

$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$  glatt  
 $\psi \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$  glatt  
 $\varphi \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$  glatt  
 $\varphi_i^\pm \circ \varphi$  glatt  
 $\varphi_i^\pm \circ \psi$  glatt

b) asdf

## Lösung 2

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$

*Behauptung:*  $\varphi$  induziert eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $\mathbb{R}$ , die von der Standardstruktur abweicht.

Dazu müssen wir zeigen:

- (i)  $\{(\varphi, \mathbb{R})\}$  ist ein  $C^\infty$ -Atlas
- (ii)  $\varphi$  ist nicht verträglich mit  $(\text{id}, \mathbb{R})$

*Beweis:*

- (i)  $\varphi$  ist Homöomorphismus, da  $\varphi$  und  $\varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$  stetig sind. Offensichtlich überdeckt  $\varphi$  ganz  $\mathbb{R}$ . Der einzige Kartenwechsel  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$  ist glatt.

- (ii) Betrachte

$$\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

$\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}$  ist in 0 nicht differenzierbar  $\Rightarrow$  (ii) ✓

*Behauptung:* Die beiden  $C^\infty$  Strukturen sind diffeomorph

*Beweis:* Sei

$$f : \begin{array}{ccc} \text{von id induziert} & & \text{von } \varphi \text{ induziert} \\ (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) & \rightarrow & (\mathbb{R}, \tau) \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$$

Dann ist  $f$  bijektiv. Es gilt für  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi \circ f \circ (\text{id}_{\mathbb{R}})^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

ist glatt. Betrachte nun  $f^{-1} : \text{id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$  ist glatt. Damit ist  $f$  ein Diffeomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \tau) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi \circ f \circ (\text{id}_{\mathbb{R}})^{-1}} & \mathbb{R} \end{array}$$

## Lösung 3

$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $M_1, M_2$   $C^k$ -Mannigfaltigkeiten,  $N_i \subseteq M_i$  Untermannigfaltigkeit,  $f \in C^j(M_1, M_2)$  wobei  $j \leq k$ ,  $f(N_1) \subseteq N_2$ .

*Behauptung:*  $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$

*Beweis:* Sei  $p \in N_1$ , sei  $(\varphi_1, U_1)$  eine an  $N_1$  adaptierte Karte von  $M_1$  um  $p$ , das heißt  $p \in U_1$ .

$$\varphi_1(U_1 \cap N_1) = \varphi_1(U_1) \cap (\mathbb{R}^{\dim N_1} \times \{0\}^{n-\dim N})$$

Sei  $(\varphi_2, U_2)$  eine an  $N_2$  adoptierte Karte von  $M_2$  um  $f(p)$ . Dann erhalten wir Karten von  $N_i$ , indem wir die Projektion  $\pi_i : \mathbb{R}^{\dim M_i} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim N_i}, x \mapsto (x^1, \dots, x^{\dim N_i})$  hinter die Karten  $\varphi_i$  schalten (das heißt betrachte  $\pi_i \circ \varphi_i$ ).

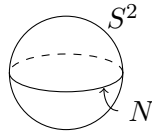
Es ist

$$(\pi_2 \circ \varphi_2) \circ f|_{N_1} \circ (\pi_1 \circ \varphi_1)^{-1} = \underbrace{\pi_2}_{C^\infty} \circ \underbrace{(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})}_{C^j} \circ C_1$$

mit  $C_1 : \mathbb{R}^{\dim N_1} \ni x \mapsto (x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{\dim M_1}$ . Also  $(\pi_2 \circ \varphi_2) \circ f \circ (\pi_1 \circ \varphi_1)^{-1} \in C^j$  und damit  $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$

### Lösung 4

a)  $M = S^n$ ,  $N = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \in S^n \mid x^2 = \dots = x^n = 0\}$ ; Skizze für  $n = 2$ :



*Behauptung:*  $N$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

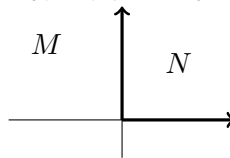
*Beweis:* Sei  $\varphi : \overbrace{S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}}^{=:U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x^0}(x^1, \dots, x^n)$

*Zu zeigen:*  $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}^{n-1})$

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(N \setminus \{(1, \dots, 0)\}) = \mathbb{R} \times \{0\}^{n-1}$$

Für  $p \in N \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$  ist  $\varphi$  also eine adoptierte Karte um  $p$ . Für  $p = (1, 0, \dots, 0)$  ist analog  $\psi$  (aus 1 a)) eine adoptierte Karte.

b)  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0, y) \mid y \geq 0\}$ ; Skizze:



*Behauptung:*  $N$  ist keine glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis:* Angenommen  $N$  wäre Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . Da  $N$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist, wäre es eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Damit existiert eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $\mathbb{R}^2$  um  $(0, 0)$  mit  $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ . Betrachte  $\varphi^{-1}$ , beziehungsweise  $f(t) = \varphi^{-1}(t, 0)$ . Es sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $f(t_0) = (0, 0)$ . Da  $f(t) = N \cap U$  ist entweder  $f(t) \in \{(0, y) \mid y \geq 0\}$  für  $t > t_0$  und  $f(t) \in \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$  für  $t < t_0$  oder umgekehrt. Dann ist  $f'(t) \in \mathbb{R}e_2$  für  $t > t_0$  und  $f'(t) \in \mathbb{R}e_1$  für  $t < t_0$  oder umgekehrt.

$$\Rightarrow f'(0) \in \mathbb{R}e_1 \cap \mathbb{R}e_2 = \{(0, 0)\}$$

$$\text{Andererseits: } f'(0) = \underbrace{(D\varphi^{-1}|_{\varphi(0,0)})}_{\text{Isom., da } \varphi^{-1} \text{ Diffeom.}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Übung 2 vom 5. November 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $\psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \text{Bild}(\psi) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(r, \vartheta) \mapsto r(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ . Dann ist die Inverse  $\varphi = \psi^{-1}$  eine Karte von  $\mathbb{R}^2$  mit Kartengebiet  $\text{Bild}(\psi)$  und Komponenten  $r = \varphi^1$ ,  $\vartheta = \varphi^2$ .

Berechnen Sie  $\frac{\partial}{\partial r}$  und  $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$  in kartesischen Koordinaten, d.h. bzgl der kanonischen Karte  $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ , und skizzieren Sie diese.

### Aufgabe 2

a) Es seien  $M_1$  und  $M_2$  glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen sie, dass die Projektionen

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i \quad (p_1, p_2) \mapsto p_i$$

Submersionen sind.

b) Es sei

$$f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\sin(t), \sin(2t)).$$

Zeigen Sie, dass  $f$  eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist und skizzieren Sie  $\text{Bild}(f)$ .

### Aufgabe 3

Es sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + az^2$ . Skizzieren Sie für  $a = 0$ ,  $a = 1$  und  $a = -1$  die Niveaumengen

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}$$

mit  $c \in \mathbb{R}$ . Welche Niveaumengen sind  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^3$ ?

### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gruppen  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  und  $\text{O}(n, \mathbb{R})$  glatte Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sind, indem Sie sie als reguläre Urbilder darstellen und bestimmen Sie ihre Dimensionen.

### Lösung 1

Es sei  $\psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$ ,  $(r, \vartheta) \mapsto r(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ , die Inverse  $\varphi = \psi^{-1}$  ist eine Karte von  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p &= \frac{\partial (\text{id}^1 \circ \varphi^{-1})}{\partial r} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial (\text{id}^2 \circ \varphi^{-1})}{\partial r} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \\ &= \frac{\partial (\text{id}^1 \circ \psi)}{\partial r} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial (\text{id}^2 \circ \psi)}{\partial r} (\varphi(p))^2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \\ &= \cos(\vartheta(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \sin(\vartheta(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \\ &= \frac{1}{r(p)} \left( r(p) \cos(\vartheta(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + r(p) \sin(\vartheta(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) \\ &= \frac{1}{r(p)} \left( \psi^1(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p + \psi^2(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Big|_p \right) \\ &= \frac{1}{\|p\|} \left( p^1 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + p^2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) \end{aligned}$$

Als Vektorfeld:

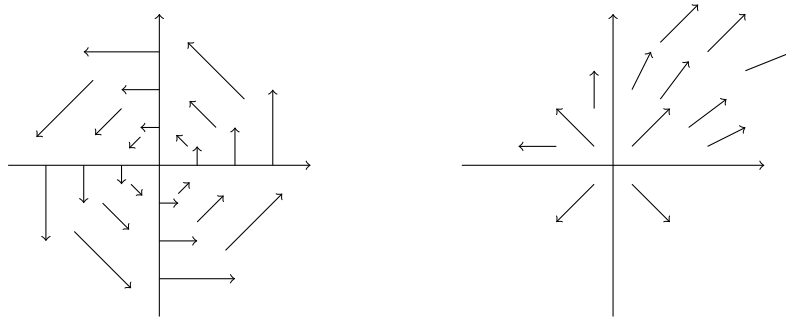
$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\|(x, y)\|} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Big|_p &= \frac{\partial (\text{id}^1 \circ \varphi^{-1})}{\partial \vartheta} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial (\text{id}^2 \circ \varphi^{-1})}{\partial \vartheta} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \\ &= \dots = -p^2 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + p^1 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$



## Lösung 2

a) Zeige dass  $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ ,  $(p_1, p_2) \mapsto p_i$  eine Submersion ist.

Sei  $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ . Seien  $\varphi_i$  Karten von  $M_i$  um  $p_i$  mit Kartengebieten  $U_i$ . Dann ist  $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)$  eine Karte von  $M_1 \times M_2$  um  $(p_1, p_2)$ . Es ist

$$\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = \varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1^{-1} \times \varphi_2^{-1}).$$

Für  $(x_1, x_2) \in \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)$  ist

$$\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}(x_1, x_2) = \varphi_i(\pi_i(\varphi_1^{-1}(x_1), \varphi_2^{-1}(x_2))) = \varphi_i(\varphi_i^{-1}(x_i)) = x_i.$$

Daraus folgt dass  $\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}$  glatt ist. Der Rest des Beweises kann auf zwei Arten erfolgen.

Variante 1: Es folgt dass  $D(\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Dies ist die Darstellungsmatrix von  $\pi_{1*}$  bezüglich den Basen  $\frac{\partial}{\partial \varphi_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_1^d}$  und  $\frac{\partial}{\partial (\varphi_1 \times \varphi_2)^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial (\varphi_1 \times \varphi_2)^{\dim M_1 + \dim M_2}}$ . Also ist  $\pi_{1*}$  surjektiv. Auch  $\pi_1$  ist surjektiv, also ist  $\pi_1$  eine Submersion. Der Beweis für  $\pi_2$  folgt analog.

Variante 2: Sei  $X = \sum_{j=0}^{\dim M_1} \xi^j \frac{\partial}{\partial \varphi_1^j} \Big|_{p_1} \in T_{p_1} M_1$ . Setze

$$\tilde{X} = \sum_{j=1}^{\dim M_1} \xi^j \frac{\partial}{\partial (\varphi_1 \times \varphi_2)^j} \Big|_p \in T_p(M_1 \times M_2).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_{1*} \tilde{X} &= \sum_{k=1}^{\dim M_1} \left( \sum_j \underbrace{\partial_j (\varphi^k \circ \pi_1 \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1})}_{=\delta(k,j)} (\varphi_1(p_1), \varphi_2(p_2)) \xi^j \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_1^k} \Big|_{p_1} \\ &= \sum_{k=1}^{\dim M_1} \xi^k \frac{\partial}{\partial \varphi_1^k} \Big|_{p_1} = X \end{aligned}$$

Daraus folgt dass  $\pi_{1*}$  surjektiv ist.

b) Zeige dass  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$  eine injektive Immersion aber keine Einbettung ist.

$f$  ist injektiv: Seien  $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$  mit  $f(t_1) = f(t_2)$ . Damit muss auch gelten dass  $\sin(t_1) = \sin(t_2)$  und  $\sin(2t_1) = \sin(2t_2)$ . Aus diesen beiden Bedingungen folgt dass für  $t_1, t_2$  gelten muss:

- $t_1 = t_2$  oder  $\frac{\pi}{2} - t_1 = t_2 - \frac{\pi}{2}$  oder  $\frac{3\pi}{2} - t_1 = t_2 - \frac{3\pi}{2}$
- $2t_1 = 2t_2$  oder  $\frac{\pi}{2} - 2t_1 = 2t_2 - \frac{\pi}{2}$  oder  $\frac{3\pi}{2} - 2t_1 = 2t_2 - \frac{3\pi}{2}$

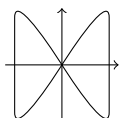
Aus den beiden Bedingungen folgt somit dass  $t_1 = t_2$  gilt.

$f$  ist eine Immersion: Es reicht zu zeigen, dass  $f_{*t} = 0$  für alle  $t$  gilt. Es gilt  $Df(t) = (\cos(t), 2\cos(2t))$ , also

$$Df(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \text{ und } \cos(2t) = 0 \\ \Leftrightarrow \left(t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2}\right) \wedge \left(2t = \frac{\pi}{2} \vee 2t = \frac{3\pi}{2} \vee 2t = \frac{5\pi}{2} \vee 2t = \frac{7\pi}{2}\right)$$

Das ist aber nicht möglich, also ist  $Df(t) \neq 0$ .  $Df(t)$  ist die Darstellungsmatrix, also ist auch  $f_{*t} \neq 0$ .

Skizze:



$f$  ist keine Einbettung: Es gilt dass  $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  nicht in  $(0, 2\pi)$  konvergiert, aber es ist  $f\left(\frac{1}{k}\right) \rightarrow (0, 0) = f(\pi) \in \text{Bild } f$ . Damit ist  $f$  kein Homöomorphismus auf das Bild.

### Lösung 3

Es gilt  $Df(x, y, z) = 2(x, y, az)$ , daraus folgt für  $a = \pm 1$  dass  $Df(x, y, z) \neq 0$  für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ist, und für  $a = 0$  ist  $Df(x, y, z) \neq 0$  für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus z\text{-Achse}$ . Damit ist für  $c > 0$  dann  $f^{-1}(c)$  in der Menge der regulären Punkte von  $f$  enthalten.

**Für  $c = 0$ :** Wir betrachten nun drei Fälle

$a = 1$ : Für  $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$  gilt  $f^{-1}(c) = \{0\} = \mathbb{R}^3 \cap \{0\}^{3-0}$ , also ist  $f^{-1}(0)$  eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

$a = 0$ : Definiere  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ . Damit ist  $\varphi$  ein Diffeomorphismus, also eine globale Karte von  $\mathbb{R}^3$  und es gilt:

$$\varphi(f^{-1}(0)) = \varphi(z\text{-Achse}) = \mathbb{R} \times \{0\}^2,$$

also ist  $f^{-1}(0)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

$a = -1$ :  $f^{-1}(0)$  ist keine Untermannigfaltigkeit. Angenommen es wäre eine, dann wäre  $f^{-1}(0)$  zweidimensional:

$$\varphi : f^{-1}(0) \cap \{(x, y, z) \mid z > 1\} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1(0)}}_{x^2+y^2=z^2>1} \quad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

ist ein Homöomorphismus. Da für  $(x, y, 0) \in f^{-1}(0)$  gilt  $x^2 + y^2 = 0$ , also  $x = y = 0$ , zerfällt  $f^{-1}(0) \setminus \{(0, 0, 0)\}$  in zwei Zusammenhangskomponenten, was einen Widerspruch zur Zweidimensionalität von  $f^{-1}(0)$  bildet.

⚡

**Für  $c < 0$ :** Wir betrachten nur noch zwei Fälle

$a = 1, 0$ : Definitionssache, aber ja: Die Aussage über  $\emptyset$  liefert dass es für alle  $p$  in der Untermannigfaltigkeit eine globale Karte gibt.

$a = -1$ : Es gilt

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\} = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2 + |c|\},$$

das heißt für  $(x, y, z) \in f^{-1}(c)$  gilt  $z \neq 0$ , also  $\{0\} \notin f^{-1}(c)$ . Daraus folgt dass alle Punkte aus  $f^{-1}(c)$  regulär sind.

### Lösung 4

Zeige dass die Gruppen  $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$  und  $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = I_n\}$  glatte Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sind.

Definiere  $f = \det$ , dann ist  $SL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(1)$ . Dann gilt

$$\frac{\partial(f)}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \det A[k, j] a_{jk} \right) = (-1)^{i+j} \det A[i, j]$$

$A[k, j]$  bezeichnet die Matrix  $A$  bei der die  $k$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte weggelassen wurden

Es ist  $Df(A) = 0 \Leftrightarrow \forall i, j \det A[i, j] = 0 \Rightarrow \det A = 0$ , damit ist 1 regulärer Wert.

Also ist  $\dim SL(n, \mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^{n \times n} - \dim \mathbb{R} = n^2 - 1$ .

