

Kapitel 3

Lokale Eigenschaften

§ 15 Lokale Ringe

Definition 15.1

Sei k ein Körper, V quasiprojektive Varietät über k , $x \in V$.

a) $\mathcal{O}_{V,x} = \{[(U, f)]_{\sim} : U \text{ offene Umgebung von } x, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$ mit

$$(u, f) \sim (U', f') : \Leftrightarrow f|_{u \cap U'} = f'|_{u \cap U'}$$

$\mathcal{O}_{V,x}$ heißt **lokaler Ring** von V in x .

b) Die Elemente von $\mathcal{O}_{V,x}$ heißen **Keime** von regulären Funktionen. *Schreibweise:* $(U, f)_{\sim} =: f_x$

Beispiel

$$V = \mathbb{A}^1(k), x = 0$$

$$U \text{ offen} \Rightarrow U = \mathbb{A}^1(k) - \{x_1, \dots, x_n\}, x_i \neq 0$$

$$f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow f = \frac{g}{h} \text{ auf } h(y) \neq 0 \text{ für } y \neq x_i \ (i = 1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(k),0} = \left\{ \frac{g}{h} : g, h \in k[X], h(0) \neq 0 \right\} = k[X]_{(X)} \text{ mit der Notation } (R \text{ Ring, } \mathfrak{p} \text{ Primideal})$$

$$R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

$\mathfrak{p} \cdot R$ ist das einzige maximale Ideal in $R_{\mathfrak{p}}$.

Bemerkung 15.2

Seien k, V, x und $\mathcal{O}_{V,x}$ wie in 15.1.

a) Die Abbildung $\varphi_x : \mathcal{O}_{V,x} \rightarrow k, f_x \mapsto f(x)$ ist surjektiver k -Algebra-Homomorphismus („Einsetzungshomomorphismus“).

b) $\mathcal{O}_{V,x}$ ist lokaler Ring mit maximalem Ideal $m_x = \{f_x \in \mathcal{O}_{V,x} : f(x) = 0\} = \text{Kern}(\varphi_x)$.

Beweis

a) ✓

b) $\text{Kern}(\varphi_x)$ ist maximales Ideal, da $\mathcal{O}_{V,x}/m_x = k$ Körper ist.

m_x ist das einzige maximale Ideal: Sei $f_x \in \mathcal{O}_{V,x} - m_x \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$ für ein

$$(U, f) \text{ mit } (U, f)_{\sim} = f_x$$

$$\Rightarrow g := \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_V(U') \text{ für } U' := D(f) \cap U$$

$$\Rightarrow g_x := (U', g)_{\sim} \in \mathcal{O}_{V,x}$$

$$\Rightarrow f_x \cdot g_x = 1$$

□

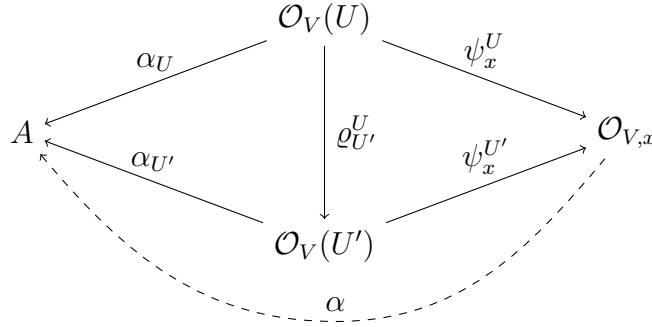
Bemerkung 15.3

a) Für jedes offene $U \subseteq V$ mit $x \in U$ ist

$$\psi_x^U : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_V(U) & \rightarrow & \mathcal{O}_{V,x} \\ f & \mapsto & f_x \end{array}$$

ein k -Algebra-Homomorphismus.

b) Zusammen mit dem Restriktionshomomorphismus $\varrho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \rightarrow \mathcal{O}_V(U')$ für $U' \subset U$ bilden die ψ_x^U ein injektives System von k -Algebra-Homomorphismen. Es ist $\varinjlim_{\substack{x \in U \\ U \subset V \text{ offen}}} \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V,x}$



c) ψ_x^U ist injektiv, falls $U \subseteq \bigcup_{\substack{V_i \text{ irred. Komp.} \\ \text{v. } V \text{ mit } x \in V_i}} V_i$

Proposition 15.4

Seien V, x wie in Definition 15.1, $V_0 \subseteq V$ offen, affin mit $x \in V_0$. Dann ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong k[V_0]_{m_x^{v_0}}$, wobei $m_x^{v_0} = f \in k[V_0] \mid f(x) = 0$, insbesondere ist $\mathcal{O}_{V,x}$ von V_0 unabhängig

Beweis

Sei $\alpha : k[V_0]_{m_x^{v_0}} \rightarrow \mathcal{O}_{V,x}, \frac{f}{g} \mapsto (D(g), y \mapsto \frac{f(y)}{g(y)})_{\sim}$

α ist wohldefinierter k -Algebra-Homomorphismus.

α ist injektiv: Sei $\alpha(\frac{f}{g}) = 0$

Dann gibt es $U \subset G(g)$ offen mit $f(y) = 0$ für alle $y \in U$.

$\Rightarrow W = V_0 - U$ ist abgeschlossen in $V_0, x \notin W$

\Rightarrow Dann gibt es $h \in I(W)$ mit $h(x) \neq 0$ (weil $V(I(W)) = W$ ist)

$\Rightarrow h \notin m_y^{V_0}$ mit $h(y) \cdot f(y) = 0$ für alle $y \in V_0$

$\Rightarrow f = 0$ in $k[V_0]_{m_x^{v_0}}$

$\Rightarrow \frac{f}{g} = 0$ in $k[V_0]_{m_x^{v_0}}$

α ist surjektiv: Sei $(U, f)_{\sim} \in \mathcal{O}_{V,x}$

$\exists U \subseteq V_0, U = D(h)$ für ein $h \in k[V_0]$

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V_0}(U) = k[V_0]_h$

$\Rightarrow (U, f)_{\sim} = \alpha(\frac{f}{h})$

□

Proposition 15.5

Seien V, W quasiprojektive Varietäten, $x \in V, y \in W$. Ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{W,y}$ (als k -Algebren), so gibt es offene Umgebungen $U \subseteq V$ von x und $U' \subseteq W$ von y mit $U \cong U'$ (als quasiprojektive Varietäten).

