

Kapitel 2

Hilberträume

(Weidmann: Lin Op auf HR, Band I)

2.1 Grundlegende Eigenschaften

Definition 2.1 Ein *Skalarprodukt* $(x|y)$ auf einem VR X ist eine Abbildung von X^2 nach \mathbb{K} mit

1. $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$

2. $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$

3. $(x|y) = \overline{(y|x)}$

(a) - c) *Sesquilinearform*)

d) $(x|x) \geq 0$, $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*positiv definit*)

für alle $x_1, x_2, x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Wir setzen $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

Bemerkung 2.2 1. Aus a) - c) folgen $(x, 0) = 0$ und $(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} (x|y_1) + \overline{\alpha_2} (x|y_2)$ für alle $x, y_1, y_2 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

2. Für $x, y \in X$ gilt die Cauchy-Schwarze Ungl. (CS) $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = \alpha y$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$. (Bew: LA, Werner V, 1.2)

3. $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf X , denn:

(i) $\|\alpha x\| = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} (x|x)} = |\alpha| \|x\|$

(ii) $\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + (x|y) + (y|x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}(x|y)}_{\leq 2\|x\|\|y\|} + \|y\|^2 \stackrel{CS}{(2.1)} \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

(iii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4. *Beh:* Das Skalarprodukt ist stetig.

Bew: Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$. Dann:

$$\begin{aligned} |(x_1 - x_2|y_1 - y_2)| &\leq |(x_1 - x_2|y)| + |(x_2|y_1 - y_2)| \\ &\stackrel{CS}{\leq} \|x_1 - x_2\| \|y_1\| + \|x_2\| \|y_1 - y_2\| \quad (\Rightarrow \text{lokal Lipschitz}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Definition 2.3 Sei $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf X . Dann heißt $(X, \|\cdot\|)$ ein **Prä Hilbertraum**. Wenn $\|\cdot\|$ vollständig ist, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ **Hilbertraum (HR)** (mit $\|\cdot\|$ aus Def 2.1)

Beispiel 2.4 In a)-d) werden HR def.

1. $X = \mathbb{K}^n$, $(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2$
2. $X = \ell^2$, $(x|y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ (Summe konv absolut nach Hölder mit $p = 2$.
 $\|x\| = \|x\|_2$)
3. Sei $A \in \mathcal{L}_d$, $X = L^2(A)$ $(f|g) = \int_A f(x) \overline{g(x)} dx$ (ex nach Hölder mit $p = p' = 2$.)
 $\|f\| = \|f\|_2$.
4. Sei S eine Menge. Setze $\ell^2(S) = \{f : S \Rightarrow \mathbb{K}, f(s_j) \neq 0 \text{ nur für höchstens abzählbar viele } s_j \in S \text{ (abh von } f) \text{ mit } \sum_{s \in S} |f(s)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |f(s_j)|^2 < \infty\}$
Wie bei $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ sieht man, dann $(f|g) = \sum_{s \in S} f(s) \overline{g(s)}$ ein Skalarprodukt ist und $\|f\|^2 := \sum_{s \in S} |f(s)|^2$ ist vollständig.
5. Teilräume von Prä HR sind Prä HR mit gleichem Skalarprodukt.

-1

Lemma 2.6 Ein nVR X ist ein Prä HR genau dann, wenn $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (2.2) (Parallelogrammgl) für $x, y \in X$ gilt.

Beweis $\hat{A}' \hat{A}' \quad \|x + y\|^2 \stackrel{2.1}{=} \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2. \quad \|x - y\|^2 \stackrel{2.1}{=} \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2 \Rightarrow (2.2)$

“ $\hat{A}' \hat{A}'$ ” siehe Werner, V, 1.6 ■

Korollar 2.7 Die Vervollständigung eines Prä HR X ist ein HR.

Beweis (2.2) gilt auf X und somit auch auf \tilde{X} per Approximation. ■

Definition 2.8 Zwei Elementen x, y eines PräHR X heißen **orthogonal**, wenn $(x|y) = 0$. Zwei TM A, B heißen **orthogonal**, wenn $(a|b) = 0 \forall a \in A, b \in B$. Mann schreibt $x \perp$ auf y bzw $A \perp B$. Das orthogonale Komplement A^\perp von $A \subseteq X$ ist gegeben durch $A^\perp = \{x \in X : x \perp a \forall a \in A\}$.

Ein **Orthogonalsystem (ONS)** ist eine TM $S \subseteq X$ mit $\|b\| = 1$ und $b \perp b'$ für alle $b, b' \in S, b \neq b'$

Bemerkung 2.9 Sei X ein PräHR, $x, y \in X, A, B \subseteq X$. Dann gelten:

1. $x \perp x \Rightarrow x = 0, x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.
2. Pythagoras: $x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 \stackrel{(2.1)}{=} \|x\|^2 + \|y\|^2$
3. $X^\perp = \{0\}, A \cap A^\perp = \{0\}. A \subseteq (A^\perp)^\perp$ nach a), $\{0\}^\perp = X$.
4. A^\perp ist UVR (klar) und abg $(x_n \perp a, x_n \rightarrow x \Rightarrow (x|a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n|a) = 0)$
5. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp. A^\perp = (\overline{\lim A})^\perp$ (wie d))
6. $(x|y) = (z, y) \forall y \in X \Rightarrow (x - z) \perp X \xrightarrow{a)} x = z$

Theorem 2.10 (Projektionssatz) Sei X ein HR, $K \subseteq X$ abg + konvex. Dann ex für jedes $x \in X$ genau ein $y_* = P_K(x) \in K$ mit $\|x - P_K(x)\| = \inf_{y \in K} \|x - y\| = d(x, K)$. Wenn $x \in K$, dann gilt $P_K(x) = x$ (mit $d(x, K)$), und $P_K \circ P_K = P_K, R(P_K) = K$

Beweis $R(p_k) = K$: klar.

