

6. Konvergente Folgen

Definition (Umgebung)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(a) : \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ heißt ε -**Umgebung** von a .

$$x \in U_\varepsilon(a) \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Also gilt: $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Definition („für fast alle“)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gemacht. $A(n)$ gilt **für fast alle** (ffa) $n \in \mathbb{N} \iff \exists m \in \mathbb{N}$ so dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq m$. Ein Beispiel ist $n^2 \geq n + 17$ gilt ffa $n \in \mathbb{N}$.

Vereinbarung: Alle vorkommenden Folgen seien Folgen in \mathbb{R} .

Definition (Beschränkte Folgen)

(a_n) heißt beschränkt (*nach oben beschränkt*)/(*nach unten beschränkt*) : $\iff \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ist beschränkt (*nach oben beschränkt*)/(*nach unten beschränkt*).

Ist (a_n) nach oben beschränkt, so setze

$$\sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n \geq 1} a_n := \sup \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Ist (a_n) nach unten beschränkt, so setze

$$\inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n \geq 1} a_n := \inf \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Beachte: (a_n) ist beschränkt $\iff \exists c > 0 : |a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$.

Definition (Konvergente Folge)

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt **konvergent** : $\iff \exists a \in \mathbb{R}$, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ gilt. In diesem Fall heißt a der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n) und man schreibt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$ oder $\lim a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) oder $a_n \rightarrow a$. Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) **divergent**.

$$\begin{aligned} \text{Also: } a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz 6.1 (Grenzwert und Beschränktheit konvergenter Folgen)

(a_n) sei konvergent.

- (1) Dann ist der Grenzwert von (a_n) eindeutig bestimmt.
- (2) (a_n) ist beschränkt.

Beweis

(1) Es gelte $a_n \rightarrow a$ und $a_n \rightarrow b$.

Annahme: $a \neq b$, etwa $a < b$.

$\varepsilon := \frac{b-a}{2} > 0$. Dann $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ (*)

$a_n \rightarrow a \implies a_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$, $a_n \rightarrow b \implies a_n \in U_\varepsilon(b)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu (*), also $a = b$.

(2) Sei $a := \lim(a_n)$. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \ \forall n \geq n_0$. Dann: $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| =: c_1 \ \forall n \geq n_0$. $c_2 := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$, $c := \max\{c_1, c_2\}$. Dann: $|a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Bemerkung (Endlich viele Elemente sind egal): Sind (a_n) und (b_n) Folgen und gilt $a_n = b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so gilt (a_n) konvergent $\iff (b_n)$ konvergent. Im Konvergenzfall: $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

Beispiele:

(1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n = c$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann: $|a_n - c| = 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\lim a_n = c$.

(2) $a_n = \frac{1}{n}$. Behauptung: $a_n \rightarrow 0$ (**Nullfolge**). Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. 2.1(4) $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0 : |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

(3) $a_n = n$. 2.1(3) $\implies (a_n)$ ist nicht beschränkt. $\xrightarrow{6.1(2)} (a_n)$ ist divergent.

(4) $a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, \dots)$ $|a_n| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n$ ist beschränkt.
Annahme: (a_n) ist konvergent. Sei $a := \lim a_n$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{1}{2} \ \forall n \geq n_0$. Dann:
 $2 = |a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |a_{n_0} - a + a - a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0} - a| + |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ Widerspruch!
Also: (a_n) ist divergent.

(5) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$. Behauptung: $a_n \rightarrow 1$. $|a_n - 1| = |\frac{n^2}{n^2+1} - \frac{n^2+1}{n^2+1}| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Sei $\varepsilon > 0$.
Bsp(2) $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \implies |a_n - 1| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

(6) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. D.h. $|a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Sei $\varepsilon > 0$. 2.1(4) $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \implies \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$. Sei $n \geq n_0 : |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$. D.h. $a_n \rightarrow 0$.

Bemerkung: Sei $p \in \mathbb{Z}$ fest. Eine Funktion $a : \{p, p+1, p+2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ebenfalls Folge in \mathbb{R} . Schreibweise: $a = (a_n)_{n \geq p} = (a_n)_{n=p}^\infty$. Beispiele: $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(a_n)_{n=-1}^\infty = (a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$

Satz 6.2 (Konvergenzsätze)

$(a_n), (b_n), (c_n)$ seien Folgen in \mathbb{R} .

(1) $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \iff |a_n - a| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$ und es gelte $|a_n - a| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $b_n \rightarrow 0$. Dann: $a_n \rightarrow a$.

(3) Es gelte $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$.

