11 Neyman-Pearson-Tests (NP-Tests)

Es sei $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ $\Theta_1 = \{\vartheta_1\}$, f_j sei die Dichte von P_{ϑ_j} bezüglich dem Maß μ auf $\mathfrak{X}$.

11.1 Definition

φ heißt NP-Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$
$:\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \; \exists \gamma \in [0,1]$ mit

$$(1) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } f_1(x) > cf_0(x) \\ \gamma, \text{ falls } f_1(x) = cf_0(x) \\ 0, \text{ falls } f_1(x) < cf_0(x) \end{cases}$$

Beachte[28]: $E_{\vartheta_0}(\varphi) = P_{\vartheta_0}(f_1 > cf_0) + \gamma P_{\vartheta_0}(f_1 = cf_0)$

$$(2) \quad Q(x) := \begin{cases} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} & \text{, falls } f_0(x) > 0 \\ \infty & \text{, falls } f_0(x) = 0 \end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } Q(x) > c \\ \gamma & \text{, falls } Q(x) = c \\ 0 & \text{, falls } Q(x) < c \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} [\text{falls } f_0(x) > 0 & \Rightarrow & \varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) \\ \text{falls } f_0(x) = 0, \; f_1(x) > 0 & \Rightarrow & \varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) \\ \text{falls } f_0(x) = 0, \; f_1(x) = 0 & \Rightarrow & \varphi(x) \neq \widetilde{\varphi}(x)] \end{array}$$

Es gilt: $\{f_0 > 0\} \cup \{f_1 > 0\} \subset \{\varphi = \widetilde{\varphi})$

$$\Rightarrow P_{\vartheta_1}(\varphi = \widetilde{\varphi}^*) = P_{\vartheta_1}(\varphi = \widetilde{\varphi}) = 1$$

<u>Beachte:</u> $E_{\vartheta_0}(\widetilde{\varphi}) = P_{\vartheta_0}(Q > c) + \gamma P_{\vartheta_0}(Q = c)$

11.2 Satz

Der Test aus 11.1(1) ist bester Test zum Niveau $\alpha := E_{\vartheta_0}(\varphi)$.

<u>Beweis:</u>
Sei Ψ beliebiger Test mit $E_{\vartheta_0}(\Psi) \leq \alpha$.
Zu zeigen:

$$E_{\vartheta_1}(\varphi) \geq E_{\vartheta_1}(\Psi)$$

[28] Niveau

Sei $M^{(+)} := \{x : \varphi(x) > \Psi(x)\},\ M^{(-)} := \{x : \varphi(x) < \Psi(x)\}$,
$M^{(=)} := \{x : \varphi(x) = \Psi(x)\}$

$$x \in M^{(+)} \Rightarrow \varphi(x) > 0 \Rightarrow f_1(x) \geq cf_0(x)$$

$$x \in M^{(-)} \Rightarrow \varphi(x) < 1 \Rightarrow f_1(x) \leq cf_0(x)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_{\vartheta_1}(\varphi - \Psi) &= \int_{\mathfrak{X}} (\varphi(x) - \Psi(x)) f_1(x) \mu(dx) \\
&= \int_{M^{(+)}} \underbrace{(\varphi(x) - \Psi(x))}_{>0} \underbrace{f_1(x)}_{\geq cf_0} d\mu(x) \\
&\quad + \int_{M^{(-)}} \underbrace{(\varphi - \Psi)}_{<0} \underbrace{f_1}_{\leq cf_0} d\mu + \underbrace{\int_{M^{(=)}} \underbrace{(\varphi - \Psi) f_1}_{=0} d\mu}_{=0} \\
&\geq \int_{M^{(+)}} (\varphi - \Psi) cf_0 d\mu + \int_{M^{(-)}} (\varphi - \Psi) cf_0 d\mu \\
&\quad + \int_{M^{(=)}} (\varphi - \Psi) cf_0 d\mu \\
&= c \int_{\mathfrak{X}} (\varphi - \Psi) f_0 d\mu \\
&= \underbrace{c}_{\geq 0} [\underbrace{E_{\vartheta_0}(\varphi) - E_{\vartheta_0}(\Psi)}_{\geq 0}] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

