4 Stetige Funktionen

Ab jetzt wird (fast) immer in $\mathbb{R}$ gerechnet, insbesondere $B(x,r) = (x-r, x+r)$, $\overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$. Stets sei $D \neq \emptyset$.

4.1 Grenzwerte stetiger Funktionen

Definition 4.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge $\overline{D} := \{x \in \mathbb{R} \colon \exists x_n \in D \ (n \in \mathbb{N}) \text{ mit } x_n \to x,\ n \to \infty\}$ der *Abschluss* von D. D heißt *abgeschlossen* (abg.) falls $D = \overline{D}$.

Bemerkung. Es gilt $D \subseteq \overline{D}$ (Betrachte für $x \in D$ die Folge $(x_n)_{n\geq 1} = (x)_{n \geq 1}$)

Beispiel. Sei $D = (0,1]$, dann ist $\overline{D} = [0,1]$

Beweis. Es gilt $0 \in \overline{D}$, da $\frac{1}{n} \in D$, $\frac{1}{n} \to 0$ $n \in \mathbb{N} \implies [0,1] \subseteq \overline{D}$. Umgekehrt: Sei $x_n \in (0,1] = D$ mit $x_n \to x$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Satz 2.9: $0 \leq x \leq 1 \implies \overline{D} \subseteq [0,1]$ $\implies$ Beh. □

Ebenso:

a) $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$

b) Abgeschlossene Intervalle im Sinne von Def. **??** sind abgeschlossen im Sinne von Def. 4.1, Bsp: $\overline{[0,1]} = [0,1]$.

Definition 4.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert* gegen den *Grenzwert* y_0, wenn für *jede* Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gilt: $f(x_n) \to y_0$ $(n \to \infty)$. Man schreibt dann $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ oder $f(x) \to y_0$ für $x \to x_0$. Wenn man zusätzlich $x_n < x_0$, bzw. $x_n > x_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fordert, dann spricht man vom *links-*, bzw. *rechtsseitigen Grenzwert* und schreibt $y_0 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, bzw. $y_0 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Beispiel 4.3. a) Sei $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \to x_0$. Dann $f(x_n) = x_n^2 + 3 \to x_0^2 + 3$ $(n \to \infty)$ nach Satz 2.7 $\implies \lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 + 3$

b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Setze

$$\mathbf{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus M \end{cases} \qquad \text{(charakteristische Funktion)}$$

Behauptung. Sei $D = \mathbb{R}$, $f = \mathbf{1}_{R_+}$. Dann: $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.

Beweis. Wähle $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Dann

$$f(x_n) = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Sei $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Wenn $x_n > 0$, dann $f(x_n) = 1$. Wenn $x_n < 0$, dann $f(x_n) = 0$ $\Longrightarrow \exists \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\exists \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ □

c) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D$. Dann: $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht, da $\frac{1}{n} \to 0$, aber $f(\frac{1}{n}) = n$ divergiert $(n \to \infty)$.

Satz 4.4 (ε-δ-Charakterisierung)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

a) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$

b) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon > 0 \, \forall x \in D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon)$ *gilt:* $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$

Beweis. a) Es gelte 2). Sei $x_n \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $x_n \to x_0$ beliebig gegeben $(n \to \infty)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta_\varepsilon > 0$ aus 2). Dann $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. 2) liefert: $|f(x_n) - y_0| \leq \varepsilon$ $(\forall n \geq N_\varepsilon)$ $\Longrightarrow f(x_n) \to y_0$, $n \to \infty$ $\Longrightarrow 1)$

b) Es gelte 1). Annahme: 2) sei falsch. Daraus folgt mit $\delta = \frac{1}{n}$: $\exists \varepsilon_\delta > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \, \exists x_n \in D$ mit $|x_0 - x_n| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x) - y_0| > \varepsilon_0$, d. h. $x_n \to x_0$ (Satz 2.9) und $f(x_n) \not\to y_0$ $(n \to \infty)$ $\lightning 1)$ $\Longrightarrow 2$

