

L^2 -Theorie

Christian Schulz

14. Mai 2016

In diesem Papier, wird die Fortsetzung der Fouriertransformation auf L^2 erarbeitet.

Motivation: Für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ muss das Fouriertransformationsintegral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-iw \cdot t} dt$$

nicht existieren. Um eine Fouriertransformation für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zu definieren müssen wir anders vorgehen. Die Idee ist klassische Analysis. Wir nehmen zunächst eine dichte Menge X ($\emptyset \neq X \subset L^2(\mathbb{R}^n)$) auf der die Fouriertransformation definiert ist. Dann folgt mit dem Fortsetzungssatz für stetige Abbildungen die eindeutige Existenz auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definition

- (1) Das n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wird im folgenden als *Multi-Index* bezeichnet.
- (2) $|\alpha| = \sum \alpha_i$ wird als *Ordnung* bezeichnet.
- (3) Für $t \in \mathbb{R}^n$ sei $t^\alpha := \prod t_i^{\alpha_i}$.
- (4) $D^\alpha = \prod (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\alpha_i}$
- (5) $D_\alpha = i^{-|\alpha|} D^\alpha = \prod (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i})^{\alpha_i}$
- (6) $P(\xi) := \sum c_\alpha \xi^\alpha = \sum c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$
- (7) $P(D) := \sum c_\alpha D_\alpha$, $P(-D) := \sum (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha$
- (8) $e_t(x) := e^{it \cdot x} = e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \quad \forall t, x \in \mathbb{R}^n$
- (9) $dm_n(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dx$
- (10) $(\tau_x f)(y) := f(y - x) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$

Beispiel

In obiger Definition folgt: $\forall t, x \in \mathbb{R}^n : P(D)e_t = P(t)e_t$

Beweis

$$\begin{aligned} \text{Seien } t, x \in \mathbb{R}^n \text{ bel. } &\Rightarrow P(D)e_t = \sum c_\alpha D_\alpha e_t(x) \\ &= \sum c_\alpha \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} D^\alpha e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \\ &= \sum c_\alpha \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} i^{|\alpha|} t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} e_t(x) = \sum c_\alpha t^\alpha e_t(x) = P(t)e_t \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Beispiel

Der Ausdruck Fouriertransformation wird für die Abbildung benutzt, die f auf \hat{f} abbildet. Dabei sei angemerkt, dass gilt

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f e_{-t} dm_n = (f * e_t)(0)$$

Definition (Schnell fallende Funktionen)

Sei $\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha f)(x)| < \infty, N \in \mathbb{N}_0\}$
der Raum der schnell fallenden Funktionen ($|x|^2 = \sum x_i^2$).

Bemerkung: Mit anderen Worten gilt für alle $f \in \mathcal{S}$, dass $PD_\alpha f$ eine beschränkte Funktion auf \mathbb{R}^n ist und zwar für jedes Polynom P und jeden Multi-Index α .

Folgerung 0.1

\mathcal{S} ist ein Vektorraum.

Beweis

$$\begin{aligned} \text{Sei } \psi, \phi \in \mathcal{S} \text{ und } \delta &:= \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha \psi)(x)|, \tilde{\delta} := \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha \phi)(x)| \\ &\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \sup_{|\tilde{\alpha}| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_{\tilde{\alpha}}(\alpha\psi + \phi))(x)| \leq \\ &\alpha\delta + \tilde{\delta} \leq \max\{|\alpha|, 1\} \max\{\delta, \tilde{\delta}\} =: \gamma \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Beispiel

$$\phi(x) := e^{-x^2}, \phi \in \mathcal{S}.$$

Beweis

Es gilt $\phi'(x) = -2xe^{-x^2}$, $\phi''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 1)$, ... es folgt per Induktion, dass $\phi^{(n)}(x) = p(x) * e^{-x^2}$ (p Polynom) $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi^{(n)}(x) = 0$ gilt folgt, dass $\tilde{p}\phi^{(n)}$ beschränkt ist, wobei \tilde{p} ein bel. Polynom ist. \blacksquare

Satz 0.2

(1) \mathcal{S} ist ein Fréchet Raum.

(2) Sei P ein Polynom, $g \in \mathcal{S}$, und α ein Multi-Index. Dann sind folgende Abbildungen stetig und linear:

$$T_1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, f \mapsto Pf$$

$$T_2 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, f \mapsto gf$$

$$T_3 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, f \mapsto D_\alpha f$$

(3) Sei $f \in \mathcal{S}$ und P ein Polynom, dann gilt

$$(P(D)f)^\wedge = P\hat{f} \text{ und } (Pf)^\wedge = P(-D)\hat{f}.$$

(4) Die Fouriertransformation ist eine stetige Abbildung von \mathcal{S} in \mathcal{S} .

