2 Projektive Varietäten

§8 Der projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$

Erinnerung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(k) =& \{\text{ Geraden in } k^{n+1} \text{ durch } 0\}\\ =& (k^{n+1} \setminus \{0\})\big/\sim \text{ mit } (x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) :\Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times : \lambda x_i = y_i \text{ für } i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

Schreibweise $(x_0 : \dots : x_n) := [(x_0, \dots, x_n)]_\sim$ ("homogene Koordinaten")

Beispiele
$\underline{n=0}$: $\mathbb{P}^0(k)$ ist ein Punkt.

$\underline{n=1}$: $\mathbb{P}^1(k) \longrightarrow k \cup \{\infty\}$ ist bijektiv.
$(x_0 : x_1) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1}{x_0} : & x_0 \neq 0 \\ \infty : & x_0 = 0 \end{cases}$ Also: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1\big/\{\pm 1\}$

$\underline{k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}}$:
$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} \setminus \{0\})\big/\sim \overset{(k=\mathbb{R})}{=} S^n\big/\pm 1$
$\Rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ ist mit der Quotiententopologie ein kompakter topologischer Raum.
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist nicht orientierbar ("Kreuzhaube").
$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}\big/2\mathbb{Z}$

$\underline{k = \mathbb{F}_q}$: $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ hat $\underbrace{\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}}_{=1+q+q^1+\dots+q^n}$ Punkte.

Bemerkung 2.8.1
Für $n \geq 1$ und $i = 0, \dots, n$ sei

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) | x_i \neq 0\}$$

(a) $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$
(b)

$$\rho_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & k^n \\ (x_0 : \dots : x_n) & \longmapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) \end{array}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.
Umkehrabbildung:

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n)$$

(c) $\varphi_i : \mathbb{P}^n(k) \setminus U_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k), (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n)$ ist bijektiv.

Folgerung 2.8.2
$\mathbb{P}^n(k)$ ist disjunkte Vereinigung von $\mathbb{A}^n(k)$ und $\mathbb{P}^{n-1}(k)$, oder auch von $\mathbb{A}^n(k), \mathbb{A}^{n-1}(k), \dots, \mathbb{A}^0(k)$.

Beobachtung

(a) Ist $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen vom Grad $d \geq 0$, so gilt für $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ und $\lambda \in k$ stets $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$.

(b) Jedes homogene Polynom in $k[X_0, \dots, X_n]$ hat eine wohldefinierte Nullstellenmenge in $\mathbb{P}^n(k)$.

Definition 2.8.3
Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt ***projektive Varietät***, wenn es eine Menge $\mathcal{F} \subset k[X_0, \dots, X_n]$ von homogenen Polynomen gibt, sodass

$$V = V(\mathcal{F}) := \{x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) | f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\}.$$

Beispiele 2.8.4

(a) $H_i = V(X_i) = \mathbb{P}^n(k) \setminus U_i (\overset{\varphi_i}{=} \mathbb{P}^{n-1}(k))$ ist eine projektive Varietät ("Hyperebene").

(b) $V = V(X_0 X_2 - X_1^2) \subset \mathbb{P}^2(k)$ ist eine projektive Varietät.
$V \cap U_0 = V(\frac{x_2}{x_0} - (\frac{x_1}{x_0})^2)$ Parabel in $\mathbb{A}^2(k)$
$V \cap U_1 = V(\frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_1} - 1)$ Hyperbel in $\mathbb{A}^2(k)$

Definition + Bemerkung 2.8.5

(a) $S = k[X_0, \dots, X_n]$ ist ***graduierter Ring*** (genau: graduierte k-Algebra), das heißt:

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d, \ \ S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$$

(hier: $S_d = \{f \in k[X_0, \dots, X_n] \mid f \text{ homogen vom Grad } d\}, S_0 = k$)

(b) Ein Ideal $I \subseteq S$ heißt ***homogen***, wenn I von homogenen Elementen erzeugt wird. Äquivalent: $I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap S_d)$

(c) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen sind wieder homogen.

Beweis (c) Seien I_1, I_2 homogene Ideale mit homogenen Erzeugern $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$ beziehungsweise $(g_j)_{j \in \mathcal{J}}$, dann folgt, dass $I_1 + I_2$ von den f_i und g_j erzeugt wird. Genauso $I_1 \cdot I_2$.

$$\bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap I_2) \cap S_d) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap S_d) \cap (I_2 \cap S_d))$$
$$= \left(\bigoplus_{d=0}^{\infty} I_1 \cap S_d \right) \cap \left(\bigoplus_{d=0}^{\infty} I_2 \cap S_d \right) = I_1 \cap I_2$$

$\Rightarrow I_1 \cap I_2$ ist homogen.
Sei $I := I_1, x \in \sqrt{I}, x = \sum_{d=0}^{n} x_d, x_d \in S_d$. Zu zeigen: $x_d \in \sqrt{I}$.
Dann gibt es $m \geq 0$ mit $x^m \in I$: $x^m = x_n^m +$ Terme kleineren Grades
$\Rightarrow x_n^m \in I$ da die Summe aller Monome gleichen Grades auch immer in I liegen $\Rightarrow x_n \in \sqrt{I}$.
Mit Induktion folgt die Behauptung $(x - x_n = \sum_{d=0}^{n-1} x_d \in \sqrt{I} \Rightarrow x_{n-1} \in I)$ $\square$

Definition + Bemerkung 2.8.6

(a) Für $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ sei $I(V)$ das Ideal in $k[X_0, \dots, X_n]$, das von allen homogenen Polynomen f erzeugt wird, für die $f(x) = 0 \; \forall x \in V$ gilt. $I(V)$ heißt ***Verschwindungsideal*** von V. $I(V)$ ist Radikalideal.

