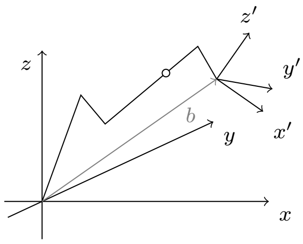
Kapitel 4

Kinematik



Bewegungen und Zustände eines (idealisierten) Roboterarmes werden durch abstandserhaltende Transformationen, das heißt Isometrien des $\mathbb{R}^3$, beschrieben. Jede solche Transformation ist von der Gestalt

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto Ax + b$$

mit $A \in \mathrm{O}(3)$ und $b \in \mathbb{R}^3$, wobei $\mathrm{O}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^T A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\}$ die Menge der skalarprodukterhaltenden linearen Abbildungen bezeichnet, die orthogonale Gruppe. Die Hintereinanderausführung

$$A'(Ax + b) + b' = A'Ax + A'b + b'$$

ist wieder eine Isometrie des $\mathbb{R}^3$. Die Gruppe $\mathrm{E}(3)$ der euklidischen Bewegungen ist das semidirekte Produkt $\mathrm{E}(3) = \mathrm{O}(3) \times \mathbb{R}^3$ mit der Multiplikation

$$(A', b')(A, b) = (AA', A'b + b').$$

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(3)$ besitzt zwei Zusammenhangskomponenten, die orientierungserhaltenden Drehungen mit Determinante 1, also die Spezielle Orthogonale Gruppe oder Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$, und die (Dreh-)Spiegelungen. Da mechanisch keine Spiegelung realisierbar ist, betrachtet man nur die orientierungserhaltenden euklidischen Bewegungen $\mathrm{SE}(3) = \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}$.
Zur Vereinfachung der Notation betrachtet man die 4-dimensional Darstellung

$$\mathrm{SE}(3) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \qquad (A, b) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

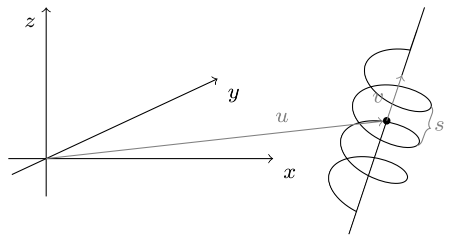
Tatsächlich gilt

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' & A'b + b' \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

mit Inversem

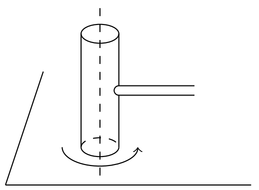
$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^T & -A^T b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nach einem Satz von Chasles (1832):



Jede euklidische Bewegung kann als „Schraubbewegung“ aufgefasst werden: Für alle $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SE}(3)$ existieren eine Richtung $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, ein Drehwinkel ϑ, eine Steigung $s \in \mathbb{R}$ und ein Translationsvektor $u \in \mathbb{R}^3$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & u \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} R(\vartheta, v) & \frac{\vartheta}{2\pi} s v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)}_{\text{„Schraube“ mit Achse } R\cdot v \text{ und Steigung } s} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & -u \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R & \frac{\vartheta}{2\pi} s v + (\mathrm{id} - R) u \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$



Bestimmte Roboterarme, beziehungsweise Teile davon, können im Allgemeinen nur bestimmte Bewebungen ausführen, zum Beispiel lässt ein Drehgelenk keine translationen aus SE(3) zu. Der Konfigurationsraum dieses Drehgelenkes ist anschaulich $\mathbb{S}^1 = \mathrm{SO}(2) < \mathrm{SE}(3)$. Es stellt sich also die Frag nach den Untergruppen von SE(3): Ist G eine Untergruppe von $\mathrm{SE}(3) = \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, so ist auch $G \cap \mathbb{R}^3 = (\{1\} \times \mathbb{R}^3)$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}^3$, also 0, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $r\,\mathbb{Z}$, $r\,\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $r\,\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$, $r\,\mathbb{Z} \times s\,\mathbb{Z}$, $r\,\mathbb{Z} \times s\,\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ und $r\,\mathbb{Z} \times s\,\mathbb{Z} \times t\,\mathbb{Z}$. Wegen

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A^T & -A^T t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & A(-A^T b + t) + b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & At \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \text{„}\in\text{“}\, \mathbb{R}^3$$

ist $\mathbb{R}^3$ ein Normalteiler in SE(3), das heißt die Projektion $\mathrm{SE}(3) \twoheadrightarrow {}^{\mathrm{SE}(3)}\!/_{\mathbb{R}^3} \cong \mathrm{SO}(3)$ ist eine Gruppenhomomorphismus und jede Untergruppe $G < \mathrm{SE}(3)$ projeziert auf eine Untergruppe in SO(3), also SO(3), SO(2) oder $\{1\}$. Welche „Bausteine“ ergeben Untergruppen von SE(3)? Genau jene, für welche der „Faktor“ in $\mathbb{R}^3$ normal in der Untergruppe liegt.

