

# 15. meromorphe Funktionen, Moebiustransformationen

## Definition

Es sei  $\infty$  irgendein Element  $\notin \mathbb{C}$ .  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  heißt die **Vollebene**.  $\infty$  heißt “**der Punkt**  $\infty$ “. Wir definieren:

$$\begin{aligned} z + \infty &:= \infty + z := \infty - z := z - \infty := \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}; \\ \infty z &:= z \infty := \infty \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad \frac{z}{\infty} := 0 \quad (z \in \mathbb{C}), \quad \frac{\infty}{0} := \infty \quad (z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$  heißt **Riemannsche Zahlenkugel**.  $N := (0, 0, 1)$  wird als **Nordpol** bezeichnet.

## Definition

$\sigma : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  durch

$$\begin{aligned} \sigma(N) &:= \infty \\ \sigma(x_1, x_2, x_3) &:= \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} \quad \text{für } (x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\} \end{aligned}$$

$\sigma$  heißt **stereographische Projektion**. Anschaulich (nachrechnen!): Ist  $P \in S \setminus \{N\}$ , so trifft die Gerade durch  $N$  und  $P$  die komplexe Ebene im Punkt  $\sigma(P)$ .

### Satz 15.1

$\sigma$  ist injektiv auf  $S$  und  $\sigma(S) = \hat{\mathbb{C}}$ .  $\sigma^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S$  ist gegeben durch  $\sigma^{-1}(\infty) = N$ ,  $\sigma^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|^2)$ , falls  $z \in \mathbb{C}$ .

### Satz 15.2 (Der chordale Abstand)

Seien  $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ .  $d(z, w) := \|\sigma^{-1}(z) - \sigma^{-1}(w)\|$  heißt der **chordale Abstand** von  $z$  und  $w$  (wobei  $\|\cdot\|$  = eukl. Norm im  $\mathbb{R}^3$ ).

Für  $z, w, u \in \hat{\mathbb{C}} : d(z, w) \geq 0; d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w; d(z, w) = d(w, z); d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$  ( $\Delta$ -Ungl.)

$(\hat{\mathbb{C}}, d)$  ist also ein metrischer Raum.

Für  $z, w \in \mathbb{C} : d(z, \infty) = (1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}; d(z, w) = |z - w|(1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{-\frac{1}{2}}$

## Beweis

Übung! ■

## Definition

Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $\hat{\mathbb{C}}$  und  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ .  $(z_n)$  **konvergiert in  $\hat{\mathbb{C}}$**  gegen  $z_0 : \Leftrightarrow d(z_n, z_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

Aus 15.2 folgt:

**Satz 15.3**

Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$

$$(1) \quad d(z_n, z_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z_n - z_0| \rightarrow 0$$

$$(2) \quad d(z_n, \infty) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z_n| \rightarrow \infty$$

Ersetzt man  $|z - w|$  ( $z, w \in \mathbb{C}$ ) durch  $d(z, w)$  ( $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ ), so lassen sich die topologischen Begriffe der §en 2,3 auch in  $\hat{\mathbb{C}}$  definieren.

**Beispiele:**

(1) Sei  $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ . Eine Funktion  $f : A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  heißt stetig in  $z_0 \in A : \Leftrightarrow$  für jede Folge  $(z_n)$  in  $A$  mit  $d(z_n, z_0) \rightarrow 0$  gilt:  $d(f(z_n), f(z_0)) \rightarrow 0$ .

(2)  $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  heißt offen :  $\Leftrightarrow \forall a \in A \exists \delta = \delta(a) > 0 : \{z \in \hat{\mathbb{C}} : d(z, a) < \delta\} \subseteq A$ .

**Konvention**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.  $z_0 \in D$ .  $f \in H(D \setminus \{z_0\})$  und  $z_0$  sei ein Pol von  $f$ . Wegen 13.5 und 15.3 setzt man  $f(z_0) := \infty$ . Dann ist  $f$  auf ganz  $D$  definiert, also  $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  und in jedem  $z \in D$  stetig.

**Definition**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  und  $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  und  $P(f) := \{z \in D : f(z) = \infty\}$ .  $f$  heißt auf  $D$  **meromorph** :  $\Leftrightarrow$

(i)  $P(f)$  ist in  $D$  diskret

(ii)  $f|_{D \setminus P(f)} \in H(D \setminus P(f))$

(iii) jedes  $z_0 \in P(f)$  ist ein Pol von  $f$ .

$$M(D) := \{f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : f \text{ ist auf } D \text{ meromorph} \}$$

**Beispiele:**

(1)  $P(f) = \emptyset$  zugelassen. Dann:  $H(D) \subseteq M(D)$ .

