# 23. Das Riemann-Integral

In diesem Paragraphen gilt stets: $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei *beschränkt*. $m := \inf f(I),\ M := \sup f(I)$.

**Definition**
$Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq I$ heißt eine **Zerlegung** von $I :\Longleftrightarrow\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
$I_j := [x_{j-1}, x_j],\ |I_j| = x_j - x_{j-1},\ m_j := \inf f(I_j),\ M_j := \sup f(I_j)\ (j = 1, \ldots, n)$

Dann gilt: $m \le m_j \le M_j \le M\ (j = 1, \ldots, n),\ \sum_{j=1}^{n} |I_j| = b - a\ (= |I|)$

$s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|$ heißt die **Untersumme** von $f$ bzgl. $Z$.
$S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j|$ heißt die **Obersumme** von $f$ bzgl. $Z$.

$m \le m_j \le M_j \le M \implies m|I_j| \le m_j|I_j| \le M_j|I_j| \le M|I_j|$
Durch Summation erhält man: $m(b-a) \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le M(b-a)$.

$\mathfrak{Z} := \{Z : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$. Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} \implies Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$. Gilt $Z_1 \subseteq Z_2$, so heißt $Z_2$ eine **Verfeinerung** von $Z_1$.

**Satz 23.1 (Zerlegungs-Verfeinerungen)**
Seien $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$.

(1) Ist $Z_1 \subseteq Z_2 \implies s_f(Z_1) \le s_f(Z_2),\ S_f(Z_2) \le S_f(Z_1)$

(2) $s_f(Z_1) \le S_f(Z_2)$

**Beweis**

(1) Übung (es genügt zu betrachten: $Z_2 = Z_1 \cup \{t_0\},\ t_0 \notin Z_1$)

(2) $Z := Z_1 \cup Z_2$. Dann: $s_f(Z_1) \overset{(1)}{\le} s_f(Z) \le S_f(Z) \overset{(1)}{\le} S_f(Z_2)$. ∎

**Definition**

$$\underline{\int_a^b} f \mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f(x) \mathrm{d}x := \sup\{s_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\} \text{ heißt } \textbf{unteres Integral} \text{ von } f$$
$$\overline{\int_a^b} f \mathrm{d}x := \overline{\int_a^b} f(x) \mathrm{d}x := \inf\{S_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\} \text{ heißt } \textbf{oberes Integral} \text{ von } f$$

Sei $Z \in \mathfrak{Z}$. Dann: $m(b-a) \le s_f(Z) \le \underline{\int_a^b} f \mathrm{d}x \overset{23.1(2)}{\le} S_f(Z) \le M(b-a) \implies m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f \mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f \mathrm{d}x \le M(b-a)$

**Definition**
$f$ heißt (Riemann-)**integrierbar** über $[a,b]$ $:\iff \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x$. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f\mathrm{d}x := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x \; (= \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x)$$

das (Riemann-)**Integral** von $f$ über $[a,b]$.

$R[a,b] := \{g : [a,b] \to \mathbb{R} : g \text{ ist auf } [a,b] \text{ beschränkt und integrierbar über } [a,b]\}$

**Beispiele:**

(1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c \ \forall x \in [a,b]$. Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$; $m_j = M_j = c$ $(j = 1, \ldots, n) \implies s_f(Z) = S_f(Z) = \sum_{j=1}^n c|I_j| = c(b-a) \implies f \in R[a,b]$ und $\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a)$.

(2)
$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$, $m_j = 0$, $M_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$
$\implies s_f(Z) = 0$, $S_f(Z) = \sum_{j=1}^n |I_j| = b-a$.

$\implies \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = 0 \neq b-a = \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x \implies f \notin R[a,b]$.

(3) $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = x$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Z = \{x_0, \cdots, x_n\}$, wobei $x_j := j\frac{1}{n}$ $(j = 0,..,n)$. $m_j, M_j, I_j$ wie immer. Dann: $|I_j| = \frac{1}{n}$.

$$m_j = f(x_{j-1}) = (j-1)\frac{1}{n}.\ s_f(Z) = \sum_{j=1}^n (j-1)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(0+1+\cdots+(n-1)) = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$M_j = f(x_j) = \frac{j}{n}.\ S_f(Z) = \sum_{j=1}^n j\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1+\cdots+n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\frac{n-1}{2n} = s_f(Z) \leq \underline{\int_0^1} x\mathrm{d}x \leq \overline{\int_0^1} x\mathrm{d}x \leq S_f(Z) = \frac{n+1}{2n} \implies f \in R[0,1] \text{ und } \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

**Satz 23.2 (Rechenregeln für Integrale)**
Es seien $f, g \in R[a,b]$

(1) Ist $f \leq g$ auf $[a,b] \implies \int_a^b f\mathrm{d}x \leq \int_a^b g\mathrm{d}x$

(2) Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g\mathrm{d}x$

**Beweis**

(1) Übung.

(2) Übung: $\alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f\mathrm{d}x$.
Zu zeigen: $f+g \in R[a,b]$ und $\int_a^b (f+g)\mathrm{d}x = \int_a^b f\mathrm{d}x + \int_a^b g\mathrm{d}x$. Sei $z = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathfrak{Z}, m_j, M_j, I_j$ wie immer. $\widetilde{m_j} := \inf g(I_j)$, $\widetilde{\widetilde{m_j}} := \inf(f+g)(I_j)$. $x \in I_j :\ (f+g)(x) =$

