

## 6. Differenzierbarkeitseigenschaften reellwertiger Funktionen

### Definition

- (1) Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ;  $S[a, b] := \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$  heißt **Verbindungsstrecke** von  $a$  und  $b$
- (2)  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konvex** :  $\iff$  aus  $a, b \in M$  folgt stets:  $S[a, b] \subseteq M$
- (3) Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ .  $S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] := \bigcup_{j=1}^k S[x^{(j-1)}, x^{(j)}]$  heißt Streckenzug durch  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$  (in dieser Reihenfolge!)
- (4) Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $G$  heißt **Gebiet**:  $\iff$   $G$  ist offen und aus  $a, b \in G$  folgt:  $\exists x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in G : x^{(0)} = a, x^{(k)} = b$  und  $S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] \subseteq G$ .

**Vereinbarung:** Ab jetzt in diesem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

### Satz 6.1 (Der Mittelwertsatz)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar auf  $D$ , es seien  $a, b \in D$  und  $S[a, b] \subseteq D$ . Dann:

$$\exists \xi \in S[a, b] : f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

### Beweis

Sei  $g(t) := a + t \cdot (b - a)$  für  $t \in [0, 1]$ .  $g([0, 1]) = S[a, b] \subseteq D$ .  $\Phi(t) := f(g(t))$  ( $t \in [0, 1]$ ) 5.4  $\implies$   $\Phi$  ist differenzierbar auf  $[0, 1]$  und  $\Phi'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$ .  
 $f(b) - f(a) = \Phi(1) - \Phi(0) \stackrel{!}{=} MWS, AI] \Phi'(\eta) = f'(\underbrace{a + \eta(b - a)}_{=: S}) \cdot (b - a), \eta \in [0, 1]$  ■

### Folgerungen 6.2

Sei  $D$  ein **Gebiet** und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar auf  $D$ .

- (1) Ist  $f'(x) = 0 \forall x \in D \implies f$  ist auf  $D$  konstant.
- (2) Ist  $f'(x) = g'(x) \forall x \in D \implies \exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$  auf  $D$ .

### Beweis

(2) folgt aus (1). (1) Seien  $a, b \in D$ . Z.z.:  $f(a) = f(b)$ .  $\exists x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in D, x^{(0)} = a, x^{(k)} = b : S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] \subseteq D \forall j \in \{1, \dots, k\}$  ex. nach 6.1 ein  $\xi_j \in S[x^{(j-1)}, x^{(j)}] : f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) = \underbrace{f'(\xi_j) \cdot (x^{(j)} - x^{(j-1)})}_0 = 0 \implies f(x^{(j)}) = f(x^{(j-1)}) \implies f(a) = f(x^{(0)}) = f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = \dots = f(x^{(k)}) = f(b)$ . ■

**Satz 6.3 (Bedingung für Lipschitzstetigkeit)**

$D$  sei konvex und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar auf  $D$ . Weiter sei  $f'$  auf  $D$  beschränkt. Dann ist  $f$  auf  $D$  Lipschitzstetig.

**Beweis**

$\exists L \geq 0 : \|f'(x)\| \leq L \forall x \in D$ . Seien  $u, v \in D$ .  $D$  konvex  $\implies S[u, v] \subseteq D$ . 6.1  $\implies \exists \xi \in S[u, v] : f(u) - f(v) = f'(\xi) \cdot (u - v) \implies |f(u) - f(v)| = |f'(\xi) \cdot (u - v)| \stackrel{CSU}{\leq} \|f'(\xi)\| \|u - v\| \leq L \|u - v\|$ . ■

**Satz 6.4 (Linearität)**

Sei  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion.