□

Satz 4.5. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, sodass $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = z_0$. Dann gelten:*

a) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = y_0 + z_0$

b) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = y_0 z_0$

c) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |y_0|$

d) Sei zusätzlich $y_0 \neq 0$. Dann $\exists r > 0$, sodass $|f(x)| \geq \frac{|y_0|}{2} > 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| \leq r$. Ferner $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y_0}$

e) Sei zusätzlich $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$. Dann gilt $x_0 \leq z_0$. (Entsprechendes gilt für $\lim\limits_{x\to x_0^\pm}$)

Beweis. c) Sei $x_n \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ beliebig gewählt. $\overset{\text{n. V.}}{\Longrightarrow}$ $f(x_n) \to y_0 \overset{2.11}{\Longrightarrow} |f(x_n)| \to |y_0|$ $(n \to \infty)$ $\Longrightarrow$ Behauptung

d) Wähle $\varepsilon = \frac{|y_0|}{2} > 0$. Nach Teil 3 und Satz 4.4 $\exists r = \delta_\varepsilon > 0$, sodass für alle $x \in D \cap \overline{B}(x_0, r)$ gilt $\frac{|y_0|}{2} \geq ||f(x)| - |y_0|| \geq |y_0| - |f(x)| \iff |f(x)| \geq \frac{|y_0|}{2}$. Sei nun $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ mit $x_n \in D \cap \overline{B}(x_0, r) \overset{\text{n. V.}}{\Longrightarrow} f(x_n) \to y_0 \overset{2.7}{\Longrightarrow} \frac{1}{f(x_n)} \to \frac{1}{y_0}$ $(n \to \infty) \implies$ Behauptung

a), b), e) gehen genauso mit Satz 2.7 und Satz 2.9. □

Uneigentliche Grenzwerte

Definition. Erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (man schreibt oft ∞ statt $+\infty$). Ordnung: $-\infty < x < +\infty$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, $|\pm\infty| := +\infty$

Definition 4.6. Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(-\infty)$ für $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, falls:

$$\forall K \in \mathbb{N}\, \exists N_K \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_K \colon x_n \geq K \ (x_n \leq -K)$$

Damit $n^2 \to \infty$, $-n^3 \to -\infty$ $(n \to \infty)$. *Beachte:* $((-1)^n)$ divergiert nach wie vor.

Bemerkung 4.7. a) Wenn $x_n \to \infty$ oder $x_n \to -\infty$, dann $\frac{1}{x_n} \to 0$ $(n \to \infty)$. (Beachte, nach Def. 4.6 gilt: $x_n \neq 0$, $n \geq N_1$)

b) Wenn $x_n \to 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$, dann geht $\frac{1}{x_n} \to +\infty$

c) Wenn $x_n \to 0$, $x_n < 0$ $(\forall n \geq n_0)$, dann $\frac{1}{x_n} \to -\infty$

Beweis. a) Sei $x_n \to +\infty$ oder $x_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$. Nach Def. 4.6 gilt

$$\forall K \in \mathbb{N}\, \exists N_K \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_K \colon\ |x_n| \geq K \iff 0 < \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{1}{K} =: \varepsilon,$$

d. h. $\frac{1}{x_n} \to 0$, $n \to \infty$.

b), c) zeigt man ähnlich. □

In Anbetracht von 4.7.1) schreibt man

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

(damit gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$ auch in Bem. 4.71) Wenn (x_n) nach oben (nach unten) unbeschränkt ist (wobei $x_n \in \mathbb{R}$) dann setzt man $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n := \infty$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n := -\infty$. Mit identischem Beweis gelten dann Wurzel- und Quotientenkriterium ohne die jeweilige Beschränktheitsvorraussetzung. Ferner liefert (4.1) und Bem. 4.7 in Thm. 3.28

$$\varrho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Gilt auch wenn $\sqrt[k]{|a_k|}$ unbeschränkt ($\varrho = \frac{1}{\infty} = 0$) oder wenn $\sqrt[k]{|a_k|} \to 0^+$ $(k \to \infty)$ („$\varrho = \frac{1}{0^+} = +\infty$“). Weiter schreibt man $\sup D = +\infty$ wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist, sowie $\inf D = -\infty$, wenn D nach unten unbeschränkt ist.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$, $y_0 \in \overline{R}$. Dann definiert man $\lim_{n \to x_0} f(x) = y_0$ wie in Def. 4.2, d. h. für alle $x_n \to x_0$ muss $f(x_n) \to y_0$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gelten. Dabei ist $+\infty \in \overline{D}$ wenn $\sup D = \infty$ und $-\infty \in \overline{D}$, wenn $\inf D = -\infty$.

