

Kapitel 2

Garben und Divisoren

§ 9 \mathcal{O}_X -Modulgarben

Definition 9.1

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein lokal geringter Raum. Eine Garbe \mathcal{F} von abelschen Gruppen auf X heißt \mathcal{O}_X -Modulgarbe, wenn gilt:

- (i) $\mathcal{F}(U)$ „ist“ $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul für jedes offene $U \subseteq X$
- (ii) $\rho_{U'}^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul-Homomorphismus für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen (via $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$)

Bemerkung

Die \mathcal{O}_X -Modulgarben auf X bilden eine Kategorie. Gegenbeispiel: \mathcal{O}_X^\times ist *keine* \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

Beispiele (für \mathcal{O}_X -Modulgarben)

- 1) Idealgarben
- 2) Sei X eine nichtsinguläre Kurve (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k), $D := \sum_{\substack{P \in X \\ (\text{abg.})}} n_P P$ ein Divisor. \mathcal{O}_X soll die Garbe der regulären Differentiale auf X sein.

Für $U \subseteq X$ offen sein $\mathcal{L}(D)(U) := \{f \in k(X) : \text{div } f|_U + D|_U \geq 0\}$, das heißt für alle $P \in U$ gilt $\text{ord}_P f \geq -m_P$.

$\mathcal{L}(D)(U)$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul: für $g \in \mathcal{O}_X(U)$, $f \in \mathcal{L}(D)(U)$ und $P \in U$ ist $\text{ord}_P(fg) = \text{ord}_P(f) + \underbrace{\text{ord}_P(g)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(D)$ ist Modulgarbe

- 3) Sei X weiterhin nichtsinguläre Kurve.

Erinnerung: Sei R ein Ring, A eine R -Algebra, M ein A -Modul, $\text{Der}_R(A, M) = \{\delta : A \rightarrow M, R\text{-linear}, \delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)\}$.

$$\text{Es gibt } \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{A/R} \\ d : A \rightarrow \Omega_{A/R} \\ a \mapsto da \end{array} \right. \begin{array}{l} A\text{-Modul} \\ \text{Derivation} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Omega_{A/R} \\ d : A \rightarrow \Omega_{A/R} \\ a \mapsto da \end{array}} \right\} \text{ sodass } \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & \Omega_{A/R} \\ & \searrow \delta & \swarrow \exists! \varphi \\ & & M \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ A\text{-linear} \end{array}$$

$$A = k[X]$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega_{A/k} = A \cdot dX}$$

$$\Omega_{k(X)/k} = k(X) \cdot dX$$

Es gilt: Ist X irreduzible Kurve, so ist $\Omega_{k(X)/k}$ 1-dimensionaler Vektorraum über $k(X)$
(Beispiel $y^2 = x^3 + ax + b \Rightarrow 2ydy = 3x^2dx + adx$)

Für $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$ und $P \in X$ sei $\text{ord}_P \omega$ wie folgt definiert: sei t_P ein Erzeuger von m_P (= maximales Ideal in $\mathcal{O}_{X,P}$)

$\Rightarrow \exists f_P \in k(X)$ mit $\omega = f_P dt_P$. Setze $\text{ord}_P \omega := \text{ord}_P f_P$

Für $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$ sei $\text{div } \omega := \sum_{P \in X} \text{ord}_P \omega$ (wobei $d(t_P - c) = dt_P$).

Für $U \subseteq X$ offen: $\Omega_X(U) := \{\omega \in \Omega_{k(X)/k} : \text{div } \omega|_U \geq 0\}$

\mathcal{O}_X ist \mathcal{O}_X -Modulgarbe, da $\text{div}(f \cdot \omega) = \text{div } f + \text{div } \omega$.

Definition + Bemerkung 9.2

Sei (X, \mathcal{O}_X) lokal geringter Raum, \mathcal{F}, \mathcal{G} \mathcal{O}_X -Modulgarben.

a) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ sei die zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ ist eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

b) Für $U \subseteq X$ offen sei

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

Das ist eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

Beweis

b) ...

