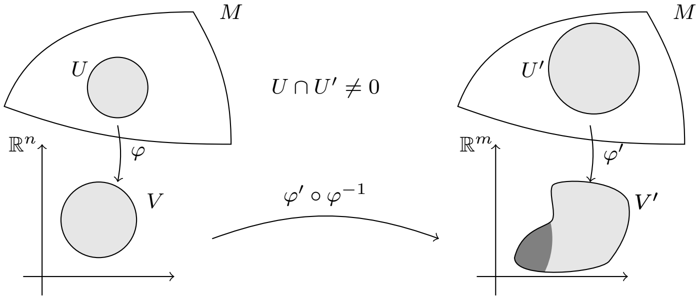
Kapitel 1.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition Eine n-dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit** M ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis der Topologie in dem zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge U mit $p \in U$ existiert und ein Homöomorphsimus $\varphi\colon U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$.



$\varphi' \circ \varphi^{-1}$ ist ein Homöomorphismus offener Mengen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Nach dem Satz von Brouwer (1912) gilt dann $m = n$. Damit ist die Dimension einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig definiert.

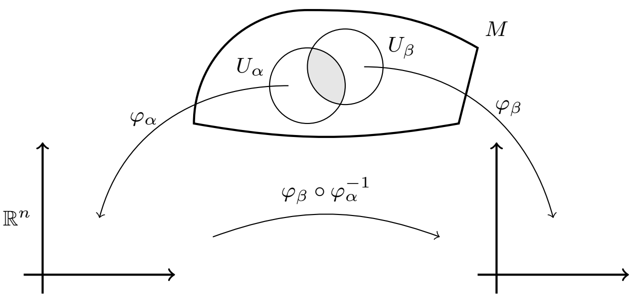
Die Abbildung $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Karte** von M um p, die Menge U heißt **Kartengebiet**.

Eine Menge von Karten $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ heißt **Atlas** von M, falls $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = M$.

Ein Atlas $\mathcal{A}$ von M heißt C^k-Atlas, wenn für alle $\alpha, \beta \in J$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der sogenannte **Kartenwechsel**:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist.



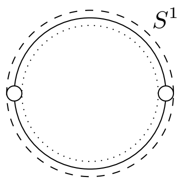
Eine Karte $\psi\colon U \to V$ von M heißt **verträglich** mit einem C^k-Atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ wenn jeder Kartenwechsel

$$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist, also $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(\psi, U)\}$ ebenfalls ein C^k-Atlas ist. Die Menge aller mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten ist ein **maximaler C^k-Atlas**. Jeder maximale Atlas enthält alle mit ihm verträglichen Karten. Ein maximaler C^k-Atlas heißt auch **C^k-differenzierbare Struktur**.

Definition 1.1 (differenzierbare Mannigfaltigkeit) *Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** der Klasse C^k ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer C^k-differenzierbaren Struktur.*

Beispiel Einige Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten:
1) $M = \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \{(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$
2) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{A} = \{(\imath_M, M)\}$
3) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist eine eindimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit:



S^1 Einheitskreis

$$U = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (0, 2\pi)\}$$

ist offen in S^1 und die Kartenabbildung

$$\varphi\colon (\sin t, \cos t) \mapsto t$$

ist ein Homöomorphismus.

$$\varphi'\colon U' = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (-\pi, \pi)\} \to (-\pi, \pi)$$

ebenfalls. $\mathcal{A} = \{(\varphi, U), (\varphi', U')\}$ ist ein Atlas von S^1, denn $U \cup U' = S^1$.

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$$

$$(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \to (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \qquad t \mapsto \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ t - 2\pi & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

4) Jeder reelle Vektorraum endlicher Dimension ist in kanonischer Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit.
Wähle eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V. Diese definiert mit

$$\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

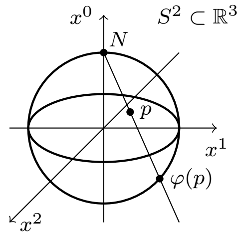
eine Bijektion auf $\mathbb{R}^n$. Damit erhält man eine globale Karte von V. Der zugehörige Atlas hängt nicht von der Wahl der Basis ab, denn ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine weitere Basis von V und $\psi(\sum \lambda_i w_i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine weitere Karte, so ist $\varphi \circ \psi^{-1}$ als Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ schon C^∞.