Beispiel. Mit Bem. 4.7 folgt $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ und $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

4.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition 4.8. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann heißt f *stetig in* x_0, falls $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d. h. für *jede* Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$. f heißt stetig (auf D), wenn f für alle $x_0 \in D$ stetig ist. Man schreibt: $C(D) = \{f : D \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig}\}$.

Beispiel 4.9 (vgl. 4.3)**.**

a) Sei $D = \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ (fest gegeben). Dann sind die Funktionen $f(x) = c$, $g(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ stetig auf $\mathbb{R}$.

b) Sei $D = \mathbb{R}_+$, x_0, $x_n \in D$. Übung: Wenn $x_n \to x_0$, dann $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x_0}$ $(n \to \infty)$. Also ist $f(x) = \sqrt{x}$ stetig auf $\mathbb{R}_+$

c) Sei $D = \mathbb{R}$ und $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$. $\Longrightarrow$ f ist stetig für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber unstetig für $x_0 = 0$, $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

d) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D$ stetig auf D

e) Sei $D = \mathbb{R}$, $f(x) = ...$ $\Longrightarrow$ f unstetig in $x_0 = 0$, da $\nexists \lim_{x \to 0^+} f(x)$

Definition. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann definiere man die Funktion $f + g : D \to \mathbb{R}$ punktweise durch $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ $(x \in D)$. Analog definiere man die Funktionen αf, $f \cdot g$, $|f|$ und $\frac{1}{f}$ (soweit $f(x) \neq 0$). Ferner sei $f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D : f(x) = y\}$ und $h : f(D) \to \mathbb{R}$. Dann definiert man die *Komposition* $h \circ f : D \to \mathbb{R}$ durch $(h \circ f)(x) = h(f(x))$, $x \in D$.

Satz 4.10. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sowie $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $h : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$. Dann sind die Funktionen $f + g$, fg (speziell αg), $|f|$, $h \circ f$ stetig bei x_0. Wenn $f(x_0) \neq 0$, dann existiert nach Satz 4.5 ein $x > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für $x \in \overline{B}(x_0, r) \cap D := \tilde{D}$. Ferner ist $\frac{1}{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. (Also: $C(D)$ ist ein Vektorraum).*

Beweis (beispielhaft).. Sei $x_n \in D$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Dann $f(x_n) \in f(D)$, $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$ (da f stetig in x_0). Also: $h(f(x_n)) \to h(f(x_0))$, da h stetig in $f(x_0)$ $(n \to \infty)$. Somit ist $h \circ f$ stetig in x_0. Der Rest folgt analog mit Satz 4.5. $\square$

Beispiel 4.11 (Satz 4.10 liefert:). a) Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig, da sie aus $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ zusammengesetzt sind.

b) Rationale Funktionen $f = \frac{p}{q}$ sind auf $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ stetig, als Quotient der Polynome p, q.

c) $f(x) = \sqrt{1 + 3|x|}$ ist stetig auf $D = \mathbb{R}$, da $f = w \cdot g$ mit $w(y) = \sqrt{y}$ und $g(x) = 1 + 3|x|$, $g = 1 + 3|p_1|$.

Theorem 4.12. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist $f : B(0, \varrho) = (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{R}$ stetig, d. h.*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \quad (x_0 \in B(0, \varrho))$$

Beispiel. Stetig auf $\mathbb{R}$ sind sin, cos, exp sowie $f(x) = \exp(1+2x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$, da $f = \exp p$, $p(x) = 1 + 2x^2$ (Hier sei vorrübergehend $B(0, \infty) = \mathbb{R}$).

