

## § 15.

# Vorgriff auf Analysis III

In Analysis III werden wir für gewisse Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und gewisse Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  folgendes Integral definieren:

$$\int_A f(x) dx = \int_A f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

In diesem Paragraphen geben wir „Kochrezepte“ an, wie man solche Integrale für spezielle Mengen  $A \subset \mathbb{R}^2$  (bzw.  $A \subset \mathbb{R}^3$ ) und stetige Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  berechnen kann.

**I Der Fall  $n = 2$ :**

### Definition

Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $h_1, h_2 \in C[a, b]$  und  $h_1 \leq h_2$  auf  $[a, b]$ .

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

$$(A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a, b], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\})$$

heißt **Normalbereich** bezüglich der  $x$ -Achse ( $y$ -Achse).

**Übung:**  $A$  ist kompakt.

### Satz 15.1 (Integral über Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$ )

Sei  $A$  wie oben und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \\ \left( \int_A f(x, y) d(x, y) \right) &= \int_a^b \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

**Achtung:**  $\int_A f(x) dx$  nicht mit dem Wegintegral  $\int_\gamma f(x) \cdot dx$  verwechseln!

### Definition

Sei  $A$  ein Normalbereich bzgl. der  $x$ - oder  $y$ -Achse, so heißt:

$$|A| := \int_A 1 d(x, y)$$

der **Flächeninhalt** von  $A$ .

**Beispiele:**

- (1) Sei  $A$  ein Normalbereich bzgl. der  $x$ -Achse und seien  $h_1, h_2$  wie oben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |A| &= \int_A 1 \, d(x, y) \\ &\stackrel{15.1}{=} \int_a^b \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} 1 \, dy \right) dx \\ &= \int_a^b (h_2(x) - h_1(x)) \, dx \end{aligned}$$

Ist z.B.  $h_1 = 0$ , so folgt:

$$|A| = \int_a^b h_2(x) \, dx$$

- (2) Sei  $A = [a, b] \times [c, d]$ , dann ist  $A$  Normalbereich bezüglich der  $x$ - **und** der  $y$ -Achse. Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Es folgt aus 15.1.:

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \end{aligned}$$

- (3) Sei  $r > 0$  und  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . Dann ist  $A$  ein Normalbereich der  $x$ -Achse mit  $h_1(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$  und  $h_2(x) := -\sqrt{r^2 - x^2}$  (mit  $x \in [-r, r]$ ), und es gilt:

$$\begin{aligned} |A| &= \int_{-r}^r h_2(x) - h_1(x) \, dx \\ &= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

- (4) Sei  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], x \leq y \leq \sqrt{x}\}$  und  $f(x, y) = xy$ . Dann gilt für  $h_1(x) = x$  und  $h_2(x) = \sqrt{x}$ :

$$\begin{aligned} \int_A xy \, d(x, y) &= \int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_x^{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Da  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], y^2 \leq x \leq y\}$  außerdem Normalbereich bzgl. der

$y$ -Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}\int_A f(x, y) \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{y^2}^y xy \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y \right]_{y^2}^y dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} y^3 - \frac{1}{2} y^5 \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{6} y^6 \right]_0^1 = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

## II Der Fall $n = 3$ :

### Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich bzgl. der  $x$ - oder der  $y$ -Achse, es seien  $g_1, g_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g_1 \leq g_2$  auf  $A$ .

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

heißt ein **Normalbereich** bezüglich der  $x$ - $y$ -Ebene. Normalbereiche bzgl. der  $x$ - $z$ - und  $y$ - $z$ -Ebene werden analog definiert.

### Satz 15.2 (Integral über Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$ )

Sei  $B$  wie oben und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt:

$$\int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_A \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) d(x, y)$$

### Definition

$B$  sei wie in 15.2.

$$\begin{aligned}|B| &:= \int_B 1 \, d(x, y, z) \\ &= \int_A (g_2(x, y) - g_1(x, y)) \, d(x, y)\end{aligned}$$

heißt **Volumen** von  $B$ .

### Beispiele:

(1) Sei  $B := [a, b] \times [c, d] \times [\alpha, \beta]$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_A \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \, dz \right) d(x, y) \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx\end{aligned}$$

Dabei darf die Integrationsreihenfolge beliebig vertauscht werden.

- (2) Sei  $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}$  für ein  $h > 0$ . Dann setze  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $g_1 = 0, g_2 = h$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} |B| &= \int_A h \, d(x, y) \\ &= h \int_A 1 \, d(x, y) \\ &= h \cdot |A| = h\pi \end{aligned}$$

**Satz 15.3 (Eigenschaften von Integralen über Normalbereiche)**

Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  oder  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Je nach Definition von  $B$  sei  $X = (x, y)$  oder  $X = (x, y, z)$ .

- (1) Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_B \alpha f(X) + \beta g(X) \, dX = \alpha \int_B f(X) \, dX + \beta \int_B g(X) \, dX$$

- (2) Es gilt die bekannte Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_B f(X) \, dX \right| \leq \int_B |f(X)| \, dX \leq |B| \cdot \max\{|f(X)| : X \in B\}$$

- (3) Ist  $f \leq g$  auf  $B$ , so gilt:

$$\int_B f(X) \, dX \leq \int_B g(X) \, dX$$