Definiere nun  $g : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \mapsto AA^T$ . Dann ist  $O(n) = g^{-1}(I_n)$  und es gilt

$$\begin{aligned} Dg(A)(B) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(A + tB) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (AA^T + tAB^T + tBA + t^2BB^T) = AB^T + BA^T \end{aligned}$$

Seien nun  $A \in O(n, \mathbb{R})$  und  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ . Es bleibt zu zeigen dass ein  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert sodass  $Dg(A)(B) = C$ . Es gilt:

$$Dg(A) \left( \frac{1}{2} CA \right) = \frac{1}{2} \left( \underbrace{AA^T}_{=I} C^T + C \underbrace{AA^T}_{=I} \right) = C$$

Daraus folgt dass  $I$  ein regulärer Wert von  $g$  ist und  $O(n, \mathbb{R})$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  der Dimension  $n^2 - \dim \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

## Übung 3 vom 12. November 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- Die kanonische Projektion  $\pi : TM \rightarrow M$  ist ein Submersion.
- Der Nullschnitt  $\sigma : M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto 0 \in T_p M$  ist eine Einbettung.
- Ist  $N$  eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und  $\Phi : M \rightarrow N$  glatt, so ist  $\Phi_* : TM \rightarrow TN$  glatt.

### Aufgabe 2

Es sei  $M$  eine glatte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ .

- Zeigen Sie, dass die Lieklammer im Allgemeinen nicht  $C^\infty(M)$ -bilinear ist.
- Zeigen Sie, dass  $XY$  mit  $XY(p)(f) := X_p(Y(f))$  für  $p \in M$  und  $f \in C^\infty(M)$  im Allgemeinen kein Vektorfeld ist.

Es sei ferner  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  und  $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y|_U = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , sowie

$[X, Y]|_U = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  die lokalen Darstellungen von  $X$ ,  $Y$  und  $[X, Y]$  bezüglich  $\varphi$ .

- Zeigen Sie, dass gilt:

$$\zeta^j = \sum_{i=1}^n \left( \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right).$$

### Aufgabe 3

- Es seien auf  $\mathbb{R}^2$  die beiden Vektorfelder  $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  und  $Y = -2y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial y}$  gegeben. Skizzieren Sie die Vektorfelder und bestimmen Sie die Flüsse von  $X$  und  $Y$ .

- b) Auf dem Torus  $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{i\vartheta^1}, e^{i\vartheta^2}) \in \mathbb{C}^2 \mid \vartheta^1, \vartheta^2 \in \mathbb{R}\}$  betrachten wir für  $k \in \mathbb{N}$  das Vektorfeld  $X_k = \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \vartheta^2}$ . Bestimmen Sie die Integralkurve von  $X_k$  durch den Punkt  $(1, 1) \in T^2$ .

### Lösung 1

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei desweiteren für alle drei Teilaufgaben  $p \in M$ ,  $\varphi$  eine Karte um  $p$  mit Kartengebiet  $U$  und

$$\bar{\varphi} : \begin{cases} TM|_U & \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q & \mapsto (\varphi(q), \xi) \end{cases}$$

eine Karte von  $TM$ . Alle diese Karten bilden dann einen Atlas von  $TM$ .

- a) Zeige:  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $T_p M \ni x \mapsto p$  ist eine Submersion.

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi \circ \bar{\varphi}^{-1}(\underbrace{y, \xi}_{\in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n}) &= \varphi \left( \pi \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(y)} \right) \right) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(y)) = y \end{aligned}$$

also ist  $\pi$  glatt. Desweiteren ist

$$D(\varphi \circ \pi \circ \bar{\varphi}^{-1})|_{(y, \xi)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

surjektiv und damit auch  $\pi_{*} \bar{\varphi}^{-1}(y, \xi)$ . Offensichtlich ist  $\pi$  surjektiv und damit eine Submersion.

- b) Zeige:  $\sigma : M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto 0_{T_p M}$  ist eine Einbettung.

Es gilt

$$\bar{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}(y) = \bar{\varphi}(0_{T_{\varphi^{-1}(y)} M}) = (\varphi(\varphi^{-1}(y)), 0) = (y, 0)$$

Daraus folgt dass  $D(\bar{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1})|_y = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$  injektiv ist und damit auch

$\sigma_{*} \varphi^{-1}(y)$ .  $\sigma$  ist injektiv und stetig,  $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$ , also ist  $\sigma^{-1} = \pi|_{\text{Bild}(\sigma)}$  stetig.

- c) Zeige: Ist  $\Phi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung, so auch  $\Phi_* : TM \rightarrow TN$ .

Sei  $\psi$  eine Karte um  $\Phi(p)$  und  $\bar{\psi}$  die zugehörige Karte von  $TN$ .

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \circ \Phi_* \circ \bar{\varphi}^{-1})(\underbrace{y, \xi}_{\in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n}) &= (\bar{\psi} \circ \Phi_*) \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(y)} \right) \\ &= \bar{\psi} \left( \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(y)} \xi^j \right) \frac{\partial}{\partial \psi^i} \Big|_{\Phi(\varphi^{-1}(y))} \right) \\ &= \left( \underbrace{(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(y)}_{\text{glatt}}, \underbrace{\left( \sum_j \underbrace{\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(y)}}_{\text{glatt in } y} \overbrace{\xi^j}^{\text{glatt in } \xi} \right)}_{\text{glatt}} \right)_{i=1, \dots, n} \end{aligned}$$

Daraus folgt dass  $\Phi_*$  glatt ist.

## Lösung 2

a) Zu zeigen:  $[\cdot, \cdot]$  ist im Allgemeinen nicht  $C^\infty(M)$ -bilinear.

$M = \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = X = Y$ ,  $f = \text{id}$ , „ $x$ “

$$\begin{aligned} [X, \underbrace{fY}_{=x \frac{\partial}{\partial x}}] &\stackrel{c)}{=} \left( 1 \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} - x \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0} \right) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \\ f[X, Y] &\stackrel{c)}{=} f \left( 1 \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0} - 1 \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0} \right) \frac{\partial}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

b) Zu zeigen: für  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  ist  $XY$  mit  $(XY)|_p(f) = X_p(Y(f))$  im Allgemeinen keine Derivation.

$$\begin{aligned} (XY)_p(fg) &= X_p(Y(fg)) \\ &= X_p(q \mapsto Y_q(fg)) \\ &= X_p(q \mapsto f(q)Y_q(g) + g(q)Y_q(f)) \\ &= X_p(fY(g) + gY(f)) \\ &= X_p(fY(g)) + X_p(gY(f)) \\ &= f(p) \cdot X_p(Y(g)) + Y_p(g) \cdot X_p(f) + g(p) \cdot X_p(Y(f)) + Y_p(f)X_p(g) \\ &= f(p) \cdot (XY)|_p(g) + g(p)(XY)|_p(f) + \underbrace{Y_p(g)X_p(f) + Y_p(f)X_p(g)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

$M = \mathbb{R}$ ,  $X = Y = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $f = g = \text{id} \Rightarrow$  Leibnitz-Regel gilt nicht.

c) *Bemerkung:* Ist  $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  lokale Darstellung bezüglich  $\varphi$  von  $X \in \mathcal{V}(M)$ , so ist

$$\xi^i = X(\varphi^i)$$

Seien  $X|_U = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y|_U = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Damit gilt dann

$$\begin{aligned} [X, Y](x^j) &= (XY - YX)(x^j) \\ &= X(Y(x^j)) - Y(X(x^j)) \\ &= X \left( \sum_i \eta^i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)}_{\delta_{ij}} \right) - Y \left( \sum_i \xi^i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)}_{\delta_{ij}} \right) \\ &= X(\eta^j) - Y(\xi^j) \\ &= \sum_i \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\eta^j) - \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\xi^j) \right) \end{aligned}$$

## Lösung 3

a) Es seien  $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $Y = -2y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$ , bestimme  $\gamma_x^t$  und  $\gamma_y^t$ .

Für  $X: t \mapsto \gamma_*^t(p)$  ist Integralkurve von  $X$  mit  $\gamma_x^0(p) = p$ . *Gesucht:* Kurve mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t} = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow \gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t}(x) = X(\gamma(t))(x)$  und  $\gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t}(y) = X(\gamma(t))(y) \Leftrightarrow \gamma_1'(t) = -\gamma_2(t)$  und  $\gamma_2'(t) = \gamma_1(t)$ . Das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \text{ und } \gamma(0) = p$$



hat als Lösung  $t \mapsto \exp(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \cdot p$ . Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \exp \left( t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (\dots)^k \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} t^{2k} & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} t^{2k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot p = \gamma_x^t(p)$

Für  $Y: \gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t} = Y(\gamma(t))$ ,  $\gamma(0) = p \xrightarrow{\text{analog}} \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \gamma(t)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt  $\underbrace{\gamma(t)}_{=\gamma_x^t(p)} = \exp(t \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}) \cdot p = \begin{pmatrix} \cos(t) & -2\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot p$

b) asdf

## Übung 4 vom 19. November 2012

### Aufgabe 1

Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $X$  und  $Y$  vollständig sind. Zeigen Sie dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i)  $[X, Y] = 0$ .

(ii) Die Flüsse von  $X$  und  $Y$  kommutieren, d.h.  $\gamma_X^t \circ \gamma_Y^s = \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Anmerkung:** Die Aussage gilt auch für nicht vollständige Vektorfelder für geeignete Zeiten  $s$  und  $t$ .

### Aufgabe 2

Es sei  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine offene Überdeckung von  $M$  und für alle  $\alpha, \beta \in I$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  seien eine glatte Funktion  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$  gegeben. Es gelte  $g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p)$  für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in I$  und  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

Weiter sei

$$E := \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim,$$

wobei für  $p \in U_\alpha$ ,  $q \in U_\beta$  und  $v, w \in \mathbb{R}^k$  gelte:

$$(p, v) \sim (q, w) \Leftrightarrow p = q \text{ und } v = g_{\alpha\beta}(q)w$$

Zeigen Sie, dass  $\pi : E \rightarrow M, [p, v] \mapsto p$  ein Vektorbündel über  $M$  vom Rang  $k$  ist.

### Aufgabe 3

Es seien  $E, E'$  Vektorbündel über  $M$  und  $F : E \rightarrow E'$  ein Bündelmorphismus, der faserweise ein Isomorphismus ist, d.h für alle  $p \in M$  ist  $F_p : E_p \rightarrow E'_p$  ein Isomorphismus.

Zeigen Sie, dass  $F$  ein Bündelisomorphismus ist, es also einen zu  $F$  inversen Bündelmorphismus gibt.

### Aufgabe 4

a) In einem Vektorbündel  $E$  vom Rang  $k$  über  $M$  gebe es  $k$  punktweise linear unabhängige Schnitte. Zeigen Sie, dass  $E$  trivial ist.

b) Zeigen Sie, dass  $TS^3$  trivial ist.

**Hinweis:** Unter dem kanonischen Isomorphismus  $T_p \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$  entspricht  $T_p S^3 \subset T_p \mathbb{R}^4$  dem orthogonalen Komplement  $p^\perp$ .

### Lösung 1

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Es ist  $\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t(p) = \gamma_X^{-t} \circ \gamma_X^t \circ \gamma_Y^s(p) = \gamma_Y^s(p)$ , und daraus folgt

$$\begin{aligned} Y|_p &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\gamma_Y^s(p)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s)(\gamma_X^t(p))) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\gamma_X^{-t} \circ (s \mapsto \gamma_Y^s(\gamma_X^t(p)))) \\ &= \gamma_{X*}^{-t} Y|_{\gamma_X^t(p)} \end{aligned}$$

Es gilt  $[X, Y]|_p = (\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_X^{-t} Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_p = 0$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii): betrachte  $\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t(p))$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_{X*}^{-(t_0+t)} Y_{\gamma_X^{t_0+t}(p)}) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\gamma_X^{-t_0} \circ \gamma_X^{-t})_* Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_{X*}^{-t_0} \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}) \\ &= \gamma_{X*}^{-t_0} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}) \right) \\ &= \gamma_{X*}^{-t_0} \left( (\mathcal{L}_X Y)_{\gamma_X^{t_0}(p)} \right) = \gamma_{X*}^{-t_0} \underbrace{[X, Y]_{\gamma_X^{t_0}(p)}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt dass  $t \mapsto \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)}$  konstant ist, also ist

$$\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)} = \underbrace{\gamma_X^{-0}}_{=\text{id}_M} Y_{\gamma_X^0(p)} = Y_p$$

Sei  $c(s) := \gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q))$ , dann folgt

$$\dot{c}(s) = \gamma_{X*}^{-t} \left( \frac{d}{ds} (\gamma_Y^s(q)) \right) = \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_Y^s(q)} = Y_{\gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q))} = Y_{c(s)}$$

Daraus folgt dass  $c$  eine eindeutige Integralkurve zu  $Y$  durch  $c(0) = \gamma_X^{-t}(q)$  ist.

Damit folgt dann

$$\gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q)) = \gamma_Y^s(\gamma_X^{-t}(q))$$

und damit

$$\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s = \gamma_Y^s \circ \gamma_X^{-t}$$

## Lösung 2

Sei  $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$  eine offene Überdeckung von  $M$ ,  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$ ,  $g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p)$  für alle  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ . Sei  $E := \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim$ , wobei für  $(p, v)_\alpha \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ,  $(q, w)_\beta \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$  gilt  $(p, v)_\alpha \sim (q, w)_\beta \Leftrightarrow p = q$  und  $v = g_{\alpha\beta}(p) \cdot w$ .

*Behauptung:*  $\pi : E \rightarrow M$ ,  $[p, v] \mapsto p$  ist ein Vektorbündel.

„ $\sim$ “ ist Äquivalenzrelation: •  $(p, v)_\alpha \sim (p, v)_\alpha$  gilt:  $g_{\alpha\alpha}(p) = \text{id}$   $v = g_{\alpha\alpha}(p) \cdot v$

$$\underbrace{g_{\alpha\alpha}(p)}_{\in \text{GL}(k, \mathbb{R})} \cdot g_{\alpha\alpha}(p)$$

•  $(p, v)_\alpha \sim (q, w)_\beta \Rightarrow (q, w)_\beta \sim (p, v)_\alpha$  gilt:  $p = q$ ,  $v = g_{\alpha\beta}(p)w \Rightarrow w = (g_{\alpha\beta}(p))^{-1}v = g_{\beta\alpha}(p)v$  ( $g_{\alpha\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p)$ )

• Transitivität folgt aus  $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}$

$E_p$  ist  $k$ -dimensionaler Vektorraum:

$$[(p, v)_\alpha] + \lambda[(p, w)_\alpha] := [(p, v + \lambda w)_\alpha]$$

unabhängig von  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} [(p, v)_\beta] + \lambda[(p, w)_\beta] &= [(p, g_{\alpha\beta}(p)v)_\alpha] + \lambda[(p, g_{\alpha\beta}(p)w)_\alpha] \\ &= [(p, g_{\alpha\beta}(p)v + \lambda g_{\alpha\beta}(p)w)_\alpha] \\ &= [(p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot (v + \lambda w))_\alpha] = [(p, v + \lambda w)_\beta] \end{aligned}$$

$k$ -dimensional:  $q|_{\{p\} \times \mathbb{R}^k} : \{p\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E_p$  ist Vektorraum-Isomorphismus (wobei  $q : \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) \rightarrow E$ )

**Bündelkarten (glatt):**  $\Phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_{U_\alpha}$ ,  $(p, v) \mapsto [(p, v)_\alpha]$  ist Homöomorphismus, da  $\sim|_{(U_\alpha \times \mathbb{R}^k) \times (U_\alpha \times \mathbb{R}^k)}$  die triviale Äquivalenzrelation ist.

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p, v) &= \Phi_\alpha([(p, v)_\beta]) \\ &= \Phi_\alpha([(p, g_{\alpha\beta}(p)v)_\alpha]) \\ &= (p, g_{\alpha\beta}(p)v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$  ist glatt.  $\Phi_\alpha|_{E_p}$  ist Vektorraum-Isomorphismus.

„normale“ Karten: Sei  $\varphi$  Karte von  $M$  mit Kartengebiet  $U \subset U_\alpha \rightsquigarrow \bar{\varphi}_\alpha : E|_U \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^k$ ,  $e \mapsto (\varphi(\pi(e)), (\Phi_\alpha)^2(e))$ .

Glatte Kartenwechsel ✓

**E Hausdorffsch:**  $[(p, v)_\alpha] \neq [(q, w)_\beta] \in E$

$p \neq q$ : Die Urbilder in  $M$  trennender Umgebungen von  $p$  und  $q$  unter  $\pi$  trennen die Punkte in  $E$ .

$p = q$ :  $v \neq g_{\alpha\beta}(p)w \rightsquigarrow$  trennen im  $\mathbb{R}^k$  und über  $\Phi_\alpha$  zurückziehen.