11.3 Bemerkung

Beweis deckt auch den Fall $\varphi(x) = \gamma(x)$, falls $f_1(x) = cf_0(x)$ ab

11.4 Lemma von Neyman-Pearson

a) Zu jedem $\alpha \in (0, 1)$ existiert ein NP-Test φ der Form 11.1(1).

b) Ist Ψ ebenfalls bester Test zum Niveau α,
so gilt mit φ aus (a) und $D = \{x : f_1(x) \neq cf_0(x)\}$

$$\varphi(x) = \Psi(x) \text{für } \mu\text{- fast alle } x \in D$$

Beweis:

a) Sei Q wie in 11.1(2). Zu zeigen:

$$\exists c \geq 0 \ \exists \gamma \in [0,1] \text{ mit } P_{\vartheta_0}(Q > c) + \gamma P_{\vartheta_0}(Q = c) = \alpha \ (*)$$

Sei $F_0(t) := P_{\vartheta_0}(Q \leq t)$ die Verteilungsfunktion von Q unter ϑ_0.
Dann wird $(*)$ zu $1 - F_0(c) + \gamma(F_0(c-0)) \stackrel{!}{=} \alpha$.
Setze $c := F_0^{-1}(1-\alpha)$ und

$$\gamma := \begin{cases} 0, & \text{falls } F_0(c) = F_0(c-0) \\ \frac{F_0(c)-(1-\alpha)}{F_0(c)-F_0(c-0)}, & \text{sonst} \end{cases}$$

b) siehe Pruscha, Vorlesungen über Mathematische Statistik, S. 225

Beispiel: (Poissonverteilung)
$X \sim Po(\lambda),\ (\lambda > 0),\ 0 < \lambda_0 < \lambda_1$

$$H_0 : \lambda = \lambda_0,\ H_1 : \lambda = \lambda_1$$

$$f(x,\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 1, 2, \ldots$$

$\Rightarrow$ Dichtequotient ist

$$T(x) = \frac{f(x,\lambda_1)}{f(x,\lambda_0)} = \underbrace{(\frac{\lambda_1}{\lambda_0})}_{>1}{}^{x} e^{-(\lambda_1-\lambda_0)}$$

streng monoton wachsend in x.
$\Rightarrow$ Bereich $\{T(x) > c\}$ bzw $\{T(x) = c\}$ kann umgeschrieben werden in $\{x > k\}$ bzw. $\{x = k\}$.
NP-Test

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & ,\ x > k \\ \gamma & ,\ x = k \\ 0 & ,\ x < k \end{cases}$$

für $\alpha \in (0,1)$ wähle $k \in \mathbb{N}_0,\ \gamma \in [0,1]$ so, dass

$$P_{\lambda_0}(X > k) + \gamma P_{\lambda_0}(X = k) \stackrel{!}{=} \alpha$$

zum Beispiel $\alpha = 0{,}05,\ \lambda_0 = 1:$
$P_{\lambda_0}(X = 3) = 0{,}0613,\ P_{\lambda_0}(X > 3) = 0{,}0190$
$\Rightarrow P_{\lambda_0}(X \geq 3) > 0{,}05$

$$P_{\lambda_0}(X > 3) + \gamma P_{\lambda_0}(X = 3) \stackrel{!}{=} 0{,}05$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\alpha - P_{\lambda_0}(X > 3)}{P_{\lambda_0}(X = 3)} = 0,5057$$

Bemerkung:
Wird bei der konkreten Testdurchführung z.B. der Wert $x = 3$ beobachtet, so wird in der Praxis der sogenannte p-Wert

$$\begin{aligned} p^*(x) &= p^*(3) \\ &= P_{\lambda_0}(\text{„mindestens so extremes Ergebnis wie das beobachtete“}) \\ &= P_{\lambda_0}(X \geq 3) \\ &= 0,0803 \end{aligned}$$

[$p^*(2) > 0,1,\ p^*(4) = 0,019$, usw] angegeben.
Bei diesem Vorgehen wird das Problem der Randomisierung umgangen:
Ist zum Beispiel $\alpha = 0,05$ gewählt, so entscheidet man bei $p^*(x) \leq 0,05$ gegen die Hypothese.
Bei $p^*(x) > 0,05$ wird die Hypothese nicht verworfen.