Wenn $x \neq 0$, so können wir $\tilde{x} = 0$ und $\tilde{K} = K - x$ betrachten. Sei also $x = 0 \notin K$. Dann ex $y_n \in K$ mit $\|y_n\| \rightarrow \kappa := \inf\{\|y\|, y \in K\}$ ($n \rightarrow \infty$). $\kappa > 0$, da K abg.

$$2.2 \Rightarrow \|\frac{1}{2}(y_n - y_m)\|^2 = \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 - \underbrace{\|\frac{1}{2}(y_n + y_m)\|}_{\in K} \leq \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 - \kappa^2 \rightarrow$$

0 ($n, m \rightarrow \infty$)

$\Rightarrow \exists y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in K, K$ abg. Ferner $\|y^*\| = \kappa$.

Sei $y_0 \in K, y_* \neq y_0, \|y_0\| = \kappa. \Rightarrow \|\frac{1}{2}(y_0 - y_*)\|^2 < \|\frac{1}{2}(y_0 + y_*)\|^2 + \|\frac{1}{2}(y_0 - y_*)\|^2 \stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{2}\|y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|y_*\|^2 = \kappa^2$. Wid zu $\frac{1}{2}(y_0 + y_*) \in K$ ■

Bemerkung Theorem gilt auch (mit ähnlichem Beweis) für gleichmäßig konvexe BRe, d.h.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in (0, 2] \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad & \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \\ \implies & \|\frac{1}{2}(x + y)\| \leq 1 - \delta \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x, y > 0\}$ ist glm konvex
2. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, x, y > 0\}$ ist nicht glm konvex

HRe sind glm konvext mit $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ nach (2.2)

Ferner: $L^p(A), \ell^p$ ($1 < p < \infty$) sind glm konvex (Dobrowdski, Satz 4.29)

Korollar 2.11 In der Situation von Theorem 2.8 gilt:

$$y = p_K(x) \iff y \in K \text{ und } \operatorname{Re}(x - y|z - y) \leq 0 \forall z \in K$$

Nachtrag zu Beispiel 2.4 c)

$A \in \mathcal{L}^d : \omega : A \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $\omega(x) > 0 \forall x \in A$. Dann: $X = L^2(A, \omega) = \{f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar, } \sqrt{\omega}f \in L^2(A)\}$ $(f|g) = \int_A f\bar{g}\omega dx \Rightarrow$ Skalarprodukt mit vollständiger Norm $\|f\|_{2;\omega} = \left(\int_A |f|^2 \omega dx\right)^{\frac{1}{2}}$

Definition 2.12 Sei X ein PräHR. Eine Projektion $P \in B(X)$ heißt **orthogonal** $:\Leftrightarrow R(P) \perp N(P)$

Theorem 2.13 Sei X ein HR, $Y \subseteq X$ ein abg UVR. Dann ist die Projektion P aus Theorem 2.8 linear mit $\|P\| = 1$ und es gelten: $R(P) = Y, N(P) = Y^\perp$ und $X = Y \oplus Y^\perp$. Insbesondere gilt:

P ist orthogonal und $X_{|Y} \cong Y^\perp$ (Bsp 1.76)

Beweis Sei $x \in X$ und $P = P_y$. Dann: $y = Px \stackrel{2.9}{\Leftrightarrow} y \in Y, \operatorname{Re}(x - y|z - y) \leq 0 \forall z \in Y \stackrel{Y \text{ UVR}}{\Leftrightarrow} y \in Y, \operatorname{Re}(x - y|z') \leq 0 \forall z' \in Y \Leftrightarrow y \in Y, (x - y|z') = 0 \forall z' \in Y \setminus \{y\} \Rightarrow$: Betrachte $-z', \pm iz'$ $\Rightarrow x - y \perp Y$ (*)

Also: $R(I - P) = Y^\perp$

Seien $x_1, x_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Da Y^\perp UVR gilt:

$$\begin{aligned} & \alpha_1(x_1 - Px_1) + \alpha_2(x_2 - Px_2) \in Y^\perp \\ \stackrel{(*)}{\Rightarrow} & y = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2 = P(\underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}_{=:x}) \Rightarrow P \text{ ist linear.} \end{aligned}$$

$$2.8 \Rightarrow P^2 = P, R(P) = Y.$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner: } & \|x^2\| = \|Px + (I - P)x\|^2 \stackrel{\text{Pyth.}}{=} \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2 \geq \|Px\|^2 \\ \Rightarrow & P \text{ ist stetig und } \|P\| \leq 1. \end{aligned}$$

$$\text{Lemma 1.73} \Rightarrow \|P\| \geq 1$$

$$\Rightarrow \|P\| = 1$$

Sei X HR. Für $y \in X$ definiere $\Phi(y) : X \rightarrow \mathbb{C}$ durch $(\Phi(y))(x) = (x|y)$, $x \in X \Rightarrow \Phi(y)$ ist linear. Nach CS:

$$|(\Phi(y))(x)| \leq \|x\| \|y\| \Rightarrow \Phi(y) \in X^*, \|\Phi(y)\|_{X^*} \leq \|y\|_X \quad \blacksquare$$

