17. Der Residuensatz und Folgerungen

Satz 17.1 (Residuensatz)
G sei ein Elementargebiet, es seien $z_1, \ldots, z_k \in G$ ($z_j \neq z_l$ für $j \neq l$) und es sei $f \in H(G \backslash \{z_1, \ldots, z_k\})$. Jedes z_j ist also eine isolierte Singularität von f. Weiter sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G \backslash \{z_1, \ldots, z_k\}$.
Dann:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} n(\gamma, z_j) Res(f, z_j)$$

Beweis
$\forall j \in \{1 \ldots k\}$ existiert ein $R_j > 0$: $\overline{U_{R_j}(z_j)} \subseteq G$ und $\overline{U_{R_j}(z_j)} \cap \overline{U_{R_l}(z_l)} = \emptyset$ ($j \neq l$). Sei $j \in \{1 \ldots k\}$.
$\overset{14.4}{\Rightarrow}$ f hat auf $U_{R_j}(z_j)$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - z_j)^{-n}}_{\varphi_j(z)} \qquad ,$$

wobei $\varphi_j \in H(\mathbb{C} \backslash \{z_j\})$
Definiere $g \in H(G \backslash \{z_1, \ldots, z_k\})$ durch $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(z)$.
Dann hat g in z_j eine hebbare Singularität($j = 1 \ldots k$). Also $g \in H(G)$. G ist ein Elementargebiet $\Rightarrow$ g hat eine Stammfunktion auf $G \overset{8.6}{\Rightarrow} \int_\gamma g(z)dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_\gamma \varphi_j(z)dz$.
Noch zu zeigen: $\int_\gamma \varphi_j(z)dz = 2\pi \mathrm{i}\; n(\gamma, z_j) a_{-1}^{(j)}$ ($j = 1 \ldots k$).
Die Reihe für φ_j konvergiert lokal gleichmäßig (14.3).
$\overset{8.4}{\Rightarrow} \int_\gamma \varphi_j(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} \int_\gamma (z - z_j)^{-n} dz$. Sei $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Die Funktion $\frac{1}{(z - z_j)^n}$ hat auf $G \backslash \{z_j\}$ die Stammfunktion $\frac{(z - z_j)^{-n+1}}{-n+1}$
$\overset{8.6}{\Rightarrow} \int_\gamma (z - z_j)^{-n} dz = 0 \; \forall n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$
$\Rightarrow \int_\gamma \varphi_j dz = a_{-1}^{(j)} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_j)} dz = a_{-1}^{(j)}\; n(\gamma, z_j) 2\pi \mathrm{i}$ ■

Folgerung 17.2
$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Elementargebiet, es sei $f \in H(G)$ und γ sei ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$.
Dann:

(1) **Cauchyscher Integralsatz für Elementargebiete**

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

(2) **Cauchysche Integralformel**

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \ \forall z \in G \backslash \mathrm{Tr}(\gamma)$$

Beweis

(1) Alle z_j in 17.1 sind hebbare Singularitäten. $\overset{14.4}{\Rightarrow}$ $Res(f(z_j)) = 0 \Rightarrow$ Behauptung.

(2) Sei $z_0 \in G\backslash \mathrm{Tr}(\gamma)$. $g \in H(G\backslash\{z_0\})$ sei definiert durch $g(w) := \frac{f(w)}{w-z_0}$. Sei $r > 0$, so dass $U_r(z_0) \subseteq G$
$\overset{10.4}{\Rightarrow} f(w) = a_0 + a_1(w-z_0) + \ldots \ \forall w \in U_r(z_0)$
$\Rightarrow g(w) = \frac{a_0}{w-z_0} + a_1 + a_2(w-z_0) + \ldots \ \forall w \in \dot{U}_r(z_0)$
$\Rightarrow Res(g, z_0) = a_0 = f(z_0)$
$\Rightarrow \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma g(w)dw \overset{17.1}{=} n(\gamma, z_0)f(z_0)$ ■

Für die Berechnung von Residuen an Polstellen

Satz 17.3
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f \in H(D\backslash\{z_0\})$ und f habe in z_0 einen Pol der Ordnung $m \geq 1$. Es existiert also (siehe 13.2) ein $g \in H(D)$ mit:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \ \forall z \in D\backslash\{z_0\}$$

und $g(z_0) \neq 0$. Dann:

(1) $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

(2) Ist $m = 1$, so ist $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)f(z)$

Beweis

(1) Sei $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$.
$\overset{10.4}{\Rightarrow} g(z) = b_0 + b_1(z-z_0) + \ldots + b_m(z-z_0)^m + \ldots \ \forall z \in U_r(z_0)$
$\Rightarrow f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)} + b_m + b_{m+1}(z-z_0) + \ldots \ \forall z \in \dot{U}_r(z_0) \Rightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = b_{m-1} \overset{10.4}{=} \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

(2) Aus (1) folgt: $\mathrm{Res}(f, z_0) = g(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)f(z)$ ■

Beispiel

(1) $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)}$ hat in $z = i$ und in $z = -1$ jeweils einen Pol der Ordnung 1. Also: $\mathrm{Res}(f, i) = \lim\limits_{z \to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}$; $\mathrm{Res}(f, -1) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$