Beweis

Seien $U_x \subseteq V$, beziehungsweise $U_y \subseteq W$ offene affine Umgebungen von x beziehungsweise y wie in 15.3 c), also $\psi_x^{U_x}$ und $\psi_y^{U_y}$ injektiv. Seien f_1, \dots, f_r Erzeuger von $\mathcal{O}_V(U_x) = k[U_x]$ als k -Algebra. Sei weiter $\varphi : \mathcal{O}_{V,x} \rightarrow \mathcal{O}_{W,y} \cong k[U_y]_{m_x^{U_y}}$ ein Isomorphismus.

Für die Keime gilt also: $(f_i)_x = \frac{g_i}{h_i}$ mit $h_i, g_i \in k[U_y], h_i(y) \neq 0, i = 1, \dots, r$

Sei $U'_y \subseteq U_y$ offen, affin mit $\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}_W(U'_y), i = 1, \dots, r$ (also z. B. $U'_y = U_y \cap D(h_1) \cap \dots \cap D(h_r)$)

$\Rightarrow \varphi \circ \psi_x^{U_x}$ induziert injektiven k -Algebra-Homomorphismus

$$k[U_x] \rightarrow k[U'_y]$$

Dieser entspricht dominantem Morphismus $f : U'_y \rightarrow U_x$. Genauso erhalten wir dominanten Morphismus $g : U'_x \rightarrow U_y$.

f und g sind zueinander inverse rationale Abbildung $U_x \xrightarrow{\sim} U_y$ □

Bemerkung 15.6

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ Morphismus von quasiprojektiven Varietäten, $x \in V$. Dann induziert φ einen k -Algebra-Homomorphismus

$$\varphi_x^\# : \mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{V,x} \text{ mit } \varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}) \subseteq m_x$$

Beweis

☞ V, W affin (wegen Proposition 15.4).

φ induziert $\varphi^\# : k[W] \rightarrow k[V]$ (durch $f \mapsto f \circ \varphi$).

Dabei ist $f \in m_{\varphi(x)}^W, f(\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi^\#(f) \in m_x^V$

$\Rightarrow \varphi^\#$ induziert

$$\varphi_x^\# : \underbrace{k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}}_{=\mathcal{O}_{W,\varphi(x)}} \rightarrow \underbrace{k[V]_{m_x^V}}_{=\mathcal{O}_{V,x}}$$

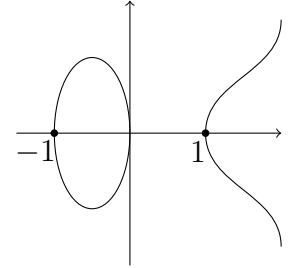
mit $\varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}) = \varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}^W \cdot k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}) \subseteq m_x^V \cdot k[V]_{m_x^V} = m_x$ □

§ 16 Tangentialraum

Beispiel 16.1

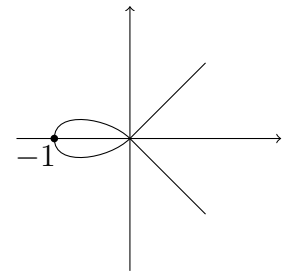
$$\text{a) } V_1 = \underbrace{V(Y^2 - X^3 + X)}_{Y^2 = X(X-1)(X+1)}, x(0,0)$$

Tangente an V_1 in x „ist“ die y -Achse.



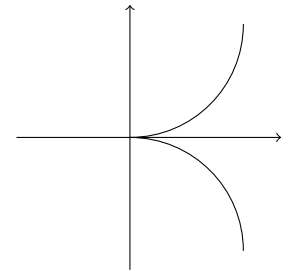
$$\text{b) } V_2 = \underbrace{V(Y^2 - X^3 - X^2)}_{Y^2 = X^2(X+1)}, x = (0,0)$$

Es gibt zwei Tangenten in x an V_2 . Jede Gerade durch x ist Grenzwert von Sekanten.



$$\text{c) } V_3 = V(Y^2 - X^3), x = (0,0)$$

Die x -Achse ist (Doppel-)Tangente. Jede Gerade durch x ist Limes von Sekanten.



Erinnerung 16.2 (Taylorentwicklung)

Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n], x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$.

$$\text{a) } f = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(\nu_1 + \dots + \nu_n)!} \frac{\partial \nu_1}{\partial X_1} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \nu_n}{\partial X_n} f(x) (X_1 - x_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (X_n - x_n)^{\nu_n}$$

$$\text{b) } f = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial (X_i)}(x)(X - x_i)}_{\in m_x} + \underbrace{\text{höhere Terme (Grad} \geq 2\text{)}}_{\in m_x^2}$$

Definition + Bemerkung 16.3

Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n], x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\text{a) } f_x^{(1)} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) X_i =: D_x(f)$$

b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät mit $x \in V, I := I(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$

$$I_x := \langle \{f_x^{(1)} : f \in I\} \rangle$$

$T_{V,x} := V(I_x)$ heißt Tangentialraum an V in x .

c) Wird I von f_1, \dots, f_r erzeugt, so wird I_x von $(f_1^{(1)})_x, \dots, (f_r^{(1)})_x$ erzeugt.

d) $T_{V,x}$ ist linearer Unterraum von k^n , genauer

$$T_{V,x} = \text{Kern} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,m}}$$

(Jacobi-Matrix der Abbildung $f : k^n \rightarrow k^r, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_r(x))$)

Beweis

c) Sei $g \in I$ beliebig, schreibe $g = \sum_{i=1}^r g_i f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_n]$

$$D_x(f + g) = D_x(f) + D_x(g)$$

$$D_x(f \cdot g) = f(x)D_x(g) + g(x)D_x(f)$$

$$\Rightarrow D_x(g) = \sum_{i=1}^r D_x(g_i f_i) = \sum_{i=1}^r [g_i(x)D_x(f_i) + \underbrace{f_i(x)}_{=0, \text{ weil } x \in V \text{ und } f_i \in I(V)} D_x(g_i)] = \sum_{i=1}^r g_i(x)(f_i^{(1)})_x \quad \square$$

Beispiel (Noch einmal Bsp. 16.1)

a) $V_1 = V(f)$ mit $f = Y^2 - X^3 + X, x = (0, 0)$

$$\Rightarrow f_x^{(1)} = 1 \cdot X + 0 \cdot Y = X$$

$$\Rightarrow T_{V,x} = V(X) = y\text{-Achse}$$

b) $V_2 = V(f)$ mit $f = Y^2 - X^3 - X^2, x = (0, 0)$

$$\Rightarrow f_x^{(1)} = 0, \text{ also } T_{V,x} = k^2$$

c) Genauso

Proposition 16.4

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ ein Morphismus affiner Varietäten, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$. Dann induziert φ für jedes $x \in V$ eine k -lineare Abbildung

$$d_{x\varphi} : T_{V,x} \rightarrow T_{W,\varphi(x)}$$

Beweis

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ gegeben durch $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)), \varphi_i \in k[X_1, \dots, X_n]$. Der zugehörige k -Algebra-Homomorphismus

$$k[W] = k[Y_1, \dots, Y_m]/I(W) \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I(V) = k[V]$$

wird induziert von $\varphi^\# : k[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n], f \mapsto f \circ \varphi_i$.