**abzählbare basis der Topologie (für  $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$  ✓):** Es gibt ein  $I' \subseteq I$  mit  $I$  abzählbar und  $M = \bigcup_{\alpha \in I'} U_\alpha$ . Sei  $\{V_j \mid j \in J'\}$  abzählbare Basis der Topologie von  $M$ . Dann ist mit  $J = \{j \in J' \mid V_j \subset U_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$ ,  $\{V_j \mid j \in J\}$  auch

abzählbare Basis der Topologie von  $M$ , denn  $U \subset M \Rightarrow$   
 $\text{offen}$

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap U) \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\substack{j \in J' \\ U_j \subset U_\alpha \cap U}} V_j & (U_j \subset U_\alpha \cap U \Rightarrow j \in J) \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\substack{j \in J \\ V_j \subset U_\alpha \cap M}} V_j \end{aligned}$$

Für  $j \in J$  sei  $\alpha(j) \in I$ , sodass  $V_j \subset U_{\alpha(j)}$ . Setze  $I' := \{\alpha(j) \mid j \in J\}$ .

$$\bigcup_{\alpha \in I'} U_\alpha = \bigcup_{j \in J} U_{\alpha(j)} \supseteq \bigcup_{j \in J} V_j = M$$

### Lösung 3

Es seien  $E, E'$  Vektorbündel über  $M$  und  $F : E \rightarrow E'$  sei ein Bündelmorphismus mit dem Isomorphismus  $F_p : E_p \rightarrow E'_p$  für alle  $p \in M$ .

*Behauptung:*  $F$  ist ein Bündelisomorphismus

$F$  ist surjektiv, denn für  $e \in E'$  ist  $F_{\pi'(e)} : E_{\pi'(e)} \rightarrow E'_{\pi'(e)}$  bereits ein Isomorphismus, also existiert ein Urbild  $\tilde{e} \in E_{\pi'(e)} \subset E$  mit  $F(\tilde{e}) = F_{\pi'(e)}(\tilde{e}) = e$ . Dass  $F$  injektiv ist folgt analog, da  $\pi' \circ F = \pi$ .

Damit existiert ein  $G : E' \rightarrow E$  mit  $G \circ F = \text{id}$ ,  $F \circ G = \text{id}$  und  $\pi \circ G = \pi'$ . Damit gilt auch

$$G(e') = (F_{\pi'(e)})^{-1}(e')$$

Es sei nun ein offenes  $U \subseteq M$  mit den Trivialisierungen  $E|_U$  und  $E'|_U$  gegeben.

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ F \\ \downarrow \end{array} \right) G & & \Phi' \circ F \circ \Phi^{-1} = \tilde{F} \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \tilde{F} \\ \downarrow \end{array} \right) \tilde{G} = \Phi \circ G \circ \Phi'^{-1} \\ E'|_U & \xrightarrow[\cong]{\Phi'} & U \times \mathbb{R}^k \end{array}$$

Da  $\pi' \circ F = \pi$  ist, existiert eine Abbildung  $f : U \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$  sodass  $\tilde{F}(p, v) = (p, f(p) \cdot v)$  ist. Daraus folgt dass  $\tilde{G}(p, w) = (p, (f(p))^{-1}w)$  glatt ist, da  $\cdot^{-1} : \text{GL}(k, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$  glatt ist (denn  $A^{-1} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A[i, j])_{i,j}^T$ ). Damit ist  $G$  glatt und somit auch ein Bündelmorphismus.

### Lösung 4

(a) *Behauptung:* Es sei  $E$  ein Vektorbündel vom Rang  $k$  über  $M$  auf dem  $k$  punktweise linear unabhängige Schnitte existieren. Dann ist  $E$  trivial.

Es seien  $\sigma_1, \dots, \sigma_k : M \rightarrow E$  Schnitte, die punktweise linear unabhängig sind. Dann hat  $E_p$  als Basis  $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ . Definiere nun  $F : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ ,  $\sum_{i=1}^k a_i \sigma_i(p) \mapsto (p, a_1, \dots, a_k)$ . Es gilt  $\pi \circ F = \pi$  und  $F_p$  ist ein Isomorphismus.  $F$  ist glatt, denn für eine Bündelkarte  $\Phi$  ist  $\tilde{\sigma}_i = \Phi^2 \circ \sigma_i$ , das heißt  $\Phi(\sigma(p)) = (p, \tilde{\sigma}(p))$ . Mit  $A(p) = (\tilde{\sigma}_1(p), \dots, \tilde{\sigma}_k(p))^{-1}$  gilt:

$$F \circ \Phi^{-1}(p, v) = (p, A(p) \cdot v)$$

$\Phi^2$  ist die zweite Komponente

Daher ist  $F$  glatt und mit Aufgabe 3 folgt, dass  $F$  ein Bündelmorphismus ist.

(b) *Zu zeigen:*  $T S^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$

Es gilt:

$$T_p S^3 \cong p^\perp \ni \underbrace{\begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{=: \sigma_1(p)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} p_3 \\ -p_4 \\ -p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2(p)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -p_4 \\ -p_3 \\ p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3(p)}$$

Dadurch sehen wir dass  $\sigma_i(p) \perp \sigma_j(p)$  für  $i \neq j$ , woraus folgt dass  $\sigma_1, \dots, \sigma_3$  punktweise linear unabhängige Schnitte sind. Mit (a) folgt dann die Behauptung.

**Anmerkung** Der Raum der Schnitte  $\Gamma(M, E)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, also ist lineare Unabhängigkeit für Schnitte definiert. Linear unabhängige Schnitte sind im Allgemeinen *nicht* punktweise linear unabhängig. Betrachte beispielsweise

$$\pi_1 : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Mf.}} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{VR}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dann sind  $\sigma_1(t) = (t, 1)$  und  $\sigma_2(t) = (t, t)$  linear unabhängig, aber in jedem Punkt linear abhängig.

## Übung 5 vom 26. November 2012

### Aufgabe 1

Beweisen Sie Proposition 5.4 der Vorlesung: Die  $(r, s)$ -Tensorfelder auf  $M$  entsprechen genau den  $C^\infty(M)$ -multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \dots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \dots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie, welche der folgenden auf  $\mathbb{R}^3$  definierten Differentialformen geschlossen und welche exakt sind:

- a)  $\omega_1 = yzdx + xzdy + xydz$
- b)  $\omega_2 = y^2dx + x^3yzdy + x^2ydz$
- c)  $\omega_3 = xdx + x^2y^2dy + yzdz$
- d)  $\omega_4 = 2xy^2 dx \wedge dy + z dy \wedge dz$

### Aufgabe 3

Es sei  $\vartheta : S^1 \setminus \{1\} \rightarrow (0, 2\pi), e^{i\vartheta} \mapsto \vartheta$ . Zeigen Sie, dass sich  $d\vartheta$  auf ganz  $S^1$  fortsetzen lässt.

**Einschub** Für ein Tensorprodukt  $V \otimes W$  und ein Element  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \in V \otimes W$  gilt im Allgemeinen

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \neq v_3 \otimes w_3$$

*Beispiel:*  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung 1**

Wir zeigen dass die  $(r, s)$ -Tensorfelder den  $C^\infty(M)$ -multilinearen Abbildungen entsprechen.

$$\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \dots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \dots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}}$$

Zunächste zeigen wir die Behauptung punktweise. Sei dazu  $p \in M$  und die Abbildung

$$F_p : T_p M \otimes \dots \otimes T_p M \otimes T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M \rightarrow \text{Multilin}_{\mathbb{R}}(T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p M)$$

definiert durch

$$\begin{aligned} F_p \left( \sum_i a_i \underbrace{X_1^i \otimes \dots \otimes X_r^i}_{\in T_p M} \otimes \underbrace{\omega_1^i \otimes \dots \otimes \omega_s^i}_{\in T_p^* M} \right) (\eta_1, \dots, \eta_r, Y_1, \dots, Y_s) \\ := \sum_i a_i \eta_1(X_1^i) \cdot \dots \cdot \eta_r(X_r^i) \cdot \omega_1^i(Y_1) \cdot \dots \cdot \omega_s^i(Y_s) \end{aligned}$$

**$F_p$  ist wohldefiniert:** •  $F_p(\dots)$  ist  $\mathbb{R}$ -multilinear ✓

- Sei  $Z_1, \dots, Z_r$  Basis von  $T_p M$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_s$  die dazu duale Basis von  $T_p^* M$ . Damit ist  $\{Z_{i_1} \otimes \dots \otimes Z_{i_r} \otimes \mu_{j_1} \otimes \dots \otimes \mu_{j_s} \mid i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}\}$  eine Basis von  $T_p M \otimes \dots \otimes T_p^* M$ . Sei  $X_k^i = \sum_{\alpha} \chi_{k,\alpha}^i Z_{\alpha}$ ,  $\omega_l^i = \sum_{\beta} w_{l,\beta}^i \mu_{\beta}$ , dann folgt

$$\begin{aligned} & \sum_i a_i X_1^i \otimes \dots \otimes \omega_s^i \\ &= \sum_i a_i \left( \sum_{\alpha_1} \chi_{1,\alpha_1}^i Z_{\alpha_1} \right) \otimes \dots \otimes \left( \sum_{\beta_s} w_{s,\beta_s}^i \mu_{\beta_s} \right) \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_r \\ \beta_1, \dots, \beta_s}} \underbrace{\left( \sum_i a_i \chi_{1,\alpha_1}^i \cdot \dots \cdot \chi_{r,\alpha_r}^i \cdot w_{1,\beta_1}^i \cdot \dots \cdot w_{s,\beta_s}^i \right)}_{=A_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s}} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes Z_{\alpha_r} \otimes \mu_{\beta_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s} \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} F_p \left( \sum_i a_i X_1^i \otimes \dots \right) &= \sum a_i \eta_1(X_1^i) \cdot \dots \cdot \omega_s^i(Y_s) \\ &= \dots \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \beta_s} A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} \eta_1(Z_{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{\beta_s}(Y_s) \\ &= F_p \left( \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s} \right) \end{aligned}$$

**$F_p$  ist  $\mathbb{R}$ -linear**

**$F_p$  ist surjektiv:** Sei  $g : T_p^* M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathbb{R}$ -multilineare Abbildung, dann ist  $g$  eindeutig bestimmt durch

$$\mathbb{R} \ni A_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s} = g(\mu_{\alpha_1}, \dots, \mu_{\alpha_r}, Z_{\beta_1}, \dots, Z_{\beta_s}), \text{ mit } \alpha_1, \dots, \beta_s \in \{1, \dots, n\}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} F_p \left( \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s} \right) (\mu_{\tilde{\alpha}_1}, \dots, Z_{\tilde{\beta}_s}) &= \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} \underbrace{\mu_{\tilde{\alpha}_1}(Z_{\alpha_1})}_{\delta_{\tilde{\alpha}_1 \alpha_1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\mu_{\beta_s}(Z_{\tilde{\beta}_s})}_{\delta_{\beta_s \tilde{\beta}_s}} \\ &= A_{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_s} \\ &= g(\mu_{\tilde{\alpha}_1}, \dots, Z_{\tilde{\beta}_s}) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$g = F_p \left( \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes Z_{\beta_s} \right)$$

**$F_p$  ist injektiv:** Ist  $0 = F_p(\sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s})$ , so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= F_p(\mu_{\tilde{\alpha}_1}, \dots, \mu_{\tilde{\alpha}_r}, Z_{\tilde{\beta}_1}, \dots, Z_{\tilde{\beta}_s}) \\ &= A_{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_s} \text{ für alle } \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_s \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s} = 0$

Insgesamt folgt damit dass  $F_p$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen ist. Wir definieren nun

$$F : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \text{Multilin}_{C^\infty(M)}(\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \dots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \dots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}}, C^\infty(M))$$

durch

$$F(S)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p) := F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_r|_p, X_1|_p, \dots, X_s|_p)$$

**$F(S)(\omega_1, \dots, X_s) \in C^\infty(M)$ :** lokale Koordinaten  $\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x^i} x^i$ , Koeffizienten von  $\omega_1, \dots, X_s$  glatt  $\Rightarrow F(S)(\omega_1, \dots, X_s)$  glatt

**$F(S)$  ist  $C^\infty(M)$ -multilinear:** Seien  $f \in C^\infty(M)$  und  $\tilde{\omega}_i \in \mathcal{V}^*(M)$ , damit ist dann:

$$\begin{aligned} F(S)(\omega_1, \dots, \omega_i + f\tilde{\omega}_i, \dots, X_s)(p) &= F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_i|_p + f(p)\tilde{\omega}_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &= F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &\quad + f(p)F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \tilde{\omega}_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &= F(S)(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, X_s)(p) \\ &\quad + f(p)F(S)(\omega_1, \dots, \tilde{\omega}_i, \dots, X_s)(p) \end{aligned}$$

**$F$  ist  $C^\infty(M)$ -linear** ✓

**$F$  ist injektiv:**  $F(S) = 0$ , also ist  $F_p(S_p) = 0$  für alle  $p \in M$ . Da  $F_p$  injektiv ist, ist  $S_p = 0$  für alle  $p \in M$  und damit  $S = 0$ .

**$F$  ist surjektiv:** Sei  $g : \mathcal{V}^*(M) \times \dots \times \mathcal{V}^*(M) \times \mathcal{V}(M) \times \dots \times \mathcal{V}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  eine  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung. Seien weiter  $p \in M$ ,  $\varphi$  eine Karte um  $p$  und  $\chi$  eine glatte cut-off Funktion mit  $\text{supp } \chi \subset \text{Kartengebiet von } \varphi$  und  $\chi \equiv 1$  auf einer Umgebung  $V$  von  $p$ . Für  $q \in V$  ist

$$\begin{aligned} g(\omega_1, \dots, X_s)(q) &= g(\chi\omega_1 + (1-\chi)\omega_1, \dots, \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &= g(\chi\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots, \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &\quad + \underbrace{(1-\chi)(q)}_{=0} g(\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots) \\ &= g(\chi\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots, \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &= \dots = g(\chi\omega_1, \dots, \chi X_s)(q) \quad (*) \end{aligned}$$

Sei  $S_p := \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{\beta_s}|_p$  mit

$$A_{\alpha_1, \dots, \beta_s}(p) = g(\chi dx^{\alpha_1}, \dots, \chi \frac{\partial}{\partial x^{\beta_s}})$$

Bachrechnen ergibt dass andere Karten das gleiche  $S_p$  liefern. Daher ist  $S$  auf ganz  $M$  definiert. Wegen (\*) und der lokalen Darstellung gilt  $F(S) = g$ .

supp „Träger“

## Lösung 2

a)  $\omega_1 = yzdx + xzdy + xydz$  ist geschlossen und exakt

$$\left( df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)$$

$$d(xyz) = (yz)dx + (xz)dy + (xy)dz \Rightarrow 0 = d \circ d(xyz) = d\omega_1$$

b)  $\omega_2 = y^2dx + x^3yzdy + x^2ydz$  ist weder geschlossen noch exakt.

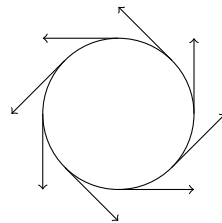
$d\omega_2 \neq 0$  (nachrechnen); angenommen  $\exists \eta : d\eta = \omega_2 \Rightarrow 0 = d^2\eta = d\omega_2 \neq 0 \not\Rightarrow \omega_2$   
nicht exakt

c)  $d\omega_3 \neq 0$

d)  $\omega_4$  ist exakt

## Lösung 3

Skizze:



## Übung 6 vom 3. Dezember 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- Für je zwei Punkte in  $M$  existiert eine stückweise glatte Kurve, die diese verbindet.
- Die Abstandsfunktion

$$d(p, q) = \inf \{ \mathcal{L}(c) \mid c : [0, 1] \rightarrow M \text{ ist stückweise glatt, } c(0) = p, c(1) = q \}$$

ist eine Metrik, welche die ursprüngliche Topologie erzeugt.

### Aufgabe 2

Es sei für  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\langle x, y \rangle := -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \dots + x^n y^n,$$

sowie

$$\mathbb{H}^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x^0 > 0 \}.$$

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{H}^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit ist, und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für alle  $p \in \mathbb{H}^n$  ein Skalarprodukt auf  $T_p \mathbb{H}^n \subset T_p \mathbb{R}^{n+1}$  definiert und die Gesamtheit dieser Skalarprodukte eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $\mathbb{H}^n$  ist.

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(\mathbb{H}^n, g)$  heißt *n-dimensionaler hyperbolischer Raum*.

### Aufgabe 3

Es sei  $s = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Zeigen Sie:



a) Die Abbildung  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) := s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s \rangle}, \quad x \in \mathbb{H}^n,$$

ist ein Diffeomorphismus von  $\mathbb{H}^n$  auf  $\{\xi \in \mathbb{R}^n \cong \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\xi\| < 1\}$ .

b) In der Karte  $\varphi$  hat die Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{H}^n$  die Form

$$\frac{4}{(1 - \|\xi\|^2)^2} \sum_{i=1}^n d\xi^i \otimes d\xi^i.$$

### Lösung 1

a) asdf

b) asdf

### Lösung 2

asdf

### Lösung 3

a) asdf

b) asdf

## Übung 7 vom 10. Dezember 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $S^2$  versehen mit der von der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^3$  induzierten Metrik. Weiter sei  $c : [0, 1] \rightarrow S^2$  eine kürzeste  $C^1$ -Kurve zwischen  $c(0) = N = (0, 0, 1)$  und  $c(1)$ . Zeigen Sie, dass das Bild von  $c$  in einem Großkreis enthalten ist.