(b) Für eine Menge $F \subset k[X_0, \dots, X_n]$ von homogenen Polynomen sei $V(F) = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \;\; \forall f \in F\}$ die zugehörige projektive Varietät.
Für ein homogenes Ideal I sei $V(I) = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0$ für alle homogenen $f \in I\}$.
Dann ist $V(F) = V((F)) = V(\sqrt{(F)})$ wobei (F) das von F erzeugte Ideal sei.

Beweis (a) $\sqrt{I(V)}$ ist nach 2.8.5 c) auch ein homogenes Ideal, wird also von homogenen Elementen f_i erzeugt.
$\Rightarrow f_i^m(x) = 0 \; \forall x \in V$ und ein $m \geq 0 \Rightarrow f_i(x) = 0 \Rightarrow f_i \in I(V) \Rightarrow \sqrt{I(V)} = I(V)$ □

Proposition 2.8.7

(a) Die projektiven Varietäten bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Diese heißt die ***Zariski-Topologie*** auf $\mathbb{P}^n(k)$.

(b) Eine projektive Varietät V ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ ein Primideal ist.

(c) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Beweis Wie im affinen Fall. □

Definition + Bemerkung 2.8.8

(a) Für eine nicht leere projektive Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt
$\tilde{V} := \{x = (x_0, \dots, x_n) \mid (x_0 : \dots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$ der ***affine Kegel*** über V.

(b) $\tilde{V}$ ist affine Varietät. Genauer $V = V(I)$ für ein homogenes Ideal I in $k[X_0, \dots, X_n]$, so ist $\tilde{V} = V(I)$ als affine Varietät in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.

(c) $I(\tilde{V}) = I(V)$

Beweis (b) Klar ist $(x_0 : \dots : x_n) \in V \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Da $V \neq \emptyset$, enthält das Ideal I, für das $V = V(I)$ ist, kein Element aus $k \setminus \{0\}$. Für jedes homogene Element $f \in I$ ist daher $deg(f) > 0 \Rightarrow f(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow \tilde{V} = V(I)$.
(c) Für jedes homogene Polynom $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ gilt $f \in I(V) \Leftrightarrow f \in I(\tilde{V})$. Es genügt zu zeigen, dass $I(\tilde{V})$ ein homogenes Ideal ist.
Sei also $f \in I(\tilde{V})$ mit $f = \sum_{i=0}^d f_i$, f_i homogen vom Grad i. Sei $x = (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V}$. Dann ist $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda x \in \tilde{V} \; \forall \lambda \in k$, also $0 = f(\lambda x) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(x) \; \forall \lambda \in k$. Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit $|k|$ Zeilen. k ist aber algebraisch abgeschlossen, hat also unendlich viele Elemente $\Rightarrow f_i(x) = 0 \; \forall i \in \{0, \dots, d\} \Rightarrow f_i \in I(\tilde{V})$. □

Proposition 2.8.9 (Projektiver Nullstellensatz)
Sei k algebraisch abgeschlossen, $n \geq 0$. Für jedes von $(X_0, \dots, X_n)$ verschiedene Radikalideal $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ gilt $I(\underbrace{V(I)}_{\subset \mathbb{P}^n(k)}) = \sqrt{I}$.

Beweis Für gegebenes Radikalideal I sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die zugehörige projektive Varietät.
Ist $I = k[X_0, \dots, X_n]$, so ist $V(I) = \emptyset$ und $I(V(I)) = k[X_0, \dots, X_n] = \sqrt{k[X_0, \dots, X_n]}$.
Ist $I \subsetneq k[X_0, \dots, X_n]$ homogen, so ist mit der Voraussetzng $I \neq (X_0, ..., X_n)$ $I \subsetneq (X_0, \cdots, X_n)$, und so ist die affine Nullstellenmenge von I in $\mathbb{A}^n(k)$ echte Obermenge von $\{(0, \dots, 0)\}$, enthält also einen Punkt $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. Dann ist $(x_0 : \dots : x_n) \in V$, also $V \neq \emptyset$. Nach 2.8.8 b) ist $\tilde{V}$ auch die durch I bestimmte affine Varietät in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$. Nach 2.8.8 c) ist $I(\tilde{V}) = I(V)$.
Nach Satz 3 (Hilbertscher Nullstellensatz) ist $I(\tilde{V}) = \sqrt{I}$. □

Definition + Bemerkung 2.8.10
Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietät mit homogenem Verschwindungsideal $I(V)$. Dann heißt $k[V] := k[X_0, \ldots, X_n]/I(V)$ der ***homogene Koordinatenring*** von V. $k[V]$ ist graduierte k-Algebra. Dabei ist $k[V]_d := k[X_0, \ldots, X_n]_d/(I(V) \cap k[X_0, \ldots, X_n]_d)$.

§9 Affine und projektive Varietäten

Es ist $U_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\} = \mathbb{P}^n(k) \setminus V(X_i)$ offen.
$\rho_i : U_i \to \mathbb{A}^n(k)$ $(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i})$ ist bijektiv.

Proposition 2.9.1
Die Bijektionen $\rho_i : U_i \to \mathbb{A}^n(k)$, $i = 0, \ldots, n$ sind Homöomorphismen bzgl. der jeweiligen Zariski-Topologie.