Definition + Bemerkung 9.3

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus lokal geringter Räume

a) Für jede \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{F} auf X ist $f_* \mathcal{F}$ eine \mathcal{O}_Y -Modulgarbe.

b) Für jede \mathcal{O}_Y -Modulgarbe \mathcal{G} auf Y ist $f^{-1} \mathcal{G}$ eine $f^{-1} \mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe und $f^* \mathcal{G} := f^{-1} \mathcal{G} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

Beweis

a) Für $U \subseteq Y$ offen ist $f_* \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ ein $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ -Modul, $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ induziert $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow f_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. Dadurch wird $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$ zu einem $\mathcal{O}_Y(U)$ -Modul.

b) Zu Definition von $f^* \mathcal{G}$ wird Garbenhomomorphismus $f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ benötigt. $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ induziert $f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow f^{-1} f_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{1.14} \mathcal{O}_X$ □

Erinnerung

$X = \text{Spec } R$ affines Schema, $I \subseteq R$ Ideal, $f \in R$, $\tilde{I}(D(f)) = I \cdot R_f = I \cdot \mathcal{O}_X(D(f))$, \tilde{I} heißt quasikohärente Idealgarbe.

Definition + Bemerkung 9.4

a) Sei $X = \text{Spec } R$ affines Schema, M ein R -Modul. Dann sei \tilde{M} die (!) Garbe auf X mit $\tilde{M}(D(f)) := M_f$ (der von M erzeugte Modul über R_f) für jedes $f \in R$. \tilde{M} ist \mathcal{O}_X -Modulgarbe, $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$.

b) Sei X ein Schema. Eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{F} heißt **quasikohärent**, wenn für jede affine Teilmenge $U = \text{Spec } R \subseteq X$ ein R -Modul M_U existiert, sodass $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}_U$.

c) \mathcal{F} (wie in b)) ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene affine Überdeckung $U_i = \text{Spec } R_i$ von X gibt mit $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$ für geeignete R_i -Moduln M_i .

d) Ist X noethersch, so heißt \mathcal{F} **kohärent**, wenn in b) (beziehungsweise c)) alle R -Moduln M_U endlich erzeugbar sind.

Beweisc) Wie Übung 4, Aufgabe 3 □**Bemerkung 9.5**Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema.Die Zuordnung $M \mapsto \tilde{M}$ ist ein kovarianter auf Objekten injektiver Funktor von der Kategorie $R\text{-Mod}$ in $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$; Umkehrfunctor: $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(X)$.**Beweis**Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ exakt.Zu zeigen: $0 \rightarrow \tilde{M}' \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'' \rightarrow 0$ ist exakt.

$0 \rightarrow$	$\tilde{M}'_{\mathfrak{p}} \rightarrow$	$\tilde{M}_{\mathfrak{p}} \rightarrow$	$\tilde{M}''_{\mathfrak{p}} \rightarrow$	0	exakt für jedes Primideal \mathfrak{p}	
\parallel	\parallel	\parallel	\parallel		in $\operatorname{Spec} R$	□
$0 \rightarrow$	$M'_{\mathfrak{p}} \rightarrow$	$M_{\mathfrak{p}} \rightarrow$	$M''_{\mathfrak{p}} \rightarrow$	0	Das stimmt!	

Bemerkung 9.6Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema.a) Für R -Moduln M und N gilt:

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \cong \widetilde{M \otimes_R N}$$

b) Für R -Moduln M_i , $i \in I$ gilt:

$$\bigotimes_{i \in I} \tilde{M}_i \cong \widetilde{\bigotimes_{i \in I} M_i}$$

Beweisa) $(M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}} = (M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} = \tilde{M}_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \tilde{N}_{\mathfrak{p}} \cong (\tilde{M} \otimes_R \tilde{N})_{\mathfrak{p}}$ b) genauso □**Bemerkung 9.7**Seien $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} R'$ affine Schemata, $f : X \rightarrow Y$ Morphismen, $\alpha = f_X^{\#} : R' \rightarrow R$.a) Für jeden R -Modul gilt:

$$f_* \tilde{M} =_{\alpha} \tilde{M} (= \text{der via } \alpha \text{ als } R'\text{-Modul aufgefasste } R\text{-Modul } M)$$

b) Für jeden R' -Modul N gilt:

$$f^* \tilde{N} \cong \widetilde{(N \otimes_{R'} R)}$$

Beweisa) Für $U \subseteq Y$ offen ist $f_* \tilde{M}(U) = \tilde{M}(f^{-1}(U))$; das wird durch $f_U^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ zum $\mathcal{O}_Y(U)$ -Modul (vergleiche 9.3 a)).b) $f^* \tilde{N}(X) = f^{-1} \tilde{N}(X) \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_Y(X)} \mathcal{O}_X(X) = N \otimes_{R'} R$; Entsprechendes gilt für jedes $U \subseteq X$ offen. □**Proposition 9.8**Sei $f : X \rightarrow Y$ Morphismus von Schemata.a) Ist \mathcal{G} quasikohärent auf Y , so ist $f^* \mathcal{G}$ quasikohärent auf X .

- b) Sind X und Y noethersch und ist \mathcal{G} kohärent, so ist $f^*\mathcal{G}$ kohärent.
 c) Ist X noethersch und \mathcal{F} quasikohärent auf X , so ist $f_*\mathcal{F}$ quasikohärent auf Y .

Beweis

- a) $\mathbb{A}^1 Y = \text{Spec } R'$ affin, $\mathcal{G} = \tilde{N}$ für einen R' -Modul N . $\mathbb{A}^1 X = \text{Spec } R$ affin. Damit folgt die Behauptung aus 9.7 b).

x_1, \dots, x_n seien Erzeuger von N also R' -Modul $\Rightarrow x \in N$ hat Darstellung $\sum_{i=1}^n a_i x_i$

Behauptung: $x_1 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1$ erzeugen $N \otimes_{R'} R$ als R -Modul

Sei $x \otimes a \in N \otimes_{R'} R$, $x = \sum a_i x_i$ ($a_i \in R'$) $\Rightarrow x \otimes a = a \cdot \sum a_i (x_i \otimes 1)$

- b) Ist N endlich erzeugt als R' -Modul, so ist $N \otimes_{R'} R$ endlich erzeugt als R -Modul.
 c) $\mathbb{A}^1 Y$ affin. Sei U_1, \dots, U_r offene affine Überdeckung von X . $\mathbb{A}^1 U_i \cap U_j$ affin(!)? (Übung)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & f_*\mathcal{F} & \rightarrow & \bigoplus_{i=1}^r f_*\mathcal{F}|_{U_i} & \rightarrow & \bigoplus_{i < j} f_*\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j} \\ & & m & \mapsto & (m|_{U_i})_{i=1, \dots, r} & & \\ & & & & (m)_{i=1, \dots, r} & \mapsto & (m_i|_{U_i \cap U_j} - m_j|_{U_i \cap U_j})_{i < j} \end{array}$$

ist exakt (weil \mathcal{F} Garbe ist, weil f_* linksexakt ist) $\Rightarrow f_*\mathcal{F}$ ist als Kern einer Morphismus von quasikohärenten Garben selbst quasikohärent. \square

§ 10 Lokal Freie Garben

Definition + Bemerkung 10.1

Sei (X, \mathcal{O}_X) lokal geringter Raum, \mathcal{F} eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

- \mathcal{F} heißt **frei** vom Rang $n \geq 1$, wenn $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X$.
- \mathcal{F} heißt **lokal frei** vom Rang n , wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt, sodass $\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ für jedes $i \in I$.
- Ist X Schema, so sind lokal freie Garben quasikohärent (und sogar kohärent wenn X noethersch ist)

Beweis

- c) Ist $U = \text{Spec } R$, so ist $\mathcal{F}|_U$ frei vom Rang $n \Leftrightarrow \mathcal{F} \cong \tilde{R}^n$. □

Beispiel 10.2

Sei X nichtsinguläre Kurve (über $k \dots$) und D ein Divisor auf X . Dann ist $\mathcal{L}(D)$ lokal frei vom Rang 1: Übung 9, Aufgabe 3b)

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X) : \text{div}(f|_U) + D|_U \geq 0\}$$

Beispiel

Sei X nichtsinguläre Kurve/ k , k algebraisch abgeschlossen, \mathcal{L} lokal freie Garbe vom Rang 1 auf X , $\mathcal{L} \subseteq k(X)$ (konstante Garbe) $\Rightarrow \exists$ Divisor auf X mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D)$