Beweis des Theorems.. Sei $x_0, x_n \in (-\varrho, \varrho)$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Setze $d := \varrho - |x_0| > 0$ $\Longrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \leq \frac{d}{2}$ $(\forall n \geq n_0)$

$$\Longrightarrow \; |x_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0| \leq ... + |x_0| = \varrho - \frac{d}{2} < \varrho \quad (n \geq n_0) \tag{$*$}$$

Setze $r = p - ....$ Dann (nach Thm. 3.28) $\exists ....$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest gegeben. Dann $\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{j=J_\varepsilon+1}^{\infty} |a_j|\, r^j \leq \varepsilon \tag{$**$}$$

Setze $p_\varepsilon(x) = ...$ □

Satz 4.13. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:*

a) f ist stetig in x_0

b) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon > 0 \, \forall x \in D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon > 0 : f(D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon)) : ...$

Beweis. ... □

Definition 4.14. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt *gleichmäßig stetig* (glm stetig), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon > 0 \, \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \tag{4.2}$$

(Im Gegensatz zu 4.132 hängt δ_ε nicht von x_0 ab).

Beispiel 4.15. a) Sei $D = (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Sei $\varepsilon_0 = 1$, sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x \in (0, 1]$ mit $x \leq 2\delta$, $y = \frac{x}{2} \implies |x - y| = \frac{x}{2} \leq \delta$. ...

b) Sei $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Sei $\varepsilon_0 = 1$, sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x = \delta + \frac{1}{\delta}$, $y = \frac{1}{\delta}$ $\Longrightarrow |x - y| = \delta$, aber $|f(x) - f(y)| ... > 1 = \varepsilon_0 \implies f$ nicht glm stetig, obwohl f stetig.

4.3 Hauptsätze über stetige Funktionen

Theorem 4.16. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann: f ist glm. stetig. (Beispiel: $D = [a,b]$)*

Beweis. Annahme: f sei nicht glm. stetig. (4.2) (mit $\delta = \frac{1}{n}$) liefert:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \, \exists x_n,\, y_n \in D : |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n},\ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

D beschränkt, Thm. 2.21 (=BW) $\implies \exists$ TF $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$, $y_{n_{k_l}} \to y$ $(l \to \infty)$ $\implies x, y \in \overline{D} \overset{\text{n.V.}}{=} D$. Ferner:

$$|x - y| \leq \left| x - y_{n_{k_l}} \right| + \underbrace{\left| x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}} \right|}_{\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n_{k_l}}} + \left| y_{n_{k_l}} - y \right| \to 0 \quad (l \to \infty)$$

$\overset{1.20.3}{\implies} x = y$. f stetig: $f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}}) \to f(x) - f(y) = f(x) - f(x) = 0$ $(l \to \infty)$ ↯ $(*)$ □

Definition 4.17. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen. $x_0,\, y_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D} \setminus D$. Die Funktion $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$ (definiert auf $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$) heißt *stetige Fortsetzung* von f in x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Beispiel 4.18.

a) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \in D$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$

$\implies \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$, also $\tilde{f}(x) = x + 1$, $x \in \tilde{D} = \mathbb{R}$.

Da $\tilde{f}$ stetig auf $\mathbb{R}$, ist f in 1 stetig fortsetzbar. (Wenn man $y_0 = 3$ setzen würde, wäre $\tilde{f}$ keine stetige Fortsetzung).

b) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nicht stetig fortsetzbar sind $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, da jeweils $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert. (siehe Bsp. 4.3)

Satz 4.19. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in \overline{D} \setminus D$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann:*

a) Wenn f auf D gleichmäßig stetig ist, dann hat f in x_0 eine stetige Fortsetzung.

b) Wenn $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$ abgeschlossen und beschränkt ist und f in x_0 stetig fortsetzbar ist, dann ist f mit D gleichmäßig stetig.

Beweis.

b) Thm. 4.16: $\tilde{f}$ ist gleichmäßig stetig auf $\tilde{D}$. $\implies f$ gleichmäßig stetig auf D.

a) Sei f gleichmäßig stetig.