${}^{G}\!/_{\mathbb{R}^3} \cong \mathrm{SO}(3)$:
- $G \cap \mathbb{R}^3 = \{0\}$
- $G \cap \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$, denn SO(3) ist transitiv auf S^2.

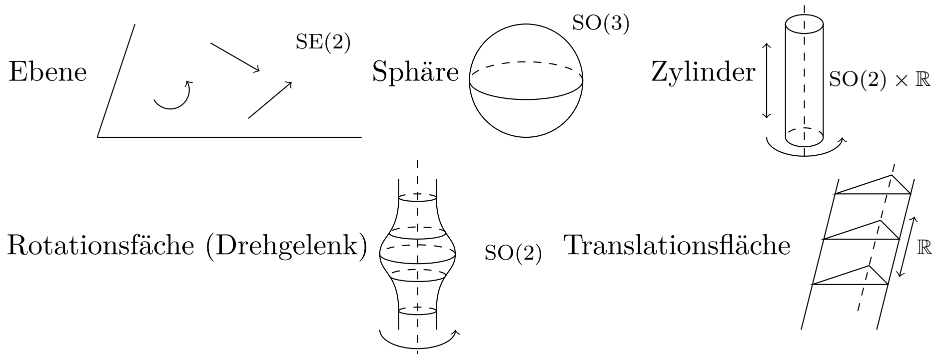
${}^{G}\!/_{\mathbb{R}^3} \cong \mathrm{SO}(2)$:
- $G \cap \mathbb{R}^3 = \{0\} \Rightarrow G \cong \mathrm{SO}(2)$
- $G \cap \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$, $G \cong \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^3 = \mathrm{SE}(2) \times \mathbb{R}$
- $G \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$, $G \cong \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 = \mathrm{SE}(2)$
- $G \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, $G \cong \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}$
- $G \cap \mathbb{R}^3 = s\,\mathbb{Z}$

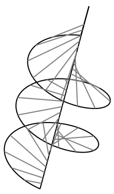
$$G = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\vartheta}{2\pi} s \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\} = H_s \cong \mathbb{R}$$

„Schraube“ durch die x-Achse mit Steigung $s \in \mathbb{R}$. Alle diese H_s sind *nicht* zu $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{SE}(3)$ konjugiert.
- $G \cap \mathbb{R}^3 = s\,\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \Rightarrow G = H_s \times \mathbb{R}^2$

Reuleux-Paare (1875)

Bewegungen, welche durch das gegeneinander Verschieben oder Verdrehen zweier gleicher Flächen(-stücke) im $\mathbb{R}^3$ entstehen. Diese entsprechen den Orbiten von ein- und zweidimensionalen Untergruppen von SE(3).

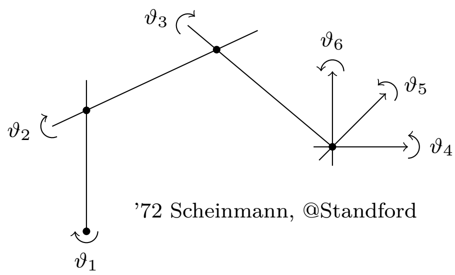


Helicoid 

$$H_s = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\vartheta}{2\pi} s \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\}$$

1 Vorwärtstransformation

Wie berechnet man zu gegebenen Winkeln, beziehungsweise Translationen, die Endpositionen eines Roboters? Man kann sich diese Frage etwa am PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly) veranschaulichen:



Jedes Gelenk bestimmt eine Ein-Paramter-Untergruppe in SE(3), $\vartheta \mapsto A_i(\vartheta)$, wobei $A_i(\vartheta)$ eine Schraube in obigem Sinne ist, zum Beispiel

$$A_i(\vartheta) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & u \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & -u \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

oder

$$A_i(\vartheta) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & \frac{\vartheta s}{2\pi} \cdot v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

für eine Translation in Richtung v. Nach Wahl einer Ausgangsposition des Roboters, welche den Winkeln $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = \vartheta_k = 0$ enstpricht, erhält man die Endposition, beziehungsweise die **Gestalt**, durch Anwenden der Transformation $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$.

$$K(\vartheta) = A_1(\vartheta_1)A_2(\vartheta_2)\ldots A_k(\vartheta_k) \qquad\qquad \mathbb{T}^k \to \mathrm{SE}(3)$$

Es bleiben immer noch einige Fragen offen:

- Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, etc.
- Effizienz
- Umkehrbarkeit der Abbildung
- Geometrie, insbesondere in singulären Punkten

