

Funktionentheorie I

Die Mitarbeiter von <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>

14. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
I. Vorwort	5
I.1. Über dieses Skriptum	5
I.2. Wer	5
I.3. Wo	5
1. Komplexe Zahlen	7
2. Topologische Begriffe	11
3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete	15
4. Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie	19
5. Potenzreihen	23
6. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	27
7. Der komplexe Logarithmus	31
8. Komplexe Wegintegrale	35
9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln	41
10. Folgerungen aus den Integralformeln	49
11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen	53
12. Das Schwarzsche Lemma	61
13. Isolierte Singularitäten	63
14. Laurententwicklung	67
15. meromorphe Funktionen, Möbiustransformationen	71
16. Die Umlaufzahl	77
17. Der Residuensatz und Folgerungen	81
18. Der Satz von Montel	87
19. Der Riemannsche Abbildungssatz	89
20. Homotopie und einfacher Zusammenhang	93

21. Cauchyscher Integralsatz (Homotopieversionen)	97
22. Cauchyscher Integralsatz (Homologieversionen)	101
A. Satz um Satz (hüpft der Has)	105
Stichwortverzeichnis	108

I. Vorwort

I.1. Über dieses Skriptum

Dies ist ein erweiterter Mitschrieb der Vorlesung „Funktionentheorie I“ von Herrn Schmoeger im Sommersemester 2006 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Schmoeger hier veröffentlicht, Herr Schmoeger ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

I.2. Wer

Beteiligt am Mitschrieb sind Ferdinand Szekeresch, Christian Schulz und andere.

I.3. Wo

Alle Kapitel inklusive \LaTeX -Quellen können unter <http://mitschriebwiki.nomeata.de> abgerufen werden. Dort ist ein *Wiki* eingerichtet und von Joachim Breitner um die \LaTeX -Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.

1. Komplexe Zahlen

$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ Für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir :
 $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d); (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$
Wir setzen abkürzend: $i := (0, 1)$ (**imaginäre Einheit**). Dann: $i^2 = (-1, 0)$

Satz 1.1

\mathbb{R}^2 ist mit obiger Addition und Multiplikation ein Körper. Dieser wird mit \mathbb{C} bezeichnet und heißt **Körper der Komplexen Zahlen**.

- (1) $(0, 0)$ ist das neutrale Element bzgl. der Addition. $(1, 0)$ ist das neutrale Element bzgl. der Multiplikation.
- (2) Für $(a, b) \in \mathbb{C}$ ist $(-a, -b)$ das inverse Element bzgl. der Addition Für $(a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ ist $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ das inverse Element bzgl. der Multiplikation

Beweis

Nachrechnen! ■

Definiere $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\varphi(a) := (a, 0)$ ($a \in \mathbb{R}$). Dann gilt:
 $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \varphi(0) = (0, 0), \varphi(1) = (1, 0)$. φ ist also ein injektiver Körperhomomorphismus. Also: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
Wir schreiben a statt $(a, 0)$ für $a \in \mathbb{R}$. Insbesondere: $i^2 = -1$.

Satz 1.2

Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
 $\operatorname{Re} z := a$ (**Realteil von z**), $\operatorname{Im} z := b$ (**Imaginärteil von z**)

Beweis

Sei $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$); $z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$
Eindeutigkeit: klar ■

Definition

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

- (1) $\bar{z} := a - ib$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**

- (2) $|z| := (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (= \|(a, b)\| = \text{eukl. Norm von } (a, b) \in \mathbb{R}^2)$ heißt **Betrag von z** ; $|z| \geq 0$

Geometrische Veranschaulichung von \mathbb{C} : Komplexe Ebene

$|z|$ = Abstand von z und 0

Satz 1.3

Seien $z, w \in \mathbb{C}$

- (1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}); z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}; \bar{\bar{z}} = z; z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w, \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w; |z| = 0 \iff z = 0$
- (2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}; \overline{\frac{1}{w}} = \frac{1}{\bar{w}}, \text{ falls } w \neq 0$
- (3) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|; |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- (4) $|\bar{z}| = |z|; |z|^2 = z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z; \text{ f\"ur } z \neq 0: \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- (5) $|zw| = |z| \cdot |w|; |\frac{1}{w}| = \frac{1}{|w|} \text{ falls } w \neq 0$
- (6) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$
- (7) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Beweis

(1) - (5): nachrechnen!

(7) folgt aus (6) w\"ortlich wie in \mathbb{R}

$$\begin{aligned}
 (6) \quad |z + w|^2 &\stackrel{(3)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \stackrel{(2)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\
 &\stackrel{(1),(3)}{=} |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2 \\
 &\stackrel{(3)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2
 \end{aligned}$$

■

Polarkoordinaten

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad r := |z|$

Bekannt: $\exists \varphi \in \mathbb{R} : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

Dann: $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Die Zahl φ heißt **ein** Argument von z und wird mit $\arg z$ bezeichnet. Mit φ ist auch $\varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ein Argument von z .

Aber: es gibt genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Dieses φ heißt der **Hauptwert des Arguments** und wird mit $\operatorname{Arg} z$ bezeichnet.

Seien $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R})$.

Aus Additionstheoremen von Sinus und Cosinus folgt:

$$(*) \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Aus (*) folgt induktiv:

Satz 1.4 (Formel von de Moivre)

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Wurzeln:

Beachte: $z^0 := 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Definition

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt eine **n -te Wurzel aus a** .

Satz 1.5

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R})$

Für $k = 0, 1, \dots, n-1$ setze $z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right)$

Dann:

$$(1) \quad z_j \neq z_k \text{ für } j \neq k$$

$$(2) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} : z^n = a \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$$

Spezialfall: $a = 1$

$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \dots, n-1)$ n -te Einheitswurzeln

Beispiel

$a = 1, n = 4, z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (k = 0, \dots, 3)$

$z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i$

Beweis (von 1.5)

(1) Übung

$$(2) \quad " \Leftarrow " : z_k^n \stackrel{1.4}{=} |a| (\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = a$$

$$" \Rightarrow " : \text{Sei } z^n = a \implies |z| = \sqrt[n]{|a|}, z \neq 0;$$

$$\text{Sei } z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z^n \stackrel{1.4}{=} \underbrace{|z|^n}_{=|a|} (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

$$\implies \cos \varphi = \cos(n\alpha), \sin \varphi = \sin(n\alpha)$$

$$\implies \exists j \in \mathbb{Z} : n\alpha = \varphi + 2\pi j \implies \alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi j}{n}$$

$$\exists l \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, n-1\} : j = ln + k$$

$$\implies \frac{j}{n} = l + \frac{k}{n} = \alpha = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\left(l + \frac{k}{n}\right) = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi l$$

$$\implies \cos \alpha = \cos \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \sin \alpha = \sin \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

$$\implies z = z_k$$

2. Topologische Begriffe

Definition

(a_n) sei eine Folge in \mathbb{C} .

- (1) (a_n) heißt **beschränkt** $\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) (a_n) heißt eine **Cauchy-Folge** (CF) : $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \ \forall n, m \geq n_0$
- (3) (a_n) heißt **konvergent** : $\iff \exists a \in \mathbb{C} : |a_n - a| \rightarrow 0$ ($\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0$)
In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt (Übung) und heißt der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n) . Man schreibt : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$
- (4) (a_n) heißt **divergent** : $\iff (a_n)$ konvergiert nicht.

Beispiel

$$a_n = \frac{1}{n} + i(1 + \frac{1}{n}); |a_n - i| = |\frac{1}{n} - i\frac{1}{n}| = \frac{|1-i|}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow a_n \rightarrow i$$

Wie in \mathbb{R} bzw. mit 1.3, zeigt man:

Satz 2.1

$(a_n), (b_n)$ seien Folgen in $\mathbb{C}; a, b \in \mathbb{C}$

- (1) (a_n) konvergent $\Rightarrow a_n$ ist beschränkt.
- (2) (a_n) konvergent : $\iff (\operatorname{Re} a_n), (\operatorname{Im} a_n)$ sind konvergent. In diesem Fall gilt $\lim a_n = \lim \operatorname{Re} a_n + i \lim \operatorname{Im} a_n$
- (3) Es gelte $(a_n) \rightarrow a, (b_n) \rightarrow b$. Dann:
 $a_n + b_n \rightarrow a + b, a_n b_n \rightarrow ab, \bar{a}_n \rightarrow \bar{a}, |a_n| \rightarrow |a|$
Ist $a \neq 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \ \forall n \geq m$ und $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$
Ist a_{n_k} eine Teilfolge (TF) von $(a_n) \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$
- (4) Ist (a_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ enthält eine konvergente TF (**Bolzano-Weierstraß**)
- (5) (a_n) ist eine CF $\iff (a_n)$ ist konvergent (**Cauchy Kriterium**)

Definition

(a_n) sei eine Folge in \mathbb{C} und $s_n := \sum_{i=1}^n a_i \ n \in \mathbb{N}$. (s_n) heißt eine **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent/divergent $\iff (s_n)$ konvergent/divergent. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so schreibt man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Beispiel (Geometrische Reihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + \dots \ (z \in \mathbb{C})$. Wie in \mathbb{R} zeigt man:

2. Topologische Begriffe

- (1) $1 + z + \dots + z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & , \text{ falls } z \neq 1 \\ n+1 & , \text{ falls } z = 1 \end{cases}$
- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergent $\iff |z| < 1$. In diesem Fall $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Definition

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent** : $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Wörtlich wie in \mathbb{R} beweist, bzw. formuliert man:

Satz 2.2

(a_n) sei eine Folge in \mathbb{C}

- (1) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$
- (2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
- (3) Es gelten Cauchy Kriterium, Majorantenkriterium, Minorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium und der Satz über das Cauchyprodukt.

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$

- (1) $U_{\epsilon}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$ **ϵ -Umgebung von z_0** oder **offene Kreisscheibe** von z_0 mit Radius ϵ
 $\bar{U}_{\epsilon}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$ (**abgeschlossene Kreisscheibe** von z_0 mit Radius ϵ)
 $\dot{U}_{\epsilon}(z_0) := U_{\epsilon}(z_0) \setminus \{z_0\}$ (**punktierte Kreisscheibe**)
- (2) $z_0 \in A$ heißt **innerer Punkt von A** : $\iff \exists \epsilon > 0 : U_{\epsilon}(z_0) \subseteq A$
 $A^{\circ} := \{z \in A | z \text{ innerer Punkt von } A\}$ heißt das **Innere von A**. Klar ist: $A^{\circ} \subseteq A$
 A heißt **offen** : $\iff A = A^{\circ}$
- (3) A heißt **abgeschlossen** : $\iff \mathbb{C} \setminus A$ ist offen.
- (4) A heißt **beschränkt** : $\iff \exists c \geq 0 : |a| \leq c \forall a \in A$
- (5) A heißt **kompakt** : $\iff A$ ist beschränkt und abgeschlossen.
- (6) z_0 heißt ein **Häufungspunkt** von A : $\iff \forall \epsilon > 0 : \dot{U}_{\epsilon}(z_0) \cap A \neq \emptyset$.
 $\bar{A} := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist HP von } A\} \cup A$ heißt die **Abschließung** von A
- (7) z_0 heißt ein **Randpunkt** von A
: $\iff \forall \epsilon > 0 : U_{\epsilon}(z_0) \cap A \neq \emptyset$ und $U_{\epsilon}(z_0) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$
 $\partial A := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist Randpunkt von } A\}$ wird als **Rand von A** bezeichnet

Wie in \mathbb{R} zeigt man:

Satz 2.3

- (1) A heißt abgeschlossen $\iff A = \bar{A} \iff$ der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A gehört zu A .
- (2) z_0 ist HP von $A \iff \exists$ Folge (z_n) in $A \setminus \{z_0\} : z_n \rightarrow z_0$
- (3) A ist kompakt : \iff jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge deren Limes zu A gehört
 \iff jede offene Überdeckung von A enthält eine endliche Überdeckung von A .

3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

In diesem Paragraphen seien $D, E \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset \neq E$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktionen $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert durch:

$$(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re} f(z), (\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im} f(z), |f|(z) := |f(z)|.$$

Definition

Sei z_0 ein HP von D und $a \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - a| < \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$$

In diesem Fall schreibt man $f(z) \rightarrow a$ ($z \rightarrow z_0$)

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert : $\iff \exists a \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$. Es gelten die üblichen Rechenregeln.

Definition

(1) Sei $z_0 \in D$. f heißt **stetig** in z_0 : $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$

(2) f heißt stetig auf D : $\iff f$ ist in jedem $z \in D$ stetig. In diesem Fall schreiben wir $f \in C(D)$.

Beispiel

(1) $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ($a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$). Klar: $p \in C(\mathbb{C})$ (Linearkombination stetiger Funktionen).

$$(2) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Klar: $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Für $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f(z) = 1 \not\rightarrow f(0) = 0$ ($z \rightarrow 0$). f ist in $z_0 = 0$ nicht stetig.

$$(3) f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Für $z \neq 0$: $|f(z)| = \frac{|\operatorname{Re} z|^2}{|z|} \leq \frac{|z|^2}{|z|} \leq |z| \Rightarrow f$ ist in $z_0 = 0$ stetig. Insgesamt: $f \in C(\mathbb{C})$.

Beispiel

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; für $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in D$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ sei $f(z) := \varphi = \operatorname{Arg} z$. Behauptung: Ist $z_0 \in \mathbb{R}$ und $z_0 < 0 \Rightarrow f$ ist in z_0 nicht stetig. Denn:

Sei $z_n := |z_0|(\cos(\pi - \frac{1}{n}) + i \sin(\pi - \frac{1}{n}))$, $w_n := |z_0|(\cos(-\pi + \frac{1}{n}) + i \sin(-\pi + \frac{1}{n})) \Rightarrow z_n \rightarrow -|z_0| = z_0$, $w_n \rightarrow -|z_0| = z_0$ und $f(z_n) = \operatorname{Arg} z_n = \pi - \frac{1}{n} \rightarrow \pi$, $f(w_n) = \operatorname{Arg} w_n = -\pi + \frac{1}{n} \rightarrow -\pi$

Wie im \mathbb{R}^n beweist man die folgenden Sätze 3.1, 3.2 und 3.3

Satz 3.1

Sei $z_0 \in D$.

(1) f ist stetig in $z_0 \iff \operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind stetig in $z_0 \iff$ für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \rightarrow z_0 : f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

- (2) Ist z_0 ein HP von D , so gilt: f ist in z_0 stetig $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
- (3) Sei $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion und f und g seien stetig in z_0 . Dann sind $f + g, fg, |f|$ stetig in z_0 ; ist $f(z) \neq 0 \forall z \in D \Rightarrow \frac{1}{f}$ ist stetig in z_0 .

Satz 3.2

Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $f(D) \subseteq E$. Ist f stetig in z_0 und g stetig in $f(z_0)$, so ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 .

Satz 3.3

D sei **kompakt** und $f \in C(D)$

- (1) $f(D)$ ist kompakt
- (2) $\exists \max |f|(D), \exists \min |f|(D)$

Definition

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R} (a < b)$. Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein **Weg** (in \mathbb{C}). $\gamma(a)$ heißt **Anfangspunkt** von γ , $\gamma(b)$ heißt **Endpunkt** von γ . $\gamma([a, b])$ heißt der **Träger** von γ . 3.3 $\Rightarrow \gamma([a, b])$ ist kompakt. ("**Rektifizierbarkeit**" und "**Länge**" von γ : siehe Analysis II)

Beispiele:

- (1) Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}; \gamma(t) := z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1]. S[z_0, z_1] := \gamma([0, 1])$ heißt die **Verbindungsstrecke** von z_0 und z_1 .
- (2) Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0; \gamma(t) := z_0 + r(\cos t + i \sin t), t \in [0, 2\pi]. \gamma(0) = z_0 + r = \gamma(2\pi), \gamma([0, 2\pi]) = \overline{\partial U_r(z_0)}$

Für den Rest des §en sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$

Definition

M heißt **konvex** $:\Leftrightarrow$ aus $z_0, z_1 \in M$ folgt stets: $S[z_0, z_1] \subseteq M$.

Definition

- (1) Eine Funktion $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf M **lokalkonstant** $:\Leftrightarrow \forall a \in M \exists \delta = \delta(a) > 0 : \varphi$ ist auf $U_\delta(a) \cap M$ konstant. Beachte: i.d.Fall: $\varphi \in C(M)$.
- (2) M heißt **zusammenhängend** (zsh) $:\Leftrightarrow$ jede auf M lokalkonstante Funktion ist auf M konstant.
- (3) M heißt **wegzusammenhängend** (wegzsh) $:\Leftrightarrow$ zu je zwei Punkten $z, w \in M$ existiert ein Weg $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma([a, b]) \subseteq M, \gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$.
- (4) M heißt ein **Gebiet** $:\Leftrightarrow M$ ist offen und wegzsh.

Bemerkung:

(1) Mengen die offen und konvex sind, sind Gebiete.

(2) wegzsh \Rightarrow zsh (" \Leftarrow " ist i.a. falsch)

Satz 3.4

M sei offen, dann sind äquivalent:

(1) M ist ein Gebiet

(2) M ist wegzsh

(3) M ist zsh

(4) Aus $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen folgt stets: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Beweis

(1) \Leftrightarrow (2): klar, (2) \Leftrightarrow (3): ohne Beweis.

(3) \Rightarrow (4): Sei $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen. Annahme: $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Definiere

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{C} \text{ durch } \varphi(z) := \begin{cases} 1, & z \in A \\ 0, & z \in B \end{cases}.$$

Sei $z_0 \in M$. 1. Fall (2. Fall) : $z_0 \in A(B), A(B)$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq A(B) \Rightarrow \varphi$ ist auf $U_\delta(z_0)$ konstant. φ ist also auf M lokalkonstant. Vor $\Rightarrow \varphi$ ist auf M konstant $\Rightarrow 1 = 0$, Wid!

(4) \Rightarrow (3): Sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ lokalkonstant. Annahme: φ ist nicht konstant auf M . $\exists z_0, w_0 \in M : \varphi(z_0) \neq \varphi(w_0)$. $A := \{z \in M : \varphi(z) = \varphi(z_0)\}; z_0 \in A$, also $A \neq \emptyset$. $B := M \setminus A, w_0 \in B$, also $B \neq \emptyset$. Klar: $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset$.

Sei $z_1 \in A$. φ ist lokalkonstant $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_1) \subseteq M$ und φ ist auf $U_\delta(z_1)$ konstant. Sei $z \in U_\delta(z_1)$. $\varphi(z) = \varphi(z_1) \stackrel{z_1 \in A}{=} \varphi(z_0) \Rightarrow z \in A$. Also: $U_\delta(z_1) \subseteq A$. A ist also offen. Ähnlich: B ist offen. Fazit: $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ offen, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. Wid zur Vor. ■

Folgerung 3.5

Sei $A \subseteq \mathbb{C}, A$ sei offen und abgeschlossen. Dann: $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$.

Beweis

$B := \mathbb{C} \setminus A$; dann A, B offen, $A \cap B = \emptyset$ und $\mathbb{C} = A \cup B$. \mathbb{C} ist ein Gebiet $\stackrel{3.4}{\Rightarrow} A = \emptyset$ oder $B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$. ■

Satz 3.6

Sei M zsh und $g \in C(M)$. Dann ist $g(M)$ zsh.

Beweis

Sei $\varphi : g(M) \rightarrow \mathbb{C}$ auf $g(M)$ lokalkonstant. Zu zeigen: φ ist auf $g(M)$ konstant. $\psi := \varphi \circ g : M \rightarrow \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in M \Rightarrow g(z_0) \in g(M) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ und $c \in \mathbb{C} : (*) \varphi(w) = c \forall w \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M)$. g stetig in $z_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon \forall z \in U_\delta(z_0) \cap M$. Sei $z \in U_\delta(z_0) \cap M$. Dann: $g(z) \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \varphi(g(z)) = c \Rightarrow \psi(z) = c$. Also ist ψ auf M lokalkonstant. M zsh

3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

$\Rightarrow \psi(z) = c \ \forall z \in M$. Sei $w \in g(M) \Rightarrow \exists z \in M : w = g(z) \Rightarrow \varphi(w) = \varphi(g(z)) = \psi(z) = c$. φ ist also auf $g(M)$ konstant. ■

Beispiele:

(1) $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist zsh.

(2) Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg, so ist $\gamma([a, b])$ zsh.

Beweis

(2) folgt aus (1) und 3.6

(1) Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ lokalkonstant. Also: $\forall t \in [a, b] \exists \delta(t) > 0 : \varphi$ ist auf $U_{\delta(t)}(t) \cap [a, b]$ konstant. $[a, b] \subseteq \cup_{t \in [a, b]} U_{\delta(t)}(t) \stackrel{2,3}{\Rightarrow} \exists t_1, \dots, t_n \in [a, b] : [a, b] \subseteq \cup_{j=1}^n U_{\delta(t_j)}(t_j)$. $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} : \varphi(t) = c_j \ \forall t \in U_{\delta(t_j)}(t_j) \cap [a, b] \Rightarrow \varphi([a, b]) = \{c_1, \dots, c_n\}$. O.B.d.A: $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Annahme: $c_1 \neq c_2$ etwa $c_1 < c_2$. $\varphi \in C[a, b]$. ZWS $\Rightarrow [c_1, c_2] \subseteq \varphi([a, b])$ Wid! Also: $c_1 = c_2$. Analog: $c_2 = c_3 = \dots = c_n$. φ ist also konstant. ■

4. Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie

In diesem §en sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

Definition

- (1) f heißt in $z_0 \in D$ **komplex differenzierbar** (komplex differenzierbar) : \iff es ex. $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h})$. I.d. Fall heißt obiger Grenzwert die Ableitung von f in z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet.
- (2) f heißt auf D **holomorph** (analytisch) : $\iff f$ ist zu jedem $z \in D$ differenzierbar.
- (3) $H(D) := \{g : D \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ ist auf } D \text{ holomorph}\}$.

Beispiele:

- (1) $D = \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, f(z) := z^n$.
Wie in \mathbb{R} zeigt man: $f \in H(\mathbb{C})$ und $f'(z) = nz^{n-1} \forall z \in \mathbb{C}$.
- (2) $D = \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 $Q(h) := \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{z_0 + h} - \bar{z_0}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$; z.B. ist $Q(h) = 1$, falls $h \in \mathbb{R}$ und $Q(h) = -1$, falls $h \in i\mathbb{R} := \{it : t \in \mathbb{R}\}$. Also ex. $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$ **nicht**. f ist also in **keinem** $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Sei $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$. Fasst man D als Teilmenge des \mathbb{R}^2 auf, und schreibt man $z = (x, y)$ statt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), so ist $f = (u, v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine vektorwertige Funktion.
 $f(z) = u(z) + iv(z) = (u(z), v(z)) = (u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$.