Theorem 2.14 Sei X ein HR. Dann ist obiges $\Phi : X \rightarrow X^*$ "konjugiert linear" oder "...unlesbar...", d.h. $\Phi(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} \Phi(y_1) + \overline{\alpha_2} \Phi(y_2)$, bijektiv und isometrisch. D.h. $\forall x^* \in X^* \exists$ genau ein $y \in X$, sodass $\|x^*\|_{X^*} = \|y\|_X$ und $\langle x, x^* \rangle = (x|y) \forall x \in X$.

Beweis Offenbar ist Φ konjugiert linear. Sei $y \in X \setminus \{0\}$. Setze $x = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \|\Phi(y)\|_{X^*} \geq |(\Phi(y))(x)| = \frac{1}{\|y\|} |(y|y)| = \|y\|_X \Rightarrow \Phi$ ist Isometrie.

z.z: Φ ist surjektiv. Sei $x^* \in X^* \setminus \{0\} \Rightarrow R(x^*) = \mathbb{C}$. Sei $U = N(x^*) \Rightarrow U \neq X, U$ abg. UVR. Theorem 2.11 $\Rightarrow X = U \oplus U^\perp$. 1.77 und Bsp 1.76 liefern:

$x^*_{|U^\perp}$ ist bijektiv $\Rightarrow U^\perp = 1$. Sei $y \in U^\perp$ mit $\langle y, x^* \rangle = 1$. Für $x \in X$ gibt es also eindeutige $u \in U, \alpha \in \mathbb{K}$ mit $x = u + \alpha y$. Damit: $\langle x, x^* \rangle = \langle u, x^* \rangle + \alpha \langle y, x^* \rangle = \alpha$.

$$(x|y) = (u|y) + \alpha(y|y) = \alpha \|y\|_X^2 \Rightarrow x^* = \Phi\left(\frac{1}{\|y\|^2} y\right) \quad \blacksquare$$

2.2 Othonormalbasen

Definition 2.15 Ein Orthonormalsystem (ONS) S heißt **Orthonormalbasis** (ONB) $:\Leftrightarrow S$ ist maximal, d.h. $\text{ONS } S', S \subseteq S' \Rightarrow S = S'$

Beispiel (zu ONS, später sind alles ONBs) a) $X = \ell^2$, $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ ist ONS. Wenn $X = \ell^2(J)$, dann bilden

$$e_j(i) = \begin{cases} 1 & , j = i \\ 0 & , j \neq i \end{cases} \text{ ein ONS.}$$

b) $X = L^2([0, 2\pi])$. $S = \{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$ mit $f_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$ ($t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$) ist ein ONS, denn:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 dt = 1$$

$$n \neq m \Rightarrow (f_n | f_m) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi i(n-m)} e^{i(n-m)t} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

reelle Variante:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n), n \in \mathbb{N} \right\} \text{ ist ONS.}$$

Satz 2.16 Sei X ein HR, $x, y \in X$, $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)|^2 \leq \|x\|^2 \text{ Besselsche Ungleichung.}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)(y|b_n)| < \infty \text{ für } x, y \in X$$

Beweis a) Sei $N \in \mathbb{N}, x \in X$. Setze $x_N = x - \sum_{k=1}^N (x|b_k)b_k \Rightarrow x_N \perp b_n, n = 1, \dots, N \xrightarrow{\text{Pyth.}} \|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \sum_{k=1}^N \underbrace{\|(x|b_k)b_k\|^2}_{=|(x|b_k)|^2} \geq \sum_{k=1}^N |(x|b_k)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Beh.}$

b) folgt aus Hölder ■

Lemma 2.17 Sei $S \subseteq X$ ein ONS und X ein HR, $x \in X$. Dann ist die Menge $S_x := \{b \in S : (x|b) \neq 0\}$ höchstens abzählbar. Beachte: S_x ist ONS.

Beweis Sei $k \in \mathbb{N}$. Nach 2.15a) ist $S_{x,k} := \{b \in S, |(x|b)|^2 \geq \frac{1}{k}\}$ ist endlich. $S_x = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_{x,k} \Rightarrow S_x$ ist abzählbar. ■

Sei X ein UVR, J eine Indexmenge und $x_j \in X$ für $j \in J$. Man sagt, dass $\sum_{j \in J} x_j$ **unbedingt konvergiert** gegen $x \in X$, wenn

- i) $J_0 = \{j \in J : x_j \neq 0\}$ ist höchstens abzählbar
- ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{j_n}$ für jede Abzählung $\{j_1, j_2, \dots\}$ von J_0 .

Dann schreibt man $x = \sum_{j \in J} x_j$.