2 Linarisierung (d.h. Tangentialräume)

Die Geschwindigkeit eines Werkzeugs ist gegeben durch die erste Ableitung (nach der Zeit) des Positionvektors $p(t)$ des Roboterarmes. Es gilt $p(t) = K(\vartheta_t)p_0$. Da jede Gestalt durch eine Transformation $g = K(\vartheta)$ beschrieben ist, genügt es, die durch Wege $t \mapsto g_t(gp_0)$, mit $g_0 = \mathrm{id}$, zu beschreiben. Dann gilt

$$\dot{p}(t) = \dot{g}_t(gp_0).$$

Die Gruppe $\mathrm{SE}(3) = \mathrm{so}(3) \times \mathbb{R}^3$ ist eine Lie-Gruppe, das heißt eine Glatte Mannigfaltigkeit und die Gruppenoperationen sind glatt bezüglich dieser differenzierbaren Struktur.
Als Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}(3)$ ist $\mathrm{SO}(3)$ durch die Gleichung $A^TA = \mathrm{id}$ bestimmt. Ist $g_t = A(t)$ ein glatter Weg durch $\mathrm{id} \in \mathrm{SO}(3)$, so gilt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \mathrm{id} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \Big(A(t)^TA(t)\Big) = A'(0)^T \underbrace{A(0)}_{=\mathrm{id}} + \underbrace{A(0)^T}_{=\mathrm{id}} A'(0) = A'(0)^T + A'(0).$$

Also gilt $A'(0) = -A'(0)^T$, das heißt der Tangentialraum in 1 von $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{T}_1\,\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SO}(3)$, besteht aus schiefsymmetrischen Matrizen. Ist $g_t = \left(\begin{smallmatrix} A_t & b_t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ein glatter Weg in $\mathrm{SE}(3)$ mit $g_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$, das heißt $A_0 = \mathrm{id}$, $b_0 = 0$, dann gilt

$$g_0' = \left(\begin{array}{c|c} A_0' & b_0' \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Omega & v \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

wobei

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

eine schiefe Matrix ist und $v \in \mathbb{R}^3$. Für einen durch $x_t = g_t \cdot x_0$ parametrisierten Weg in $\mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\dot{x}_0 = \Omega x_0 + v = \omega \times x_0 + v,$$

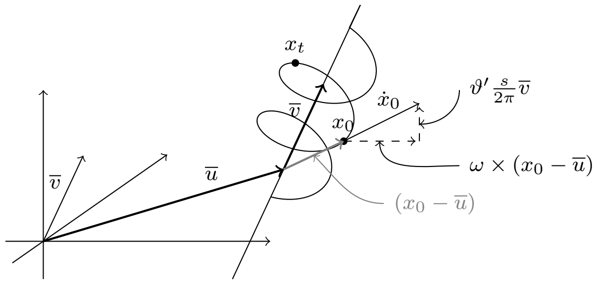
wobei $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$. Ist g_t eine Schraubbewegung, das heißt existieren $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$ und $s \in \mathbb{R}$ mit

$$g_t = \left(\begin{array}{c|c} R(\vartheta_t, \overline{v}) & \frac{\vartheta_t s}{2\pi}\overline{v} + (\mathrm{id} - R(\vartheta_t, \overline{v})) \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

so gilt

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (R(\vartheta_t, \overline{v})) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \\
v &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\frac{\vartheta_t s}{2\pi}\overline{v} + (\mathrm{id} \cdot R_t)\overline{u}\right) = \vartheta_0' \cdot \frac{s}{2\pi}\overline{v} - \Omega\overline{u} \\
\dot{x}_0 &= \Omega x_0 + \vartheta_0' \frac{s}{2\pi}\overline{v} - \Omega\overline{u} = \underbrace{\omega x(x_0 - u)}_{\substack{\text{Rotations-} \\ \text{geschwindigkeit}}} + \underbrace{\vartheta_0' \frac{s}{2\pi}\overline{v}}_{\substack{\text{„Vortrieb"} \\ \text{der Schraube}}}
\end{aligned}$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist.



3 Adjungierte Darstellung

Im Allgemeinen ist

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \qquad \mathrm{Ad}(g) : (h \mapsto ghg^{-1})_{*e} : \mathrm{T}_e\, G \cong \mathfrak{g} \to \mathrm{T}_e\, G = \mathfrak{g}.$$

Für die Gruppe SO(3), beziehungsweise die Lie-Algebra so(3), ist die Konjugation von Metriken gegeben durch

$$\Omega' = \mathrm{Ad}(R)\Omega = R\Omega R^T.$$

Für SO(3) existiert eine Orthonormalbasis r_1, r_2, r_3 von $\mathbb{R}^3$ mit $R^T = (r_1|r_2|r_3)$. Ist dann

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = \omega \times (\cdot),$$

so gilt

$$\begin{aligned}
\Omega' &= R\Omega R^T = R(\omega \times r_1 | \omega \times r_2 | \omega \times r_3) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \langle r_1, \omega \times r_2\rangle & \langle r_1, \omega \times r_3\rangle \\ \langle r_2, \omega \times r_1\rangle & 0 & \langle r_2, \omega \times r_3\rangle \\ \langle r_3, \omega \times r_1\rangle & \langle r_3, \omega \times r_2\rangle & 0 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & -\langle r_3, \omega\rangle & \langle r_2, \omega\rangle \\ \langle r_3, \omega\rangle & 0 & -\langle r_1, \omega\rangle \\ -\langle r_2, \omega\rangle & \langle r_1, \omega\rangle & 0 \end{pmatrix} = R\omega \times (\cdot)
\end{aligned}$$

In SE(3) gilt damit

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c|c}\Omega' & v' \\ \hline 0 & 0\end{array}\right) &= \mathrm{Ad}\left(\begin{array}{c|c}R & \overline{v} \\ \hline 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\Omega & v \\ \hline 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}R & \overline{v} \\ \hline 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\Omega & v \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}R & \overline{v} \\ \hline 0 & 1\end{array}\right)^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{c|c}R & \overline{v} \\ \hline 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\Omega & v \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}R^T & -R^T\overline{v} \\ \hline 0 & 1\end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c}R\Omega R^T & Rv - R\Omega R^T\overline{v} \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\end{aligned}$$

Da $R\Omega R^T\overline{v} = (R\omega)\times\overline{v}$ gilt, folgt für

$$V = \begin{pmatrix}0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0\end{pmatrix}$$

mit $\overline{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$:

$$Vx = -x \times \overline{v} = \overline{v} \times x,$$

das heißt

$$-R\Omega R^T\overline{v} = -(R\omega)\times\overline{v} = VR\omega.$$

Stellt man ein Lie-Algebra-Element $\left(\begin{smallmatrix}\Omega & V \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ durch $\left(\begin{smallmatrix}\omega \\ v\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^6$ dar, so gilt

$$\begin{pmatrix}\omega' \\ v\end{pmatrix} = \mathrm{Ad}\left(\begin{array}{c|c}R & \overline{v} \\ \hline 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}\omega \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R & 0 \\ VR & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega \\ v\end{pmatrix}$$

Adjungierte Darstellung der Lie-Algebren so (3) und se (3)

Es gilt

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) && (g^{-1}(\cdot)g)_* = \mathrm{Ad}(g) \\ &\mathrm{Ad}_{*e} = \mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) && \mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]\end{aligned}$$

Die Lie-Algebra so(3) von SO(3) besteht aus den schiefsymmetrischen Matrizen Ω wie sie im letzten Abschnitt definiert wurden. Die Matrizen

$$X = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von SO(3). Nun gilt

$$\mathrm{ad}(X)Y = XY - YX = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = Z$$

$$\mathrm{ad}(Y)Z = YZ - ZY = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = X$$

$$\mathrm{ad}(Z)X = ZX - XZ = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = Y,$$

wobei man leicht sieht, dass $\mathrm{ad}(X)Y = [X,Y] = -[Y,X] = -\mathrm{ad}(Y)X$, und entsprechend für die übrigen Matrizen. In der Basis gilt dann

$$\mathrm{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = X \qquad \mathrm{ad}(Y) = Y \qquad \mathrm{ad}(Z) = Z.$$

Zu se(3) betrachte die Basis

$$\omega_i = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \omega_j = \left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \omega_k = \left(\begin{array}{c|c} Z & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$v_i = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad v_j = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad v_k = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wie oben berechnet man mit den Kommutatoren der Basiselementen

$$\mathrm{ad}(\omega_i) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}(\omega_j) = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}(\omega_k) = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ad}(v_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}(v_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}(v_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix}$$

in der obigen Basis.

4 Exponentialabbildung

Die gewöhnliche Exponentialabbildung für Matrizen

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

stimmt für Matrixgruppen wie SO(3) und SE(3), beziehungsweise ihre Lie-Algebren so(3) und se(3), mit der Exponentialabbildung des Zusammenhanges welcher durch Paralleltransport durch die Linksmultiplikation defniert ist, überein.

Bezüglich dieses Zusammenhanges sind die Integralkurven von linksinvarianten Vektorfeldern Geodätische, das heißt $g_t = \exp(tX)$ löst $\dot{g}_t = g_t X$. Es sei $\Omega \in \mathrm{so}(3)$ wie im letzten Abschnitt und $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$. Wie berechnet man $\exp(\Omega)$? Zerlege Ω (und id) in orthogonale Idempotente:

$$\begin{aligned} \Omega^3 x &= \omega \times (\omega \times (\omega \times x)) \\ &= \langle \omega, \omega \times x \rangle \omega - \langle \omega, \omega \rangle \omega \times x \\ &= 0 - \|\omega\|^2 \omega \times x \\ &= -\|\omega\|^2 \Omega x \end{aligned}$$

Also gilt $\Omega^3 + \|\omega\|^2 \Omega = 0$. Setzt man

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\|\omega\|^2} (\Omega + i\|\omega\| \,\mathrm{id}) (\Omega - i\|\omega\| \,\mathrm{id}) \\ P_+ &= \frac{-1}{2\|\omega\|^2} (\Omega - i\|\omega\| \,\mathrm{id}) \\ P_- &= \frac{-1}{2\|\omega\|^2} (\Omega + i\|\omega\| \,\mathrm{id}) \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned}
&P_0P_+ = P_0P_- = P_+P_- = 0\\
&P_0 + P_+ + P_- = \mathrm{id}\\
&P_0^2 = P_0, P_+^2 = P_+, P_-^2 = P_-\\
&\Omega = i\|\omega\|(P_- - P_+).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\Omega^n = (i\|\omega\|)^n P_- + (-i\|\omega\|)^n P_+$$

und

$$\begin{aligned}
\exp(\Omega) &= \mathrm{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\Omega^n\\
&= P_0 + P_- + P_+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left((i\|\omega\|)^n P_- + (-i\|\omega\|)^n P_+\right)\\
&= P_0 + e^{i\|\omega\|}P_- + e^{-i\|\omega\|}P_+\\
&= \dots\\
&= \mathrm{id} + \frac{1}{2\|\omega\|}\left(e^{-i\|\omega\|} - e^{i\|\omega\|}\right)\Omega - \frac{1}{2\|\omega\|}\left(e^{i\|\omega\|} - e^{-i\|\omega\|} - 2\right)\Omega^2\\
&= \mathrm{id} + \frac{1}{\|\omega\|}\sin\|\omega\|\Omega + \frac{1}{\|\omega\|^2}(1 - \cos\|\omega\|)\Omega^2.
\end{aligned}$$

Mit $\vartheta = \|\omega\|$ und $v = \frac{\omega}{\|\omega\|}$ erhält man die sogenannte **Rodrigues-Formel** für die Drehung um die Achse $\mathbb{R} \cdot v$ mit dem Winkel ϑ:

$$R(\vartheta, v)x = e^{\vartheta v}x = x + \sin\vartheta(v \times x) + (1 - \cos\vartheta)v \times (v \times x)$$

Analog erhält man in der Darstellung von se(3)

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \Omega & v \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

eine Gleichung vierten Grades

$$S^4 + \|\omega\|^2 S = 0.$$

Wie oben zerlegt man S und id in Idempotente und ein Nilpotent und erhält

$$\exp(S) = \mathrm{id} + \frac{1}{\|\omega\|}\sin\|\omega\|S + \frac{1}{\|\omega\|^2}(1 - \cos\|\omega\|)S^2.$$

In bestimmten Fällen lässt sich damit die Kinematik eines Roboters lösen. Zum Beispiel findet man damit für Roboter mit drei Gelenken (generisch) für einen Ausgangspunkt $p_0 \in \mathbb{R}^3$ und einen Zielpunkt $p \in \mathbb{R}^3$ Elemente S_1, S_2 und S_3 in se(3), so dass

$$e^{\vartheta_1 S_1} e^{\vartheta_2 S_2} e^{\vartheta_3 S_3} \begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

5 Clifford Algebren

Eine (reelle) **Clifford-Algebra** ist bestimmt durch die Wahl einer Basis $e_1, \ldots, e_n \in V \cong \mathbb{R}^n$ und die Relationen

- $e_i e_j + e_j e_i = 0$ für $i \neq j$
- $e_i^2 \in \{0, +1, -1\}$

Eine Clifford Algebra ist eindeutig bestimmt durch die Anzahlen der Basiselemente, deren Quadrate 1, -1 oder 0 ergeben. Man schreibt sie dann als $\mathrm{Cl}(p, q, r)$

Beispiel
Die Clifford-Algebra $\mathrm{Cl}(0, 1, 0)$ wird erzeugt von e_1 und $\mathbb{R}$ mit

$$e_1^2 = -1 \qquad (x + ye_1)(z + we_1) = xz + ywe_1^2 + yze_1 + xwe_1$$
$$= (xz - yw) + (yz + xw)e_1$$

Mit einem Isomorphismus, der die Abbildungen $e_1 \mapsto i$ und $1 \mapsto 1$ enthält ist die Algebra isomorph zu den komplexen Zahlen, also $\mathrm{Cl}(0, 1, 0) \cong \mathbb{C}$

Jedes Monom von Erzeugern $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ kann als Produkt von Erzeugern $e_{j_1}, \ldots, e_{j_l}$ mit $j_1 < j_2 < \ldots < j_l$ (für $l \leq k$) geschrieben werden. Diese Elemente bilden eine Vektorraum-Basis von $\mathrm{Cl}(p, q, r)$, man erhält eine direkte Zerlegung

$$\mathrm{Cl}(p, q, r) = \bigoplus_{k=0}^{n} V_k.$$

Insbesondere gilt $\dim \mathrm{Cl}(p, q, r) = 2^{(p+q+r)}$. Diese Vektorraum-Graduierung hängt im Allgemeinen von der Wahl der Basis ab, allerdings ist die Zerlegung

$$\mathrm{Cl}(p, q, r) = \mathrm{Cl}(p, q, r)^- \oplus \mathrm{Cl}(p, q, r)^+$$

in Produkte mit einer ungeraden beziehungsweise geraden Anzahl abhängig von der Wahl der Basis. Das ist eine Involution von Cl mit $e_i \mapsto e_i^* = -e_i$ und $(ab)^* = b^* a^*$.

Wo ist $\mathrm{SO}(3)$ (euklidische Bewegungen)

Betrachte die Clifford-Algebra $\mathrm{Cl}(0, n, 0)$. Dann liegt $\mathbb{R}^n$ in $\mathrm{Cl}(0, n, 0)$ durch

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$
Kronecker-Delta

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n \qquad \langle x, y \rangle = -\sum_{i,j \leq n} x^i y^j (-\delta_{ij})$$
$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j \leq n} x^i y^j (e_i e_j + e_j e_i)$$
$$= \frac{1}{2}(xy^* + yx^*)$$

Betrachte die Gruppe

$$\mathrm{Pin}(n) = \{g \in \mathrm{Cl}(0, n, 0) \mid gg^* = 1, (-1)^{|g|} g \times g \in \mathbb{R}^n \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathrm{Cl}\}$$

Die oben bschriebene Wirkung $\mathrm{Pin}(n) \curvearrowright \mathbb{R}$ erhält das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(((-1)^{|g|}gxg^*)((-1)^{|g|}gyg)^* + ((-1)^{|g|}gyg^*)((-1)^{|g|}gxg^*)^*\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((-1)^{|g|}gx\underbrace{(g^*g)}_{=1}y^*(-1)^{|g|}g^* + \dots\right)\\
&= g\left(\frac{1}{2}(xy^* + yx^*)\right)g^*\\
&= gg^*\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

Damit existiert ein Homomorphismus von $\mathrm{Pin}(n)$ nach $O(n)$. Man kann zeigen, dass dieser surjektiv ist und $\mathbb{Z}_2 := {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$ als Kern hat. Es gilt $\mathrm{Pin}(n) \cap \mathbb{R}^n = \mathbb{S}^{n-1}$, denn

$$1 = vv^* = \frac{1}{2}(vv^* + vv^*) = \langle v,v\rangle = \|v\|^2$$

und man rechnet schnell nach, dass $-vwv^* \in \mathbb{R}^n$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$. Jedes solche v wirkt als Spiegelung an der Hyperebene $v^\perp$:

$$(-1)^{|v|}v(\lambda v)v^* = -\lambda vvv^* = -\lambda v$$

Ist $w \in v^\perp$, so gilt

$$0 = \langle w,v\rangle = \frac{1}{2}(wv^* + vw^*),$$

also

$$wv^* = -vw^* = vw$$

und es folgt

$$(-1)^{|v|}vwv^* = -vvw = v^*vw = w.$$

Fasst man Drehungen in $\mathbb{R}^n$ als Verkettung von Spiegelungen auf, so ist klar, dass die von geraden Elemente erzeugte Untergruppe

$$\mathrm{Spin}(n) = \{g \in \mathrm{Cl}^+(0,n,0) \mid gg^* = 1 \text{ und } (-1)^{|g|}gxg^* \in \mathbb{R}^n \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}$$

gerade die zweifache Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$ ist. Wir werden uns nun im Folgenden auf den Fall $n = 3$ beschränken. Sei $g \in \mathrm{Cl}^+(0,3,0)$ mit

$$g = a_0 + a_1e_2e_3 + a_2e_3e_1 + a_3e_1e_2$$

und

$$\begin{aligned}
g^* &= a_0 + a_1(e_2e_3)^* + a_2(e_3e_1)^* + a_3(e_1e_2)^*\\
&= a_0 + a_1e_3^*e_2^* + a_2e_1^*e_3^* + a_3e_2^*e_1^*\\
&= a_0 + a_1(-e_3)(-e_2) + a_1(-e_1)(-e_3) + a_1(-e_2)(-e_1)\\
&= a_0 - a_1e_2e_3 - a_2e_3e_1 - a_3e_1e_2
\end{aligned}$$

und damit

$$gg^* = \dots = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

und man rechnet leicht nach, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ schon $(-1)^{|g|}gxg^* \in \mathbb{R}^n$ gilt, Danmit gilt

$$\mathrm{Spin}(3) \subseteq \mathbb{S}^3 \subseteq \mathrm{Cl}^+(0,3,0) = [\overset{i}{e_2e_3}, \overset{j}{e_3e_1}, \overset{k}{e_1e_2}] = \mathbb{H}$$

Beispiel
Die Drehung um den Winkel ϑ um die Achse e_k wird definiert durch

$$g = \cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\vartheta}{2} e_i e_j,$$

wobei $k \notin \{i, j\}$ für $i \neq j$ gelte. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
g e_k g^* &= \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\vartheta}{2} e_i e_j\right) e_k \left(\cos\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2} e_i e_j\right) \\
&= \cos^2\frac{\vartheta}{2} e_k + \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} e_i e_j e_k - \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} e_k e_i e_j + \sin^2\frac{\vartheta}{2} e_i e_j e_k e_i e_j \\
&= \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) e_k = e_k \\
g e_j g^* &= \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\vartheta}{2} e_i e_j\right) e_k \left(\cos\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2} e_i e_j\right) \\
&= \ldots = \left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) e_j - 2\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} e_i \\
&= \cos\vartheta e_j - \sin\vartheta e_i
\end{aligned}$$

Betracht $\mathrm{Spin}(n) \times \mathbb{R}^n = \{„g + t“\}$. Betrachte $\mathrm{Cl}(0, n, 1)$ mit den Erzeugern $e_1, \ldots, e_n$ mit $e_i^2 = -1$, sowie e mit $e^2 = 0$. $\mathrm{Cl}(0, n, 1)$ enthält mit $(x^1, \ldots, x^n)^T \mapsto 1 + (x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n)e$ einen $\mathbb{R}^n$, und die Gruppe

$$\mathrm{Spin}(n) \times \mathbb{R}^n = \{(g + \frac{1}{2}tge) \in \mathrm{Cl}(0, n, 1) \mid g \in \mathrm{Spin}(n), t = t^1 e_1 + \ldots + t^n e_n\}$$

wirkt durch

$$(g + \frac{1}{2}tge)(1 + xe)(g - \frac{1}{2}tge)^* = \ldots = 1 + (gxg^* + t)e.$$

Das sind unsere gesuchten euklidischen Bewegungen.

Beispiel
Ist $h = (g + \frac{1}{2}tge)$ eine reine Drehung, also $t = 0$, so gilt

$$h(1 + xe)h^* = g(1 + xe)g^* = gg^* + gxeg^* = 1 + (gxg^*)e$$

Die letzte Gleichheit kommt daher, dass g gerade ist. Ist $h = (1 + \frac{1}{2}te)$ reine reine Translation, so gilt

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{1}{2}te)(1 + xe)(1 - \frac{1}{2}te)^* &= (1 + \frac{1}{2}te + xe + \frac{1}{2}texe) \cdot (1 - \frac{1}{2}te)^* \\
&= (1 + \frac{1}{2}te + xe)(1 - \frac{1}{2}et) \\
&= 1 + \frac{1}{2}te + xe - \frac{1}{2}et - \frac{1}{4}te^2t - \frac{1}{2}xe^2t \\
&= 1 + te + xe = 1 + (x + t)e
\end{aligned}$$

Wo ist die „Geometrie"?

Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind mit einer Einheitsnormalen $n \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ und einem „Abstand" d gegeben durch

$$H_{n,d} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n, x\rangle = d\}.$$

Ist (R, v) eine euklidische Bewegung, so gilt

$$(R, v)H_{n,d} = \{x \mid d = \langle n, R^T x - R^T v\rangle = \langle Rn, x\rangle - \langle Rn, v\rangle\} = H_{Rn,d+\langle Rn,v\rangle}.$$

Betrachte Elemente vom Grad 1 in $\mathrm{Cl}(0, 3, 1)$, also $\pi = n_x e_1 + n_y e_2 + n_z e_3 + de$. Für $n = (n_x, x_y, x_z)^T$ gilt genau dann $\|n\| = 1$, falls $\pi\pi^* = 1$. Ist $h = g + \frac{1}{2}tge$ eine euklidische Bewegung, so gilt

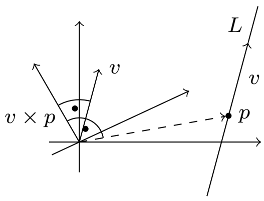
$$\begin{aligned} h\pi h^* &= \left(g + \frac{1}{2}tge\right)(n + de)\left(g - \frac{1}{2}tge\right)^* = \dots \\ &= gng^* + \left(d - \frac{1}{2}(gng^*t + tgng^*)\right) e \text{„="} - \langle Rn, v\rangle. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den vorangegeangen Betrachtungen werden jetzt „geometrische" **Punkte** *nicht* als Grad 1 Elemente in $\mathrm{Cl}(0, 3, 1)$ modelliert, sondern wie folgt: Ein Punkt ist von der Form

$$p = e_1e_2e_3 + xe_2e_3e + ye_3e_1e + ze_1e_2e.$$

Die ist äquivalent (bis auf Vorzeichen) zu $pp^* = 1$. Die Wirkung von $\mathrm{Spin}(3) \times \mathbb{R}^3$ (beziehungsweise $\mathrm{SE}(3)$) ist wieder gegeben durch

$$(g + \frac{1}{2}tge)p(g - \frac{1}{2}tge).$$



Im $\mathbb{R}^3$ ist eine **Gerade** L durch einen Punkt $p \in L$ und eine Richtung $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben. In $\mathrm{Cl}(0, 3, 1)$ ist dann die entsprechende Gerade gegeben durch

$$L = (v_xe_2e_3 + v_ye_3e_1 + v_ze_1e_2) + (u_xe_1e + u_ye_2e + u_ze_3e)$$

mit $u = (u_x, u_y, u_z)^T = p \times v$. Dies ist äquivalent zu $ll^* = 1$. Die Wirkung ist durch Konjugation gegeben.