Denn: Sei $(U_i)_{i=1, \dots, r}$ offene Überdeckung von X mit $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$, $i = 1, \dots, r$

Nach Voraussetzung ist dann $\mathcal{L}(U_i) = f_i \cdot \mathcal{O}_X(U_i)$ für ein $f_i \in k(X)$. Setze $D|_{U_i} := \text{div}(\frac{1}{f_i})$

Behauptung: Auf $U_i \cap U_j$ ist $\text{div}(\frac{1}{f_i}) = \text{div}(\frac{1}{f_j})$

Äquivalent: $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$

denn: $\mathcal{L}(U_i \cap U_j) = f_i \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = f_j \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$

Beispiel 10.3

Sei X eine Mannigfaltigkeit (reelle, differenzierbare, komplexe) und \mathcal{O}_X die Garbe der stetigen (differenzierbaren, holomorphen) Funktionen auf X . Sei E eine weitere Mannigfaltigkeit, $p : E \rightarrow X$ eine stetige (differenzierbare, holomorphe) Abbildung.

(E, p) heißt **Vektorbündel** vom Rang n über X , wenn es eine offene Überdeckung (U_i) von X gibt und Isomorphismen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ sodass

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_{U_i} & \\ & U_i & \end{array}$$

mit $p = \text{pr}_{U_i} \circ \varphi_i$, sodass für alle i, j gilt: $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ induziert für jedes $x \in U_i \cap U_j$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die stetig (differenzierbar, holomorph) von x abhängt, das heißt $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \text{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$.

Sei \mathcal{E} die Garbe der Schnitte in E , das heißt $\mathcal{E}(U) = \{s : U \rightarrow E \text{ stetig (differenzierbar, holomorph)} : p \circ s = \text{id}_U\}$. \mathcal{E} ist lokal frei vom Rang n .

Denn: Für jedes $i \in I$ ist $\mathcal{E}(U_i) = \{s : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig (differenzierbar, holomorph)}\} = (\mathcal{O}_X(U_i))^n \Rightarrow \mathcal{E}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$

Umgekehrt: Sei \mathcal{E} lokal frei vom Rang n auf X . Sei $U_i \subset X$ offen, $\varphi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \rightarrow (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ Isomorphismus ($i \in I$, (U_i) Überdeckung).

Für $i, j \in I$ und $x \in U_i \cap U_j$ ist die induzierte Abbildung $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x : \kappa_x^n \rightarrow \kappa_x^n$ ein Isomorphismus von $\kappa(x)$ -Vektorraum ($\kappa(x) = \mathbb{R}$ beziehungsweise \mathbb{C}).

$\Rightarrow (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x \in \text{GL}_n(\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}})$ und $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \text{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$

Sei $E_i := U_i \times \mathbb{R}^n$. Verklebe E_i und E_j über $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ via $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$. Erhalte E !

Definition 10.4

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema, $p : E \rightarrow X$ ein Morphismus von Schemata.

(E, p) heißt (geometrisches) **Vektorbündel** über X , wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt und Isomorphismen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} U_i$, sodass für alle i, j und für alle offenen affinen Teilmengen $U = \text{Spec } R \subseteq U_i \cap U_j$ gilt:

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathbb{A}_U^n}$ wird von einem linearen Automorphismus α_{ij} von $R[X_1, \dots, X_n]$, das heißt $\alpha_{ij}(a) = a$ für alle $a \in R$ und $\alpha_{ij}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$ für gewisse $a_{ij} \in R$ ($\Leftrightarrow \alpha_{ij}$ ist R -Algebra-Homomorphismus), induziert.

Anmerkung: $\mathbb{A}_U^n = \text{Spec } R[X_1, \dots, X_n]$

Proposition 10.5

Sei X ein Schema. Die Isomorphieklassen von lokal freien Garben vom Rang n auf X entsprechen bijektiv den Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang n über X .