Beweis *Œ* $\quad i = 0, \quad \rho := \rho_0$
(i) ρ ist stetig: Genügt zu zeigen: Für jedes $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ist $\rho^{-1}(D(f))$ offen in U_0.
Äquivalent dazu: $\rho^{-1}(V(f))$ ist abgeschlossen in U_0. Dies folgt aus:

Bemerkung + Definition 2.9.2
Für $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ist $\rho^{-1}(V(f)) = U_0 \cap V(F)$.
Dabei sei $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$, f_i homogen vom Grad i, $f_d \neq 0$ und $F := \sum_{i=0}^{d} f_i \cdot X_0^{d-i} \in k[X_0, \ldots, X_n]$.
F ist homogen vom Grad d und heißt die ***Homogenisierung*** von f.

Beweis $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V(f) \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{d} f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$
$\Leftrightarrow F(1 : x_1 : \cdots : x_n) = 0 \Leftrightarrow \rho^{-1}(x) \in V(F)$. □

Damit ist gezeigt, dass ρ stetig ist.
(ii) ρ^{-1} ist stetig: Wie in (i) genügt zu zeigen: Für jedes homogene $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ist $\rho(V(F) \cap U_0)$ abgeschlossen in $\mathbb{A}^n(k)$.
Beachte: Die $D(F), F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$ (Bew. wie in Bemerkung 1.2.7 (ii)). □

Bemerkung + Definition 2.9.3
$\rho(V(F) \cap U_0) = V(f)$, wobei mit $y_i := \frac{x_i}{x_0}, i = 1, \ldots, n$, $f \in k[Y_1, \ldots, Y_n]$ definiert sei durch $f(Y_1, \ldots, Y_n) = F(1, \frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0})$.
f heißt ***Dehomogenisierung*** von F bzgl. x_0.

Beweis $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in V(F) \cap U_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$ und $F(x) = 0 \Leftrightarrow F(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) = 0 \Leftrightarrow f(\rho(x)) = 0 \Leftrightarrow \rho(x) \in V(f)$ □

Beispiele 2.9.4
$F(X_0, X_1, X_2) = X_1^2 - X_0X_2, \quad f_{X_0}(Y_1, Y_2) = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = Y_1^2 - Y_2, \quad f_{X_1}(Y_0, Y_2) = 1 - Y_0Y_2$
Frage: Wie sieht F aus, wenn $V(F) \cap U_0 = \emptyset$?
Antwort: z.B. $F = X_0^d, \sqrt{(F)} = (X_0)$.

Bemerkung 2.9.5
(a) Sei $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ die Homogenisierung. Dann gilt für die Dehomogenisierung $\tilde{f}$ von F bzgl. X_0: $\tilde{f} = f$.

(b) Sei $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen, $f \in k[Y_1, \dots, Y_n]$ die Dehomogenisierung bzgl. X_0, $\tilde{F}$ die Homogenisierung von f. Dann gilt: $F = \tilde{F} \cdot X_0^d$ für ein $d \geq 0$.

Beweis (a) Sei $f = \sum_{i=0}^d f_i,\ f_d \neq 0 \Rightarrow F = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} \Rightarrow \tilde{f} = \sum_{i=0}^d f_i \cdot 1 = f$.

(b) Schreibe $F = X_0^d \cdot \tilde{F}$ mit $X_0 \nmid \tilde{F}$. Dann hat die Dehomogenisierung von $\tilde{F}$ bzgl. X_0 denselben Grad wie $\tilde{F} \Rightarrow$ ihre Homogenisierung ist $\tilde{F}$. □

Definition + Bemerkung 2.9.6
Eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt ***quasiprojektive Varietät***, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
(i) W ist offen in einer projektiven Varietät.
(ii) Es gibt eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{P}^n(k)$ und eine abgeschlossene Teilmenge $V \subset \mathbb{P}^n(k)$, so dass $W = U \cap V$.

Beispiele 2.9.7
$\mathbb{P}^2 \setminus \{(0:0:1)\}$ ist quasiprojektiv, aber weder projektiv noch affin (was zu zeigen wäre).

Proposition 2.9.8
Betrachte $\mathbb{A}^n(k)$ über $\rho_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n(k)$ als Teilmenge von $\mathbb{P}^n(k)$. Für ein Radikalideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ sei $I^* \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ das von den Homogenisierungen aller $f \in I$ erzeugte Ideal. Dann ist $V_p(I^*) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ der Zariski-Abschluss von $V_a(I) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$.

Beweis (i) "$V_a(I) \subseteq V_p(I^*)$": Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_a(I)$ und sei $f \in I$, $F \in I^*$ die Homogenisierung von f.
Dann ist $F(\rho_0^{-1}(x)) = F(1 : x_1 : \dots : x_n) = f(x_1, \dots, x_n) = 0$, weil $f \in I = I(V(I))$.
(ii) Sei $V \in \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen, mit $V_a(I) \subseteq V$.
Zu zeigen: $V(I^*) \subseteq V$.
Sei dazu $V = V(\mathcal{J})$ für ein homogenes Ideal $\mathcal{J}$. Zu zeigen also: $\mathcal{J} \subseteq I^*$.
Sei $F \in \mathcal{J}$ homogen, $f = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ die Dehomogenisierung von F bzgl. x_0.
Sei $y = (y_1, \dots, y_n) \in V_a(I)$.
Dann ist $f(y) = F(1, y_1, \dots, y_n) = 0$, weil $\rho_0^{-1}(y) \in V(\mathcal{J})$. Somit folgt $f \in I$.
Sei $\tilde{F}$ die Homogenisierung von f, also $\tilde{F} \in I^*$, dann folgt mit 2.9.5: $F = \tilde{F} \cdot X_0^d$ für ein $d \geq 0 \Rightarrow F \in I^*$. □

