

## 12. Der Existenzsatz von Peano

### Definition

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $(x_0, y_0) \in D$  und  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Gleichung:

$$(i) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (x \in I)$$

heißt eine **Integralgleichung**.  $y \in C(I)$  heißt eine **Lösung von (i) auf  $I$**  :  $\iff (t, y(t)) \in D \forall t \in I$  und es gilt (i)  $\forall x \in I$ .

Wir betrachten auch noch das AWP

$$(ii) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

### Satz 12.1 (Zusammenhang Integral- und Differenzialgleichung)

$D, f, (x_0, y_0)$  und  $I$  seien wie oben und  $y \in C(I)$ . Es sei  $f \in C(D, \mathbb{R})$ .

- (1)  $y$  ist eine Lösung von (i) auf  $I \iff y$  ist eine Lösung von (ii) auf  $I$
- (2) Sei  $I = [a, b]$  und  $D = I \times \mathbb{R}$ . Ist  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  def. durch  $(T_y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ ,  $x \in I$ , so gilt:  $y$  ist eine Lösung von (ii) auf  $I \iff T_y = y$

### Beweis

- (1) " $\implies$ ":  $y(x_0) = y_0$ ; Durch Differentiation:  $y'(x) = f(x, y(x)) \forall x \in I$   
 $\Leftarrow$ :  $y'(x) = f(t, y(t)) \forall t \in I$  und  $y(x_0) = y_0 \implies \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = \int_{x_0}^x y'(t) dt = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0 \forall x \in I$
- (2)  $T_y = y \iff y$  löst (i) auf  $I \iff y$  löst (ii) auf  $I$ . ■

### Satz 12.2 (Lösungen auf Teilintervallen)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $\Gamma \neq \emptyset$  ( $\Gamma$  ist Indexmenge). Für jedes  $\gamma \in \Gamma$  sei  $y_\gamma : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$  (wobei  $I_\gamma \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall) eine Lösung der Dgl.:

$$(+)\quad y'(x) = f(x, y)$$

auf  $I_\gamma$ .

Weiter sei  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \neq \emptyset$  und für je zwei Lösungen  $y_{\gamma_1} : I_{\gamma_1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_{\gamma_2} : I_{\gamma_2} \rightarrow \mathbb{R}$  von (+) gelte  $y_{\gamma_1} = y_{\gamma_2}$  auf  $I_{\gamma_1} \cap I_{\gamma_2}$ .

Setzt man  $I := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$  und  $y(x) := y_\gamma(x)$ , falls  $x \in I_\gamma$ , so ist  $I$  ein Intervall und  $y$  eine Lösung von (+) auf  $I$ .

**Beweis**Übung. ■**Folgerung 12.3**

Sei  $I = [a, b]$ ,  $S := I \times \mathbb{R}$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $I_1 := [a, x_0]$ ,  $I_2 := [x_0, b]$  und  $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  seien Lösungen des AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf  $I_1$  bzw  $I_2$ . Definiert man  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x), & \text{falls } x \in I_1 \\ y_2(x), & \text{falls } x \in I_2 \end{cases}$$

so ist  $y$  eine Lösung des AWP auf  $I$ .

**Satz 12.4 (Der Existenzsatz von Peano (Version I))**

$I$  und  $S$  seien wie in 12.3,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$  und  $f \in C(S, \mathbb{R})$  sei beschränkt. Dann hat das AWP:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine Lösung auf  $I$ .

Wir führen zwei Beweise. In beiden sei  $M := \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in S\}$  und  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  sei definiert durch  $(T_y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \, dt$  ( $x \in I$ )

**Beweis (mit 11.3)**

Sei  $A \subseteq C(I)$  sei wie in 11.5 (mit obigen  $M$ ).  $11.5 \implies A \neq \emptyset$ ,  $A$  ist konvex und kompakt.  $T : A \rightarrow C(I)$  ist stetig. Wegen 11.3 und 12.1(2) ist nur noch zu zeigen:  $T(A) \subseteq A$ . Sei  $y \in A$ . Dann  $(T_y)(x_0) = y_0$ . Weiter gilt

$\forall x, \bar{x} \in I : |(T_y)(x) - (T_y)(\bar{x})| = \left| \int_x^{\bar{x}} \underbrace{f(t, y(t))}_{\leq M} dt \right| \leq M \cdot |x - \bar{x}|$ . Also:  $T_y \in A$ . Somit:  $T(A) \subseteq A$ . ■

**Beweis (Nr.2)**

Wir unterscheiden 3. Fälle:  $x_0 = a$ ,  $x_0 = b$  und  $x_0 \in (a, b)$ . Wir führen den Beweis nur für den Fall  $x_0 = a$  (den Fall  $x_0 = b$  zeigt man analog; der Fall  $x_0 \in (a, b)$  folgt aus 12.3 und den ersten beiden Fällen).