Genauer: $\varphi^\#(Y_j) = \varphi_j$

Dabei ist $\varphi^\#(I(W)) \subseteq I(V)$, da $\varphi(V) \subseteq W$. Definiere $\alpha : k[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ durch $Y_j \mapsto D_x(\varphi^\#(Y_j)) = D_x(\varphi_j) = (\varphi_j^{(1)})_x$.

Behauptung: $\alpha(I_{\varphi(x)}) \subseteq I_x$

Dann induziert α einen k -Algebra-Homomorphismus

$$\begin{aligned} k[Y_1, \dots, Y_m]/I_{\varphi(x)} &\rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_x \\ &= k[T_{W,\varphi(x)}] \qquad \qquad \qquad = k[T_{V,x}] \end{aligned}$$

Und damit Morphismus $T_{V,x} \rightarrow T_{W,\varphi(x)}$

Beweis der Behauptung: Sei $g \in I_{\varphi(x)}$

$\exists g = h^{(1)}$ für ein $h \in I(W)$

$\alpha(g) = (\text{Weihnachtsrechnung}) = D_x(g \circ \varphi) \in I_x$

□

Erinnerung

V affine Varietät über einem Körper k , $x \in V$.

$T_{V,x} = V(I_x)$, I_x erzeugt von den $f_x^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) X_i$, $f \in I(V)$. Die Zuordnung $(V, x) \mapsto T_{V,x}$ ist ein kovarianter Funktor

$$\underline{(\text{affine Varietäten})/k + \text{Punkt}} \rightarrow \underline{k\text{-Vektorräume}}$$

§ 17 Derivationen und Zariski-Topologie

Definition 17.1

Sei R Ring (kommutativ mit Eins), A eine R -Algebra, M ein A -Modul. Eine R -lineare Abbildung $D : A \rightarrow M$ heißt **R -Derivation**, wenn gilt:

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f) \quad \text{für alle } f, g \in A$$

Beispiel 17.2

a) Sei $A = M = R[X]$, $D(f) := \frac{df}{dg}$

$$\text{Konkret: } D\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i\right) = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$$

D ist Derivation: Nachrechnen!!!

b) $A = M = R[X_1, \dots, X_n]$, $D_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$

c) $A = R[X_1, \dots, X_n]$, $M = R$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

M wird zum A -Modul durch $\varphi_x(f) = f(x)$ (Einsetzungshomomorphismus).

$D(f) := \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)$ ist R -Derivation, denn:

$$D(fg) = \left(\frac{\partial}{\partial X_i}(fg)\right)(x) = \left(f \frac{\partial g}{\partial X_i} + g \frac{\partial f}{\partial X_i}\right)(x) = f(x) \frac{\partial g}{\partial X_i}(x) + g(x) \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$$

Bemerkung 17.3

Seien R, A, M wie in 17.1

a) Für jede R -Derivation $D : A \rightarrow M$ und jedes $a \in R$ gilt $D(a) = 0$.

b) $\text{Der}_R(A, M) = \{D : A \rightarrow M \mid D \text{ ist Derivation}\}$ ist A -Modul.

c) Ist $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ ein Homomorphismus von A -Moduln, so ist

$$\begin{aligned} \text{Der}_R(A, M_1) &\rightarrow \text{Der}_R(A, M_2) \\ D &\mapsto \varphi \circ D \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von A -Moduln.

d) Die Zuordnung $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$ ist ein kovarianter Funktor:

$$\underline{A\text{-Moduln}} \rightarrow \underline{A\text{-Moduln}}$$

Beweis

a) $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) \Rightarrow D(1) = 0 \xrightarrow{D \text{ ist } R\text{-linear}} D(a) = D(a \cdot 1) = a \cdot D(1) = 0$

b) ✓

c) $(\varphi \circ D)(f \cdot g) = \varphi(f \cdot D(g) + g \cdot D(f)) \stackrel{\varphi \text{ A-Mod-Hom}}{=} \varphi(f \cdot D(g)) + \varphi(g \cdot D(f))$ □

Bemerkung 17.4

a) Für $A = R[X]$ ist $\text{Der}_R(A, A) = A \cdot D$ ($D = \frac{d}{dX}$ wie in 17.2 a))

b) Für $A = R[X_1, \dots, X_n]$ ist $\text{Der}_R(A, A)$ der freie A -Modul mit Basis $\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}$

c) Sei $A = R[X_1, \dots, X_n]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $M = R$ wie in 17.2 c).

$\Rightarrow \text{Der}_R(A, R)$ ist der von den $\frac{\partial}{\partial X_i}(x)$ erzeugte freie R -Modul.

Beweis

a) Sei $\delta : A \rightarrow A$ R -Derivation, $f := \delta(X) \Rightarrow \delta(X^2) = X \cdot \delta(X) + X \cdot \delta(X) = 2f \cdot X$

$$\xrightarrow{\text{Induktion}} \delta(X^n) = n \cdot f \cdot X^{n-1} \Rightarrow \delta\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i\right) = f \cdot \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} \Rightarrow \delta = f \cdot D$$

c) folgt aus b) und 17.3 c). \square

Proposition 17.5

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$, $\mathcal{O}_{V,x} = \{\frac{f}{g} : f, g \in k[V], g(x) \neq 0\}$. Dann ist $\text{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k) \cong (m_x/m_x^2)^v$ (Isomorphismus von k -Vektorräumen).

$\text{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$ und m_x/m_x^2 sind $\mathcal{O}_{V,x}$ -Moduln, in beiden Moduln ist die Multiplikation mit einem Element aus m_x die Nullabbildung.

\Rightarrow Beide Moduln sind Moduln über $\mathcal{O}_{V,x}/m_x = k$

Beweis

Sei $\delta \in \text{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$. $\delta|_{m_x}$ ist k -linear.

