13 Konfidenzbereiche

Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ statistisches Modell, $g : \Theta \to \mathbb{R}^s$.

13.1 Definition

Sei $\alpha \in (0,1)$. Eine Abbildung $C : \mathfrak{X} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^s)$ heißt **Konfidenzbereich** für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1-\alpha$ genau dann, wenn

(1) $\{x \in \mathfrak{X} : \ C(x) \ni g(\vartheta)\} \in \mathcal{B} \quad \forall\, \vartheta \in \Theta$

(2) $P_\vartheta\left(\{x \in \mathfrak{X} : \ C(x) \ni g(\vartheta)\}\right) \geq 1-\alpha \quad \forall\, \vartheta \in \Theta.$

Falls $X : \Omega \to \mathfrak{X}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung P_ϑ ist, so die zweite Bedingung gleichbedeutend mit

$$P_\vartheta\left(C(X) \ni g(\vartheta)\right) \geq 1-\alpha \quad \forall\, \vartheta \in \Theta.$$

Falls $s = 1$ und $C(x)$ für alle $x \in \mathfrak{X}$ ein Intervall ist, so heißt $C(\,\cdot\,)$ ein **Konfidenzintervall**.[36]

Beispiel:
$X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$, $g(\vartheta) = \mu$

$$C(X) = [\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}]$$

ist Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ nach 2.4.

13.2 Bemerkung (Pivot-Methode)

Praktische Berechnung von Konfidenzintervallen:
Finde Funktion k so, dass die Verteilung von $k(X, \vartheta)$ unabhängig von ϑ ist, d.h., dass $H(x) := P_\vartheta(k(X, \vartheta) \leq x)$ unabhängig von ϑ ist.

Dann existieren Konstanten a,b:

$$P_\vartheta(a \leq k(X, \vartheta) \leq b) \geq 1-\alpha \ \forall \vartheta \in \Theta$$

[36] Anmerkung: Ermitteln wir z.B. das 95%-Konfidenzintervall für den wahren Erwartungswert einer Population, dann bedeutet dies, dass wir bei durchschnittlich 5 von 100 gleichgroßen Zufallsstichproben ein Konfidenzintervall ermitteln, das den Erwartungswert nicht enthält.

Falls man das Ereignis $\{a \leq k(X,\vartheta) \leq b\}$ umschreiben kann als $\{U(X) \leq g(\vartheta) \leq O(X)\}$, so ist $[U(X), O(X)]$ Konfidenzintervall für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1-\alpha$.

Im Beispiel oben:
Verteilung von

$$k(X,\vartheta) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$$

unabhängig von $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$.
$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{S_n}$ ist Pivot für $g(\vartheta) = \mu$.
$[\{-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \leq k(X,\vartheta) \leq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\} \to C(X)$ im Beispiel oben]

Weiteres Beispiel:
$X_1, \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} U(0,\vartheta)$, $\vartheta > 0$, $g(\vartheta) = \vartheta$
MLE[37] von ϑ: $X_{(n)} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$

Verteilungsfunktion von $X_{(n)}$ ist $(\frac{x}{\vartheta})^n, 0 \leq x \leq \vartheta$
$\Rightarrow$ Verteilungsfunktion von $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$ ist $x^n, 0 \leq x \leq 1$, also ist $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$ Pivot für ϑ.

Wähle a,b so, dass

$$P_\vartheta(a \leq \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leq b) = b^n - a^n \overset{!}{=} 1-\alpha \ (\forall \vartheta \in \Theta)$$

Dann ist $[\frac{X_{(n)}}{b}, \frac{X_{(n)}}{a}]$ $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für ϑ.

Wie a und b wählen?

- Intervall $[a,b]$ „kleinstmöglich“ wählen
- andere Optimalitätsbegriffe

13.3 Zusammenhang zwischen Konfidenzintervallen und (nichtrandomisierten) Tests

1. $C(x)$ sei Konfidenzinterwall zum Niveau $1-\alpha$ für ϑ (d.h. $P_\vartheta(C(X) \ni \vartheta) \geq 1-\alpha \ \forall \vartheta \in \Theta$).
   Zu testen ist $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$.
   Definiere Test φ:
   $$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \ \vartheta_0 \notin C(x) \\ 0 & , \ \vartheta_0 \in C(x) \end{cases}$$

[37] ML-Schätzer (*Estimator*)

Umfang von φ:

$$E_{\vartheta_0}\varphi(x) = 1 - \underbrace{P_{\vartheta_0}(\vartheta_0 \in C(x))}_{\geq 1-\alpha} \leq \alpha$$

d.h. φ ist Niveau α-Test.