Erinnerung (Ana II): f heißt im $(x_0, y_0) \in D$ reell differenzierbar : \iff es ex. reelle 2×2 -Matrix A :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h, k)\|} = 0$$

Beispiel

$D = \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$, reelle Auffassung: $f(x, y) = (x, -y)$. f ist in **jedem** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar, aber in **keinem** $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Satz 4.1

Sei $u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$; Sei $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0 \in D$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$).

f ist in z_0 komplex differenzierbar. : $\iff f$ ist in (x_0, y_0) reell differenzierbar und es gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** (CRD):

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$

Beweis

Sei $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ und $s = h + ik \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\alpha, \beta, h, k \in \mathbb{R}$)

f ist in z_0 komplex differenzierbar und $f'(z_0) = a \iff \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z_0+s) - f(z_0) - as}{|s|} = 0$

$$\begin{aligned} \xLeftrightarrow{\text{Zerlegen}} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} & \left(\underbrace{\frac{u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0, y_0) - (\alpha h + \beta k)}{\|(h, k)\|}}_{=:\varphi_1(h,k)} \right. \\ & \left. + i \underbrace{\frac{v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0, y_0) - \beta h - \alpha k}{\|(h, k)\|}}_{=:\varphi_2(h,k)} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \varphi_1(h, k) \rightarrow 0, \varphi_2(h, k) \rightarrow 0 ((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

$$\iff u \text{ und } v \text{ sind in } (x_0, y_0) \text{ reell differenzierbar, } u'(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta) \text{ und } v'(x_0, y_0) = (\beta, \alpha)$$

$$\iff f \text{ ist in } (x_0, y_0) \text{ reell differenzierbar und es gelten die CRD. Ist } f \text{ in } z_0 \text{ komplex differenzierbar} \implies f'(z_0) = a = \alpha + i\beta = u_x(z_0) + iv_x(z_0) \quad \blacksquare$$

Folgerung 4.2

Es sei $f \in H(D)$

$$(1) \quad f \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant} \iff f' = 0 \text{ auf } D.$$

$$(2) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq \mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(3) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq i\mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(4) \quad \text{Ist } D \text{ ein Gebiet so gilt:}$$

$$(i) \quad f \text{ ist auf } D \text{ konstant} \iff f' = 0 \text{ auf } D.$$

$$(ii) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq \mathbb{R} \text{ oder } \subseteq i\mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ konstant.}$$

Beweis

$u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$.

$$(1) \quad " \implies " \text{ klar!}$$

$$" \Leftarrow " \quad 4.1 \implies u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \text{ auf } D. \text{ Ana II} \implies u, v \text{ sind auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(2) \quad f(D) \subseteq \mathbb{R} \implies v = 0 \text{ auf } D \implies v_x = v_y = 0 \text{ auf } D \xrightarrow{\text{CRD}} u_x = u_y = 0 \text{ auf } D. \text{ Weiter wie bei (1).}$$

$$(3) \quad \text{Sei } f(D) \subseteq i\mathbb{R}, g := if \implies g \in H(D), g(D) \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{(2)} g \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant.} \implies f \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(4) \quad \text{folgt aus (1),(2),(3) und 3.4} \quad \blacksquare$$

Satz 4.3

Sei $z_0 \in D$ und f in z_0 komplex differenzierbar.

(1) f ist in z_0 stetig.

(2) Sei $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion und g sei komplex differenzierbar in z_0

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f + \beta g$ komplex differenzierbar in z_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$$

(ii) fg ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(iii) Ist $g(z_0) \neq 0$, so ex. ein $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D, g(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$,
 $\frac{f}{g} : U_\delta(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$\frac{f'}{g}(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

(3) **Kettenregel:** Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, E$ offen, $f(D) \subseteq E$ und $h : E \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $f(z_0)$. Dann ist $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 und

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Definition

Sei $f \in H(D)$ und $z_0 \in D$. f heißt in z_0 **zweimal komplex differenzierbar** : $\iff f'$ ist in z_0 komplex differenzierbar. I.d. Fall: $f''(z_0) := (f')'(z_0)$ (2. Ableitung von f in z_0). Entsprechend definiert man höhere Ableitungen von f in z_0 , bzw. auf D . Übliche Bezeichnungen: $f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(0)} := f$

5. Potenzreihen

Im Folgenden sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ und $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Definition

- (1) (f_n) heisst auf A **punktweise konvergent** : $\iff \forall z \in A$ ist $(f_n(z))$ konvergent.
In diesem Fall heisst $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$, die **Grenzfunktion** von (f_n) .

- (2) (f_n) heisst auf A **gleichmaessig (glm) konvergent** : $\iff \exists f : A \rightarrow \mathbb{C}$ mit:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \forall z \in A$$

In diesem Fall sagt man : (f_n) konvergiert auf A gleichmaessig gegen f .

- (3) (f_n) heisst auf A **lokal gleichmaessig konvergent** : $\iff (f_n)$ konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmaessig. ($\iff \forall a \in A \exists \rho > 0 : (f_n)$ konvergiert auf $U_\rho(a) \cap A$ gleichmaessig)

- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A punktweise : $\iff (s_n)$ konvergiert auf A punktweise.
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A gleichmaessig : $\iff (s_n)$ konvergiert auf A gleichmaessig.
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A lokal gleichmaessig : $\iff (s_n)$ konvergiert auf A lokal gleichmaessig.

Klar: gleichmaessig Konvergenz \implies lokal gleichmaessig Konvergenz \implies punktweise Konvergenz.

Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 5.1

- (1) (f_n) konvergiert auf A gleichmaessig gegen f , alle f_n seien in $z_0 \in A$ stetig. $\implies f$ ist in z_0 stetig.

- (2) **Cauchy Kriterium:**

$$(f_n) \text{ konvergiert auf A gleichmaessig} \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \forall z \in A$$

- (3) **Kriterium von Weierstrass:**

Sei (a_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ konvergiert und $|f_n(z)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in A$.

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf A gleichmaessig.

Definition

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{C} und $z_0 \in \mathbb{C}$.

Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heisst eine **Potenzreihe (PR)**.

Wir setzen $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ($\rho = \infty$ falls $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt) und

$$r := \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & \text{falls } 0 < \rho < \infty \end{cases}.$$

r heisst der **Konvergenzradius (KR)** der Potenzreihe.

Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 5.2

Die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r

- (1) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur in $z = z_0$
- (2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut.
Die Potenzreihe konvergiert auf \mathbb{C} lokal gleichmässig.
- (3) Ist $0 < r < \infty$ so gilt:
 - (i) die Potenzreihe konvergiert in jedem $z \in U_r(z_0)$ absolut.
 - (ii) die Potenzreihe divergiert zu jedem $z \notin \overline{U_r(z_0)}$.
 - (iii) für $z \in \partial U_r(z_0)$ ist keine allgemeine Aussage möglich.
 - (iv) die Potenzreihe konvergiert auf $U_r(z_0)$ lokal gleichmässig.

Beispiel:

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Für $|z| = 1$ ist z^n keine Nullfolge $\implies \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist divergent zu jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.
- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 0$.
- (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Sei $|z| = 1$, $|\frac{z^n}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$; Majorantenkriterium $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert.
- (4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Wie in der Analysis: die Potenzreihe hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

Satz 5.3

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r . Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius r .

Beweis

$$\alpha_n = na_n; \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}; \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad \blacksquare$$

Definition

Für $z_0 \in \mathbb{C} : U_{\infty}(z_0) := \mathbb{C}$.

Satz 5.4

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$ ($r = \infty$ zugelassen). Die Funktion $f : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ sei definiert durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Dann

$$(1) \quad f \in H(U_r(z_0)) \text{ und } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

(2) f ist auf $U_r(z_0)$ beliebig oft komplex db und

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \quad \forall z \in U_r(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Beweis

(1) O.B.d.A $z_0 = 0$.

Für $w \in U_r(0) : g(w) := \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1}$. Sei $w \in U_r(0)$. Wähle $\rho > 0$, so daß $|w| < \rho < r$.

$b_n := n^2|a_n|\rho^{n-2}$ ($n \geq 2$); $\sqrt[n]{|b_n|} \rightarrow \frac{\rho}{r} < 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} b_n$ konvergent; $c := \sum_{n=2}^{\infty} b_n$. Sei $z \in U_{\rho}(0)$

und $z \neq w$. Betrachte dann

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \frac{1}{z-w} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^n - w^n) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1} \right)}_{=: \alpha_n}.$$

$$\text{Nachrechnen: } \alpha_n = (z-w) \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &= |z-w| \left| \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1} \right| \leq |z-w| \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{k}_{<\rho} \underbrace{|w|^{k-1}}_{<\rho} \underbrace{|z|^{n-k-1}}_{<\rho} \\ &\leq |z-w| \sum_{k=1}^{n-1} k\rho^{n-2} = |z-w|\rho^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \leq |z-w|\rho^{n-2}n^2 \\ &\Rightarrow \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \alpha_n \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |\alpha_n| \end{aligned}$$

5. Potenzreihen

$$\leq \left(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 \rho^{n-2} \right) |z - w| = c |z - w|$$
$$\Rightarrow (z \rightarrow w) \text{ } f \text{ ist in } w \text{ komplex db und } f'(w) = g(w)$$

(2) folgt aus (1) induktiv.

(3) folgt aus (2) mit $z = z_0$. ■

Definition

Seien $r_1, r_2 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Dann

$$\min\{r_1, r_2\} = \begin{cases} \min\{r_1, r_2\} & , \text{ falls } r_1, r_2 < \infty \\ r_2 & , \text{ falls } r_1 = \infty \\ r_1 & , \text{ falls } r_2 = \infty \end{cases}$$

Satz 5.5

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2 . Dann hat für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z - z_0)^n$ einen Konvergenzradius $r \geq \min\{r_1, r_2\}$

Beweis

Klar. ■

Beispiel

$$a_n = b_n, \alpha = 1, \beta = -1$$

6. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Bekannt aus §5: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut in jedem $z \in \mathbb{C}$

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (z \in \mathbb{C})$$

klar: $e^0 = 1, e^1 = e$

Satz 6.1

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert auf \mathbb{C} lokal gleichmäßig.
- (2) $\exp \in H(\mathbb{C})$ und $\exp'(z) = \exp(z) \forall z \in \mathbb{C}$
- (3) **Additionstheorem:** $e^{z+w} = e^z e^w \forall z, w \in \mathbb{C}$
- (4) $e^z \cdot e^{-z} = 1$, insbesondere $e^z \neq 0$
- (5) Für $z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$: $e^z = e^x e^{iy}, |e^{iy}| = 1, |e^z| = e^x$

Beweis

(1) folgt aus 5.2

(2) 5.4 $\implies \exp \in H(\mathbb{C})$ und $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z) (z \in \mathbb{C})$

(3) Sei $c \in \mathbb{C}$ zunächst fest.

$$f(z) := e^z e^{c-z} (z \in \mathbb{C}),$$

$$f \in H(\mathbb{C}) \text{ und } f'(z) = e^z e^{c-z} + e^z e^{c-z} (-1) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

\mathbb{C} ist ein Gebiet $\xrightarrow{4.2} f$ ist auf \mathbb{C} konstant.

$$f(0) = e^c. \text{ Also: } e^z e^{c-z} = e^c \quad \forall z \in \mathbb{C} \forall c \in \mathbb{C}$$

Setze $c := z + w$

(4) folgt aus (3)

(5) Nur zu zeigen: $|e^{iy}| = 1 (y \in \mathbb{R})$

$$\overline{e^{iy}} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{iy})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} = e^{-iy}$$

$$\implies |e^{iy}|^2 = e^{iy} \overline{e^{iy}} = e^{iy} e^{-iy} \stackrel{(4)}{=} 1$$

■

Definition

Für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\cos z &:= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) && \text{Cosinus} \\ \sin z &:= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) && \text{Sinus}\end{aligned}$$

Satz 6.2

(1)

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(2) $\cos, \sin \in H(\mathbb{C})$

$$\cos' z = -\sin z, \quad \sin' z = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(3) $e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Insbesondere: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$. Damit lautet für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Darstellung in Polarkoordinaten: $z = |z|e^{i \arg z}$.

(4) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \sin w \cos z \quad \forall z, w \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

(5) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Beweis

(1) nur für \cos :

$\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{i^n + (-i)^n}{n!}}_{\begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2(-1)^n, & n = 2k \end{cases}} z^n$$

$$\implies \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

(2) Aus der Definition folgt: $\cos \in H(\mathbb{C})$ und

$$\cos' z = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{-1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z$$

Analog für den Sinus.

(3) , (4) , (5) folgen aus der Definition. ■

Folgerung 6.3

- (1) $e^{2k\pi i} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$; insbesondere: $e^{2\pi i} = 1$
- (2) $e^{i\pi} + 1 = 0$
- (3) Für $z \in \mathbb{C} : e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$
- (4) $e^{z+2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (Die Exponentialfkt. hat die Periode 2π)
- (5) Für $z \in \mathbb{C} :$
 $\sin z = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : z = k\pi$
 $\cos z = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : z = \frac{2k+1}{2}\pi$

Beweis

- (1) 6.2 (3) $\implies e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 (k \in \mathbb{Z})$
- (2) $e^{i\pi} \stackrel{6.2(3)}{=} \cos \pi + i \sin \pi = -1$
- (3) " \implies " Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} (x, y \in \mathbb{R})$ und $e^z = 1$
 $\implies e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = 1$
 $\implies e^x \cos y = 1, e^x \sin y = 0 \implies \sin y = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : y = k\pi$
 $1 = |e^z| = e^x \implies x = 0 \implies \cos y = 1 \implies k = 2j (j \in \mathbb{Z}) \implies z = i2j\pi$
- (4) $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$
- (5) Nur für sin. Sei $z \in \mathbb{C} :$
 $\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \stackrel{(3)}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : 2iz = 2k\pi i$
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = k\pi.$ ■

Definition

Für $z \in \mathbb{C} :$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \textbf{Tangens}$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \textbf{Cotangens}$$

\tan und \cot sind auf ihrem Definitionsbereichen holomorph.

7. Der komplexe Logarithmus

Definition

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt **ein Logarithmus von w** . Man schreibt in diesem Fall (ungenau): $z = \log w$.

Satz 7.1

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = |w|e^{i\text{Arg}w}$ ($\text{Arg}w \in (-\pi, \pi]$)

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^z = w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \log |w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$ ($\log |w|$ ist der reelle Log)

Beweis

$$" \Leftarrow " : e^z = \underbrace{e^{\log |w|}}_{|w|} \underbrace{e^{i\text{Arg}w}}_1 e^{2k\pi i} = |w|e^{i\text{Arg}w} = w$$

" \Rightarrow " Sei $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) und $e^z = w$. Dann: $|w| = |e^z| = e^x \Rightarrow x = \log |w|$

$$|w|e^{i\text{Arg}w} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w|e^{iy}$$

$$\Rightarrow e^{iy} = e^{i\text{Arg}w} \Rightarrow e^{i(y-\text{Arg}w)} = 1 \xrightarrow{6.3} \exists k \in \mathbb{Z} : iy - i\text{Arg}w = 2k\pi i$$

$$\Rightarrow z = \log |w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$$

■

Definition

Die Funktion $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ def. durch $\text{Log}w := \log |w| + i\text{Arg}w$ heißt der **Hauptzweig des Logarithmus**.

Beispiele:

(1) Alle Log von $w = 1$: $2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Log } 1 = 0$$

(2) $\text{Log}(-1) = i\pi$

(3) $w = 1 + i$, $|w| = \sqrt{2}$, $\text{Arg}w = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Log}(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

Satz 7.2

Sei $A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$

$f := \exp|_A$

- (1) f ist auf A injektiv.
- (2) $f(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- (3) $f^{-1}(w) = \operatorname{Log} w$ ($w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)
- (4) Die Funktion Log ist unstetig in jedem $w \in \mathbb{R}$ und $w < 0$

Beweis

- (1) 6.3, 7.1
- (2) 6.3, 7.1
- (3) 6.3, 7.1
- (4) §3 Beispiel: $w \mapsto \operatorname{Arg} w$ ist in $w < 0$ unstetig. ■

Definition

$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\} (\subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\})$

Für $w \in \mathbb{C}_-$ ist $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$.

Satz 7.3

$\operatorname{Log} \in C(\mathbb{C}_-)$

Beweis

Sei $w_0 \in \mathbb{C}_-$, $z_0 := \operatorname{Log} w_0$, $x_0 := \operatorname{Re} z_0$, $y_0 := \operatorname{Im} z_0$; also: $x_0 = \log |w_0|$, $y_0 = \operatorname{Arg} w_0 \in (-\pi, \pi)$.

$R := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \log 2, |y| \leq \pi\}$.

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $K := R \cap (\mathbb{C} \setminus U_\varepsilon(z_0)) \neq \emptyset$. Klar: K ist kompakt, $z_0 \notin K$.

Definiere $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi(z) := |e^z - w_0| = |e^z - e^{z_0}|$.

Dann: $\varphi \in C(K)$. 3.3 $\Rightarrow \exists \varrho := \min \varphi(K)$.

Annahme: $\varrho = 0$. Also existiert ein $z \in K : e^z = e^{z_0} \Rightarrow e^{z-z_0} = 1$. 6.3 $\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : z - z_0 = 2j\pi i \Rightarrow 2j\pi = \operatorname{Im}(z - z_0) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0 \Rightarrow 2|j|\pi = |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0| \leq \underbrace{|\operatorname{Im} z|}_{\leq \pi} + \underbrace{|\operatorname{Im} z_0|}_{< \pi} < 2\pi \Rightarrow$

$j = 0 \Rightarrow z_0 = z \in K$. Wid!

Also: $\varrho > 0$

$\delta := \min\{\varrho, \frac{1}{2}e^{x_0}\}$. Sei $w \in \mathbb{C}_-$ und $|w - w_0| < \delta$; $z := \log w$. Z.z: $|z - z_0| < \varepsilon$.

Sei $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$); $y = \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$, also: $|y| \leq \pi$.

Annahme: $x > x_0 + \log 2$. Dann:

$\frac{1}{2}e^{x_0} \geq \delta > |w - w_0| = |e^z - e^{z_0}| \geq ||e^z| - |e^{z_0}|| = |e^x - e^{x_0}| \geq e^x - e^{x_0} > e^{x_0 + \log 2} - e^{x_0} = e^{x_0}$ Wid!

Also: $x \leq x_0 + \log 2$. Analog: $x \geq x_0 - \log 2$.

Fazit: $z \in R$.

Annahme: $|z - z_0| \geq \varepsilon \Rightarrow z \in K \Rightarrow \delta \leq \varrho \leq \varphi(z) = |e^z - e^{z_0}| = |w - w_0| < \delta$. Wid! ■

Satz 7.4

$\text{Log} \in H(\mathbb{C}_-) \text{ und } \text{Log}'w = \frac{1}{w} \forall w \in \mathbb{C}_-$

Beweis

Sei $w_0 \in \mathbb{C}_-$; (w_n) eine Folge in \mathbb{C}_- mit: $w_n \neq w_0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $w_n \rightarrow w_0$, $z_0 := \text{Log}w_0$, $z_n := \text{Log}w_n$. 7.3 $\Rightarrow z_n \rightarrow z_0$. Dann:

$$\frac{\text{Log}w_n - \text{Log}w_0}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{e^{z_n} - e^{z_0}} = \left(\frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0} \right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}$$

D.h. Log ist in w_0 komplex differenzierbar und $\text{Log}'w_0 = \frac{1}{w_0}$ ■

Bezeichnung: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = U_1(0)$

Beachte: Für $z \in \mathbb{D}$ ist $1 - z \in \mathbb{C}_-$

Satz 7.5

Für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

Beweis

7.4, 5.4 $\Rightarrow f(z) := \text{Log}(1+z) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ ist auf \mathbb{D} holomorph und
 $f'(z) = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-(-z)} = 0 \forall z \in \mathbb{D}$

\mathbb{D} ist ein Gebiet $\stackrel{4.2}{\Rightarrow} f$ ist auf \mathbb{D} konstant. $f(0) = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$ ■

Definition

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{C}$.

$w^a := e^{a \text{Log}w}$ (**Hauptzweig der allgemeinen Potenz**)

Beispiele:

(1) Für $a = k \in \mathbb{Z}$ ist obige Definition die frühere Potenz von w . Denn: $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$e^{k \text{Log}w} = e^{\text{Log}w + \text{Log}w + \dots + \text{Log}w} = (e^{\text{Log}w})^k = w^k$$

$$e^{-k \text{Log}w} = \frac{1}{e^{k \text{Log}w}} \stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{w^k} = w^{-k}$$

(2) $w = a = i$, $\log|w| = 0$, $\text{Arg}w = \frac{\pi}{2}$, $\text{Log}w = i \frac{\pi}{2} \Rightarrow i^i = e^{i \cdot i \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$

Satz 7.6

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(w) := w^a$. Dann:

$f \in H(\mathbb{C}_-)$ und $f'(w) = a w^{a-1} \forall w \in \mathbb{C}_-$

Beweis

7.4, 4.4 $\Rightarrow f \in H(\mathbb{C}_-)$ und $f'(w) = e^{a \text{Log}w} (a \text{Log}w)' = a e^{a \text{Log}w} \frac{1}{w} \stackrel{\text{Bsp}(1)}{=} a e^{a \text{Log}w} e^{-\text{Log}w} = a e^{(a-1) \text{Log}w} = a w^{a-1}$ ■

8. Komplexe Wegintegrale

Im Folgenden sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ($a < b$) und $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen.

Definition

- (1) Ist φ auf I stetig, so setze: $\int_a^b \varphi(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) dt$; $\int_b^a \varphi(t) dt := -\int_a^b \varphi(t) dt$; $\int_a^a \varphi(t) dt := 0$
- (2) φ heißt auf I **differenzierbar** (db) $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$ sind auf I differenzierbar. In diesem Fall: $\varphi' := (\operatorname{Re} \varphi)' + i(\operatorname{Im} \varphi)'$
- (3) φ heißt auf I **stetig differenzierbar** $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$ sind auf I stetig differenzierbar.

Satz 8.1

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$, $\varphi(I) \subseteq D$ und φ auf I differenzierbar.

Dann ist $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar auf I und $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) \forall t \in I$.

Beweis

Übung! ■

Satz 8.2

- (1) Sei φ stetig auf I und $\Phi : I \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\Phi(s) := \int_a^s \varphi(t) dt$. Dann ist Φ stetig differenzierbar auf I und $\Phi' = \varphi$ auf I
- (2) Sei φ auf I stetig differenzierbar $\Rightarrow \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

Beweis

Übung! ■

Definition

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg (also γ stetig).

- (1) $\operatorname{Tr}(\gamma) := \gamma([a, b])$ **Träger von γ**
- (2) γ heißt **geschlossen** $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$
- (3) γ heißt **glatt** $\Leftrightarrow \gamma$ ist auf $[a, b]$ stetig differenzierbar.

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ und $\gamma_j := [a_j, a_{j+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ seien Wege ($j = 1, \dots, n$) mit $\gamma_j(a_{j+1}) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ ($j = 1, \dots, n-1$).