Beweis

Analog Beispiel 10.3; Übung? □

Definition + Proposition 10.6

Sei (X, \mathcal{O}_X) lokal geringter Raum, \mathcal{E} lokal freie Garbe vom Rang n auf X .

a) $\mathcal{E}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ ist lokal freie Garbe vom Rang n , sie heißt zu \mathcal{E} **duale** Garbe.

b) $(\mathcal{E}^*)^* \cong \mathcal{E}$

c) Für jede \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{F} ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

d) Ist \mathcal{E}' eine weitere lokal freie Garbe vom Rang m , so ist $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'$ lokal frei vom Rang $n \cdot m$.

e) Ist $f : Y \rightarrow X$ Morphismus lokal geringter Räume, so ist $f^*\mathcal{E}$ lokal frei vom Rang n auf Y .

Beweis

a) Lokal ist $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X^n$ und $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X^n$.

b) Wie in Lineare Algebra I

c) Für $U \subseteq X$ offen ist

$$(\mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})(U) = \text{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{O}_X|_U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U) \cong \text{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U)$$

$$l \otimes v \mapsto v \mapsto (x \mapsto l(x)v)$$

d) $\mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^m \cong \mathcal{O}_X^{n \cdot m}$

e) Ist $U \subseteq X$ offen mit $\mathcal{E}|_U = (\mathcal{O}_X|_U)^n$, so ist $f^*\mathcal{E}(f^{-1}(U)) = (f^{-1}\mathcal{O}_X|_U \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{O}_Y)(f^{-1}(U)) = (\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)))^n$ □

Bemerkung + Definition 10.7

Sei (X, \mathcal{O}_X) lokal geringter Raum.

a) Für jede lokal freie Garbe \mathcal{L} auf X von Rang 1 gilt:

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}_X$$

b) Die Isomorphieklassen von lokal freien Garben vom Rang 1 auf X bilden eine Gruppe $\text{Pic}(X)$ (**Picard-Gruppe** von X).

c) Eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{L} auf X heißt **invertierbar**, wenn sie lokal frei vom Rang 1 ist.

Beweis

a) Nach 10.6 c) ist $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$. Sei $\varphi : \mathcal{O}_X \rightarrow \text{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ gegeben durch $1 \mapsto \text{id}$. φ ist injektiver Morphismus von Garben.

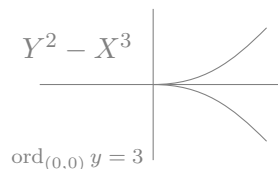
φ ist surjektiv, da φ_X surjektiv ist für jedes $x \in X$: sei dazu $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_X)$ und $(U, \tilde{\alpha})$ Vertreter von α , sodass $\mathcal{L}|_U = \mathcal{O}_X|_U$. Dann ist $\tilde{\alpha}$ durch $\tilde{\alpha}(1) \in \mathcal{L}(U) = \mathcal{O}_X(U)$ bestimmt $\Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(1) \cdot \text{id} \in \text{Bild } \varphi_U$. \square

§ 11 Divisoren

Sei X ein noethersches, irreduzibles, reduziertes Schema.
 =: **integer** (engl. integral)

Definition + Bemerkung 11.1

- Ein **Primdivisor** auf X ist ein integrales abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1.
- Die freie abelsche Gruppe $\text{Div}(X)$, die von den Primdivisoren erzeugt wird, heißt die Gruppe der **Weil-Divisoren**.
- Ist X eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so sind die Primdivisoren die abgeschlossenen Punkte auf X .
- Sei W ein Primdivisor auf X , η_W der generische Punkt von W , $\mathcal{O}_{X,W} = \mathcal{O}_{X,\eta_W}$ ($\dim \mathcal{O}_{X,W} = 1$). Für $f \in \mathcal{O}_{X,W} \setminus \{0\}$ sei $\text{ord}_W(f) := \dim_{\kappa(W)} \mathcal{O}_{X,W}/(f)$. Für $f = \frac{g}{h} \in K = k(X) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{X,W})$ sei $\text{ord}_W(f) = \text{ord}_W(g) - \text{ord}_W(h)$ (wohldefiniert).
 Es gilt: $\text{ord}_W(f \cdot g) = \text{ord}_W(f) + \text{ord}_W(g)$.



$$k[X, Y]/(y^2 - x^3)_{(x,y)/(y)} = k \cdot \bar{1} + k \cdot \bar{x} + k \cdot \bar{x}^2 \rightsquigarrow \text{ord}_{(0,0)} x = 2$$

- Für $f \in k^\times$ sei $\text{div}(f) := \sum_{W \text{ Primdiv.}} \text{ord}_W(f) \cdot W$; $\text{div}(f)$ ist Divisor.
- $\text{Cl}(X) := \text{Div}(X) / \text{Div}_H(X)$ heißt **Weil-Divisorengruppe** von X .
Hauptdivisoren

Beispiel 11.2

$$X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \text{Proj } \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$$

Jeder Primdivisor W auf \mathbb{P}^n ist von der Form $W = V(F)$ für ein irreduzibles homogenes Polynom $F \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$. Sei $d := \deg F$.