2. Umgekehrt sei für jedes $\vartheta_0 \in \Theta$ ein Niveau α-Test $\varphi_{\vartheta_0}(x)$ für obige Situation gegeben (d.h. $P_{\vartheta_0}(\varphi_{\vartheta_0}(X) = 0) \geq 1 - \alpha,\ \vartheta_0 \in \Theta$). Definiere $C^*(x) = \{\vartheta_0 : \varphi_{\vartheta_0}(x) = 0\}$

$$\Rightarrow P_\vartheta(C^*(X) \ni \vartheta) = P_\vartheta(\varphi_\vartheta(x) = 0) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

d.h. $C^*(X)$ ist $(1-\alpha)$-Konfidenzbereich für ϑ.

Beispiel (1 Stichproben-t-Test):

1. $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ: $[\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}]$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $\mu_0 \notin$ Konfidenzintervall.

$$\hat{=} |\mu_0 - \bar{x}_n| > \frac{s_n}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\hat{=} \frac{\sqrt{n}|\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

2. Umgekehrt:

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

Ablehnbereich für Test φ_{μ_0} von $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ für jedes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} C^*(x) &= \{\mu : \varphi_\mu(x) = 0\} \\ &= \{\mu : \frac{\sqrt{n}|\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\} \\ &= \{\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\} \end{aligned}$$

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ.

Bemerkungen:

(i) Es besteht also eine Dualität zwischen Signifikanztests und Konfidenzbereichen, allerdings nur, wenn eine ganze Schar von Hypothesen

$H_{\vartheta_0} : \vartheta = \vartheta_0$ getestet wird.
Bei Beschränkung auf einen Test (was bei praktischer Testdurchführung immer der Fall ist) ist der Test „weniger“ informativ.
[Allerdings: Bei Tests wird in der Praxis p-Wert (siehe Beispiel nach 11.4) angegeben $\Rightarrow$ andere Information als Konfidenzintervall].

(ii) UMP(U)-Tests führen auf Konfidenzbereiche, die gewisse (komplizierte) Optimalitätseigenschaften haben.
(Im Allgemeinen aber nicht kürzeste Konfidenzintervalle.)

13.4 Definition

Ist für jedes n die Abbildung $C_n : \mathfrak{X}_n \to \mathbb{R}^s$ ein Konfidenzbereich für $g(\vartheta)$, basierend auf $(X_1, \dots, X_n)$, und gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_\vartheta\left(\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathfrak{X}_n : \ C_n(x_1,\dots,x_n) \ni g(\vartheta)\}\right) \ = \ 1-\alpha$$

für alle $\vartheta \in \Theta$, so heißt die Folge (C_n) ein **asymptotischer Konfidenzbereich** für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1-\alpha$.

13.5 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} X,\ EX^2 < \alpha,\ F(x) = P(X \le x),\ \vartheta := F,$
$g(\vartheta) = \int x dF(x) = EX =: \mu$

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 := \mathrm{Var}(X)$$

ZGWS: $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_\vartheta(\underbrace{\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \le \mu \le \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}_{\text{asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau } 1-\alpha}) = 1-\alpha$$

13.6 Hilfssatz

$$Y \sim \mathcal{N}_k(0,\Sigma),\ \Sigma > 0 \quad \Longrightarrow \quad Y^T\Sigma^{-1}Y \sim \chi_k^2.$$

Beweis:

$$\Sigma^{-1/2}Y \sim \mathcal{N}_k(0, I_k) \quad \Rightarrow \quad \|\Sigma^{-1/2}Y\|^2 = Y^T\Sigma^{-1}Y \sim \chi_k^2.$$

13.7 Asymptotische Konfidenzbereiche in parametrischen Modellen

Seien $X_1 \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} f(\xi;\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ offen und f eine reguläre Dichte im $\mathbb{R}^s$ bezüglich μ ($= \lambda^s$ oder Zählmaß).

Sei $\hat{\vartheta}_n$ eine Schätzfolge für ϑ mit der Eigenschaft

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}_k(0, \Sigma(\vartheta)), \quad \vartheta \in \Theta \qquad (1)$$

wobei $\Sigma(\vartheta) > 0$ und $\Sigma(\,\cdot\,)$ stetig.