Behauptung: $m_x^2 \subseteq \text{Kern}(\delta)$

denn: Sei $f = g \cdot h \in m_x^2$, $g, h \in m_x \Rightarrow \delta(f) = \underbrace{g(x)}_{=0} \cdot \delta(h) + \underbrace{h(x)}_{=0} \cdot \delta(g) = 0$

$\Rightarrow \delta$ induziert k -lineare Abbildung $m_x/m_x^2 \rightarrow k$.

Sei umgekehrt $l \in (m_x/m_x^2)^v$. Definiere $\delta : \mathcal{O}_{V,x} \rightarrow k$ durch $\delta(f) := l(\underbrace{f - f(x)}_{\in m_x})$ (k -linear: \checkmark).

Seien $f, g \in \mathcal{O}_{V,x}$. Dann ist $(f - f(x))(g - g(x)) \in m_x^2$.

$\Rightarrow 0 = l((f - f(x))(g - g(x))) = l(fg - f(x)g(x) - fg(x) - gf(x) + 2f(x)g(x))$

$\Rightarrow \delta(fg) = l(fg(x) + gf(x) - 2f(x)g(x)) = f(x)l(g - g(x)) + g(x)l(f - f(x)) = f\delta(g) + g\delta(f) \square$

Satz + Definition 8

Sei V affine Varietät, $x \in V$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$T_{V,x} \cong (m_x/m_x^2)^v$$

$(m_x/m_x^2)^v$ heißt **Zariski-Tangentialraum** an V in x .

Beweis

i) Definiere Abbildung

$$\begin{array}{ccc} T_{V,y} & \xrightarrow{\quad} & \text{Der}_k(\mathcal{O}_{V,x}, k) \\ & \searrow \alpha & \downarrow \text{17.5} \\ & & (m_x/m_x^2)^v \end{array}$$

Jedes $y = (y_1, \dots, y_n) \in k^n$ induziert Derivation $D_y : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k$ durch $f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) y_i$ (17.4 c)). Ist $y \in T_{V,x}$ und $f \in I(V)$, so ist $D_y(f) = 0$ nach Definition, denn $D_y(f) = f_x^1(y)$.

$\Rightarrow D_y$ induziert Derivation $D_y : k[V] \rightarrow k$.

Für $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{V,x}$ sei $D_y(\frac{f}{g}) = \frac{g(x)D_y(f) - f(x)D_y(g)}{g(x)^2}$ (denn $D_y(\frac{f}{g} \cdot g) = D_y(f) \Rightarrow D_y$ induziert $D_y \in \text{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$)

Noch zu zeigen: $\frac{f}{g} = 0$ in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \frac{-f(x)D_y(g) + g(x)D_y(f)}{g(x)^2} = 0$

denn: $\frac{f}{g} = 0$ in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \exists h \in \mathcal{O}_{V,x} \setminus m_x$ mit $h \cdot f = 0$ in $k[V] \Rightarrow 0 = D_y(hf) = \overbrace{h(x)}^{\neq 0} D_y(f) + \underbrace{f(x)}_{=0} D_y(h) \Rightarrow D_y(f) = 0 \Rightarrow D_y(\frac{f}{g}) = 0$

$$\text{ii) } \beta: \begin{array}{ccc} (m_x/m_x^2) & \rightarrow & T_{V,x} \\ l & \mapsto & (l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})) \end{array}$$

Zu zeigen: $(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})) \in T_{V,x}$

Sei dazu $f \in I(V)$. Zu zeigen: $f_x^{(1)}(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})) = 0$

Es ist $f_x^{(1)}(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i - x_i}) = l\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)(X_i - x_i)\right)$

$\stackrel{(*)}{=} l(f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)) = 0$, wegen

Behauptung: $f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) \in m_x^2$

denn: Taylor-Entwicklung $\underbrace{f}_{0 \text{ in } k[V]} = \underbrace{f(x)}_{=0, \text{ weil } f \in I(V)} + f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) + \text{Terme in } m_x^2$

$$\text{iii) } \beta \circ \alpha = \text{id}_{T_{V,x}}$$

$$\beta(\alpha(y)) = \beta(f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) y_i) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(X_1 - x_1)}{\partial X_i}(x) y_i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial(X_n - x_n)}{\partial X_i}(x) y_i \right) = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{iv) } \alpha \circ \beta = \text{id}_{(m_x/m_x^2)^v}$$

$$\alpha(\beta(l))(f) = \alpha(l(X_1 - x_1), \dots, l(X_n - x_n))(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(X_i - x_i) \stackrel{(*)}{=} l(f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)) = l(\overline{f}) \quad \square$$

§ 18 Dimension einer Varietät

Definition 18.1

Sei X topologischer Raum. Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \text{ Kette } \emptyset \neq V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_n \text{ von irred. abgeschl. Teilm. v. } X\}$$

Krull Dimension von X .

Beispiel

- 1) $\dim(\mathbb{R}^n) = 0$ für jedes $n \geq 0$ (mit euklidischer Topologie)
- 2) $\dim(\mathbb{A}^1(k)) = 1$, falls k unendlich ist
- 3) $\dim(\mathbb{A}^n(k)) \geq n$, falls k unendlich ist für $n \geq 2$

Bemerkung 18.2

Sei X ein topologischer Raum

- a) Ist $Y \subseteq X$ (mit Spurtopologie), so ist $\dim(Y) \leq \dim(X)$.
- b) Ist $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, X_i abgeschlossen, so ist $\dim(X) = \max_{i=1}^n (\dim(X_i))$.

Beweis

- a) Sei $\emptyset \neq V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_d$ Kette von abgeschlossenen Teilmengen von Y . Sei $\overline{V_i}$ der Abschluss von V_i in X .

V_i ist irreduzibel nach Übung 2, Aufgabe 5.

$$\overline{V_i} \cap Y = V_i \text{ weil } V_i \text{ abgeschlossen in } Y \text{ ist.} \Rightarrow \overline{V_i} \subsetneq \overline{V_{i+1}}$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq V_0 \subseteq \dots \subseteq V_d \text{ ist Kette der Länge } d \text{ in } X.$$

- b) „ \geq “: gilt nach a)

$$\text{„}\leq\text{“: Sei } \emptyset \neq V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_d \text{ Kette in } X. \text{ Dann ist } V_d = V_d \cap \left(\bigcup_{i=1}^n X_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \underbrace{(V_d \cap X_i)}_{\text{abg. in } V_d}$$

$$V_d \text{ irreduzibel} \Rightarrow \exists i \text{ mit } V_d \subseteq X_i \Rightarrow d \leq \dim(X_i)$$

□

Definition 18.3

Sei R ein Ring (das heißt kommutativ mit Eins)

- a) Sei $\mathfrak{p} \in R$ Primideal. Dann heißt

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \mathfrak{p}_0 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \text{ Kette von Primelementen in } R\}$$

Höhe von \mathfrak{p} .

