0.4 Übung 3, 22.11.2004

0.4.1 Aufgabe 1

a) Sei $f : S_n \to \mathbb{Z}_m$ ein (Gruppen-)Homomorphismus
z.Z.: $\forall \pi \in \S_n : f(\pi) + f(\pi) = [0]_\sim$
Beweis: Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition. Dann gild $\tau \circ \tau = id$
Also: $[0]_\sim = f(id) = f(\tau \circ \tau) = f(\tau) + f(\tau)$
Sei: $\pi \in S_n$ bel.
Dann existieren Transposition $\tau_1, ..., \tau_k \in S_n$ mit $\pi = \tau_1 \circ ...circ\tau_k$

Also: $f(\pi) + f(\pi) + f(\tau_1) + f(\tau_2) + ... + f(\tau_k) + f(\pi_1) + f(\pi_2) + ...$
$f(\tau_1) + f(\tau_1) + f(\tau_2) + f(\tau_2) + ... = [0]_\sim$ □

b) Sei f surjektiv. Dann ex. $\pi \in S_n$ mit $f(\pi) = [1]_\sim$. Nach a) $[0]_\sim = f(\pi) + f(\pi) = [1]_\sim + [1]_\sim = [2]_\sim$.
Also teilt m 2. Somit ist m=2.

0.4.2 Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
\text{Sei } n \in \mathbb{N}.\ 3 \text{ teilt } n \Leftrightarrow &\quad [n]_\sim = [0]_\sim && \text{in}\mathbb{Z}_3 \\
\Leftrightarrow &\quad [\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i]_\sim = [0]_\sim && \text{in}\mathbb{Z}_3 \\
\Leftrightarrow &\quad \sum_{i=0}^{n} [a_i \cdot 10^i]_\sim = [0]_\sim && \text{in}\mathbb{Z}_3 \\
\Leftrightarrow &\quad \sum_{i=0}^{n} [a_i]_\sim \cdot [10^i]_\sim = [0]_\sim && \text{in}\mathbb{Z}_3 \\
\Leftrightarrow &\quad \sum_{i=0}^{n} [a_i]_\sim \cdot [1]_\sim^i = [0]_\sim && \text{in}\mathbb{Z}_3 \\
\Leftrightarrow &\quad \sum_{i=0}^{n} a_i = [0]_\sim && \text{in}\mathbb{Z}_3 \\
\Leftrightarrow &\quad 3 \text{ teilt } \sum_{i=0}^{n} a_i
\end{aligned}$$

b) Analog ($[10]_\sim = [-1]_\sim$ in $\mathbb{Z}_{11}$)

0.4.3 Aufgabe 3

a) (Hier fehlen noch ein paar Angaben für die Menge der Einsen in den Klammern) Die Charakteristik eines Körpers $\mathbb{K}$ ist 0, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\underbrace{1 + ... + 1}_{n\text{-mal}} \neq 0$, 0,1 neutr. El.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit Char 0, also kann 0 nicht die Char von $\mathbb{K}$ sein.

Sei also $m \in \mathbb{N}$, die Char von $\mathbb{K}$
par Wir nehmen: m ist keine Primzahl
Wir wissen:

(i) (m-mal)$1 + ... + 1 = 0$

(ii) m ist die kleinste nat. Zahl mit dieser Eigenschaft

(iii) $\exists k, l \in \mathbb{N} : k > 1, l > 1$ und $m = k \cdot l$. $(k < m, l < m)$

Aus (i) ergibt sich $(1 + ... + 1) + (1 + ... + 1) + ... + (1 + ... + 1) = 0$ ($l \cdot k$-mal 1)
$\Leftrightarrow (1 + ... + 1) \cdot (1 + ... + 1) = 0$ $(l \cdot 1 \cdot k \cdot 1)$
Wir haben $x = 1 + ... + 1 \neq 0$ (l-mal) und $y = 1 + ... + 1 \neq 0$ (k-mal) gefunden mit $x \cdot y = 0$.
Dies ist ein Widerspruch zur Nullteilerfreiheit von $\mathbb{K}$. $\Rightarrow$ m muß Primzahl sein.

b) (Hier fehlen noch ein paar Angaben für die Menge der Einsen in den Klammern) Sei p eine Primzahl und p die Char von $\mathbb{K}$. Wir def.:

$$f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{K}, k \mapsto \begin{cases} \overline{0} & , k = 0 \\ 1 + ... + 1 & , k \in \{1, ..., p-1\} \end{cases}$$

Sei $k, k' \in \mathbb{F}_p, k + k' = r$ und $k \cdot k' = r'$ mit $r, r' \in \{0, ..., p-1\}$

$f(k)+f(k') = (\overline{1}+...+\overline{1})+(\overline{1}+...+\overline{1}) = (\overline{1}+...+\overline{1})+(\overline{1}+...+\overline{1}) = (\overline{1}+...+\overline{1}) = f(r) = f(k+k')$

Analog $f(k) \cdot f(k') = f(k \cdot k')$

0.4.4 Aufgabe 4

a)

(1) $\frac{z_1 - z_2 - 2}{z_1 + z_2 + 3i} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}(\frac{z_2}{z_3} + \frac{\overline{z_3}}{z_3}) = \frac{1}{7} + i \cdot 0$

(2) $\overline{z_1 + z_3 \cdot (z_3 - z_2)} = (i3 - 3\sqrt{3}) + i(12 + 9\sqrt{3})$

b)

(1) $z + \overline{z} = z \cdot \overline{z} \Leftrightarrow za = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a-1)^1 + b^2 = 1$

Kreislinie eines Kreises um (1,0) mit Radius 1.

(2) $Re(iz) = -b$, $0 < Re(iz) < 1$

Zeichnung...

(3) $|z - z_i| < 3 \Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 < 9$; $3 < |z| \Leftrightarrow 9 < a^2 + b^2$

Der Teil des Kreises um (0,2) mit Radius 3, der nicht im Inneren des Kreises um (0,0) mit Radius 3 liegt.