a) Sei $x_n \in D$ mit $x_n \to x_0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei δ_ε aus (4.2). Dann: $\exists N_\varepsilon : |x_n - x_0| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq N_\varepsilon) \implies |x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| \leq \delta_\varepsilon \quad (\forall n, m \geq N_\varepsilon) \overset{(4.2)}{\implies} |f(_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon \ (\forall n, m \geq N_\varepsilon)$. Thm. 2.26 $\implies \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) =: y_0$

b) Sei $\tilde{x_n}$ in D eine weitere Folge mit $\tilde{x_n} \to x_0$. Dann $\exists \tilde{N_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$ mit $|\tilde{x_n} - x_0| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} \ (\forall n \geq \tilde{N_\varepsilon}) \implies |x_n - \tilde{x_n}| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - \tilde{x_n}| \leq \delta_\varepsilon \ (\forall n \geq \tilde{N_\varepsilon}) \overset{(4.2)}{\implies} |f(x_n) - f(\tilde{x_n})| \leq \varepsilon \ (\forall n \geq \tilde{N_\varepsilon}) \implies |f(\tilde{x_n}) - y_0| \leq |f(\tilde{x_n}) - f(x_n)| + |f(x_n) - y_0| \overset{1)}{\leq} \varepsilon + \lim_{m\to\infty} |f(x_n) - f(x_m)| \overset{1)}{\leq} 2\varepsilon \ (\forall n \geq \tilde{N_\varepsilon}) \implies f(\tilde{x_n}) \to y_0 \implies \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

□

Theorem 4.20 (Satz vom Maximum)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists x_\pm \in D$ mit $f(x_+) = \max_{x\in D} f(x)$, $f(x_-) = \min_{x\in D} f(x)$. Insbesondere ist f beschränkt, d. h. $|f(x)| \leq M$ $(:= \max\{f(x_+), f(x_-)\})$, $\forall x \in D$.*

Beweis. a) ...

b) ...

□

Korollar 4.21. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x) > 0 \forall x \in D$. Dann: $f(x) \geq f(x_-) > 0$ $(\forall x \in D)$, (wobei $x_- \in D$ aus Thm. 4.20).*

Beispiel. Wenn D nicht abgeschlossen oder unbeschränkt, dann sind Thm. und Kor. im Allgemeinen falsch.

a) $D = (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$. $D = \mathbb{R}_+$, $g(x) = x$. $\implies f, g$ stetig und unbeschränkt.

b) $D = [1, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} > 0 \ \forall x \geq 1$. Aber $\inf\limits_{x\in D} f(x) = 0$.

Frage. Wie sieht Bild von f aus? $f(D)$ kann Lücken haben, wenn:

Theorem 4.22 (Zwischenwertsatz/ZWS)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann: $f([a, b]) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right]$. Also: $\forall y_0 \in [\min f, \max f] \ \exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.*

Beweis. ... □

Korollar 4.23 (Nullstellensatz)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Dann $\exists x_* \in [a, b] : f(x_*) = 0$.*

Beweis. Nach Vorraussetzung $f(x) \leq 0 \leq f(b)$, $f(b) \leq 0 \leq f(a) \implies 0 \in f([a, b])$. ZWS $\implies$ Beh. □

Korollar 4.24. *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall (Intervallsatz).*

Beweis. Annahme: $f(I)$ sei kein Intervall $\Longrightarrow \exists a, b \in I$ mit $y := f(a) < f(b) =: z$ und $u \in (y, z)$ mit $u \notin f(I)$. Sei etwa $a < b$. ZWS $\Longrightarrow f([a, b])$ Intervall, $y, z \in f([a, b])$ $\Longrightarrow u \in f([a, b]) \Longrightarrow ↯$ □

Beispiel 4.25. a) $D = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$ fest). Dann f stetig, $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ $(\forall x \geq 0)$, $f(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$. Kor. 4.24: $f(\mathbb{R}_+) = \text{Intervall} \Longrightarrow f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$

b) Suche $x_0 \geq 0$: $\exp(-x_0) = x_0 \iff f(x_0) = \exp(-x_0) - x_0 = 0$. Hier f stetig: $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. 4.23 $\Longrightarrow \exists x_0 : f(x_0) = 0$.

Definition 4.26.

Beispiel. a) ...

b) ...

Bemerkung 4.27.

Beweis. □

Theorem 4.28.

Beweis. □

Beispiel 4.29.

4.4 Exponentialfunktion und ihre Verwandtschaft

...

Definition 4.30.

Definition 4.31.

Bemerkung 4.32. ...

a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) ...

f) ...

Trigonometrische Funktionen

...

Satz 4.33.

Definition.

...

Definition 4.34.

Definition 4.35.

Beispiel 4.36.