Im Folgenden: „Loslösen“ vom Fall $|\Theta_0| = 1 = |\Theta_1|$

Sei $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ dominiert durch σ-endliches Maß μ auf $\mathcal{B}$.

$$f(x, \vartheta) = \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x)$$

$\Theta \subset \mathbb{R}^1$, Θ offen

11.5 Definition

Es sei $T:\ \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ messbar mit $\forall \vartheta, \vartheta' \in \Theta$ mit $\vartheta < \vartheta'$ existiert eine monoton wachsende Funktion $g(\cdot, \vartheta, \vartheta'):\ \mathbb{R} \to [0, \infty]$ mit

$$\frac{f(x, \vartheta')}{f(x, \vartheta)} = g(T(x), \vartheta, \vartheta'),\ x \in \mathfrak{X}$$

Dann heißt $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ **Klasse mit monotonem Dichtequotienten (DQ) in T**.
Falls $f(x, \vartheta') > f(x, \vartheta) = 0$, so $\frac{f(x,\vartheta')}{f(x,\vartheta)} := \infty$.

11.6 Beispiel

Sei
$$f(x,\vartheta) = c(\vartheta)\cdot e^{q(\vartheta)T(x)}\cdot h(x),\ x\in\mathfrak{X}$$
(einparametrige Exponentialfamilie)
Ist $q:\ \Theta\to\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und gilt $\mathrm{Var}_\vartheta(T) > 0\ \forall\vartheta\in\Theta \quad (*)$,
so ist $\{P_\vartheta : \vartheta\in\Theta\}$ Klasse mit monotonem DQ in T.

Beweis:

(i) Aus $(*)$ folgt Injektivität von $\Theta\ni\vartheta\to P_\vartheta$:
Annahme: $\vartheta\neq\vartheta'$ und $P_\vartheta = P_{\vartheta'}$
$$\Rightarrow f(\cdot,\vartheta) = f(\cdot,\vartheta')\ \mu\text{-f.ü.}$$
$$\Rightarrow \log c(\vartheta) + q(\vartheta)\cdot T(x) = \log c(\vartheta') + q(\vartheta')\cdot T(x)\ \mu\text{-f.ü.}$$
$$\Rightarrow T(x) = \frac{\log c(\vartheta') - \log c(\vartheta)}{q(\vartheta)-q(\vartheta')}\ \mu\text{-f.ü.}$$
$$\Rightarrow \mathrm{Var}(T) = 0$$
Widerspruch zu $(*)$!

(ii) $\vartheta < \vartheta'$
$$\Rightarrow \frac{f(x,\vartheta')}{f(x,\vartheta)} = \frac{c(\vartheta')}{c(\vartheta)}\exp(\underbrace{(q(\vartheta')-q(\vartheta))}_{>0}\cdot T(x)) =: g(T(x),\vartheta,\vartheta')$$

Spezialfall: $\mathrm{Bin}(n,\vartheta)$, $0<\vartheta<1$
$$f(x,\vartheta) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x} = (1-\vartheta)^n e^{xq(\vartheta)}\binom{n}{x}$$
wobei $q(\vartheta) = \log\frac{\vartheta}{1-\vartheta}$ streng monoton wachsend in ϑ ist.
$\Rightarrow$ monotoner DQ in $T(x) = x$, $x\in\{0,\dots,n\}$

In der Situation von 11.5 sei $H_0:\vartheta\le\vartheta_0$ gegen $H_1:\vartheta>\vartheta_0$ zu testen. ($\vartheta_0\in\Theta$ vorgegeben)
Für $c^*\in\mathbb{R}$ und $\gamma^*\in[0,1]$ sei
$$(*)\quad \varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c^*\\ \gamma^*, & T(x) = c^*\\ 0, & T(x) < c^*\end{cases}$$
$\Rightarrow E_{\vartheta_0}(\varphi^*) = P_{\vartheta_0}(T > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(T = c^*)$

11.7 Satz

Die Klasse $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}^1$, besitze monotonen DQ in T. Dann gilt:

a) Ist φ^* von der Form $(*)$ mit $\alpha := E_{\vartheta_0}(\varphi^*) > 0$, so ist φ^* UMP-Test für H_0 gegen H_1.

b) Zu vorgegebenem $\vartheta_0 \in \Theta$ und $\alpha \in (0,1)$ existieren $c^* \in \mathbb{R}, \gamma^* \in [0,1]$, so dass φ^* aus $(*)$ ein Test zum Umfang α ist.

c) Die Gütefunktion $E_\vartheta\varphi^*$ ist monoton wachsend und auf $\{\vartheta :\ 0 < E_\vartheta\varphi^* < 1\}$ streng monoton.