8. Komplexe Wegintegrale

Definiere $\gamma : [a_1, a_{n+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) := \gamma_j(t)$, falls $t \in [a_j, a_{j+1}]$.

Dann ist γ ein Weg und man schreibt: $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n$

γ heißt **stückweise glatt** $:\Leftrightarrow \gamma_1, \dots, \gamma_n$ sind glatt.

Bemerkungen:

(1) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg. γ ist stückweise glatt $\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_{n+1} \in [a, b] : a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b$ und $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ ist glatt ($j = 1, \dots, n$)

(2) stückweise glatte Wege sind rektifizierbar.

(3) glatt \Rightarrow stückweise glatt

Beispiel

$\gamma_1(t) := t$ ($t \in [0, 1]$), $\gamma_2(t) := 1 + i(t - 1)$ ($t \in [1, 2]$).

$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2$, γ_1, γ_2 sind glatt, $\gamma'_1(t) = 1 \neq \gamma'_2(1) = i \Rightarrow \gamma$ in 1 nicht differenzierbar.

Wie in \mathbb{R} zeigt man: Ist $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so gilt: $|\int_a^b \phi(t) dt| \leq \int_a^b |\phi(t)| dt$.

Für den Rest des Paragraphen sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stets ein Weg (also stetig).

Definition

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$; γ^- heißt der zu γ **inverse Weg**.

Klar: $\text{Tr}(\gamma) = \text{Tr}(\gamma^-)$

Definition

Ist γ glatt, so setze $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ stückweise glatt (mit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ glatt), so setze:

$L(\gamma) := L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_n)$

$L(\gamma)$ heißt **Weglänge** von γ .

Beispiele:

(1) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)$ ($t \in [0, 1]$), γ ist glatt.

$$\gamma'(t) = z_2 - z_1. \implies L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dt = |z_2 - z_1|$$

(2) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

$$\gamma \text{ ist glatt, } \gamma'(t) = rie^{it}, |\gamma'(t)| = r \implies L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Definition

Sei $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar, bijektiv und $h(\alpha) = a, h(\beta) = b$. Ist γ stückweise glatt, so setze $\Gamma := \gamma \circ h$, also $\Gamma(s) = \gamma(h(s))$ ($s \in [\alpha, \beta]$).

Dann ist Γ ein stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\Gamma) = \text{Tr}(\gamma)$.

h heißt eine **Parametertransformation**. Man schreibt $\Gamma \sim \gamma$.

Definition

Sei $f \in C(\text{Tr}(\gamma))$;

Ist γ glatt, so setze $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ stückweise glatt mit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ glatt, so setze $\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz$.

$\int_{\gamma} f(z) dz$ heisst ein (komplexes) **Wegintegral** (von f längs γ)

Beispiel

$$\gamma(t) := 3e^{it} (t \in [0, 2\pi])$$

$$(1) \quad f(z) = \bar{z}, \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} 3e^{-it} i 3e^{it} dt = 18\pi i.$$

$$(2) \quad f(z) = z^2, \int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} 9e^{2it} i 3e^{it} dt = 0.$$

Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 8.3

γ sei stückweise glatt, $f, g : \text{Tr}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ seien stetig, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und Γ sei ein stückweise glatter Weg mit $\Gamma \sim \gamma$.

$$(1) \quad \int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$$

$$(2) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \quad (\text{und } L(\Gamma) = L(\gamma))$$

$$(3) \quad \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Satz 8.4

γ und f seien wie in 8.3. f_n sei eine Folge in $C(\text{Tr}(\gamma))$ und es sei $M := \max_{z \in \text{Tr}(\gamma)} |f(z)|$. Dann:

$$(1) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML(\gamma)$$

(2) Konvergiert die Folge (f_n) auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmaessig gegen f , so gilt:

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(\text{also: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)) dz)$$

Beweis

$$(1) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = ML(\gamma).$$

$$(2) \quad M_n := \max_{z \in \text{Tr}(\gamma)} |f_n(z) - f(z)|. \text{ Vorraussetzung } \implies M_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \stackrel{(1)}{\leq} M_n L(\gamma). \quad \blacksquare$$

Definition

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$. f besitzt auf D eine **Stammfunktion** (SF) : $\iff \exists F \in H(D) : F' = f$ auf D .

Satz 8.5

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$ besitze auf D die Stammfunktion F und γ sei ein stückweiser glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. Dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Beweis

O.B.d.A: γ glatt. $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \stackrel{8.2}{=} (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$. ■

Folgerung 8.6

D , f und γ seien wie in 8.5. Ist γ geschlossen $\implies \int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Beispiel 8.7

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$); γ ist geschlossen.

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k(z) := (z - z_0)^k$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$)

(1) Sei $k \neq -1$. f_k hat auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ die Stammfunktion $z \mapsto \frac{1}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$.
 $8.6 \implies \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0$

(2) Sei $k = -1$: $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i$.

Also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 1$$

Wegen 8.6: Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ keine Stammfunktion!

Aber: im Falle $z_0 = 0$ hat die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ die Stammfunktion $\text{Log} z$ auf \mathbb{C}_- .

Satz 8.8

Sei $[a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}$ und $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ glatte Wege mit $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ ($j = 1, \dots, n$)

Dann existiert ein stückweise glatter Weg γ mit: $\text{Tr}(\gamma) = \bigcup_{j=1}^n \text{Tr}(\gamma_j)$, $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_n)$ und $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \quad \forall f \in C(\text{Tr}(\gamma))$

Beweis

mit 8.3(2). ■

Beispiel

$\gamma_1(t) = t$, ($t \in [0, 1]$); $\gamma_2(t) = 1 + it$, ($t \in [0, 1]$)

$\tilde{\gamma}_2(t) := 1 + i(t - 1)$, ($t \in [1, 2]$). Dann: $\tilde{\gamma}_2 \sim \gamma_2$; $\gamma := \gamma_1 \oplus \tilde{\gamma}_2 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$.

Satz 8.9

Sei (K_n) eine Folge kompakter Mengen in \mathbb{C} mit: $K_n \neq \emptyset$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$ und $d(K_n) := \max_{z, w \in K_n} |z - w| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$

Beweis

Wähle in jedem K_n ein z_n . Für $n, k \in \mathbb{N} : z_n, z_{n+k} \in K_n$

Dann: $|z_n - z_{n+k}| \leq d(K_n) \implies (z_n)$ ist eine Cauchy-Folge $\implies \exists z_0 \in \mathbb{C} : z_n \rightarrow z_0$.

Sei $N \in \mathbb{N}$. $z_n \in K_N \forall n \geq N$. K_N abgeschlossen $\implies z_0 \in K_N$. ■

9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln

Definition

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. $\Delta := \Delta_{z_1, z_2, z_3} := \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 : t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$

Δ heißt ein **Dreieck** (Δ ist kompakt)

$$\gamma_1(t) := z_1 + t(z_2 - z_1) (t \in [0, 1])$$

$$\gamma_2(t) := z_2 + (t - 1)(z_3 - z_2) (t \in [1, 2])$$

$$\gamma_3(t) := z_3 + (t - 2)(z_1 - z_3) (t \in [2, 3])$$

$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) = \partial\Delta$.

Wir setzen (ausnahmsweise): $L(\partial\Delta) = L(\gamma)$ und $\int_{\partial\Delta} f(z)dz := \int_{\gamma} f(z)dz$. ($f \in C(\partial\Delta)$)

Satz 9.1 (Lemma von Goursat)

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in H(D)$.

Ist $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck, so gilt: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

Beweis

Sei $\Delta = \Delta_{z_1, z_2, z_3}$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma$ wie oben.

Fall 1: $z_1 = z_2$

Fall 1.1: $z_3 = z_1 : \gamma(t) = z_3 \forall t \in [0, 3]$. Dann: $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3 = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} 0 + \int_{\gamma_2} 0 + \int_{\gamma_3} 0 = 0$.

Fall 1.2: $z_3 \neq z_1$. $\gamma_1(t) = z_1, \gamma'_1 = 0$, also $\int_{\gamma_1} = 0$, $\gamma_2^- \sim \gamma_3 \Rightarrow \int_{\gamma_3} = \int_{\gamma_2^-} \stackrel{8.3}{=} -\int_{\gamma_2} \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_2} = 0$.

Fall 2: Δ ist ein echtes Dreieck ($z_1 \neq z_2 \neq z_3, z_3 \neq z_1$). Verbinde die Mittelpunkte der Kanten von Δ durch Geraden.

Wir erhalten 4 Dreiecke¹ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

Es existieren stückweise glatte Wege $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ mit $\text{Tr}(\alpha_j) = \partial\Delta_j$ ($j = 1, \dots, 4$).²

Die Summe der Integrale in entgegengesetzten Richtungen längs der Kanten von $\Delta_4 = 0$.

Also:

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$$

¹Die Skizze taucht hier leider nicht auf, ich versuchs mal zu erklären: Verbindet man alle Seitenhalbierenden miteinander, so entstehen in einem Dreieck vier kleine Dreiecke. Diese nummeriert man nun gegen den Uhrzeigersinn mit 1,2,3, das mittlere aber nennt man 4.

²gegen den Uhrzeigersinn

9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln

Somit:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \underbrace{\left| \int_{\partial\Delta_j} f(z) dz \right|}_{=: a_j}$$

O.B.d.A: $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_4\} \cdot \Delta^{(1)} := \Delta_1$. Fazit: $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz|$ und $L(\partial\Delta^{(1)}) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$ ³

Verfahre mit $\Delta^{(1)}$ genauso wie mit Δ . Wir erhalten ein Dreieck $\Delta^{(2)} \subseteq \Delta^{(1)} \subseteq \Delta : |\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z) dz|, L(\partial\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^{(1)})$.

Also: $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^2 |\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z) dz|$ und $L(\partial\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2^2} L(\partial\Delta)$.

Induktiv erhaelt man eine Folge $(\Delta^{(n)})$ von Dreiecken mit:

$\Delta \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \dots, |\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^n |\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz|$ und $L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) (n \in \mathbb{N})$

8.9 $\Rightarrow \exists z_0 \in D : z_0 \in \Delta^{(n)} \forall n \in \mathbb{N}$.

Definiere: $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & , z \neq z_0 \\ f'(z_0) & , z = z_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in H(D) \Rightarrow \varphi \in C(D)$. Es ist

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0) = \\ &\underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{=: f_1(z)} + \underbrace{(\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0)}_{=: f_2(z)} \quad \forall z \in D. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon \forall z \in U_\delta(z_0)$ ⁴. $\exists m \in \mathbb{N} : \Delta^{(m)} \subseteq U_\delta(z_0)$.
Für $z \in \partial\Delta^{(m)} : |z - z_0| \leq \frac{1}{2^m} L(\partial\Delta)$ ⁵ und $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$.

Dann: $|f_2(z)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)}) \forall z \in \partial\Delta^{(m)}$. Also: $|\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_2(z) dz| \stackrel{8.4}{\leq} \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)})^2$.

f_1 hat auf D die Stammfunktion $f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2 \stackrel{8.6}{\Rightarrow} |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_1(z) dz| = 0$.

Dann: $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^m |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z) dz| = 4^m |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_2(z) dz| \leq 4^m \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)})^2 = 4^m \varepsilon (\frac{1}{2^m} L(\partial\Delta))^2 = 4^m \varepsilon \frac{1}{4^m} L(\partial\Delta)^2 = \varepsilon L(\partial\Delta)^2$.

Fazit: $\forall \varepsilon > 0$ gilt: $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq \varepsilon L(\partial\Delta)^2$. ■

Hilfssatz 1:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ und $f \in C(U_r(z_0))$. Für jedes Dreieck $\Delta \subseteq U_r(z_0)$ gelte: $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$. Dann besitzt f auf $U_r(z_0)$ eine Stammfunktion.

Beweis

Definiere: $F : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ wie folgt: Für $z \in U_r(z_0)$ sei $\gamma_z(t) := z_0 + t(z - z_0)$ ($t \in [0, 1]$).
 $F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw$.

³Diese Gleichheit folgt aus geometrischen Überlegungen an Dreiecken.

⁴Folgt aus der Stetigkeit.

⁵ $\max_{w, z \in \Delta} |w - z| \leq L(\partial\Delta)$

Sei $z_1 \in U_r(z_0)$. Sei $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so, dass $\Delta_{z_0, z_1, z_1+h} \subseteq U_r(z_0)$.

$$\gamma_0(t) := z_1 + th (t \in [0, 1]).$$

$$\gamma_1 := \gamma_{z_1+h}^-$$

$$\text{Vorraussetzungen} \Rightarrow 0 = \underbrace{\int_{\gamma_{z_1}} f(w)dw}_{=F(z_1)} + \int_{\gamma_0} f(w)dw + \underbrace{\int_{\gamma_1} f(w)dw}_{=-F(z_1+h)} \Rightarrow F(z_1+h) - F(z_1)$$

$$= \int_{\gamma_0} f(w)dw;$$

$$\int_{\gamma_0} f(z_1)dw = \int_0^1 f(z_1)h dt = f(z_1)h.$$

Also:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{\gamma_0} (f(w) - f(z_1))dw \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^1 (f(z_1+th) - f(z_1))h dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 (f(z_1+th) - f(z_1)) dt \right| \leq \int_0^1 |f(z_1+th) - f(z_1)| dt \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(z_1+th) - f(z_1)| \leq \varepsilon$ für $0 < |h| < \delta$ und für $t \in [0, 1] \Rightarrow$

$\left| \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) \right| \leq \varepsilon$ für $0 < |h| < \delta$. D.h. F ist in z_1 komplex differenzierbar und $F'(z_1) = f(z_1)$ ■

Folgerung:

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(D)$. Ist $z_0 \in D$, so existiert ein $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f besitzt auf $U_\delta(z_0)$ eine Stammfunktion.

Beweis

9.1 und Hilfssatz 1 ■

Definition

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$

- (1) G heißt **sternförmig** : $\iff \exists z^* \in G$ mit: $S[z, z^*] \subseteq G$ I.d. Fall heißt z^* ein **Sternmittelpunkt** von G .

Beachte: sternförmig \implies **Wegzusammenhang**.

- (2) Ist G offen und sternförmig, so heißt G ein **Sterngebiet**

Beispiel

- (1) Konvexe Mengen sind sternförmig
- (2) $\mathbb{C}, U_\epsilon(z_0)$ sind Sterngebiete. $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \dot{U}_\epsilon(z_0)$ sind Gebiete, aber keine Sterngebiete.
- (3) \mathbb{C}_- ist ein Sterngebiet. Jedes $z^* \in (0, \infty)$ ist ein Sternmittelpunkt von \mathbb{C}_- .

Satz 9.2 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, es sei $f \in H(G)$ und es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann:

- (1) f besitzt auf G eine Stammfunktion F .

$$(2) \int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$$(3) \text{ Ist } \gamma \text{ geschlossen, so ist } \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Bemerkung: Für beliebige Gebiete ist 9.2 i.a. falsch.

Beispiel: $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ (s. 8.7)

Beweis

(1) Sei z^* ein Sternmittelpunkt von G . Definiere $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ wie folgt: für $z \in G$ sei $\gamma_z(t) := z^* + t(z - z^*)$ ($t \in [0, 1]$). $\text{Tr}(\gamma_z) = S[z, z^*] \subseteq G$. $F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw$. $f \in H(G) \xrightarrow{9.1} \int_{\partial \Delta} f(w) dw = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$. Fast wörtlich wie in HS 1 zeigt man: $F \in H(G)$ und $F' = f$ auf G .

(2) folgt aus (1) und 8.5

(3) folgt aus (1) und 8.6 ■

Bezeichnung

Seien G und f wie in 9.2. $z^* \in G$ sei ein Sternmittelpunkt von G . Für $z \in G$ setze: $F(z) := \int_{z^*}^z f(w) dw := \int_{\gamma} f(w) dw$, wobei γ **irgendein** stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$, Anfangspunkt von $\gamma = z^*$ und Endpunkt von $\gamma = z$ ist.

Wegen 9.2(2) ist F wohldefiniert. Der Beweis von 9.2(1) zeigt: $F \in H(G)$ und $F' = f$ auf G .

Beispiel

⁶ $G = \mathbb{C}_-$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $z^* = 1$, $F(z) := \int_1^z \frac{1}{w} dw$

Dann: $F'(z) = \frac{1}{z} = \text{Log}' z \quad \forall z \in G$

Dann existiert $c \in \mathbb{C} : F(z) = \text{Log} z + c \quad \forall z \in G$. $F(1) = 0 = \text{Log} 1 \implies c = 0$

Also: $\text{Log} z = \int_1^z \frac{1}{w} dw$ ($z \in \mathbb{C}_-$)

Hilfssatz 2

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $z_0 \in D$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) Weiter sei $z_1 \in U_r(z_0)$, $\rho > 0$ so, daß $\overline{U_\rho(z_1)} \subseteq U_r(z_0)$ und $\gamma_0(t) := z_1 + \rho \cdot e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) Ist $g \in H(D \setminus \{z_1\})$, so gilt:

$$\int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma_0} g(w) dw$$

Beweis

O.B.d.A $\text{Re } z_0 = \text{Re } z_1$, γ_1 und γ_2 seien stückweise glatte Wege. Wähle $R > r$ so, dass $U_R(z_0) \subseteq D$.

$G_1 := U_R(z_0) \setminus \{z_1 + t : t \leq 0\}$. G_1 ist ein Sterngebiet, $\text{Tr}(\gamma_1) \subseteq G_1$. γ_1 ist geschlossen, $g \in H(G_1)$. 9.2 $\implies \int_{\gamma_1} g(w) dw = 0$. Analog: $\int_{\gamma_2} g(w) dw = 0$. Also:

$$0 = \int_{\gamma_1} g(w) dw + \int_{\gamma_2} g(w) dw = \int_{\gamma} g(w) dw + \int_{\gamma_0^-} g(w) dw = \int_{\gamma} g(w) dw - \int_{\gamma_0} g(w) dw \quad \blacksquare$$

⁶Dieses Beispiel trägt die Nummer 9.3

Satz 9.4 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)

$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in D, r > 0$ und $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Weiter sei $f \in H(D)$ und $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$).

Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

Bemerkungen

(1) Die Werte von f in $U_r(z_0)$ sind festgelegt durch die Werte von f auf $\partial U_r(z_0)$

(2) Für $z = z_0$: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \cdot e^{it}) dt$ (Mittelwertgleichung)

Beweis

Sei $z_1 \in U_r(z_0)$. Sei $\epsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_1) \subseteq U_r(z_0)$ und

$|f(w) - f(z_1)| \leq \epsilon \quad \forall w \in U_\delta(z_1)$.

Sei $0 < \rho < \delta$; $\gamma_0(t) := z_1 + \rho \cdot e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$).

Für $w \in \text{Tr}(\gamma_0)$: $|w - z_1| = \rho < \delta$, also $|f(w) - f(z_1)| \leq \epsilon$.

Also: $|\frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1}| \leq \frac{\epsilon}{\rho} \quad \forall w \in \text{Tr}(\gamma_0)$.

$$8.4 \implies \left| \int_{\gamma_0} \frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw \right| \leq \frac{\epsilon}{\rho} L(\gamma_0) = \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

Definiere $g : D \setminus \{z_1\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(w) := \frac{f(w)}{w - z_1}$.

Dann: $g \in H(D \setminus \{z_1\})$.

Somit:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw &= \int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma_0} g(w) dw \\ &= \int_{\gamma_0} \frac{f(z_1) + f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw \\ &= f(z_1) \cdot \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{dw}{w - z_1}}_{\stackrel{8.7}{=} 2\pi i} + \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw}_{=: A} \\ &= 2\pi i f(z_1) + A \end{aligned}$$

$$\implies \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw - 2\pi i f(z_1) \right| = |A| \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} 2\pi\epsilon.$$

$$\epsilon > 0 \text{ beliebig} \implies f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw \quad \blacksquare$$

Beispiel

Berechne $I = \int_{\gamma} \frac{e^{\sin z} + \cos(e^z)z^2}{z} dz, \gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

$$f(z) := e^{\sin z} + \cos(e^z)z^2$$

$$9.4 \implies I = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

Satz 9.5

γ sei ein stückweise glatter Weg in \mathbb{C} , es sei $D := \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$ (D offen). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$F_n(z) := \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n} dw,$$

wobei $\varphi \in C(\text{Tr}(\gamma))$.

Dann ist $F_n \in H(D)$ und $F'_n = nF_{n+1}$ auf D ($n \in \mathbb{N}$)

Beweis

Sei $z_0 \in D$. Wir zeigen: F_n ist in z_0 komplex differenzierbar und $F'_n(z_0) = nF_{n+1}(z_0)$.

o.B.d.A: $z_0 = 0$. Dann ist $0 \in D$, also $0 \notin \text{Tr}(\gamma)$. Sei $w \in \text{Tr}(\gamma)$ und $z \in D \setminus \{0\}$:

Nachrechnen:

$$\frac{1}{(w-z)^n} - \frac{1}{w^n} = \frac{z}{(w-z)^n w^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1} (w-z)^k$$

$$h(z, w) := \frac{1}{(w-z)^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1} (w-z)^k - \frac{n}{w}$$

Dann folgt (Nachrechnen!):

$$\frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z, w) dw$$

Weiter gilt $\exists r > 0 : U_r(z_0) \subseteq D$. Sei $\epsilon > 0$. $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \text{Tr}(\gamma)$ ist kompakt und h ist auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\delta > 0 : \delta < \frac{r}{2}$ und $|h(z_1, w) - h(z_2, w)| \leq \epsilon$ $\forall z_1, z_2 \in U_{\delta}(0) \forall w \in \text{Tr}(\gamma)$.

Es ist $h(0, w) = 0 \forall w \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow |h(z, w)| \leq \epsilon \forall z \in U_{\delta}(0) \forall w \in \text{Tr}(\gamma)$

$M := \max_{w \in \text{Tr}(\gamma)} |\varphi(w)|; w \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow |w| = |w - 0| \geq \frac{r}{2}$

$$\Rightarrow |w|^n \geq \frac{r^n}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{|w|^n} \leq \frac{2^n}{r^n}$$

$$\Rightarrow \frac{|\varphi(w)|}{|w|^n} |h(z, w)| \leq M \frac{2^n}{r^n} \epsilon \forall z \in U_{\delta}(0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left| \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z, w) dw \right|}_{= \left| \frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0) \right|} \leq M \frac{2^n}{r^n} \epsilon L(\gamma) = \epsilon \left(\frac{M 2^n}{r^n} L(\gamma) \right) \forall z \in U_{\delta}(0) \quad \blacksquare$$

Satz 9.6

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in H(D)$. Dann:

(1) $f' \in H(D)$

(2) f ist auf D beliebig oft komplex differenzierbar

(3) Cauchysche Integralformeln für Ableitungen

Ist $z_0 \in D, r > 0, \overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), so gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \forall z \in U_r(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis

Sei z_0, r, γ wie in (3).

$$F_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^n} dw \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma), n \in \mathbb{N}$$

9.4 $\Rightarrow f = F_1$ auf $U_r(z_0)$;

9.5 $\Rightarrow F_1 \in H(U_r(z_0))$ und $F_1' = F_2$ auf $U_r(z_0)$. Also: $f' = F_2$ auf $U_r(z_0)$. 9.5 $\Rightarrow F_2 \in H(U_r(z_0))$, also $f' \in H(U_r(z_0))$. $z_0 \in D$ beliebig \Rightarrow (1).