$f(x) + g(x) \geq m_j + \widetilde{m_j} \implies \widetilde{\widetilde{m_j}} \geq m_j + \widetilde{m_j} \implies \widetilde{\widetilde{m_j}}|I_j| \geq m_j|I_j| + \widetilde{m_j}|I_j| \xRightarrow{\text{Summation}}$ $S_{f+g}(Z) \geq S_f(Z) + S_g(Z) \implies S_f(Z) + S_g(Z) \leq \overline{\int_a^b}(f+g)dx \ \forall z \in \mathfrak{Z}$ $(*)$. Sei $\varepsilon > 0$ : $\exists\ Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} : S_f(Z_1) > \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x - \varepsilon = \int_a^b f\mathrm{d}x - \varepsilon,\ s_g(Z_2) > \int_a^b g\mathrm{d}x - \varepsilon,\ Z := Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$. $\underbrace{\int_a^b f\mathrm{d}x + \int_a^b g\mathrm{d}x}_{=:A} - 2\varepsilon < S_f(Z_1) + S_g(Z_2) \overset{23.1}{\leq} S_f(Z) + S_g(Z) \overset{(*)}{\leq} \overline{\int_a^b}(f+g)dx$. Also:

$A - 2\varepsilon \leq \overline{\int_a^b}(f+g)dx\ \forall \varepsilon > 0 \xRightarrow{\varepsilon \to 0+} A \leq \overline{\int_a^b}(f+g)dx$. Analog: $\underline{\int_a^b}(f+g)dx \leq A \implies A = \overline{\int_a^b}(f+g)dx = \underline{\int_a^b}(f+g)dx$ ■

**Satz 23.3 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**
$f \in R[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists Z \in \mathfrak{Z} : S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$.

**Beweis**
„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Voraussetzung $\implies \exists Z \in \mathfrak{Z} : S_f(Z) < s_f(Z) + \varepsilon \implies \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x \leq S_f(Z) < s_f(z) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x + \varepsilon$. Also: $\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x < \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x\ \forall \varepsilon > 0 \xRightarrow{\varepsilon \to 0+} \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x (\leq \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x) \implies f \in R[a,b]$.
„$\implies$“: $S := \int_a^b f\mathrm{d}x$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} : s_f(Z_1) > \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} = S - \frac{\varepsilon}{2}$. $S_f(Z_2) < S + \frac{\varepsilon}{2}$. $Z := Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$. $S_f(Z) - s_f(Z) \overset{23.1}{\leq} S_f(Z_2) - s_f(Z_1) < S + \frac{\varepsilon}{2} - (S - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$. ■

**Satz 23.4 (Integratibilität monotoner und stetiger Funktionen)**
(1) Ist $f$ auf $[a,b]$ monoton $\implies f \in R[a,b]$.

(2) $C[a,b] \subseteq R[a,b]$.

**Beweis**
(1) f sei wachsend auf $[a,b]$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Z = \{x_0, \cdots, x_n\}$ sei die **äquidistante Zerlegung** von $[a,b]$ mit $n+1$ Teilpunkten. $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$ $(j = 0, \cdots, n)$, dann: $|I_j| = \frac{b-a}{n}$. $m_j, M_j$ wie immer: $S_f(Z) - s_f(z) = \sum_{j=1}^n (\underbrace{M_j}_{=f(x_j)} - \underbrace{m_j}_{f(x_{j-1})})|I_j| = \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1}))\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) =: \alpha_n$. Sei $\varepsilon > 0$, dann: $\exists n \in \mathbb{N} : \alpha_n < \varepsilon \xRightarrow{23.3}$ Behauptung.

(2) Sei $f \in C[a,b]$ und $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : (*)\ |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ \forall t, s \in [a,b]$ mit $|t-s| < \delta$. Sei $Z = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ $m_j$, $M_j$, $|I_J|$ seien wie immer; $z$ sei so gewählt, daß $|I_j| < \delta$ $(j = 1, \cdots, n)$. Betrachte $I_j$ : 18.3 $\implies \exists s_j, t_j \in I_j : m_j = f(s_j),\ M_j = f(t_j)$. $|t_j - s_j| < \delta \overset{(*)}{\implies} \underbrace{f(t_j) - f(s_j)}_{=M_j - m_j} < \frac{\varepsilon}{b-a} \implies S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^n \underbrace{(M_j - m_j)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}}|I_j| < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon \xRightarrow{23.3} f \in R[a,b]$ ■

**Definition**
Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $G, g : J \to \mathbb{R}$ seien Funktionen. $G$ heißt eine **Stammfunktion** (SF) von $g$ auf $J :\iff$ G ist differenzierbar auf $J$ und $G' = g$ auf $J$.

**Beachte:**

(1) Sind $G_1$ und $G_2$ Stammfunktionen von $g$ auf $J \overset{21.7}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : G_1 = G_2 + c$ auf $J$.

(2) Sei $I = [a, b]$. Es gibt Funktionen, die auf $[a, b]$ Stammfunktionen besitzen, aber über $[a, b]$ nicht integrierbar sind.

**Beispiel**

$$F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bekannt: (§22): $F$ ist auf $[0, 1]$ differenzierbar und $f := F'$ ist auf [0,1] *nicht* beschränkt. Also: $f \notin R[0, 1]$, besitzt aber auf $[0, 1]$ die Stammfunktion $F$.

(3) Sei $I = [a, b]$. Es gibt Funktionen in $R[a, b]$, die auf $[a, b]$ keine Stammfunktionen besitzen.

**Beispiel**
Sei $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [-1, 0) \end{cases}$. $f$ ist monoton auf $[-1, 1] \overset{23.4}{\Longrightarrow} f \in R[-1, 1]$.
Annahme: $f$ besitzt auf $[-1, 1]$ die Stammfunktion $F$. Auf $[0, 1] : F'(x) = f(x) = 1 = (x)' \overset{21.7}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in \mathbb{R} : F(x) = x + c_1 \; \forall x \in [0, 1]$. Auf $[-1, 0)$: $F'(x) = f(x) = 0 \overset{21.7}{\Longrightarrow} \exists c_2 \in \mathbb{R} : F(x) = c_2 \; \forall x \in [-1, 0)$. $\lim\limits_{x \to 0+} F(x) = c_1$, $\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = c_2$. $F$ stetig in $x = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2$. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{x + c_1 - c_1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{c_2 - c_1}{x} = 0$, Widerspruch zur Differenzierbarkeit von $F$ in $x_0 = 0$.