**Hinweis:** Betrachten Sie die Parametrisierung  $(\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos(\vartheta) \cos(\varphi), \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \sin(\vartheta))$ .

### Aufgabe 2

Es sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^k$  und  $\nabla$  der kanonische Zusammenhang auf dem Tangentialbündel des  $\mathbb{R}^k$ . Für ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  bezeichne  $\tilde{X}$  eine beliebige Fortsetzung von  $X$  zu einem Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^k$  und für  $v \in \mathbb{R}^k \cong T_p \mathbb{R}^k$  bezeichne  $v^{T_p M}$  die orthogonale Projektion von  $v$  auf den Tangentialraum von  $M$  an  $p$ .

Zeigen Sie, dass

$$\nabla^M : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M) \quad (\nabla_X^M Y)_p := ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M},$$

einen Zusammenhang auf dem Tangentialbündel von  $M$  definiert.

### Aufgabe 3

a) Es sei  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  und  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $E$ . Weiter sei

$$\nabla^* : \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E^*) \rightarrow \Gamma(E^*), \quad (\nabla_X^*(s^*))_p(v) := X_p(s^*(\tilde{v})) - s_p^*((\nabla_X(\tilde{v}))_p)$$

für  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $s^* \in \Gamma(E^*)$ ,  $v \in E_p$  und  $\tilde{v} \in \Gamma(E)$  eine Fortsetzung von  $v$ .

Zeigen Sie, dass  $\nabla^*$  ein Zusammenhang auf  $E^*$  ist.

- b) Es seien  $E_1$  und  $E_2$  Vektorbündel über  $M$  mit Zusammenhängen  $\nabla^1$  und  $\nabla^2$ . Zeigen Sie, dass es auf  $E_1 \otimes E_2$  genau einen Zusammenhang  $\nabla$  gibt, der

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = \nabla_X^1(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_X^2(s_2)$$

für  $X \in \mathcal{V}(M)$  und  $s_i \in \Gamma(E_i)$  erfüllt.

### Lösung 1

$c : [0, 1] \rightarrow (S^2, g_{\text{std}})$  kürzeste  $C^1$ -Kurve zwischen  $c(0) = N = (0, 0, 1)$  und  $c(1)$ .

*Behauptung:* Bild  $c$  ist im Großkreis enthalten.

Wähle ein geeignetes Intervall der Länge  $2\pi$ , sodass

$$\begin{aligned} f : I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow f\left(I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ (\varphi, \vartheta) &\mapsto (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta) \end{aligned}$$

bijektiv ist und  $c(1) \in U$  (falls  $c(1) \neq N, S$ ). Daraus folgt dass  $f^{-1}$  eine Karte von  $S^2$  ist. Sei nun ohne Einschränkung  $c$  in keiner Umgebung von 0 konstant. Weiter sei  $\gamma := f^{-1} \circ c$  (eventuell nur in einer Umgebung von 0 ohne  $\{0\}$  definiert). Es bleibt nun zu zeigen, dass  $\gamma_1$  konstant ist.

Bestimme  $g_{ij}$  bezüglich  $f^{-1}$ . Es ist

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} = (-\cos \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta \cos \varphi, 0) \\ \partial_2 f &= \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = (-\sin \vartheta \cos \varphi, -\sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = \cos^2 \vartheta \\ g_{22} &= \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 1 \\ g_{12} &= \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0 = g_{21} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} L(c|_{(0,\varepsilon)}) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})} = \int_0^\varepsilon \sqrt{g_{11}(c(t))\dot{\gamma}_1(t)^2 + g_{22}(c(t))\dot{\gamma}_2(t)^2} dt \\ &= \int_0^\varepsilon \sqrt{\underbrace{\cos^2(\gamma_2(t))}_{\geq 0} \dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2} dt \\ &\geq \int_0^\varepsilon |\dot{\gamma}_2(t)| dt = L(\tilde{c}) \end{aligned}$$

für  $\tilde{c}(t) = f(\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(t))$ . Dann ist  $c$  die Kürzeste. Daraus folgt  $L(c|_{(0,\varepsilon]}) = L(\tilde{c}|_{(0,\varepsilon]})$  und somit ist für alle  $t \in (0, \varepsilon]$  stets  $\cos^2(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_1(t) = 0$ . Da  $\cos^2(\gamma_2(t)) > 0$  muss  $\dot{\gamma}_1(t) = 0$  gelten. Da sich  $c$  nicht aus Bild  $f$  heraus bewegt, außer eventuell für  $c(1)$ , ist  $\dot{\gamma}_1(t) = 0$  für alle  $t \in (0, 1)$ .

### Lösung 2

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^k$  und die Abbildung  $\nabla^M : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$  mit  $(\nabla_X^M Y)_p := ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M}$ , wobei  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  Fortsetzungen von  $X, Y$  sind. Wir haben zu zeigen:

(0) Unabhängigkeit von der Wahl der Fortsetzungen

$$(1.1) \quad \nabla_{X_1+X_2}^M Y = \nabla_{X_1}^M Y + \nabla_{X_2}^M Y$$

$$(1.2) \quad \nabla_{fX}^M Y = f \nabla_X^M Y$$

$$(2.1) \quad \nabla_X^M (Y_1 + \lambda Y_2) = \nabla_X^M Y_1 + \lambda \nabla_X^M Y_2$$

$$(2.2) \quad \nabla_X^M (fY) = X(f) \cdot Y + f \nabla_X^M Y$$

(3)  $\nabla_X^M Y \in \mathcal{V}(M)$  (klar ist, dass auf  $T_p M$  projiziert wird)

Wir werden nun diese einzelnen Behauptungen beweisen, wobei der Beweis von (2.1) in (1.1) enthalten ist.

(0) Es sei  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  glatt mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = X_p$ . Damit erhält man folgendes:

$$\begin{aligned} ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}))^{T_p M} &= ((D \tilde{Y})_p \tilde{X}_p)^{T_p M} \\ &= ((D \tilde{Y})_p X_p)^{T_p M} \quad \Rightarrow \text{unabh. von der Wahl von } \tilde{X} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\tilde{Y} \circ c(t)) \right)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y \circ c(t)) \right)^{T_p M} \quad \Rightarrow \text{unabh. von der Wahl von } \tilde{Y} \end{aligned}$$

(1.1) Wähle  $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$ , beziehungsweise  $\tilde{Y}_1 + \lambda \tilde{Y}_2$ , als Fortsetzung entsprechend der Regeln für  $\nabla$ . Daraus folgen dann die Behauptungen.

(1.2) Es gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_{fX}^M Y)_p &= ((\nabla_{f\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M} = ((D \tilde{Y})_p \underbrace{(f \tilde{X})_p}_{=f(p)X_p})^{T_p M} \\ &= ((D \tilde{Y})_p (f(p)X_p))^{T_p M} \\ &= f(p) ((D \tilde{Y})_p X_p)^{T_p M} \\ &= f(p) (\nabla_X^M Y)_p \end{aligned}$$

(2.2) Es gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_X^M (fY))_p &= ((D(\widetilde{fY}))_p \cdot X_p)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\widetilde{fY}) \circ c)(t) \right)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((fY) \circ c)(t) \right)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(c(t)) \cdot Y(c(t)))(t) \right)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(c(t))) Y(c(0)) + f(c(0)) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y(c(t))) \right)^{T_p M} \\ &= (X_p(f) \cdot Y_p + f(p)(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M} \\ &= X_p(f) \cdot Y_p^{T_p M} + f(p) ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M} \\ &= X_p(f) Y_p + f(p)(\nabla_X^M Y)_p \end{aligned}$$

- (3) Es gilt  $(\nabla_X^M Y)_p \in T_p M$  (klar wegen Projektion) und hängt glatt von  $p$  ab. Sind  $e_1, \dots, e_n$  um  $p$ , definiere glatte Vektorfelder, so dass für  $q \in \text{Umg}(p)$   $e_1|_q, \dots, e_n|_q$  (erhalte mit Gram-Schmitt (glatt!)) eine Orthonormalbasis ist, so ist (lokal):

$$\nabla_X^M Y = \sum_{i=1}^n \langle D\tilde{Y} \cdot \tilde{X}, e_i \rangle \cdot e_i \Rightarrow \text{glatt}$$

(Erhalte  $e_1, \dots, e_n$  aus beliebigen lokalen Basisvektoren durch Gram-Schmitt.)

**Bemerkung** •  $\nabla^M$  ist der **Levi-Civita Zusammenhang** von  $(M, g)$  mit  $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ .

- Die Projektion auf  $T_p M$  ist nötig, zum Beispiel  $M = S^1$ ,  $\tilde{X} = \tilde{Y} = \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow X = Y = \tilde{X}|_{S^1} \in \mathcal{V}(S^1)$

$$D\tilde{Y} \cdot \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in (T_{(X,Y)} S^1)^\perp$$

### Lösung 3

- a) Es sei  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  und  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $E$ . Betrachte  $(\nabla_X^* s^*)_p(v) := X_p(s^* \tilde{v}) - s_p^*((\nabla_X \tilde{v})_p)$  mit  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $s^* \in \Gamma(E^*)$ ,  $v \in E_p$ ,  $\tilde{v} \in \Gamma(E)$  und  $\tilde{v}_p = v$ . Warum dieses  $\nabla^*$  betrachten? Für  $s^* \in \Gamma(E^*)$ ,  $s \in \Gamma(E)$  sei

$$\langle s^*, s \rangle := s^*(s) \in C^\infty(M)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} X(\langle s^*, s \rangle) &= \langle \nabla_X^* s^*, s \rangle + \langle s^*, \nabla_X s \rangle \\ &= (\nabla_X^* s^*)(s) + s^*(\nabla_X s) \end{aligned}$$

Das führt zu

$$(\nabla_X^* s^*)(s) = X(s^*(s)) - s^*(\nabla_X s)$$

- b) Seien  $E_1$  und  $E_2$  Vektorbündel mit Zusammenhängen  $\nabla^1$  und  $\nabla^2$ . Wir haben zu zeigen, dass es genau einen Zusammenhang  $\nabla$  auf  $E_1 \otimes E_2$  gibt mit  $\nabla_X(S_1 \otimes S_2) = (\nabla_X^1 S_1) \otimes S_2 + S_1 \otimes (\nabla_X^2 S_2)$ .

**Eindeutigkeit:** Seien  $s \in \Gamma(E_1 \otimes E_2)$  und seien  $e_1^1, \dots, e_m^1, e_1^2, \dots, e_n^2 : U \rightarrow E_1$  beziehungsweise  $E_2$  lokale Basisschnitte von  $E_1$  und  $E_2$ . Daraus folgt  $s|_U = \sum \sigma_{ij} e_i^1 \otimes e_j^2$ .

$$\begin{aligned} \nabla_x(s)|_U &= \nabla_X \left( \sum_{ij} \sigma_{ij} e_i^1 \otimes e_j^2 \right) \\ &= \sum_{ij} \left( X(\sigma_{ij}) \cdot e_i^1 \otimes e_j^2 + \sigma_{ij} \nabla_X(e_i^1 \otimes e_j^2) \right) \\ &= \sum_{ij} \left( X(\sigma_{ij}) e_i^1 \otimes e_j^2 + \sigma_{ij} ((\nabla_X^1 e_i^1) \otimes e_j^2 + e_i^1 \otimes (\nabla_X^2 e_j^2)) \right) \end{aligned}$$

**Existenz:** Zeige die Unabhängigkeit von der Wahl der  $e_i^k$ .

## Übung 8 vom 17. Dezember 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  mit kovarianter Ableitung  $\nabla$ . Zeigen Sie, dass

$$R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

$$R(X, Y)S = \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S$$

eine  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung ist.

### Aufgabe 2

Es sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $R$  der Krümmungstensor des Levi-Civita-Zusammenhangs auf  $M$ . Zeigen Sie, daß für alle  $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

- a)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- b)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$
- c)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$

### Aufgabe 3

Es sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für eine glatte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  bezeichne  $P_{a,b}^c : T_{c(a)}M \rightarrow T_{c(b)}M$  den Paralleltransport entlang  $c$  bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs. Zeigen Sie, daß  $P_{a,b}^c$  eine lineare Isometrie ist.

Bevor wir mit den Lösungen beginnen zeigen wir zunächst den folgenden Sachverhalt

*Behauptung:* Für eine glatte Kurve  $c$  und Vektorfelder  $X, Y$  längs  $c$  gilt:

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(X(t), Y(t)) = g_{c(t)}((\nabla_t X)(t), Y(t)) + g_{c(t)}(X(t), (\nabla_t Y)(t))$$

*Beweis:* Mit dem Levi-Civita Zusammenhang gilt

$$\nabla_t(g \circ c) = \nabla_{c_* \frac{\partial}{\partial t}} g = 0.$$

Daraus folgt dann mit  $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= (\nabla_t(g \circ c))(X(t), Y(t)) \\
 &= \left( \nabla_t \left( \left( \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j \right) \circ c \right) \right) (X(t), Y(t)) \\
 &= \left( \sum \frac{d}{dt} (g_{ij} \circ c) \cdot dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)} + \sum g_{ij} \circ c \cdot \underbrace{\nabla_t(dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)})}_{= \nabla_t(dx^i|_{c(t)}) \otimes dx^j|_{c(t)} + dx^i|_{c(t)} \otimes \nabla_t(dx^j|_{c(t)})} \right) (X(t), Y(t)) \\
 &= \sum \frac{d}{dt} (g_{ij} \circ c) dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)} (X(t), Y(t)) \\
 &\quad + \sum (g_{ij} \circ c) \left( (\nabla_t dx^i|_{c(t)})(X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) + dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot (\nabla_t(dx^j|_{c(t)}))(Y(t)) \right) \\
 &= \sum \frac{d}{dt} (g_{ij} \circ c) \cdot dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) \\
 &\quad + \sum (g_{ij} \circ c) \left( \left( \frac{d}{dt} dx^i|_{c(t)}(X(t)) - dx^i|_{c(t)}(\nabla_t X(t)) \right) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) \right. \\
 &\quad \left. + dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot \left( \frac{d}{dt} dx^j|_{c(t)}(Y(t)) - dx^j|_{c(t)}(\nabla_t Y(t)) \right) \right) \\
 &= \sum \frac{d}{dt} \left( (g_{ij} \circ c) \cdot dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) \right) \\
 &\quad - \sum (g_{ij} \circ c) dx^i|_{c(t)}(\nabla_t X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) \\
 &\quad - \sum (g_{ij} \circ c) dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(\nabla_t Y(t)) \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \sum g_{ij}(c(t)) \cdot (dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)})(X(t), Y(t)) \right) \\
 &\quad - \sum g_{ij}(c(t)) \cdot dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)}(\nabla_t X(t), Y(t)) \\
 &\quad - \sum g_{ij}(c(t)) \cdot dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)}(X(t), \nabla_t Y(t)) \\
 &= \frac{d}{dt} \left( g_{c(t)}(X(t), Y(t)) \right) - g_{c(t)}(\nabla_t X(t), Y(t)) - g_{c(t)}(X(t), \nabla_t Y(t))
 \end{aligned}$$

Wir verwenden dabei für  $\nabla$  das  $\nabla^*$  aus Aufgabe 3 a) von Blatt 7.

### Lösung 1

Es sei  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  mit kovarianter Ableitung  $\nabla$  und sei die Abbildung  $R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  definiert durch  $R(X, Y)S = \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S$ . Wir wollen zeigen dass  $R$  eine  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung ist.

- Sei  $g \in C^\infty(M)$ :

$$\begin{aligned}
 [fX, Y](g) &= f \cdot X(Y(g)) - Y(f \cdot X(g)) \\
 &= f \cdot X(Y(g)) - f \cdot Y(X(g)) - Y(f) \cdot X(g) \\
 &= f \cdot [X, Y](g) - Y(f) \cdot X(g) \\
 &= (f \cdot [X, Y] - Y(f) \cdot X)(g)
 \end{aligned}$$

- Additivität: ✓
- 

$$\begin{aligned}
 R(fX, Y)S &= \nabla_{fX} \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_{fX} S - \nabla_{[fX, Y]} S \\
 &= f \nabla_X \nabla_Y S - Y(f) \cdot \nabla_X S - f \cdot \nabla_Y \nabla_X S - f \nabla_{[X, Y]} S + Y(f) \nabla_X S \\
 &= f(\nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S) = f \cdot R(X, Y)S
 \end{aligned}$$

- In zweiter Komponente: ✓  $(R(X, Y)S = -R(Y, X)S)$

•

$$\begin{aligned}
 D(X, Y)(f \cdot S) &= \nabla_X \underbrace{\nabla_Y(f \cdot S)}_{=Y(f) \cdot S + f \cdot \nabla_Y S} - \nabla_Y \underbrace{\nabla_X(f \cdot S)}_{=X(f) \cdot S + f \cdot \nabla_X S} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}(f \cdot S)}_{=[X, Y](f) \cdot S + f \cdot \nabla_{[X, Y]} S} \\
 &= X(Y(f)) \cdot S + Y(f) \nabla_X S + X(f) \cdot \nabla_Y S + f \cdot \nabla_X \nabla_Y S \\
 &\quad - (Y(X(f)) \cdot S + X(f) \nabla_Y S + Y(f) \cdot \nabla_X S + f \cdot \nabla_Y \nabla_X S) \\
 &\quad - X(Y(f)) + Y(X(f)) - f \nabla_{[X, Y]} S \\
 &= f \cdot R(X, Y)S
 \end{aligned}$$

## Lösung 2

Aufgrund des Levi-Civita Zusammenhangs gilt  $\nabla = \nabla^{2c}$ .