$f' = F_2$ auf $U_r(z_0) \Rightarrow$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

$f'' = F_2' = 2F_3$ auf $U_r(z_0) \Rightarrow$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

Weiter mit Induktion und 9.5

■

Satz 9.7 (Satz von Morera)

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$

Dann:

$$f \in H(D) \iff \int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0 \text{ für jedes Dreieck } \Delta \subseteq D$$

Beweis

" \Rightarrow " : 9.1

" \Leftarrow : Sei $z_0 \in D, r > 0$ und $U_r(z_0) \subseteq D$. Dann mit HilStammfunktionsatz 1 und den Voraussetzungen $\Rightarrow \exists F \in H(U_r(z_0)) : F' = f$ auf $U_r(z_0)$

9.6 $\Rightarrow f \in H(U_r(z_0))$. Da $z_0 \in D$ beliebig $\Rightarrow f \in H(D)$

■

Hilfssatz 3 Seien G_1 und G_2 Gebiete in \mathbb{C} und es sei $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Dann ist $G_1 \cup G_2$ ein Gebiet.

Beweis

$G_1 \cup G_2$ ist offen. Sei $\varphi : G_1 \cup G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ lokal konstant. $\varphi_j := \varphi|_{G_j}$ ($j = 1, 2$)

G_j Gebiet $\Rightarrow \varphi_j$ ist auf G_j konstant. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \Rightarrow \varphi$ ist auf $G_1 \cup G_2$ konstant.

■

Definition

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

G heißt ein **Elementargebiet** (EG) : $\iff \forall f \in H(G) \exists F \in H(G) : F' = f$ auf G .

Beispiel

(1) Aus 9.2: Sterngebiete sind Elementargebiete

(2) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist kein Elementargebiet, denn die Funktion $\frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion (siehe 8.7).

Satz 9.8

Seien G_1 und G_2 Elementargebiete, $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ und es sei $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend. Dann ist $G_1 \cup G_2$ ein Elementargebiet.

Bemerkung: (1) Sind G_1 und G_2 Gebiete, so muß $G_1 \cap G_2$ nicht zusammenhängend sein.

(2) Es gibt Elementargebiete, die keine Sterngebiete sind.

Beweis

Hilfssatz 3 $\Rightarrow G_1 \cup G_2$ ist ein Gebiet.

Vorraussetzungen $\Rightarrow G_1 \cap G_2$ ist ein Gebiet.

Sei $f \in H(G_1 \cup G_2)$, $f_j := f|_{G_j}$ ($j = 1, 2$),

$\exists F_j \in H(G_j) : F_j' = f_j = f$ auf G_j ($j = 1, 2$)

Für $z \in G_1 \cap G_2 : (F_1 - F_2)'(z) = f(z) - f(z) = 0$

4.2 $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : F_1(z) = F_2(z) + c \quad \forall z \in G_1 \cap G_2$

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & , z \in G_1 \\ F_2(z) + c & , z \in G_2 \end{cases}$$

Dann ist F eine Stammfunktion von f auf $G_1 \cup G_2$ ■

Definition

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. g ist auf D **beschränkt** : $\iff \exists c \geq 0 : |g(z)| \leq c \quad \forall z \in D$

Definition

Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt eine **ganze Funktion**. (entire function)

10. Folgerungen aus den Integralformeln

Satz 10.1 (Cauchysche Abschätzungen)

Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, f \in H(U_r(z_0))$ und f sei auf $U_r(z_0)$ beschränkt mit $M := \sup_{U_r(z_0)} |f(z)|$.

Dann: $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis

Sei $0 < \rho < r, \gamma(t) := z_0 + \rho e^{it} (t \in [0, 2\pi])$. 9.6 $\implies f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$.

Für $w \in \text{Tr}(\gamma) : |w - z_0| = \rho$, also $\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{\rho^{n+1}}$

$\xrightarrow{8.4} |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{Mn!}{\rho^n} \xrightarrow{\rho \rightarrow r} \text{Beh.}$ ■

Satz 10.2 (Satz von Liouville)

Ist $f \in H(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C} beschränkt, so ist f konstant.

Beweis

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. 10.1 $\implies |f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}; r > 0$ beliebig.

$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} f'(z_0) = 0, z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig $\implies f' = 0$ auf \mathbb{C} . 4.2 \implies Beh. ■

Bemerkung: 10.2 ist in \mathbb{R} falsch. Z.B. ist $x \rightarrow \cos x$ auf \mathbb{R} beschränkt aber nicht konstant. Für $t \in \mathbb{R} : \cos(it) = \frac{1}{2}(e^{i(it)} + e^{i(-it)}) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cosh t \rightarrow \infty (t \rightarrow \pm\infty)$

Hilfssatz

Sei $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ und $p(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$.

Dann ex. ein $R > 0 : |p(z)| \geq 1 \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Beweis

Für $z \neq 0 : \varphi(z) := \frac{|a_0|}{|z^n|} + \frac{|a_1|}{|z^{n-1}|} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + |a_n|$.

$\implies \varphi(z) \rightarrow \underbrace{|a_n|}_{\neq 0} (|z| \rightarrow \infty) \implies |p(z)| = |z|^n |\varphi(z)| \rightarrow \infty (|z| \rightarrow \infty) \implies \text{Beh.}$ ■

Satz 10.3 (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei p wie in obigem Hilfssatz. Dann ex. ein $z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$

Beweis

Hilfssatz $\implies \exists R > 0 : |p(z)| \geq 1 \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| > R$.

Annahme: $p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Dann $q := \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$ und $|q(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

q ist stetig $\implies q$ ist beschränkt auf $\overline{U_R(0)} \implies q$ ist auf \mathbb{C} beschränkt.

10.2 $\implies q$ ist konstant $\implies p$ ist konstant, Wid! ■

Satz 10.4 (Potenzreihenentwicklung)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$, $z_0 \in D$ und $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$. Dann:

$$(*) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

wobei

$$(**) a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

mit $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi], 0 < \rho < r$

Beweis

(**) folgt aus (*), 5.4 und 9.6. O.B.d.A.: $z_0 = 0$.

Sei $z \in U_r(0)$ und sei $R > 0$ so, dass $|z| < R < r$;

$\gamma_0(t) := z_0 + R \cdot e^{it} \ (t \in [0, 2\pi])$.

Sei $w \in \text{Tr}(\gamma_0)$. Dann $\frac{|z|}{|w|} = \frac{|z|}{R} < 1$, also $\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$.

$$\begin{aligned} \text{Also } \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{\stackrel{9.4}{=} 2\pi i f(z)} &= \int_{\gamma_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n \right) dw \\ &\stackrel{8.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw}_{\stackrel{9.6}{=} 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \right) z^n \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right) z^n \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(1) 10.4 ist in \mathbb{R} falsch.

Bekannt aus der Analysis: Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist auf \mathbb{R} bel. oft db und $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Also: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$ auf \mathbb{R} .

(2) Die Entwicklung (*) gilt in der größten offenen Kreisscheibe um z_0 , die noch ganz in D liegt. Sei r_0 der Radius dieser Kreisscheibe (ist $D = \mathbb{C}$, so ist $r = \infty$). Sei R der KR der PR in (*). Also: $R \geq r_0$.

Satz 10.5 (Konvergenzsatz von Weierstraß)

$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, (f_n) sei eine Folge in $H(D)$ und (f_n) konvergiere auf D lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

- (1) $f \in H(D)$
- (2) (f'_n) konvergiere auf D lokal gleichmäßig gegen f' .

Beweis

- (1) 5.1 $\Rightarrow f \in C(D)$. Sei $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck. (f_n) konvergiere auf $\partial\Delta$

gleichmäßig $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz \stackrel{8.4}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \stackrel{9.1}{=} 0$.

9.7 $\Rightarrow f \in H(D)$.

- (2) O.B.d.A. $f = 0$ auf D (ansonsten betrachte $f_n - f$). Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$

so, daß $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Es genügt zu zeigen:

(f'_n) konvergiert auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ gleichmäßig gegen 0.

$\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it} (t \in [0, 2\pi])$. $M_n := \max_{w \in \text{Tr}(\gamma)} |f_n(w)|$

Vor $\Rightarrow M_n \rightarrow 0$.

Sei $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$. $f'_n(z) \stackrel{9.6}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw$

$w \in \text{Tr}(\gamma) : |w - z| \geq \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{|f_n(w)|}{|w-z|^2} \leq \frac{4M_n}{r^2}$

$\Rightarrow |f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{4M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{4M_n}{r}$

Also: $|f'_n(z)| \leq \frac{4M_n}{r} \forall z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \forall n \in \mathbb{N}$ und $M_n \rightarrow 0$. ■

11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Paragraphen sei $G \subseteq \mathbb{C}$ stets ein **Gebiet**. Fast wörtlich wie in Analysis I zeigt man:

Satz 11.1 (Identitätssatz für Potenzreihen)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$,

es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für $z \in U_r(z_0)$, es sei (z_k) eine

Folge in $\dot{U}_r(z_0)$ mit $z_k \rightarrow z_0$ und es gelte $f(z_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$.

Dann: $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 11.2 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)

Es sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$, (z_k) eine Folge in $G \setminus \{z_0\}$ mit $f(z_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ und $z_k \rightarrow z_0$.

Dann: $f = 0$ auf G .

Beweis

$\exists r > 0: U_r(z_0) \subseteq G$. 10.4 $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \forall z \in U_r(z_0)$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}: z_k \in U_r(z_0) \forall k \geq k_0$. 11.1 $\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow z_0 \in A := \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0\}$. $B := G \setminus A$, $A \cap B = \emptyset$

Sei $a \in A$. $\exists \delta > 0: U_\delta(a) \subseteq G$. 10.4 $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \forall z \in U_\delta(a)$

$a \in A \Rightarrow f^{(n)}(a) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f \equiv 0$ auf $U_\delta(a)$

$\Rightarrow f^{(n)} \equiv 0$ auf $U_\delta(a) \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow U_{(\delta)}(a) \subseteq A$. A ist also offen. Sei $b \in B$. $\exists k \in \mathbb{N}_0: f^{(k)}(b) \neq 0$;

$f^{(k)}$ stetig $\Rightarrow \exists \epsilon > 0: U_\epsilon(b) \subseteq G$ und $f^{(k)}(z) \neq 0 \forall z \in U_\epsilon(b)$

$\Rightarrow U_\epsilon(b) \subseteq B$; d.h. B ist offen. G ist ein Gebiet $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow G = A \Rightarrow \text{Beh.}$ ■

Bezeichnung

für $f \in H(G)$: $Z(f) := \{z \in G : f(z) = 0\}$.

Folgerung 11.3

(1) Ist $f \in H(G)$, $f \not\equiv 0$ auf G und $z_0 \in Z(f)$, so existiert ein $\epsilon > 0$:

$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$, $f(z) \neq 0 \forall z \in \dot{U}_\epsilon(z_0)$

(2) Ist $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und gilt: $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$, so ist $f = 0$ auf G .

Beweis

(1) folgt aus 11.2

(2) Verfahre wie im Beweis von 11.2 ■

Satz 11.4

Sei G ein EG und $f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset$

(1) $\exists h \in H(G): e^h = f$ auf G

(2) Ist $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $g \in H(G): g^n = f$ auf G

Beweis

(1) Es ist $\frac{f'}{f} \in H(G)$. G ist ein EG $\Rightarrow \exists F \in H(G): F' = \frac{f'}{f}$ auf G . $\phi := \frac{e^F}{f}$.

Dann: $\phi \in H(G)$ und $\phi' = 0$ auf G . (nachrechnen!)

$\exists c \in \mathbb{C}: e^F = c \cdot f$ auf G .

Klar: $c \neq 0$. 7.1 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{C}: c = e^a \Rightarrow f = e^{F-a}$ auf G .

(2) Sei h wie in (1), $g := e^{\frac{1}{n}h}$. Dann: $g^n = e^h = f$ auf G . ■

Satz 11.5

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(1) Ist $F \in H(D)$, $0 \in D$, $F(0) = 0$ und $F'(0) \neq 0$, so gilt: $0 \in (F(D))^o$

(2) Ist $f \in H(G)$ **nicht** konstant, so ist $f(G)$ offen.

(3) **Satz von der Gebietstreue:**

Ist $f \in H(G)$ **nicht** konstant, so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis

(1) $u := \operatorname{Re} F$, $v := \operatorname{Im} F$. 4.1 $\Rightarrow u_x(0) = v_y(0)$, $u_y(0) = -v_x(0)$

und $F'(0) = u_x(0) + iv_x(0)$

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} u_x(0) & u_y(0) \\ v_x(0) & v_y(0) \end{pmatrix} = u_x(0)^2 + v_x(0)^2 = |F'(0)|^2 \neq 0$

Umkehrsatz (Analysis II) $\Rightarrow \exists U \subseteq D: 0 \in U$, U ist offen und $F(U)$ ist offen. $F(0) = 0 \Rightarrow 0 \in F(U) \Rightarrow \exists \delta > 0: U_\delta(0) \subseteq F(U) \subseteq F(D)$.

(2) Sei $w_0 \in f(D)$. z.z. $\exists \delta > 0: U_\delta(w_0) \subseteq f(D)$.

O.B.d.A. $w_0 = 0$. $\exists z_0 \in D: f(z_0) = w_0 = 0$. O.B.d.A. $z_0 = 0$.

Also: $f(0) = 0$. $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$.

10.4 $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_\varepsilon(0)$;

$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$. 11.3 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: a_n \neq 0$

$m := \min\{n \in \mathbb{N}: a_n \neq 0\} (\geq 1)$

Dann: $f(z) = z^m(a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \dots) = z^m \cdot g(z) \quad \forall z \in U_\varepsilon(0)$,

wobei $g \in H(U_\varepsilon(0))$ und $g(0) = a_m \neq 0$.

g stetig $\Rightarrow \exists r \in (0, \varepsilon): g(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_r(0)$

$U_r(0)$ ist ein EG $\stackrel{11.4}{\Rightarrow} \exists h \in H(U_r(0)): h^m = g$ auf $U_r(0)$
 Def. $F \in H(U_r(0))$ durch $F(z) := zh(z)$.
 Dann: $F(0) = 0, F'(z) = h(z) + zh'(z)$
 also $F'(0)^m = h(0)^m = g(0) \neq 0$, also $F'(0) \neq 0$.
 Weiter: $F^m = f$ auf $U_r(0)$. (1) $\Rightarrow \exists R > 0: U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$.
 $\delta := R^m$. Sei $w \in U_\delta(0)$. 1.5 $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{C}: v^m = w$
 Dann: $|v|^m = |w| < \delta = R^m \Rightarrow |v| < R \Rightarrow v \in U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$
 $\Rightarrow \exists z \in U_r(0) \subseteq D$ mit: $F(z) = v$.
 $\Rightarrow w = v^m = F(z)^m = f(z) \in f(D)$
 Also: $U_\delta(0) \subseteq f(D)$

(3) 3.6 $\Rightarrow f(G)$ ist zusammenhängend $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(G)$ ist ein Gebiet.

Satz 11.6 (Maximum-, Minimumsprinzip (I))

$f \in H(G)$ sei nicht konstant.

- (1) $|f|$ hat auf G kein lokales Maximum
- (2) Ist $Z(f) = \emptyset$, so hat $|f|$ auf G kein lokales Minimum.

Beweis

- (1) Sei $z_0 \in G$ und $\epsilon > 0$ so, dass $U_\epsilon(z_0) \subseteq G$. $w_0 := f(z_0)$. 11.5 $\Rightarrow f(U_\epsilon(z_0))$ ist offen.
 $w_0 \in f(U_\epsilon(z_0)) \Rightarrow \exists \delta > 0: U_\delta(w_0) \subseteq f(U_\epsilon(z_0))$.
 $\exists w \in U_\delta(w_0): |w| > |w_0|$. $\exists z \in U_\epsilon(z_0): w = f(z)$.
 Dann: $|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)|$
- (2) Wende (1) auf $\frac{1}{f}$ an. ■

Satz 11.7 (Maximum-, Minimumsprinzip (II))

G sei beschränkt, $f \in C(\overline{G})$ und es sei $f \in H(G)$.

- (1) $|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \quad \forall z \in \overline{G}$
- (2) Ist $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, so gilt $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)| \quad \forall z \in \overline{G}$

Beweis

- (1) \overline{G} ist kompakt, 3.3 $\Rightarrow \exists w_0 \in \overline{G}: |f(z)| \leq |f(w_0)| \quad \forall z \in \overline{G}$
 Fall 1: $w_0 \in \partial G$: fertig
 Fall 2: $w_0 \in G$. Dann: $|f(z)| \leq |f(w_0)| \quad \forall z \in G$. 11.6 $\Rightarrow f$ ist konstant auf G . f stetig $\Rightarrow f$ konstant auf $\overline{G} \Rightarrow$ Beh.
- (2) Fall 1: $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{G}$. Wende (1) auf $\frac{1}{f}$ an.
 Fall 2: $\exists z_0 \in \overline{G}: f(z_0) = 0$ Vor. $\Rightarrow z_0 \in \partial G \Rightarrow \min_{w \in \partial G} |f(w)| = 0 \Rightarrow$ Behauptung. ■

Definition

Sei $A \subseteq G$. A heißt **diskret in G** : $\iff A$ hat in G keinen Häufungspunkt. ($\iff \forall z_0 \in G \exists r = r(z_0) > 0 : A \cap \dot{U}_r(z_0) = \emptyset$)

Aufgabe: Ist A diskret in G , so ist A höchstens abzählbar.

Satz 11.8

Sei $f \in H(G)$ und f nicht identisch 0 auf G .

Dann ist $Z(f)$ diskret in G .

Ist $z_0 \in Z(f)$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $g \in H(G)$:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in G \quad \text{und} \quad g(z_0) \neq 0$$

m und g sind eindeutig bestimmt. m heißt **Ordnung** (oder **Vielfachheit**) der Nullstelle z_0 von f . (" f hat eine m -fache Nullstelle")

Beweis

11.3 $\Rightarrow Z(f)$ ist diskret in G . O.B.d.A: $z_0 = 0$. $\exists r > 0 : U_r(0) \subseteq G$.

10.4 $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_r(0)$. $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

11.2 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, $m := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$

Dann: $f(z) = z^m \underbrace{(a_m + a_{m+1}z + \dots)}_{:=\varphi(z)} = z^m \varphi(z) \quad \forall z \in U_r(0)$

Es ist $\varphi \in H(U_r(0))$ und $\varphi(0) = a_m \neq 0$

Definiere $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & , z \neq 0 \\ a_m & , z = 0 \end{cases}$$

Dann: $f(z) = z^m g(z) \quad \forall z \in G$, $g(0) = a_m \neq 0$, $g = \varphi$ auf $U_r(0)$, also $g \in H(G)$ ■

Aufgabe: Sei f wie in 11.8, $z_0 \in G$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann:

f hat in z_0 eine m -fache Nullstelle $\iff f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

Satz 11.9

Sei $f \in H(G)$.

(1) Sei $g : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & , z \neq w \\ f'(z) & , z = w \end{cases}$$

Dann ist g stetig.

(2) Ist $z_0 \in G$, so existiert ein $\epsilon > 0$:

$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ und (*) $|f(z) - f(w)| \geq \frac{1}{2} |f'(z_0)| |z - w| \quad \forall z, w \in U_\epsilon(z_0)$

Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist f auf $U_\epsilon(z_0)$ injektiv und f^{-1} ist auf $f(U_\epsilon(z_0))$ stetig.

Beweis

- (1) Es genügt zu zeigen: ist $z_0 \in G$, so ist g stetig in $(z_0, z_0) \in G \times G, \epsilon > 0: |g(z, w) - f'(z_0)| < \epsilon$
 Sei $\epsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq G$ und $|f'(w) - f'(z_0)| \leq \epsilon \forall w \in U_\delta(z_0)$
 Seien $z, w \in U_\delta(z_0)$. $\gamma(t) := z + t(w - z)$ ($t \in [0, 1]$), dann :
 $Tr(\gamma) \subseteq U_\delta(z_0)$.