Beweis:

a) Sei $\vartheta_1 \in \Theta$ mit $\vartheta_1 > \vartheta_0$ beliebig.

$$H_0' : \vartheta = \vartheta_0 \ \text{ gegen } \ H_1' : \vartheta = \vartheta_1$$

Sei $f_j(x) := f(x, \vartheta_j)$. Wegen

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = g(T(x), \vartheta_0, \vartheta_1)$$

existiert zu c^* ein $c := g(c^*, \vartheta_0, \vartheta_1)$ mit

$$\{x :\ \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > c\} \subset \{x :\ T(x) > c^*\}$$

$$\{x :\ \frac{f_1(x)}{f_0(x)} < c\} \subset \{x :\ T(x) < c^*\}$$

[Echte Teilmengen, denn aus $T(x) > c^*$ folgt $g(T(x), \vartheta_0, \vartheta_1) \geq c$.]

Aus

$$\begin{aligned} 0 < \alpha &= E_{\vartheta_0}\varphi^* \\ &= P_{\vartheta_0}(T > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(T = c^*) \\ &\leq P_{\vartheta_0}(T \geq c^*) \\ &= P_{\vartheta_0}(\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \geq c) \end{aligned}$$

folgt $c < \infty$. [Denn: $P_{\vartheta_0}(\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \infty) = 0$]

Für φ^* aus $(*)$ gilt

$$(**) \quad \varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > c \\ \gamma(x), & \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = c \\ 0, & \frac{f_1(x)}{f_0(x)} < c \end{cases}$$

mit $\gamma(x) \in \{0, 1, \gamma^*\}$.

Nach 11.2 und 11.3 ist φ^* bester Test für H_0' gegen H_1' zum Niveau $\alpha = E_{\vartheta_0}(\varphi^*)$.
Da φ^* in $(*)$ nicht von ϑ_1 abhängt, ist (a) für H_0' gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ bewiesen.

Teil (c) $\Rightarrow E_\vartheta \varphi^* \leq \alpha \; \forall \vartheta \leq \vartheta_0$, d.h. Test φ^* ist UMP-Test für H_0 gegen H_1 zu $\alpha := E_{\vartheta_0}\varphi^*$.

b) Analog zu 11.4(a).
Nach (c) gilt $\sup_{\vartheta \in \Theta_0} E_\vartheta \varphi^* = E_{\vartheta_0}\varphi^* = \alpha$, d.h. der Test hat Umfang α.

c) Sei $\vartheta_1 < \vartheta_2$ beliebig, $\alpha_1 := E_{\vartheta_1}\varphi^*$.
Analog zu 11.7 $(**)$ ist φ^* NP-Test für $H_0^* : \vartheta = \vartheta_1$ gegen $H_1^* : \vartheta = \vartheta_2$.
Da φ^* besser als $\varphi_1 :\equiv \alpha_1$ folgt

$$\alpha_1 = E_{\vartheta_2}(\varphi_1) \leq E_{\vartheta_2}(\varphi^*)$$

d.h. $E_\vartheta(\varphi^*)$ monoton wachsend.

(Für strenge Monotonie siehe Pruscha, S. 230)

Anmerkung:
Die Tests in $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent. φ^* in $(*)$ hängt nicht von ϑ_1 ab, also hängt auch der Test in $(**)$ nicht von ϑ_1 ab. Dies ist jedoch nicht beweisbar, da ϑ_1 sowohl in $f_1(x)$ als auch in $c = c(\vartheta_0, \vartheta_1)$ eingeht.
Beide Tests haben gleichen Ablehnbereich!