- a) *Behauptung:*  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

Aufgrund der  $C^\infty(M)$ -multilinearität genügt es die Behauptung für  $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$  und  $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$  zu zeigen. Daraus folgt  $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ .

$$\begin{aligned}
 &R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\
 &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y \\
 &= \nabla_X (\underbrace{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y}_{=[Y, Z] \text{ (da } \nabla \text{ torsionslos)} = 0}) + \nabla_Y (\underbrace{\nabla_Z X - \nabla_X Z}_{=[Z, X] = 0}) + \nabla_Z (\underbrace{\nabla_X Y - \nabla_Y X}_{=[X, Y] = 0}) = 0
 \end{aligned}$$

- b) Im Folgenden setzen wir  $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ , zu beweisen ist dann dass  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ .

Es genügt zu zeigen dass  $R(X, Y, U, U) = 0$  für alle  $X, Y$  ist, da  $R(X, Y, Z + W, Z + W) = R(X, Y, Z, Z) + R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) + R(X, Y, W, W)$  ist. Wir können annehmen, dass  $[X, Y] = 0$  gilt.

$$\begin{aligned}
 R(X, Y, U, U) &= g(\nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U, U) \\
 &= g(\nabla_X \nabla_Y U, U) - g(\nabla_Y \nabla_X U, U) \\
 &= X(g(\nabla_Y U, U)) - g(\nabla_Y U, \nabla_X U) - Y(g(\nabla_X U, U)) + g(\nabla_X U, \nabla_Y U) \\
 &= \frac{1}{2}(g(\nabla_Y U, U) + g(U, \nabla_Y U)) - \frac{1}{2}X(g(U, U)) \\
 &\quad = \frac{1}{2}Y(g(U, U)) \\
 &= \frac{1}{2}(X(Y(g(U, U))) - Y(X(g(U, U)))) = \frac{1}{2}[X, Y](g(U, U)) = 0
 \end{aligned}$$

- c) *behauptung:*  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

Nach a) gilt:

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0 \quad (\text{I})$$

$$R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) = 0 \quad (\text{II})$$

$$R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) + R(X, Z, W, Y) = 0 \quad (\text{III})$$

$$R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) = 0 \quad (\text{IV})$$

Addiert man die Gleichungen zu (I) - (III) + (II) - (IV) bleibt übrig:

$$2R(X, Y, Z, W) - 2R(Z, W, X, Y) = 0$$

### Lösung 3

*Behauptung:* Für den Levi-Civita Zusammenhang ist die Parallelverschiebung eine Isometrie.

Es sei  $c : I \rightarrow M$  und  $X_{c(0)}, Y_{c(0)} \in T_{c(0)} M$  mit  $X(t) = P_{0,t}^c X_{c(0)}$  und  $Y(t) = P_{0,t}^c Y_{c(0)}$ . Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) = g(\underbrace{\nabla_t X(t)}_{=0}, Y(t)) + g(X(t), \underbrace{\nabla_t Y(t)}_{=0}) = 0$$

und damit gilt dann

$$g(P_{0,t}^c X_{c(0)}, P_{0,t}^c Y_{c(0)}) = g(X_{c(0)}, Y_{c(0)})$$

## Übung 9 vom 7. Januar 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Berechnen Sie  $g_{ij}(p)$ ,  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p)$  und  $\Gamma_{ij}^k(p)$  in Riemannschen Normalkoordinaten um  $p$ .

**Hinweis:** Welche Form haben die Geodätischen durch  $p$  in dieser Karte?

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  und  $\mathbb{H}^n$  (siehe Blatt 6 Aufgaben 2 und 3).

### Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der  $n$ -Sphäre vom Radius  $r > 0$ , also von  $S^n$  mit der von  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$  induzierten Riemannschen Metrik.

**Hinweis:** Benutzen Sie, dass der Levi-Civita Zusammenhang auf  $S^n$  durch  $(\nabla_X Y)_p = ((DY)_p \cdot X_p)^{T_p S^n}$  gegeben ist.

### Lösung 1

Nach der Vorlesung gibt es einen Diffeomorphismus

$$\exp_p : \underbrace{U(0)}_{\subset T_p M} \rightarrow \underbrace{U(p)}_{\subset M}$$

Seien  $e_1, \dots, e_n \in T_p M$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$  und sei  $\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) := \exp_p(x_1 e_1, \dots, x_n e_n)$  definiert.

**Behauptung:**

- (i)  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$
- (ii)  $\frac{d}{dx^2}(g_{ij})(p) = 0$
- (iii)  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$

**Beweis:**

- (i)

$$g_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$\begin{matrix} \text{=} \exp_{p*}(e_i) & \text{=} \exp_{p*}(e_j) \\ \text{=} \text{id} \end{matrix}$

$\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$  ist die Geodätische die in  $p$  in Richtung  $v$  startet.

*Beweis:* Es sei  $c_v$  die Geodätische mit  $c_v(0) = p$ ,  $\dot{c}_v(0) = v$ , sowie  $c_{\lambda v}$  die Geodätische mit  $c_{\lambda v}(0) = p$ ,  $\dot{c}_{\lambda v}(0) = \lambda v$ , wobei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definiere nun  $\gamma(t) := c_v(\lambda t)$ . Dann ist  $\gamma(t) = c_{\lambda v}(t)$ , denn:



- $\gamma(0) = c_v(0) = p$
- $\dot{\gamma}(0) = \lambda \cdot \dot{c}_v(0) = \lambda v$
- $\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)$   
 $= \lambda^2 \left( \ddot{c}_v^k(\lambda t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c_v(\lambda t)) \dot{c}_v^i(\lambda t) \dot{c}_v^j(\lambda t) \right)$   
 $= 0$

Betrachte also

$$c_v(t) = c_v(t \cdot 1) = c_{tv}(1) = \exp_p(t \cdot v)$$

Die Geodätischen durch  $p$  werden also von den Normalkoordinaten auf die Ursprungsgeraden abgebildet. Setze  $\gamma(t) = t \cdot e_{i_0}$ , dann ist  $\exp_p \circ \gamma$  eine Geodätische und damit gilt für alle  $k$ :

$$0 = \ddot{\gamma}^k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0 + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \delta_{i i_0} \delta_{j i_0} = \Gamma_{i_0 i_0}^k \circ \gamma$$

**Beweis:**

(iii) Nun sei  $i_0 \neq j_0$  und  $\tilde{\gamma}(t) = t(e_{i_0} + e_{j_0})$ , damit ist  $\exp_p \circ \tilde{\gamma}$  eine Geodätische und für alle  $k$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\tilde{\gamma}}^k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{\tilde{\gamma}}^i \dot{\tilde{\gamma}}^j = 0 + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k (\delta_{i i_0} + \delta_{i j_0}) (\delta_{j i_0} + \delta_{j j_0}) \\ &= \left( \Gamma_{i_0 i_0}^k + \Gamma_{j_0 j_0}^k + \Gamma_{i_0 j_0}^k + \Gamma_{j_0 i_0}^k \right) \circ \gamma \end{aligned}$$

In 0 gilt  $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$ , also  $\Gamma_{ij}^k(\gamma(0)) = 0$ . Daraus folgt dann:

$$0 = \Gamma_{i_0 j_0}^k(\tilde{\gamma}(0)) + \Gamma_{j_0 i_0}^k(\tilde{\gamma}(0)) = 2\Gamma_{i_0 j_0}^k(p)$$

Damit folgt schließlich  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$  für alle  $i, j, k$ .

(ii)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_p &= \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p \left( g \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) \right) \\ &= g \left( \left. \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) + g \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) \\ &= g \left( \sum_l \Gamma_{ki}^l(p) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^l} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) + g \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \sum_l \underbrace{\Gamma_{kj}^l(p)}_{=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^l} \right|_p \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

## Lösung 2

a) *Behauptung:*  $\sec(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) \equiv 0$

Es gilt  $\nabla_X Y = D Y \cdot X$  und, wegen Torsionsfreiheit,  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = D Y \cdot X - D X \cdot Y$ . Nun gilt

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

Bevor wir fortfahren benötigen wir noch eine Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
 & (D(DZ \cdot Y) \cdot X - D(DZ \cdot X) \cdot Y)_i \\
 &= \sum_l (D(DZ \cdot Y))_{il} \cdot X_l - \sum_l (D(DZ \cdot X))_{il} \cdot Y_l \\
 &= \sum_l \partial_l ((DZ \cdot Y)_i) \cdot X_l - \sum_l \partial_l (DZ \cdot X)_i \cdot Y_l \\
 &= \sum_l \partial_l \left( \sum_m \underbrace{(DZ)_{im}}_{=\partial_m Z_i} \cdot Y_m \right) \cdot X_l - \sum_l \partial_l \left( \sum_m (DZ)_{im} \cdot X_m \right) \cdot Y_l \\
 &= \sum_{lm} (\partial_l (\partial_m Z_i \cdot Y_m) \cdot X_l - \partial_l (\partial_m Z_i \cdot X_m) \cdot Y_l) \\
 &= \sum_{lm} (\partial_l \partial_m Z_i Y_m X_l + \partial_m Z_i \partial_l Y_m X_l - \underbrace{\partial_l \partial_m Z_i}_{=\partial_m \partial_l Z_i} X_m Y_l + \partial_m Z_i \partial_l X_m Y_l) \\
 &= \sum_m \partial_m Z_i \cdot (DY \cdot X)_m - \sum_m \partial_m Z_i (DX \cdot Y)_m \\
 &= (DZ \cdot (DY \cdot X) - DZ \cdot DX \cdot Y)_i \\
 &= (DZ \cdot (DY \cdot X - DX \cdot Y))_i
 \end{aligned}$$

Mit dieser Nebenrechnung folgern wir schließlich  $R(X, Y)Z = 0$  und daraus folgt letztendlich

$$\sec(\text{span}\{X, Y\}) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = 0$$

- b) Wir berechnen die Komponenten  $R_{ijkl} = R(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}) = g(R(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}) \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \frac{\partial}{\partial \xi^l})$  in der Karte  $\varphi$  aus Aufgabe 6.3. In dieser Karte gilt  $g = \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \sum_i d\xi^i \otimes d\xi^i$ ,

also  $g_{ij} = \delta_{ij} \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}$ .

Für die Ableitungen der Metrik gilt dann:

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = 16\delta_{ij} \frac{\xi^k}{(1-\|\xi\|^2)^3}.$$

Die Koeffizienten der zu  $(g_{ij})$  inversen Matrix sind  $g^{kl} = \delta_{kl} \frac{(1-\|\xi\|^2)^2}{4}$ . Damit gilt für die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (g_{jl,i} - g_{ij,l} + g_{li,j}) = \frac{2}{1-\|\xi\|^2} (\delta_{jk} \xi^i - \delta_{ij} \xi^k + \delta_{ki} \xi^j).$$

Für die Ableitungen gilt also:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi^l} (\Gamma_{ij}^k) &= \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left( \frac{2}{1-\|\xi\|^2} \right) (\delta_{jk} \xi^i - \delta_{ij} \xi^k + \delta_{ki} \xi^j) + \frac{2}{1-\|\xi\|^2} \frac{\partial}{\partial \xi^l} (\delta_{jk} \xi^i - \delta_{ij} \xi^k + \delta_{ki} \xi^j) \\
 &= \frac{4\xi^l}{(1-\|\xi\|^2)^2} (\delta_{jk} \xi^i - \delta_{ij} \xi^k + \delta_{ki} \xi^j) + \frac{2}{1-\|\xi\|^2} (\delta_{jk} \delta_{li} - \delta_{ij} \delta_{lk} + \delta_{ki} \delta_{lj}).
 \end{aligned}$$

Nun können wir die Koeffizienten des Krümmungstensors berechnen. Es gilt :

$$\begin{aligned}
 R\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) \frac{\partial}{\partial \xi^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \frac{\partial}{\partial \xi^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \frac{\partial}{\partial \xi^k} - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}]} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \\
 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \left( \sum_l \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \left( \sum_l \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right) \\
 &= \sum_l \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial}{\partial \xi^l} + \Gamma_{jk}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \frac{\partial}{\partial \xi^l} - \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\Gamma_{ik}^l) \frac{\partial}{\partial \xi^l} - \Gamma_{ik}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right) \\
 &= \sum_l \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial}{\partial \xi^l} - \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\Gamma_{ik}^l) \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right) + \sum_{l,m} \left( \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^m \frac{\partial}{\partial \xi^m} - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^m \frac{\partial}{\partial \xi^m} \right) \\
 &= \sum_l \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\Gamma_{jk}^l) - \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\Gamma_{ik}^l) + \sum_{\alpha} (\Gamma_{jk}^{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^l - \Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^l) \right) \frac{\partial}{\partial \xi^l} =: \sum_l R_{ijk}{}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 R_{ijk}{}^l &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \left( \xi^i (\delta_{kl} \xi^j - \delta_{jk} \xi^l + \delta_{lj} \xi^k) - \xi^j (\delta_{kl} \xi^i - \delta_{ik} \xi^l + \delta_{li} \xi^k) \right. \\
 &\quad + \frac{1-\|\xi\|^2}{2} ((\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{lj} \delta_{ik}) - (\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{li} \delta_{jk})) \\
 &\quad + \sum_{\alpha} ((\delta_{k\alpha} \xi^j - \delta_{jk} \xi^{\alpha} + \delta_{\alpha j} \xi^k) (\delta_{\alpha l} \xi^i - \delta_{i\alpha} \xi^l + \delta_{li} \xi^{\alpha}) \\
 &\quad \left. - (\delta_{k\alpha} \xi^i - \delta_{ik} \xi^{\alpha} + \delta_{\alpha i} \xi^k) (\delta_{\alpha l} \xi^j - \delta_{j\alpha} \xi^l + \delta_{lj} \xi^{\alpha})) \right) \\
 &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \left( -\delta_{jk} \xi^i \xi^l + \delta_{lj} \xi^i \xi^k + \delta_{ik} \xi^j \xi^l - \delta_{li} \xi^j \xi^k \right. \\
 &\quad + \frac{1-\|\xi\|^2}{2} (-\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) \\
 &\quad + \sum_{\alpha} ((\delta_{k\alpha} \delta_{\alpha l} \xi^i \xi^j - \delta_{k\alpha} \delta_{i\alpha} \xi^j \xi^l + \delta_{k\alpha} \delta_{lj} \xi^i \xi^{\alpha} \\
 &\quad - \delta_{jk} \delta_{\alpha l} \xi^i \xi^{\alpha} + \delta_{jk} \delta_{i\alpha} \xi^l \xi^{\alpha} - \delta_{jk} \delta_{li} (\xi^{\alpha})^2 \\
 &\quad + \delta_{\alpha j} \delta_{\alpha l} \xi^i \xi^k - \delta_{\alpha j} \delta_{i\alpha} \xi^k \xi^l + \delta_{\alpha j} \delta_{li} \xi^k \xi^{\alpha}) \\
 &\quad - (\delta_{k\alpha} \delta_{\alpha l} \xi^i \xi^j - \delta_{k\alpha} \delta_{j\alpha} \xi^i \xi^l + \delta_{k\alpha} \delta_{lj} \xi^i \xi^{\alpha} \\
 &\quad - \delta_{ik} \delta_{\alpha l} \xi^j \xi^{\alpha} + \delta_{ik} \delta_{j\alpha} \xi^l \xi^{\alpha} - \delta_{ik} \delta_{lj} (\xi^{\alpha})^2 \\
 &\quad \left. + \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha l} \xi^j \xi^k - \delta_{\alpha i} \delta_{j\alpha} \xi^k \xi^l + \delta_{\alpha i} \delta_{lj} \xi^k \xi^{\alpha})) \right) \\
 &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \left( -\delta_{jk} \xi^i \xi^l + \delta_{lj} \xi^i \xi^k + \delta_{ik} \xi^j \xi^l - \delta_{li} \xi^j \xi^k + (1-\|\xi\|^2) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) \right. \\
 &\quad + \sum_{\alpha} ((\delta_{kl} \xi^i \xi^j - \delta_{ik} \xi^j \xi^l + \delta_{li} \xi^j \xi^k - \delta_{jk} \xi^i \xi^l + \delta_{jk} \xi^l \xi^i - \delta_{jk} \delta_{li} \|\xi\|^2 + \delta_{jl} \xi^i \xi^k - \delta_{ij} \xi^k \xi^l + \\
 &\quad \left. - (\delta_{kl} \xi^i \xi^j - \delta_{jk} \xi^i \xi^l + \delta_{lj} \xi^i \xi^k - \delta_{ik} \xi^j \xi^l + \delta_{ik} \xi^l \xi^j - \delta_{ik} \delta_{lj} \|\xi\|^2 + \delta_{il} \xi^j \xi^k - \delta_{ij} \xi^k \xi^l + \right. \\
 &\quad \left. (1-\|\xi\|^2) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) + \|\xi\|^2 (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) \right) \\
 &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk})
 \end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= g\left(\sum_m R_{ijk}{}^m \frac{\partial}{\partial \xi^m}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}\right) = \sum_m R_{ijk}{}^m g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^m}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}\right) \\
 &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} R_{ijk}{}^l = \frac{16}{(1-\|\xi\|^2)^4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}).
 \end{aligned}$$