Bemerkung 1. $\dim X < \infty$: absolut konvergent \Leftrightarrow unbedingt konvergent (Riemannscher Umordnungssatz)

- 2. $\dim X = \infty$ absolut konvergent $\xrightarrow{\text{wie in } \mathbb{R}}$ unbedingt konvergent. Rückrichtung gilt nicht, vgl (Dvoretzky-Rogers)

Satz 2.18 Sei S ein ONS im HR X und $x \in X$. Dann:

- a) $\sum_{b \in S} |(x|b)|^2 \leq \|x\|^2$
- b) $Px := \sum_{b \in S} (x|b)b$ konv. unbedingt.
- c) P ist Orthogonalprojektion auf $\overline{\text{lin } S}$ und $X = \overline{\text{lin } S} \oplus S^\perp$
- d) \exists ONS $B \supset S$

Beweis Sei $S_x = \{b_1, b_2, \dots\}$ wie in Lemma 2.16

- a) Folgt aus 2.15a) und 2.16
- b) Sei $N \geq M$. Pyth+Bessel liefern

$$\left\| \sum_{n=m}^N (x|b_n)b_n \right\|^2 = \sum_{n=m}^N |(x|b_n)|^2 \underbrace{\|b_n\|^2}_{=1} \rightarrow 0 \quad (N, M \rightarrow \infty)$$

$$\xrightarrow{\text{Cauchy-Folge}} \exists y := \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)b_n \text{ und } \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)|^2 \stackrel{a)}{\leq} \|x\|^2 \quad (*)$$

Sei $\{b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \dots\}$ eine Umordnung von S_x . Wir erhalten genauso $y_\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_{\pi(n)})b_{\pi(n)}$. Sei $z \in X$. Dann:

$$\begin{aligned} (y_\pi|z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_{\pi(n)})b_{\pi(n)} \\ &\stackrel{2.15b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)(b_n|z) = (y|z) \\ &\Rightarrow (y_\pi - y|z) \quad \forall z \in X \stackrel{2.7f)}{\Rightarrow} y_\pi = y. \end{aligned}$$

- c) $Px := y$ ist linear und nach $(*)$ stetig auf X . Sei $x \in X \Rightarrow P^2x = \sum_{b \in S} \sum_{b' \in S} (x|b)(b|b')b' \stackrel{\text{ONS}}{=} \sum_{b \in S} (x|b)b = Px$.
 Klar: $R(P) \subseteq \overline{\text{lin } S}$ und $S \subseteq R(P)$. UVR $\Rightarrow R(P) = \overline{\text{lin } S}$. Ferner: $S^\perp \subseteq N(P) = R(I-P)$. Sei $b_0 \in S$. Dann: $(x - Px|b_0) = (x|b_0) - (x|b_0)(b_0|b_0) = 0 \Rightarrow \underbrace{N(P)}_{=R(I-P)} \subseteq S^\perp \Rightarrow N(P) = S^\perp = \overline{\text{lin } S}^\perp$

zu d) Sei " \leq " eine partielle Ordnung auf einer Menge $M \neq \emptyset$. $K \subseteq M$ heißt **Kette**, wenn für alle $x, y \in K$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Ein maximales Element in M ist $x^* \in M$ wenn für $x \in M, x \geq x^*$ folgt: $x = x^*$

Lemma von Zorn:

Sei (M, \leq) eine geordnete Menge, sodass jede Kette in M eine obere Schranke hat. Dann hat jede Kette ein maximales Element in M .

d) Betrachte $\mathcal{S} := \{S' \subseteq X : S' \text{ ONS}, S \subseteq S'\}$ mit Mengeninklusion. Eine Kette S_0 in \mathcal{S} hat die obere Schranke $\bigcup_{S' \in S_0} S' \in \mathcal{S} \xrightarrow{\text{Lemma von Zorn}} \exists$ maximales Element $B \in \mathcal{S} \Rightarrow B$ ist die gewünschte ONB ■

Theorem 2.19 Sei X ein HR und $S \subseteq X$ ein ONS. Dann sind äquivalent:

a) S ist ONB.

b) $S^\perp = \{0\}$

c) $X = \overline{\text{lin } S}$

d) $x = \sum_{b \in S} (x|b)b \ \forall x \in X$ (unbedingte konvergenz)

e) $(x|y) = \sum_{b \in S} (x|b)(b|y) \ \forall x, y \in X$

f) **Parsevalsche Gleichung:** $\|x\|^2 = \sum_{b \in S} |(x|b)|^2 \ \forall x \in X$

Beweis \Rightarrow b) Annahme: $y \in S^\perp, y \neq 0 \Rightarrow S' = \{\frac{1}{\|y\|}y\} \cup S$ ist ONS. Wid zu S ONB!

b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) folgen aus 2.17, denn $Px = \sum_{b \in S} (x|b)b$ ist orthogonale Projektion auf $\overline{\text{lin } S}$ mit $N(P) = S^\perp$

d) \Rightarrow e) Sei $S_x \cup S_y = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ (Lemma 2.16). Dann liefert d)

$$\begin{aligned} (x|y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)b_n \mid \sum_{m=1}^{\infty} (y|b_m)b_m \right) \stackrel{(\cdot|\cdot) \text{ stetig}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} ((x|b_n)b_n | (y|b_m)b_m) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (x|b_n) \overline{(y|b_m)} \underbrace{(b_n|b_m)}_{=\delta_{mn}} = \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)(b_n|y) = \sum_{b \in S} (x|b)(b|y) \end{aligned}$$

e) \Rightarrow f) Setze $x = y$.

