

## 7. Wichtige Beispiele

### Satz 7.1 (Konvergenzsatz für Wurzeln)

Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge,  $a_n \geq 0$ . Es sei  $a := \lim a_n$  ( $\xrightarrow{6.2} a \geq 0$ ) und  $p \geq 2$ . Dann:  
 $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}$ .

### Beweis

**Fall 1:**  $a = 0$  Sei  $\varepsilon > 0$ .  $a_n \rightarrow 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < \varepsilon^p \forall n > n_0 \xrightarrow{5.1} \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon \forall n \geq n_0$   
 $\implies |\sqrt[p]{a_n} - 0| = \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon \forall n \geq n_0 \implies \sqrt[p]{a_n} \rightarrow 0$

**Fall 2:**  $a > 0$   $|a_n - a| = |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \stackrel{4.2}{=} |x - y| \cdot |x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + xy^{p-2} + y^{p-1}|$   
 $\geq |x - y| \cdot \underbrace{y^p - 1}_{=:c} = |x - y| \cdot c = |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \cdot c \implies |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \underbrace{\frac{1}{c}|a_n - a|}_{\rightarrow 0} \implies \sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a} \blacksquare$

### Beispiel 7.2

Sei  $x \in \mathbb{N}$  und  $a_n := x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Fall 1:  $x = 0 \implies (a_n)$  ist konvergent und  $a_n \rightarrow 0$

Fall 2:  $x = 1 \implies (a_n)$  ist konvergent und  $a_n \rightarrow 1$

Fall 3:  $x = -1 \implies (a_n)$  ist divergent.

Fall 4:  $|x| > 1$ :  $\exists \delta > 0 : |x| = 1 + \delta \implies |a_n| = |x^n| = |x|^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta \implies a_n$  ist nicht beschränkt. 6.1(2)  $\implies (a_n)$  ist divergent.

Fall 5:  $0 < |x| < 1$ : Dann  $\frac{1}{|x|} > 1 \implies \exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta \implies \frac{1}{|a_n|} = \frac{1}{|x^n|} = (\frac{1}{|x|})^n = (1 + \eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta \implies |a_n| \leq \frac{1}{n\eta} \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \rightarrow 0$

### Beispiel 7.3

Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $s_n := 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$

$$\S 4 \implies s_n = \begin{cases} n+1 & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \end{cases}$$

7.2  $\implies (s_n)$  ist konvergent  $\iff |x| < 1$ . In diesem Fall:  $s_n \rightarrow \frac{1}{1-x}$  ( $n \rightarrow \infty$ )

**Satz 7.4 (Satz über  $\sqrt[n]{n}$ )**Es gilt:  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ )**Beweis**

$a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \implies a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Zu zeigen ist:  $a_n \rightarrow 0$ . Für  $n \geq 2$ :  $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \implies n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2 \implies a_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \forall n \geq 2 \implies \underbrace{0}_{\rightarrow 0} < a_n < \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}_{\rightarrow 0} \implies a_n \rightarrow 0$  ■

**Beispiel 7.5 (Konvergenz von Wurzeln)**Sei  $c > 0$ . Dann:  $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ).**Beweis**Fall 1:  $c \geq 1 \exists m \in \mathbb{N} : m \geq c \implies 1 \leq c \leq n \forall n \geq m \implies \sqrt[n]{n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{7.4} \sqrt[n]{c} \rightarrow 1$ Fall 2:  $c < 1 \implies \frac{1}{c} > 1 \xrightarrow{\text{Fall 1}} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}}_{=\frac{1}{\sqrt[n]{c}}} \rightarrow 1 \xrightarrow{6.2(\text{vii})} \sqrt[n]{c} \rightarrow 1$  ■**Satz 7.6 (Satz und Definition von  $e$ )**

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}); \quad b_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

 $(a_n)$  und  $(b_n)$  sind konvergent und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .**Definition:**  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  heißt eulersche Zahl. ( $2 < e < 3$ ,  $e \approx 2,718$ )**Beweis**In der großen Übung wurde gezeigt:  $a \leq a_n < a_{n+1} < 3 \forall n \in \mathbb{N}$ . 6.3  $\implies (a_n)$  ist konvergent,  $a := \lim a_n$ . $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n \implies (b_n)$  ist monoton wachsend.

$$b_n = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\leq \frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{< \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{< \frac{1}{2^3}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}}_{< \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

 $\implies (b_n)$  ist nach oben beschränkt. 6.3  $\implies (b_n)$  ist konvergent,  $b := \lim b_n$ Zu zeigen:  $a = b$ .

Für  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(a + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{<1} \quad (*) \\
&< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = b_n
\end{aligned}$$

Also:  $a_n < b_n \ \forall n \geq 2 \implies a \leq b$ .

Sei  $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$  (fest) und  $n > j$ . Aus (\*) folgt:

$$\begin{aligned}
a_n &\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1(n \rightarrow \infty)} = c_n^{(j)} \\
\implies c_n^{(j)} &\rightarrow 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \rightarrow \infty) \\
\implies a_n &\geq c_n^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \geq b_j.
\end{aligned}$$

Also:  $b_j \leq a \ \forall j \geq 2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} b \leq a$ . ■