Bemerkung 2.9.9
Sei W eine quasiprojektive Varietät in $\mathbb{P}^n(k)$.
(a) Die Zariski-Topologie auf W besitzt eine Basis aus affinen Varietäten.
(b) W ist quasikompakt (d.h. jede offene Überdeckung von W besitzt eine endliche Teilüberdeckung)

Beweis (a) Sei $W = \bigcup_{i=0}^n (W \cap U_i)$ mit $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n(k)$.
Also Œ $W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, W ist offen in einer affinen Varietät, nämlich dem Zariski-Abschluss V_i von $W \cap U_i$ in U_i. Nach 1.2.7(ii) bilden die $D(f),\ f \in k[V_i]$ eine Basis der Zariski-Topologie auf $W \cap U_i$. Jedes $D(f)$ ist aber isomorph zu einer affinen Varietät mittels

$$\rho : \begin{array}{ccc} D(f) & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n+1}(k) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}) \end{array}$$

für $f \in k[X_1, \dots, X_n]$. Bild von ρ ist $V(Yf - 1)$.
(b) Sei $(O_j)_{j \in J}$ offene Überdeckung von W. Nach dem Beweis von (a) wird jedes O_j überdeckt

von offenen Teilen der Form $D(f)$ für geeignete $f \in k[\overline{O_j \cap U_i}]$.
Also Œ $O_j = D(f_j)$ für ein $f_j \in k[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$ (im Folgenden bedeutet $\hat{X}_i$: "die i-te Variable streichen").
Sei $F_j \in k[X_0, \dots, X_n]$ die Homogenisierung von f_j. Dann ist

$$W \subseteq \bigcup_{j \in J} D(F_j) = \mathbb{P}^n(k) - \bigcap_{j \in J} V(F_j) = \mathbb{P}^n(k) - V(\underbrace{\sum_{j \in J}(F_j)}_{=:I})$$

I ist endlich erzeugtes Ideal, z.B. von $F_1, \dots, F_r \Rightarrow W \subseteq \bigcup_{j=1}^r D(F_j) \Rightarrow W \subseteq \bigcup_{j=1}^r D(f_j)$ □

§10 Reguläre Funktionen

Definition 2.10.1
Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasiprojektive Varietät. Eine Abbildung $f : W \to k$ heißt ***reguläre Funktion*** auf W, wenn $f|_{W \cap U_i}$ reguläre Funktion ist für $i = 0, \dots, n$.

Bemerkung 2.10.2
Sind $G, H \in k[X_0, ..., X_n]$ homogen vom gleichen Grad, so ist $\frac{G(x)}{H(x)}$ wohlbestimmte Funktion auf $\mathbb{P}^n(k) \setminus V(H)$.

Bemerkung 2.10.3
Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät. Dann gilt:
$f : V \to k$ ist regulär genau dann, wenn für alle $p \in V$ eine Umgebung U_p von p existiert, sowie homogene Polynome G_p, H_p vom gleichen Grad, so dass $f(x) = \frac{G_p(x)}{H_p(x)}$ für alle $x \in U_p$.

Beweis "⇒" Sei $p \in U_i$, $g_p, h_p \in k[V_i]$ $(V_i = \overline{V \cap U_i})$ wie in 1.6.2 (d.h. es gibt ein $U_p \subseteq U$, $g_p, h_p \in k[V_i]$, $h_p(x) \neq 0$ $\forall x \in U_p :$ $f(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)}$).
Seien $\tilde{g}_p, \tilde{h}_p$ Repräsentanten von g_p bzw. h_p in $k[X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_n]$ und G_p, H_p Homogenisierungen.
Ist $deg(G_p) \neq deg(H_p)$, so ersetze G_p durch $G_p \cdot X_i^{deg(H_p) - deg(G_p)}$ (falls $deg(H_p) > deg(G_p)$).
$\forall x \in U_p$ ist dann

$$f(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} = \frac{G_p(x_0 : ... : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : ... : x_n)}{H_p(x_0 : ... : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : ... : x_n)}$$

"⇐" Dehomogenisieren ...

Bemerkung 2.10.4
Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasiprojektive Varietät. Für jede offene Teilmenge U von V sei $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_V(U) = \{f : U \to k \mid f \text{ regulär}\}$.
(a) $\mathcal{O}(U)$ ist k-Algebra.
(b) $\mathcal{O}_V$ ist eine Garbe von k-Algebren auf V.

Lemma 1
Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät, $f \in k[V]$ homogen, $l \in \mathcal{O}_V(D(f))$. Dann besitzt $D(f)$ eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in J}$ mit $U_i = D(h_i)$ für homogene $h_i \in k[V]$, so dass

$$l(x) = \frac{g_i(x)}{h_i(x)} \quad \forall x \in U_i$$

$g_i \in k[V]$ ebenfalls homogen mit $deg(g_i) = deg(h_i)$

Beweis Eine offene Überdeckung $(U_i')_{i\in J'}$ mit $l(x) = \frac{G_i(x)}{H_i(x)}$ $\forall x \in U_i',\ G_i, H_i$ vom gleichen Grad, existiert nach Bem 10.3. Seien g_i' und h_i' deren Restklassen in $k[V]$. (Beachte: $D(h_i')$ kann größer als U_i' sein)
Nach dem Beweis von 9.9 a) wird U_i' überdeckt von offenen Mengen der Form $D(\tilde{h_i}')$ für homogene $\tilde{h_i'} \in k[V]$ (da die $D(\tilde{h_i'})$ eine Basis der Zariski-Topologie bilden), also

$$\begin{aligned} &D(\tilde{h_i'}) \subseteq U_i' \subseteq D(h_i') \\ \Rightarrow &V(h_i') \subseteq V(\tilde{h_i'}), \text{ also } \tilde{h_i'} \in \sqrt{(h_i')} \quad (HNS) \\ \Rightarrow &(\tilde{h_i'})^m = ah_i' \text{ für ein } a \in k[V] \text{ und ein } m \geq 0 \\ \Rightarrow &\text{ Auf } D(\tilde{h_i'}) \text{ ist } l = \frac{g_i'}{h_i'} = \frac{g_i' a}{h_i' a} = \frac{g_i' a}{(\tilde{h_i'})^m} \end{aligned}$$