Für linear unabhängige  $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ ,  $Y = \sum Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j} \in T_p \mathbb{H}^n$  gilt dann

$$\begin{aligned}
 R(X, Y, Y, X) &= \sum_{i,j,k,l} X_i X_l Y_j Y_k R\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}\right) \\
 &= \sum_{i,j,k,l} X_i X_l Y_j Y_k \frac{16}{(1-\|\xi\|^2)^4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) \\
 &= \sum_{i,j} X_i X_j Y_j Y_i \left(\frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\right)^2 - \sum_{i,j} X_i^2 Y_j^2 \left(\frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\right)^2 \\
 &= \sum_{i,j} X_i X_j Y_j Y_i g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) - \sum_{i,j} X_i^2 Y_j^2 g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) \\
 &= \left(\sum_i g\left(X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, Y_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)\right) \left(\sum_j g\left(X_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}, Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right)\right) \\
 &\quad - \left(\sum_i g\left(X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)\right) \left(\sum_j g\left(Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}, Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right)\right) \\
 &= g(X, Y)^2 - \|X\|^2 \|Y\|^2 = -(\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2).
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sec(\text{span}\{X, Y\}) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2} = -1.$$

### Lösung 3

Sei  $S^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$ , *Behauptung*:  $\sec_{S^n(r)} \equiv \frac{1}{r^2}$

Sei  $\nabla = \nabla S^n(r)$  der Levi-Civita Zusammenhang von  $(S^n(r), g_{\text{ind}})$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X Y)_p &= \left( (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p \right) T_p S^n(r) \\
 &= (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p - \langle (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p, N(p) \rangle \cdot N(p)
 \end{aligned}$$

wobei  $N(p) = \frac{1}{r} \cdot p$  das Normaleneinheitsvektorfeld an  $S^n(r)$  ist. Betrachte nun

$$\begin{aligned}
 \langle (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p, N(p) \rangle &= \underbrace{X_p \langle \overbrace{Y, N}^{\equiv 0} \rangle}_{=0} - \langle Y_p, (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} N)_p \rangle \\
 &= -\langle Y_p, \underbrace{(D N)_p}_{\frac{1}{r} \cdot \text{id}} \cdot X_p \rangle \\
 &= -\frac{1}{r} \langle Y_p, X_p \rangle
 \end{aligned}$$

Daraus folgt dann  $\nabla_X Y = \nabla_X^{R^{n+1}} Y + \frac{1}{r} \langle X, Y \rangle N$ . Als nächstes betrachten wir nun:

$$\begin{aligned}
 R^{S^n(r)}(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
 &= \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} (\nabla_Y Z) + \frac{1}{r} \langle X, \nabla_Y Z \rangle \cdot N \\
 &\quad - \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} (\nabla_X Z) - \frac{1}{r} \langle Y, \nabla_X Z \rangle \cdot N \\
 &\quad - \nabla_{[X, Y]}^{\mathbb{R}^{n+1}} Z - \frac{1}{r} \langle [X, Y], Z \rangle \cdot N \\
 &= \overbrace{R^{\mathbb{R}^{n+1}}(X, Y)Z}^{=0} + \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \left( \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \cdot N \right) + \frac{1}{r} \langle X, \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} Z + \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \cdot \overset{\perp X}{N} \rangle N \\
 &\quad - \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} \left( \frac{1}{r} \langle X, Y \rangle N \right) - \frac{1}{r} \langle Y, \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Z + \frac{1}{r} \langle X, Z \rangle \cdot \overset{\perp Y}{N} \rangle \cdot N \\
 &\quad - \frac{1}{r} \langle \underbrace{[X, Y]}_{=DY \cdot X - DX \cdot Y} Z \rangle \cdot N \\
 &= X \left( \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \right) N + \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} N + \frac{1}{r} \langle X, DY \cdot Z \cdot Y \rangle \cdot N \\
 &\quad - Y \left( \frac{1}{r} \langle X, Z \rangle \right) \cdot N - \frac{1}{r} \langle X, Z \rangle \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} N - \frac{1}{r} \langle Y, DX \cdot Z \cdot X \rangle \cdot N - \frac{1}{r} \langle DY \cdot X \\
 &\quad - DX \cdot Y, Z \rangle \cdot N \\
 &= \frac{1}{r} (\langle DY \cdot X, Z \rangle + \langle Y, DX \cdot Z \cdot X \rangle) \cdot N + \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \overset{=\frac{1}{r} \cdot \text{id}}{\widehat{DX}} \cdot X + \langle X, DY \cdot Z \cdot Y \rangle \cdot N \\
 &\quad - \frac{1}{r} (\langle DX \cdot Y, Z \rangle + \langle X, DY \cdot Z \cdot X \rangle) \cdot N - \frac{1}{r^2} \langle XZ \rangle \cdot Y + \langle Y, DX \cdot Z \cdot X \rangle \cdot N \\
 &\quad - \frac{1}{r} \langle DY \cdot X - DX \cdot Y, Z \rangle \cdot N \\
 &= \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle \cdot X - \langle X, Z \rangle \cdot Y)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\langle D(X, Y)Y, X \rangle = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Y \rangle \langle X, X \rangle - \langle X, Y \rangle^2)$$

und damit folgt dann schließlich

$$\sec_{S^n(r)}(\{X, Y\}) = \frac{1}{r^2}$$

## Übung 10 vom 14. Januar 2012

Übungsblatt 10 enthielt keine Aufgaben, deshalb befassen wir uns hier mit den Geodätischen von  $\mathbb{H}^2$ . Wir betrachten zunächst die folgenden drei bisherigen Modelle

**Hyperboloid:**  $\{x \in \mathbb{R}^{2+1} \mid \overbrace{-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}^{=\langle x, x \rangle} = -1, x_0 > 0\}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p \mathbb{H}^2 \times T_p \mathbb{H}^2}$  ist das Skalarprodukt.

**Poincare Kreisscheibenmodell:**  $D := \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \|\xi\| < 1\}$ ,  $g_D = \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \sum d\xi^i \otimes d\xi^i$

**Poincare obere Halbebene Modell:**  $H := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ ,  $g_H = \frac{1}{y^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$

**Isometrie zwischen  $D$  und  $H$ :** Betrachte  $D$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  mittels  $\psi : H \rightarrow D, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$

$$|\psi(z)|^2 = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \frac{z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1}{z\bar{z}-i(z-\bar{z})+1} = \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) + 1}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1} \stackrel{\operatorname{Im}(z) > 0}{<} 1$$

Definiere weiter  $\varphi : D \rightarrow H$  mit  $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \mapsto -i\frac{\xi+1}{\xi-1}$ . Dann folgt

$$\operatorname{Im}(\varphi(\xi)) = \frac{\overbrace{1-|\xi|^2}^{>0}}{\underbrace{|\xi|^2 - 2\operatorname{Re}(\xi) + 1}_{\geq (\operatorname{Re}(\xi)-1)^2 > 0}} > 0$$

Durch Nachrechnen ergibt sich  $\varphi \circ \psi = \operatorname{id}$  und  $\psi \circ \varphi = \operatorname{id}$ . Da  $\varphi$  und  $\psi$  holomorph sind, folgt dass sie auf  $C^\infty$  glatt sind. Wir zeigen schließlich dass  $\psi$  eine Isometrie ist. Dazu fassen wir  $\psi$  als reelle Funktion auf:

$$\psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Da  $\psi$  holomorph ist erfüllt  $\psi$  auch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$$

Es sei  $p = (x, y) \in H$  und sei  $ye_1, ye_2$  eine Orthonormalbasis von  $T_p H$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_D(\psi_{*p}(ye_1), \psi_{*p}(ye_2)) &= y^2 g_D\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \\ &= \frac{4y^2}{(1 - \|\psi\|^2)^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right) \\ &= 0 \\ g_D(\psi_{*p}(ye_1), \psi_{*p}(ye_1)) &= \frac{4y^2}{(1 - \|\psi\|^2)^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right)^2\right) \\ &= \dots = 1 \\ g_D(\psi_{*p}(ye_2), \psi_{*p}(ye_2)) &= \dots = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt dass  $\psi_*$  eine Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis abbildet und daher ist  $\psi$  eine Isometrie.

**Isometrien von  $H$**  Zu  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $ad - bc > 0$  betrachte

$$h(z) = \frac{az + b}{bz + d} \qquad ((\text{spezielle}) \text{ Möbiustransformation})$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(h(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2}\right) \\ &= \frac{(ad - bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0 \end{aligned} \qquad (\text{für } z \in H)$$

Es gilt somit  $h : H \rightarrow H$ , sowie

$$h^{-1}(z) = \frac{1}{ad-bc} \cdot \frac{dz-b}{-cz+a} \quad (\text{nachrechnen})$$

Daraus folgt dass  $h$  ein Diffeomorphismus ist. Für  $v \in T_z H$  und  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  gilt:

$$\begin{aligned} h_{*z}V = Dh|_zV &= \begin{pmatrix} v_1 \frac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial y} \\ v_1 \frac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial y} \end{pmatrix} \stackrel{\text{C-R}}{\underset{\text{DGL}}{=}} \begin{pmatrix} v_1 \lambda - v_2 \mu \\ v_2 \mu + v_1 \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial x} =: \lambda \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial x} =: \mu \end{array} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}((\lambda + i\mu)(v_1 + iv_2)) \\ \operatorname{Im}((\lambda + i\mu)(v_1 + iv_2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(h'(z) \cdot (v_1 + iv_2)) \\ \operatorname{Im}(h'(z) \cdot (v_1 + iv_2)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für  $v, w \in T_z H$  gilt:

$$\begin{aligned} g_H(v, w) &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} (v_1 w_1 + v_2 w_2) \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} \operatorname{Re}(\underbrace{(v_1 + iv_2)}_{=: \tilde{v}} \overline{\underbrace{(w_1 + iw_2)}_{=: \tilde{w}}}) \end{aligned}$$

Es ist

$$h'(x) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} g_H|_{h(z)}(h_{*z}v, h_{*z}w) &= \frac{1}{(\operatorname{Im}(h(z)))^2} \cdot \operatorname{Re}(h'(z) \tilde{v} \overline{h'(z) \tilde{w}}) \\ &= \frac{|h'(z)|^2}{\operatorname{Im}(h(z))^2} \cdot \operatorname{Re}(\tilde{v} \tilde{w}) = \frac{|h'(z)|^2}{\operatorname{Im}(h(z))^2} \cdot g_h|_z(v, w) \end{aligned}$$

Wobei  $\operatorname{Im}(h(z)) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \cdot \operatorname{Im}(z) = |h'(z)| \cdot \operatorname{Im}(z)$  gilt, daraus folgt dass  $h$  eine Isometrie ist.

**Beispiel** (1) Für  $w \in H$  ist

$$h_w(z) = \frac{\operatorname{Im}(w) \cdot z + \operatorname{Re}(w)}{0 \cdot z + 1} = \operatorname{Im}(w) \cdot z + \operatorname{Re}(w)$$

eine Isometrie von  $H$ , da  $\operatorname{Im}(w) > 0$  und  $h_w(i) = \operatorname{Im}(w)i + \operatorname{Re}(w) = w$ . Daraus folgt dass es genügt die Geodätischen durch  $i$  zu betrachten.

(2) Für  $\theta \in \mathbb{R}$  ist

$$h_\theta = \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$$

Eine Isometrie von  $H$  mit

$$h_\theta(i) = i \frac{\cos(\theta) - \frac{1}{i} \sin(\theta)}{\sin(\theta)i + \cos(\theta)} = i$$

und

$$h'_\theta(i) = \frac{1}{(\sin(\theta)i + \cos(\theta))^2} = e^{-2i\theta}$$

Für  $v \in T_i H$  mit  $\|v\| = 1$  können wir also  $\theta \in \mathbb{R}$  wählen mit  $h_{\theta*}e_2 = v$ . Daraus folgt dass es genügt die Geodätischen  $\gamma$  mit  $\gamma(0) = i$  und  $\dot{\gamma}(0) = e_2$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned} g_{ij,1} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} = \delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y^2} \right) = 0 \\ g_{ij,2} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial y} = \delta_{ij} \cdot \frac{-2}{y^3} \\ g_{kl} &= y^2 \cdot \delta_{kl} \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{kl} (g_{jl,i} - g_{ij,l} + g_{il,j}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

alle Anderen sind „= 0“. Die geodätische Differentialgleichung lautet  $\ddot{\gamma}^k + \sum_{ij} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma}^i \cdot \dot{\gamma}^j = 0$ . Daraus folgt

$$\ddot{\gamma}^1 - \frac{2}{\gamma^2} \dot{\gamma}^1 \cdot \dot{\gamma}^2 = 0 \quad \ddot{\gamma}^2 - \frac{1}{\gamma^2} ((\dot{\gamma}^2)^2 - (\dot{\gamma}^1)^2) = 0$$

*Ansatz:*  $\gamma^1 \equiv 0$  (erfüllt die erste Gleichung)  $\rightsquigarrow \ddot{\gamma}^2 = \frac{1}{\gamma^2} (\dot{\gamma}^2)^2$

*Lösung:*  $\gamma^2(t) = e^t$

Damit ist  $\gamma(t) = ie^t$  die Geodätische durch  $i$  mit der Startrichtung  $e_2$ . Die anderen Geodätischen, die in  $i$  starten sind von der Form

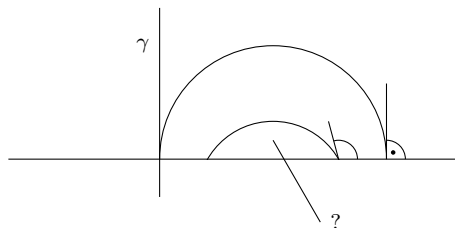
$$h_\theta(\gamma(t)) = \frac{\cos(\theta)ie^t - \sin(\theta)}{\sin(\theta)ie^t + \cos(\theta)}$$

Möbiustransformationen bilden Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab.

Damit ist  $\gamma_\theta = h_\theta \circ \gamma$  eine Gerade oder ein Kreis.

$$\gamma_\theta(t) \rightarrow \begin{cases} -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \text{für } t \rightarrow -\infty \\ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} & \text{für } t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Für  $\sin \theta, \cos \theta \neq 0$  ergibt sich:

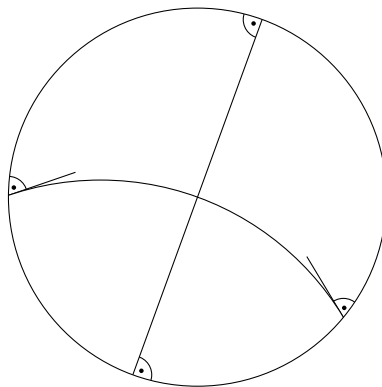




Es ist

$$\frac{\dot{\gamma}_\theta(t)}{|\dot{\gamma}_\theta(t)|} = \dots = \frac{i \cos \theta + e^t \sin \theta}{\cos \theta + i e^t \sin \theta} \rightarrow \begin{cases} i & \text{für } t \rightarrow -\infty \\ -i & \text{für } t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Also schneidet der Kreis die  $\mathbb{R}$ -Achse im rechten Winkel und damit liegt der Mittelpunkt in  $\mathbb{R}$ :  $\frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)$ . Wegen  $h_w(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  gilt das Gleiche für alle Geodätischen.



## Übung 11 vom 21. Januar 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $\kappa \in \mathbb{R}$  und

$$C_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ 1 & \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases} \quad S_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ t & \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

Es sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\gamma$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Für alle  $t$  und jede Ebene  $P \leq T_{\gamma(t)} M$  mit  $\dot{\gamma}(t) \in P$  gelte  $\sec(P) = \kappa$ .

Zeigen Sie, dass jedes orthogonale Jacobivektorfeld  $J$  längs  $\gamma$  die Form

$$J(t) = C_\kappa(t)A(t) + S_\kappa(t)B(t)$$

mit parallelen Vektorfeldern  $A, B$  längs  $\gamma$  hat.

### Aufgabe 2

Es sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung  $\kappa \in \mathbb{R}$  und  $p \in M$ . Zeigen Sie, dass es genau dann zu  $p$  konjugierte Punkte gibt, wenn  $\kappa > 0$  gilt.