- b) $\dim(R) := \sup\{\text{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$ heißt **Krull Dimension**.

Beispiel

- 1) $\dim k = 0$ für jeden Körper k
- 2) $\dim \mathbb{Z} = 1$
- 3) $\dim k[X] = 1$ für jeden Körper k
- 4) $\dim \mathbb{Z}[X] = 2$ (Übung?)
 $(0) \subset (2) \subset (2, X)$
- 5) $\dim k[X, Y] = 2??$

Proposition 18.4

Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede affine Varietäten $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$: $\dim(V) = \dim k[V]$

Beweis

Wegen $V(I)$ irred. für I prim und $I(V(I)) \stackrel{\text{HNS}}{=} I$ sowie $I(V)$ prim für V irred. und $V(I(V)) = V$ folgt, dass die eine Kette eine gültige andere Kette ist. \square

Satz 9

Sei k ein Körper, A endlich erzeugte nullteilerfreie k -Algebra.

a) $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$

b) Ist $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$ surjektiver Homomorphismus von k -Algebren, so ist

$$\dim A + \text{ht}(\text{Kern}(\varphi)) = n$$

c) Jede maximale (nicht verlängerbare) Kette von Primidealen in A hat die Länge A .

Erinnerung

$S|R$ **ganze Ringerweiterung** \Leftrightarrow jedes $a \in S$ ist Nullstelle eines *normierten* Polynoms mit Koeffizienten aus R .

Satz 9.1

Sei $S|R$ ganze Ringerweiterung.

a) („Going Up“) Für jede Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ in R gibt es eine Primidealkette $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_n$ in S mit $\mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für $i = 0, \dots, n$.

b) $\dim S = \dim R$

Satz 9.2 („Noether-Normalisierung“)

Sei A endlich erzeugte k -Algebra. Dann ist A ganze Ringerweiterung eines Polynomrings über k .

Genauer: Für jedes echte Ideal $I \subset A$ gibt es algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_d \in A$, sodass A ganz ist über $k[x_1, \dots, x_d]$ und $I \cap k[x_1, \dots, x_d] = (x_{\delta+1}, \dots, x_d)$ für ein $0 \leq \delta \leq d$.

Beispiel

$A = k[V]$ für affine Varietät V . $k[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow A$ Noether-Normalisierung induziert $\varphi : V \rightarrow \mathbb{A}^d(k)$. φ ist surjektiv nach Satz 9.1 a).

Der Bew. wird noch nachgefügt

Satz 9.3

(„Going Down“) Sei A endlich erzeugte nullteilerfreie k -Algebra, $k[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow A$ Noether-Normalisierung, $\mathfrak{P}_1 \subset A$ Primideal, \mathfrak{p}_0 Primideal mit $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 := \mathfrak{P}_1 \cap B$. Dann gibt es Primideale $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{P}_0 \cap B = \mathfrak{p}_0$.

$$\begin{array}{ccc} \exists \mathfrak{P}_0 & \subset & \mathfrak{P}_1 & & A \\ | & & | & & \cup \\ \mathfrak{p}_0 & \subset & \mathfrak{p}_1 & & B \end{array}$$

Folgerung 18.5

a) ist k unendlich, so ist $\dim \mathbb{A}^n(k) = n$.

b) Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede irreduzible affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$:

$$\dim V + \text{ht}(I(V)) = n$$

- c) Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede irreduzible affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $x \in V$:

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim k[V]_{m_x} = \text{ht}(m_x) = \dim k[V] = \dim V$$

Definition + Bemerkung 18.6

Sei V eine quasiprojektive Varietät über algebraisch abgeschlossenem Körper k , $x \in V$, $V_0 \subseteq V$ offene affine Umgebung von x .

- a) $\dim_x(V) = \dim(\mathcal{O}_{V,x})$ heißt **lokale Dimension** von V in x .
 b) $\dim_x(V) = \dim(\mathcal{O}_{V,x}) = \dim(\mathcal{O}_{V_0,x}) = \text{ht}(m_x^{V_0})$
 c) Ist V irreduzibel, so gilt:
 i) $\dim_x V = \dim_y V$ für alle $x, y \in V$
 ii) Ist $U \neq \emptyset$ offen, affin in V , so ist $\dim U = \dim V$
 d) $\dim_x V = \max\{\dim Z : Z \text{ irreduzible Komponente von } V \text{ mit } x \in Z\}$

Beweis

- c) i) Seien U_x und U_y offene affine Umgebungen von x , beziehungsweise y , $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, da V irreduzibel. Für $z \in U_x \cap U_y$ gilt nach 18.5 c):

$$\begin{aligned} \dim_x V &= \dim(\mathcal{O}_{V,x}) = \dim(\mathcal{O}_{U_x,x}) = \dim U_x = \dim(\mathcal{O}_{U_x,z}) \\ &= \dim_z(V) = \dim(\mathcal{O}_{U_y,z}) = \dim(\mathcal{O}_{U_y,y}) = \dim_y V \end{aligned}$$

ii) folgt aus i)

- d) $\text{OE } V$ affin.

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(m_x^V) = \max\{d : \exists \text{ Kette } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d = m_x^V \text{ von Primidealen}\}$$

Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d = m_x^V$ maximale Kette, dann ist \mathfrak{p}_0 minimales Primideal. Die minimalen Primideale entsprechen bijektiv den irreduziblen Komponenten, die x enthalten (auch von $\mathcal{O}_{V,x}$). \square

Folgerung 18.7

Ist k unendlich, so ist $\mathbb{P}^n(k) = n$.

Definition 18.8

- a) Eine quasiprojektive Varietät der Dimension 1 heißt (algebraische) **Kurve**.
 b) Eine quasiprojektive Varietät der Dimension 2 heißt (algebraische) **Fläche**.

Proposition 18.9

Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Hyperfläche, also $V = V(f)$ für ein $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ($n \geq 1, \deg(f) \geq 1$). Dann ist $\dim V = n - 1$.