11.8 Bemerkung

a) Testproblem $H_0 : \vartheta \geq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$ analog.
[ϑ durch $-\vartheta$ und T durch -T ersetzen $\Rightarrow$ in $(*)$ werden $<$ und $>$ vertauscht]

b) Für **zweiseitiges Testproblem** $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ existiert i.A. kein UMP-Test zum Niveau α.
Ein solcher Test φ^* wäre

(i) UMP-Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1^> : \vartheta > \vartheta_0$

$$\Rightarrow E_\vartheta \varphi^* < \alpha \ \forall \vartheta < \vartheta_0$$

($\hat{=} H_0$)

(ii) UMP-Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1^< : \vartheta < \vartheta_0$

$$\Rightarrow E_\vartheta \varphi^* > \alpha \ \forall \vartheta < \vartheta_0$$

($\hat{=} H_1$)

Widerspruch!

11.9 Beispiel (Der einseitige Gauss-Test)

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n),\ X_1, \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2),\ \sigma_0^2$ bekannt. Da

$$\begin{aligned} \frac{f(x, \mu_1, \sigma_0^2)}{f(x, \mu_0, \sigma_0^2)} &= \frac{\exp(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_1)^2)}{\exp(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_0)^2)} \\ &= \exp(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0^2} \underbrace{\sum_j x_j}_{=T(x)} - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma_0^2}) \end{aligned}$$

streng monoton wachsend in $T(x) = \sum_j x_j$ ist für $\mu_1 > \mu_0$, besitzt $\{\otimes \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2) :\ \mu \in \mathbb{R}\}$ monotonen DQ in $T(x) = \sum_{j=1}^n x_j$
Als UMP-Test zum Neveau α für $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ ergibt sich

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 \ , \sum_j x_j > c^* \\ \gamma^* \ , \sum_j x_j = c^* \\ 0 \ , \sum_j x_j < c^* \end{cases}$$

Da $P_{\mu_0}(\sum_j X_j = c^*) = 0$ kann $\gamma^* \in [0, 1]$ beliebig gewählt werden, z.B. $\gamma^* = 0$. Außerdem:

$$E_{\mu_0} \varphi^* = P_{\mu_0}(\sum_{j=1}^n X_j > c^*) = P_{\mu_0}(\underbrace{\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_0}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > \sqrt{n} \frac{\frac{c^*}{n} - \mu_0}{\sigma_0}) \overset{!}{=} \alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \frac{\frac{c^*}{n} - \mu_0}{\sigma_0} \overset{!}{=} z_{1-\alpha} := \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

<u>Ergebnis:</u>

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 \ , \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} > z_{1-\alpha} \\ 0, \ \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} \leq z_{1-\alpha} \end{cases}$$

ist UMP-Test zum Niveau α für $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$.

11.10 Beispiel (UMP-Tests in einparametrigen Exponentialfamilien)

Sei $f_1(x_1, \vartheta) = c(\vartheta) e^{\vartheta T(x)} h(x),\ X_1, \dots,\ X_n \overset{uiv}{\sim} f_1$.

$$\Rightarrow f(x, \vartheta) = c(\vartheta)^n \exp(\vartheta \sum_i T(x_i)) \prod_i h(x_i)$$

und f hat momotonen DQ in $\tilde{T}(x) = \sum_{j=1}^n T(x_j)$ (vgl. 11.6).
$\Rightarrow$ UMP-Test zum Niveau α für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ ist

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1,\ \tilde{T}(x) > c^* \\ \gamma^*,\ \tilde{T}(x) = c^* \\ 0,\ \tilde{T}(x) < c^* \end{cases}$$

wobei $P_{\vartheta_0}(\widetilde{T} > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(\widetilde{T} = c^*) \overset{!}{=} \alpha$.

11.11 Korollar

Sei $h = h(t)$ streng monoton wachsend, $\widetilde{T}(x) = h(T(x))$.
In der Situation von 11.7 ist dann auch

$$\widetilde{\varphi}^*(x) = \begin{cases} 1\ , \widetilde{T}(x) > \widetilde{c}^* \\ \tilde{\gamma}^*\ , \widetilde{T}(x) = \widetilde{c}^* \\ 0\ , \widetilde{T}(x) < \widetilde{c}^* \end{cases}$$

mit $\tilde{c}^*$, $\underbrace{\tilde{\gamma}^*}_{\in[0,1]}$ gemäß $E_{\vartheta_0} \widetilde{\varphi}^* \overset{!}{=} \alpha$ UMP-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1.