f) \Rightarrow a) Annahme: S ist keine ONB $\Rightarrow \exists x \in X : \|x\| = 1 \ x \perp S \xrightarrow{f)} \|x\|^2 = \sum_{b \in S} \underbrace{|(x|b)|^2}_{=0}$ Wid! ■

Beispiel Sei $X = L^2([-1, 1])$. Sei weiter S die Orthonormalisierung von $\{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ mit $f_n(t) = t^n, t \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}_0$. (Legendre Polynome). S ist dann ONS mit $\text{lin } S = \text{lin } \{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Nach Bsp 1.55: $\text{lin } \{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $C([-1, 1]) \hookrightarrow L^2([-1, 1]) \Rightarrow \text{lin } \{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $X \Rightarrow S$ ist ONB (vgl ÜB 21)

Bemerkung 2.20 Die Koeffizienten $(x|b)$ in 2.18d) sind eindeutig bestimmt, denn:
Sei $x = \sum_{b \in S} \alpha(b)b$, $b' \in S \xrightarrow{\text{ONS}} (x|b') = \sum_{b \in S} \alpha(b)(b|b') = \alpha(b')$

Definition Eine **Schauderbasis** $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ eines Banachraumes X ist eine Folge (x_n) in X mit:

Für alle $x \in X$ gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.

Die Basis heißt **unbedingt**, wenn diese Reihe für alle x unbedingt konvergiert.

Beispiel abzählbare ONB in HRen (Literatur: unlesbar, Basis in Banach Spaces)

Korollar 2.21 Sei X ein HR mit $\dim X = \infty$. Dann sind äquivalent

- a) X ist separabel
- b) Alle ONBs auf X sind abzählbar
- c) Es gibt eine abzählbare ONB auf X

Beweis \Rightarrow b) $x \perp y$ und $\|x\| = 1 = \|y\|$, dann (Pyth): $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$
wie bei ℓ^∞ folgt: ONB kann nicht überabzählbar sein, wenn a) gilt.

b) \Rightarrow c) Ist klar (beachte S.2.17b))

c) \Rightarrow a) Thm 2.18d) und Lemma 1.57 ■

Theorem 2.22 Sei X ein HR mit ONB S . Dann ist X isometrisch isomorph zu $\ell^2(S)$. Somit sind alle separablen URe isometrisch isomorph zu ℓ^2 , falls deren Dimension ∞ ist.

Beweis Setze $Tx = ((x|b))_{b \in S}$ für $x \in X$. 2.18f) $\Rightarrow T : X \rightarrow \ell^2(S)$ und T Isometrie.
Klar: T linear.

Sei $f \in \ell^2(S)$. Setze $x = \sum_{b \in S} f(b)b$. Wie im Beweis von 2.17h) sieht man, dass $\sum_{b \in S} f(b)b$ in X konvergiert. Ferner: $Tx = f$. ■

Beispiel 1. $L^2(\mathbb{R}^d) \cong \ell^d$

2. $L^2([0, 1]) \cong \ell^2$

3. Üb 22: $AP_2(\mathbb{R}) \cong \ell^2(\mathbb{R})$

Beispiel 2.23 (Fourierreihen) Sei $X = L^2([0, 2\pi])$, $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Bsp 2.14 $\Rightarrow S = \{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ins ONS. Sei $Y = \{f \in C([0, 2\pi]), f(0) = f(2\pi)\}$, $f \in X$ und $\varepsilon > 0$. Nach 1.44 existiert denn ein $g \in C([0, 2\pi])$, $g \neq 0$ mit $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.

Sei $0 < \nu \leq \frac{\varepsilon^2}{\|g\|_\infty}$

$$\text{Setze: } h(t) := \begin{cases} g(t) & , \nu \leq t \leq 2\pi \\ g(2\pi) + \frac{t}{\nu}(g(\nu) - g(2\pi)) & , 0 \leq t \leq \nu \end{cases}$$

$$\Rightarrow h \in Y, \|g - h\|_2^2 = \int_0^\nu |g(t) - h(t)|^2 dt \leq \nu(4\|g\|_\infty)^2 \leq 14\varepsilon^2.$$

Nach Bsp 1.55 ex $\varphi \in \text{lin } S$ mit $\|h - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon \stackrel{1.39}{\Rightarrow} \|h - \varphi\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\varepsilon \Rightarrow \|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon + 4\varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon \Rightarrow \overline{\text{lin } S} = X \stackrel{2.18}{\Rightarrow} S$ ONB.