Sei also  $x_0 = a$ . o.B.d.A.  $x_0 + \frac{1}{n} = a + \frac{1}{n} \in I \, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $z_n : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$z_n(x) := \begin{cases} y_0, & \text{falls } x \leq x_0 = a \\ y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_n(t - \frac{1}{n})) dt, & \text{falls } x \in I \end{cases}$$

Beh.:  $z_n$  ist auf  $I$  wohldefiniert.

Sei  $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n}]$  und  $t \in [x_0, x] \implies t - \frac{1}{n} \leq x - \frac{1}{n} \leq x_0 \implies z_n(t - \frac{1}{n}) = y_0 \implies z_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$ , also  $z_n(x)$  ist wohldef.

Sei  $x \in [x_0 + \frac{1}{n}, x_0 + \frac{2}{n}]$  und  $t \in [x_0, x] \implies t - \frac{1}{n} \leq x - \frac{1}{n} \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n}] \implies z_n(t - \frac{1}{n})$  wohldef.  $\implies z_n(x)$  ist wohldefiniert, etc...

Übung:  $z_n \in C(-\infty, b]$ .

Insbesondere:  $z_n \in C(I)$ . Es ist  $z_n(x_0) = y_0$ . Für  $x, \bar{x} \in I : |z_n(x) - z_n(\bar{x})| = |\int_x^{\bar{x}} f(t, z_n(t - \frac{1}{n})) dt| \leq M \cdot |x - \bar{x}|$ . 11.4  $\implies (z_n)$  enthält eine auf  $I$  gleichmäßige konvergente Teilfolge.

o.B.d.A.:  $(z_n)$  konvergiert auf  $I$  glm.

$y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x)$  ( $x \in I$ ). AI  $\implies y \in C(I)$ . Also  $z_n \rightarrow y$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ . ( $\|z_n - y\|_\infty \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ));

$g_n(t) := z_n(t - \frac{1}{n})$  ( $t \in I$ ).  $\forall t \in I : |g_n(t) - y(t)| = |g_n(t) - z_n(t) + z_n(t) - y(t)| \leq \underbrace{|z_n(t - \frac{1}{n}) - z_n(t)|}_{\leq \frac{M}{n}} +$

$\underbrace{|z_n(t) - y(t)|}_{\leq \|z_n - y\|_\infty}$

$\implies \|g_n(t) - y(t)\|_\infty \leq \frac{M}{n} + \|z_n - y\|_\infty \forall n \in \mathbb{N} \implies g_n \rightarrow y$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  (glm. konv.)

$T : C(I) \rightarrow C(I)$  ist stetig  $\implies T_{g_n} \rightarrow T_y$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$

$(T_{g_n})(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_n(t - \frac{1}{n})) dt = z_n(x) \forall x \in I \implies T_{g_n} = z_n$  auf  $I$ .

Also  $T_y = y$  und damit folgt,  $y$  löst das AWP auf  $I$ . ■

### Satz 12.5 (Der Existenzsatz von Peano (Version II))

Es sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, s > 0$  und  $R := I \times [y_0 - s, y_0 + s]$

Es sei  $f \in C(R, \mathbb{R}), M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$  und

$J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$ . Dann hat das AWP:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine Lösung auf  $J$ .

### Beweis

$S := I \times \mathbb{R}$ . Def.  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  durch:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in R \\ f\left(x, y_0 + s \frac{y - y_0}{|y - y_0|}\right), & x \in I, |y - y_0| \geq s \end{cases}$$

Dann:  $g = f$  auf  $R$ ,  $|g| \leq M$  auf  $S$  und  $g \in C(S, \mathbb{R})$

Betrachte das AWP

$$(+)\begin{cases} y' = g(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

12.4  $\implies (+)$  hat eine Lösung  $\bar{y}$  auf  $I$ . 12.1  $\implies$

$$(*) \bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t, \bar{y}(t)) dt \quad \forall x \in I$$

## 12. Der Existenzsatz von Peano

Sei  $x \in J$ . Sei  $y := \bar{y}|_J$ . Dann:  $|y(x) - y_0| = |\bar{y}(x) - y_0|$   
 $\stackrel{(*)}{=} \left| \int_{x_0}^x g(t, \bar{y}(t)) dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot \frac{s}{M} = s \implies (x, y(x)) \in R$   
 $\implies (t, y(t)) \in R$  für  $t$  zwischen  $x$  und  $x_0$ .  
 $\implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \quad \forall x \in J$   
 $\stackrel{12.1}{\implies} y$  löst das AWP auf  $J$  ■

### Satz 12.6 (Der Existenzsatz von Peano (Version III))

Sei  $D \in \mathbb{R}^2$  offen,  $(x_0, y_0) \in D$  und  $f \in C(D, \mathbb{R})$ . Dann ex.  $\delta > 0$  : das AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat eine Lösung  $y : K \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  (also  $x_0 \in K^0$ )

### Beweis

$D$  offen  $\implies \exists r, s > 0 : R := [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s] \subseteq D$

$M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$

$\delta := \min\{r, \frac{s}{M}\}, K := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  12.5  $\implies$  Beh. ■