$U_\delta(z_0)$ ist ein Sterngebiet und f' hat auf $U_\delta(z_0)$ die Stammfunktion f .

$$9.2 \Rightarrow \int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = f(w) - f(z) \Rightarrow f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(\gamma(t))(w - z) dt$$

$$\text{Ist } z \neq w \Rightarrow g(z, w) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt$$

$$\text{Ist } z = w \Rightarrow \gamma(t) = z \forall t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt = \int_0^1 f'(z) dt = f'(z) = g(z, z)$$

$$\text{Also: } g(z, w) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt$$

Dann:

$$|g(z, w) - f'(z_0)| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t)) - f'(z_0) dt \right| \leq \int_0^1 \underbrace{|f'(\gamma(t)) - f'(z_0)|}_{\leq \epsilon} dt \leq \epsilon$$

- (2) Aus (1): $|g(z, w)| \rightarrow |f'(z_0)|$ ($(z, w) \rightarrow (z_0, z_0)$) $\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ und $|g(z, w)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \forall z, w \in U_\epsilon(z_0) \Rightarrow (*)$
 Sei $f'(z_0) \neq 0$. $(*) \Rightarrow f$ ist injektiv auf $U_\epsilon(z_0)$
 Seien $\lambda, \mu \in f(U_\epsilon(z_0)); z := f^{-1}(\lambda), w := f^{-1}(\mu)$
 $|f^{-1}(\lambda) - f^{-1}(\mu)| = |z - w| \leq \frac{2}{|f'(z_0)|} |\lambda - \mu|$ ■

Satz 11.10

Sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$

Dann existiert ein $r > 0: U_r(z_0) \subseteq G$,

- (1) f ist auf $U_r(z_0)$ injektiv und $f'(z) \neq 0 \forall z \in U_r(z_0)$
- (2) $f(U_r(z_0))$ ist ein Gebiet
- (3) $f^{-1} \in H(f(U_r(z_0)))$ und $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \forall w \in f(U_r(z_0))$

Beweis

- (1) Sei $\epsilon > 0$ wie in 11.9(2), f' ist stetig $\Rightarrow \exists r \in (0, \epsilon) : f'(z) \neq 0 \forall z \in U_r(z_0)$

- (2) folgt aus 11.5

- (3) Sei $w_0 \in f(U_r(z_0))$ und (w_n) eine Folge in $f(U_r(z_0)) \setminus \{w_0\}$ mit: $w_n \rightarrow w_0$.

$$z_n := f^{-1}(w_n), \tilde{z} := f^{-1}(w_0). \text{ 11.4 } \Rightarrow f^{-1} \text{ stetig in } w_0 \Rightarrow z_n \rightarrow \tilde{z}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - \tilde{z}}{f(z_n) - f(\tilde{z})} \rightarrow \frac{1}{f'(\tilde{z})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$

$$\text{Also ist } f^{-1} \text{ in } w_0 \text{ komplex differenzierbar und } (f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$
 ■

Satz 11.11

Sei $f \in H(G)$ auf G injektiv. Dann:

- (1) $Z(f') = \emptyset$
- (2) $f^{-1} \in H(f(G))$ und $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ für $\forall w \in f(G)$

Beweis

- (1) Annahme: Sei $z_0 \in G$ mit $f'(z_0) = 0$, $w_0 := f(z_0)$. O.B.d.A. $w_0 = 0 = z_0$. Also $f(0) = f'(0) = 0$
 11.8 $\Rightarrow \exists m \geq 2; \exists g \in H(G)$ mit $f(z) = z^m g(z) \forall z \in G$ und $g(0) \neq 0$.
 11.3 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$ und $U_\varepsilon(0) \subseteq G$. Also $g(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$. 11.4 $\Rightarrow \exists \psi \in H(U_\varepsilon(0))$ mit $\psi^m = g$ auf $U_\varepsilon(0)$. Def. $\varphi \in H(U_\varepsilon(0))$ durch $\varphi(z) := z\psi(z) (z \in U_\varepsilon(0))$.
 Dann: $\varphi^m = f$ auf $U_\varepsilon(0)$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(z) = \psi(z) + z\psi'(z)$, $\varphi'(0)^m = \psi(0)^m = g(0) \neq 0$
 also $\varphi'(0) \neq 0$. O.B.d.A. $\varphi'(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$. Klar: φ ist auf $U_\varepsilon(0)$ injektiv.
 $0 = \varphi(0) \in \varphi(U_\varepsilon(0))$. 11.5 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(0) \subseteq \varphi(U_\varepsilon(0))$ 11.10 $\Rightarrow \varphi^{-1} \in H(\varphi(U_\varepsilon(0)))$, 11.5 $\Rightarrow U := \varphi^{-1}(U_\delta(0))$ ist offen. Klar: $0 \in U$, $U \subseteq U_\varepsilon(0)$ und $(*)\varphi(U) = U_\delta(0)$.
 Sei $z_1 \in U \setminus \{0\}$; $a_1 := \varphi(z_1)$; $w_1 := f(z_1) \neq 0$. $a_1^m = \varphi(z_1)^m = f(z_1) = w_1 \Rightarrow a_1 \neq 0$. 1.5 $\Rightarrow a_1$ ist eine m -te Wurzel von w_1 ; $m \geq 2 \Rightarrow \exists a_2 : a_2^m = a_1^m = w_1$ mit $a_1 \neq a_2$.
 $a_2^m = w_1 = \varphi(z_1)^m$; $|a_2| = |\varphi(z_1)| \stackrel{(*)}{<} \delta \Rightarrow a_2 \in \varphi(U) \Rightarrow \exists z_2 \in U : a_2 = \varphi(z_2) \Rightarrow f(z_2) = \varphi(z_2)^m = a_2^m = w_1 = a_1^m = f(z_1) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$ Widerspruch zu f injektiv!
- (2) folgt aus (1) und 11.10 ■

Definition

Sei $z_0 \in G$; $a > 0$; $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow \mathbb{C}$ seien glatte Wege und

$\gamma_j'(t) \neq 0 \forall t \in [0, a], j = 1, 2$ und $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$. $\angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) := \arg \gamma_2'(0) - \arg \gamma_1'(0) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ Orientierter Winkel von γ_1 nach γ_2 in z_0 .

Satz 11.12 (Winkeltreue)

Sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann:

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$$

Beweis

$\Gamma_j := f \circ \gamma_j (j = 1, 2)$. $\Gamma_j'(t) = f'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)$ $\Gamma_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$.

$\exists b \in (0, a)$ mit $\Gamma_j'(t) \neq 0 \forall t \in [0, b]$.

$$\angle(\Gamma_1, \Gamma_2, f(z_0)) = \arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) \quad \blacksquare$$

Definition

- (1) G_1 und G_2 seien Gebiete in \mathbb{C} . Ist $f \in H(G_1)$ injektiv auf G_1 und gilt $f(G_1) = G_2$, so heißt f eine **konforme Abbildung** von G_1 auf G_2 .
- (2) Ist $f : G \rightarrow G$ eine konforme Abbildung von G auf G , so heißt f ein **Automorphismus** von G :
 $f \in \text{Aut}(G)$.

Satz 11.13

G_1, G_2 seien Gebiete, $f : G_1 \rightarrow G_2$ sei eine konforme Abbildung von G_1 auf G_2 und G_1 sei ein Elementargebiet. Dann ist G_2 ebenfalls ein Elementargebiet.

Beweis

Sei $g \in H(G_2)$, $h := (g \circ f)f'$. Dann $h \in H(G_1)$, G_1 EG $\Rightarrow \exists$ eine Stammfunktion Φ von h , $F := \Phi \circ f^{-1}$ ist dann SF von g , g war beliebig $\Rightarrow G_2$ ebenfalls EG. ■

12. Das Schwarzsche Lemma

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Satz 12.1 (Schwarzsches Lemma)

Es sei $f \in H(\mathbb{D})$, $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$.

Dann:

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leq 1 \quad (*).$$

Ist $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, so ex. ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ mit: $f(z) = \lambda z$.

Beweis

O.b.d.A.: $f \neq 0$. 11.8 $\Rightarrow \exists g \in H(\mathbb{D}) : f(z) = zg(z)$. Sei $z \in \mathbb{D}$. Wähle $r > 0$ so, dass $r < 1$ und $|z| < r$. Dann: $|g(z)| \stackrel{11.7}{\leq} \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r} \stackrel{r \rightarrow 1}{\Rightarrow} |g(z)| \leq 1$. Also $|g(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$. $f'(z) = g(z) + zg'(z) \Rightarrow f'(0) = g(0)$ Also gilt (*). Es sei $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \Rightarrow |g(0)| = 1$ oder $|g(z_0)| = 1 \Rightarrow |g|$ hat ein Maximum in \mathbb{D} . 11.6 $\Rightarrow g$ konstant $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : g(z) = \lambda \forall z \in \mathbb{D}$. Dann: $f(z) = \lambda z$. Es ist $|\lambda| = |g(0)| = 1$ oder $|\lambda| = |g(z_0)| = 1 \Rightarrow \lambda \in \partial\mathbb{D}$. ■

Definition

Sei $a \in \mathbb{D}$ und $S_a \in H(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\})$ def. durch $S_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

Beachte 1

$|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|} > 1$, also $\frac{1}{a} \notin \overline{\mathbb{D}}$. $S_a(a) = 0$, $S_a(0) = -a$.

Satz 12.2

Sei $a \in \mathbb{D}$. Dann:

- (1) S_a ist auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\}$ injektiv.
- (2) $S_a^{-1} = S_{-a}$ auf $\overline{\mathbb{D}}$
- (3) $S_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$
- (4) $S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$
- (5) Ist $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, so ist $\lambda S_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Beweis

- (1) Nachrechnen.

12. Das Schwarzsche Lemma

$$(2) \quad w = S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \iff z - a = w - \bar{a}zw \iff z(1 + \bar{a}w) = w + a \iff z = \frac{w+a}{1+\bar{a}w} = S_{-a}(w)$$

$$(3) \quad \text{Sei } |z| = 1, \text{ also } z = e^{it} (t \in \mathbb{R}). |S_a(z)| = \left| \frac{e^{it}-a}{1-\bar{a}e^{it}} \right| = \left| \frac{e^{it}-a}{e^{it}(e^{-it}-\bar{a})} \right| = \frac{|e^{it}-a|}{|e^{it}||e^{-it}-\bar{a}|} = 1. \text{ Also:}$$

$$S_a(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}, \quad \partial\mathbb{D} \stackrel{(2)}{=} S_a(\underbrace{S_{-a}(\partial\mathbb{D})}_{\substack{\text{wie oben} \\ \subseteq \partial\mathbb{D}}}) \subseteq S_a(\partial\mathbb{D}).$$

$$(4) \quad \text{Sei } z \in \mathbb{D}. |S_a(z)| \stackrel{11.7}{\leq} \max_{|w|=1} |S_a(w)| \stackrel{(3)}{=} 1 \Rightarrow S_a(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}} \quad \text{Sei } z \in \mathbb{D}, w := S_a(z). \text{ Annahme:}$$

$$|w| = 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} |z| = |S_{-a}(w)| = 1 \quad \text{Wid. Also } S_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \text{ Genauso } S_{-a}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \text{ Dann}$$

$$\mathbb{D} \stackrel{(2)}{=} S_a(S_{-a}(\mathbb{D})) \subseteq S_a(\mathbb{D})$$

(5) folgt aus (1) und (4). ■

Satz 12.3

Sei $f \in H(\mathbb{D})$

$f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ und $f(0) = 0 \iff \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z.$

Beweis

" \Leftarrow ": Klar

" \Rightarrow ": Dann $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, $f^{-1}(0) = 0$. Sei $z \in \mathbb{D}$, $w := f(z)$; dann:

$$z = f^{-1}(w), |z| = |f^{-1}(w)| \stackrel{12.1}{\leq} |w| = |f(z)| \stackrel{12.1}{\leq} |z| \quad \text{Also } |f(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad 12.1 \Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z \quad \forall z \in \partial\mathbb{D} \quad \blacksquare$$

Satz 12.4

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{\lambda S_a : \lambda \in \partial\mathbb{D}, a \in \mathbb{D}\}$$

Beweis

" \supseteq ": 12.2 (5)

" \subseteq ": Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$. $g := f \circ S_a$; $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ und $g(0) = f(S_a(0)) = f(a) = 0$.

12.3 $\Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : g(z) = \lambda z$. Es ist $f = g \circ S_a = \lambda S_a$ ■

13. Isolierte Singularitäten

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei stets $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $\dot{D} := D \setminus \{z_0\}$ und $f \in H(\dot{D})$.

z_0 heißt dann eine **isolierte Singularität** von f .

Definition

z_0 heißt eine **hebbare Singularität** von $f : \Leftrightarrow \exists h \in H(D) : h = f$ auf \dot{D} . I.d. Fall ist h eindeutig bestimmt und wir sagen kurz: $f \in H(D)$.

Beispiel

$D = \mathbb{C}, z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \dots \right) = \underbrace{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + \dots}_{=: h(z)}$$

Dann: $h \in H(\mathbb{C})$. $h = f$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. f hat also in 0 eine hebbare Singularität.

Satz 13.1 (Riemannscher Hebbbarkeitssatz)

f hat in z_0 eine hebbare Singularität $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f ist auf $\dot{U}_\delta(z_0)$ beschränkt.

Beweis

\Rightarrow : klar

\Leftarrow : $M := \sup_{z \in U_\delta(z_0)} |f(z)|$. Def: $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch:

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & , z \in \dot{D} \\ 0 & , z = z_0 \end{cases}$$

Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right| = \left| \frac{g(z)}{z - z_0} \right| = |f(z)(z - z_0)| \leq M|z - z_0|$

$\Rightarrow g$ ist komplex db in z_0 , also $g \in H(D)$ und $g'(z_0) = 0$.

Fall 1: $g = 0$ auf D . Dann: $f = 0$ auf \dot{D}

Fall 2: $g \neq 0$ auf D . Es ist $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. 11.8 $\Rightarrow \exists h \in H(D) : g(z) = (z - z_0)^2 h(z) \forall z \in D$.

Dann: $h = f$ auf \dot{D} . ■

Satz 13.2

z_0 ist ein **Pol** von $f : \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \exists g \in H(D)$ mit:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \forall z \in \dot{D} \text{ und } g(z_0) \neq 0.$$

I. d. Fall ist m eindeutig bestimmt und heißt die **Ordnung des Pols** z_0 von f

Beweis

Seien $m, l \in \mathbb{N}$, $g, h \in H(D)$, $g(z_0) \neq 0 \neq h(z_0)$ und $\frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^l} \quad \forall z \in \dot{D}$.

Annahme: $m > l$, also $m - l \geq 1$. $h(z_0) \neq 0$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und $h(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_\delta(z_0)$.

Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \frac{g(z)}{h(z)} = (z - z_0)^{m-l} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} g(z_0) = 0$. Wid! Also: $m \leq l$. Analog: $l \leq m$. ■

Satz 13.3

Hat f in z_0 einen Pol, so gilt: $|f(z)| \rightarrow \infty (z \rightarrow z_0)$

Beweis

Folgt aus 13.2 ■

Beispiele:

(1) $f(z) = \frac{1}{z}$. f hat im Nullpunkt einen einfachen Pol.

(2) $f(z) = \frac{e^z}{z^{17}}$. f hat in 0 einen Pol der Ordnung 17.

Definition

z_0 heißt eine **wesentliche Singularität** von $f : \Leftrightarrow z_0$ ist nicht hebbbar und kein Pol von f .

Beispiel

$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \quad (D = \mathbb{C}, z_0 = 0)$

$z_n := \frac{1}{n}$, $f(z_n) = e^n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, $z_n \rightarrow 0$. 13.1 $\Rightarrow 0$ ist nicht hebbbar.

$w_n := \frac{i}{n} = -\frac{1}{in}$. $|f(w_n)| = |e^{-in}| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \rightarrow 0$. 13.3 $\Rightarrow z_0 = 0$ ist kein Pol von f . f hat also in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

Satz 13.4 (Satz von Casorati-Weierstraß)

f habe in z_0 eine wesentliche Singularität und es sei $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(z_0) \subseteq D$. Dann:

$$\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$$

d.h. ist $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : |f(z) - b| < \varepsilon$.

Beweis

Sei $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Ann: $|f(z) - b| \geq \varepsilon \quad \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0)$. $g := \frac{1}{f-b}$. Dann: $g \in H(\dot{U}_\delta(z_0))$ und $|g| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ auf $\dot{U}_\delta(z_0)$. 13.1 $\Rightarrow g$ hat in z_0 eine hebbare Singularität. Kurz: $g \in H(U_\delta(z_0))$

Fall 1: $g(z_0) \neq 0$. O.B.d.A: $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_\delta(z_0)$. $f = \frac{1}{g} + b$ auf $\dot{U}_\delta(z_0) \Rightarrow f$ hat in z_0 eine

hebbare Singularität.

Fall 2: $g(z_0) = 0$. 11.8 $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \varphi \in H(U_\delta(z_0)) : g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) \forall z \in U_\delta(z_0)$ und $\varphi(z_0) \neq 0$. O.B.d.A: $\varphi(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$. Def: $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(z)} & , z \in U_\delta(z_0) \\ (z - z_0)^m (f(z) - b) & , z \in \dot{D} \end{cases}$$

Ψ ist wohldefiniert: Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{(z - z_0)^m}{g(z)} = (z - z_0)^m (f(z) - b)$. Dann: $\Psi \in H(D)$ und $\Psi(z_0) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$.

$h(z) := \Psi(z) + b(z - z_0)^m (z \in D)$. Klar: $h \in H(D)$

$h(z_0) = \Psi(z_0) \neq 0$. Weiter: $\frac{h(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{\Psi(z)}{(z - z_0)^m} + b = f(z) - b + b = f(z) \forall z \in \dot{D} \xrightarrow{13.2} f$ hat in z_0 einen Pol. Wid! ■

Satz 13.5 (Klassifikation)

Die isolierte Singularität z_0 von f ist

- (1) hebbbar $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f ist auf $U_\delta(z_0)$ beschränkt.
- (2) ein Pol von $f \Leftrightarrow |f(z)| \rightarrow \infty (z \rightarrow z_0)$
- (3) wesentlich $\Leftrightarrow \forall \delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D$ gilt: $\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$

Beweis

- (1) 13.1
- (2) \Rightarrow : 13.3
 \Leftarrow : Vorr. und 13.1 $\Rightarrow z_0$ nicht hebbbar. Vorr. und 13.4 $\Rightarrow z_0$ nicht wesentlich
- (3) \Rightarrow : 13.4
 \Leftarrow : Vorr. und 13.1 $\Rightarrow z_0$ ist nicht hebbbar. Vorr. und 13.3 $\Rightarrow z_0$ ist kein Pol! ■

Beispiele:

- (i) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Übung: $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \forall \delta > 0$.
- (ii) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$. Übung: $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \forall \delta > 0$.

14. Laurententwicklung

Für $z_0 \in \mathbb{C}$: $U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$, $\dot{U}_\infty(z_0) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\frac{1}{0} := \infty$. Erinnerung: Satz 9.5: Sei γ ein stückweise glatter Weg in \mathbb{C} , $\varphi \in C(\text{Tr}(\gamma))$ und $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z} dw$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$). Dann: $g \in H(\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma))$.

Satz 14.1

Seien $0 \leq r < R \leq \infty$; $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ und $f \in H(A)$. Für $s \in (r, R)$ sei $\gamma_s(t) := se^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $J(s) := \int_{\gamma_s} f(z) dz$. Dann ist J konstant auf (r, R) .

Beweis

$g(z) := zf(z)$ ($z \in A$). Dann: $f(z) = \frac{g(z)}{z}$ und $g \in H(A)$.

$$J(s) = \int_{\gamma_s} \frac{g(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(se^{it})}{se^{it}} se^{it} dt = \int_0^{2\pi} ig(se^{it}) dt$$

$$J \text{ ist auf } (r, R) \text{ db und } J'(s) = \int_0^{2\pi} i \frac{d}{ds} g(se^{it}) dt = \int_0^{2\pi} ig'(se^{it}) e^{it} dt = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} g'(se^{it}) se^{it} dt = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} g'(\gamma_s(t)) \gamma_s'(t) dt = \frac{1}{s} \int_{\gamma_s} g'(z) dz \stackrel{8.5}{=} 0 \Rightarrow J(s) \text{ konstant.} \quad \blacksquare$$

Satz 14.2 (Laurententwicklung)

Sei A wie in 14.1 und $f \in H(A)$. Dann existieren eindeutig bestimmte Funktionen $g \in H(U_R(0))$ und $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$ mit:

$$(*) \quad f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in A \text{ und } h(0) = 0$$

(*) heißt die Laurentzerlegung von f , g heißt Nebenteil von f und die Funktion $z \rightarrow h\left(\frac{1}{z}\right)$ ist der Hauptteil von f .

Beispiel

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($r = 0, R = \infty$). Es gilt:

$$f(z) = 1 + (e^{\frac{1}{z}} - 1), \text{ also } g(z) = 1, h(z) = e^z - 1$$

Beweis

1. Eindeutigkeit: es sei $g, g_1 \in H(U_R(0))$, $h, h_1 \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$; $h_1(0) = 0 = h(0)$ und $g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = f(z) = g_1(z) + h_1\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in A$.

$$G := g - g_1 \in H(U_R(0)), H := h_1 - h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$$

$$\Rightarrow G(z) = H\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in A \text{ Dann ist } F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ definiert durch}$$

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & (|z| < R) \\ H\left(\frac{1}{z}\right) & (|z| > r) \end{cases} \text{ auf } \mathbb{C} \text{ wohldefiniert. } F \in H(\mathbb{C}).$$

Sei (z_n) eine Folge in \mathbb{C} und $|z_n| \rightarrow \infty$. Dann $\left(\frac{1}{z_n}\right) \rightarrow 0$ und $z_n > r \quad \forall n \geq n_0$. $F(z_n) = H\left(\frac{1}{z_n}\right) = h_1\left(\frac{1}{z_n}\right) - h\left(\frac{1}{z_n}\right) \rightarrow h_1(0) - h(0) = 0$

Also $F(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$) Somit:

$\exists \varrho > 0 : |F(z)| \leq 1 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus U_\varrho(0)$. F stetig auf $\overline{U_\varrho(0)} \Rightarrow F$ ist auf \mathbb{C} beschränkt. 10.2 $\Rightarrow F$ ist auf \mathbb{C} konstant; wegen $F(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$) folgt: $F \equiv 0$

2. Existenz: fehlt hier nicht was ? Doch! ■

Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge in \mathbb{C} , $z_0 \in \mathbb{C}$ und $A \subseteq \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heißt eine **Laurentreihe**.

Diese Reihe heißt in $z \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent : $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ konvergieren (absolut).

In diesem Fall: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$. Die Laurentreihe heißt auf A (lokal) gleichmäßig konvergent : $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ konvergieren auf A (lokal) gleichmäßig.

Satz 14.3

Sei $0 \leq r < R \leq \infty$, $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ und $f \in H(A)$.

Dann hat f auf A die **Laurententwicklung** $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Die Laurentreihe konvergiert auf A absolut und lokal gleichmäßig. Die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{Z}$) sind eindeutig bestimmt. Ist $r < \rho < R$ und $\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$, so gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heißt **Nebenteil** von f ,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$ heißt der **Hauptteil** von f .

Beweis

O.B.d.A: $z_0 = 0$. 14.2 $\Rightarrow \exists g \in H(U_R(0)), \exists h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0)) : f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z}) \ \forall z \in A$ und $h(0) = 0$. 10.4 $\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \forall z \in U_R(0)$ und $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \ \forall z \in U_{\frac{1}{r}}$. Setze $a_{-n} := b_n$ für $n \geq 1$. Dann: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 5.4 \Rightarrow die Laurentreihe konvergiert auf A absolut und lokal gleichmäßig.

14.2 $\Rightarrow g$ und h sind eindeutig bestimmt

5.4 $\Rightarrow a_n$ eindeutig bestimmt für $n \in \mathbb{Z}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$; $\gamma(t) := \rho e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) $r < \rho < R$. Sei $w \in \text{Tr}(\gamma)$:

$$\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^{\nu-n-1}.$$

Die letzte Reihe konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig.

$$8.4 \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \underbrace{\int_{\gamma} w^{\nu-n-1}}_{= \begin{cases} 0 & , \nu \neq n \\ 2\pi i & , \nu = n \end{cases}}$$

Satz 14.4

$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in D$, $\dot{D} := D \setminus \{z_0\}$ und $f \in H(\dot{D})$ (z_0 ist also eine isolierte Singularität). Sei $R > 0$ so, daß $U_R(z_0) \subseteq D$. f hat also, nach 14.3, auf $\dot{U}_R(z_0)$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in \dot{U}_R(z_0))$$

- (1) f hat in z_0 eine hebbare Singularität $\iff a_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) f hat in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ $\iff a_{-m} \neq 0, a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$
- (3) f hat in z_0 eine wesentliche Singularität $\iff a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Definition

Vorraussetzung wie in 14.4. $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ heißt das **Residuum** von f in z_0 .

Ist $0 < \rho < R$ und $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), so folgt aus 14.3:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

Beweis

(1) Klar.

