22. Cauchyscher Integralsatz (Homologieversionen)

In diesem Paragraphen sei $G \subseteq \mathbb{C}$ stets ein Gebiet.

Definition
Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$.

(1) $\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) \neq 0\}$ ("Inneres" von γ)
$\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) = 0\}$ ("Äußeres" von γ)

(2) Sei $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. γ heißt in G **nullhomolog** $:\iff n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash G$
$(\iff \mathrm{Int}(\gamma) \subseteq G)$

Beispiele:
(i) Jeder geschlossene Weg in $\mathbb{C}$ ist in $\mathbb{C}$ nullhomolog.

(ii) $G := \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\gamma(t) = e^{\mathrm{it}}$ $(t \in [0, 2\pi])$, $n(\gamma, 0) = 1 \neq 0$; γ ist in G nicht nullhomolog.

Satz 22.1
Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

(1) Ist γ nullhomotop in $G \Rightarrow \gamma$ ist nullhomolog in G.

(2) Ist G einfach zusammenhängend, so ist γ in G nullhomolog.

Beweis
(1) Sei $z_0 \in \mathbb{C}\backslash G$. Dann ist $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ holomorph auf G.

$$\overset{21.2}{\Rightarrow} \underbrace{\int_\gamma f(z)dz}_{=2\pi \mathrm{i}\ \mathrm{n}(\gamma, z_0)} = 0 \Rightarrow n(\gamma, z_0) = 0$$

(2) folgt aus (1) ∎

Satz 22.2
Sei $f \in H(G)$ und γ sei ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$.
$\varphi : G \times G \to \mathbb{C}$ sei definiert durch:

$$\varphi(w, z) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & , w \neq z \\ f'(z) & , w = z \end{cases}$$

(1) φ ist stetig.

(2) Für $z \in G$ (fest) hat $w \mapsto \varphi(w,z)$ in z eine hebbare Singularität; $w \mapsto \varphi(w,z)$ ist also holomorph auf G
Für $w \in G$ (fest) hat $z \mapsto \varphi(w,z)$ in w eine hebbare Singularität; $z \mapsto \varphi(w,z)$ ist also holomorph auf G

(3) $h(z) := \int\limits_\gamma \varphi(w,z)dw$ $(z \in G)$. Ist γ nullhomolog in G, so ist $h \equiv 0$ auf G.

Beweis

(1) 11.9

(2) 13.1

(3) (A) Es ist $h \in C(G)$. Sei $z_0 \in G$ und (z_n) eine Folge in G mit $z_n \to z_0$. $g_n(w) := \varphi(w, z_n)$, $g(w) := \varphi(w, z_0)$ $(w \in G)$. Sei Γ der stückweise glatte Ersatzweg für γ (wie in §20).
Übung: (g_n) konvergiert auf Γ gleichmäßig gegen g.
$\overset{8.4}{\Rightarrow} \int_\Gamma g_n(w)dw \to \int_\Gamma g(w)dw = \int_\Gamma \varphi(w,z_0)dw = \int\limits_\gamma \varphi(w,z_0)dw = h(z_0)$
Also: $h(z_n) \to h(z_0)$

(B) Es ist $h \in H(G)$. Sei $\Delta \subseteq G$ ein Dreieck. Wegen 9.7 genügt es zu zeigen: $\int_{\partial\Delta} h(z)dz = 0$
9.1 und (2) $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} \varphi(w,z)dz = 0 \ \forall w \in G$
$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} h(z)dz = \int_{\partial\Delta}(\int\limits_\gamma \varphi(w,z)dw)dz \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_\gamma (\underbrace{\int_{\partial\Delta} \varphi(w,z)dz}_{=0})dw = 0$