Da $D(\tilde{h_i'}) = D((\tilde{h_i'})^m)$, ist mit $h_i := (\tilde{h_i'})^m$ die Behauptung erfüllt. □

Satz 5
Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät.
(a) Ist V zusammenhängend, so ist $\mathcal{O}(V) \cong k$.
(b) Sei $k[V]$ der homogene Koordinatenring von V, $f \in k[V]$ homogen. Dann ist $\mathcal{O}_V(D(f)) \cong k[V]_{(f)} := \{\frac{g}{f^r} : g \in k[V] \text{ homogen}, deg(g) = r \cdot deg(f)\}/\sim$ ("homogene Lokalisierung" von $k[V]$ nach den Potenzen von f).

Beweis (b) $k[V]_{(f)}$ ist k-Algebra $\surd$
Sonderfälle: $f = 0$ $\surd$
$\deg(f) = 0$: $D(f) = V \overset{a)}{\Rightarrow} \mathcal{O}(D(f)) \cong k$
$k[V]_{(f)} = \{\frac{g}{f^r} : \deg(g) = 0\} \cong k$.
Sei also $\deg(f) \geq 1$:
Sei $\alpha : k[V]_{(f)} \to \mathcal{O}(D(f))$, $\frac{g}{f^r} \mapsto \frac{G}{F^r}$ ($G, F \in k[X_0, ..., X_n]$ Repräsentanten) ist wohldefinierter, injektiver k-Algebra-Homomorphismus (Kern ist 0).
surjektiv: Sei $l \in \mathcal{O}(D(f))$
Nach dem Lemma gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in J}$ von $D(f)$ und $g_i, h_i \in k[V]$ homogen vom gleichen Grad mit

$$l(x) = \frac{g_i}{h_i}(x) \text{ für alle } x \in U_i$$

und $U_i = D(h_i)\ \ \forall i \in J$

Beh.: Œ $g_i h_j = g_j h_i$ in $k[V]$ für alle i, j.
Denn: Auf $U_i \cap U_j$ gilt $\frac{g_i}{h_i} = \frac{g_j}{h_j}$, deshalb ist $g_i h_j = g_j h_i$
Nach dem Lemma ist $V \setminus (U_i \cap U_j) = V(h_i) \cup V(h_j) \Rightarrow h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0$ auf ganz V.
Setze $\tilde{g}_i = g_i h_i, \tilde{h}_i = h_i^2 \Rightarrow \frac{\tilde{g}_i}{\tilde{h}_i} = \frac{g_i}{h_i} = l$ auf U_i und $\tilde{g}_i \tilde{h}_j - \tilde{g}_j \tilde{h}_i = 0$ auf V
$\Rightarrow \tilde{g}_i \tilde{h}_j = \tilde{g}_j \tilde{h}_i$ in $k[V]$.

Nach Bem 9.9 und dem Lemma überdecken endlich viele der $D(h_i)$ ganz $D(f)$, also Œ

$$\begin{aligned}
D(f) &= \bigcup_{i=1}^{r} D(h_i)\\
\Rightarrow V(f) &= \bigcap_{i=1}^{r} V(h_i) = V(h_1, ..., h_r)\\
\Rightarrow f &\in I(V(h_1, ..., h_r)) \overset{HNS}{=} \sqrt{(h_1, ..., h_r)}\\
\Rightarrow f^m &= \sum_{i=1}^{r} a_i h_i \text{ für geeignetes } m \geq 0, a_i \in k[V] \text{ homogen.}
\end{aligned}$$

Setze $g := \sum_{i=1}^{r} a_i g_i$. Dann ist g homogen und deg(g)=deg(f). Für $j = 1, ..., r$ gilt

$$f^m g_j = \sum_{i=1}^{r} (a_i h_i) g_j \overset{Beh.}{=} \sum_{i=1}^{r} a_i g_i h_j = g h_j$$