Beweis

- (1) Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathcal{S} . D.h. $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|f_m - f_n\| < \epsilon$
 $\forall n > m \geq n_0$. Für jedes Paar von Multi-Indizes α, β konvergiert die Funktion $x^\beta D^\alpha f_i(x)$ (gleichmäßig auf \mathbb{R}^n) gegen die beschränkte Funktion $g_{\alpha\beta}$ (für $i \rightarrow \infty$) \Rightarrow

$$g_{\alpha\beta} = x^\beta D^\alpha g_{00}(x)$$

und damit folgt $f_i \rightarrow g_{00} \Rightarrow \mathcal{S}$ ist vollständig.

- (2) Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann ist offensichtlich $D_\alpha f \in \mathcal{S}$, $Pf \in \mathcal{S}$ und $gf \in \mathcal{S}$. Die Stetigkeit der drei Abbildungen folgt aus dem *closed graph theorem*.
- (3) Sei $f \in \mathcal{S} \Rightarrow P(D)f \in \mathcal{S}$ und

$$(P(D)f) * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)[f * e_t]$$

Wenn man diese Funktionen nun im Ursprung des \mathbb{R}^n auswertet, liefert uns das den ersten Teil von (3). Nämlich:

$$(P(D)f)^\wedge(t) = P(t)\hat{f}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } \tilde{t} &:= (t_1 + \epsilon, \dots, t_n), t := (t_1, \dots, t_n), x \in \mathbb{R}^n \\ h(x) &:= e_{-\tilde{t}}(x) - e_{-t}(x) = e^{-i((t_1+\epsilon)x_1 + \dots + t_n x_n)} - e^{-i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \\ &= (e^{-i\epsilon x_1} - 1)e_{-t}(x) \end{aligned}$$

$$\text{Sei weiterhin } \gamma(x_1, \epsilon) := \frac{e^{-i\epsilon x_1} - 1}{i\epsilon x_1} = \frac{h(x)}{i\epsilon x_1 e_{-t}(x)}.$$

Betrachte

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma(x_1, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-i\epsilon x_1} - 1}{i\epsilon x_1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -e^{-i\epsilon x_1} = -1$$

Nun gilt:

$$\frac{\hat{f}(\tilde{t}) - \hat{f}(t)}{i\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{h(x)}{i\epsilon} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \frac{h(x)}{i\epsilon x_1 e_{-t}(x)} e_{-t}(x) dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \gamma(x_1, \epsilon) e_{-t}(x) dm_n$$

Da $x_1 f \in L^1$ folgt für $\epsilon \rightarrow 0$ mit dem Satz von der dominierenden Konvergenz

$$-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{f} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) e_{-t}(x) dm_n$$

und damit der zweite Teil der Behauptung für den Fall $P(x) = x_1$. Der allgemeine Fall folgt durch Iteration.

- (4) Sei $f \in \mathcal{S}$ und $g(x) = \underbrace{(-1)^{|\alpha|} x^\alpha}_{:= \tilde{P}(x)} f(x) \Rightarrow g \in \mathcal{S}$. Nun folgt mit (3), dass

$$\widehat{g} = D_\alpha \widehat{f}, \text{ denn}$$

$$\widehat{g} = \widehat{\tilde{P}f} = \tilde{P}(-D)\widehat{f} = D_\alpha \widehat{f}$$

und $P\widehat{g} = (P(D)g)\widehat{}$, welche eine beschränkte Funktion ist, da $P(D)g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Das beweist, dass $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. Wenn $f_i \rightarrow f$ in \mathcal{S} dann folgt $f_i \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Schließlich folgt nun direkt $\widehat{f_i} \rightarrow \widehat{f} \forall t \in \mathbb{R}^n$. Die Stetigkeit der Abbildung $f \rightarrow \widehat{f}$ von \mathcal{S} nach \mathcal{S} , folgt wieder aus dem closed graph theorem.

Satz 0.3

$$(1) (\tau_x f)\widehat{} = e_{-x} \widehat{f}$$

$$(2) \text{ Sei } \lambda > 0 \text{ und } h(x) = f(x/\lambda) \Rightarrow \widehat{h}(t) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda t)$$

Satz 0.4 (Das Inversionstheorem)

$$(1) g \in \mathcal{S} \Rightarrow g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

(2) Die Fouriertransformation ist eine stetige, lineare, 1-zu-1 Abbildung von \mathcal{S} auf \mathcal{S} , dessen Inverse ebenfalls stetig ist.

$$(3) f \in L^1(\mathbb{R}^n), \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n), f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} e_x dm_n \quad (x \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow f(x) = f_0(x) \text{ fast überall } (x \in \mathbb{R}^n)$$

Beweis

(1) Zunächst gilt die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dm_n$$

Sei nun $g \in \mathcal{S}, \phi \in \mathcal{S}, \lambda > 0$ und $f(x) = \phi(x/\lambda)$. Dann gilt

$$\Gamma(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} g(\frac{t}{\lambda}) \widehat{\phi}(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\frac{t}{\lambda}) \phi(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n \widehat{g}(\lambda t) \phi(t) dm_n(t)$$