(2) $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3 z}$ hat in $z = i$ einen Pol der Ordnung 3 und in $z = 0$ eine Pol der Ordnung 1. Hier ist $g(z) = \frac{1}{z}$. $g'(z) = -\frac{1}{z^2}, g''(z) = \frac{2}{z^3} \Rightarrow \mathrm{Res}(f, i) = \frac{2}{i^3 2!} = i$

Satz 17.4 (Das Argumentenprinzip)
$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Elementargebiet, es sei $f \in M(G)$, f habe in G genau die Pole $b_1, \dots, b_m$ (jeder Pol sei so oft aufgeführt, wie seine Ordnung angibt), f habe in G genau die Nullstellen $a_1, \dots, a_n$ (jede Nullstelle sei so oft aufgeführt, wie ihre Ordnung angibt) und γ sei ein stückweise glatter und geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G \backslash \{b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\}$.
Dann:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j)$$

Bemerkung: (1) in 17.4 ist $\{b_1, \dots, b_m\} = \emptyset$ oder $\{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$ zugelassen. I.d.Fall: $\sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j) = 0$ oder $\sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) = 0$

(2) $n(\gamma, a_j) = n(\gamma, b_k)$ $(j = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, m)$. Dann: $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz =$ Anzahl der Nullstellen von f $-$ Anzahl der Polstellen von f (jeweils gezählt mit Vielfachheiten!)

Beispiel
$f(z) = \frac{z}{(z-i)^2}$ $n = 1, a_n = 0, m = 2, b_1 = b_2 = i; \gamma(t) = 2e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$. $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1 - 2 = -1$

Beweis
(von 17.4) Sei $\beta_1, \dots, \beta_p$ die paarweise verschiedenen Pole von f $(p \le m)$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ die paarweise verschiedenen Nullstellen $(q \le n)$.
$h := \frac{f'}{f}$.
Dann: $h \in H(G \backslash \{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p\})$.
Dann:
$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma h(z) dz \overset{17.1}{=} \sum_{j=1}^q n(\gamma, \alpha_j) \mathrm{Res}(n, \alpha_j) + \sum_{j=1}^p n(\gamma, \beta_j) \mathrm{Res}(n, \beta_j)$.
Sei $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$, $\beta \in \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$, $\nu =$ Ordnung der Nullstelle von α von f und $\mu =$ Ordnung der Polstelle β von f.

Zu zeigen: $\mathrm{Res}(h, \alpha) = \nu$ und $\mathrm{Res}(h, \beta) = -\mu$.
$\overset{11.8}{=} \exists \delta > 0 : U_\delta(\alpha) \subseteq G$, $\exists \varphi \in H(U_\delta(\alpha))$ und $f(z) = (z - \alpha)^\nu \varphi(z)$ $\forall z \in U_\delta(\alpha)$ und $\varphi(z) \neq 0$ $\forall z \in U_\delta(\alpha)$.

Dann: $f'(z) = \nu (z - \alpha)^{\nu - 1} \varphi(z) + (z - \alpha)^\nu \varphi'(z)$ $\forall z \in U_\delta(\alpha)$

$$\Rightarrow h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z - \alpha} + \underbrace{\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}}_{\text{holomorph auf } U_\delta(\alpha)} \quad \forall z \in U_\delta(\alpha) \Rightarrow \mathrm{Res}(h, \alpha) = -\nu.$$

Analog: $\mathrm{Res}(h, \beta) = \mu$ (statt 11.8 nimmt man 13.2) ■

Folgerungen 17.5
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$, $\gamma(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$ und $f, g \in H(G)$.
Sei $N_f :=$ Anzahl der Nullstellen von f in $U_r(z_0)$ (gezählt mit Vielfachheiten!).

(1) Ist $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathrm{Tr}(\gamma) \Rightarrow N_f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

(2) **Satz von Rouché**
Gilt (*) $|g(z) - f(z)| < |f(z)| \ \forall z \in \mathrm{Tr}(\gamma)$, so gilt $N_f = N_g$

Beweis

(1) $\exists R > r : \overline{U_r(z_0)} \subseteq \overline{U_R(z_0)} \subseteq G$. Also: $\overline{U_r(z_0)} \subseteq U_R(z_0)$. $U_R(z_0)$ ist ein Elementargebiet. Seien $a_1, \dots, a_n$ die Nullstellen von f in $U_R(z_0)$. (gezählt mit Vielfachheiten).

$$\overset{17.4}{\Rightarrow} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{n(\gamma, a_j)}_{\overset{16.2}{=} \begin{cases} 1 & , a_j \in U_r(z_0) \\ 0 & , a_j \notin U_r(z_0) \end{cases}}$$