Beweis

$\text{OE } f$ irreduzibel (Bemerkung 18.2 b)) $\xRightarrow{18.5b)} \dim V = n - \text{ht}((f))$

Sei $\mathfrak{p} \subset k[X_1, \dots, X_n]$ Primideal mit $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq (f)$. Wähle $0 \neq h \in \mathfrak{p}$ von minimalem Grad.

$h \in \mathfrak{p} \subseteq (f) \Rightarrow h = f \cdot g$ für ein $g \in k[X_1, \dots, X_n]$

\mathfrak{p} Primideal $\Rightarrow \begin{cases} f \in \mathfrak{p} \text{ und damit } (f) = \mathfrak{p} \\ \text{oder } g \in \mathfrak{p}, \text{ da } \deg(f) \geq 1, \text{ ist } \deg(g) < \deg(h) \end{cases}$ zur Wahl von h
 $\Rightarrow \text{ht}(f) = 1$ \square

Beispiel

$$V = V(XZ, YZ) \subset \mathbb{A}^3(k)$$

$$V = \underbrace{V(Z)}_{X,Y\text{-Ebene}} \cup \underbrace{V(X, Y)}_{Z\text{-Achse}}, \dim V = 2$$

Proposition 18.10

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $I(V) = (f_1, \dots, f_d)$. Dann ist $\dim V \geq n - d$

Proposition 18.11 (Krullscher Hauptidealsatz)

Sei R noetherscher Ring, $x \in R \setminus R^\times$, $\mathfrak{p} \subset R$ minimales Primideal mit $x \in \mathfrak{p}$. Dann ist $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$

Beweis

siehe Eisenbud: Commutative Algebra, Thm. 10.1 □

Proposition 18.12 (Krullscher Höstensatz)

Sei R noetherscher Ring, $x_1, \dots, x_d \in R \setminus R^\times$ sodass $I = (x_1, \dots, x_d) \neq R$. Dann ist $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq d$ für jedes minimale Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$.

Beweis

Induktion über d :

$d = 1$: Das ist 18.11.

$d \geq 2$: Sei \mathfrak{p} Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ und \mathfrak{p} sei minimal mit dieser Eigenschaft. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}$ eine Primidealkette.

Behauptung: Es gibt Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0$.

Dann sei $R' = R/(x_d)$ und $\mathfrak{q}'_i = \mathfrak{q}_i/(x_d)$.

Es ist $\mathfrak{q}'_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}'_{l-1} = \mathfrak{p}'$ Kette von Primidealen in R' .

\mathfrak{p}' ist minimal mit $x'_1, \dots, x'_d \in \mathfrak{p}'$ (bzw. $I' \subseteq \mathfrak{p}'$) $\xrightarrow{\text{Ind. Vor.}} \text{ht}(\mathfrak{p}') \leq d - 1$, andererseits ist $\text{ht}(\mathfrak{p}') \geq l - 1 \Rightarrow l - 1 \leq d - 1 \Rightarrow \text{ht}(\mathfrak{p}) \leq d$

Beweis der Behauptung:

$l = 1$: $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{p}$ tut's.

$l \geq 2$: Ist $x_d \in \mathfrak{p}_{l-1}$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung Kette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} = \mathfrak{p}_{l-1}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0$. Verlängere durch $\mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$. Sei also $x_d \notin \mathfrak{p}_{l-1}$ und \mathfrak{q} minimales Primideal mit $I := \mathfrak{p}_{l-2} + (x_d) \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

In $R' = R/\mathfrak{p}_{l-2}$ ist $(0) = \mathfrak{p}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{p}'_{l-1} \subsetneq \mathfrak{p}'$ Kette der Länge 2 $\Rightarrow \text{ht}_{R'}(\mathfrak{p}') \geq 2 \xrightarrow{18.11^A} \mathfrak{p}'$ ist *nicht* minimal in R' mit $x'_d \in \mathfrak{p}' \Rightarrow \mathfrak{p}$ ist nicht minimal in R mit $(x_d) + \mathfrak{p}_{l-2} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \exists$ Primideal \mathfrak{q} mit $I \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Kette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} = \mathfrak{q}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0 \Rightarrow \mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$ ist gewünschte Kette. □

§ 19 Singularitäten

Definition 19.1

Sei V quasiprojektive Varietät über einem Körper k . $x \in V$ heißt **regulär** (oder **nichtsingulär**), wenn $\dim T_{V,x} = \dim_x V$, andernfalls heißt x **singulär**. V heißt nichtsingulär, wenn jeder Punkt $x \in V$ regulär ist.

Proposition 19.2 (Jacobi-Kriterium)

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, (f_1, \dots, f_r) Erzeuger von $I(V)$, $x \in V$. Dann gilt:

$$x \text{ nichtsingulär} \Leftrightarrow \text{Rang} \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}}}_{=\mathcal{J}_f(x)} = n - \dim_x V$$

Beweis

Nach Bemerkung 16.3 d) ist $T_{V,x} = \text{Kern} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}}$ □

Beispiel

Sei $V = V(f) \subset \mathbb{A}^n(k)$ Hyperfläche. Dann ist $\mathcal{J}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right) \Rightarrow x \text{ singulär} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0$

Konkret:

a) $V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{A}^3(k)$

$\mathcal{J}_f = (2X, 2Y, -2Z) \Rightarrow (0, 0, 0)$ ist der einzige singuläre Punkt.

b) $V(Y^2 - X^3 + X)$, $\mathcal{J} = (-3X^2 + 1, 2Y)$

(x, y) singulär $\Rightarrow y = 0, 3x^2 = 1, x^3 - x = 0 \Rightarrow$ Es gibt keinen singulären Punkt auf V .

c) Ist $\bar{V} \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ (mit \bar{V} aus b)) auch nichtsingulär?