5) $S^n = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \mid \sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1\}$.

Betrachte den Nordpol $N = (1, 0, \dots, 0)$ und den Südpol $S = (-1, 0, \dots, 0)$ und die Abbildung

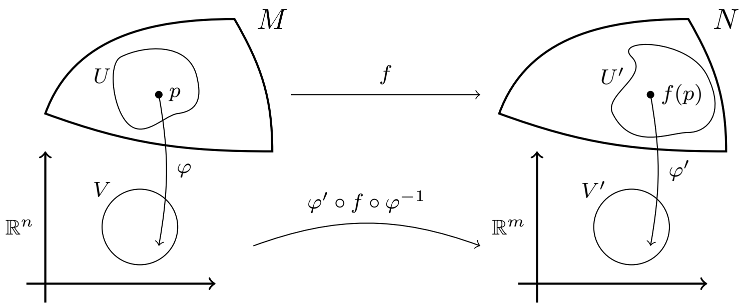
$$\varphi\colon U = S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto \left(\frac{x^1}{1-x^0}, \dots, \frac{x^n}{1-x^0}\right),$$

$$\psi\colon U' = S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto \left(\frac{x^1}{1+x^0}, \dots, \frac{x^n}{1+x^0}\right)$$



Aufgabe: Zeige, dass $(\varphi, U), (\psi, U')$ einen C^∞-Atlas auf S^n definiert.

Definition 1.2 (Differenzierbare Abbildungen) *Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M und N heißt* ***glatt*** *(C^∞-differenzierbar), wenn es zu jedem $p \in M$ Karten (φ, U) in M um p und geeignete (φ', U') in N um $f(p)$ gibt, so dass $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatt ist.*



Die Menge aller glatten Abbildungen von M nach N wird $C^\infty(M, N)$ genannt.

Konvention: Ab jetzt seien zunächst alle Mannigfaltigkeiten, wie auch alle Abbildungen als glatt vorrausgesetzt.

Bemerkung Da Kartenwechsel C^∞ sind, gilt obige Bedingung automatisch für alle Karten von M und N (evtl. nach Einschränkung).

Beispiel Es folgen zwei Beispiele für differenzierbare Abbildungen:

1. $(\varphi, U) \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, denn
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty.$$
2. $f \in C^\infty(M, N),\ g \in C^\infty(N, P) \Rightarrow g \circ f \in C^\infty(M, P)$, denn
$$\varphi_p \circ g \circ f \circ \varphi_m^{-1} = (\varphi_p \circ g \circ \varphi_n^{-1}) \circ (\varphi_n \circ f \circ \varphi_m^{-1}) \in C^\infty.$$

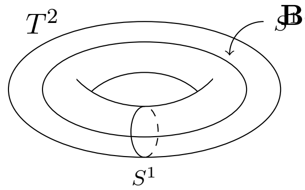
Definition 1.3 (Diffeomorphismus) *Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt* ***Diffeomorphismus****, wenn f bijektiv ist und f, sowie f^{-1} C^∞-Abbildungen von M nach N sind. Insbesondere haben M und N in diesem Fall dieselbe Dimension. Die Menge der Diffeomorphismen von M nach M wird mit* $\mathrm{Diff}(M)$ *bezeichnet.* $(\mathrm{Diff}(M), \circ)$ *ist bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.*

1. Produkte von Mannigfaltigkeiten

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n. Dann hat $M \times N$ versehen mit der Produkttopologie, die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Da M und N hausdorffsch sind und abzählbare Basen ihrer Topologie besitzen gilt dies auch für $M \times N$. Sind (φ, U) und (ψ, V) Karten von M bzw. N, so ist $\varphi \times \psi$ ein Homöomorphismus von $U \times V$ auf sein offenes Bild in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$.
Seien $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ und $\mathcal{A}' = \{(\psi_\beta, V_\beta) \mid \beta \in \mathcal{J}\}$ C^∞-Atlanten von M und N. Dann ist $\mathcal{B} = \{(\varphi_\alpha \times \psi_\beta, U_\alpha \times V_\beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}\}$ ein C^∞-Atlas von $M \times N$, denn