(C) $\mathbb{C} = \underbrace{\mathrm{Int}(\gamma)}_{\subseteq G} \cup \mathrm{Ext}(\gamma) \cup \underbrace{\mathrm{Tr}(\gamma)}_{\subseteq G} = G \cup \mathrm{Ext}(\gamma)$
Sei $z_0 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Sei C die Komponente von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Tr}(\gamma)$: $z_0 \in C$.
$\overset{16.2}{\Rightarrow} n(\gamma,z) = n(\gamma,z_0) = 0 \ \forall z \in C$
$\Rightarrow C \subseteq \mathrm{Ext}(\gamma). \overset{16.1/2}{\Rightarrow} C$ ist offen. $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq C \subseteq \mathrm{Ext}(\gamma)$.
Also ist $\mathrm{Ext}(\gamma)$ offen. [Analog: $\mathrm{Int}(\gamma)$ offen]
$g(z) := \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$ $(z \notin \mathrm{Tr}(\gamma)) \overset{9.5}{\Rightarrow} g \in H(\mathbb{C}\backslash\mathrm{Tr}(\gamma))$, insbesondere gilt $g \in H(\mathrm{Ext}(\gamma))$.
Sei $z \in G \cap \mathrm{Ext}(\gamma)$: $h(z) = \int\limits_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int\limits_\gamma \frac{1}{w-z}dw = g(z) - f(z)2\pi\mathrm{i}$
$\underbrace{n(\gamma,z)}_{=0} = g(z)$. Also: $h = g$ auf $G \cap \mathrm{Ext}(\gamma)$. Dann ist
$F(z) = \begin{cases} h(z) & , z \in G \\ g(z) & , z \in \mathrm{Ext}(\gamma) \end{cases}$ eine ganze Funktion.
Übung: $F(z) \to 0$ $(|z| \to \infty)$. 10.2 $\Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow h \equiv 0$ ∎

Satz 22.3 (Allgemeine Cauchysche Integralformel)
Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$ und γ sei nullhomolog in G. Dann:

$$n(\gamma,z)f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \ \forall f \in H(G) \ \forall z \in G\backslash\mathrm{Tr}(\gamma)$$

Beweis
Sei $f \in H(G)$ und $z \in G \backslash \mathrm{Tr}(\gamma)$. $\overset{22.2(3)}{\Rightarrow} 0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{dw}{w-z}}_{=n(\gamma,z)}$ ■

Satz 22.4 (CIS, Homolgieversion I)
Sei γ ein gechlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$.
Dann:

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = 0 \; \forall f \in H(G) \iff \gamma \text{ ist in } G \text{ nullhomolog}$$

Beweis
$'' \Rightarrow''$: Sei $z_0 \in \mathbb{C} \backslash G$; $f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{z-z_0} \Rightarrow f \in H(G) \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \underbrace{\int\limits_\gamma f(z)dz}_{=n(\gamma,z_0)} = 0$

$'' \Leftarrow''$: Sei $f \in H(G)$ und $z_0 \in G \backslash \mathrm{Tr}(\gamma)$; $g(z) = (z-z_0)f(z)$; $g \in H(G)$.
Wende 22.3 auf g an :

$$n(\gamma, z_0) \underbrace{g(z_0)}_{=0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma \underbrace{\frac{g(w)}{w-z_0}}_{=f(w)} dw \Rightarrow \int\limits_\gamma f(w)dw = 0.$$

■

Satz 22.5
G ist einfach zusammenhängend $\iff$ jeder geschlossene Weg γ mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$ ist in G nullhomolog.

Beweis
$'' \Rightarrow''$ 22.1(2)
$'' \Leftarrow''$ Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$ und $f \in H(G)$
Vorraussetzungen $\Rightarrow \gamma$ ist in G nullhomolg. 22.4 $\Rightarrow \int\limits_\gamma f(z)dz = 0$. 21.5 $\Rightarrow G$ ist einfach zusammenhängend. ■

Definition
Seien γ_1 und γ_2 geschlossene Wege mit $\mathrm{Tr}(\gamma_1), \mathrm{Tr}(\gamma_2) \subseteq G$. γ_1, γ_2 heißen **in G homolog** $:\iff$ $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z) \; \forall z \in \mathbb{C} \backslash G$.

Satz 22.6 (CIS, Homologieversion II)
γ_1, γ_2 seien wie in obiger Definition und in G homolog.
Dann:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \; \forall f \in H(G)$$

Beweis
Sei $f \in H(G)$ und $z_j :=$ Anfangspunkt von γ_j $(j = 1, 2)$.
$\overset{3.4}{\Rightarrow} \exists$ Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$: $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$, $\gamma(0) = z_1$, $\gamma(1) = z_2$
$\Gamma := \gamma_1 \oplus \gamma \oplus \gamma_2^- \oplus \gamma^-$. Γ ist ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$
Sei $z_0 \in \mathbb{C} \backslash G$: $n(\Gamma, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma, z_0) - n(\gamma_2, z_0) - n(\gamma, z_0) = 0$
D.h.: Γ ist in G nullhomolog. 22.4 $\Rightarrow 0 = \int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_\gamma - \int_{\gamma_2} - \int_\gamma = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$ ∎