**Satz 23.5 (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**
Es sei $f \in R[a, b]$ und $f$ besitze auf $[a, b]$ die Stammfunktion $F$. Dann:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: [F(x)]_a^b$$

**Beweis**
Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{Z}; m_j, M_j, I_j$ sei wie gehabt. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. MWS $\Longrightarrow \exists \xi_j \in I_j : F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \cdot |I_j| \Longrightarrow \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j| = \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1}) = F(b) - F(a)$

$m_j|I_j| \le f(\xi_j)|I_j| \le M_j|I_j| \overset{\text{Summation}}{\Longrightarrow} s_f(Z) \le F(b) - F(a) \le S_f(Z) \; \forall Z \in \mathfrak{Z} \Longrightarrow \underbrace{\underline{\int_a^b} f dx}_{= \int_a^b f dx} \le$

$F(b) - F(a) \le \underbrace{\overline{\int_a^b} f dx}_{= \int_a^b f dx} \Longrightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f dx$ ∎

**Beispiele:**
(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$, $\cos x$ ist stetig auf $[0, \frac{\pi}{2}]$, also integrierbar. $F(x) = \sin x$ ist eine Stammfunktion von $\cos x \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

(2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

**Beispiele:**

(1) Sei $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$, $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0, & x \in [0,1] \backslash \{q_1, \ldots, q_n\} \end{cases}$, $(n \in \mathbb{N})$. $(f_n)$ konvergiert auf $[0,1]$ *punktweise* gegen $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$. Bekannt: $f \notin R[0,1]$. In 23.10 werden wir sehen: $f_n \in R[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Für $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ sei $f_n$ wie in der Zeichnung:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2 x, & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0, & x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

$f_n \in C[0,1] \implies f_n \in R[0,1]$. zur Übung: $\int_0^1 f_n dx = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. $(f_n)$ konvergiert auf $[0,1]$ *punktweise* gegen $f(x) = 0$.
Aber: $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f dx = \int_0^1 (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) dx$

**Satz 23.6 (Integrierbarkeit gleichmäßig konvergierender Funktionsfolgen)**
$(f_n)$ sei eine Folge in $R[a,b]$ und $(f_n)$ konvergiert auf $[a,b]$ *gleichmäßig* gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in R[a,b]$ und

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f dx = \int_a^b (\lim_{n \to \infty} f_n) dx$$

$(f_n)$ sei eine Folge in $R[a,b]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf $[a,b]$ *gleichmäßig* gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in R[a,b]$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$$

**Beweis**
1. Zu $\varepsilon = 1$ $\exists m \in \mathbb{N}$: $f_m - 1 < f < f_m + 1$ auf $[a,b]$. $f_n$ beschränkt auf $[a,b]$.
2. $A_n := \int_a^b f_n dx$ $(n \in \mathbb{N})$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : f_n - \varepsilon < f < f_n + \varepsilon$ auf $[a,b]$ $\forall n \geq n_0 \implies$ für $n \geq n_0$ folgt (wie im Beweis von 23.2(1)):

$$\underbrace{\int_a^b (f_n - \varepsilon) dx}_{=A_n - \varepsilon(b-a)} \leq \underbrace{\int_a^b f dx}_{=:A} \leq \underbrace{\int_a^b f x ds}_{=:B} \leq \underbrace{\int_a^b (f_n + \varepsilon) dx}_{=A_n + \varepsilon(b-a)}$$

$\implies |A_n - A| \leq \varepsilon(b-a)$, $|A_n - B| \leq \varepsilon(b-a)$
$\forall n \in n_0 \implies A_n \to A, A_n \to B$ $(n \to \infty) \implies A = B$
$\implies f \in R[a,b]$ und $A_n \to \int_a^b f dx$ ■

**Beispiel**

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$$

$g$ ist monoton $\implies g \in R[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Übungsblatt: $f \in R[0,1]$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \notin R[0,1]$$

**Satz 23.7 (Integration von verketteten Funktionen)**
Es sei $f \in R[a,b]$, $D := f([a,b])$ und $h : D \to R$ sei Lipschitzstetig auf $D$. Dann: $h \circ f \in R[a,b]$

**Beweis**
$g := h \circ f$. $\exists L > 0$. $|h(t) - h(s)| \leq L|t - s|$ $\forall t, s \in D$. O.B.d.A: $L > 0$. Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$, $m_j, M_j, I_j$ seien wie gehabt. $\tilde{m}_j := \inf g(I_j)$, $\tilde{M}_j := \sup g(I_j)$. Seien $x, y \in I_j$, etwa $f(x) \leq f(y)$: $g(x) - g(y) \leq |g(x) - g(< y| = |h(f(x)) - h(f(y))| \leq L|f(x) - f(y)| = L(f(y) - f(x)) \leq L(Mj - mj) =: c_j \implies g(x) \leq g(y) + c\ \forall x, y \in I_j \implies \tilde{M}_j \leq g(y) + c_j\ \forall y \in I_j \implies \tilde{M}_j - c_j \leq g(y)\ \forall y \in I_j \implies \tilde{M}_j - c_j \leq \tilde{m}_j \implies \tilde{M}_j - \tilde{m}_j \leq c_j = L(M_j - m_j) \implies S_g(Z) - s_g(Z) = \sum_{j=1}^n (\tilde{M}_j - \tilde{m}_j)|I_j| \leq L \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| = L(S_f(Z) - s_f(Z))\ \forall z \in \mathfrak{Z} \overset{23.3}{\implies} g \in R[a,b]$ ■

**Satz 23.8 (Weitere Rechenregeln für Integrale)**
Es seien $f, g \in R[a,b]$.

(1) $|f| \in R[a,b]$ und $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$ (**Dreiecksungleichung für Integrale**)

(2) $fg \in R[a,b]$

(3) Ist $g(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ und $\frac{1}{g}$ beschränkt auf $[a,b]$ $\implies \frac{1}{g} \in R[a,b]$