$\Phi$  ist linear  $\iff \Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  und  $\Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Beweis**

“ $\implies$ ”: “ $\Leftarrow$ ”: O.B.d.A.:  $m = 1$ . Z.z.:  $\exists a \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = a \cdot x \forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $a := \Phi'(0)\Phi(0) = \Phi(2 \cdot 0) = 2 \cdot \Phi(0) \implies \Phi(0) = 0$ .  $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R} : \Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x) \stackrel{5.4}{\implies} \alpha \Phi'(\alpha x) = \alpha \Phi'(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \Phi'(x) = \Phi'(\alpha x) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \neq 0$ .  $\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0, f \in C^1} \Phi'(x) = \Phi'(0) = a \forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $g(x) := (\Phi(x) - ax)^2$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ),  $g(0) = (\Phi(0) - a \cdot 0)^2 = 0$ . 5.4  $\implies g$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}^n$  und  $g'(x) = 2(\Phi(x) - ax)(\Phi'(x) - a) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ . 6.2(1)  $\implies g(x) = g(0) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \implies \Phi(x) = a \cdot x \forall x \in \mathbb{R}^n$ . ■

**Die Richtungsableitung** Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Ist  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $\|a\| = 1$ , so heißt  $a$  eine **Richtung** (oder ein **Richtungsvektor**).

Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  eine Richtung.  $D$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ . Gerade durch  $x_0$  mit Richtung  $a : \{x_0 + ta : t \in \mathbb{R}\}$ .  $\|x_0 + ta - x_0\| = \|ta\| = |t|$ . Also:  $x_0 + ta \in D$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $g(t) := f(x_0 + ta)$  ( $t \in (-\delta, \delta)$ ).

$f$  heißt **in  $x_0$  in Richtung  $a$  db**, gdw. der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

existiert und  $\in \mathbb{R}$  ist. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

die **Richtungsableitung von  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $a$** .

**Beispiele:**

- (1)  $f$  ist in  $x_0$  partiell db nach  $x_j \iff f$  ist in  $x_0$  db in Richtung  $e_j$ . In diesem Fall gilt:  
 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0)$ .

(2)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$x_0 = (0, 0)$ . Sei  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  eine Richtung, also  $a_1^2 + a_2^2 = 1$ ;  $\frac{f(ta)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^2 a_1 a_2}{t^2 a_1^2 + t^2 a_2^2} = \frac{a_1 a_2}{t}$ . D.h.:  $\frac{\partial f}{\partial a}(0, 0)$  ex.  $\iff a_1 a_2 = 0 \iff a \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ .

In diesem Fall:  $\frac{\partial f}{\partial a}(0, 0) = 0$ .

(3)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$x_0 = (0, 0)$ . Sei  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$  eine Richtung.  $\frac{f(ta)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^3 a_1 a_2^2}{t^2 a_1^2 + t^4 a_2^2} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + t^2 a_2^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & , \text{ falls } a_1 = 0 \\ \frac{a_2^2}{a_1} & , \text{ falls } a_1 \neq 0 \end{cases}$

D.h.  $\frac{\partial f}{\partial a}(0, 0)$  existiert für *jede* Richtung  $a \in \mathbb{R}^2$ . Z.B.:  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) : \frac{\partial f}{\partial a}(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \forall x > 0 \implies f$  ist in  $(0, 0)$  *nicht* stetig.

### Satz 6.5 (Richtungsableitungen)

Sei  $x_0 \in D$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  eine Richtung,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

(1)  $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$  existiert  $\iff \frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0)$  existiert. In diesem Fall ist:

$$\frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$$

(2)  $f$  sei in  $x_0$  db. Dann:

(i)  $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$  existiert und

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \text{grad } f(x_0).$$

(ii) Sei  $\text{grad } f(x_0) \neq 0$  und  $a_0 := \|\text{grad } f(x_0)\|^{-1} \cdot \text{grad } f(x_0)$ . Dann:

$$\frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \|\text{grad } f(x_0)\|.$$

Weiter gilt:  $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$ , falls  $a \neq a_0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ , falls  $a \neq -a_0$ .