(i) gilt $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$

(ii) gilt $a = b$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies c_n \rightarrow a$.

- (iii) $|a_n| \rightarrow |a|$
- (iv) $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- (v) $\alpha a_n \rightarrow \alpha a \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (vi) $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
- (vii) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$: $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq m$ und die Folge $(\frac{1}{b_n})_{n \geq m}$ konvergiert gegen $\frac{1}{b}$

Beweis

- (1) folgt aus der Definition der Konvergenz
- (2) $\exists m \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| \leq b_n \quad \forall n > m$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $b_n \leq \varepsilon \quad \forall n > n_1$. $m_0 := \max\{m, n_1\}$.
Dann: $|a_n - a| \leq b_n < \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$.
- (3)
 - (i) Annahme: $b < a$. $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$. $a_n \rightarrow a \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies a_n > a - \varepsilon$
ffa $n \in \mathbb{N}$. $b_n \rightarrow b \implies b_n \in U_\varepsilon(b) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies b_n < b + \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies$
 $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch zur Voraussetzung $\implies a_n < b_n$
ffa $n \in \mathbb{N}$.
 - (ii) Sei $\varepsilon > 0$. $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a \implies a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies c_n \in$
 $U_\varepsilon(a) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N}$.
 - (iii) $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \implies |a_n| \rightarrow |a|$
 - (iv) Zur Übung
 - (v) Zur Übung
 - (vi) $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|$.
6.1(2) $\implies \exists c > 0 : |a_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies |a_n b_n - ab| \leq c \cdot |b_n - b| + |b| |a_n - a| =: \alpha_n$.
(iv),(v) $\implies \alpha_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(2)} a_n b_n \rightarrow ab$.
 - (vii) (iii) $\implies |b_n| \rightarrow b \implies |b| > 0$. $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$; $|b_n| \rightarrow |b| \implies |b_n| \in U_\varepsilon(|b|) \quad \text{ffa } n \in$
 $\mathbb{N} \implies |b_n| > |b| - \varepsilon = \frac{|b|}{2} \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N}$: $b_n \neq 0 \quad \forall n > m$. Für $n > m$: $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| =$
 $|\frac{b-b_n}{b_n \cdot b}| = \frac{|b-b_n|}{|b_n| |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| =: \beta_n$. $\beta_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(2)} \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$. ■

Beispiel

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 - 3n + 8} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 - \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Definition (Monotonie)

- (a_n) heißt **monoton wachsend** : $\iff a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (a_n) heißt **streng monoton wachsend** : $\iff a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

6. Konvergente Folgen

- (a_n) heißt **monoton fallend** : $\iff a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- (a_n) heißt **streng monoton fallend** : $\iff a_{n+1} < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- (a_n) heißt **monoton** : $\iff (a_n)$ ist monoton wachsend oder fallend.
- (a_n) heißt **streng monoton** : $\iff (a_n)$ ist streng monoton wachsend oder fallend.

Satz 6.3 (Monotoniekriterium)

(a_n) sei monoton wachsend (*fallend*) und sei nach oben (*unten*) beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n \ (\inf_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Beweis

$a := \sup_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$. $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von $\{a_1, a_2, \dots\} \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Für $n > n_0$: $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \implies |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. ■

Beispiel

$$\begin{aligned} a_1 &:= \sqrt[3]{6}, a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n} \ (n \in \mathbb{N}) \\ a_2 &:= \sqrt[3]{6 + a_1} > \sqrt[3]{6} = a_1 \text{ (wegen Satz 5.1 (1))} \\ a_3 &:= \sqrt[3]{6 + a_2} > \sqrt[3]{6 + a_1} = a_2 \end{aligned}$$

Behauptung: $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis

$n = 1$: s.o.

$$n \longrightarrow n+1: a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} \stackrel{\text{IV}}{>} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}. \quad \blacksquare$$

Also: (a_n) ist streng monoton wachsend.

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt[3]{6} < 2 \\ a_2 &= \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

Behauptung: $a_n < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis

$n = 1$: s.o.

$$n \longrightarrow n+1: a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2. \quad \blacksquare$$

Also: (a_n) ist nach oben beschränkt. Aus 6.3 folgt: (a_n) ist konvergent.

$$\begin{aligned} a &:= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ a_{n+1} &= \sqrt[3]{6 + a_n} \implies a_{n+1}^3 = 6 + a_n \implies a^3 = 6 + a \\ \implies 0 &= a^3 - a - 6 = (a-2)(a^2 + 2a + 3) = (a-2) \underbrace{((a+1)^2 + 2)}_{>0} \implies a = 2 \end{aligned}$$