**Beweis**

(1) $D := f([a,b])$, $h(t) := |t|$ $(t \in D)$. Dann: $|f| = h \circ f$. Für $t, s \in D$: $|h(t) - h(s)| = ||t| - |s|| \overset{§1}{\leq} |t - s| \overset{23.7}{\implies} |f| \in R[a,b]$
$\pm f \leq |f|$ auf $[a,b]$. 23.2 $\implies \pm \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx \implies |\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$

(2) 1. $D := f([a,b])$, $h(t) := t^2$ $(t \in D)$. Dann: $f^2 = h \circ f$.
$\exists \gamma > 0 : |f(x)| \leq \gamma\ \forall x \in [a,b] \implies |t| < \gamma\ \forall t \in D$ Für $t, s \in D$: $|h(t) - h(s)| = |t^2 - s^2| = |t + s||t - s| \leq (|t| + |s|) \cdot |t - s| \leq 2\gamma|t - s| \overset{23.7}{\implies} f^2 \in R[a,b]$
2. $f + g, f - g \in R[a,b] \implies (f+g)^2, (f-g)^2 \in R[a,b] \implies \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right) \in R[a,b] \implies f \cdot g \in R[a,b]$

(3) $D := g([a,b])$, $h(t) := \frac{1}{t}$ $(t \in D)$. Dann: $\frac{1}{g} = h \circ g$.
$\exists \gamma > 0 : \frac{1}{|g(x)|} \leq \gamma\ \forall x \in [a,b] \implies \frac{1}{|t|} \leq \gamma\ \forall t \in D$. Für $t, s \in D$: $|h(t) - h(s)| = |\frac{1}{t} - \frac{1}{s}| = \frac{|t-s|}{|t||s|} \leq \gamma^2|t - s| \overset{23.7}{\implies} \frac{1}{g} \in R[a,b]$

**Satz 23.9 (Aufteilung eines Integrals)**
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und $c \in (a, b)$. Dann gilt:

$$f \in R[a, b] \iff f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b].$$

In diesem Fall ist:

$$\int_a^b f \mathrm{d}x = \int_a^c f \mathrm{d}x + \int_c^b f \mathrm{d}x$$

**Beweis**
**„⇒“:** Sei $\varepsilon > 0$. Aus 23.3 folgt: $\exists Z_1 \in \mathfrak{Z} : S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon$.

$Z := Z_1 \cup \{c\} \in \mathfrak{Z}$. Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ mit $x_k = c$. $Z_0 := \{x_0, \ldots, x_k\}$ ist eine Zerlegung von $[a, c]$. $M_j,\ m_j,\ I_j$ seien wie immer. Dann gilt:

$S_f(Z_0) - s_f(Z_0) = \sum_{j=1}^{k} (M_j - m_j)|I_j| \leq \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)|I_j| = S_f(Z) - s_f(Z) \leq S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon \overset{23.3}{\Longrightarrow} f \in R[a, c]$. Analog: $f \in R[c, b]$.

**„⇐“:** $S := \int_a^c f \mathrm{d}x + \int_c^b f \mathrm{d}x$. Sei $\varepsilon > 0$ Dann gibt es Zerlegungen $Z_1$ von $[a, c]$ und $Z_2$ von $[c, b] : s_f(Z_1) = \underline{\int_a^c} f \mathrm{d}x - \varepsilon = \int_a^c f \mathrm{d}x,\ s_f(Z_2) > \int_b^c f \mathrm{d}x - \varepsilon$.

$Z := Z_1 \cup Z_2 \implies Z \in \mathfrak{Z}$ und $\underline{\int_a^b} f \mathrm{d}x \geq s_f(Z) = s_f(Z_1) + s_f(Z_2) > S - 2\varepsilon$.

Also: $S - 2\varepsilon < \underline{\int_a^b} f \mathrm{d}x \ \forall \varepsilon > 0 \overset{\varepsilon \to 0+}{\Longrightarrow} S \leq \underline{\int_a^b} f \mathrm{d}x$.

Analog: $\overline{\int_a^b} f \mathrm{d}x \leq S \implies f \in R[a, b],\ \int_a^b f \mathrm{d}x = S$. ∎

**Satz 23.10 (Integral und Unstetigkeitsstellen)**
$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien Funktionen.

(1) Ist $f$ beschränkt auf $[a, b]$ und $A := \{x \in [a, b] : f$ ist in $x$ *nicht* stetig$\}$ *endlich*, dann gilt: $f \in R[a, b]$.

(2) Ist $f \in R[a, b]$ und $A := \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ *endlich*, dann gilt: $g \in R[a, b]$ und $\int_a^b g \mathrm{d}x = \int_a^b f \mathrm{d}x$.

**Beweis**
(1) $\exists \gamma \geq 0 : |f(x)| \leq \gamma \ \forall x \in [a, b]$. Es genügt zu betrachten: $A := \{t_0\}$ (wegen 23.9). O.B.d.A.: $t_0 = a$ oder $t_0 = b$. Etwa: $t_0 = a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\alpha \in (a, b)$ mit $2\gamma(\alpha - a) < \varepsilon/2$.

$f \in C[\alpha, b] \implies f \in R[\alpha, b] \overset{23.3}{\Longrightarrow}$ Es gibt eine Zerlegung $Z_1$ von $[\alpha, b]$ mit: $S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon/2$. $Z := Z_1 \cup \{a\} \implies Z \in \mathfrak{Z}$ und es gilt:

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \underbrace{\sup f([a,\alpha]) - \inf f([a,\alpha]))(\alpha - 1)}_{\le 2\gamma} + \underbrace{S_f(Z_1) - s_f(Z_1)}_{<\varepsilon/2}$$
$$< 2\gamma(\alpha - a) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(2) Klar: g ist beschränkt. $h := g - f$. Dann: $h(x) = 0\ \forall x \in [a,b]\backslash A \implies h \in C([a,b]\backslash A) \stackrel{(1)}{\implies} h \in R[a,b] \implies g = h + f \in R[a,b]$.

Noch zu zeigen: $\int_a^b h\mathrm{d}x = 0$. $\varphi := |h|$. Aus 23.8 folgt: $\varphi \in R[a,b]$ und $|\int_a^b h\mathrm{d}x| \le \int_a^b \varphi\mathrm{d}x$.

