4. Partielle Ableitungen

Stets in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ (fest).

Die Gerade durch x_0 mit der Richtung e_j ist gegeben durch folgende Menge: $\{x_0 + te_j : t \in \mathbb{R}\}$. D offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$. $\|x_0 + te_j - x_0\| = \|te_j\| = |t| \implies x_0 + e_j \in D$ für $t \in (-\delta, \delta)$. $g(t) := f(x_0 + te_j)$ $(t \in (-\delta, \delta))$ Es ist $g(t) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)} + t, x_{j+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Definition
f heißt in x_0 partiell differenzierbar nach x_j $:\iff$ es exisitert der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t}$$

und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall heißt obiger Grenzwert die partielle Ableitung von f in x_0 nach x_j und man schreibt für diesen Grenzwert:

$$f_{x_j}(x_0) \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

Im Falle $n = 2$ oder $n = 3$ schreibt man f_x, f_y, f_z bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

Beispiele:

(1) $f(x, y, z) = xy + z^2 + e^{x+y}$; $f_x(x, y, z) = y + e^{x+y} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$. $f_x(1, 1, 2) = 1 + e^2$. $f_y(x, y, z) = x + e^{x+y}$. $f_z(x, y, z) = 2z = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$.

(2) $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Sei $x \neq 0$: $f_{x_j}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cdots}} 2x_j = \frac{x_j}{\|x\|}$

Sei $x = 0$: $\frac{f(t,0,\dots,0) - f(0,0,\dots,0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \implies f$ ist in $(0, \dots, 0)$ nicht partiell differenzierbar nach x_1. Analog: f ist in $(0, \dots, 0)$ nicht partiell differenzierbar nach $x_2, \dots, x_n$

(3) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \to 0$ $(t \to 0)$ $\implies f$ ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach x und $f_x(0, 0) = 0$. Analog: f ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach y und $f_y(0, 0) = 0$. Aber: f ist in $(0, 0)$ nicht stetig.

Definition

(1) f heißt in x_0 partiell differenzierbar $:\iff f$ ist in x_0 partiell differenzierbar nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$. In diesem Fall heißt $\operatorname{grad} f(x_0) := \nabla f(x_0) := (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$ der Gradient von f in x_0.

(2) f ist auf D partiell differenzierbar nach x_j oder f_{x_j} ist auf D vorhanden $:\Longleftrightarrow f$ ist in jedem $x \in D$ partiell differenzierbar nach x_j. In diesem Fall wird durch $x \mapsto f_{x_j}(x)$ eine Funktion $f_{x_j} : D \to \mathbb{R}$ definiert die partielle Ableitung von f auf D nach x_j.

(3) f heißt partiell differenzierbar auf $D :\Longleftrightarrow f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ sind auf D vorhanden.

(4) f heißt auf D stetig partiell differenzierbar $:\Longleftrightarrow f$ ist auf D partiell differenzierbar und $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ sind auf D stetig. In diesem Fall schreibt man $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

Beispiele:

(1) Sei f wie in obigem Beispiel (3). f ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$

(2) Sei f wie in obigem Beispiel (2). f ist auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} f(x) = (\frac{x_1}{\|x_n\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|}) = \frac{1}{\|x\|} x \ (x \neq 0)$

Definition

Seien $j, k \in \{1, \dots, n\}$ und f_{x_j} sei auf D vorhanden. Ist f_{x_j} in $x_0 \in D$ partiell differenzierbar nach x_k, so heißt

$$f_{x_j x_k}(x_0) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) := \left(f_{x_j}\right)_{x_k}(x_0)$$

die partielle Ableitung zweiter Ordnung von f in x_0 nach x_j und x_k. Ist $k = j$, so schreibt man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x_0)$$

Entsprechend definiert man partielle Ableitungen höherer Ordnung (soweit vorhanden).

Schreibweisen: $f_{xxyzz} = \dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}$, vergleiche: $\dfrac{\partial^{180} f}{\partial x^{179} \partial y}$

Beispiele:

(1) $f(x,y) = xy + y^2$, $f_x(x,y) = y$, $f_{xx} = 0$, $f_y = x + 2y$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yx} = 1$.

(2) $f(x,y,z) = xy + z^2 e^x$, $f_x = y + z^2 e^x$, $f_{xy} = 1$, $f_{xyz} = 0$. $f_z = 2ze^x$, $f_{zy} = 0$, $f_{zyx} = 0$.

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Übungsblatt: $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ exisitieren, aber $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Definition

Sei $m \in \mathbb{N}$. f heißt auf D m-mal steig partiell differenzierbar $:\Longleftrightarrow$ alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq m$ sind auf D vorhanden und auf D stetig. In diesem Fall schreibt man: $f \in C^m(D, \mathbb{R})$

$$C^0(D, \mathbb{R}) := C(D, \mathbb{R}), \qquad C^\infty(D, \mathbb{R}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D, \mathbb{R})$$

Satz 4.1 (Satz von Schwarz)
Es sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Dann: $f_{x_j x_k}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0)$

Satz 4.2 (Folgerung)
Ist $f \in C^m(D, \mathbb{R})$, so sind die partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentation.

Beweis
O.B.d.A: $n = 2$ und $x_0 = (0,0)$. Zu zeigen: $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. D offen $\implies$ $\exists \delta > 0$: $U_\delta(0,0) \subseteq D$. Sei $(x,y) \in U_\delta(0,0)$ und $x \neq 0 \neq y$.

$$\nabla := f(x,y) - f(x,0) - (f(0,y) - f(0,0)), \quad \varphi(t) := f(t,y) - f(t,0)$$

für t zwischen 0 und x. φ ist differenzierbar und $\varphi'(t) = f_x(t,y) - f_x(t,0)$. $\varphi(x) - \varphi(0) = \nabla$. MWS, Analysis 1 $\implies$ $\exists \xi = \xi(x,y)$ zwischen 0 und x: $\nabla = x\varphi'(\xi) = x(f_x(\xi,y) - f_x(\xi,0))$. $g(s) := f_x(\xi,s)$ für s zwischen 0 und y; g ist differenzierbar und $g'(s) = f_{xy}(\xi,s)$. Es ist $\nabla = x(g(y) - g(0)) \overset{\text{MWS}}{=} xyg'(\eta)$, $\eta = \eta(x,y)$ zwischen 0 und y. $\implies$ $\nabla = xyf_{xy}(\xi,\eta)$. (1)
$\psi(t) := f(x,t) - f(0,t)$, t zwischen 0 und y. $\psi'(t) = f_y(x,t) - f_y(0,t)$. $\nabla = \psi(y) - \psi(0)$. Analog: $\exists \bar\eta = \bar\eta(x,y)$ und $\bar\xi = \bar\xi(x,y)$, $\bar\eta$ zwischen 0 und y, $\bar\xi$ zwischen 0 und x. $\nabla = xyf_{yx}(\bar\xi,\bar\eta)$. (2)
Aus (1), (2) und $xy \neq 0$ folgt $f_{xy}(\xi,\eta) = f_{yx}(\bar\xi,\bar\eta)$. $(x,y) \to (0,0)$ $\implies$ $\xi, \bar\xi, \eta, \bar\eta \to 0$ $\overset{f \in C^2}{\implies}$ $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ ■