

# 14. Topologie-Übung

Joachim Breitner

6. Februar 2008

## Aufgabe 1

Seien  $X, Y$  wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend, hausdorff'sch, und  $Y$  kompakt.

**Behauptung:** Ein lokaler Homöomorphismus  $f : Y \rightarrow X$  ist Überlagerung.

Sei  $x \in X$ . Es gilt:  $f^{-1}(x)$  endlich.

Denn wäre  $f^{-1}(x)$  unendlich dann hätte  $f^{-1}(x)$  einen Häufungspunkt  $h$  im kompakten Hausdorffraum  $Y$ .  $h$  hat keine Umgebung  $V$ , so dass  $f|_V$  ein Homöomorphismus ist, denn in jeder Umgebung von  $h$  liegt ein Element von  $f^{-1}(x)$ , im Widerspruch zur Injektivität von  $f|_V$ .

Also gilt:  $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Wähle für jedes  $y_i$  eine Umgebung  $U_i$ , so dass alle  $U_i$  disjunkt und wegzusammenhängend sind und  $f|_{U_i}$  Homöomorphismen auf eine offene Teilmenge  $U$  von  $X$  sind.

Setze  $V := \bigcap_{i=1}^n f(U_i)$ , dann enthält  $f^{-1}(V)$   $n$  „Kopien“ von  $V$ , in jedem  $U_i$  eine.

Noch zu zeigen: Es gibt eine Umgebung  $\tilde{V}$  von  $x$ ,  $\tilde{V} \subseteq V$ , so dass für alle  $\tilde{x} \in \tilde{V}$  gilt:  $\#f^{-1}(\tilde{x}) = \#f^{-1}(x) = n$ .

Angenommen, in jeder Umgebung  $\tilde{V}$  von  $x$  gibt es ein  $\tilde{x}$ , so dass  $\#f^{-1}(\tilde{x}) > n$ , dann gibt es eine Folge  $(x_k) \in V$ , mit  $\#f^{-1}(x_k) > n$ .  $f^{-1}(\tilde{x}) > n \implies \exists \tilde{y} \in f^{-1}(\tilde{x}) : \tilde{y} \notin V_1 \cap \dots \cap V_n$ .  $Y$  ist kompakt, also hat  $(x_k)$  einen Häufungspunkt, o.B.d.A.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  existiert, also  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ , Wid!.

## Aufgabe 2

Seien  $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1$ ,  $p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$  Überlagerungen.

**Behauptung:**  $p_1 \times p_2 : Y_1 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  ist auch eine Überlagerung.

Sei  $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ . Zu zeigen: Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $(x_1, x_2)$ , so dass  $p^{-1}(U)$  disjunkte Vereinigung von offenen Mengen in  $Y_1 \times Y_2$  ist die alle homöomorph sind zu  $U$ .

$p_1$  ist Überlagerung, das heißt es gibt eine offene Umgebung  $U_1$  von  $x_1$ , so dass  $f^{-1}(U_1) = \bigcup_{i \in I} \tilde{V}_i$ ,  $\tilde{V}_i$  homöomorph zu  $U_i$  für  $i \in I$ .  $p_2$  ist auch Überlagerung, das heißt es gibt eine offene Umgebung  $U_2$  von  $x_2$ , so dass  $f^{-1}(U_2) = \bigcup_{j \in J} \tilde{W}_j$ ,  $\tilde{W}_j$  homöomorph zu  $U_j$  für  $j \in J$ .

Dann gilt:

$$(p_1 \times p_2)^{-1}(U_1 \times U_2) = f^{-1}(U_1) \times f^{-1}(U_2) = \bigcup_{i \in I} \tilde{V}_i \times \bigcup_{j \in J} \tilde{W}_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (\tilde{V}_i \times \tilde{W}_j)$$

da die  $\tilde{V}_i, \tilde{W}_j$  disjunkt und offen sind, sind die  $\tilde{V}_i \times \tilde{W}_j$  disjunkt und offen, und  $p_1 \times p_2$  ist ein Homöomorphismus von  $\tilde{V}_i \times \tilde{W}_j$  nach  $U_1 \times U_2$ . Also ist  $p_1 \times p_2$  eine Überlagerung.

### Aufgabe 3

Sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung.

**Behauptung:** Ist  $X$  ein Hausdorffraum, so auch  $Y$ .

Seien  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $y_1 \neq y_2$ .

1. Fall:  $p(y_1) = p(y_2) = x$ , dann „Überlagerungsumgebungen“ von  $y_1, y_2$  sind offen und disjunkt, trennen also  $y_1$  und  $y_2$ .

2. Fall:  $p(y_1) \neq p(y_2)$ . Man findet offene disjunkte Umgebungen, die  $p(y_1)$  und  $p(y_2)$  trennen. Deren Urbilder sind disjunkte offene Umgebungen, die  $y_1$  und  $y_2$  trennen.

**Behauptung:** Ist  $X$  kompakt und  $p^{-1}(x)$  für jedes  $x \in X$  endlich, so ist auch  $Y$  kompakt.

Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ . Zu zeigen: Man kann daraus eine endliche Teilüberdeckung wählen. Für jedes  $x \in X$  ist  $p^{-1}(x)$  endlich. Das heißt: Es gibt eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$ , sodass  $f^{-1}x$  von  $(U_j)_{j \in J}$  überdeckt wird.

Setze  $O_x := \bigcup_{j \in J} U_j$ . Zu  $O_x$  existiert eine offene Teilmenge  $V_x$  von  $x$ , so dass  $x \in V_x$  und  $f^{-1}(V_x) \subseteq O_x$ .

Denn  $p$  ist Überlagerung, also gibt es eine Umgebung  $V$  von  $x$ , so dass  $p^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ ,  $U_i$  disjunkt und homöomorph zu  $V$ . Definiere  $V_x := p(\bigcup_{i=1}^n U_i \cap O_x)$ .

Klar:  $\{V_x, x \in x\}$  ist offene Überdeckung von  $X$  und  $X$  ist kompakt, also gibt es  $x_1, \dots, x_m$  aus  $X$ , so dass  $V_{x_1}, \dots, V_{x_m}$  schon  $X$  überdecken.

Die zu  $V_{x_i}$  „gehörigen“  $U_j, j \in J_{x_i}$ , für  $i = 1, \dots, m$  bilden eine Teilüberdeckung von  $(U_i)_{i \in I}$ , denn für  $y \in Y$ ,  $x = p(y) \in V_{x_i}$ , so ist  $y \in f^{-1}(V_{x_i}) \subseteq O_x = \bigcup_{j \in J_{x_i}} U_j$ , also ist  $y \in U_j$  für so ein  $j$ .