

## Kapitel 5

# Zufallsvariable, Verteilung, Verteilungsfunktion

### 5.1 Zufallsvariable

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Häufig interessiert nicht  $\omega$  selbst, sondern eine Kennzahl  $X(\omega)$ , d.h. wir betrachten eine Abbildung  $\omega \mapsto X(\omega)$

**Beispiel 5.1**  $2 \times$  würfeln

$$\Omega = \{(i, j) | i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$$

$$X(\omega) = X((i, j)) = i + j \text{ "Augensumme"}$$

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Wir möchten jetzt dem Ereignis  $X \in B = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$ ,  $B \subset \mathbb{R}$  eine Wahrscheinlichkeit zuordnen.

Also muss  $\{\omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$  sein.

**Definition 5.1** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein beliebiger Messraum. Eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Zufallsvariable, falls

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathfrak{B}$$

Diese Bedingung nennt man auch  $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ -Messbarkeit von  $X$ .

#### Satz 5.1

Eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann **Zufallsvariable**, wenn

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega | X(\omega) \leq a\} =: \{X \in B\} =: (X \in B) \in \mathcal{A}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**Beweis** " $\Rightarrow$ " Sei  $X$  Zufallsvariable.  $(-\infty, a] \in \mathfrak{B} \Rightarrow$  Behauptung

$$X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$$

Definiere  $\mathcal{A}_0 = \{B \subset \mathbb{R} | X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ .  $\mathcal{A}_0$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}$ :

$$(i) \quad X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A}_0$$

$$(ii) \quad X^{-1}(B^c) = \{\omega | X(\omega) \notin B\} = \{\omega | X(\omega) \in B\}^c = (X^{-1}(B))^c$$

$$\text{Also } B \subset \mathcal{A}_0 \Rightarrow B^c \subset \mathcal{A}_0$$

(iii)

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)$$

Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{E} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}_0 \Rightarrow \mathcal{A}_0 \supset \sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B} \Rightarrow$   
Behauptung ■

**Bemerkung 5.1**

- a) Satz 5.1 bleibt richtig, wenn wir  $\mathcal{E} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$  durch ein anderes Erzeugendensystem von  $\mathfrak{B}$  ersetzen.
- b) Bei Anwendungen ist oft  $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

Wann ist eine Abbildung  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar (ZV)?

**Satz 5.2** Sei  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  gegeben,  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist z.B. messbar, falls  $X$  stetig oder (schwach) monoton wachsend oder fallend.

**Beweis** Sei  $X$  stetig. Dann ist  $X^{-1}(U)$  offen, falls  $U$  offen.

Sei  $X$  wachsend  $\Rightarrow \{\omega \in \mathbb{R} | X(\omega) \leq a\}$  ist von der Gestalt  $(-\infty, b) \in \mathfrak{B}$  oder  $(-\infty, b] \in \mathfrak{B}$  ■

**Bemerkung 5.2** Es sei  $X(\omega) = c \forall \omega \in \Omega, c \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $X$  eine Zufallsvariable.

**Satz 5.3** Seien  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen, dann ist  $Y \circ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wieder eine Zufallsvariable.

**Satz 5.4** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum und  $X, Y$  Zufallsvariablen darauf.

- a)  $\{X < Y\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) < Y(\omega)\}, \{X \leq Y\}, \{X = Y\} \in \mathcal{A}$
- b) Sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so sind  
 $\alpha X + \beta, X + Y, X \cdot Y, X \wedge Y = \min\{X, Y\}, X \vee Y = \max\{X, Y\}$   
Zufallsvariablen
- c) Ist  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen, so sind auch  
 $\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$   
Zufallsvariablen, falls sie  $\mathbb{R}$ -wertig sind.  
Gilt  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \forall \omega \in \Omega$ , so ist auch  $X$  eine Zufallsvariable.

**Beweis** a)  $\{X < Y\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{X < q\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y > q\}}_{\in \mathcal{A}}$

$$\{X \leq Y\} = \{X > Y\}^c \in \mathcal{A}, \{X = Y\} = \{X \leq Y\} \cap \{X \geq Y\} \in \mathcal{A}$$

- b) (i)  $x \mapsto \alpha x + \beta$  ist stetig

- (ii)  $\{X + Y \leq a\} = \{X \leq a - Y\} = \{X \leq a - Y\} \in \mathcal{A} \forall a \in \mathbb{R}$ , da  $a - Y$  Zufallsvariable + Teil a)
- (iii)  $X \cdot Y = \frac{1}{4}((X + Y)^2 - (X - Y)^2)$
- (iv)  $\{X \vee Y \leq a\} = \{X \leq a\} \cap \{Y \leq a\} \in \mathcal{A}$
- c)  $\{\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \leq a\} \in \mathcal{A}$   
 $\inf_{n \in \mathbb{N}} X_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} (-X_n)$   
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} X_m$   
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} X_m$   
 Im Falle der Konvergenz ist  $X = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$  ■

**Bemerkung 5.3** Teil c) ist ohne Einschränkung gültig, wenn man  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$  betrachtet und  $\mathfrak{B}$  zu  $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathfrak{B} \cup \{-\infty\}, \{+\infty\})$  erweitert.