Behauptung: $W - d \cdot H$ ist hauptdivisor für $H := V(X_0)$

denn: $\frac{F}{X_0^d} \in K = k(X)$, $\text{div } \frac{F}{X_0^d} = W - d \cdot H \Rightarrow \text{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ (als Gruppe)

Proposition 11.3

Sei R faktorieller Ring, $X = \text{Spec } R$. Dann ist $\text{Cl}(X) = 0$.

Beweis

Sei W Primdivisor, also $W = V(\mathfrak{p})$ für ein Primideal \mathfrak{p} der Höhe 1.

Behauptung: \mathfrak{p} ist Hauptideal

Dann ist $\mathfrak{p}(f)$ für ein Primideal $f \in R \Rightarrow \text{div}(f) = W$

Beweis der Behauptung: Sei $0 \neq f \in \mathfrak{p}$, $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_r$ die Primfaktorzerlegung $\Rightarrow \exists f_1 \in \mathfrak{p} \Rightarrow (0) \subsetneq (f_1) \subseteq \mathfrak{p}$ ist Primidealkette $\xrightarrow{\text{ht}(\mathfrak{p})=1} \mathfrak{p} = (f_1)$ \square

Beispiel

Sei $R = k[X, Y]/(Y^2 - X^3 + X) = k[E]$, $E = V(Y^2 - X^3 + X) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Dann ist für $P \in E$ abgeschlossen $1 \cdot P$ kein Hauptdivisor!

Definition + Bemerkung 11.4

Sei X ein integres Schema, $K = k(X)$, der Funktionenkörper von X .

- Ein **Cartier-Divisor** auf X ist eine Äquivalenzklasse von Familien $(U_i, f_i)_{i \in I}$, wobei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X , $f_i \in K^\times$, sodass $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$. Dabei sei $(U_i, f_i)_{i \in I} \sim (V_j, g_j)_{j \in J} \Leftrightarrow \frac{f_i}{g_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$.
- Die Cartier-Divisoren auf X bilden eine Gruppe $\text{CaDiv}(X)$ mit folgender Verknüpfung: Seien $D_1 = (U_i, f_i), D_2 = (V_j, g_j) \in \text{CaDiv}(X)$, $(W_k)_k$ gemeinsame Verfeinerung, also $I = J$, $U_i = V_i$, $D_1 + D_2 := (U_i, f_i \cdot g_i)_{i \in I}$.
- $\text{CaDiv}(X) \cong \mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times(X)$, wobei \mathcal{K}_X^\times die konstante Garbe K^\times sei.
- $D \in \text{CaDiv}(X)$ heißt **Haptdivisor**, wenn es einen Vertreter von D der Form (X, f) gibt.

$$\text{CaCl}(X) := \text{CaDiv} / \text{CaDiv}_H(X)$$

Beweis

- Sei $D = (U_i, f_i)_{i \in I} \in \text{CaDiv}(X)$, U_i klein. Für $i \in I$ sei $\varphi_i \in K^\times / \mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times(U_i)$ die Restklasse von f_i . φ_i ist durch D eindeutig bestimmt.

Auf $U_i \cap U_j$ ist $\varphi_i = \varphi_j \Rightarrow \exists \varphi \in K_X^\times / \mathcal{O}_X^\times(X)$ mit $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$

Sei umgekehrt $\varphi \in K_X^\times / \mathcal{O}_X^\times(X)$. Für $x \in X$ sei $(U_x, \varphi^{(x)})$ Vertreter von $\varphi_x \in (\mathcal{K}^\times, \mathcal{O}^\times)_x$ (U_x Umgebung von $x \in K^\times$)

$\Rightarrow (U_x, \varphi^{(x)})_{x \in X}$ ist Cartier-Divisor. □

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}_k^n$, k Körper, $U_i = D(X_i)$, $i = 0, \dots, n$, $f_i := \frac{X_0}{X_i}$, $f_0 := 1$.