Sei $e_n(t) = e^{int}$, $c_n = (f|e_n) \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ ($n \in \mathbb{Z}$, $f \in X$) 2.18 $\Rightarrow f = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ (komplexe Fourierreihe)

Dabei unbedingt konvergent in L^2 . Ferner zeigt 2.19, dass

$$T: L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$\hat{f} = Tf = ((f|f_n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

Bemerkung a) Bsp 3.7: $\exists f \in Y$, sodass Fourierreihe nicht punktweise konvergiert.

b) Carleson: Fourierreihe konvergiert für alle $f \in X$ fast überall.

c) Gleichmäßige Konvergenz für bessere f (ÜB 24 siehe auch AE, TH VI 7.21)

reelle Version:

Für reelwertige $f \in L^2([0, 2\pi])$ setze

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

wie oben:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos(n \cdot) + b_n \sin(n \cdot)) \quad \text{konvergiert in } X$$

dabei: $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$, $k \in \mathbb{N}$

Beispiel

$$f = \mathbb{1}_{[0, \pi]} \Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-in} e^{-int} \Big|_0^\pi = \begin{cases} 0 & , n \text{ gerade} \\ \frac{1}{i\pi n} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow \|c_{2k+1} e_{2k+1}\|_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2k+1} \Rightarrow$ Fourierreihe $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{-i}{2k+1} e_{2k+1}$ konvergiert unbedingt, aber nicht absolut in X .

2.3 Operatoren auf Hilberträumen

Seien X, Y HRe und $T \in B(X, Y)$. Für gegebenes $y \in Y$ definiert man $\varphi_y(x) = (Tx|y)$, $x \in X \Rightarrow \varphi_y: X \rightarrow \mathbb{C}$ ist linear in X .

$$(2.3) \quad |\varphi_y(x)| \stackrel{CS}{\leq} \|Tx\| \|y\| \leq \underbrace{\|T\| \|y\|}_{\text{konstant}} \|x\| \Rightarrow \varphi_y \in X^*$$

Nach 2.12 existiert genau ein $z := T'y \in X$ mit

$$(2.4) \quad (Tx|y)_Y = \varphi_y(x) \stackrel{2.12}{=} (x|z)_X = (x|T'y)_X \quad \forall x \in X$$

Die Abbildung $T' : Y \rightarrow X$ heißt **HR-Adjungierte** von T . (2.4) definiert T' eindeutig wegen Bem 2.7f

Satz 2.24 Seien X, Y, Z HRe, $T, S \in B(X, Y)$, $R \in B(Y, Z)$, $\alpha \in K$. Dann gelten:

- a) $T' \in B(Y, X)$ mit $\|T'\| = \|T\|$ und $T'' := (T')' = T$
- b) $(T + S)' = T' + S'$, $(\alpha T)' = \bar{\alpha}T'$, $(R \circ T)' = T' \circ R'$
- c) $N(T) = R(T')^\perp$, $N(T') = R(T)^\perp$. Damit: T injektiv $\Rightarrow R(T')$ dicht.

Beweis Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $y, u \in Y$, $x \in X$, $z \in Z$

- a) $(x|T'(\alpha y + \beta u)) = (Tx|\alpha y + \beta u) = \bar{\alpha}(Tx|y) + \bar{\beta}(Tx|u) = \bar{\alpha}(x|T'y) + \bar{\beta}(x|T'u) = (x|\alpha T'y + \beta T'u) \Rightarrow T'$ linear. (2.3), (2.4) $\Rightarrow T' \in B(Y, X)$ mit $\|T'\| \leq \|T\|$ (*)
 $\Rightarrow T'' \in B(X, Y) \Rightarrow (Tx|y) \stackrel{(2.4)}{=} (x|T'y) = \overline{(T'y|x)} \stackrel{(2.4)}{=} \overline{(y|T''(x))} = (T''x|y) \xrightarrow{x, y \text{ bel}} T'' = T \Rightarrow \|T\| = \|(T')'\| \stackrel{(*)}{\leq} \|T'\| \Rightarrow \|T\| = \|T'\|$

b) folgt aus 2.7f) und

- i) $(x|(S + T)'y) \stackrel{(2.4)}{=} (Sx|y) + (Tx|y) = (x|S'y) + (x|T'y) = (x|(S' + T')y)$
- ii) $(x|(\alpha T)'y) = \alpha(Tx|y) = (x|\bar{\alpha}T'y)$
- iii) $(x|(RT)'y) = (RTx|y) = (Tx|R'y) = (x|T'R'y)$

- c) $Tx = 0 \stackrel{2.7a)}{\Leftrightarrow} 0 = (Tx|y) \quad \forall y \in Y \Leftrightarrow 0 = (x|T'y) \quad \forall y \in Y \Leftrightarrow x \perp R(T')$
 $\Rightarrow N(T') = R(T'')^\perp \stackrel{a)}{=} R(T)^\perp$ ■

Definition 2.25 Seien X, Y HRe, $T \in B(X, Y)$. Dann:

- a) T heißt **selbstadjungiert** (sa.) $:\Leftrightarrow T = T'$ und $X = Y$, d.h.

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \forall x, y \in X$$

- b) T heißt **unitär** $:\Leftrightarrow T'T = id_X$ und $TT' = id_Y \Leftrightarrow$ exists $T^{-1} = T' \in B(Y, X)$

- c) $X = Y : T$ heißt **normal** $:\Leftrightarrow TT' = T'T$.

Bemerkung 1. sa \Rightarrow normal. unitär \Rightarrow normal.

2. $TT', T'T$ sind stets selbstadjungiert.

Beispiel 2.26 Seien $a_{kl} \in \mathbb{C}, k, l \in \mathbb{N}$ mit $\|T\|_{HS}^2 := \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 < \infty$.