## 5.2 Verteilungen

### Definition 5.2

Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Die **Verteilung** der Zufallsvariablen ist die Mengenfunktion  $P_X : \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$  mit  $P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) \quad \forall B \in \mathfrak{B}$

### Bemerkung 5.4

a)  $P_X$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Messraum  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ , denn:

- $P_X(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$  (Normiertheit)
- Für  $B_1, B_2, \dots \in \mathfrak{B}$  paarweise disjunkt gilt: ( $\sigma$ -Additivität)

$$P_X\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i)$$

b) Die Abbildung  $P \rightarrow P_X$  nennt man **Maßtransport** vom Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  in den Messraum  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

## 5.3 Verteilungsfunktion

Eine Verteilung  $P_X : \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$  kann durch eine “einfachere” Funktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  beschrieben werden.

**Definition 5.3** Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Die Funktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}) = P_X((-\infty, x])$  heißt **Verteilungsfunktion** von  $X$ .

**Bemerkung 5.5** Da die Mengen  $(-\infty, x], x \in \mathbb{R}$  einen  $\cap$ -stabilen Erzeuger von  $\mathfrak{B}$  bilden, wird  $P_X$  durch  $F_X$  eindeutig festgelegt (siehe Satz 4.4)

**Satz 5.5**

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable und  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  ihre Verteilungsfunktion. Dann gilt:

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

b)  $F_X$  ist (schwach) monoton wachsend.

c)  $F_X$  ist rechtsseitig stetig.

**Beweis** b) folgt aus der Monotonie von  $P_X$

- a) Sei  $(x_n)$  eine reellwertige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$   
 Setze  $y_n := \sup_{m \geq n} x_m$ . Dann gilt  $y_n \downarrow -\infty$ , also  $(-\infty, y_n] \downarrow \emptyset$   
 Da  $P_X$  stetig in  $\emptyset$  ist (Satz 1.4) folgt:  
 $0 \leq F_X(x_n) = P_X((-\infty, x_n]) \leq P_X((-\infty, y_n]) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$   
 Andere Grenzwertaussage mit Stetigkeit von unten von  $P_X$
- c) Sei  $x \in \mathbb{R}, x_n \geq x \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$   
 Setze  $y_n = \sup_{m \geq n} x_m$ , also  $y_n \downarrow x$  und  
 $F_X(x) = P_X((-\infty, x]) \leq P_X((-\infty, x_n]) = F_X(x_n) \leq$   
 $\leq P_X((-\infty, y_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_X((-\infty, x]) = F_X(x)$   
 weil  $P_X$  stetig von oben.

Umgekehrt gibt es zu jeder Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit den Eigenschaften a), b), c) aus Satz 5.5 eine Zufallsvariable  $X$ , so dass  $F = F_X$ . ■

**Definition 5.4**

Es sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion mit den Eigenschaften a), b), c) aus Satz 5.5. Die **Quantilfunktion**  $F^{-1}$  zu  $F$  ist:

$$F^{-1}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) > y\}$$

**Bemerkung 5.6**

- a) Ist  $F$  stetig und streng monoton wachsend, so ist  $F^{-1}$  die übliche Umkehrfunktion.
- b) Für  $0 < \alpha < 1$  heißt  $F_X^{-1}(\alpha)$   $\alpha$ -Quantil zu  $X$

**Lemma 5.6**

$$y \leq F(x) \Leftrightarrow F^{-1}(y) \leq x, \quad \forall y \in (0, 1), x \in \mathbb{R}$$

**Beweis** “ $\Rightarrow$ ” Definition von  $F^{-1}$

“ $\Leftarrow$ ”  $F(x) < y \Rightarrow F(x + \frac{1}{n}) < y$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  ( $F$  ist rechtsseitig stetig)

$$\Rightarrow F^{-1}(y) \geq x + \frac{1}{n} \text{ (} F \text{ monoton wachsend)}$$

$$\Rightarrow F^{-1}(y) > x$$

■

**Satz 5.7**

Es sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion mit den Eigenschaften a), b), c) aus Satz 5.5. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit Verteilungsfunktion  $F$ .

**Beweis** Wähle  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}_{[0,1]}$ ,  $P = \text{Unif}[0, 1]$  (Gleichverteilung).

Definiere  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $X(\omega) := F^{-1}(\omega)$

Offenbar ist  $F^{-1}$  monoton wachsend, also  $X$  eine Zufallsvariable und

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \mid F^{-1}(\omega) \leq x\}) \stackrel{L.5.6}{=} P(\{\omega \in \Omega \mid \omega \leq F(x)\}) = P([0, F(x)]) = F(x)$$

■

