7. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Stets in diesem Paragraphen: $n = p = 1$, $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $a, s : I \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + s(x)$$

heißt eine **lineare Differentialgleichung (1. Ordnung)**, sie heißt **homogen**, falls $s \equiv 0$, anderenfalls **inhomogen**, s heißt **Störfunktion**.

Wir betrachten zunächst die zu obiger Gleichung gehörende **homogene** Gleichung

$$(H) \quad y' = a(x)y$$

Wegen Ana I, 23.14 besitzt a auf I eine Stammfunktion A.

Satz 7.1 (Lösung einer linearen Dgl 1. Ordnung)
Sei $J \subseteq I$ ein Intervall und $y : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. y ist eine Lösung von (H) auf $J \iff \exists c \in \mathbb{R} : y(x) = ce^{A(x)}$

Beweis
„$\Longleftarrow$“: $y'(x) = ce^{A(x)}A'(x) = a(x)y(x)\ \forall x \in J \implies y$ löst (H).

„$\Longrightarrow$“: $g(x) := \frac{y(x)}{e^{A(x)}}$ $(x \in J)$. Nachrechnen: $g'(x) = 0\ \forall x \in J \implies \exists c \in \mathbb{R} : g(x) = c\ \forall x \in J \implies y(x) = ce^{A(x)}$ $(x \in J)$. ∎

Satz 7.2 (Eindeutige Lösbarkeit eines linearen AWPs 1. Ordnung)
Seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat das

$$\text{AWP: } \begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung.

Beweis
Sei $c \in \mathbb{R}$ und $y(x) := ce^{A(x)}$ $(x \in I)$.

$y_0 = y(x_0) \iff y_0 = ce^{A(x)} \iff c = y_0 e^{-A(x_0)}$. ∎

Beispiel

$$\text{AWP: } \begin{cases} y' = (\sin x) y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (I = \mathbb{R})$$

$a(x) = \sin x,\ A(x) = -\cos x$; allgemeine Lösung der Dgl: $y(x) = ce^{-\cos x}$ $(c \in \mathbb{R})$

$1 = y(0) = ce^{-\cos 0} = ce^{-1} \implies c = e.$

Lösung des AWPs: $y(x) = ee^{-\cos x} = e^{1-\cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Wir betrachten jetzt die **inhomogene Gleichung**

$$(IH) \quad y' = a(x)y + s(x).$$

Für eine spezielle Lösung y_s von (IH) auf I macht man folgenden Ansatz: $y_s(x) = c(x)e^{A(x)}$, wobei $c : I \to \mathbb{R}$ db. Dieses Verfahren heißt **Variation der Konstanten**.

y_s ist eine Lösung von (IH) auf I
$\iff y_s'(x) = a(x)y_s(x) + s(x)$
$\iff c'(x)e^{A(x)} + c(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)y_s(x) + s(x)$
$\iff c'(x)e^{A(x)} + a(x)y_s(x) = a(x)y_s(x) + s(x)$
$\iff c'(x)e^{A(x)} = s(x)$
$\iff c'(x) = e^{-A(x)}s(x)$
$\iff c$ ist eine Stammfunktion von $e^{-A}s$ auf I.

Nach Ana I, 23.14 besitzt $e^{-A}s$ eine Stammfunktion auf I.

Fazit: Die Gleichung (IH) besitzt Lösungen auf I.

Aus 7.1 folgt

$$L_H = \{y : I \to \mathbb{R} : y \text{ löst } (H) \text{ auf } I\}$$

$$L_{IH} := \{y : I \to \mathbb{R} : y \text{ löst } (IH) \text{ auf } I\}$$

Bekannt:

$$L_{IH} \neq \emptyset$$

Satz 7.3 (Spezielle Lösungen bei AWPs)
$J \subseteq I$ sei ein Intervall, $y_s \in L_{IH}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$

(1) Ist $y : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (IH) auf $J \Rightarrow \exists y_1 \in L_H : y = y_1 + y_s$ auf J.

(2) $y \in L_{IH} \Leftrightarrow y = y_1 + y_s$ mit $y_1 \in L_H$

(3) Das AWP $y' = a(x)y + s(x)$, $y(x_0) = y_0$, ist auf I eindeutig lösbar

Beweis

(1) $y_1 := y - y_s$ auf $J \Rightarrow y_1' = y' - y_s' = a(x)y + s(x) - (a(x)y_s + s(x)) + s(x)) = a(x)(y - y_s) = a(x)y_1 \Rightarrow y_1$ löst (H) auf $J \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : y_1(x) = ce^{A(x)} \Rightarrow y(x) = ce^{A(x)} + y_s(x) \forall x \in J$

(2) „$\Rightarrow$": folgt aus (1) mit $J = I$
„$\Leftarrow$": $y = y_1 + y_s \Rightarrow y' = y_1' + y_s' = a(x)y_1 + y(x)y_s + s(x) = a(x)(y_1 + y_s) + s(x) = a(x)y + s(x) \Rightarrow y \in L_H$

(3) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $y(x) = ce^{A(x)} + y_s(x) \overset{(2)}{\Rightarrow} y \in L_{IH}; y_0 = y(x_0) \Leftrightarrow ce^{A(x_0)} + y_s(x_0) = y_0 \Leftrightarrow c = (y_0 - y_s(x_0))e^{-A(x_0)}$ ∎

Beispiel

(1) Bestimme die allgemeine Lösung von $y' = 2xy + x$ auf $\mathbb{R}$
1. Schritt: homogene Gleichung: $y' = 2xy$; allgemeine Lösung:
$y(x) = ce^{x^2}(c \in \mathbb{R})$
2. Schritt: Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:
$y_s(x) = c(x)e^{x^2}$.
$y_s' = c'(x)e^{x^2} + c(x)2xe^{x^2} \overset{!}{=} 2xy_s(x) + x = 2xc(x)e^{x^2} + x$
$\Rightarrow c'(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow c(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$
$\Rightarrow y_s(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = -\frac{1}{2}$
Allgemeine Lösung von $y' = 2xy + x$:
$y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}(c \in \mathbb{R})$

(2) Löse das AWP: $y' = 2y + e^x$, $y(0) = 1$
1. Schritt: homogene Gleichung $y' = 2y$,
allgemeine Lösung $y(x) = ce^{2x}(c \in \mathbb{R}$
2. Schritt: Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:
$y_s(x) = c(x)e^{2x}$
$y_s'(x) = c'(x)e^{2x} + c(x)2e^{2x} \overset{!}{=} 2y_s(x) + e^x$
$= 2c(x)e^{2x} + e^x$
$\Rightarrow c'(x)e^{2x} = e^x \Rightarrow c'(x) = e^{-x} \Rightarrow c(x) = -e^{-x} \Rightarrow y_s(x) = -e^x$
Allgemein Lösung von $y' = 2y + e^x : y(x) = ce^{2x} - e^x$
3. Schritt: $1 = y(0) = c - 1 \Rightarrow c = 2$
Lösung des AWP: $y(x) = 2e^{2x} - e^x$