$\Rightarrow$ auf U_j ist $\frac{g}{f^m} = \frac{g_j}{h_j} = l$
(a) Œ V irreduzibel (Die Konstante auf jeder Komponente muss auf den Durchschnitten gleich sein)
Sei $V_i := V \cap U_i$ (wobei $U_i = D(X_i) = \{(x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\}$). Œ $V_i \neq \emptyset$
Sei $f \in \mathcal{O}(V)$. Dann ist $f|_{V_i} \in \mathcal{O}(V_i) \overset{b)}{=} k[V]_{(X_i)}$ $(i = 0, ..., n)$.
(Beachte: Beim Beweis des (b)-Teils wurde der (a)-Teil nur für den Fall, dass $\deg f = 0$ ist, verwendet. Hier ist aber $f = X_i$, also $\deg f = 1$).
Da V irreduzibel ist, folgt mit 2.8.7 b), dass $k[V]$ nullteilerfrei ist.
Sei also $L :=$Quot($k[V]$). Insbes. $f_i := f|_{V_i} \in L$.
Schreibe $f_i = \frac{g_i}{X_i^{d_i}}$ für ein homogenes $g_i \in k[V]$ vom Grad d_i.
$f_i = f_j$ auf $U_i \cap U_j \Rightarrow f_i = f_j = f$ in L.
<u>Beh. 1</u>: f ist ganz über $k[V]$.
Dann ist $f^m + \sum_{j=1}^{m-1} a_j f^j = 0$ für geeignetes $m \geq 0$, $a_j \in k[V]$.
Multipliziere mit $X_i^{d_i m} \Rightarrow \underbrace{g_i^m}_{\deg = d_i m} + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \underbrace{g_i^j \cdot X^{d_i(m-j)}}_{\deg = d_i m} = 0$
$\Rightarrow$ Œ a_j homogen vom Grad 0 $\Rightarrow a_j \in k$ und damit auch $f \in k$.
<u>Beweis von Beh. 1</u>:
Genügt (Alg II): $k[V][f]$ ist in einem endlich erzeugten $k[V]$-Modul enthalten.
<u>Beh. 2</u>: $k[V][f] \subseteq \frac{1}{X_0^d} k[V]$, wobei $d = \sum_{i=0}^{n} d_i$
<u>Beweis von Beh. 2</u>: Zu zeigen: $X_0^d \cdot f^j \in k[V]$ für jedes $j \geq 0$. Dies folgt aus
<u>Beh. 3</u>: $k[V]_d \cdot f^j \subseteq k[V]_d$ für alle $j \geq 0$.
<u>Beweis von Beh. 3</u>:
$k[V]_d$ wird erzeugt von den Restklassen der Monome $X_0^{j_0} \cdot ... \cdot X_n^{j_n}$ mit $\sum_{i=0}^{n} j_i = d$ (und $j_i \geq 0$)
$\Rightarrow \exists i$ mit $d_i \leq j_i$
$\Rightarrow X_0^{j_0} \cdot ... \cdot X_n^{j_n} \cdot f = X_0^{j_0} \cdot ... \cdot X_i^{j_i - d_i} \cdot ... \cdot X_n^{j_n} \cdot g_i \in k[V]_d$ □

§11 Morphismen

Definition + Bemerkung 2.11.1
Seien $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ und $W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ quasiprojektive Varietäten.

(a) Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt ***Morphismus*** wenn es zu jedem $x \in V$ eine Umgebung U_x und homogene Polynome $f_0^{(x)}, \dots, f_m^{(x)} \in k[X_o, \dots, X_n]$, alle vom gleichen Grad, sodass $f(y) = \left(f_0^{(x)}(y) : \dots : f_m^{(x)}(y)\right)$ für jedes $y \in U_x$.

(b) Die Morphismen $V \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ entsprechen bijektiv den regulären Funktionen auf V.

(c) Morphismen sind stetig.

(d) Die quasiprojektiven Varietäten über k bilden mit den Morphismen aus a.) eine Kategorie $\underline{Var^\circ(k)}$.

Beweis (a) -

(b) Sei $f : V \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ ein Morphismus. Sei $x \in V, U_x, f_0^{(x)}, f_1^{(x)}$ wie in a.), das heißt: $f(y) = \left(f_0^{(x)} : f_1^{(x)}\right)$ für alle $y \in U_x$ (wobei $\mathbb{A}^1(k)$ mit U_0 identifiziert sei). Dann ist $\frac{f_1^{(x)}(y)}{f_0^{(x)}(y)} \in k$ für alle $y \in U_x$. $\Rightarrow f \in \mathcal{O}(V)$. Die Umkehrung folgt aus Bemerkung 2.10.3.

(c) Wie für affine Varietäten, siehe 1.5.3. □

Beispiele

1.) Die Abbildung $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1)$ ist ein Morphismus $\mathbb{P}^2(k) \setminus \{(0:0:1)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$, der sich nicht stetig auf ganz $\mathbb{P}^2(k)$ fortsetzen lässt.

$$\text{Für } (\lambda : \lambda : \mu), \lambda \neq 0, \text{ ist } f(\lambda : \lambda : \mu) = (1:1)$$
$$\text{aber für } (\lambda : -\lambda : \mu), \lambda \neq 0, \text{ ist } f(\lambda : -\lambda : \mu) = (1:-1)$$

$\{(1:1)\}$ und $\{(1:-1)\}$ sind abgeschlossen, also müssen ihre Urbilder auch abgeschlossen sein. Der Abschluss von $\{(x_0 : x_1 : x_2) \subseteq \mathbb{P}^2(k) : x_0 = x_1\}$ ist aber in $V(X_0 - X_1)$ enthalten, denn $V(X_0 - X_1)$ ist irreduzibel und es gilt:

$$\begin{aligned} V(X_0 - X_1) &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \subseteq \mathbb{P}^2(k) : x_0 = x_1\} \\ &= \{(0:0:1)\} \cup \{(\lambda : \lambda : \mu) \in \mathbb{P}^2(k) : \lambda \in k^\times, \mu \in k\} \end{aligned}$$

Das Urbild von $\{1,1\}$ ist $V(X_0 - X_1) \setminus \{(0:0:1)\}$, also nicht abgeschlossen.

2.) Sei $E := V(X_0X_2^2 - X_1^3 + X_1X_0^2)$ (elliptische Kurve $y^2 = x^3 - x$).

$$f : \begin{array}{ccc} E \setminus \{(0:0:1)\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (x_0 : x_1) \end{array}$$

lässt sich zu einem Morphismus $E \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ fortsetzen.
Sei $(x_0 : x_1 : x_2) \in E \setminus \{(0:0:1), (1:0:0)\}$ mit $x_2^2 + x_1x_0 \neq 0$ Dann ist auch $x_1 \neq 0$ und somit

$$\begin{aligned} f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : x_1) &\overset{x_2^2 + x_1x_0 \neq 0}{=} (x_0(x_2^2 + x_1x_0) : x_1(x_2^2 + x_1x_0)) \\ &= (x_1^3 : x_1(x_2^2 + x_1x_0)) \overset{x_1 \neq 0}{=} (x_1^2 : x_2^2 + x_1x_0) \end{aligned}$$

Seien

$$\begin{aligned} U &= E \setminus \{(0:0:1)\} \\ U' &= E \setminus \{(1:0:0)\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow E = U \cup U'$.

$$f : U \longrightarrow \mathbb{P}^1, (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1) \text{ ist ein Morphismus.}$$
$$f' : U' \longrightarrow \mathbb{P}^1, (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1^2 : x_2^2 + x_1 x_0) \text{ ist ein Morphismus.}$$

Auf $U \cap U'$ gilt $f(y) = f'(y)$.