Aus (1) und Hilfssatz 13.6 folgt, dass

$$n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \quad \xrightarrow{D_\vartheta} \quad \chi^2_k, \quad \vartheta \in \Theta$$

das heißt

$$\lim_{n\to\infty} P_\vartheta \left(n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \leq \chi^2_{k;1-\alpha} \right) \quad = \quad 1 - \alpha \quad \forall\, \vartheta \in \Theta.$$

Da die Menge

$$\left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^k : (\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \leq \frac{\chi^2_{k;1-\alpha}}{n} \right\}$$

ein Ellipsoid in $\mathbb{R}^k$ mit Zentrum $\hat{\vartheta}_n$ ist, handelt es sich hier um einen elliptischen Konfidenzbereich für ϑ.

Falls $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so folgt aus (1), dass

$$\sqrt{n}(g(\hat{\vartheta}_n) - g(\vartheta)) \quad \xrightarrow{D_\vartheta} \quad \mathcal{N}(0, \sigma^2(\vartheta)),$$

wobei

$$\sigma^2(\vartheta) = g'(\vartheta)^T \Sigma(\vartheta) g(\vartheta)).$$

Somit gilt

$$\frac{\sqrt{n}(g(\hat{\vartheta}_n) - g(\vartheta))}{\sigma(\hat{\vartheta}_n)} \quad \xrightarrow{D_\vartheta} \quad \mathcal{N}(0, 1).$$

Mit $r_n = \sigma(\hat{\vartheta}_n) \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) / \sqrt{n}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} P_\vartheta \left(g(\hat{\vartheta}_n) - r_n \leq g(\vartheta) \leq g(\hat{\vartheta}_n) + r_n \right) \quad = \quad 1 - \alpha.$$

Man hat also einen asymptotischen Konfidenzbereich für $g(\vartheta)$ konstruiert.

13.8 Beispiele

a) $X_1, \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathrm{Bin}(1,p),\ 0 < p < 1,\ \vartheta = p,\ \hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$
ZGWS:
$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \underbrace{p(1-p)}_{=\Sigma(\vartheta)})$$
$g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(p) = \log \frac{p}{1-p}$ „logit“-Funktion
$g'(p) = \frac{1}{p(1-p)}$
$$\Rightarrow \sigma^2(p) = g'(p)^2\Sigma(p) = \frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$$
$$\Rightarrow \sqrt{n}(\log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} - \log \frac{p}{1-p}) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{1}{p(1-p)})$$
und
$$[\log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} - \frac{\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}},\ \log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} + \frac{\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}]$$
ist asymptotisches $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für $\log \frac{p}{1-p}$.

b) Konfidenzintervall für „log odds ratio“
$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bin}(1,p),\ Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Bin}(1,q)$
$$\Theta = \log \frac{\frac{p}{1-p}}{\frac{q}{1-q}},\ \Theta = 0 \Leftrightarrow p = q$$
siehe Übung

13.9 Beispiel

Sei $X_1, \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma),\ X_i = \begin{pmatrix} X_i^{(1)} \\ X_i^{(2)} \end{pmatrix},\ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$
Σ regulär, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix},\ \bar{X}_n = \begin{pmatrix} \bar{X}_n^{(1)} \\ \bar{X}_n^{(2)} \end{pmatrix}$ mit $\bar{X}_n^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{(k)}$,
$k = 1, 2$

<u>Σ bekannt:</u> $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}_2(0, \Sigma)$
$$\overset{13.6}{\Rightarrow} n(\bar{X}_n - \mu)^T\Sigma^{-1}(\bar{X}_n - \mu) \sim \chi_2^2$$
$$\Rightarrow P_\mu(\underbrace{n(\bar{X}_n - \mu)^T\Sigma^{-1}(\bar{X}_n - \mu) \le \chi^2_{2;1-\alpha}}_{\text{elliptischer } (1-\alpha)-\text{Konfidenzbereich für } \mu}) = 1 - \alpha$$

<u>Σ unbekannt:</u> Konsistenter Schätzer für Σ ist

$$\hat{\Sigma}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_n)^T$$

$\vartheta = (\mu, \Sigma)$, $\hat{\vartheta}_n = (\bar{X}_n, \hat{\Sigma}_n)$
Für $n > d(=2)$[38] ist $\hat{\Sigma}_n$ nicht singulär mit Wahrscheinlichkeit 1.

$$\Rightarrow n(\bar{X}_n - \mu)^T \hat{\Sigma}_n^{-1}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} \chi_2^2$$

Betrachte $g(\vartheta) = \mu_1 - \mu_2$.
$g'(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\sigma^2(\vartheta) = (1, -1)\Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}((\bar{X}_n^{(1)} - \bar{X}_n^{(2)}) - (\mu_1 - \mu_2))}{\sigma(\hat{\vartheta}_n)} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$$

[38] d ist Dimension