### Lösung 1

*Erinnerung:* Definition von Jacobifeldern

$$\ddot{J}(t) + (R(\mathcal{J}, \dot{\gamma})\dot{\gamma})(t) = 0 \quad (\text{Jacobi-Gleichung})$$

(Vektorfelder von Variationen durch Geodätische)

$$\begin{aligned}\langle \ddot{\mathcal{J}}, \mathcal{J} \rangle &= -R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \mathcal{J}) \\ &= -\sec(\{\mathcal{J}, \dot{\gamma}\}) \cdot (\|\mathcal{J}\|^2 \underbrace{\|\dot{\gamma}\|^2}_{=0} - \langle \mathcal{J}, \dot{\gamma} \rangle^2) \\ &= -\kappa \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle\end{aligned}$$

Wir möchten nun zeigen dass  $\ddot{\mathcal{J}} = -\kappa \mathcal{J}$  gilt. Es sei  $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = \dot{\gamma}(t)$  eine Orthonormalbasis von  $T_{\gamma(t)} M$ . Daraus folgt  $0 = R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_n)$  und  $0 = \langle \mathcal{J}, e_n \rangle$ . Für  $i < n$  gilt:

$$R(\mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J} + e_i) = \kappa \cdot (\underbrace{\|\mathcal{J} + e_i\|^2}_{=1} \cdot \underbrace{\|\dot{\gamma}\|^2}_{=0} - \underbrace{\langle \mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma} \rangle^2}_{=0}) = \kappa \cdot \|\mathcal{J} + e_i\|^2$$

und

$$\begin{aligned}R(\mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J} + e_i) &= R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J}) + R(e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) + 2R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) \\ &= \kappa \cdot (\|\mathcal{J}\|^2 + \|e_i\|^2) + 2R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) = \frac{1}{2} \kappa (\|\mathcal{J} + e_i\|^2 - \|\mathcal{J}\|^2 - \|e_i\|^2) = \kappa \langle \mathcal{J}, e_i \rangle$$

und damit gilt  $R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \kappa \cdot \mathcal{J}$  und damit wird die Jacobi-Gleichung zu  $\ddot{\mathcal{J}} = -\kappa \mathcal{J}$ . Setze  $A(0) = \mathcal{J}(0)$  und  $B(0) = \dot{\mathcal{J}}(0)$  parallel fort zu  $A(t)$  und  $B(t)$  und definiere  $\tilde{\mathcal{J}}(t) = C_\kappa(t) \cdot A(t) + S_\kappa(t) \cdot B(t)$ . Betrachte nun:

$$\frac{D}{dt} \triangleq \nabla_t$$

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt} \tilde{\mathcal{J}} &= C'_\kappa A + C_\kappa \underbrace{\frac{D}{dt} A}_{=0} + S'_\kappa B + S_\kappa \underbrace{\frac{D}{dt} B}_{=0} = C'_\kappa A + S'_\kappa B \\ \ddot{\mathcal{J}} &= C''_\kappa A + S''_\kappa B\end{aligned}$$

Es gilt:

$$C''_\kappa = -\kappa C_\kappa \qquad S''_\kappa = -\kappa S_\kappa$$

Daraus folgt  $\ddot{\tilde{\mathcal{J}}} = -\kappa \tilde{\mathcal{J}}$  und damit  $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$  (eindeutige Lösung zu gegebenen  $\mathcal{J}(0)$ ,  $\dot{\mathcal{J}}(0)$ ). Der Beweis zeigt, dass parallele  $A, B \perp \dot{\gamma}$  ein Jacobifeld definieren.

## Lösung 2

**k > 0:** Sei  $v \in T_p M$  mit  $\|v\| = 1$  und  $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ . Da  $M$  vollständig ist, ist  $\gamma$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Es sei  $B(0) \in v^\perp$  und  $B$  die parallele Fortsetzung längs  $\gamma$ . Setze  $\mathcal{J}(t) = S_\kappa(t) \cdot B(t)$ . Daraus folgt dass  $\mathcal{J}$  ein Jacobifeld ist mit  $\mathcal{J}(0) = \underbrace{S_\kappa(0)}_{=0} B(0) = 0$  und

$$\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right) = \frac{1}{\kappa} \sin(\pi) \cdot B\left(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right) = 0$$

Daraus folgt dass  $p$  und  $\gamma(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$  konjugiert sind.

$k \leq 0$ : Angenommen  $p$  und  $q$  sind konjugiert längs  $\gamma$  (mit  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ ). Es sei  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(t_0) = q$  mit  $t_0 \geq 0$ . Dann gibt es ein Jacobifeld  $\mathcal{J} \neq 0$  längs  $\gamma$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0 = \mathcal{J}(t_0)$  und damit ist  $\mathcal{J}$  orthogonal. Nach Aufgabe 1 gilt  $\mathcal{J} = C_\kappa \cdot A + S_\kappa \cdot B$ . Es gilt:

$$0 = \mathcal{J}(0) = C_\kappa(0) \cdot A(0) + S_\kappa(0) \cdot B(0) = A(0)$$

Da  $A$  parallel ist gilt  $A \equiv 0$  und daraus folgt

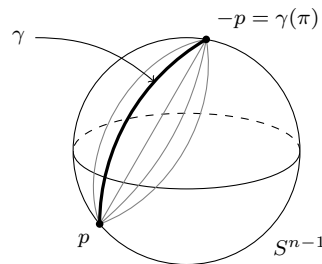
$$0 = \mathcal{J}(t_0) = \underbrace{S_\kappa(t_0)}_{=0} \cdot B(t_0) > 0$$

$$= \begin{cases} t_0 & \text{falls } k=0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh(\sqrt{|\kappa|}t_0) & \text{falls } k<0 \end{cases}$$

Daraus folgt  $B(t_0) = 0$  und, da  $B$  parallel ist,  $B \equiv 0$ . Also ist  $\mathcal{J} \equiv 0$ , was einen Widerspruch darstellt.  $\nmid$

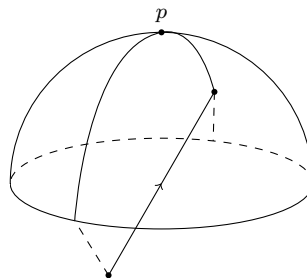
**Bemerkung** Der Beweis von Aufgabe 2 zeigt: Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\sec \equiv \kappa > 0$  hat Durchmesser  $\leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \text{diam}(S^n(\sqrt{\kappa}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{\kappa}\})$

**Beispiel** (1)  $S^n, \sec \equiv 1$ ;  $p$  und  $-p$  sind konjugiert:



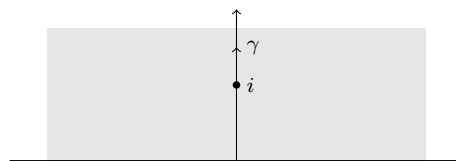
und  $p$  ist zudem zu sich selbst konjugiert ( $\mathcal{J}(2\pi) = 0$ ), und dies sind alle zu  $p$  konjugierten Punkte.

(2)  $\mathbb{RP}^n = S^n/q \sim (-q)$  mit der von  $S^n$  induzierten Metrik  $\rightsquigarrow [p] = [-p]$ . Daraus folgt dass  $[p]$  der einzige zu  $p$  konjugierte Punkt ist.



(3)  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  parallele Vektorfelder = konstante Vektorfelder. Damit haben die Jacobifelder die Form  $\mathcal{J}(t) = A + tB$ . (mit  $A, B \in \mathbb{R}^n$ )

(4)  $\mathbb{H}^2$



$\gamma(t) = ie^t$  Geodätische (letzte Übung)

$$\dot{\gamma}(t) = e^t \frac{\partial}{\partial y} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sei  $A$  ein paralleles Vektorfeld längs  $\gamma$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \nabla_t A = \nabla_t \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \nabla_t \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla_t \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \end{pmatrix} \\ &= A'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 \cdot \nabla_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A'_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \nabla_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{pmatrix} + A_1 \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \nabla_{\dot{\gamma}} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{pmatrix} + e^t A_1 \begin{pmatrix} \overbrace{\Gamma_{21}^1(\gamma(t))}^{=-\frac{1}{\gamma^2(t)} = -\frac{1}{e^t}} \\ \underbrace{\Gamma_{21}^2(\gamma(t))}_{=0} \end{pmatrix} + e^t A_2 \begin{pmatrix} \overbrace{\Gamma_{22}^1(\gamma(t))}^{=0} \\ \underbrace{\Gamma_{22}^2(\gamma(t))}_{=\frac{1}{e^t}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A'_1 - A_1 \\ A'_2 + A_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $A_1(t) = A_1(0) \cdot e^t$  und  $A_2(t) = A_2(0) \cdot e^{-t}$ .

## Übung 12 vom 28. Januar 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ ,  $\|v\| = 1$  und  $w \in T_p M$  mit  $\|w\| = 1$  und  $\langle v, w \rangle = 0$ . Es sei  $J$  das durch

$$J(t) = (\exp_p)_{*tv} tw \in T_{\gamma(t)} M$$

gegebene Jacobivektorfeld längs  $\gamma$  und  $\sigma = \text{span}\{v, w\}$ . Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung von  $|J(t)|$  gegeben ist durch

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6} \sec(\sigma) t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

**Hinweis:** Berechnen Sie zunächst die Entwicklung von  $|J(t)|^2$  und zeigen Sie hierfür die Identität  $\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0)$ .

### Aufgabe 2

Es seien  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow M$  zwei Geodätische mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: p$ , deren Ableitungen  $v := \dot{\gamma}_1(0)$  und  $w := \dot{\gamma}_2(0)$  normiert und linear unabhängig seien. Weiter sei  $L(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ .

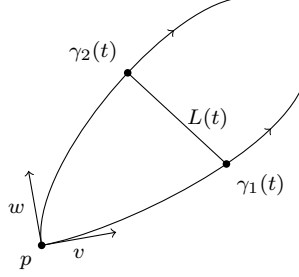
Zeigen Sie, dass

$$L(t) = t\|v - w\| - \frac{1}{12} \sec(\text{span}\{v, w\})\|v - w\|(1 + \langle v, w \rangle)t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

gilt.

**Hinweis:** Betrachten Sie die Variation  $(t, s) \mapsto \exp(s \exp_{\gamma_1(t)}^{-1}(\gamma_2(t)))$ .

Skizze:



### Lösung 1

Offensichtlich gilt  $\mathcal{J}(0) = 0$ . Außerdem gilt nach der Kettenregel für die Ableitung

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\exp_p(t(v + sw))) = (\exp_p)_{*tv}(tw) = \mathcal{J}(t)$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(0) &= \nabla_t(\exp_{p*tv}(tw))|_0 = \nabla_t(t \cdot \exp_{p*tv}(w))|_0 \\ &= \exp_{p*tv}(w) + t \cdot \nabla_t(\exp_{p*tv}(w))|_0 \\ &= w \end{aligned}$$

Ferner gilt  $|\mathcal{J}(t)|^2 = \langle \mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t) \rangle$ . Wir betrachten nun die Ableitungen davon:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle'(0) &= 2\langle \mathcal{J}', \mathcal{J} \rangle(0) = 0 \\ \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle''(0) &= 2(\langle \mathcal{J}'', \mathcal{J} \rangle + \langle \mathcal{J}', \mathcal{J}' \rangle)(0) \\ &= 2\|w\|^2 = 2 \\ \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle'''(0) &= 2(\langle \mathcal{J}''', \mathcal{J} \rangle + \langle \mathcal{J}'', \mathcal{J}' \rangle + 2\langle \mathcal{J}', \mathcal{J}' \rangle)(0) \\ &= 6\langle \mathcal{J}'''(0), \mathcal{J}'(0) \rangle = -6\langle R(\dot{\gamma}(0), \underbrace{\mathcal{J}(0)}_{=0})\dot{\gamma}(0), \mathcal{J}'(0) \rangle = 0 \\ \mathcal{J}'''(0) &= \nabla_t(\mathcal{J}''(t))|_0 = \nabla_t(-R(\mathcal{J}, \dot{\gamma})\dot{\gamma})|_0 \\ &= \nabla_{\dot{\gamma}}(-R(\mathcal{J}, \dot{\gamma})\dot{\gamma}) \stackrel{\text{Hinweis}}{=} -R(\mathcal{J}', \dot{\gamma})\dot{\gamma}|_0 \\ &= -R(w, v)v \\ \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle^{(4)}(0) &= 2(\langle \mathcal{J}^{(4)}, \mathcal{J} \rangle + \langle \mathcal{J}''', \mathcal{J}' \rangle + 3(\langle \mathcal{J}''', \mathcal{J}' \rangle + \langle \mathcal{J}'', \mathcal{J}'' \rangle))(0) \\ &= 8\langle \mathcal{J}'''(0), \mathcal{J}'(0) \rangle = -8\langle R(w, v)v, w \rangle \\ &= -8\sec(\sigma) \end{aligned}$$

**Beweis des Hinweises** Für alle Vektorfelder  $W$  längs  $\gamma$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_t(R(\dot{\gamma}, \mathcal{J})\dot{\gamma}), w \rangle(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\langle R(\dot{\gamma}, \mathcal{J})\dot{\gamma}, w \rangle) - \underbrace{\langle R(\dot{\gamma}, \mathcal{J})\dot{\gamma}, \nabla_t w \rangle(0)}_{=0 \text{ in } 0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\langle R(\dot{\gamma}, w)\dot{\gamma}, \underbrace{\mathcal{J}}_{=0 \text{ in } 0} \rangle) \\ &= \langle \nabla_t(R(\dot{\gamma}, w)\dot{\gamma}), \mathcal{J} \rangle(0) + \langle R(\dot{\gamma}, w)\dot{\gamma}, \mathcal{J}' \rangle(0) \\ &= \langle R(\dot{\gamma}, \mathcal{J}')\dot{\gamma}, w \rangle(0) \end{aligned}$$

□

Aus den Ableitungen folgt nun

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(t)|^2 &= 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 + \frac{1}{4} \cdot (-8) \cdot \sec(\sigma) \cdot t^4 + o(t^4) \\ &= t^2 - \frac{1}{3} \sec(\sigma) t^4 + o(t^4) \end{aligned}$$

Es sei nun

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(t)| &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o(t^3) \\ |\mathcal{J}(t)|^2 &= a_0^2 + 2a_0 a_1 t + (2a_0 a_2 + a_1^2) t^2 + 2(a_0 a_3 + a_1 a_2) t^3 + (2a_3 a_1 + a_2^2) t^4 + o(t^4) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$a_0 = 0, \quad a_1^2 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{6} \sec(\sigma)$$

und es gilt  $a_1 = 1$  denn  $|\mathcal{J}(t)| \geq 0$ .