Folgerung 2.11.2
Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ von quasiprojektiven Varietäten ist genau dann ein Morphismus, wenn f stetig ist und für jedes offene $U \subseteq W$ und jedes $g \in \mathcal{O}_W(U)$ gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$$

Beweis Folgt aus 2.11.1 b). Alternativ: Beweis von Proposition 1.6.6 anpassen.
"$\Rightarrow$" f ist ein Morphismus $\Rightarrow$ f ist stetig. Mit 2.11.1.b) folgt: $g : U \to k$ ist ein Morphismus $(U \subseteq W) \Rightarrow g \circ f$ ist als Komposition von Morphismen auch ein Morphismus, also folgt mit 2.11.1.b), dass $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$
"$\Leftarrow$" Angenommen, f ist kein Morphismus.
Sei $f = (f_1, ..., f_m)$. Dann existiert ein f_i, dass sich auf U_x nicht als Polynom darstellen lässt.
Sei g_i die Projektion auf diese Komponente.
Dann ist $g \circ f = f_i$ kein Morphismus, also $g \circ f \notin \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$ □

Folgerung 2.11.3
Sind V, W affine Varietäten, so ist eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ genau dann ein Morphismus von affinen Varietäten, wenn sie ein Morphismus im Sinne von Definition 2.11.1 a) ist.

Eleganter: Die Homöomorphismen $\mathbb{A}^n(k) \xrightarrow{\sim} U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ $(n \geq 0)$ induzieren einen volltreuen Funktor $\underline{Aff(k)} \longrightarrow \underline{Var^\circ(k)}$.

Proposition 2.11.4
Für jedes $n \geq 1$ ist $Aut(\mathbb{P}^n(k)) \simeq \mathrm{PGL}_{n+1}(k) = \mathrm{GL}_{n+1}(k)/\{\lambda \cdot I_{n+1} : \lambda \in k^\times\}$

Beweis Für $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ sei

$\sigma_A : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$ die Abbildung $\sigma_A(x_0 : \cdots : x_n) = (y_0 : \cdots : y_n)$ mit $A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

σ_A ist wohldefiniert, da $A(\lambda x) = \lambda A x$.
σ_A ist Morphismus, denn y_i ist lineares Polynom in den x_j
σ_A ist Automorphismus, da $\sigma_A \circ \sigma_{A^{-1}} = id$
Es ist $\sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_{A \cdot B} \Rightarrow \sigma : \mathrm{GL}_{n+1}(k) \to Aut(\mathbb{P}^n(k)), A \mapsto \sigma_A$ ist Gruppenhomomorphismus.
Noch zu zeigen:

1. $\{\lambda \cdot I_{n+1} : \lambda \in k^\times\} = \ker \sigma$
2. σ ist surjektiv.

Beweis von 1:

„$\subseteq$": klar.

„$\supseteq$“: Sei $\sigma_A = id$. Dann gibt es für $i = 0, \ldots, n$ ein $\lambda_i \in k^\times$ mit

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \in k^\times$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_n = \lambda$$

□

Bemerkung 2.11.5
Sei $f : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^m(k)$ ein Morphismus, dann gibt es homogene Polynome $f_0, \ldots, f_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$, so dass $f(x) = (f_0(x) : \cdots : f_m(x))$ für alle $x \in \mathbb{P}^n(k)$.

Beweis Übungsblatt 8, Aufgabe 3 □

Beweis (von Beh. 2) Sei $f : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$ Automorphismus, dann gibt es also nach 2.11.5 homogene Polynome $f_0, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ vom gleichen Grad d mit $f(x) = (f_0(x) : \cdots : f_n(x))$. Genauso gibt es homogene Polynome $g_0, \ldots, g_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ vom gleichen Grad e mit $f^{-1}(x) = (g_0(x) : \cdots : g_n(x))$.
Es ist $(f_0(f^{-1}(x)) : \cdots : f_n(f^{-1}(x))) = (x_0 : \cdots : x_n)$ für jedes $x \in \mathbb{P}^n(k)$.
$\Rightarrow f_i \circ f^{-1} = X_i \cdot h$ für ein homogenes Polynom h vom Grad $d \cdot e - 1$. h kann keine Nullstelle haben, denn $f_i \circ f^{-1}$ ist auf ganz $\mathbb{P}^n(k)$ definiert.
$\Rightarrow h \in k^\times \Rightarrow d \cdot e = 1 \Rightarrow d = 1$ und $e = 1$
$\Rightarrow f_i = \sum_{j=0}^m a_{ij} X_j$ für geeignete $a_{ij} \in k$.
$\Rightarrow f = \sigma_A$ mit $A = (a_{ij})$. □

Beispiele
Seien $n = 1, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k), x = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1(k)$
Dann ist $\sigma_A(x) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1)$
In U_1 ist also

$$\sigma_A(x) = \frac{ax_0 + bx_1}{cx_0 + dx_1} = \frac{a\frac{x_0}{x_1} + b}{c\frac{x_0}{x_1} + d}$$

Erinnerung / Definition + Bemerkung 2.11.6
Sei $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät.