Sei $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$, $m_j := \inf \varphi(I_j)$, $\varphi(x) = 0\ \forall x \in [a,b]\backslash A$, $\varphi(x) > 0\ \forall x \in A \implies m_j = 0\ (j = 1, \dots, n) \implies s_f(Z) = 0 \implies \underline{\int_a^b}\varphi\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi\mathrm{d}x = 0 \implies \int_a^b h\mathrm{d}x = 0$. ■

**Satz 23.11 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**
Es seien $f, g \in R[a,b]$, $g \ge 0$ (oder $g \le 0$) auf $[a,b]$, $m := \inf f([a,b])$, $M := \sup f([a,b])$

(1) $\exists \mu \in [m,M] : \int_a^b fg\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g\mathrm{d}x$

(2) Ist $f \in C[a,b] \implies \exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

**Beweis**

(1) $\alpha := \int_a^b g\mathrm{d}x$, $\beta := \int_a^b fg\mathrm{d}x$. $m \le f \le M$ auf $[a,b] \implies mg \le fg \le Mg$ auf $[a,b] \implies m\alpha \le \beta \le M\alpha$.

Es ist $\alpha \ge 0$. O.B.d.A.: $\alpha > 0$. Dann gilt: $m \le \frac{\beta}{\alpha} \le M$, $\mu := \frac{\beta}{\alpha}$.

(2) Setze in (1) $g \equiv 1 \implies \int_a^b f\mathrm{d}x = \mu(b-a)$ ($\mu \in [m,M]$). Aus 18.1 folgt: $\exists \xi \in [a,b] : \mu = f(\xi)$. ■

**Der Riemannsche Zugang zum Integral** *Bemerkung: Wir haben bisher tatsächlich die* Darbouxschen *Integrale betrachtet. Hier wird nun die ursprüngliche Definition von Riemann vorgestellt.*

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Sei $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. $m_j, M_j, I_j$ seien wie immer.

Wählt man in jedem $I_j$ einen Punkt $\xi_j$, so heißt $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ein zu $Z$ passender **Zwischenvektor** und $\sigma_f(Z,\xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j|$ eine **Riemannsche Zwischensumme**.

$m_j \le f(\xi_j) \le M_j\ (j = 1, \dots, n) \implies s_f(Z) \le \sigma_f(Z,\xi) \le S_f(Z)$

**Satz 23.12 (Äquivalenz der Riemannschen und Darbouxschen Integrale)**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann gilt: $f \in R[a,b]$ genau dann, wenn es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists Z \in \mathfrak{Z} : |\sigma_f(Z,\xi) - S| < \varepsilon \text{ für jedes zu Z passende } \xi.\ (*)$$

In diesem Fall gilt:

$$S = \int_a^b f\mathrm{d}x.$$

**Beweis**

„⇒“: $S := \int_a^b f\mathrm{d}x$. Sei $\varepsilon > 0$. Wie im Beweis von 23.3: $\exists Z \in \mathfrak{Z} : s_f(Z) > S - \varepsilon,\ S_f(Z) < S + \varepsilon$.

Sei $\xi$ passend zu $Z \implies S - \varepsilon < s_f(Z) \leq \sigma_f(Z, \xi) \leq S_f(Z) < S + \varepsilon \implies |\sigma_f(Z, \xi) - S| < \varepsilon$.

„⇐“: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $Z \in \mathfrak{Z}$ so, dass $(*)$ gilt. Sei $Z := \{x_0, \ldots, x_n\},\ m_j,\ M_j,\ I_j$ wie immer. Sei $j \in \{1, \ldots, n\} : \exists \xi_j, \eta_j \in I_j : f(\xi_j) > M_j - \varepsilon,\ f(\eta_j) < m_j + \varepsilon,\ \xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sind passend zu $Z$.

$A := \sigma_f(Z, \xi),\ B := \sigma_f(Z, \eta)$. $A = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j| > \sum_{j=1}^n (M_j - \varepsilon)|I_j| = S_f(Z) - \varepsilon(b - a) \implies S_f(Z) < A + \varepsilon(b - a)$. (i)

Analog: $-s_f(Z) < \varepsilon(b - a) - B$. (ii)

Dann gilt: $S_f(Z) - s_f(Z) < A - B + 2\varepsilon(b - a) = A - S + S - B + 2\varepsilon(b - a) \leq |A - S| + |B - S| + 2\varepsilon(b - a) \overset{(*)}{<} 2\varepsilon + 2\varepsilon(b - a) = \varepsilon(2 + 2(b - a)) \overset{23.3}{\implies} f \in R[a, b]$.

$\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = \int_a^b f\mathrm{d}x \leq S_f(Z) \overset{(i)}{<} A + \varepsilon(b - a) = A - S + S + \varepsilon(b - a) \leq |A - S| + S + \varepsilon(b - a) \overset{(*)}{<} \varepsilon + S + \varepsilon(b - a)$.

Also: $\int_a^b f\mathrm{d}x < S + \varepsilon(1 + (b - a))\ \forall \varepsilon > 0 \overset{\varepsilon \to 0+}{\implies} \int_a^b f\mathrm{d}x \leq S$. Analog folgt mit (ii): $S \leq \int_a^b f\mathrm{d}x$. ■

**Definition**

Sei $f \in R[a, b]$. $\int_c^c f(x)\mathrm{d}x := 0$ und $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =: -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

**Bemerkung:** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

**Satz 23.13 (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**

Sei $f \in R[a, b]$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

(1) $F$ ist auf $[a, b]$ Lipschitzstetig, insbesondere $F \in C[a, b]$

(2) Ist $f$ in $x_0 \in [a, b]$ stetig $\implies F$ ist in $x_0$ differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$