$\bar{V} = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$

$V = \bar{V} \cap D(Z), \bar{V} = V \cup (\bar{V} \cap V(Z)) = \underbrace{V \cup \{(0 : 1 : 0)\}}_{=: P_\infty}$

$P_\infty \in D(Y)\bar{V} \cap D(Y) = V(\underbrace{z - x^3 + xz^2}_{=: g})$

$\mathcal{J}_g = (-3x^2 + z^2, 1 + 2xz) \Rightarrow \mathcal{J}_g(P_\infty) = (0, 1)$

$\Rightarrow P_\infty$ ist regulärer Punkt

$\Rightarrow \bar{V}$ ist nichtsingulär

Definition + Bemerkung 19.3

a) Sei R noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal m und Restklassenkörper $k = R/m$. R heißt **regulär**, wenn $\dim R = \dim_k(m/m^2)$.

b) Sei V quasiprojektive Varietät über k , $x \in V$. Dann gilt:

$$x \text{ regulär} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,x} \text{ regulär}$$

Beweis

b) $\dim_k(m_x/m_x^2) = \dim(T_{V,x})$ (Satz 8)

$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim_x V$ nach Definition 18.6 □

Proposition 19.4

- a) Sei (R, m) lokaler noetherscher Ring. Dann gilt: $\dim_k(m/m^2) \geq \dim R$
 b) Für jede quasiprojektive Varietät V und jedes $x \in V$ gilt: $\dim T_{V,x} \geq \dim_x V$

Beweis

b) folgt aus a) (19.3 b)

a) *Behauptung:* Für $x_1, \dots, x_n \in m$ gilt:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \text{ minimales Erzeugersystem} \Leftrightarrow \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n} \text{ Basis von } m/m^2$$

Dann hat jedes minimale Erzeugersystem von m $\dim_R(m/m^2)$ Elemente.

Beweis der Behauptung:

„ \Rightarrow “: Sei x_1, \dots, x_n minimales Erzeugersystem.

Annahme: $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ linear abhängig, also $\exists \overline{x_1} = \sum_{i=2}^n \lambda_i \overline{x_i}$ für gewisse $\lambda_i \in k$.

$$\Rightarrow x_1 - \sum_{i=2}^n \tilde{\lambda}_i x_i \in m^2 \quad (\tilde{\lambda}_i \in R, \tilde{\lambda}_i = \lambda_i \text{ in } R/m)$$

$$\Rightarrow x_1 - \sum_{i=2}^n \tilde{\lambda}_i x_i = \sum_{j=1}^n \mu_j x_1 x_j + y \text{ mit } y \in (x_2, \dots, x_n)^2$$

$$\Rightarrow x_1 \left(1 - \underbrace{\sum_{i=2}^n \mu_j x_j}_{\in 1-m \Rightarrow \notin R^\times \Rightarrow x_1 \in (x_2, \dots, x_n)} \right) \in (x_2, \dots, x_n)$$

„ \Leftarrow “: zu zeigen: x_1, \dots, x_n erzeugen m

Sei $N = (x_1, \dots, x_n)$

Dann gilt $m = N + m^2$

Damit folgt $m = N$ aus 19.5

□

Proposition 19.5 (Nakayama-Lemma)

Sei (R, m) lokaler Ring, M endlicher erzeugter R -Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul mit

$$M = mM + N \quad (*)$$

Dann gilt $M = N$

Beweis

$\exists N = 0$, denn: Aus $(*)$ folgt $M/N = mM/N$.

Ist dann $M/N = 0$, so ist $M = N$.

Annahme: $M \neq 0$.

Denn sei x_1, \dots, x_n minimales Erzeugersystem von M . Nach Voraussetzung gibt es $a_1, \dots, a_n \in m$ mit $x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i$

$$\Rightarrow x_1(1 - a_1) = \sum_{i=2}^n a_i x_i \Rightarrow x_1 \in (x_2, \dots, x_n) \not\Leftarrow \text{zur Minimalität von } x_1, \dots, x_n$$

□

Proposition 19.6

Jeder reguläre lokale Ring ist nullteilerfrei.

Folgerung 19.7

Sei V eine quasiprojektive Varietät, $x \in V$ ein Punkt, der auf zwei verschiedenen irreduziblen Komponenten liegt. Dann ist x singulär.

Beweis (Beweis der Folgerung)

Wegen 19.6 ist zu zeigen: $\mathcal{O}_{V,x}$ ist nicht nullteilerfrei.

☞ V affin, $V_1 \neq V_2$ irreduzible Komponenten von V mit $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow I(V_i)$ ist minimales Primideal in $k[V]$, $i = 1, 2$. Wegen $x \in V_i$, $i = 1, 2$, ist $I(V_i) \subset m_x$, $i = 1, 2 \Rightarrow I(V_i) \cdot \mathcal{O}_{V,x}$ ist minimales Primideal in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow (0)$ ist kein Primideal in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ nicht nullteilerfrei \square

Beweis (Beweis von Proposition 19.6)

Sei (R, m) regulärer lokaler Ring, $d = \dim R$.

Induktion über d :

$d = 0$: $m/m^2 = 0 \Rightarrow m = m^2 \xrightarrow{19.5} m = 0 \Rightarrow R$ Körper

$d \geq 1$: Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale von R . Da $d = \text{ht}(m) \geq 1$ ist, ist $\mathfrak{p}_i \neq m$ für alle i . Außerdem ist $m \neq m^2$, da $\dim_k(m/m^2) = d \geq 1$.

Primvermeidungslemma: (Übung)

$$m \not\subset m^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r$$

Wähle $x \in m \setminus m^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r$. Ergänze \bar{x} (in m/m^2) zur Basis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_d$.

Sei $R' = R/(x)$ und $m' = m/(x)$ das maximale Ideal in R' . Da $x \notin \mathfrak{p}_i$ für alle minimalen Primideale von R , ist $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ für jedes minimale Primideal mit $x \in \mathfrak{p}$ (Proposition 18.11 A).

$$\Rightarrow \dim R' = d - 1$$

m' wird von x'_2, \dots, x'_d erzeugt (den Bildern der x_i in R' ; dabei sei $x_i \in m$ mit Bild \bar{x}_i in m/m^2 , $i = 2, \dots, d$, nach Proposition 19.5 wird m von x, x_2, \dots, x_d erzeugt)

$$\Rightarrow \dim_k(m'/(m')^2) \leq d - 1$$

$$\xrightarrow{19.4} \dim_k(m'/(m')^2) = d - 1 \Rightarrow (R', m') \text{ ist regulärer lokaler Ring}$$

$$\xrightarrow{\text{Ind. Vor.}} R' \text{ nullteilerfrei}$$

$$\Rightarrow (x) \text{ ist Primideal} \Rightarrow \exists i \text{ mit } \mathfrak{p}_i \subsetneq (x)$$

$$\Rightarrow \text{Für } b \in \mathfrak{p}_i \text{ gibt es } a \in R \text{ mit } b = a \cdot x \xrightarrow{\mathfrak{p} \text{ prim}} a \in \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i x = \mathfrak{p}_i m \xrightarrow{\text{Nakayama}} \mathfrak{p}_i = (0) \Rightarrow R \text{ nullteilerfrei} \quad \square$$

Satz 10

Sei $\emptyset \neq V \in \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät über algebraisch abgeschlossenem Körper k und $\text{Sing}(V) := \{x \in V : x \text{ singulär}\}$. Dann gilt: $\text{Sing}(V)$ ist abgeschlossene echte Teilmenge von V .

