

1. Satz von Arzelà-Ascoli

In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ und \mathcal{F} sei eine Familie (Menge) von Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition

\mathcal{F} heißt auf A

- (1) **punktweise beschränkt** : $\iff \forall x \in A \exists c = c(x) \geq 0 :$

$$|f(x)| \leq c \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

- (2) **gleichmäßig beschränkt** : $\iff \exists \gamma \geq 0 :$

$$|f(x)| \leq \gamma \quad \forall x \in A \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

- (3) **gleichstetig** : $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in A \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ und } \forall f \in \mathcal{F}$$

Satz (Satz von Arzelà-Ascoli)

A sei beschränkt und abgeschlossen, \mathcal{F} sei punktweise beschränkt und gleichstetig auf A und (f_n) sei eine Folge in \mathcal{F} .

Dann enthält (f_n) eine Teilfolge, welche auf A gleichmäßig konvergiert.

Beweis

Analysis II, 2.3 \implies es existiert eine abzählbare Teilmenge $B = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq A$ mit $\overline{B} = A$.

$(f_n(x_1))$ ist beschränkt $\xrightarrow{\text{Analysis I}}$ (f_n) enthält eine Teilfolge $(f_{1,n})$ mit $(f_{1,n}(x_1))$ konvergent.
 $(f_{1,n}(x_2))$ ist beschränkt $\xrightarrow{\text{Analysis I}}$ $(f_{1,n})$ enthält eine Teilfolge $(f_{2,n})$ mit $(f_{2,n}(x_2))$ konvergent.

Wir erhalten Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} (f_{1,n}) &= (f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \dots) \\ (f_{2,n}) &= (f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \dots) \\ (f_{3,n}) &= (f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$(f_{k+1,n})$ ist eine Teilfolge von $(f_{k,n})$ und $(f_{k,n}(x_k))_{n=1}^\infty$ konvergiert ($k \in \mathbb{N}$).

$g_j := f_{j,j}$ ($j \in \mathbb{N}$); (g_j) ist eine Teilfolge von (f_n) .

$(g_k, g_{k+1}, g_{k+2}, \dots)$ ist eine Teilfolge von $(f_{k,n}) \implies (g_j(x_k))_{j=1}^\infty$ ist konvergent ($k = 1, 2, \dots$).

1. Satz von Arzelà-Ascoli

Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen:

$$(*) \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} : |g_j(x) - g_\nu(x)| < 3\varepsilon \quad \forall j, \nu \geq j_0 \quad \forall x \in A$$

(woraus die gleichmäßige Konvergenz von (g_j) folgt)

\mathcal{F} gleichstetig \implies

$$(i) \quad \exists \delta > 0 : |g_j(x) - g_j(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in A \text{ und } |x - y| < \delta \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_{\frac{\delta}{2}}(x)$. Analysis II, 2.3 $\implies \exists y_1, \dots, y_p \in A$:

$$(ii) \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^p U_{\frac{\delta}{2}}(y_j)$$

$\overline{B} = A \implies \forall q \in \{1, \dots, p\} \exists z_q \in B : z_q \in U_{\frac{\delta}{2}}(y_q) \quad (g_j)(z_q))_{j=1}^\infty$ ist konvergent für alle $q \in \{1, \dots, p\} \implies \exists j_0 \in \mathbb{N}$:

$$(iii) \quad |g_j(z_q) - g_\nu(z_q)| < \varepsilon \quad \forall j, \nu \geq j_0 \quad (q = 1, \dots, p) \quad \blacksquare$$

Seien $j, \nu \geq j_0$ und $x \in A \xrightarrow{(ii)} \exists q \in \{1, \dots, p\} : x \in U_{\frac{\delta}{2}}(y_q) \implies |x - z_q| = |x - y_q + y_q - z_q| \leq |x - y_q| + |y_q - z_q| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \xrightarrow{(i)} |g_j(x) - g_j(z_q)| < \varepsilon, |g_\nu(x) - g_\nu(z_q)| < \varepsilon \quad (iv)$

$$\begin{aligned} \implies |g_j(x) - g_\nu(x)| &= |g_j(x) - g_j(z_q) + g_j(z_q) - g_\nu(z_q) + g_\nu(z_q) - g_\nu(x)| \\ &\leq \underbrace{|g_j(x) - g_j(z_q)|}_{< \varepsilon \quad (iv)} + \underbrace{|g_j(z_q) - g_\nu(z_q)|}_{< \varepsilon \quad (iii)} + \underbrace{|g_\nu(z_q) - g_\nu(x)|}_{< \varepsilon \quad (iv)} \\ &< 3\varepsilon \implies (*) \end{aligned}$$