(3) Ist $f \in C[a, b] \implies F \in C^1[a, b]$ und $F' = f$ auf $[a, b]$

**Beweis**

(1) $L := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Sei $x, y \in [a, b]$, etwa $x \leq y$. $F(y) = \int_a^y f(t)\mathrm{d}t \overset{23.9}{=} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^y f(t)\mathrm{d}t = F(x) + \int_x^y f(t)\mathrm{d}t \implies F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\mathrm{d}t \implies |F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)\mathrm{d}t| \overset{23.8}{\leq} \int_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\leq L} \mathrm{d}t \leq \int_x^y L\mathrm{d}t = L(y - x) = L|y - x|$

(2) Sei $x_0 \in [a,b)$. Wir zeigen: $(*) \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$ (analog zeigt man für $x_0 \in (a,b] : \lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$) Sei also $x_0 \in [a,b)$, $h > 0$ und $x_0 + h < b$. $g(h) := |\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)|$. Zu zeigen: $g(h) \to 0$ $(h \to 0+)$. Es ist $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$, $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{h} f(x_0)h = f(x_0) \implies g(h) = \frac{1}{h}|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t| \overset{23.8}{\leq} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\mathrm{d}t$; $s(h) := \sup\{|f(t)-f(x_0)| \ : \ t \in [x_0, x_0+h]\} \implies g(h) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} s(h)\mathrm{d}t = \frac{1}{h}s(h)h = s(h)$. Also: $0 \leq g(h) \leq s(h)$. $f$ stetig in $x_0 \implies f(t) \to f(x_0)$ $(t \to x_0) \implies s(h) \to 0$ $(h \to 0+) \implies g(h) \to 0$ $(h \to 0+) \implies (*)$

(3) folgt aus (2) ∎

**Satz 23.14 (Anwendung des 2. Hauptsatzes auf stetige Funktionen)**
Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f \in C(J)$ und $\xi \in J$ (fest). $F : J \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \int_\xi^x f(t)\mathrm{d}t$. Dann ist $F \in C^1(J)$ und $F' = f$ auf $J$.

**Beweis**
Seien $a, b \in J$, $a < b$ und $I := [a,b]$. Es genügt zu zeigen: $F$ ist differenzierbar auf $I$ und $F' = f$ auf $I$. $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ $(x \in I)$. Sei $\xi \leq a$ (analoger Beweis für $\xi \geq b$ und $\xi \in (a,b)$. Für $x \in [a,b] : \ F(x) = \int_\xi^x \cdots = \int_\xi^a \cdots + \int_a^x \cdots = F(a) + G(x) \overset{23.13}{\implies} F$ ist differenzierbar auf $I$ und $F' = G' = f$ auf $I$. ∎

**Definition**
Im folgenden seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ beliebige Intervalle.

(1) Sei $g : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. $g(x)|_{x=x_0} := g(x_0)$.

(2) Ist $f \in R[a,b]$, so heißt $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ auch ein **bestimmtes Integral**.

(3) Besitzt $G : I \to \mathbb{R}$ auf $I$ eine Stammfunktion, so schreibt man für eine solche auch $\int g(x)\mathrm{d}x$ (**unbestimmtes Integral**). "Gleichungen"der Form $\int g(x)\mathrm{d}x = h(x)$ gelten bis auf additive Konstanten! **Beispiel**: $\int e^x\mathrm{d}x = e^x$, $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + 7$. $\int g(x)\mathrm{d}x = h(x)$ auf $I$ bedeutet: h ist eine Stammfunktion von $g$ auf $I$.

**Satz 23.15 (Partielle Integration)**

(1) Es seien $f, g \in R[a,b]$ und $F, G$ seien Stammfunktionen von $f$ bzw. $g$ auf $[a,b]$. Dann:

$$\int_a^b Fg\mathrm{d}x = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b fG\mathrm{d}x$$

(2) Sind $f, g \in C^1[a,b] \implies$

$$\int_a^b f'g\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b fg'\mathrm{d}x$$

(3) Sind $f, g \in C^1(I) \implies$ auf $I$ gilt:

$$\int f'g\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int fg'\mathrm{d}x$$

**Beweis**

(1) $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \implies \int_a^b Fg\mathrm{d}x + \int_a^b fG\mathrm{d}x = \int_a^b (FG)'\mathrm{d}x \overset{23.5}{=} F(x)G(x)|_a^b$

(2) folgt aus (1)

(3) $(fg)' = f'g + fg' \implies fg = \int (f'g + fg')\mathrm{d}x$ ∎

**Beispiele:**

(1) $\int \log x\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_{g} \mathrm{d}x = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x$ auf $(0, \infty)$.

(2) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g} \mathrm{d}x = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x\mathrm{d}x = -\cos x\sin x + \int (1-\sin^2 x)\mathrm{d}x =$
$-\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x\mathrm{d}x$

$\implies \int \sin^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x)$ auf $\mathbb{R}$.

(3) $\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2e^x - \int \frac{1}{2}x^2e^x\mathrm{d}x$ *komplizierter!*

$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x$

**Satz 23.16 (Substitutionsregeln)**
Sei $f \in C(I)$ und $g \in C^1(J)$ und $g(J) \subseteq I$.

(1) Ist $J = [\alpha, \beta] \implies$

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)\mathrm{d}t$$

(2) Auf $J$ gilt:

$$\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x|_{x=g(t)}$$

(3) $g$ sei auf $J$ streng monoton $\implies$ auf $I$ gilt:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t|_{t=g^{-1}(x)}$$

.

**Merkregel**
Ist $y = y(x)$ differenzierbar, so schreibt man für $y'$ auch $\frac{dy}{dx}$. In 23.16 substituiere $x = g(t)$ (fasse also $x$ als Funktion von $t$ auf) $\implies g'(t) = \frac{dx}{dt}$ „$\implies dx = g'(t)dt$“.

**Beweis**

(2) Sei $F$ eine Stammfunktion von $f$ auf $I$. $G(t) := F(g(t))$ $(t \in J)$. $G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$ $(t \in J)$ $\implies$ $G$ ist eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$ auf $J$ $\implies$ (2)

(1) $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t \overset{23.5}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \overset{23.5}{=} \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$.