(2) Für $s \in [0,1] : h_s := f + s(g - f) \in H(G)$; $N(s) := N_{h_s}$. Aus (*) folgt $h_s(z) \neq 0 \ \forall s \in [0,1]$ $\forall z \in Tr(\gamma)$.
Aus (1): $N(s) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{h_s'(z)}{h_s(z)} dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f'(z) + s(g'(z) - f'(z))}{f(z) + s(g(z) - f(z))} dz$
$\Rightarrow$ die Funtion $s \mapsto N(s)$ ist stetig. Wegen $N(s) \subseteq \mathbb{N}_0 \ \forall s \in [0,1]$: $N(s)$ ist konstant. Also $N_f = N(0) = N(1) = N_g$ ■

Satz 17.6 (Satz von Hurwitz)
$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. (f_n) sei eine Folge in $H(G)$ und (f_n) konvergiert auf G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$. ($\overset{10.5}{\Rightarrow}$ $f \in H(G)$).
Dann:

(1) Ist $Z(f_n) = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Z(f) = \emptyset$ oder $f \equiv 0$

(2) Sind alle f_n auf G injektiv $\Rightarrow$ f ist auf G injektiv oder f ist auf G konstant.

Beweis

(1) Sei $f \not\equiv 0$ auf G; $z_0 \in G$, $r > 0$ so, dass $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$ und $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$.
$\gamma(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$ ($t \in [0, 2\pi]$). (f_n) konvergiert auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f. $\overset{10.5}{\Rightarrow}$ (f_n') konvergiert auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f'.
Übung: $(\frac{1}{f_n})$ konvergiert auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.
Fazit: $(\frac{f_n'}{f_n})$ konvergiert auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen $(\frac{f'}{f})$.

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f_n'}{f_n} dz}_{\overset{17.5}{N_{f_n} = 0}} \to \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz}_{\overset{17.5}{N_f}}$$

Also: $N_f = 0$. Somit: $f(z_0) \neq 0$

(2) Sei $z_0 \in G$. $g_n = f_n - f_n(z_0)$, $g := f - f(z_0)$. $\widetilde{G} := G \setminus \{z_0\}$. Dann:
(g_n) konvergiert auf $\widetilde{G}$ lokal gleichmäßig gegen g. $g_n(z) \neq 0 \forall z \in \widetilde{G}$
(1) $\Rightarrow g \equiv 0$ oder $g(z) \neq 0 \ \forall z \in \widetilde{G} \Rightarrow f$ ist auf G konstant oder $f(z) \neq f(z_0) \ \forall z \in G \setminus \{z_0\}$ ■

Berechnung von Integralen

Satz 17.7
Sei $R(x,y) = R(x+iy) = R(z)$ eine rationale Funktion ohne Pole auf $\partial\mathbb{D}$. Weiter sei $R_1(z) = \frac{1}{iz}R(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i})$ und $M := \{z \in \mathbb{D} : z \text{ ist ein Pol von } R_1\}$ (endlich)
Dann:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = 2\pi i \sum_{z\in M} Res(R_1, z)$$

Beweis
$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} R(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}) ie^{it} dt$
$= \int\limits_\gamma R_1(z)dz$, wobei $\gamma(t) = ie^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$.
Also: $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int\limits_\gamma R_1(z)dz \overset{17.1}{=} 2\pi i \sum\limits_{\text{z Pol von } R_1} \underbrace{n(\gamma, z)}_{=\begin{cases}1 & ,z\in M\\ 0 & ,z\notin M\end{cases}} Res(R_1, z)$. ■

Satz 17.8
Z und N seien Polynome. $R := \frac{Z}{N}$ habe auf $\mathbb{R}$ keine Pole und es gelte (*) grad $N \geq$ grad $Z+2$ ($\implies \int\limits_\mathbb{R} R(x)dx$ konvergiert absolut). Weiter sei $M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ z \text{ ist Pol von } R\}$.
Dann:
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{z\in M} Res(R, z)$

Beweis
(*) $\implies \exists m \geq 0 \exists c > 0 : |R(z)| \leq \frac{m}{|z|^2} \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > c$. (**)
Sei $\delta > c$ so gross, dass alle Pole von R in $U_\delta(0)$ liegen.
$\gamma_1(t) := t$ $(t \in [-\delta, \delta])$; $\gamma_2(t) := \delta e^{it}$ $(t \in [0, \pi])$ $\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2$.
$\int\limits_\gamma R(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} R(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} R(z)dz$.
$\int\limits_{\gamma_1} R(z)dz = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(t)dt$ $(\delta \to \infty)$.
Sei $z \in \operatorname{Tr}(\gamma_2)$. Dann: $|z| = \delta > 0$, also nach (**): $|R(z)| \leq \frac{m}{|z|^2} = \frac{m}{\delta^2} \implies |\int\limits_{\gamma_2} R(z)dz| \leq \frac{m}{|z|^2} L(\gamma_2) \leq \frac{m\pi\delta}{\delta^2} = \frac{m\pi}{\delta}$
$\implies \int\limits_{\gamma_2} R(z)dz \to 0$ $(\delta \to \infty)$. Dann: $\int\limits_\gamma R(z)dz \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ $(\delta \to \infty)$. 17.1 $\implies \int\limits_\gamma R(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{\text{z Pol von R}} \underbrace{n(\gamma, z)}_{=\begin{cases}1 & ,z\in M\\ 0 & ,z\notin M\end{cases}} Res(R, z)$. . ■