### Beweis

(1)  $\frac{(f(x_0+t(-a))-f(x_0))}{t} = -\frac{(f(x_0+(-t)a)-f(x_0))}{-t} \implies \text{Beh.}$

(2) (i)  $g(t) := f(x_0 + ta)$  ( $|t|$  hinreichend klein). Aus Satz 5.4 folgt:  $g$  ist db in  $t = 0$  und  $g'(0) = f'(x_0) \cdot a \implies \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$  existiert und ist  $= g'(0) = \text{grad } f(x_0) \cdot a$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \right| &\stackrel{(i)}{=} |a \cdot \text{grad } f(x_0)| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|a\| \cdot \|\text{grad } f(x_0)\| = \|\text{grad } f(x_0)\| = \frac{1}{\|\text{grad } f(x_0)\|} \text{grad } f(x_0) \cdot \\
 &\text{grad } f(x_0) = a_0 \cdot \text{grad } f(x_0) \stackrel{(i)}{=} \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \\
 &\implies \frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) \stackrel{(1)}{=} -\frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \|\text{grad } f(x_0)\| \\
 \text{Sei } \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \stackrel{(i),(ii)}{\implies} a \cdot \text{grad } f(x_0) = \|\text{grad } f(x_0)\| \implies a \cdot a_0 = 1 \implies \\
 \|a - a_0\|^2 &= (a - a_0)(a + a_0) = a \cdot a - 2a \cdot a_0 + a_0 \cdot a_0 = 1 - 2 + 1 = 0 \implies a = a_0. \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Der Satz von Taylor** Im Folgenden sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zunächst „genügend oft partiell db“,  $x_0 \in D$  und  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ . Wir führen folgenden Formalismus ein.

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \text{ („Nabla“); } \nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad } f; \quad \nabla f(x_0) := \text{grad } f(x_0)$$

$$(h \cdot \nabla) := h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}; \quad (h \cdot \nabla)f := h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = h \cdot \text{grad } f; \quad (h \cdot \nabla)f(x_0) := h \cdot \text{grad } f(x_0)$$

$$(h \cdot \nabla)^{(0)}f(x_0) := f(x_0). \text{ Für } k \in \mathbb{N} : (h \cdot \nabla)^{(k)} := \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k$$

$$(h \cdot \nabla)^{(2)}f(x_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$$

$$(h \cdot \nabla)^{(3)}f(x_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n h_j h_k h_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x_0)$$

### Beispiel

$$(n = 2) : h = (h_1, h_2).$$

$$(h \cdot \nabla)^{(0)}f(x_0) = f(x_0), \quad (h \cdot \nabla)^{(1)}f(x_0) = h \cdot \text{grad } f(x_0) = h_1 f_x(x_0) + h_2 f_y(x_0).$$

$$(h \cdot \nabla)^{(2)}f(x_0) = \left( h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (x_0) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) + h_2 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0).$$

### Satz 6.6 (Der Satz von Taylor)

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in D$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  und  $S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$ . Dann:

$$f(x_0 + h) = \sum_{j=0}^k \frac{(h \cdot \nabla)^{(j)}f(x_0)}{j!} + \frac{(h \cdot \nabla)^{(k+1)}f(\xi)}{(k+1)!}$$

wobei  $\xi \in S[x_0, x_0 + h]$

### Beweis

$$\Phi(t) := f(x_0 + th) \text{ für } t \in [0, 1]. \quad 5.4 \implies \Phi \in C^{k+1}[0, 1], \quad \Phi'(t) = f'(x_0 + th) * h = (h * \nabla)f(x_0 + th)$$

$$\text{Induktiv: } \Phi^{(j)}(t) = (h \cdot \nabla)^{(j)}f(x_0 + th) \quad (j = 0, \dots, k+1, t \in [0, 1]). \quad \Phi(0) = f(x_0), \Phi(1) = f(x_0 + h)$$

$$h); \Phi^{(j)}(0) = (h \cdot \nabla)^{(j)} f(x_0). \text{ Analysis 1 (22.2) } \implies \Phi(1) = \sum_{j=0}^k \frac{\Phi^{(j)}(0) f(x_0)}{j!} + \frac{\Phi^{(k+1)} f(\eta)}{(k+1)!},$$

wobei  $\eta \in [0, 1] \implies f(x_0 + h) = \sum_{j=1}^k \frac{(h \cdot \nabla)^{(j)} f(x_0)}{j!} + \frac{(h \cdot \nabla)^{(k+1)} f(x_0 + \eta h)}{(k+1)!}, \xi := x_0 + \eta h \blacksquare$

**Spezialfall 6.7** Sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R}), x_0 \in D, h \in \mathbb{R}^n, S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$ . Dann:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0 + \eta h)$$

