x, y, u^0)$ mit u^0 fest.

Es gilt: h ist konvex und differenzierbar in D .

Damit gilt:

$$h(x, y) - h(x^0, y^0) \geq \langle (x, y) - (x^0, y^0), \nabla h(x^0, y^0) \rangle$$

$[x, y \in D \text{ beliebig}]$

D.h.: Ist $\nabla h(x^0, y^0) = 0$, so ist (x^0, y^0) Minimum von h auf D .

Es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla h(x^0, y^0) = 0 &\Leftrightarrow f_1(x^0, y^0) + u^0 = 0 \\ &\quad f_2(x^0, y^0) + 2u^0 = 0 \end{aligned}$$

$$f_1(x^0, u^0) = -a^a \left(\frac{b}{2}\right)^b \left(\frac{5}{a+b}\right)^{a+b-1} \stackrel{!}{=} -u^0$$

$$f_2(x^0, u^0) = 2 \cdot \left(-a^a \left(\frac{b}{2}\right)^b \left(\frac{5}{a+b}\right)^{a+b-1}\right) \stackrel{!}{=} -2u^0$$

Setzen wir

$$u^0 = a^a \left(\frac{b}{2}\right)^b \left(\frac{5}{a+b}\right)^{a+b-1}$$

so ist $\nabla h(x^0, y^0) = 0$.

Damit ist (x^0, y^0, u^0) ein Sattelpunkt von Φ , also (x^0, y^0) Lösung von (KP).

46. Aufgabe

$$\nabla f(x) = p + 2Cx$$

Nach Vorlesung gilt:

$x^0 \geq 0$ ist Lösung von (QP) $\Leftrightarrow \exists u^0 \geq 0$:

$$\begin{aligned} (i) \quad \nabla f(x^0) + A^T u^0 &\geq 0 \\ \langle \nabla f(x^0) + A^T u^0, x^0 \rangle &= 0 \\ (ii) \quad Ax^0 &= b \end{aligned}$$

Setzen wir $\nabla f(x) = p + 2Cx$ ein, so erhalten wir:

$x^0 \geq 0$ ist Lösung von (QP) $\Leftrightarrow \exists u^0 \geq 0, w^0 \geq 0$:

$$\begin{aligned} (i) \quad 2Cx^0 + A^T u^0 - w^0 &= -p \\ \langle w^0, x^0 \rangle &= 0 \\ (ii) \quad Ax^0 &= b \end{aligned}$$

Und wir haben die Aufgabe gezeigt!

$[w^0 = \nabla f(x^0) + A^T u^0 \text{ Schlupfvariable}]$

47. Aufgabe

Musterlösung online!