7. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

14. Mai 2016

Aufgabe 1

p Primzahl, $\forall n \in \mathbb{N}$ setze $c_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit diskr. Topologie.
Betrachte Teilmenge $\mathbb{Z}_p :\subseteq \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ der Tupel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$\forall m \geq n : x_m \equiv x_n (\mod p^n)$$

(a) Beh: $\mathbb{Z}_p$ ist Ring. zeige: $\mathbb{Z}_p$ ist Teilring von $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Nachrechnen: z. B. $(x_n), (y_n) \in \mathbb{Z}_p$
$\Rightarrow \forall m \geq n : x_m + y_m \equiv x_n + y_m (\mod p^n) \Rightarrow (x_n) + (y_n) \in \mathbb{Z}_p$

(b) $\mathbb{Z}_p$ ist kpompakt. Denn: klar: $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist kompakt (da endlich)
$\overset{\text{Tichonoff}}{\Longrightarrow} \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ ist kompakt.
Zeige: $\mathbb{Z}_p$ ist abgeschlossen in $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Beh: $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \backslash \mathbb{Z}_p$ ist offen.
Bew: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \backslash \mathbb{Z}_p$
$\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} : n \leq m$ und $x_m \not\equiv x_n (\mod p^n)$
Setze $U := \pi_n^- 1 (\{x_n\})$ ist offen in $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ und es ist $U \cup \mathbb{Z}_p = \emptyset$
$\Rightarrow$ Beh.

(c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p, a \mapsto ((a + p^n\mathbb{Z}))_{n\in\mathbb{N}}$. Nachrechnen: Das ist ein Ringhomomorphismus. Sein kern ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} p^n\mathbb{Z} = \{0\} \Rightarrow$ der Homomorphismus ist injektiv.

(d) Vergleiche Blatt 2, Aufgabe 4. Sei hier $p = 5$.
Beh: $\exists w = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_5$, sodass gilt: $w^5 = -1$, d.h. $x_n^2 \equiv -1 (\mod p^n)$.
Setze $x_1 := 2 \big(\text{denn } 2^2 = 4 \equiv -1 (\mod 5)\big)$
Weitere Folgenglieder werden induktiv definiert:
Sei x_n gefunden mit $x_n^2 \equiv -1 (\mod p^n)$
Zu zeigen: Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $(x_n + kp^n)^2 \equiv -1 (\mod p^{n+1})$

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow a_p &\overset{!}{=} (x_n + kp^n)^2 + 1 = x_n^2 + 2kx_np^n + k^2p^{2n} + 1 = (x_n^2 + 1) + 2kx_np^n + k^2p^{2n} \\ &= bp^n + 2kp^nx_n + k^2p^{2n} = p^n(2kx_n + b) + p^{2n}k^2\end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$
Es muss gelten: $2kx_n + b \equiv 0(\mod p)$. Das geht, denn $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist Körper, x_n kann nicht kongruent $0(\mod p)$ sein, da $x_n^2 \equiv -1(\mod p)$ wäre.

(e) Beh: $\mathbb{Z}_p$ ist überabzählbar.
Bew: z. B. Finde Bijektion von $\mathbb{Z}_p$ nach $[0, 1)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto 0, x_1x_2\ldots$ Oder: Fasse $\mathbb{Z}_p$ auf als „Potenzreihen“der form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n \quad a_i \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$ linearer Ringhomomorphismus.
Beh: φ ist stetige Linearform, d.h. $\exists\delta > 0 \forall f \in \mathcal{A} : |\varphi(f)| \leq \delta\|f\|$
Bew: Es gilt: $f - c = -c\left(1 - \frac{f}{c}\right)$. Es ist $\left\|\frac{f}{c}\right\| = \frac{1}{\|c\|} \cdot \|f\| < \frac{1}{|c|} \cdot |c| = 1$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f}{c}\right)^n$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-\frac{f}{c}} \Rightarrow (-c)^{-1} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f}{n}\right)^n$ ist invers zu $f - c$.
Beh: Es gilt $|\varphi(f)| \leq \|f\|$ für alle $f \in \mathcal{A}$.
Bew: Es gilt: $f - \varphi(f) \in \text{Kern}(\varphi)$ (Klar, da φ Ringhomomorphismus ist $\varphi\,(f - \varphi(f) \cdot 1_A) = \varphi(f) - \varphi(f)\varphi(1_A) = 0$
$\Rightarrow f - \varphi$ ist nicht invertierbar (da $\text{Kern}(\varphi)$ eis Ideal in $\mathcal{A}$, d.h. wäre $f - \varphi(f)$ invertierbar, wäre $\text{kern}(\varphi) = \mathcal{A} \Rightarrow \varphi = 0$.
$\overset{\text{Beh. 1}}{\Longrightarrow}$ *Beh.*

Aufgabe 2

Sei X norm. Raum, X seine Stone-Cech-Kompaktifizierung, K ein kompakter, normierter Raum, $\varphi : X \to K$ eine stetige Abbildung. Beh: φ kann eindeutig fortgesetzt werden zu einer stetigen Abbildung $\bar{X} \to K$.
Bew: X normal $\Rightarrow \bar{X}$ ex. und ist Teilmenge von $C_0(x, \mathbb{C})'$
K normal und kompakt $\Rightarrow \bar{K}$ ex. ist $\subseteq C_0(K,)'$ und ist gleich K.
. . . Rest wird ins Netz gestellt