(2) O.B.d.A: $z_0 = 0$.

“ \Rightarrow “: 13.2 $\Rightarrow \exists g \in H(D) : f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \quad \forall z \in \dot{D}$ und $g(z_0) \neq 0$

$$10.4 \Rightarrow g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_R(0) \Rightarrow f(z) = \frac{c_0}{z^m} + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z} + \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$\forall z \in \dot{U}_R(0)$. Eindeutigkeit der Laurententwicklung $\Rightarrow c_0 = a_{-m}$, also $a_{-m} = g(0) \neq 0$; weiter: $a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$

$$\text{“}\Leftarrow\text{“}: f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z} + \dots + \frac{a_{-m}}{z^m} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$$

$$\Rightarrow z^m f(z) = \underbrace{a_{-m} + \dots + a_{-1} z^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}}_{=: g(z)} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$$

Es ist $g \in H(U_R(0))$, $g(0) = a_{-m} \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$. 13.2 $\Rightarrow f$ hat einen Pol der Ordnung m .

(3) folgt aus (1) und (2). ■

Beispiele:

(i) $f(z) = \frac{1}{z-1}$ Laurententwicklung in $\mathbb{C} \setminus \{1\} : f(z) = \frac{1}{z-1}$, $\text{Res}(f, 1) = 1$

(ii) $f(z) = \frac{1}{z-1}$ Laurententwicklung in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$.

$$\text{Für } |z| > 1 : \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

14. Laurententwicklung

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) } f(z) &= \frac{\cos(z)}{z^3}. \text{ Laurententwicklung in } \mathbb{C} \setminus \{0\}. f(z) = \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \right) = \\
 &\underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + - \dots}_{\text{Nebenteil}, \text{ Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

15. meromorphe Funktionen, Moebiustransformationen

Definition

Es sei ∞ irgendein Element $\notin \mathbb{C}$. $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt die **Vollebene**. ∞ heißt “**der Punkt** ∞ “. Wir definieren:

$$\begin{aligned} z + \infty &:= \infty + z := \infty - z := z - \infty := \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}; \\ \infty z &:= z \infty := \infty \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad \frac{z}{\infty} := 0 \quad (z \in \mathbb{C}), \quad \frac{\infty}{0} := \infty \quad (z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ heißt **Riemannsche Zahlenkugel**. $N := (0, 0, 1)$ wird als **Nordpol** bezeichnet.

Definition

$\sigma : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ durch

$$\begin{aligned} \sigma(N) &:= \infty \\ \sigma(x_1, x_2, x_3) &:= \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} \quad \text{für } (x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\} \end{aligned}$$

σ heißt **stereographische Projektion**. Anschaulich (nachrechnen!): Ist $P \in S \setminus \{N\}$, so trifft die Gerade durch N und P die komplexe Ebene im Punkt $\sigma(P)$.

Satz 15.1

σ ist injektiv auf S und $\sigma(S) = \hat{\mathbb{C}}$. $\sigma^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S$ ist gegeben durch $\sigma^{-1}(\infty) = N$, $\sigma^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|^2)$, falls $z \in \mathbb{C}$.

Satz 15.2 (Der chordale Abstand)

Seien $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$. $d(z, w) := \|\sigma^{-1}(z) - \sigma^{-1}(w)\|$ heißt der **chordale Abstand** von z und w (wobei $\|\cdot\|$ = eukl. Norm im \mathbb{R}^3).

Für $z, w, u \in \hat{\mathbb{C}}$: $d(z, w) \geq 0$; $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$; $d(z, w) = d(w, z)$; $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$ (Δ -Ungl.)

$(\hat{\mathbb{C}}, d)$ ist also ein metrischer Raum.

Für $z, w \in \mathbb{C}$: $d(z, \infty) = (1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}$; $d(z, w) = |z - w|(1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{-\frac{1}{2}}$

Beweis

Übung! ■

Definition

Sei (z_n) eine Folge in $\hat{\mathbb{C}}$ und $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. (z_n) **konvergiert in $\hat{\mathbb{C}}$** gegen z_0 : $\Leftrightarrow d(z_n, z_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

Aus 15.2 folgt:

Satz 15.3

Sei (z_n) eine Folge in $\hat{\mathbb{C}}$, $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$

$$(1) \quad d(z_n, z_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z_n - z_0| \rightarrow 0$$

$$(2) \quad d(z_n, \infty) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z_n| \rightarrow \infty$$

Ersetzt man $|z - w|$ ($z, w \in \mathbb{C}$) durch $d(z, w)$ ($z, w \in \hat{\mathbb{C}}$), so lassen sich die topologischen Begriffe der §en 2,3 auch in $\hat{\mathbb{C}}$ definieren.

Beispiele:

(1) Sei $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Eine Funktion $f : A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ heißt stetig in $z_0 \in A : \Leftrightarrow$ für jede Folge (z_n) in A mit $d(z_n, z_0) \rightarrow 0$ gilt: $d(f(z_n), f(z_0)) \rightarrow 0$.

(2) $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ heißt offen : $\Leftrightarrow \forall a \in A \exists \delta = \delta(a) > 0 : \{z \in \hat{\mathbb{C}} : d(z, a) < \delta\} \subseteq A$.

Konvention

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $z_0 \in D$. $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ und z_0 sei ein Pol von f . Wegen 13.5 und 15.3 setzt man $f(z_0) := \infty$. Dann ist f auf ganz D definiert, also $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ und in jedem $z \in D$ stetig.

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ und $P(f) := \{z \in D : f(z) = \infty\}$. f heißt auf D **meromorph** : \Leftrightarrow

(i) $P(f)$ ist in D diskret

(ii) $f|_{D \setminus P(f)} \in H(D \setminus P(f))$

(iii) jedes $z_0 \in P(f)$ ist ein Pol von f .

$$M(D) := \{f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : f \text{ ist auf } D \text{ meromorph} \}$$

Beispiele:

(1) $P(f) = \emptyset$ zugelassen. Dann: $H(D) \subseteq M(D)$.

(2) Seien $f, g \in H(D)$, $g \neq 0$ auf D . Dann $\frac{f}{g} \in M(D)$. $P(\frac{f}{g}) \subseteq Z(g)$.

(3) $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$, $P(f) = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. 0 ist kein Pol von f , 0 ist HP der Pole $\frac{1}{k\pi}$. Also: $f \notin M(\mathbb{C})$, aber $f \in M(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Moebiustransformationen:

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und es gelte $ad - bc \neq 0$. Eine Abbildung der Form $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ heißt eine

Moebiustransformation (MB) ($z \in \hat{\mathbb{C}}$). Also: $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \Phi_T$ heißt die zu T gehörende **Koeffizientenmatrix**.

Bemerkungen:

(1) Die Bedingung $ad - bc \neq 0$ sichert, dass T nicht konstant ist.

(2) Sei $c = 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. $T(\infty) = \infty, T|_{\mathbb{C}} \in H(\mathbb{C})$.

(3) $c \neq 0$. $T(\infty) = \frac{a}{c}$; $T(-\frac{d}{c}) = \infty$. $-\frac{d}{c}$ ist ein Pol der Ordnung 1 von T ; $T \in M(\mathbb{C})$.

\mathcal{M} := Menge aller Moebustransformationen.

Satz 15.4

Seien $T, S \in \mathcal{M}$.

(1) $T(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$; T ist stetig und injektiv auf $\hat{\mathbb{C}}$; $T^{-1} \in \mathcal{M}$; $T^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$

(2) $T \circ S \in \mathcal{M}$. $\Phi_{T \circ S} = \Phi_T \cdot \Phi_S$

\mathcal{M} ist also eine Gruppe.

Beweis

Übung! ■

spezielle Moebustransformationen:

$T(z) := az$ (Drehstreckung)

$T(z) := z + a$ (Translation)

$T(z) := \frac{1}{z}$ (Inversion)

Satz 15.5

$T \in \mathcal{M}$ lässt sich darstellen als Hintereinanderausführung von Drehstreckung, Translation und Inversion.

Beweis

Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Fall 1: $c = 0$. Dann $d \neq 0$ und $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Setze $T_1 = \frac{a}{d}z$ und $T_2 = z + \frac{b}{d} \Rightarrow T = T_2 \circ T_1$.

Fall 2: $c \neq 0$. $T(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} = \alpha + \frac{\beta}{z + \gamma}$. $T_1(z) := z + \gamma$; $T_2(z) := \frac{1}{z}$; $T_3(z) := \beta z$; $T_4(z) := z + \alpha \Rightarrow T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$. ■

Satz 15.6

Sei $T \in \mathcal{M}$. Dann hat T einen oder zwei Fixpunkte oder es ist $T(z) = z$.

Beweis

Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

Fall 1: $T(\infty) = \infty$. Dann ist $c = 0, d \neq 0$. $\Rightarrow T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha z + \beta$. Sei z_1 ein Fixpunkt von $T, z_1 \neq \infty$. Also $z_1 = \alpha z_1 + \beta \Leftrightarrow (1 - \alpha)z_1 = \beta$.

Fall 1.1: $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow T(z) = z$.

Fall 1.2: $\alpha \neq 1 \Rightarrow z_1 = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Fall 2: $T(\infty) \neq \infty$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. $T(z_0) = z_0 \Leftrightarrow az_0 + b = z_0(cz_0 + d)$ quadratische Gleichung \Rightarrow ein oder zwei Lösungen. ■

Definition

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Für $z \in \hat{\mathbb{C}}$ heißt

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & , \text{ falls } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \\ \frac{z-z_3}{z-z_1} & , \text{ falls } z_1 = \infty \\ \frac{z-z_2}{z-z_3} & , \text{ falls } z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_2} & , \text{ falls } z_3 = \infty \end{cases}$$

das **Doppelverhältnis** von z, z_1, z_2, z_3 .

Satz 15.7

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ wie oben.

- (1) Sind $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$ und gilt $T_1(z_j) = T_2(z_j)$ ($j = 1, 2, 3$) $\Rightarrow T_1 = T_2$.
- (2) Es ist $T(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$ ($z \in \hat{\mathbb{C}}$) eine Moebiustransformation. T ist die einzige Moebiustransformation mit $T(z_1) = 0$; $T(z_2) = 1$; $T(z_3) = \infty$.
- (3) Sind $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, so existiert genau ein $S \in \mathcal{M} : S(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, 3$)
- (4) $DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)) \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \quad \forall S \in \mathcal{M}$ (Invarianz des Doppelverhältnisses)

Beweis

- (1) $T := T_2^{-1} \circ T_1$. 15.4 $\Rightarrow T \in \mathcal{M}$. $T(z_j) = T_2^{-1}(T_1(z_j)) = T_2^{-1}(T_2(z_j)) = z_j$ ($j = 1, 2, 3$).
15.6 $\Rightarrow T(z) = z \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow T_1 = T_2$.
- (2) Klar: $T \in \mathcal{M}$. Nachrechnen: $T(z_1) = 0$; $T(z_2) = 1$; $T(z_3) = \infty$. Eindeutigkeit folgt aus (1).
- (3) Eindeutigkeit: (1). Existenz: $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$; $T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$. $S := T_2^{-1} \circ T_1$. $S(z_1) = T_2^{-1}(T_1(z_1)) \stackrel{(2)}{=} T_2^{-1}(0) \stackrel{(1)}{=} w_1$. Analog: $S(z_2) = w_2$; $S(z_3) = w_3$.
- (4) Übung. ■

Kreisgleichung:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$. $|z - z_0| = r \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \Leftrightarrow |z|^2 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \beta = 0$, wobei $\alpha = -z_0 \in \mathbb{C}$, $\beta = |z_0|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$ und $|\alpha|^2 - \beta = |z_0|^2 - |z_0|^2 + r^2 > 0$, also $\beta < |\alpha|^2$.

Geradengleichung:

$mx+ny+d=0$ ($m, n, d, x, y \in \mathbb{R}$). $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$; $\alpha = \frac{m}{2} + i\frac{n}{2} \in \mathbb{C}$, $\beta := d \in \mathbb{R}$. $mx+ny+d=0 \Leftrightarrow \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$.

Fazit:

Sind $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, so ist $\varepsilon|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$

- Die Gleichung eines Kreises, falls $\varepsilon = 1$ und $\beta < |\alpha|^2$
- Die Gleichung einer Geraden, falls $\varepsilon = 0$.

Satz 15.8

Sei $T \in \mathcal{M}$. T bildet eine Gerade (einen Kreis) auf eine Gerade oder einen Kreis ab.

Beweis

Die Behauptung ist klar für Drehstreckungen und Translationen. Wegen 15.5 genügt es die Behauptung für Inversionen ($T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$) zu zeigen. Sei $\varepsilon|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$ die Gleichung einer Geraden oder eines Kreises und $w = \frac{1}{\bar{z}}$. Dann: $\varepsilon \frac{1}{|w|^2} + \bar{\alpha} \frac{1}{w} + \alpha \frac{1}{\bar{w}} + \beta = 0 \Rightarrow \varepsilon + \bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} + \beta|w|^2 = 0$.

Fall 1: $\beta = 0 \rightarrow$ Gerade.

Fall 2: $\beta \neq 0$. Dann: $\frac{\varepsilon}{\beta} + \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\bar{w} + \frac{\alpha}{\beta}w + |w|^2 = 0 \rightarrow$ Kreis. ■

Beispiel

Bestimme ein $T \in \mathcal{M}$ mit: $T(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. $z_1 = 1$; $z_2 = i$; $z_3 = -1$. $T(z) := DV(z, 1, i, -1) = -i\frac{z-1}{z+1}$. 15.7 $\Rightarrow T(1) = 0$; $T(i) = 1$; $T(-1) = \infty$. 15.8 $\Rightarrow T(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

16. Die Umlaufzahl

Hilfssatz:

Sei σ eine Menge von zsh. Teilmengen von \mathbb{C} mit $\bigcap_{A \in \sigma} A \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcup_{A \in \sigma} A$ zsh.

Beweis

Fast wörtlich wie Hilfssatz 3 in §9. ■

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $C \subseteq D$ heißt eine (Zusammenhang-) **Komponente** von $D : \Leftrightarrow C$ ist zsh. und aus $C \subseteq C_1 \subseteq D$. C_1 zsh. folgt stets $C = C_1$.

Beispiel

$D = U_1(0) \cup U_1(3)$ Dann nennt man $U_1(0)$ und $U_1(3)$ die Komponenten von D .

Satz 16.1

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

- (1) Ist $C \subseteq D$ eine Komponente von D , so ist C ein Gebiet.
- (2) Sind C_1, C_2 Komponenten von D , so gilt: $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ oder $C_1 = C_2$.
- (3) Ist $z_0 \in D$, so existiert genau eine Komponente C von $D : z_0 \in C$.
- (4) $\mathbb{C} \setminus K$ hat genau eine unbeschränkte Komponente.

Beweis

- (1) Sei $z_0 \in C$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$. $C_1 := C \cup U_\delta(z_0) \subseteq D$. Klar: $C \subseteq C_1$. HS $\Rightarrow C_1$ zsh. C_1 Komponente von $D \Rightarrow C = C_1 \Rightarrow U_\delta(z_0) \subseteq C \Rightarrow C$ offen $\Rightarrow C$ Gebiet.
- (2) Sei $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. $C := C_1 \cup C_2$. HS $\Rightarrow C$ zsh. Klar: $C_1 \subseteq C \subseteq D$.
 C_1 Komponente von $D \Rightarrow C = C_1 \Rightarrow C_2 \subseteq C_1 \subseteq D$.
 C_2 Komponente von $D \Rightarrow C_1 = C_2$.
- (3) $\sigma := \{A \subseteq D : A \text{ ist zsh., } z_0 \in A\}$. $z_0 \in \bigcap_{A \in \sigma} A \xrightarrow{\text{HS}} C := \bigcup_{A \in \sigma} A$ zsh. Sei $C \subseteq C_1 \subseteq D$ und C_1 zsh. Dann: $C_1 \in \sigma \Rightarrow C_1 \subseteq C \Rightarrow C_1 = C$.
- (4) Übung. ■

Definition

Sei γ ein stückweise glatter und geschlossener Weg in \mathbb{C} und es sei $z \notin \text{Tr}(\gamma)$. $n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$

heißt die **Umlaufzahl** von γ bezüglich z . $n(\gamma^-, z) = -n(\gamma, z)$.

Satz 16.2

Sei γ wie oben und $D := \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$.

- (1) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z} \forall z \in D$.
- (2) Ist C eine Komponente von D , so ist $z \mapsto n(\gamma, z)$ auf C konstant.
- (3) Ist C die unbeschränkte Komponente von D , so gilt: $n(\gamma, z) = 0 \forall z \in C$.

Beispiele:

- (1) Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, r > 0, z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{ikt}$ ($t \in [0, 2\pi]$). $C_1 = U_r(z_0); C_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(z_0)}$ und die Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$. Sei $z \in C_2$. 16.2(3) $\Rightarrow n(\gamma, z) = 0$. Sei $z \in C_1$. $n(\gamma, z) \stackrel{16.2(2)}{=} n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{ikt}} ikr e^{ikt} dt = k$.

- (2) Sei

$$\gamma(t) := \begin{cases} t & , -2 \leq t \leq 2 \\ 2e^{i(t-2)} & , 2 < t \leq 2 + \pi \end{cases}$$

Berechne $n(\gamma, i)$. Sei γ_1 wie im Bild¹ und $\gamma_0(t) := 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$).

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-i}}_{=n(\gamma,i)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-i}}_{16.2(3)_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{dw}{w-i} \stackrel{Bsp.1}{=} 1 \Rightarrow n(\gamma, i) = 1.$$

Beweis

- (1) O.B.d.A γ glatt. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, z \in D$ und $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $h(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds$

$\stackrel{8.2}{\Rightarrow} h$ ist auf $[a, b]$ differenzierbar und $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$.

Sei $H(t) := e^{-h(t)}(\gamma(t) - z)$. Nachrechnen: $H' = 0$ auf $[a, b]$. Also existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $H(t) = c \forall t \in [a, b]$.

$$\stackrel{t=a}{\Rightarrow} c = e^{-h(a)}(\gamma(a) - z) = \gamma(a) - z$$

$$\Rightarrow e^{h(t)} = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z} \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\stackrel{t=b}{\Rightarrow} e^{h(b)} = \frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z} \stackrel{\gamma \text{ geschlossen}}{=} 1$$

$$\stackrel{6.3}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} : h(b) = 2k\pi i$$

$$\Rightarrow 2k\pi i = h(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds = \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i n(\gamma, z) \Rightarrow k = n(\gamma, z)$$

- (2) Definiere $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) = n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} \stackrel{9.5}{\Rightarrow} f \in H(C)$. C ist ein Gebiet.

$\stackrel{11.5}{\Rightarrow} f(C)$ ist ein Gebiet oder f ist auf C konstant. $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(C) \subseteq \mathbb{Z}$. Also ist f auf C konstant.

- (3) Sei f wie im Beweis von (2). Wähle $R > 0$, so daß $\text{Tr}(\gamma) \subseteq U_R(0)$. $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{C} : f(z) = c \forall z \in C$. Sei $z \in C$, so daß $|z| > 2R$ (geht, da C unbeschränkt).

Für $w \in \text{Tr}(\gamma)$ gilt: $|w - z| \geq |z| - |w| > |z| - R > R > 0$.

¹ γ_1 läuft von $(2, 0)$ aus nach $(-2, 0)$ und dann den Halbkreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0, 0)$ wieder zurück nach $(2, 0)$

Damit: $|c| = |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} \right| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z|-R)}.$

Also: $|c| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z|-R)} \quad \forall z \in C \text{ mit } |z| > 2R. \quad C \text{ unbeschränkt} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \text{Behauptung.}$ ■

17. Der Residuensatz und Folgerungen

Satz 17.1 (Residuensatz)

G sei ein Elementargebiet, es seien $z_1, \dots, z_k \in G$ ($z_j \neq z_l$ für $j \neq l$) und es sei $f \in H(G \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$. Jedes z_j ist also eine isolierte Singularität von f . Weiter sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$.

Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k n(\gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j)$$

Beweis

$\forall j \in \{1 \dots k\}$ existiert ein $R_j > 0$: $\overline{U_{R_j}(z_j)} \subseteq G$ und $\overline{U_{R_j}(z_j)} \cap \overline{U_{R_l}(z_l)} = \emptyset$ ($j \neq l$). Sei $j \in \{1 \dots k\}$.

$\stackrel{14.4}{\Rightarrow}$ f hat auf $U_{R_j}(z_j)$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - z_j)^{-n}}_{\varphi_j(z)},$$

wobei $\varphi_j \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$

Definiere $g \in H(G \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$ durch $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^k \varphi_j(z)$.

Dann hat g in z_j eine hebbare Singularität ($j = 1 \dots k$). Also $g \in H(G)$. G ist ein Elementargebiet $\Rightarrow g$ hat eine Stammfunktion auf $G \stackrel{8.6}{\Rightarrow} \int_{\gamma} g(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} \varphi_j(z) dz$.

Noch zu zeigen: $\int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = 2\pi i n(\gamma, z_j) a_{-1}^{(j)}$ ($j = 1 \dots k$).

Die Reihe für φ_j konvergiert lokal gleichmäßig (14.3).

$\stackrel{8.4}{\Rightarrow} \int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz$. Sei $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Die Funktion $\frac{1}{(z - z_j)^n}$ hat auf $G \setminus \{z_j\}$

die Stammfunktion $\frac{(z - z_j)^{-n+1}}{-n+1}$

$\stackrel{8.6}{\Rightarrow} \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz = 0 \quad \forall n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

$\Rightarrow \int_{\gamma} \varphi_j dz = a_{-1}^{(j)} \int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_j)} dz = a_{-1}^{(j)} n(\gamma, z_j) 2\pi i$ ■

Folgerung 17.2

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Elementargebiet, es sei $f \in H(G)$ und γ sei ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

Dann:

(1) Cauchyscher Integralsatz für Elementargebiete

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

(2) Cauchysche Integralformel

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$$

Beweis

(1) Alle z_j in 17.1 sind hebbare Singularitäten. $\stackrel{14.4}{\Rightarrow} \text{Res}(f(z_j)) = 0 \Rightarrow$ Behauptung.

