15. g-adische Entwicklungen

Vereinbarung: Stets in diesem Paragraphen: $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, $G := \{0, 1, \ldots, g-1\}$.

Satz 15.1 (Konvergenz g-adischer Entwicklungen)

(1) Sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $G \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$ ist konvergent.

(2) Ist $m \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{1}{g^{m-1}}$

Beweis

(1) $\frac{|z_n|}{g^n} = \frac{z_n}{g^n} \leq \frac{g-1}{g^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}$ ist konvergent $\overset{12.2}{\implies}$ Behauptung.

(2) $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{g-1}{g^m} + \frac{g-1}{g^{m+1}} + \ldots = \frac{g-1}{g^m} \cdot (1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \ldots) = \frac{g-1}{g^m} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{g}} = \frac{1}{g^{m-1}}$. ∎

Definition

Sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in G und es gelte $(*) z_n \neq g-1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt $0, z_1 z_2 z_3 \ldots := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$ ein g-**adischer Bruch** oder eine g-**adische Entwicklung**.

Beispiele:

(1) $g = 10$ (Dezimalentwicklung); $0,333\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$.

(2) $g = 2$ (Dualentwicklung); $0,111000\ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Bemerkung: (1) Die Negation von $(*)$ lautet: $z_n = g-1$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

(2) Ist $0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ ein g-adischer Bruch und existiert ein $m \in \mathbb{N} : z_n = 0$ für $n > m$, so schreibt man: $0, z_1 z_2 z_3 \ldots z_m$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seien konvergent und es gelte $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Gilt zusätzlich $a_n < b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (Beweis in Übung).

Satz 15.2 (Eindeutigkeit der g-adischen Entwicklung)

Sei $a = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ ein g-adischer Bruch.

(1) $a \in [0, 1)$

(2) Ist $0, w_1 w_2 w_3 \ldots$ eine weitere g-adische Entwicklung von a, so gilt $z_n = w_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis

(1) $0 \leq a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} \overset{(*),Bem.(2)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} \overset{15.1}{=} 1$.

(2) **Annahme:** $\exists n \in \mathbb{N} : z_n \neq w_n$. Sei m der kleinste solche Index, also $z_m \neq w_m$ und $z_j = w_j$ für $j = 1, \dots, m-1$. Etwa $z_m < w_m \implies z_m - w_m < 0 \overset{z_m - w_m \in \mathbb{Z}}{\implies} z_m - w_m \leq -1$. $\forall n \in \mathbb{N} : z_n - w_n \leq z_n \leq g-1$. $\exists \nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \geq m+1$ und $z_\nu - w_\nu < g-1$. (andererenfalls $z_\nu - w_\nu = g-1 \; \forall \nu \geq m+1 \implies z_\nu = w_\nu + g - 1 \; \forall \nu \geq m+1 \implies w_\nu = 0 \; \forall \nu \geq m+1 \implies z_\nu = g-1 \; \forall \nu \geq m+1$. Widerspruch zu $(*)$). Dann:

$$0 = a - a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{g^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n}$$

$$= \underbrace{\frac{z_m - w_m}{g^m}}_{\leq -\frac{1}{g^m}} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n}}_{< \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}} < -\frac{1}{g^m} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}}_{\overset{15.1}{=} \frac{1}{g^n}} = 0$$

$\implies 0 < 0$ Widerspruch. ■

Satz 15.3 (Existenz der g-adischen Entwicklung)
Ist $a \in [0,1)$, so lässt sich a eindeutig als g-adischer Bruch darstellen.

Beweis
Eindeutigkeit siehe 15.2.
Existenz: Definiere $(z_n)_{n\geq 1}$ wie folgt: $z_1 := [a \cdot g]$, $z_{n+1} := [(a - \frac{z_1}{g} - \frac{z_2}{g} - \dots - \frac{z_n}{g}) \cdot g^{n+1}]$ $(n \geq 1)$.
In der Übung: $z_n \in G \; \forall n \in \mathbb{N}$

Es gilt: $(**)$ $\underbrace{\frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \cdots \frac{z_n}{g^n}}_{=:s_n} \leq a < \underbrace{\frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \cdots \frac{z_n}{g^n}}_{=:s_n} + \frac{1}{g^n} \; \forall n \in \mathbb{N} \implies s_n \leq a < s_n + \frac{1}{g^n} \; \forall n \in \mathbb{N} \overset{n \to \infty}{\implies} a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$.

Noch zu zeigen ist: $z_n \neq g-1$ für unendlich viele n. **Annahme**: $\exists m \in \mathbb{N} : z_n = g-1 \; \forall n \geq m$.
Dann: $a = \sum_{n=1}^{\infty} z_n g^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{m-1} \frac{z_n}{g^n}}_{=s_{m-1}} + \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}}_{=\frac{1}{g^{m-1}}} \implies a = s_{m-1} + \frac{1}{g^{m-1}}$ Widerspruch zu $(**)$. ■

Bemerkung: Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, so lässt sich a eindeutig in der Form $a = [a] + 0, z_1 z_2 z_3 \dots$ darstellen. Ist $g = 10$, so schreibt man dafür $a = [a], z_1 z_2 z_3 \dots$. Beispiel: $1,333\dots$

Satz 15.4 ($\mathbb{R}$ ist überabzählbar)
Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis
Es genügt zu zeigen: $[0,1)$ ist überabzählbar.

Annahme: $[0,1)$ ist abzählbar, also $[0,1) = \{a_1, a_2, \dots\}$, $a_j \neq a_k$ für $j \neq k$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$ die 3-adische Entwicklung von a_j. ($z_k^{(j)} \in \{0,1,2\}$).

$$z_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } z_k^{(k)} \in \{0,2\} \\ 0 & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Dann: $z_k \neq z_k^{(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_k \neq g-1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. $a := 0,z_1z_2z_3\ldots = \sum_{n=1}^\infty \frac{z_n}{g^n}$. 15.2 $\implies a \in [0,1) \implies \exists m \in \mathbb{N} : a = a_m \implies 0,z_1z_2z_3\ldots = 0,z_1^{(m)}z_2^{(m)}z_3^{(m)}\ldots$. 15.2 $\implies z_j = z_j^{(m)}$ $\forall j \in \mathbb{N} \implies z_m = z_m^{(m)}$. Widerspruch! ■