Üb 18 (Hölder) definiert $(Tx)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}x_l, k \in \mathbb{N}, x \in \ell^2$ ein $T \in B(\ell^2)$ mit $\|T\| \leq \|T\|_{HS} = \text{Hilbert-Schmidt-Norm}$.

Beh:

$$(T'y)_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}x_j (*), y \in \ell^2 \text{ mit } b_{ij} = \overline{a_{ji}}, i, j \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$1.68 \Rightarrow (*) \text{ mit } b_{ij} = (T'e_j)_i \Rightarrow b_{ij} = (T'e_j|e_i) = \overline{(Te_i|e_j)} \stackrel{1.68}{=} \overline{a_{ji}}$$

Beispiel (s. 1.68) $R' = L, L' = R$

$$\text{Alternativ: } (Lx|y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1}\overline{y_k} \stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=2}^{\infty} x_j\overline{y_{j-1}} = (x, Ry)$$

Insbesondere: T sa. $\iff a_{kl} = \overline{a_{lk}} \forall k, l \in \mathbb{N}$.

Schreibe $z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als $z = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$. Seien $A \in \mathcal{L}_m, B \in \mathcal{L}_n \Rightarrow A \times B \in \mathcal{L}_{m+n}$.

Für $f : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$ bzw $[0, \infty)$ schreiben wir $f^y(x) = f(x, y)$ ($y \in B$ fest) und $f^x(y) = f(x, y)$ ($x \in A$ fest) sowie (soweit existent):

$$F(x) = \int_B f(x, y)dy, x \in A; \quad G(y) = \int_A f(x, y)dx, y \in B$$

(setze $F(x), G(y) = 0$, falls die Integrale nicht existieren.)

Theorem (Fubini) a) Sei $f : A \times B \rightarrow [0, \infty)$ messbar. Dann sind f^y für f.a. $y \in B, f^x$ für f.a. $x \in A$ F, G messbar und es gilt:

$$(2.5) \quad \int_{A \times B} f(x, y)d(x, y) = \int_A \left(\int_B f(x, y)dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y)dx \right) dy$$

b) Sei $f \in L^1(A \times B)$. Dann sind f^y für f.a. $y \in B, f^x$ für f.a. $x \in A$ F, G integrierbar und es gilt (2.5).

Bemerkung Analog: n -fache Integrale

Beispiel 2.27 Integraloperatoren

Sei $k \in L^2(A \times A), A \in \mathcal{L}_d, f \in L^2(A)$. Nach Bem. 1.34 ist

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) := k(x, y)f(y) \text{ messbar}$$

(Beachte, dass auch $(x, y) \mapsto f(y)$ messbar ist.) Ferner ist $(x, y) \mapsto |\varphi(x, y)|$ messbar.

Fubini a) und Hölder liefern:

$$\begin{aligned} \int_{A \cap B(0, n)} \left(\int_A |\varphi(x, y)| dy \right)^2 dx &\leq \int_A \left(\int_A |k(x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2} \cdot 2} dx \|f\|_2^2 = \|k\|_2^2 \|f\|_2^2 (*) \\ \Rightarrow \left(\int_{A \cap B(0, n)} \left(\int_A |\varphi(x, y)| dy \right) dx \right)^2 &\stackrel{1.39}{\leq} c(n) \int_{A \cap B(0, n)} \left(\int_A |\varphi(x, y)| dy \right)^2 dx \\ &\leq c(n) \|k\|_2^2 \|f\|_2^2 \Rightarrow \varphi \in L^1((A \cap B(0, n) \times A) \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Fubini b) $\Rightarrow T f(x) = \int_A k(x, y) f(y) dy$ existiert für f.a. x und ist messbar. Da $|T f(x)|^2 \leq (\int_A |\varphi(x, y)| dy)^2$ liefert \sup_n in (*), dass $T f \in L^2(A)$ und $\|T f\|_2 \leq \|k\|_2 \|f\|_2 \Rightarrow T \in B(L^2(A))$, $\|T\| \leq \|k\|_2$ (MS-Norm von T)

Sei $g \in L^2(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (T f | g) &= \int_A \left(\int_A k(x, y) f(y) dy \right) \overline{g(x)} dx \stackrel{\text{Hölder und Fubini}}{=} \int_A \left(\int_A k(x, y) f(y) \overline{g(x)} dx \right) dy \\ &= \int_A f(y) \left(\int_A \overline{k(x, y)} g(x) dx \right) dy = (f | T' g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T' g(t) = \int_A \overline{k(s, t)} g(s) ds \quad (t \in A) \Rightarrow T \text{ sa} \iff k(x, y) = k(y, x) \text{ für f.a. } (x, y) \in A \times A.$$

Satz 2.28 Seien X, Y HRe, $T \in B(X, Y)$.

$$T \text{ ist Isometrie} \iff (T' T x | z)_X = (T x | T z)_Y = (x | z)_X \quad \forall x, z \in X$$

Insbesondere:

T unitär $\Leftrightarrow T$ bijektiv und T Isometrie $\Leftrightarrow T$ bijektiv und erhält Skalarprodukt.

Beweis, \Leftarrow " Setze $x = z$.