(2) Sei $z_0 \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$. $g \in H(G \setminus \{z_0\})$ sei definiert durch $g(w) := \frac{f(w)}{w-z_0}$. Sei $r > 0$, so dass $U_r(z_0) \subseteq G$

$$\begin{aligned} &\stackrel{10.4}{\Rightarrow} f(w) = a_0 + a_1(w - z_0) + \dots \quad \forall w \in U_r(z_0) \\ &\Rightarrow g(w) = \frac{a_0}{w-z_0} + a_1 + a_2(w - z_0) + \dots \quad \forall w \in \dot{U}_r(z_0) \\ &\Rightarrow \text{Res}(g, z_0) = a_0 = f(z_0) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(w) dw \stackrel{17.1}{=} n(\gamma, z_0)f(z_0) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Für die Berechnung von Residuen an Polstellen

Satz 17.3

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ und f habe in z_0 einen Pol der Ordnung $m \geq 1$. Es existiert also (siehe 13.2) ein $g \in H(D)$ mit:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \quad \forall z \in D \setminus \{z_0\}$$

und $g(z_0) \neq 0$. Dann:

- (1) $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$
- (2) Ist $m = 1$, so ist $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$

Beweis

(1) Sei $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$.

$$\begin{aligned} &\stackrel{10.4}{\Rightarrow} g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots + b_m(z - z_0)^m + \dots \quad \forall z \in U_r(z_0) \\ &\Rightarrow f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots \quad \forall z \in \dot{U}_r(z_0) \Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \\ &b_{m-1} \stackrel{10.4}{=} \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \end{aligned}$$

(2) Aus (1) folgt: $\text{Res}(f, z_0) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \quad \blacksquare$

Beispiel

(1) $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)}$ hat in $z = i$ und in $z = -1$ jeweils einen Pol der Ordnung 1. Also:
 $\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$; $\text{Res}(f, -1) = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

(2) $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3 z}$ hat in $z = i$ einen Pol der Ordnung 3 und in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 1. Hier ist $g(z) = \frac{1}{z}$. $g'(z) = -\frac{1}{z^2}$, $g''(z) = \frac{2}{z^3} \Rightarrow \text{Res}(f, i) = \frac{2}{i^3 2!} = i$

Satz 17.4 (Das Argumentenprinzip)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Elementargebiet, es sei $f \in M(G)$, f habe in G genau die Pole b_1, \dots, b_m (jeder Pol sei so oft aufgeführt, wie seine Ordnung angibt), f habe in G genau die Nullstellen a_1, \dots, a_n (jede Nullstelle sei so oft aufgeführt, wie ihre Ordnung angibt) und γ sei ein stückweise glatter und geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G \setminus \{b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\}$. Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j)$$

Bemerkung: (1) in 17.4 ist $\{b_1, \dots, b_m\} = \emptyset$ oder $\{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$ zugelassen. I.d.Fall:

$$\sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j) = 0 \text{ oder } \sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) = 0$$

(2) $n(\gamma, a_j) = n(\gamma, b_k)$ ($j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$). Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Anzahl der Nullstellen von } f - \text{Anzahl der Polstellen von } f \text{ (jeweils gezählt mit Vielfachheiten!)}$$

Beispiel

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)^2} \quad n=1, a_n=0, m=2, b_1=b_2=i; \gamma(t) = 2e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1 - 2 = -1$$

Beweis

(von 17.4) Sei β_1, \dots, β_p die paarweise verschiedenen Pole von f ($p \leq m$) und $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ die paarweise verschiedenen Nullstellen ($q \leq n$).

$$h := \frac{f'}{f}.$$

Dann: $h \in H(G \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p\})$.

Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z) dz \stackrel{17.1}{=} \sum_{j=1}^q n(\gamma, \alpha_j) \text{Res}(h, \alpha_j) + \sum_{j=1}^p n(\gamma, \beta_j) \text{Res}(h, \beta_j).$$

Sei $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$, $\beta \in \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$, ν = Ordnung der Nullstelle von α von f und μ = Ordnung der Polstelle β von f .

Zu zeigen: $\text{Res}(h, \alpha) = \nu$ und $\text{Res}(h, \beta) = -\mu$.

$\stackrel{11.8}{=} \exists \delta > 0 : U_{\delta}(\alpha) \subseteq G, \exists \varphi \in H(U_{\delta}(\alpha))$ und $f(z) = (z - \alpha)^{\nu} \varphi(z) \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$ und $\varphi(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$.

Dann: $f'(z) = \nu(z - \alpha)^{\nu-1} \varphi(z) + (z - \alpha)^{\nu} \varphi'(z) \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$

$$\Rightarrow h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z - \alpha} + \underbrace{\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}}_{\text{holomorph auf } U_{\delta}(\alpha)} \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha) \Rightarrow \text{Res}(h, \alpha) = \nu.$$

Analog: $\text{Res}(h, \beta) = -\mu$ (statt 11.8 nimmt man 13.2) ■

Folgerungen 17.5

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) und $f, g \in H(G)$. Sei $N_f :=$ Anzahl der Nullstellen von f in $U_r(z_0)$ (gezählt mit Vielfachheiten!).

$$(1) \text{ Ist } f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

(2) Satz von Rouché

Gilt (*) $|g(z) - f(z)| < |f(z)| \forall z \in \text{Tr}(\gamma)$, so gilt $N_f = N_g$

Beweis

- (1) $\exists R > r : \overline{U_r(z_0)} \subseteq \overline{U_R(z_0)} \subseteq G$. Also: $\overline{U_r(z_0)} \subseteq U_R(z_0)$. $U_R(z_0)$ ist ein Elementargebiet. Seien a_1, \dots, a_n die Nullstellen von f in $U_R(z_0)$. (gezählt mit Vielfachheiten).

$$\stackrel{17.4}{\Rightarrow} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \underbrace{n(\gamma, a_j)}_{\stackrel{16.2}{=} \begin{cases} 1 & , a_j \in U_r(z_0) \\ 0 & , a_j \notin U_r(z_0) \end{cases}}$$

- (2) Für $s \in [0, 1] : h_s := f + s(g - f) \in H(G); N(s) := N_{h_s}$. Aus (*) folgt $h_s(z) \neq 0 \forall s \in [0, 1] \forall z \in \text{Tr}(\gamma)$.

$$\text{Aus (1): } N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'_s(z)}{h_s(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + s(g'(z) - f'(z))}{f(z) + s(g(z) - f(z))} dz$$

\Rightarrow die Funktion $s \mapsto N(s)$ ist stetig. Wegen $N(s) \subseteq \mathbb{N}_0 \forall s \in [0, 1]$: $N(s)$ ist konstant. Also $N_f = N(0) = N(1) = N_g$ ■

Satz 17.6 (Satz von Hurwitz)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. (f_n) sei eine Folge in $H(G)$ und (f_n) konvergiert auf G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. ($\stackrel{10.5}{\Rightarrow} f \in H(G)$).

Dann:

- (1) Ist $Z(f_n) = \emptyset \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Z(f) = \emptyset$ oder $f \equiv 0$
- (2) Sind alle f_n auf G injektiv $\Rightarrow f$ ist auf G injektiv oder f ist auf G konstant.

Beweis

- (1) Sei $f \not\equiv 0$ auf G ; $z_0 \in G$, $r > 0$ so, dass $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$ und $f(z) \neq 0 \forall z \in \overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$.

$\gamma(t) = z_0 + re^{it} (t \in [0, 2\pi])$. (f_n) konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f . $\stackrel{10.5}{\Rightarrow} (f'_n)$ konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f' .

Übung: $(\frac{1}{f_n})$ konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.

Fazit: $(\frac{f'_n}{f_n})$ konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen $(\frac{f'}{f})$.

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_n}{f_n} dz}_{\stackrel{17.5}{N_{f_n}=0}} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz}_{\stackrel{17.5}{N_f}}$$

Also: $N_f = 0$. Somit: $f(z_0) \neq 0$

- (2) Sei $z_0 \in G$. $g_n = f_n - f_n(z_0)$, $g := f - f(z_0)$. $\tilde{G} := G \setminus \{z_0\}$. Dann:

(g_n) konvergiert auf \tilde{G} lokal gleichmäßig gegen g . $g_n(z) \neq 0 \forall z \in \tilde{G}$

(1) $\Rightarrow g \equiv 0$ oder $g(z) \neq 0 \forall z \in \tilde{G} \Rightarrow f$ ist auf G konstant oder $f(z) \neq f(z_0) \forall z \in G \setminus \{z_0\}$ ■

Berechnung von Integralen

Satz 17.7

Sei $R(x, y) = R(x + iy) = R(z)$ eine rationale Funktion ohne Pole auf $\partial\mathbb{D}$. Weiter sei $R_1(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i})$ und $M := \{z \in \mathbb{D} : z \text{ ist ein Pol von } R_1\}$ (endlich)

Dann:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{z \in M} \text{Res}(R_1, z)$$

Beweis

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} R\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) ie^{it} dt \\ &= \int_{\gamma} R_1(z) dz, \text{ wobei } \gamma(t) = ie^{it} \ (t \in [0, 2\pi]). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \int_{\gamma} R_1(z) dz \stackrel{17.1}{=} 2\pi i \sum_{z \text{ Pol von } R_1} \underbrace{n(\gamma, z)}_{\substack{= 1, z \in M \\ = 0, z \notin M}} \text{Res}(R_1, z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 17.8

Z und N seien Polynome. $R := \frac{Z}{N}$ habe auf \mathbb{R} keine Pole und es gelte (*) $\text{grad } N \geq \text{grad } Z + 2$ ($\implies \int_{\mathbb{R}} R(x) dx$ konvergiert absolut). Weiter sei $M := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, z \text{ ist Pol von } R\}$.

Dann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in M} \text{Res}(R, z)$$

Beweis

$$(*) \implies \exists m \geq 0 \exists c > 0 : |R(z)| \leq \frac{m}{|z|^2} \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| > c. \quad (**)$$

Sei $\delta > c$ so gross, dass alle Pole von R in $U_{\delta}(0)$ liegen.

$$\gamma_1(t) := t \ (t \in [-\delta, \delta]); \ \gamma_2(t) := \delta e^{it} \ (t \in [0, \pi]) \ \gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2.$$

$$\int_{\gamma} R(z) dz = \int_{\gamma_1} R(z) dz + \int_{\gamma_2} R(z) dz.$$

$$\int_{\gamma_1} R(z) dz = \int_{-\delta}^{\delta} R(t) dt \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt \ (\delta \rightarrow \infty).$$

$$\text{Sei } z \in \text{Tr}(\gamma_2). \text{ Dann: } |z| = \delta > 0, \text{ also nach } (**): |R(z)| \leq \frac{m}{|z|^2} = \frac{m}{\delta^2} \implies \left| \int_{\gamma_2} R(z) dz \right| \leq$$

$$\frac{m}{|\delta|^2} L(\gamma_2) \leq \frac{m\pi\delta}{\delta^2} = \frac{m\pi}{\delta}$$

$$\implies \int_{\gamma_2} R(z) dz \rightarrow 0 \ (\delta \rightarrow \infty). \text{ Dann: } \int_{\gamma} R(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx \ (\delta \rightarrow \infty). \quad 17.1 \implies \int_{\gamma} R(z) dz =$$

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z \text{ Pol von } R} \underbrace{n(\gamma, z)}_{\substack{= 1, z \in M \\ = 0, z \notin M}} \text{Res}(R, z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

18. Der Satz von Montel

Satz 18.1 (Satz von Montel)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine Folge in $H(D)$ und es gelte mit einem $c \geq 0$: $|f_n(z)| \leq c \forall z \in D \forall n \in \mathbb{N}$. (*)

Dann enthält (f_n) eine auf D lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge.

Beweis

Wegen (*) und des Satzes von Arzelà-Ascoli (Ana3) genügt es zu zeigen:

Zu $\epsilon > 0$ und $z_0 \in D$ existiert ein $\delta > 0$: $|f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \forall z, w \in U_\delta(z_0)$

Sei $\epsilon > 0$ und $z_0 \in D$. $\exists r > 0$: $\overline{U_{2r}(z_0)} \subseteq D$

$\gamma(t) := z_0 + 2re^{it} \ (t \in [0, 2\pi])$

$\delta := \frac{1}{2} \min\{\frac{\epsilon r}{2c}, 2r\}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $z, w \in U_\delta(z_0)$. Für $\lambda \in \text{Tr}(\gamma)$: $|\lambda - z|, |\lambda - w| \geq r$

$$\implies \frac{|f_n(\lambda)|}{|\lambda - z||\lambda - w|} \leq \frac{c}{r^2}$$

$$\text{Dann: } |f_n(z) - f_n(w)| \stackrel{9.4}{=} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - z} - \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - w} d\lambda \right|$$

$$= \frac{|z - w|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(\lambda)}{(\lambda - z)(\lambda - w)} d\lambda \right| \leq \frac{|z - w|}{2\pi} \frac{c}{r^2} 2\pi 2r = \frac{2c}{r} |z - w|$$

$$= \frac{2c}{r} |z - z_0 + z_0 - w| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{2c}{r} (|z - z_0| + |w - z_0|) < \frac{2c}{r} 2\delta$$

$$\leq \frac{2c}{r} \frac{\epsilon r}{2c} = \epsilon.$$

19. Der Riemannsche Abbildungssatz

Definition

Zwei Gebiete $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ heissen **konform äquivalent** ($G_1 \sim G_2$) : $\iff \exists f \in H(G_1)$: $f(G_1) = G_2$, f ist auf G_1 injektiv.

„ \sim “ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gebiete in \mathbb{C} .

Satz 19.1 (Riemannscher Abbildungssatz)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Dann: $G \sim \mathbb{D} \iff G \neq \mathbb{C}$ und G ist ein Elementargebiet.

Beweis

„ \implies “:

10.2 (Satz von Liouville) $\implies G \neq \mathbb{C}$

11.13 $\implies G$ ist ein Elementargebiet.

„ \impliedby “: nach 19.5.

Definition

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. G hat die Eigenschaft (W) : $\iff \forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G)$: $g^2 = f$ auf G .

Beachte: Elementargebiete haben die Eigenschaft (W) (siehe 11.4)

Lemma 19.2

$G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ seien Gebiete, es gelte $G_1 \sim G_2$ und G_1 habe die Eigenschaft (W). Dann: G_2 hat die Eigenschaft (W).

Beweis

Übung. ■

Lemma 19.3

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet mit der Eigenschaft (W) und es sei $G \neq \mathbb{C}$. Dann existiert ein Gebiet G^* :

$$0 \in G^* \subseteq \mathbb{D} \text{ und } G \sim G^* \text{ (} G^* \text{ hat also die Eigenschaft (W))}$$

Beweis

$G \neq \mathbb{C} \implies \exists c \in \mathbb{C} : c \notin G$. Dann: $f(z) = z - c$ hat keine Nullstelle in G . ($f \in H(G)$)

(W) $\implies \exists g \in H(G) : g^2 = f$ auf G . Für $z_1, z_2 \in G$:

(+) aus $g(z_1) = \pm g(z_2)$ folgt $f(z_1) = f(z_2)$, also $z_1 = z_2$.

Insbesondere: g ist injektiv auf G . $G_1 := g(G)$. Also $G_1 \sim G$.

Sei $a \in G_1$. $\exists r > 0 : U_r(a) \in G_1$.

Sei $\omega \in G_1$.

Annahme: $-\omega \in G_1$.

$\exists z_1, z_2 \in G : g(z_1) = \omega = -g(z_2)$. (+) $\implies z_1 = z_2 \implies \omega = 0 \implies g(z_1)^2 = 0 \implies f(z_1) = 0$. Widerspruch.

Also: $-\omega \notin G_1$

Insbesondere: $0 \notin G_1, -a \notin G_1$.

Definiere $\varphi \in H(G_1)$ durch $\varphi(w) = \frac{1}{w+a}$. (Wohl definiert und holomorph)

Übung: φ injektiv.

$G_2 := \varphi(G_1) \implies G_2 \sim G_1$, also: $G \sim G_2$.

Sei $\nu \in G_2 \implies \exists \omega \in G_1 : \nu = \varphi(\omega) = \frac{1}{\omega+a}$.

Annahme: $|\omega + a| < r$. Dann: $|- \omega - a| < r \implies -\omega \in U_r(a) \subseteq G_1$. Widerspruch.

Also: $|\omega + a| \geq r$.

$\implies |r| \leq \frac{1}{r}$. G_2 also beschränkt.

Mit einer Abbildung $z \mapsto z + \alpha$: (Translation)

\exists Gebiet $G_3 : G_2 \sim G_3, 0 \in G_3, G_3$ beschränkt. Somit: $G \sim G_3$.

Mit einer geeigneten Abbildung $z \mapsto \delta z$ ($\delta > 0$): \exists Gebiet $G^* : G^* \sim G_3, 0 \in G^*, G^* \subseteq \mathbb{D}$.

Somit $G \sim G^*$. ■

Lemma 19.4

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft (W). Es gelte $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ und es sei $G \neq \mathbb{D}$.

Dann existiert $\varphi \in H(G) : \varphi(0) = 0, \varphi$ ist auf G injektiv. $\varphi(G) \subseteq \mathbb{D}^1$ und $|\varphi'(0)| > 1$.

Beweis

$G \neq \mathbb{D} \implies \exists a \in \mathbb{D} : a \notin G$. $f(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$.

$f \in H(G)$, 12.4 $\implies f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. $a \notin G$. $f(a) = 0$ (einzige Nullstelle). f hat in G keine Nullstelle.

(W) $\implies \exists g \in H(G) : g^2 = f$ auf G . $|g|^2 = |f| \stackrel{12.4}{<} 1$, also $|g| < 1$ auf G . D.h.: $g(G) \subseteq \mathbb{D}$. Dann: $c = g(0) \in \mathbb{D}$. $h(z) := \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$, $\varphi := h \circ g$. Klar: $\varphi \in H(G)$, $\varphi(0) = h(g(0)) = h(c) = 0$, φ ist

injektiv auf G , $\varphi(G) = h(\underbrace{g(G)}_{\subseteq \mathbb{D}}) \subseteq h(\mathbb{D}) \stackrel{12.4}{=} \mathbb{D}$. Nachrechnen: $|\varphi'(0)| = \frac{|a|+1}{2\sqrt{|a|}} > 1$. ■

Lemma 19.5

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft (W). Es gelte $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ und $\mathcal{F} := \{\varphi \in H(G) :$

$\varphi(0) = 0$, φ ist injektiv auf G und $\varphi(G) \subseteq \mathbb{D}$.

Weiter sei $\Psi \in \mathcal{F}$ und es gelte (*) $|\varphi'(0)| \leq |\Psi'(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$. Dann: $\varphi(G) = \mathbb{D}$. Insbesondere $G \sim \mathbb{D}$.

Beweis

$\tilde{G} := \Psi(G)$. 19.2 $\implies \tilde{G}$ hat die Eigenschaft (W). Weiter: $0 = \Psi(0) \in \tilde{G} \subseteq \mathbb{D}$.

Annahme: $G \not\sim \mathbb{D}$. Wende 19.4 auf G an: $\exists \tilde{\varphi} \in H(\tilde{G})$: $\tilde{\varphi}(0) = 0$, $\tilde{\varphi}$ ist injektiv,

$\tilde{\varphi}(\tilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$ und $|\tilde{\varphi}'(0)| > 1$. $\varphi := \tilde{\varphi} \circ \Psi$. Dann: $\varphi \in H(G)$, $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(\Psi(0)) = \tilde{\varphi}(0) = 0$. φ ist auf G injektiv, $\varphi(G) = \tilde{\varphi}(\Psi(G)) = \tilde{\varphi}(\tilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$. Also $\varphi \in \mathcal{F}$. Aber:

$|\varphi'(0)| = |\tilde{\varphi}'(\Psi(0))\Psi'(0)| = \underbrace{|\tilde{\varphi}'(0)|}_{>1} \underbrace{|\Psi'(0)|}_{\substack{11.11 \\ \neq 0}} > |\Psi'(0)|$, Widerspruch zu (*). ■

Beweis

Beweis „ \Leftarrow “ von 19.1:

Sei G ein Elementargebiet und $G \neq \mathbb{C}$. 11.4 $\implies G$ hat die Eigenschaft (W).

ObdA: $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ (wg 19.3). Sei \mathcal{F} wie in 19.5. $\phi_0(z) := z$. Dann: $\phi_0 \in \mathcal{F}$. Wegen 19.5 genügt es zu zeigen:

$$\exists \Psi \in \mathcal{F} : |\varphi(0)| \leq |\Psi(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$$

$s := \exists$ Folge (φ_n) in \mathcal{F} : $|\varphi'_n(0)| \rightarrow s$. $\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D} \forall n \in \mathbb{N}$

$\implies |\varphi_n(z)| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N} \forall z \in G$. Satz von Montel $\implies (\varphi_n)$ enthält eine auf G lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge.

ObdA: (φ_n) konvergiert auf G lokal gleichmäßig. $\Psi(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z)$ ($z \in G$). 10.5 \implies

$\Psi \in H(G)$ und $\varphi'_n(0) \rightarrow \Psi'(0)$. Also: $|\Psi'(0)| = s$. $\Psi(0) = \lim \varphi_n(0) = 0$. Es ist $|\varphi'(0)| = 1 \leq |\Psi'(0)|$. Insbesondere ist Ψ auf G nicht konstant. φ_n injektiv $\forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{17.6} \Psi$ ist injektiv.

$\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D} \forall n \in \mathbb{N} \implies |\Psi(z)| \leq 1 \forall z \in G$ Annahme: $\exists z_0 \in G$: $|\Psi(z_0)| = 1$. 11.6 $\implies \Psi$ konstant. Widerspruch! Also $\Psi(G) \subseteq \mathbb{D}$

Fazit: $\Psi \in \mathcal{F}$ und $|\varphi'(0)| \leq |\Psi'(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$. ■

Satz 19.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, I)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

$$G \text{ ist Elementargebiet} \iff G \text{ hat die Eigenschaft (W)}$$

Beweis

„ \implies “: 11.4.

„ \Leftarrow “:

Fall 1: $G = \mathbb{C}$. ✓

Fall 2: $G \neq \mathbb{C}$. Im Beweisteil „ \Leftarrow “ von 19.1 wurde nur die Eigenschaft (W) benutzt. Also $G \sim \mathbb{D}$. \mathbb{D} ist ein Elementargebiet $\xrightarrow{11.13} G$ ist ein Elementargebiet. ■

20. Homotopie und einfacher Zusammenhang

Lemma 20.1

Sei $\emptyset \neq K \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und K kompakt. Dann existiert ein $r > 0$: $U_r(a) \subseteq D \forall a \in K$.

Beweis

$\forall a \in K \exists r_a > 0$: $U_{2r_a}(a) \subseteq D$. Dann: $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_{r_a}(a)$.

2.3 $\implies \exists a_1, \dots, a_n \in K$: $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{r_{a_j}}(a_j)$.

$r := \min\{r_{a_1}, \dots, r_{a_n}\}$. Sei $a \in K$ und $z \in U_r(a)$.

Zu zeigen: $z \in D$.

$\exists j \in \{1, \dots, n\}$: $a \in U_{r_{a_j}}(a_j)$.

Dann: $|z - a_j| = |z - a + a - a_j| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |z - a| + |a - a_j| < r + r_{a_j} \leq 2r_{a_j} \implies z \in U_{2r_{a_j}}(a_j) \subseteq D$ ■

Lemma 20.2

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. (γ also „nur“ stetig)

Dann existiert ein $r > 0$ und eine Zerlegung $Z = \{a_0, \dots, a_n\}$ von $[a, b]$ mit:

- (1) für $z_j := \gamma(a_j)$ gilt: $U_r(z_j) \subseteq D$ ($j = 0, \dots, n$)
- (2) $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subseteq U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$ ($j = 0, \dots, n$)

Beweis

20.1 $\implies \exists r > 0$: $U_r(z) \subseteq D \forall z \in K := \text{Tr}(\gamma) \implies$ (1).