(2) Seien  $f, g \in H(D)$ ,  $g \neq 0$  auf  $D$ . Dann  $\frac{f}{g} \in M(D)$ .  $P(\frac{f}{g}) \subseteq Z(g)$ .

(3)  $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ ,  $P(f) = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ . 0 ist kein Pol von  $f$ , 0 ist HP der Pole  $\frac{1}{k\pi}$ . Also:  $f \notin M(\mathbb{C})$ , aber  $f \in M(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ .

**Moebius Transformationen:**

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  und es gelte  $ad - bc \neq 0$ . Eine Abbildung der Form  $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$  heißt eine

**Moebius transformation** (MB) ( $z \in \hat{\mathbb{C}}$ ). Also:  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Die Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \Phi_T$  heißt die zu  $T$  gehörende **Koeffizientenmatrix**.

**Bemerkungen:**

(1) Die Bedingung  $ad - bc \neq 0$  sichert, dass T nicht konstant ist.

(2) Sei  $c = 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ .  $T(\infty) = \infty, T|_{\mathbb{C}} \in H(\mathbb{C})$ .

(3)  $c \neq 0$ .  $T(\infty) = \frac{a}{c}; T(-\frac{d}{c}) = \infty$ .  $-\frac{d}{c}$  ist ein Pol der Ordnung 1 von  $T$ ;  $T \in M(\mathbb{C})$ .

$\mathcal{M}$  := Menge aller Moebustransformationen.

#### Satz 15.4

Seien  $T, S \in \mathcal{M}$ .

(1)  $T(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$ ;  $T$  ist stetig und injektiv auf  $\hat{\mathbb{C}}$ ;  $T^{-1} \in \mathcal{M}$ ;  $T^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$

(2)  $T \circ S \in \mathcal{M}$ .  $\Phi_{T \circ S} = \Phi_T \cdot \Phi_S$

$\mathcal{M}$  ist also eine Gruppe.

#### Beweis

Übung! ■

#### spezielle Moebustransformationen:

$T(z) := az$  (Drehstreckung)

$T(z) := z + a$  (Translation)

$T(z) := \frac{1}{z}$  (Inversion)

#### Satz 15.5

$T \in \mathcal{M}$  lässt sich darstellen als Hintereinanderausführung von Drehstreckung, Translation und Inversion.

#### Beweis

Sei  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

Fall 1:  $c = 0$ . Dann  $d \neq 0$  und  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Setze  $T_1 = \frac{a}{d}z$  und  $T_2 = z + \frac{b}{d} \Rightarrow T = T_2 \circ T_1$ .

Fall 2:  $c \neq 0$ .  $T(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} = \alpha + \frac{\beta}{z + \gamma}$ .  $T_1(z) := z + \gamma$ ;  $T_2(z) := \frac{1}{z}$ ;  $T_3(z) := \beta z$ ;  $T_4(z) := z + \alpha \Rightarrow T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ . ■

#### Satz 15.6

Sei  $T \in \mathcal{M}$ . Dann hat  $T$  einen oder zwei Fixpunkte oder es ist  $T(z) = z$ .

#### Beweis

Sei  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

Fall 1:  $T(\infty) = \infty$ . Dann ist  $c = 0, d \neq 0$ .  $\Rightarrow T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha z + \beta$ . Sei  $z_1$  ein Fixpunkt von  $T, z_1 \neq \infty$ . Also  $z_1 = \alpha z_1 + \beta \Leftrightarrow (1 - \alpha)z_1 = \beta$ .

Fall 1.1:  $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow T(z) = z$ .

Fall 1.2:  $\alpha \neq 1 \Rightarrow z_1 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ .

Fall 2:  $T(\infty) \neq \infty$ . Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ .  $T(z_0) = z_0 \Leftrightarrow az_0 + b = z_0(cz_0 + d)$  quadratische Gleichung  $\Rightarrow$  ein oder zwei Lösungen. ■

### Definition

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  paarweise verschieden. Für  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  heißt

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & , \text{ falls } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \\ \frac{z-z_3}{z-z_1} & , \text{ falls } z_1 = \infty \\ \frac{z-z_2}{z-z_3} & , \text{ falls } z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_2} & , \text{ falls } z_3 = \infty \end{cases}$$

das **Doppelverhältnis** von  $z, z_1, z_2, z_3$ .

