

0.6.4 Aufgabe 4

a) $G = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid A^\top J A = J\}$ z.Z.: G ist Gruppe

Beweis: $G \subset GL(4, \mathbb{R})$, d.h. wir können das UGK anwenden.

(1) $E_4^\top J E_4 = J$, als ist $E_4 \in G$ und $G \neq \emptyset$

(2) Seien $A, B \in G$: $(A \cdot B^{-1})^\top J (AB) = B^{-1\top} A^\top J A B^{-1} = (B^{-1})^\top J B^{-1}$. Nach Vors.:
 $B^\top J B = J \Leftrightarrow J = (B^\top)^{-1} J B^{-1} = (B^{-1})^\top J B^{-1} = AB^{-1} \in G$

Damit ist G eine Gruppe □

0.7 Übung 6, 13.12.2004

0.7.1 Aufgabe 1

a) $\text{Grad } q =: m$ $m = \text{Grad } q = \text{Grad } r_1 > \text{Grad } r_2 > \dots > \text{Grad } r_n > \text{Grad } r_{n+1} > \text{Grad } r_{n+2}$

Falls kein $n \in \mathbb{N}$ ex. mit $k_n = 0$, dann gilt: k_{n+1} ex., $\text{Grad } k_{n+1} \geq 0$

Also gibt es $m + 2$ verschiedene Elemente in der Menge $\{0, \dots, m\}$.

b) Der Eukl.-Algo liefert

$$\begin{aligned} r_0 &= s_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= s_2 r_2 + r_3 \\ r_2 &= s_3 r_3 + r_4 \\ &\dots \\ r_{n-2} &= s_{n-1} r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= s_n r_n + 0 \end{aligned}$$

Wir zeigen: r_n teilt r_{n-k} für alle $k = 0, \dots, n$

Beweis:

I.A.: r_n teilt $r_n = r_{n-0}$; r_n teilt r_{n-1} wg. der letzten Gleichung

I.V.: r_n teilt $r_{n-(k-1)}$ und r_n teilt r_{n-i}

I.S.: z.Z.: r_n teilt $r_{n-(k-1)}$

Wir wissen: $r_{n-(k+1)} = s_{n-k} \cdot r_{n-k} + r_{n-(k-1)}$

Nach I.V.: $\exists l, m \in \mathbb{K}[x] \quad k_{r-k} = l \cdot r_n$ und $r_{n-(k-1)} = m \cdot r_n$

Damit: $r_{n-(k+1)} = s_{n-k} l r_n + m \cdot k n = (s_{n-k} l + m) r_n$, d.h. r_n teilt $r_{n-(k+1)}$

Also ist r_n ein Teiler von $r_0 = p, r_1 = q$ □

c) Ist d ein Teiler von p und q , so teilt d auch r_k für alle $k \in \{0, \dots, n\}$

Beweis:

IA: d teilt r_0 , d teilt r_1 nach Vor.

IV: d teilt r_{k-1} und d teilt r_2

IS: $r_{k-1} = s_k r_k + r_{k+1}$

Nach IV: $\exists l, m \in \mathbb{K}[x] : r_{k-1} = d$ und $r_m = md$

Damit $r_{k+1} = (l - s_k m)d$, d teilt also r_{k+1}

Insbesondere teilt d also k

□

0.7.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3)}_{r_0} &= \underbrace{(x^3 - x)}_{r_1} \underbrace{(x + 3)}_{s_1} + \underbrace{(3x^2 + 3x - 3)}_{r_2} \\
 \underbrace{(x^3 - x)}_{r_1} &= \underbrace{(3x^2 + 3x - 3)}_{r_2} \underbrace{\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)}_{s_2} + \underbrace{(x - 1)}_{r_3} \\
 \underbrace{(3x^2 + 3x - 3)}_{r_2} &= \underbrace{(x - 1)}_{r_3} \underbrace{(3x + 6)}_{s_3} + \underbrace{3}_{r_4}
 \end{aligned}$$

$$1 = \frac{1}{3}((s_2 - s_3) + 1)r_0 + (-s_1 s_2 s_3 - s_1 - s_3)r_1$$

$$d.h. : r = \frac{1}{3}s_2 s_3 + 1 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 s &= -\frac{1}{3}s_1 s_2 s_3 - \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_3 \\
 &= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - 1
 \end{aligned}$$

0.7.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -6 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -18 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -6 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -6 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R} :$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{F}_3 \right\} \quad L = \emptyset$$