OBdA: $[a, b] = [0, 1]$. γ ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig $\implies \exists \delta > 0$: $|\gamma(s) - \gamma(t)| < r \forall s, t \in [0, 1]$ mit $|s - t| < \delta$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{1}{n} < \delta$. $a_j := \frac{j}{n}$ ($j = 0, \dots, n$) und $Z := \{a_0, \dots, a_n\}$. Sei $t \in [a_j, a_{j+1}]$.
 $\implies |t - a_j| < \delta, |t - a_{j+1}| < \delta \implies |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_j)}_{=z_j}| < r, |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_{j+1})}_{=z_{j+1}}| < r \implies \gamma(t) \in$

$U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$. ■

In §8 haben wir $\int_{\gamma} f(z) dz$ definiert für γ stückweise glatt und $f \in C(\text{Tr}(\gamma))$. Jetzt definieren wir

$\int_{\gamma} f(z) dz$ für γ „nur“ stetig und f holomorph.

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. Seien r, z_j, Z wie in 20.2.
 $z_0 = \gamma(a_0) = \gamma(a)$, $z_n = \gamma(a_n) = \gamma(b)$
 $\gamma_j(t) := z_j + t(z_{j+1} - z_j)$ ($t \in [0, 1]$) ($j = 0, \dots, n-1$).
 $\Gamma := \gamma_0 \oplus \dots \oplus \gamma_{n-1}$ ist stückweise glatt. 20.2 $\implies \text{Tr}(\Gamma) \subseteq D$. Setze

$$(+)\quad \int_{\gamma} f(z)dz := \int_{\Gamma} f(z)dz$$

Lemma 20.3

Bezeichnungen wie in obiger Definition.

- (1) Ist γ stückweise glatt, so stimmt obige Definition (+) mit der Definition von $\int_{\gamma} f(z)dz$ aus §8 überein.
- (2) Die Definition (+) ist unabhängig von der Zerlegung Z , solange Z die Eigenschaft aus 20.2 hat.
- (3) $|\int_{\gamma} f(z)dz| \leq (\max_{z \in \text{Tr}(\Gamma)} |f(z)|)L(\Gamma)$.

Beweis

- (1) $\tilde{\gamma}_j := \gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$. Dann: $\gamma = \tilde{\gamma}_0 \oplus \tilde{\gamma}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\gamma}_{n-1}$

Sei $j \in \{0, \dots, n-1\}$: $\tilde{\gamma}_j \oplus \tilde{\gamma}_j^-$ ist ein geschlossener, stückweise glatter Weg im Sterngebiet $U_r(z_j)$ (siehe 20.2).

$$\stackrel{9.2}{\implies} \int_{\tilde{\gamma}_j \oplus \tilde{\gamma}_j^-} f(z)dz = 0 \implies \int_{\tilde{\gamma}_j} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_j} f(z)dz.$$

$$\stackrel{\text{Summation}}{\implies} \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz.$$

- (2) Übung. (Ist \tilde{Z} eine weitere Zerlegung von $[a, b]$ mit den Eigenschaften aus 20.2, so betrachte die gemeinsame Verfeinerung $Z \cup \tilde{Z}$. Verfahre ähnlich wie in (1).)
- (3) folgt aus 8.4 ■

Definition

$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen.

- (1) Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ Wege mit $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.
 γ_0 und γ_1 heißen **in D homotop** $\Leftrightarrow \exists H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$: H ist stetig, $H([0, 1]^2) \subseteq D$ und

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \quad \forall s \in [0, 1]$$

In diesem Fall heißt H eine **Homotopie von γ_0 nach γ_1 in D**.

Anschaulich: Sei $s \in [0, 1]$.

$\Gamma_s(t) := H(t, s)$ ($t \in [0, 1]$), Γ_s ist ein Weg mit $\text{Tr}(\Gamma_s) \subseteq D$. $\Gamma_s(0) = H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\Gamma_s(1) = H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_1 = \gamma_1$
 „ γ_0 kann in D stetig nach γ_1 deformiert werden.“

- (2) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ sei ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. $z_0 : 0\gamma(0) = \gamma(1)$.
 $\gamma_{z_0}(t) := z_0$ ($t \in [0, 1]$) heißt ein **Punktweg**.

γ heißt **nullhomotop in D** $:\Leftrightarrow \gamma$ und γ_{z_0} sind in D homotop.
 „ γ lässt sich in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen.“

- (3) $G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. G heißt **einfach zusammenhängend** $:\Leftrightarrow$ jeder geschlossene Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ ist in G nullhomotop.
 „ G hat keine Löcher.“

Satz 20.4

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet.

- (1) Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ und $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq G$, so sind γ_0 und γ_1 homotop in G .
 (2) G ist einfach zusammenhängend

Beweis

- (1) $H(s, t) := \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))$, ($s, t \in [0, 1]$). H ist eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 in G
 (2) folgt aus (1) ■

21. Cauchyscher Integralsatz (Homotopieversionen)

Satz 21.1 (CIS, Version I)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ seien Wege mit $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

Sind γ_0 und γ_1 in D homotop, so gilt:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Beweis

Ohne Beweis

Satz 21.2 (CIS, Version II)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und γ sei ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$.

Ist γ nullhomotop in D , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Beweis

21.1

Satz 21.3 (CIS, Version III)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $f \in H(G)$ und γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Beweis

21.2

Satz 21.4 (Charakterisierung von Elementargebieten, II)

Sei G ein Gebiet in \mathbb{C} .

G ist ein Elementargebiet $\Leftrightarrow G$ ist einfach zusammenhängend

Beweis

„ \Rightarrow “ Fall 1: $G = \mathbb{C} \Rightarrow G$ konvex, also einfach zusammenhängend (siehe 20.4)

Fall 2: $G \neq \mathbb{C} \xrightarrow{19.1} \exists f \in H(G) : f(G) = \mathbb{D}$ und f ist auf G injektiv.

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$. $z_o :=$ Anfangspunkt von γ .

Zu zeigen: γ und γ_{z_o} sind in G homotop

$\Gamma := f \circ \gamma$. Γ ist ein geschlossener Weg in \mathbb{D} . \mathbb{D} ist konvex $\xrightarrow{10.4} \mathbb{D}$ ist einfach zusammenhängend.

Also existiert eine Homotopie \tilde{H} von Γ nach $\gamma_{f(z_o)}$ in \mathbb{D} . $H := f^{-1} \circ \tilde{H}$ ist eine Homotopie von γ nach γ_{z_o} in G

„ \Leftarrow “ Zu zeigen: $\forall f \in H(G) \exists F \in H(G) : F' = f$ auf G

Sei $f \in H(G)$. Sei $z_0 \in G$ (fest).

Für $z \in G$ sei $\gamma^{(z)}$ ein Weg mit $\text{Tr}(\gamma^{(z)}) \subseteq G$, $\gamma^{(z)}(0) = z_0$, $\gamma^{(z)}(1) = z$. (Parameterintervall von $\gamma^{(z)}$ sei $[0,1]$)

$$F(z) := \int_{\gamma^{(z)}} f(w) dw \quad (z \in G)$$

Voraussetzung + 21.1, 21.3 \Rightarrow diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $\gamma^{(z)}$.

Fast wörtlich wie im Beweis von 9.2.: $F \in H(G)$, $F' = f$ auf G . ■

Satz 21.5 (Charakterisierung von Elementargebieten, III)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) G ist ein Elementargebiet
- (2) G ist einfach zusammenhängend
- (3) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H(G)$ und für jeden geschlossenen Weg γ mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$
- (4) $\forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g' = f$ auf G
- (5) $\forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g^2 = f$ auf G
- (6) $G = \mathbb{C}$ oder $G \sim \mathbb{D}$

Beweis

(1) \Leftrightarrow (2): 21.4

(3) \Rightarrow (1): wie im Beweisteil „ \Leftarrow “ von 21.4

(3) \Rightarrow (4),(5): 11.4

(4) \Rightarrow (5): siehe Beweis von 11.4

(5) \Rightarrow (6): 19.6

(6) \Rightarrow (1): wie im Beweisteil „ \Rightarrow “ von 21.4

(2) \Rightarrow (3): 21.2

■

Definition

Sei $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. A heißt in $\hat{\mathbb{C}}$ zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ jede lokal konstante Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ist auf A konstant.

Satz 21.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, IV)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:

(1) G ist einfach zusammenhängend

(2) $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ ist zusammenhängend in $\hat{\mathbb{C}}$

(3) Aus $\mathbb{C} \setminus G = A \cup K$, $A \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $A \cap K = \emptyset$ folgt:
 $K = \emptyset$

Beweis

Ohne Beweis.

22. Cauchyscher Integralsatz (Homologieverversionen)

In diesem Paragraphen sei $G \subseteq \mathbb{C}$ stets ein Gebiet.

Definition

Sei γ ein geschlossener Weg in \mathbb{C} .

- (1) $\text{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) \neq 0\}$ ("Inneres" von γ)
 $\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) = 0\}$ ("Äußeres" von γ)
- (2) Sei $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$. γ heißt in G **nullhomolog** : $\iff n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$
 $(\iff \text{Int}(\gamma) \subseteq G)$

Beispiele:

- (i) Jeder geschlossene Weg in \mathbb{C} ist in \mathbb{C} nullhomolog.
- (ii) $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), $n(\gamma, 0) = 1 \neq 0$; γ ist in G nicht nullhomolog.

Satz 22.1

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

- (1) Ist γ nullhomotop in $G \Rightarrow \gamma$ ist nullhomolog in G .
- (2) Ist G einfach zusammenhängend, so ist γ in G nullhomolog.

Beweis

- (1) Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ holomorph auf G .

$$\stackrel{21.2}{\implies} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{= 2\pi i \, n(\gamma, z_0)} = 0 \Rightarrow n(\gamma, z_0) = 0$$

- (2) folgt aus (1) ■

Satz 22.2

Sei $f \in H(G)$ und γ sei ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

$\varphi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ sei definiert durch:

$$\varphi(w, z) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & , w \neq z \\ f'(z) & , w = z \end{cases}$$

- (1) φ ist stetig.
- (2) Für $z \in G$ (fest) hat $w \mapsto \varphi(w, z)$ in z eine hebbare Singularität; $w \mapsto \varphi(w, z)$ ist also holomorph auf G
 Für $w \in G$ (fest) hat $z \mapsto \varphi(w, z)$ in w eine hebbare Singularität; $z \mapsto \varphi(w, z)$ ist also holomorph auf G
- (3) $h(z) := \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$ ($z \in G$). Ist γ nullhomolog in G , so ist $h \equiv 0$ auf G .

Beweis

(1) 11.9

(2) 13.1

(3) (A) Es ist $h \in C(G)$. Sei $z_0 \in G$ und (z_n) eine Folge in G mit $z_n \rightarrow z_0$. $g_n(w) := \varphi(w, z_n)$, $g(w) := \varphi(w, z_0)$ ($w \in G$). Sei Γ der stückweise glatte Ersatzweg für γ (wie in §20).

Übung: (g_n) konvergiert auf Γ gleichmäßig gegen g .

$$\stackrel{8.4}{\Rightarrow} \int_{\Gamma} g_n(w) dw \rightarrow \int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{\Gamma} \varphi(w, z_0) dw = \int_{\gamma} \varphi(w, z_0) dw = h(z_0)$$

Also: $h(z_n) \rightarrow h(z_0)$

(B) Es ist $h \in H(G)$. Sei $\Delta \subseteq G$ ein Dreieck. Wegen 9.7 genügt es zu zeigen: $\int_{\partial\Delta} h(z) dz = 0$
 9.1 und (2) $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} \varphi(w, z) dz = 0 \quad \forall w \in G$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} h(z) dz = \int_{\partial\Delta} \left(\int_{\gamma} \varphi(w, z) dw \right) dz \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\gamma} \underbrace{\left(\int_{\partial\Delta} \varphi(w, z) dz \right)}_{=0} dw = 0$$

$$(C) \mathbb{C} = \underbrace{\text{Int}(\gamma)}_{\subseteq G} \cup \text{Ext}(\gamma) \cup \underbrace{\text{Tr}(\gamma)}_{\subseteq G} = G \cup \text{Ext}(\gamma)$$

Sei $z_0 \in \text{Ext}(\gamma)$. Sei C die Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$: $z_0 \in C$.

$$\stackrel{16.2}{\Rightarrow} n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0) = 0 \quad \forall z \in C$$

$$\Rightarrow C \subseteq \text{Ext}(\gamma). \stackrel{16.1/2}{\Rightarrow} C \text{ ist offen.} \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_{\delta}(z_0) \subseteq C \subseteq \text{Ext}(\gamma).$$

Also ist $\text{Ext}(\gamma)$ offen. [Analog: $\text{Int}(\gamma)$ offen]

$$g(z) := \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \notin \text{Tr}(\gamma)) \stackrel{9.5}{\Rightarrow} g \in H(\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)), \text{ insbesondere gilt } g \in H(\text{Ext}(\gamma)).$$

$$\text{Sei } z \in G \cap \text{Ext}(\gamma): h(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = g(z) - f(z) 2\pi i$$

$$\underbrace{n(\gamma, z)}_{=0} = g(z). \text{ Also: } h = g \text{ auf } G \cap \text{Ext}(\gamma). \text{ Dann ist}$$

$$F(z) = \begin{cases} h(z) & , z \in G \\ g(z) & , z \in \text{Ext}(\gamma) \end{cases} \text{ eine ganze Funktion.}$$

Übung: $F(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$). 10.2 $\Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow h \equiv 0$ ■

Satz 22.3 (Allgemeine Cauchysche Integralformel)

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ und γ sei nullhomolog in G . Dann:

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall f \in H(G) \quad \forall z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$$

Beweis

Sei $f \in H(G)$ und $z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$. $\xrightarrow{22.2(3)} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}}_{=n(\gamma,z)} \blacksquare$

Satz 22.4 (CIS, Homologieversion I)

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

Dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H(G) \iff \gamma \text{ ist in } G \text{ nullhomolog}$$

Beweis

" \Rightarrow ": Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$; $f(z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0} \Rightarrow f \in H(G) \xrightarrow{\text{Vgr.}} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{=n(\gamma,z_0)} = 0$

" \Leftarrow ": Sei $f \in H(G)$ und $z_0 \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$; $g(z) = (z - z_0)f(z)$; $g \in H(G)$.

Wende 22.3 auf g an :

$$\underbrace{n(\gamma, z_0)}_{=0} \underbrace{g(z_0)}_{=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \underbrace{\frac{g(w)}{w-z_0}}_{=f(w)} dw \Rightarrow \int_{\gamma} f(w) dw = 0. \quad \blacksquare$$

Satz 22.5

G ist einfach zusammenhängend \iff jeder geschlossene Weg γ mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ ist in G nullhomolog.

Beweis

" \Rightarrow " 22.1(2)

" \Leftarrow " Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ und $f \in H(G)$

Vorraussetzungen $\Rightarrow \gamma$ ist in G nullhomolog. 22.4 $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$. 21.5 $\Rightarrow G$ ist einfach zusammenhängend. \blacksquare

Definition

Seien γ_1 und γ_2 geschlossene Wege mit $\text{Tr}(\gamma_1), \text{Tr}(\gamma_2) \subseteq G$. γ_1, γ_2 heißen in G homolog : $\iff n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$.

Satz 22.6 (CIS, Homologieversion II)

γ_1, γ_2 seien wie in obiger Definition und in G homolog.

Dann:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \forall f \in H(G)$$

Beweis

Sei $f \in H(G)$ und $z_j := \text{Anfangspunkt von } \gamma_j$ ($j = 1, 2$).

$\stackrel{3.4}{\Rightarrow} \exists \text{ Weg } \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : \text{Tr}(\gamma) \subseteq G, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$

$\Gamma := \gamma_1 \oplus \gamma \oplus \gamma_2^- \oplus \gamma^-$. Γ ist ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$

Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$: $n(\Gamma, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma, z_0) - n(\gamma_2, z_0) - n(\gamma, z_0) = 0$

D.h.: Γ ist in G nullhomolog. 22.4 $\Rightarrow 0 = \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma} - \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$ ■

A. Satz um Satz (hüpft der Has)

1.1.	7
1.2.	7
1.3.	8
1.4. Formel von de Moivre	8
1.5.	9
2.1.	11
2.2.	12
2.3.	13
3.1.	15
3.2.	16
3.3.	16
3.4.	17
3.6.	17
4.1.	19
4.3.	21
5.1.	23
5.2.	24
5.3.	25
5.4.	25
5.5.	26
6.1.	27
6.2.	28
7.1.	31
7.2.	32
7.3.	32

7.4.	33
7.5.	33
7.6.	33
8.1.	35
8.2.	35
8.3.	37
8.4.	37
8.5.	38
8.8.	38
8.9.	39
9.1. Lemma von Goursat	41
9.2. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	43
9.4. Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	45
9.5.	46
9.6.	46
9.7. Satz von Morera	47
9.8.	48
10.1. Cauchysche Abschätzungen	49
10.2. Satz von Liouville	49
10.3. Fundamentalsatz der Algebra	49
10.4. Potenzreihenentwicklung	50
10.5. Konvergenzsatz von Weierstraß	51
11.1. Identitätssatz für Potenzreihen	53
11.2. Identitätssatz für holomorphe Funktionen	53
11.4.	54
11.5.	54
11.6. Maximum-, Minimumsprinzip (I)	55
11.7. Maximum-, Minimumsprinzip (II)	55
11.8.	56

11.9.	56
11.10..	57
11.11..	58
11.12Winkeltreue	58
11.13..	59
12.1. Schwarzsches Lemma	61
12.2.	61
12.3.	62
12.4.	62
13.1. Riemannscher Hebbbarkeitssatz	63
13.2.	64
13.3.	64
13.4. Satz von Casorati-Weierstraß	64
13.5. Klassifikation	65
14.1.	67
14.2. Laurententwicklung	67
14.3.	68
14.4.	69
15.1.	71
15.2. Der chordale Abstand	71
15.3.	72
15.4.	73
15.5.	73
15.6.	73
15.7.	74
15.8.	75
16.1.	77
16.2.	78
17.1. Residuensatz	81

17.3.	82
17.4. Das Argumentenprinzip	83
17.6. Satz von Hurwitz	84
17.7.	85
17.8.	85
18.1. Satz von Montel	87
19.1. Riemannscher Abbildungssatz	89
19.6. Charakterisierung von Elementargebieten, I	91
20.4.	95
21.1. CIS, Version I	97
21.2. CIS, Version II	97
21.3. CIS, Version III	97
21.4. Charakterisierung von Elementargebieten, II	98
21.5. Charakterisierung von Elementargebieten, III	98
21.6. Charakterisierung von Elementargebieten, IV	99
22.1.	101
22.2.	101
22.3. Allgemeine Cauchysche Integralformel	102
22.4. CIS, Homologieversion I	103
22.5.	103
22.6. CIS, Homologieversion II	103

Stichwortverzeichnis

- ϵ -Umgebung von z_0 , 12
- $\operatorname{Im} z := b$ (Imaginärteil von z), 7
- n -te Wurzel aus a ., 9
- (Realteil von z), 7
- (imaginäre Einheit), 7

- abgeschlossen, 12
- abgeschlossene Kreisscheibe, 12
- Abschließung, 12
- absolut konvergent, 12
- Additionstheorem, 27
- Anfangspunkt, 16
- Automorphismus, 58

- beschränkt, 11, 12, 48
- Betrag von z , 7
- Bolzano-Weierstraß, 11

- Cauchy-Folge, 11
- Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, 19
- Cauchy-kriterium, 11, 23
- Cauchysche Integralformel, 82
- Cauchysche Integralformeln für Ableitungen, 46
- Cauchyscher Integralsatz für Elementargebiete, 82
- chordale Abstand, 71
- Cosinus, 28
- Cotangens, 29

- der Punkt ∞ , 71
- differenzierbar, 35
- diskret in G , 56
- divergent, 11
- Doppelverhältnis, 74
- Dreieck, 41

- ein Logarithmus von w , 31
- Elementargebiet, 47
- Endpunkt, 16
- entire function, 48

- ganze Funktion, 48
- Gebiet, 16, 20, 53
- geschlossen, 35
- glatt, 35
- gleichmäßig (glm) konvergent, 23
- Grenzfunktion, 23
- Grenzwert, 11

- Häufungspunkt, 12
- Hauptteil, 68
- Hauptwert des Arguments, 8
- Hauptzweig der allgemeinen Potenz, 33
- Hauptzweig des Logarithmus, 31
- hebbare Singularität, 63
- holomorph, 19

- in G homolog, 103
- Innere von A , 12
- innerer Punkt von A , 12
- inverse Weg, 36
- irgendein, 44
- isolierte Singularität, 63

- Körper der Komplexen Zahlen, 7
- Koeffizientenmatrix, 72
- kompakt, 12, 16
- komplex differenzierbar, 19
- Komponente, 77
- konform äquivalent, 89
- konforme Abbildung, 58
- konjugiert komplexe Zahl, 7
- konvergent, 11
- Konvergenzradius (KR), 24
- konvergiert in, 71
- konvex, 16
- Kriterium von Weierstrass, 23

- Lange, 16
- Laurententwicklung, 68
- Laurentreihe, 68
- Limes, 11
- lokal gleichmäßig, 51

- lokal gleichmaessig konvergent, 23
- lokalkonstant, 16
- meromorph, 72
- Moebiustransformation, 72
- Nebenteil, 68
- nicht, 54
- Nordpol, 71
- nullhomolog, 101
- offene Kreisscheibe, 12
- Ordnung, 56
- Ordnung des Pols, 64
- Parametertransformation, 36
- Pol, 64
- Potenzreihe (PR), 24
- punktierte Kreisschreibe, 12
- punktweise konvergent, 23
- Rand von A , 12
- Randpunkt, 12
- Rektifizierbarkeit, 16
- Residuum, 69
- Riemannsche Zahlenkugel, 71
- Satz von der Gebietstreue, 54
- Sinus, 28
- Stammfunktion, 37
- stereographische Projektion, 71
- sternförmig, 43
- Sterngebiet, 43
- Sternmittelpunkt, 43
- stetig, 15
- stetig differenzierbar, 35
- stuckweise glatt, 36
- Tangens, 29
- Trager, 16
- Trager von γ , 35
- Umlaufzahl, 77
- unendliche Reihe, 11
- Verbindungsstrecke, 16
- Vielfachheit, 56
- Vollebene, 71
- Weg, 16
- Wegintegral, 36
- Weglänge, 36
- Wegzusammenhang, 43
- wegzusammenhangend, 16
- wesentliche Singularität, 64
- zusammenhangend, 16
- zweimal komplex differenzierbar, 21