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_\mu \times \psi_\nu)^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\mu^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_\nu^{-1})$$

ist ein C^∞-Diffeomorphismus. Damit ist $M \times N$ in kanonischer Weise eine glatte $(m+n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die kanonischen Projektionen $\pi_M \colon M \times N \to M$, $\pi_N \colon M \times N \to N$ und die Abbildung $\tau \colon M \times N \to N \times M, (p,q) \mapsto (q,p)$ sind glatte Abbildungen.



Beispiel Es folgen einige Beispiele für Produkt-Mannigfaltigkeiten:

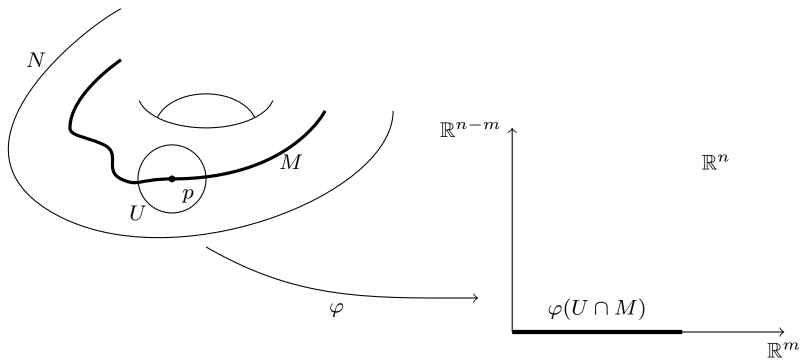
1) Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$
2) $T^n = \times_{i=1}^n S^1$
   $\iota : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1, \ldots, x^m, 0, 0, \ldots)$

2. Untermannigfaltigkeiten

Definition 1.4 (Untermannigfaltigkeit) *Es sei N eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subseteq N$ heißt* ***Untermannigfaltigkeit*** *von N, wenn für alle $p \in M$ eine Karte (φ, U) von N um p existiert, so dass*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \underbrace{(\mathbb{R}^m \times \{0\})}_{\{(x^1,\ldots,x^m,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n\}}$$

gilt. Eine solche Karte heißt an M ***adaptierte Karte****. Die Zahl $n-m$ heißt* ***Kodimension*** *von M in N.*



Lemma 1.5 *Es seien N eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $M \subseteq N$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von N. Bezeichnet $\mathcal{A}$ einen C^∞-Atlas von N und $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (x^1, \ldots, x^m, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^m)$, so ist*

$$\mathcal{B} = \{(\pi \circ \varphi|_{U \cap M}, U \cap M) \mid (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ an } M \text{ adaptierte Karte}\}$$

ein C^∞-Atlas von M.

Beweis Die Hausdorff-Eigenschaft und die Abzählbarkeit der Topologie werden von N auf M vererbt. Ist $p \in N$, so existiert eine adaptierte Karte (φ, U) von N um p und $\pi \circ \varphi|_{U\cap M}$ ist ein Homöomorphismus von $U \cap M$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$. Jeder Kartenwechsel

$$(\pi \circ \varphi|_{U\cap M}) \circ (\pi \circ \psi|_{V\cap M})^{-1} = (\pi \circ \varphi) \circ (\psi^{-1} \circ \imath) = \pi \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \imath$$

ist ein C^∞-Diffeomorphismus. □

Bemerkung Erinnerung: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn für alle $p \in M$ eine offene Umgebung U und eine Abbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(i) $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ ist ein Diffeomorphismus auf sein offenes Bild im $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Jedes solche M ist eine Untermannigfaltigkeit im Sinne von Definition 1.4, denn jedes φ wie oben ist wegen (i) eine Karte von $\mathbb{R}^n$ (im Sinne glatter Mannigfaltigkeiten) und wegen (ii) eine an M adaptierte Karte. Also sind mit Lemma 1.5 glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ glatte Mannigfaltigkeiten (im allgemeineren Sinne).