(3) $\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x))) = F(x)$ ∎

**Beispiele:**

(1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ (Substitution $x = \sin t,\ t = 0 \implies x = 0,\ t = \frac{\pi}{2} \implies x = 1, \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$).
$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t = t - \frac{1}{2}(t - \cos t\sin t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

(2) $\int \frac{1}{x\log x}\mathrm{d}x$ (Substitution $x = e^t,\ t = \log x, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$). $\int \frac{1}{x\log x} = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \log t = \log(\log(x))$ auf $(1,\infty)$.

**Definition**

(1) Seien $p$ und $q$ Polynome und $q \neq 0$. Dann heißt $\frac{p}{q}$ eine **rationale Funktion**.

$\frac{p}{q}$ hat eine Darstellung der Form $\frac{p}{q} = p_1 + \frac{p_2}{q}$, wobei $p_1, p_2$ Polynome und $\frac{p_2}{q}$ **echt gebrochen rational**, d.h.: Grad $p_2 <$ Grad $q$.

(2) Seien $b, c \in \mathbb{R}$. Dann heißt das Polynom $x^2 + bx + c$ **unzerlegbar** über $\mathbb{R} :\iff 4c - b^2 > 0$ $\quad(\iff x^2 + bx + c \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R})$

(3) Ein **Partialbruch** ist eine rationale Funktion der Form

$$\frac{A}{(x-x_0)^k}$$

wobei $A, x_0 \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$, oder

$$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$$

wobei $A, B, b, c \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ und $x^2 + bx + c$ unzerlegbar über $\mathbb{R}$.

**Satz 23.17 (Integration von rationalen Funktionen)**
Es seien $b, c, x_0 \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},\ m > 1,\ p(x) := x^2 + bx + c$ und $D := 4c - b^2 > 0$

(1) $$\int \frac{1}{x-x_0}\mathrm{d}x = \log|x-x_0|$$

(2) $$\int \frac{1}{(x-x_0)^m}\mathrm{d}x = \frac{-1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^{m-1}}$$

(3) $$\int \frac{1}{p(x)}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{D}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{D}}\right)$$

(4) $$\int \frac{1}{p(x)^m}\mathrm{d}x = \frac{1}{(m-1)D}\cdot\frac{2x+b}{p(x)^{m-1}} + \frac{4m-6}{(m-1)D}\int\frac{1}{p(x)^{m-1}}\mathrm{d}x$$

(5) $$\int \frac{x}{p(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(p(x)) - \frac{b}{2}\int\frac{1}{p(x)}\mathrm{d}x$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{p(x)^m}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{p(x)^{m-1}} - \frac{b}{2}\int \frac{1}{p(x)^m}\mathrm{d}x$

**Beweis**

(1) klar

(2) klar

(3) $p(x) = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + c - \frac{b^2}{4} = (x + \frac{b}{2})^2 + \frac{D}{4} = \frac{D}{4}(\frac{4}{D}(x + \frac{b}{2})^2 + 1) = \frac{D}{4}((\frac{2x+b}{\sqrt{D}})^2 + 1) = \frac{D}{4}(t^2 + 1)$, wobei $t = \frac{2x+b}{\sqrt{D}}$, also $x = \frac{\sqrt{D}t-b}{2}$

$\implies \int \frac{1}{p(x)}\mathrm{d}x =$ (Substitution $t = \frac{2x+b}{\sqrt{D}},\ dx = \frac{\sqrt{D}}{2}\mathrm{d}t$) $\frac{4}{D}\int \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{\sqrt{D}}{2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{D}}\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{D}}\arctan t = \frac{2}{\sqrt{D}}\arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{D}})$

(4) Übung, partielle Integration

(5) $\int \frac{x}{p(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+b-b}{p(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{p'(x)}{p(x)}}_{\log(p(x))}\mathrm{d}x - \frac{b}{2}\int \frac{1}{p(x)}\mathrm{d}x$

(6) Übung, partielle Integration ■

**Definition**

(1) Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z},\ I_j = [x_{j-1}, x_j]\ (j = 1, \dots, n)$

$|Z| := \max\{|I_j| : j = 1, \dots, n\}$ heißt das **Feinheitsmaß** von $Z$.

(2) $\mathfrak{Z}^* := \{(Z, \xi) : Z \in \mathfrak{Z},\ \xi$ ist passend zu $Z\}$. Eine Folge $((Z_n, \xi^{(n)}))$ in $\mathfrak{Z}^*$ heißt eine **Nullfolge** $:\iff |Z_n| \to 0\ (n \to \infty)$

**Satz 23.18 (Folgen von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$)**
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt; sei $\gamma \geq 0$ mit: $|f(x)| \leq \gamma\ \forall x \in [a, b]$.

(1) Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ und $Z_1 \subseteq Z_2$ und enthält $Z_2$ genau $p$ Teilpunkte mehr als $Z_1$, dann gilt:

$$s_f(Z_2) \leq s_f(Z_1) + 2p\gamma|Z_1| \text{ und}$$
$$S_f(Z_2) \geq S_f(Z_1) - 2p\gamma|Z_1|.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall Z \in \mathfrak{Z}$ mit $|Z| < \delta$:

$$s_f(Z) > \int_a^b f\mathrm{d}x - \varepsilon,\ S_f(Z) < \int_a^b f\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

(3) Ist $(Z_n)$ eine Folge in $\mathfrak{Z}$ mit $|Z_n| \to 0$, dann gilt:

$$s_f(Z_n) \to \int_a^b f\mathrm{d}x,\ S_f(Z_n) \to \int_a^b f\mathrm{d}x.$$

**Beweis**

(1) Übung, es genügt den Fall $p = 1$ zu betrachten.

(2) Beweis nur für Untersummen. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists Z_1 \in \mathfrak{Z} : s_f(Z_1) > \int_a^b f\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}$; $Z_1$ habe $p$ Teilpunkte. $\delta := \frac{\varepsilon}{4\gamma p}$.