### Satz 15.7

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  wie oben.

- (1) Sind  $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$  und gilt  $T_1(z_j) = T_2(z_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ )  $\Rightarrow T_1 = T_2$ .
- (2) Es ist  $T(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$  ( $z \in \hat{\mathbb{C}}$ ) eine Moebiustransformation.  $T$  ist die einzige Moebiustransformation mit  $T(z_1) = 0$ ;  $T(z_2) = 1$ ;  $T(z_3) = \infty$ .
- (3) Sind  $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  paarweise verschieden, so existiert genau ein  $S \in \mathcal{M} : S(z_j) = w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )
- (4)  $DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)) \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \quad \forall S \in \mathcal{M}$  (Invarianz des Doppelverhältnisses)

### Beweis

- (1)  $T := T_2^{-1} \circ T_1$ . 15.4  $\Rightarrow T \in \mathcal{M}$ .  $T(z_j) = T_2^{-1}(T_1(z_j)) = T_2^{-1}(T_2(z_j)) = z_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).  
15.6  $\Rightarrow T(z) = z \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow T_1 = T_2$ .
- (2) Klar:  $T \in \mathcal{M}$ . Nachrechnen:  $T(z_1) = 0$ ;  $T(z_2) = 1$ ;  $T(z_3) = \infty$ . Eindeutigkeit folgt aus (1).
- (3) Eindeutigkeit: (1). Existenz:  $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$ ;  $T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$ .  $S := T_2^{-1} \circ T_1$ .  $S(z_1) = T_2^{-1}(T_1(z_1)) \stackrel{(2)}{=} T_2^{-1}(0) \stackrel{(1)}{=} w_1$ . Analog:  $S(z_2) = w_2$ ;  $S(z_3) = w_3$ .
- (4) Übung. ■

### Kreisgleichung:

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ .  $|z - z_0| = r \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \Leftrightarrow |z|^2 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \beta = 0$ , wobei  $\alpha = -z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\beta = |z_0|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$  und  $|\alpha|^2 - \beta = |z_0|^2 - |z_0|^2 + r^2 > 0$ , also  $\beta < |\alpha|^2$ .

### Geradengleichung:

$mx+ny+d=0$  ( $m, n, d, x, y \in \mathbb{R}$ ).  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ;  $\alpha = \frac{m}{2} + i\frac{n}{2} \in \mathbb{C}$ ,  $\beta := d \in \mathbb{R}$ .  $mx+ny+d=0 \Leftrightarrow \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$ .

**Fazit:**

Sind  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , so ist  $\varepsilon|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$

- Die Gleichung eines Kreises, falls  $\varepsilon = 1$  und  $\beta < |\alpha|^2$
- Die Gleichung einer Geraden, falls  $\varepsilon = 0$ .

**Satz 15.8**

Sei  $T \in \mathcal{M}$ .  $T$  bildet eine Gerade (einen Kreis) auf eine Gerade oder einen Kreis ab.

**Beweis**

Die Behauptung ist klar für Drehstreckungen und Translationen. Wegen 15.5 genügt es die Behauptung für Inversionen ( $T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ ) zu zeigen. Sei  $\varepsilon|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$  die Gleichung einer Geraden oder eines Kreises und  $w = \frac{1}{\bar{z}}$ . Dann:  $\varepsilon \frac{1}{|w|^2} + \bar{\alpha} \frac{1}{w} + \alpha \frac{1}{\bar{w}} + \beta = 0 \Rightarrow \varepsilon + \bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} + \beta|w|^2 = 0$ .

Fall 1:  $\beta = 0 \rightarrow$  Gerade.

Fall 2:  $\beta \neq 0$ . Dann:  $\frac{\varepsilon}{\beta} + \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\bar{w} + \frac{\alpha}{\beta}w + |w|^2 = 0 \rightarrow$  Kreis. ■

**Beispiel**

Bestimme ein  $T \in \mathcal{M}$  mit:  $T(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = i$ ;  $z_3 = -1$ .  $T(z) := DV(z, 1, i, -1) = -i\frac{z-1}{z+1}$ . 15.7  $\Rightarrow T(1) = 0$ ;  $T(i) = 1$ ;  $T(-1) = \infty$ . 15.8  $\Rightarrow T(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