## Lösung 2

Sei  $\sigma = \text{span}\{v, w\}$  und  $V(t, s) := \exp_{\gamma_1(t)}(s \cdot \exp_{\gamma_1(t)}^{-1}(\gamma_2(t)))$ . Wir definieren desweiteren

$$T(t, s) := \frac{d}{ds}(V(t, s)) \quad S(t, s) := \frac{d}{dt}(V(t, s))$$

Die Abbildung  $c_t := s \mapsto V(t, s)$  ist eine Geodätische von  $\gamma_1(t)$  nach  $\gamma_2(t)$  und daraus folgt dann  $S(t, s) = \dot{c}_t$ . Desweiteren ist  $t \mapsto c_t$  eine Variation durch Geodätische und damit  $s \mapsto T(t, s)$  ein Jacobifeld längs  $c_t$ . Es gilt

$$c_t(0) = \gamma_1(t) \quad c_t(1) = \gamma_2(t)$$

und daraus folgt  $L(c_t) = \|S(t, 0)\|$ . Für genügend kleines  $t$  gilt dann:

$$L(t) = L(c_t) = \|S(t, 0)\|$$

Es gilt:

- $\nabla_s \nabla_s T = -R(T, S)S$  ( $T$  Jacobifeld längs  $c_t$ )
- $\nabla_s S = 0$  ( $c_t$  Geodätische,  $\dot{c}_t = S(t, \cdot)$ )
- $\nabla_t S = \nabla_s T$

Ferner gilt  $L^2(t) = \langle S(t, 0), S(t, 0) \rangle$  für kleines  $t$  und daraus folgt dann

$$(L^2)'(0) = 2\langle \nabla_t S, S \rangle(0, 0)$$

mit  $S(0, 0) = \dot{c}_0(0) = 0$  und  $c_0 \equiv p$ . Damit folgt also:

$$(L^2)'' = 2(\langle \nabla_t \nabla_t S, S \rangle + \langle \nabla_t S, \nabla_t S \rangle)(0, 0) = 2\langle \nabla_s T, \nabla_s T \rangle(0, 0)$$

Wir wissen bereits dass  $T(0, 0) = \dot{\gamma}_1(0) = v$ ,  $T(0, 1) = w$  und  $c_0 \equiv p$ , also  $\nabla_s = \frac{d}{ds}$ . Es gilt

$$\nabla_s \nabla_s T(0, s) = -R(T(0, s), \underbrace{S(0, s)}_{=0}) \underbrace{S(0, s)}_{=0} = 0$$

Damit ist  $T(0, \cdot)$  linear, also  $T(0, s) = v + S(w - v)$  und damit  $\nabla_s T(0, s) = w - v$ . Daraus folgt dann  $(L^2)'' = 2 \cdot \|w - v\|^2$ . Wir möchten nun dass folgendes gilt:

$$(L^2)'''(0) = 6\langle \nabla_t \nabla_t S, \nabla_t S \rangle(0, 0) \stackrel{!}{=} 0$$

Dazu zeigen wir zunächst die folgenden drei Gleichungen:

- (1)  $\nabla_t T(0, s) = 0$
- (2)  $\nabla_s \nabla_t T(0, s) = 0$
- (3)  $\nabla_t \nabla_t S(0, s) = 0$

Dass (2) aus (1) folgt ist klar. Dass (3) aus (2) folgt zeigt Folgendes (in  $(0, s)$ ):

$$\nabla_t \nabla_t S = \nabla_t \nabla_s T = \underbrace{\nabla_s \nabla_t T}_{=0} + \underbrace{R(T, S)T}_{=0}$$

Um (1) zu zeigen gilt  $(\nabla_t T)(0, 0) = (\nabla_t T)(0, 1)$  und dann bleibt noch zu zeigen, dass  $(\nabla_t T)(0, s)$  linear ist. Mit (3) folgt dann schließlich  $(L^2)'''(0) = 0$ . Für die vierte Ableitung gilt dann

$$(L^2)^{(4)}(0) \underset{\substack{S(0,s)=0 \\ (\nabla_t \nabla_t S(0,0)=0)}}{=} \dots = 8 \langle \nabla_t \nabla_t \nabla_t S, \nabla_t S \rangle(0, 0)$$

Es gilt:

$$\nabla_t \nabla_t \nabla_t S = \nabla_t (\nabla_t \nabla_s T) = \nabla_t (R(T, S)T + \nabla_s \nabla_t T) \underset{\text{Hinweis A 1}}{=} R(T, \nabla_t S)T + \nabla_t \nabla_s \nabla_t T$$

In  $(0, 0)$  gilt:

$$R(T, \underbrace{\nabla_t S}_{=\nabla_s T})T(0, 0) = R(\underbrace{\dot{\gamma}_1(0)}_{=v}, w - v) \underbrace{\dot{\gamma}_1(0)}_{=v}$$

Damit folgt dann insgesamt:

$$\begin{aligned} (L^2)^{(4)}(0) &= 8 \langle R(v, \overbrace{w-v}^{=w-v})v, \overbrace{\nabla_t S(0,0)}^{=w-v} \rangle + 8 \underbrace{\langle \nabla_t \nabla_s \nabla_t T, \nabla_t S \rangle(0, 0)}_{=...=0} \\ &= 8 \langle R(v, w-v)v, w-v \rangle \\ &= 8 \langle R(v, w)v, w \rangle \\ &= -8 \langle R(v, w)w, v \rangle \\ &= -8 \sec(\sigma) \underbrace{(\|v\|^2 \|w\|^2)}_{=1} - \langle v, w \rangle^2 \end{aligned}$$

## Übung 13 vom 4. Februar 2012

### Aufgabe 1

Es seien  $2 \leq p \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq q_1, \dots, q_k < p$  zu  $p$  teilerfremde natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass die Gruppe der  $p$ -ten Einheitswurzeln  $E_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$  durch

$$z.(z_1, \dots, z_k) := (z^{q_1} z_1, \dots, z^{q_k} z_k)$$

frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $S^{2k-1} = \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \sum_{i=1}^k |z_i|^2 = 1\}$  operiert.

Die Quotientenmannigfaltigkeit  $L(p, q_1, \dots, q_k) = S^{2k-1}/E_p$  nach dieser Wirkung wird *Linsenraum* vom Typ  $(p, q_1, \dots, q_k)$  genannt.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es auf  $T^n$  keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung gibt.

### Aufgabe 3

Es seien  $M, M_1, M_2$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $\pi_i : M \rightarrow M_i$  Riemannsche universelle Überlagerungen mit Decktransformationsgruppen  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ). Zeigen Sie, dass  $M_1$  und  $M_2$  genau dann isometrisch sind, wenn es eine Isometrie  $\hat{\varphi} : M \rightarrow M$  gibt, so dass  $\Gamma_1 = \hat{\varphi}\Gamma_2\hat{\varphi}^{-1}$ .

### Lösung 1

**Operation:** Für alle  $z \in E_p$  ist  $S^{2k-1} \rightarrow S^{2k-1}$ ,  $x \mapsto z.x$  stetig und für alle  $z, \tilde{z} \in E_p$  und alle  $x \in S^{2k-1}$  gilt  $z.(\tilde{z}.x) = (z \cdot \tilde{z}).x$ .

**Die Operation ist frei:** Es ist zu zeigen dass für alle  $x \in S^{2k-1}$  gilt  $(E_p)_x = \{1\}$ , beziehungsweise für alle  $z \in E_p \setminus \{1\}$  und alle  $x \in S^{2k-1}$  gilt  $z.x \neq x$ , beziehungsweise dass für alle  $z \in E_p$  gilt dass wenn es ein  $x \in S^{2k-1}$  mit  $z.x$  gibt  $z = 1$  gelten muss. Es seien  $E_p$  und  $(z_1, \dots, z_k) \in S^{2k-1}$  mit

$$(z_1, \dots, z_k) = z.(z_1, \dots, z_k) = (z^{q_1} z_1, \dots, z^{q_k} z_k)$$

Da  $(z_1, \dots, z_k) \in S^{2k-1}$  ist, existiert ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $z_j \neq 0$ , und daraus folgt  $z^{q_j} = 1$ . Es seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = aq_j + bp$ . Es gilt dann

$$1 = 1^a \cdot 1^b = (z^{q_j})^a (z^p)^b = z^{aq_j + bp} = z^1 = z$$

**Die Operation ist eigentlich kontinuierlich** Die Gruppe ist endlich und alle endlichen Gruppen operieren eigentlich diskontinuierlich, dann bleibt zu zeigen dass für alle  $K \in S^{2k-1}$  die Menge  $\{z \in E_p \mid z.K \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist.

Der Quotient  $L(p, q_1, \dots, q_k)$  nach dieser Operation ist also eine Mannigfaltigkeit. Für  $z = e^{2\pi i \frac{l}{p}}$  ist die induzierte Abbildung eine Drehung um den Winkel  $\frac{2\pi l}{p} q_j$  in der  $x_{2j-1}x_{2j}$ -Ebene. Damit ist die Operation bezüglich der Standardmetrik isometrisch und daraus folgt dass  $L(p, q_1, \dots, q_k)$  eine  $\sec > 0$ -Metrik besitzt. Im Fall  $p = 2$  gilt  $q_1 = \dots = q_k = 1$  und es ist  $L(2, 1, \dots, 1) = \mathbb{R} \mathbb{P}^{2k-1}$ . Laut Vorlesung gilt: Für  $k \geq 2$  ist  $S^{2k-1} \rightarrow L(p, q_1, \dots, q_k)$  die universelle Überlagerung. Dann sind die Einheitswurzeln gerade die Decktransformationsgruppe, also folgt

$$\pi_1(L(p, q_1, \dots, q_k)) \cong E_p \cong \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$$

**Korollar** Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung.

**Beweis** Sei  $G$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen gilt:

- (1)  $G \cong \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_n}$
- (2)  $(M, g_M)$  und  $(N, g_N)$  haben die Schnittkrümmung  $\sec \geq 0$  und damit hat  $(M \times N, g_M \oplus g_N)$  auch  $\sec \geq 0$  (wobei  $(g_M \oplus g_N)(X_M + X_N, Y_M + Y_N) = g_M(X_M + Y_M) + g_N(X_N, Y_N)$ )

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \pi_1(T^n \times L(p_1, 1, \dots, 1) \times \dots \times L(p_n, 1, \dots, 1)) \\ \cong \pi_1(T^n) \oplus \pi_1(L(p_1, 1, \dots, 1)) \oplus \dots \oplus \pi_1(L(p_n, 1, \dots, 1)) \\ \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_n} \cong G \end{aligned} \quad \square$$



Die Mannigfaltigkeiten  $L(p, q_1, \dots, q_k)$  und  $L(p, q'_1, \dots, q'_k)$  sind:

- homotopieäquivalent genau dann wenn  $q_1 \cdot \dots \cdot q_k \equiv \pm l^k q'_1 \cdot \dots \cdot q'_k \pmod{p}$  für ein  $l \in \mathbb{Z}_p$  [7]
- homöomorph genau dann wenn es ein  $l \in \mathbb{Z}_p$  und ein  $\sigma \in S_k$  gibt sodass für alle  $i$  gilt  $q_i \equiv \pm l q'_{\sigma(i)} \pmod{p}$  [2]

Also handelt es sich um homotopieäquivalente, aber nicht homöomorphe Mannigfaltigkeiten.

### Lösung 2

Nach dem Korollar von Bonnet-Myers ist die Fundamentalgruppe eine vollständige Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq (n-1)\kappa > 0$  endlich.  $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$  nicht.

### Lösung 3

Wir kürzen mit (\*) die rechte Seite der Behauptung ab, also

$$\text{Es gibt eine Isometrie } \hat{\varphi} : M \rightarrow M, \text{ sodass } \Gamma_1 = \hat{\varphi} \Gamma_2 \hat{\varphi}^{-1} \quad (*)$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & M \\ \pi_2 \downarrow & \curvearrowright ? & \downarrow \pi_1 \\ M_2 & \xrightarrow{\varphi} & M_1 \end{array}$$

„ $\Leftarrow$ “: Es sei  $\hat{\varphi} : M \rightarrow M$  eine Isometrie mit (\*). Definiere die Abbildung

$$\varphi : M_2 \rightarrow M_1 \quad \varphi(\Gamma_2 x) = \overset{\text{Bahn}}{\Gamma_1 \hat{\varphi}(x)}$$

*Behauptung:*  $\varphi$  ist wohldefiniert

*Beweis:* Es ist zu zeigen dass für alle  $\gamma_2 \in \Gamma_2$  es ein  $\gamma_1 \in \Gamma_1$  gibt mit  $\hat{\varphi}(\gamma_2 x) = \gamma_1 \hat{\varphi}(x)$ . Für  $\gamma_2 \in \Gamma_2$  ist  $\hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} =: \gamma_1 \in \Gamma_1$ . Dann folgt  $\gamma_1(\hat{\varphi}(x)) = \hat{\varphi}(\gamma_2(x))$ .

Die gleiche Konstruktion für  $\hat{\varphi}^{-1}$  liefert  $\varphi^{-1}$ . Da  $\pi_i$  ein lokaler Diffeomorphismus ist folgt dass  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  glatt sind. Da  $\varphi$  und  $\pi_i$  lokale Isometrien sind und  $\pi_2$  surjektiv ist, ist  $\varphi$  eine lokale Isometrie, und weil  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist folgt dass  $\varphi$  eine Isometrie ist.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & M \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ M_2 & \xrightarrow{\varphi} & M_1 \end{array}$$

„ $\Rightarrow$ “: Es sei  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  eine Isometrie. Dann ist  $\varphi \circ \pi_2$  eine lokale Isometrie, da  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist und  $\pi_2$  eine Überlagerung, und damit ist  $\varphi \circ \pi_2$  eine Riemannsche Überlagerung. Aus  $\pi_1(M) = \{0\}$  folgt dass  $\varphi \circ \pi_1$  die universelle Überlagerung ist; diese ist nach der Vorlesung bis auf Isomorphie eindeutig. Das bedeutet es existiert eine Isometrie  $\hat{\varphi} : M \rightarrow M$  mit  $\pi_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi \circ \pi_2$ .

*Behauptung:*  $\Gamma_1 = \hat{\varphi} \Gamma_2 \hat{\varphi}^{-1}$

*Beweis:* „ $\subseteq$ “:

$$\pi_1 \circ \hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} = \varphi \circ \pi_2 \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \stackrel{\gamma_1 \in \Gamma_2}{=} \varphi \circ \pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} = \pi_1 \circ \hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}^{-1} = \pi_1$$

„ $\supseteq$ “:

$$\pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \pi_1 \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \pi_1 \circ \hat{\varphi} = \pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \circ \hat{\varphi} = \pi_2$$

Daraus folgt

$$\gamma_2 = \hat{\varphi}^{-1} \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} \in \Gamma_2 \quad \gamma_1 = \hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \in \hat{\varphi} \Gamma_2 \hat{\varphi}^{-1}$$

# Stichwortverzeichnis

- Abstand, [51](#)
- Abstandsfunktion
  - lokale, [95](#)
- Alexandrov-Toponogov, [99](#)
- äquivalent, [13](#)
- Atlas, [7](#)
  - maximaler, [8](#)
- Bahn, [92](#)
- Bahnenraum, [92](#)
- Bogenlänge, [51](#)
- Bogenlängenparametrisierung, [51](#)
- Cheng, [90](#), [102](#)
- Christoffelsymbole, [57](#)
- $C^k$ -differenzierbare Struktur, [8](#)
- Diffeomorphismus, [9](#)
- Differential, [19](#), [44](#)
  - form, [41](#)
  - äußeres, [44](#)
- Dreieck
  - geodatisches, [99](#)
- duale Bündel, [38](#)
- Einbettung, [21](#)
- einfach zusammenhängend, [90](#)
- Energie, [52](#)
- exakt, [44](#)
- Exponentialabbildung, [69](#)
- Fluss, [28](#)
  - geodätischer, [68](#)
- $k$ -Form, [41](#)
- Fundamentalgruppe, [90](#)
- Geodätische, [52](#), [68](#)
  - minimale, [52](#)
  - radiale, [70](#)
- geschlossen, [44](#)
- glatt, [9](#)
  - stückweise, [51](#)
- Gradient, [95](#)
- Gromov, [102](#)
- homotop, [90](#)
- Igel, Satz vom, [26](#)
- Immersion, [21](#)
- Index, [79](#)
- Indexform, [81](#)
- Integralkurve, [27](#)
- Isometrie, [49](#)
- Isotropieuntergruppe, [92](#)
- Jacobifeld, [82](#)
- Jacobiidentität, [26](#)
- Karchers Trick, [100](#)
- Karte, [7](#)
  - adaptierte, [10](#)
  - Bündel-, [33](#)
  - verträgliche, [8](#)
- Kartengebiet, [7](#)
- Kartenwechsel, [7](#)
- Kodimension, [10](#)
- Kohomologiegruppe
  - deRahm-, [45](#)
- konjugiert, [84](#)
  - entlang einer Geodatischen, [84](#)
- Koszul-Formel, [64](#)
- Kotangential
  - bündel, [39](#)
  - vektor, [39](#)
  - vektorraum, [39](#)
- kovariante Ableitung, [55](#)
- Länge
  - Kurven-, [50](#)
- Levi-Civita Zusammenhang, [64](#)
- Lieableitung, [31](#), [41](#), [42](#)
- Lieklammer, [26](#)

- Mannigfaltigkeit
  - differenzierbare, 8
  - Riemannsche, 47
  - topologische, 7
  - Unter-, 10
- Metrik
  - Riemann-, 47
- Morse-Funktion, 80
- Normalkoordinaten
  - Riemannsche, 69
- Nullschnitt, 26
- Orbit, 92
- Paralleltransport, 61
- Parametrisierung
  - proportional zur Bogenlänge, 51
- Produkt
  - äußeres, 36
- Projektion
  - kanonische, 92
- pullback, 35, 40
- regulär
  - Kurve, 51
  - Punkt, 21
  - Wert, 21
- Riccatigleichung, 96
- Riccatiungleichung, 97
- Ricci-Krümmung, 66
- Ricci-Tensor, 66
- Richtungsableitung, 14
- Schnitt, 38, 59
  - konstanter, 60
  - paralleler, 60
- Schnittkrümmung, 65
- Skalarkrümmung, 66
- Submersion, 21
- Tangential
  - bündel, 25
  - raum, 13
  - vektor, 13, 15
- Tensor
  - bündel, 38
  - feld, 39
  - produkt, 36, 37
  - Krümmungs-, 59
- Torsion, 62
- torsionslos, 62
- Torsionstensor, 62
- Totalraum, 33
- Trajektorie, 27
- Trivialisierung
  - lokale, 34
- Übergangsfunktionen, 34
- Überlagerung, 91
  - Riemannsche, 91
- Variation, 77
  - eigentliche, 77
  - glatte, 67
  - mit festen Endpunkten, 77
- Vektorbündel
  - glattes reelles, 33
  - isomorphes, 34
  - morphismus, 33
  - triviales, 34
- Vektorfeld, 25
  - glattes, 25
  - vollständiges, 29
- vollständig
  - geodätisch, 73
- Whitneysumme, 35
- Wirkung, 92
  - eigentlich diskontinuierliche, 92
  - freie, 92
- Zerlegung der Eins, 50
- Zusammenhang, 55
  - Levi-Civita-, 129