„ \Rightarrow " Sei $\alpha \in \mathbb{K}, x, z \in X$. Dann:

$$(T(x + \alpha z) | T(x + \alpha z)) \stackrel{(2.1)}{=} \|T x\|^2 + \|\alpha T z\|^2 + 2 \operatorname{Re} (T x | \alpha T z) = \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|z\|^2 + 2 \operatorname{Re} (\overline{\alpha} (T x | T z))$$

Andererseits gilt:

$$|(T(x + \alpha z) | T(x + \alpha z))| = \|T(x + \alpha z)\|^2 = \|x + \alpha z\|^2 \stackrel{(2.1)}{=} \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} (\overline{\alpha} (x | z)) + |\alpha|^2 \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} (\overline{\alpha} (T x | T z)) = \operatorname{Re} (\overline{\alpha} (x | z)) \stackrel{\alpha=1, \alpha=i}{\Rightarrow} (T x | T z) = (x | z). \quad \blacksquare$$

Satz 2.29 Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}, X$ HR, $T \in B(X)$.

$$T \text{ sa} \iff (T x | x) \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in X$$

Beweis, \Rightarrow " $(T x | x) = (x | T x) = \overline{(T x | x)} \Rightarrow \text{Beh.}$

„ \Leftarrow " Sei $\alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X$

$$(T(x + \alpha y) | x + \alpha y) = (T x | x) + \overline{\alpha} (T x | y) + \alpha (T y | x) + |\alpha|^2 (T y | y) =: a \stackrel{\text{Vor.}}{=} \overline{a} \stackrel{\text{Vor.}}{=} (T x | x) + \alpha (y | T x) + \overline{\alpha} (x | T y) + |\alpha|^2 (T y | y)$$

$$\stackrel{\alpha=1}{\Rightarrow} (T x | y) + (T y | x) = (y | T x) + (x | T y) \quad (2.3)$$

$$\stackrel{\alpha=i}{\Rightarrow} i(T x | y) - i(T y | x) = -i(y | T x) + i(x | T y) \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow (T y | x) = (y | T x) \stackrel{x, y \text{ bel.}}{\Rightarrow} T \text{ sa.} \quad \blacksquare$$

Beispiel $X = \mathbb{R}^2, T =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T$ nicht sa, $(Tx|x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^2$

Satz 2.30 Sei X HR, $T \in B(X)$ sei sa. Dann gilt:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx|x)| =: M$$

Insbesondere:

$$(Tx|x) = 0 \forall x \in X \Rightarrow T = 0$$

Beweis, „ \geq “ Klar.

„ \leq “ Seien $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 1$.

$$(T(x+y)|x+y) - (T(x-y)|x-y) \stackrel{2.1}{=} 2(Tx|y) + 2(Ty|x) = 2(Tx|y) + 2\overline{(Tx|y)} = 4\operatorname{Re}(Tx|y)$$

$$\Rightarrow 4\operatorname{Re}(Tx|y) \leq M(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \stackrel{(2.2)}{=} 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq 4M$$

Sei $(Tx|y) \neq 0$ ersetze oben x durch $|(Tx|y)|(Tx|y)^{-1}x$. Dann:

$$|(Tx|y)| = |(x|Ty)| \leq M \stackrel{2.12;\sup\|x\| \leq 1}{\Rightarrow} \|Ty\| \leq M \Rightarrow \|T\| \leq M. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.31 Sei X HR, $T \in B(X)$ sei normal. Dann gilt:

$$\|Tx\| = \|T'x\| \quad \forall x \in X$$

Insbesondere gilt:

$$N(T) = N(T') \stackrel{2.23}{=} R(T)^\perp$$

Beweis $0 = ((T'T - TT)x|x) = \|Tx\|^2 - \|T'x\|^2 \quad \forall x \in X \quad \blacksquare$

Satz 2.32 Sei X HR, $P \in B(X)$ eine Projektion mit $P \neq 0$. Dann sind äquivalent:

- a) P ist orthogonal
- b) $\|P\| = 1$
- c) $P = P'$ (d.h. P sa.)
- d) P ist normal
- e) $(Px|x) = 0 \forall x \in X$.

Beweis $a) \Rightarrow c)$ Für $x, y \in X$ gilt: $(Px|y) = (Px|Py + \underbrace{(I-P)y}_{\in N(P)}) \stackrel{a)}{=} (Px|Py)$.

Genauso: $(x|Py) = (Px|Py) \Rightarrow P = P'$.

c) \Rightarrow d) Klar.

d) \Rightarrow a) Lemma 2.30

c) \Rightarrow e) $(Px|x) = (PPx|x) \stackrel{c)}{=} (Px|Px) \geq 0 \ \forall x \in X$.

e) \Rightarrow c) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Satz 2.29; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Werner V 5.9

a) \Rightarrow b) Theorem 2.11

b) \Rightarrow a) Sei $\alpha \in \mathbb{K}, x \in N(P), y \in R(P)$. Dann:

$$\|\alpha y\|^2 = \|P(x + \alpha y)\|^2 \stackrel{b)}{\leq} \|x + \alpha y\|^2 \stackrel{(2.1)}{=} \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} \overline{\alpha}(x|y) + |\alpha|\|y\|^2$$

Wähle $\alpha = \frac{(x|y)}{|(x|y)|} \implies (x|y) = 0$. ■