Nun führt man eine Substitution durch mit $\gamma(t) = \frac{t}{\lambda}$. Es gilt $\gamma(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ und $\det(\gamma'(t)) = \frac{1}{\lambda^n}$

$$\Rightarrow \Gamma(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm_n(y)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \widehat{\phi}(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm_n(y)$$

Nun konvergiert für $\lambda \rightarrow \infty$, $g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \rightarrow g(0)$ und $\phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \rightarrow \phi(0)$ beschränkt.
Satz von der dominierenden Konvergenz \Rightarrow

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(t) dm_n(t) = \phi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) dm_n(y)$$

Sei nun $\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$. Dann gilt die Behauptung für den Fall $x = 0$,
denn

$$g(0) = g(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(t) dm_n(t)}_{=1} = \underbrace{\phi(0)}_{=1} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) dm_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \underbrace{e_0}_{=1} dm_n(y).$$

Der allgemeine Fall folgt direkt, denn

$$g(x) = (\tau_{-x}g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_{-x}g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n$$

- (2) Sei vorübergehend $\phi g = \widehat{g}$. Die Inversionsformel (1) liefert uns schon, dass ϕ eine 1-zu-1 Abbildung ist, da offensichtlich $\widehat{g} = 0 \Rightarrow g = 0$. Es zeigt sich weiterhin, dass $\phi^2 g = \check{g}$, wobei $\check{g} = g(-x)$. Denn

$$\phi^2 g = \phi \widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_{-t} dm_n = g(-t)$$

Nun folgt $\phi^4 g = g$ und damit, dass ϕ \mathcal{S} komplett auf \mathcal{S} abbildet. Die Stetigkeit von ϕ wurde schon in Satz 1.2.4 bewiesen. Da $\phi^{-1} = \phi^3$ gilt, folgt auch die Stetigkeit von ϕ^{-1} .

- (3) Es gilt zunächst für $g \in \mathcal{S}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0 \widehat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} e_x dm_n \widehat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dm_n$$

Also:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0 \widehat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dm_n$$

Aus (2) folgt, dass mit \widehat{g} alle schnell fallenden Funktionen abgedeckt werden. Da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_0 - f) \phi dm_n = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

und (durch eine Approximation (Übung)) damit gilt diese Identität für jede stetige Funktion ϕ mit kompakten Träger. Es folgt fast überall $f_0 - f = 0$.

Satz 0.5 (Plancherel Theorem)

Es existiert eine Isometrie $\Psi : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, welche eindeutig festgelegt ist durch

$$\Psi f = \widehat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

Bemerkung: Man beachte, dass die Gleichheit $\Psi f = \widehat{f}$ erweitert wird von \mathcal{S} zu $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, da \mathcal{S} sowohl dicht in L^2 als auch in L^1 liegt. Das liefert uns die Übereinstimmung: das Gebiet von Ψ ist L^2 . \widehat{f} wurde schon definiert für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\Psi f = \widehat{f}$, falls beide Definitionen anwendbar sind. Daher erweitert Ψ die Fouriertransformation von $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ zu $L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese Erweiterung nennt man immer noch Fouriertransformation, und die Notation \widehat{f} wird beibehalten.

Beweis

Es sei $f, g \in \mathcal{S}$, dann liefert uns das Inversionstheorem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} \, dm_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) \, dm_n(x) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) e^{ix \cdot t} \, dm_n(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) \, dm_n(t) \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) e^{ix \cdot t} \, dm_n(x) \end{aligned}$$

Das letzte innere Integral ist das komplex Konjugierte von $\widehat{g}(t)$.

Das liefert uns die Parseval Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} \, dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \overline{\widehat{g}} \, dm_n \quad (f, g \in \mathcal{S})$$

Wir spezialisieren nun $g = f$, dann folgt

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \quad f \in \mathcal{S}$$

Nun folgt, da \mathcal{S} dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, dass die Abbildung $f \rightarrow \widehat{f}$ eine Isometrie (relativ zur Metric in L^2) von $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ist. Mit dem Satz über die eindeutige Fortsetzung folgt, dass $\psi : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ eine lineare Isometrie von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist.

Appendix:

Satz 0.6 (Exkurs: Closed Graph Theorem)

Es gelte:

- (1) X und Y sind F-Räume
- (2) $\Psi : X \rightarrow Y$ sei linear

(3) $G = \{(x, \Psi x) | x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$

Dann ist Ψ stetig.

Satz 0.7 (Exkurs: Eindeutige stetige Fortsetzung)

Sei X, Y metrische Räume und A sei dicht in X , $f : A \rightarrow Y$ sei gleichmäßig stetig. Dann gilt:

- (1) f hat eine eindeutige stetige Fortsetzung $F : X \rightarrow Y$
- (2) f ist Isometrie $\Rightarrow F$ ist Isometrie und $F(X)$ ist abgeschlossen in Y .