Beispiel

Sei $\text{char}(k) = p$ und $V = V(X^p + Y^p - Z^p) \subseteq \mathbb{A}^3(k) (\subseteq \mathbb{P}^2(k))$.

Jacobi-Kriterium: $\mathcal{J}_f(X, Y, Z) = (pX^{p-1}, pY^{p-1}, pZ^{p-1}) = (0, 0, 0)$

$\xrightarrow{??}$ alle Punkte sind singulär? Was ist $I(V)$? $(X + Y - Z)^p = X^p + Y^p - Z^p$

Beweis

i) ☞ V irreduzibel, denn: sind V_1, \dots, V_r die irreduziblen Komponenten von $V \Rightarrow$

$$\text{Sing}(V) = \bigcup_{i=1}^r \text{Sing}(V_i) \cup \underbrace{\bigcup_{i \neq j} V_i \cap V_j}_{\text{abgeschlossen}}$$

\mathcal{O}_V affin ($\subseteq \mathbb{A}^n(k)$), denn „abgeschlossen“ ist lokale Eigenschaft. Seien f_1, \dots, f_r Erzeuger von $I(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathcal{J} := (\frac{\partial f_i}{\partial X_j})_{ij}$ die Jacobi-Matrix.

$$\text{Sing}(V) = \{x \in V : \text{Rang}(\mathcal{J}(x)) < n - \dim V\}$$

$$= \{x \in V : \det(M(x)) = 0 \text{ für alle } (n - \dim V) \times (n - \dim V)\text{-Untermatrizen } M \text{ von } \mathcal{J}\}$$

$\det M$ ist Polynom in X_1, \dots, X_n für jeden Minor M .

$\Rightarrow \text{Sing}(V)$ ist affine Varietät, also abgeschlossen in V .

ii) \mathcal{O}_V irreduzibel.

Ist Z irreduzible Komponente von V und $\text{Sing}(Z) \neq Z$, so ist $Z - \text{Sing}(Z)$ offen, nichtleer, also dicht in Z .

$\Rightarrow Z - \text{Sing}(Z)$ enthält Punkte z , die auf keiner anderen irreduziblen Komponente liegen.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{V,z} \Rightarrow z \in V - \text{Sing}(V)$.

Spezialfall: $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ für ein irreduzibles $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, $\deg(f) > 0$

Dann ist $\text{Sing}(V) = \{x \in V : \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0\}$.

Wäre $\text{Sing}(V) = V \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_i} \in I(V) = (f)$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_i} = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ ist konstant} & : \text{falls } \text{char}(k) = 0 \\ f \in k[X_1^p, \dots, X_n^p] & : \text{falls } \text{char}(k) = p > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f = g^p$ für ein $g \in k[X_1, \dots, X_n] \not\subseteq (f)$ (zu f irreduzibel)

Der allgemeine Fall folgt daraus wegen: □

Proposition 19.8

Sei V irreduzible quasiprojektive Varietät der Dimension d . Dann ist V birational äquivalent zu einer Hyperfläche H in $\mathbb{A}^{d+1}(k)$.

Beweis (Fortsetzung Beweis)

Dann gibt es $U \subset V$ offen, dicht und $U' \subseteq H$ offen, dicht und Isomorphismus $\varphi : U \rightarrow U'$.

Spezialfall: $U' \cap (H - \text{Sing}(H)) \neq \emptyset$

Für $z \in U'$ ist $\mathcal{O}_{V,f^{-1}(z)} \cong \mathcal{O}_{U',z} = \mathcal{O}_{H,z}$ regulärer lokaler Ring $\Rightarrow z \notin \text{Sing}(V)$. □

Beweis (Beweis von Proposition 19.8)

Nach Satz 6 (bzw. Bemerkung 13.7), ist zu zeigen, dass der Funktionenkörper $k(V)$ zu $\text{Quot}(k[X_1, \dots, X_{d+1}]/(f))$ für ein irreduzibles $f \in k[X_1, \dots, X_{d+1}]$ isomorph ist (als k -Algebra). Sei \mathcal{O}_V affin. Wähle Noethernormalisierung $k[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow k[V]$.

$\Rightarrow k(V)|k(X_1, \dots, X_d)$ ist endliche Körpererweiterung

$\mathcal{O}_V k(V)|k(X_1, \dots, X_d)$ separabel ($\text{char}(k) = 0$: sowieso, $\text{char}(k) = p$: Bosch, 7.3, Satz 7)

$\xrightarrow[\text{prim. Elem.}]{\text{Satz vom}}$ es gibt $y \in k(V)$ mit $k(V) = (X_1, \dots, X_d)[Y]$

Sei $h \in k(V) = (X_1, \dots, X_d)[Y]$ das Minimalpolynom von y , also $h(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \dots + a_0$ mit $a_i = \frac{f_i}{g_i}$, $f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_d]$ (teilerfremd)

Sei $g = \text{kgV}(g_0, \dots, g_{n-1})$ und $f := g \cdot h = g \cdot Y^n + \underbrace{g \cdot a_{n-1}}_{b_{n-1} \in k[X_1, \dots, X_d]} Y^{n-1} + \dots + g \cdot a_0$

b_0, \dots, b_n sind teilerfremd $\Rightarrow f$ irreduzibel und $f(Y) = 0$

$\Rightarrow \text{Quot}(k[X_1, \dots, X_d, Y]/(f)) = k(X_1, \dots, X_d)[Y] \cong k(V)$

$V(f) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$ ist Hyperfläche $\cong k(V)$ □

Folgerung 19.9

Für jede irreduzible quasiprojektive Varietät gilt:

$$\dim(V) = \operatorname{trdeg}_k k(V)$$

(Transzendenzgrad = max. Anzahl algebraisch unabhängiger Elemente)

Denn: $\dim V = \dim k[V] = d$, falls $k[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow k[V]$ Noethernormalisierung. $k(V)$ ist endliche Körpererweiterung von $k(X_1, \dots, X_d) \Rightarrow \operatorname{trdeg}_k(k(V)) = \operatorname{trdeg}_k k(X_1, \dots, X_d) = d$.