Sei $Z \in \mathfrak{Z}$ und $|Z| < \delta$. $Z_2 := Z \cup Z_1 \in \mathfrak{Z}$; $Z_2$ hat höchstens $p$ Teilpunkte mehr als $Z \implies s_f(Z) = \underbrace{s_f(Z) - s_f(Z_2)}_{\underset{(1)}{>} -2p\gamma|Z|} + \underbrace{s_f(Z_2)}_{\geq s_f(Z_1)} > -2p\gamma|Z| + s_f(Z_1) > -\underbrace{2\gamma p\delta}_{=\frac{\varepsilon}{2}} + \int_a^b f\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} =$

$\int_a^b f\mathrm{d}x - \varepsilon$.

(3) Nur für Untersummen. $A := \int_a^b f\mathrm{d}x,\ s_n := s_f(Z_n)$. Sei $\varepsilon > 0$. Aus (2) folgt dann: $\exists \delta > 0 : s_f(Z) > A - \varepsilon\ \forall Z \in \mathfrak{Z}$ mit $|Z| < \delta$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |Z_n| < \delta\ \forall n \geq n_0$. Also: $s_n \to A \quad (n \to \infty)$.

**Beispiel**

$$a_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{j}}{n^{3/2}}. \text{ Behauptung} : a_n \to \frac{2}{3}$$

**Beweis**

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sqrt{\frac{j}{n}}}_{=f(\frac{j}{n})} \frac{1}{n},\ f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,1].$$

$Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\} \implies a_n = S_f(Z_n) \underset{23.18(3)}{\overset{n\to\infty}{\to}} \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ ■

---

**Satz 23.19 (Riemannsche Definition des Integrals mit Nullfolgen)**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. $f \in R[a,b] \iff \exists S \in \mathbb{R} : \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \to S\ (n \to \infty)$ für jede Nullfolge $((Z_n, \xi^{(n)})) in \mathfrak{Z}^*$. In diesem Fall gilt: $S = \int_a^b f\mathrm{d}x$.

---

**Beweis**

**„⇒“:** $S := \int_a^b f\mathrm{d}x$. Sei $((Z_n, \xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$ eine Nullfolge. Dann:

$$\underbrace{s_f(Z_n)}_{\overset{23.18}{\to} S} \leq \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \leq \underbrace{S_f(Z_n)}_{\overset{23.18}{\to} S}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\implies \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \to S\ (n \to \infty).$$

**„⇐“:** Sei $\varepsilon > 0$ und $(Z_n)$ eine Folge in $\mathfrak{Z}$ mit $|Z_n| \to 0$. Wie im Beweis von 23.12: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \xi^{(n)}, \eta^{(n)}$ passend zu $Z_n$ mit:

$$S_f(Z_n) - \varepsilon < \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)});\ \sigma(Z_n, \eta^{(n)}) < s_f(Z_n) + \varepsilon$$

Aus 23.18(3) folgt für $n \to \infty$ : $\int_a^b f\mathrm{d}x - \varepsilon \leq S \leq \int_a^b f\mathrm{d}x + \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0 \overset{\varepsilon \to 0+}{\implies} \int_a^b f\mathrm{d}x \leq S \leq \int_a^b f\mathrm{d}x \implies f \in R[a,b]$ und $\int_a^b f\mathrm{d}x = S$. ■

**Beispiel**
*Bemerkung: Dies ist ein Beispiel zum nächsten Satz, nicht zum vorherigen.*

$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in [0,\pi])$; $|f_n(x)| = \frac{1}{n}|\sin(nx)| \le \frac{1}{n}$ $\forall x \in [0,\pi]$.

$\implies$ $(f_n)$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,\pi]$ gegen $f \equiv 0$.

$f_n'(x) = \cos(nx),\ f_n'(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Das heißt: $(f_n')$ konvergiert auf $[0,\pi]$ *nicht* punktweise.

---

**Satz 23.20 (Gleichmäßige Konvergenz der Stammfunktion)**
$(f_n)$ sei eine Folge in $C^1[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ und es gelte:

(i) $(f_n(x_0))$ konvergiert

(ii) $(f_n')$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann konvergiert $(f_n)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ und für $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in [a,b])$ gilt: $f \in C^1[a,b]$ und $f' = g$ auf $[a,b]$.

Also: $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

---

**Beweis**
O.B.d.A.: $x_0 = a$ und $f_n(a) \to 0$ $(n \to \infty)$. $f(x) := \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ $(x \in [a,b])$. Aus 19.2 folgt: $g \in C[a,b]$.

Damit wegen 23.13: $f \in C^1[a,b]$ und $f' = g$ auf $[a,b]$.

Sei $x \in [a,b] : f_n(x) - \underbrace{f_n(a)}_{\to 0} \overset{23.5}{=} \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t \overset{23.6}{\to} \int_a^x g(t)\mathrm{d}t = f(x)$.

$\implies$ $(f_n)$ konvergiert punktweise gegen $f$.

Für $x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f_n(a) - f(x) + f_n(a)| = |\int_a^x (f_n'(t) - g(t))\mathrm{d}t + f_n(a)| \le \int_a^x |f_n' - g|\mathrm{d}t + |f_n(a)| \le \int_a^b |f_n' - g|\mathrm{d}t + |f_n(a)| =: c_n$

Wegen Voraussetzung (ii) konvergiert $(|f_n' - g|)$ auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen 0. Wegen 23.6 folgt damit: $\int_a^b |f_n' - g|\mathrm{d}t \to 0$ $(n \to \infty)$ $\implies$ $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$ $\implies$ $(f_n)$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $f$. ∎

Wir können nun den Satz 21.9 beweisen.

**Beweis**
Sei $a < b$ und $[a,b] \subseteq I$. $f_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k,\ f_n'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1},\ g(x) := \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}$

Aus 19.1 folgt: $(f_n)$ und $(f_n')$ konvergieren auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f$ bzw. $g$. Wegen unserem neuen Satz 23.20 nun ist $f$ auf $[a,b]$ differenzierbar und $f' = g$ auf $[a,b]$. $[a,b] \subseteq I$ beliebig $\implies$ Beh. ∎