Behauptung: (U_i, f_i) ist Cartier-Divisor

Denn: Für $i \neq 0 \neq j$ ist $\frac{f_i}{f_j} = \frac{X_j}{X_i} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$.

$$\frac{f_i}{f_0} = \frac{X_0}{X_i} \in \mathcal{O}_X(U_0 \cap U_i)$$

$$\text{div}(f_i)|_{U_i} = V(X_0)$$

$(U_i, f_i)_{i=0, \dots, n}$ „induziert“ also den Weil-Divisor $V(X_0)$.

Satz 3

Sei X noethersches integres separiertes Schema. Dann gilt:

- $\text{CaCl}(X) \cong \text{Pic}(X)$
- Es gibt natürlichen Homomorphismus $\alpha : \text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$.
- Ist $\mathcal{O}_{X,x}$ faktoriell für jedes $x \in X$, so ist α Isomorphismus.

Beweis

- Sei $D = (U_i, f_i) \in \text{CaDiv}(X)$, W Primdivisor auf X . Wähle i mit $U_i \cap W \neq \emptyset$. Setze $n_W := \text{ord}_W(f_i)$.

n_W ist wohldefiniert: Sei $j \in I$ mit $U_j \cap W \neq \emptyset \xrightarrow{W \text{ irred.}} U_i \cap U_j \cap W \neq \emptyset$, $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times \Rightarrow (f_i) = (f_j)$ in $\mathcal{O}_{X,W} \Rightarrow \text{ord}_W(f_i) = \text{ord}_W(f_j)$

☞ I endlich, da X noethersch $\Rightarrow D = \sum_{W \text{ Primid.}} n_W W$ ist Weil-Divisor

c) Umkehrabbildung zu α

Behauptung: Zu jedem Weil-Divisor $D = \sum n_W W$ auf X gibt es Überdeckung $(U_i)_i$ von X und $f_i \in K^\times$ mit $D|_{U_i} = \text{div}(f_i)|_{U_i}$.

Dann gilt: $\beta(D) := (U_i, f_i)$ ist Cartier-Divisor.

Denn: $\text{div}(f_i)|_{U_i \cap U_j} = \text{div}(f_j)|_{U_i \cap U_j} = D|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$

Beweis der Behauptung: ☞ $X = \text{Spec } R$. Sei $\xi \in X$ abgeschlossener Punkt.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} = R_{m_\xi}$ (nach Voraussetzung faktoriell!)

Für jeden Primdivisor $W = V(\mathfrak{p})$ von X gilt: $\xi \in W \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subseteq m_\xi$

Da $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ ist nach 11.3 $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_{X,\xi} = (f_w)_{w \in K^\times}$ ein Hauptideal. Sei $f_\xi := \prod_{\xi \in W} f_W^{n_W}$ und

$$U_\xi := X - \bigcup_{\substack{W \text{ Primid.} \\ \xi \notin W}} \frac{n_W}{\text{ord}_W f_\xi} W$$

a) Sei $D = (U_i, f_i) \in \text{CaDiv}(X)$, $\mathcal{L}(D)(U_i) := \frac{1}{f_i} \cdot \mathcal{O}_X(U_i) \subset K$ (als $\mathcal{O}_X(U_i)$ -Untermodul von K). Da $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$ gilt $\frac{1}{f_i} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = \frac{1}{f_j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$.

Behauptung 1: $\mathcal{L}(D)$ ist lokal freie Garbe vom Rang 1. \mathcal{L} induziert Homomorphismus $\text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Pic } X$

Behauptung 2: Jede lokal freie \mathcal{O}_X -Modulgarbe von \mathcal{K}^\times ist von der Form $\mathcal{L}(D)$ für ein $D \in \text{CaDiv}(X)$.

Behauptung 3: Jede lokal freie Garbe vom Rang 1 auf X ist isomorph zu einer Untergarbe von \mathcal{K} .

Beweis 3: $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$

□