Durch die Relation $x \wedge y = -y \wedge x$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ erhält man die äußere Algebra $\bigwedge \mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}^n$. Diese findet sich wie folgt in der Clifford Algebra wieder: Sind $x \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathrm{Cl}$, so sind

$$x \wedge c = \frac{1}{2}(xc + (-1)^{|c|}cx) \qquad\qquad c \wedge x = \frac{1}{2}(cx + (-1)^{|c|}xc).$$

Die $\mathbb{R}$-lineare und assoziative Einbettung ergibt ein (weites) Produkt in Cl. Für Basiselemente $e_i, e_j \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$e_i \wedge e_j = \frac{1}{2}(e_ie_j - e_je_i) = \begin{cases} 0 & i = j \\ -e_j \wedge e_i & i \neq i \end{cases}.$$

Damit erhält Cl die äußere Algebra. Für $i \neq j$ gilt ferner

$$e_i \wedge e_j = \frac{1}{2}(e_i e_j - e_j e_i) = \frac{1}{2}(e_i e_j + e_i e_j) = e_i e_j.$$

Betrachte das äußere Produkt eines Punktes $p = e_1e_2e_3 + xe_2e_3e + ye_3e_1e + ze_1e_2e$ und einer Ebene $\pi = n_x e_1 + n_y e_2 + n_z e_3 + de$. Dann gilt

$$\pi \wedge p = \frac{1}{2}(\pi p - p\pi) = (xn_x + yn_y + zn_z - d)e_1e_2e_3e.$$

Damit liegt genau dann der Punkt p in der Ebene π, wenn $\pi \wedge p = 0$ gilt. Analog zeigt man, dass eine Gerade l genau dann in einer Ebene π liegt, wenn $\pi \wedge l = 0$ gilt. Der Ausdruck $l \wedge p$ verschwindet (formal), da Grad $l \wedge p > 4$. Ein Punkt p liegt jedoch genau dann auf einer Geraden l, wenn $pl^* + lp^* = 0$ gilt.
Allgemeiner lässt sich der Schnitt zweier geometrischer Objekte mit Hilfe des äußeren Produktes charakterisieren: Es seien π_1 und π_2 zwei Ebenen. Dann ist jedenfalls $\pi_1 \wedge \pi_2$ ein Grad 2 Element. Es bleibt zu zigen, dass das eine Gerade definiert, also die Bedingung $ll^* = 1$ erfüllt ist. Es gilt

$$(\pi_1 \wedge \pi_2) = \frac{1}{2}(\pi_1\pi_2 + (-1)^{|\pi_2|}\pi_2\pi_1) = \frac{1}{2}(\pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1),$$

also

$$\begin{aligned}(\pi_1 \wedge \pi_2)(\pi_1 \wedge \pi_2)^* &= \frac{1}{4}(\pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1)(\pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1)^* \\ &= \frac{1}{4}(\pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1)(\pi_2\pi_1 - \pi_1\pi_2) \\ &= \frac{1}{4}(\pi_1\pi_2\pi_2\pi_1 + \pi_2\pi_1\pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1\pi_2\pi_1 - \pi_1\pi_2\pi_1\pi_2) \\ &= \frac{1}{4}(2 - \pi_2\pi_1\pi_2\pi_1 - \pi_1\pi_2\pi_1\pi_2)\end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass sich alle Grad 4 Terme aufheben, und dass keine Grad 1 oder Grad 2 Terme auftreten, da $(\pi_1 \wedge \pi_2)(\pi_1 \wedge \pi_2)^*$ selbstandjungiert ist. Damit ist

$$l = \frac{\pi_1 \wedge \pi_2}{\sqrt{\pm(\pi_1 \wedge \pi_2)(\pi_1 \wedge \pi_2)^*}}$$

eine Gerade. Wegen $\pi_1 \wedge (\pi_1 \wedge \pi_2) = 0 = \pi_2 \wedge (\pi_1 \wedge \pi_2)$ ist l in π_1 und π_2 enthalten. Analog zeigt man, dass sowohl das äußere Produkt p einer Geraden l und einer Ebene π mit

$$p = \frac{l \wedge \pi}{\sqrt{\pm(l \wedge \pi)(l \wedge \pi)^*}},$$

als auch das äußere Produkt dreier Ebenen $p = \frac{1}{(\ldots)}\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3$ einen Punkt ergeben.

Anwendung

Die inverse Kinematik eine Roboters mit sechse Gelenken ist lösbar, falls drei aufeinanderfolgende Drehachsen entweder einen gemeinsamen Schnittpunkt haben (Piper 1968) oder parallel sind (Duffy 1980). Die inverse Kinematik ist gegeben durch

$$k(\vartheta) = a_1(\vartheta_1)a_2(\vartheta_2)\ldots a_6(\vartheta_6),$$