(a) Eine ***rationale Funktion*** auf V ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f), wo $U \subset V$ offen und dicht und $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit der Äquivalenzrelation (U, f) (U', f') $:\Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$.

(b) Ist V irreduzibel, so bilden die rationalen Funktionen auf V einen Körper $k(V)$, den ***Funktionenkörper*** von V.

(c) Ist V irreduzibel, so ist $k(V) \simeq Quot(k[U])$ für jede dichte, affine und offene Teilmenge $U \subset V$.

(d) Ist W eine weitere quasi-projektive Varietät, so ist eine ***rationale Abbildung*** $f : V \dashrightarrow W$ eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U), wo $U \subset V$ offen, dicht und $f_U : U \to W$ Morphismus und $(U, f_U) \sim (U', f'_U) :\Leftrightarrow f_U|_{U\cap U'} = f_{U'}|_{U\cap U'}$.

(e) Erinnerung: Eine rationale Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ heißt ***dominant***, wenn $f_U(U)$ dicht in W ist, für einen (jeden) Repräsentanten (U, f_U) von f.

(f) Die Zuordnung $V \mapsto k(V)$ ist eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{\begin{array}{ll} & \text{irred. quasi-proj. Varietäten} \\ + & \text{dom. rationale Abb.}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} & \text{endl. erzeugte Körpererweiterungen } K/k \\ + & k\text{-Algebra-hom.}\end{array}\right\}$$

§12 Graßmann-Varietäten

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $1 \leq d \leq n$ natürliche Zahlen.

Definition + Bemerkung 2.12.1
Sei V ein n-dimensionaler k-Vektorraum.

(a) $G(d, n)(V) := \{U \subseteq V : U \text{ ist Untervektorraum von } V, \dim(U) = d\}$

(b) $G(d, n) := G(d, n)(k^n)$

(c) Es gibt eine Bijektion $G(d, n)(V) \to G(d, n)$.

Beispiele
$d = 1$: $G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$

Bemerkung 2.12.2
Es gibt "natürliche" Bijektionen

$$G(d, n) \to G(n - d, n)$$

für alle $1 \leq d \leq n - 1$.

Beweis Sei V^* der Dualraum zu V. Dann ist die Bijektion gegeben durch

$$\begin{aligned} G(d, n)(V) &\to G(n - d, n)(V^*) \\ U &\mapsto \{l \in V^* : U \subseteq \mathrm{Kern}(l)\} \\ \bigcap_{l \in U^*} \mathrm{Kern}(l) &\leftarrow U^* \end{aligned}$$ □

Bemerkung + Definition 2.12.3
Sei $\mathcal{F}_n(k) = \{((x_1 : ... : x_n), (y_1, ..., y_n)) \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \times k^n :$

$(y_1 : ... : y_n) = (x_1 : \ldots : x_n)$ oder $(y_1, ..., y_n) = (0, ..., 0)\}$

<u>Beh</u>. $\mathcal{F}_n(k)$ ist quasiprojektive Varietät, als Untervarietät von

$$\begin{gathered} \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N \\ ((x_1 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_n)) \mapsto (x_1 y_0 : x_1 y_1 : \cdots : x_n y_n) \end{gathered}$$

mit $N = n(n+1)$ und $x_iy_k : x_jy_k = x_iy_l : x_jy_l$
Denn: $\mathcal{F}_n(k) = V(x_iy_j - x_jy_i, 1 \leq i \leq j)$
Sei $pr : \mathcal{F}_n(k) \to \mathbb{P}^{n-1}(k)$ die Projektion auf die erste Komponente.
pr ist ein surjektiver Morphismus.
Für $x := (x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$ ist

$$pr^{-1} = \{((x_1 : \cdots : x_n)(y_1, \cdots, y_n)) \in \mathbb{P}^{n-1} \times k^n : y_i = \lambda x_i \text{ für ein } \lambda \in k \text{ und alle } i = 1, \cdots, n\}$$

$\mathcal{F}_n(k)$ heißt ***tautologisches Bündel***

Für die folgende Proposition, sei zunächst folgende
Erinnerung: Ist $e_1, \cdots, e_n$ Basis von v, so ist $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$, $1 \leq i_1 \leq \cdots < i_j \leq n$ Basis von $\bigwedge^d V$. (zwei e_{i_j} vertauschen dreht das Vorzeichen, zwei gleiche e_{i_j} gibt deshalb 0)

Proposition 2.12.4
$G(d,n)(V)$ "ist" quasiprojektive Varietät.
Genauer: Sei $\bigwedge^d V$ die d-te äußere Potenz von V und sei

$$\psi := \psi_{d,n} : \begin{array}{ccc} G(d,n)(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^d V) \\ U & \longmapsto & [u_1 \wedge \cdots \wedge u_d] \end{array}$$

wobei $u_1, \cdots, u_d$ eine Basis von U ist. Dann gilt:
(a) ψ ist wohldefiniert.
(b) ψ ist injektiv
(c) Bild(ψ) ist Zariski-abgeschlossen in $\mathbb{P}(\bigwedge^d V) = \mathbb{P}^{N-1}(k)$, $N = \dim(\bigwedge^d V) = \begin{pmatrix} n \\ d \end{pmatrix}$

Beweis (a) Sei $v_1, \cdots, v_n$ eine weitere Basis von U.
Dann gibt es ein $A \in \mathrm{GL}_d(k)$ mit $A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
$\Rightarrow v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \sum_{i=1}^d a_{1i}u_i \wedge \cdots \wedge \sum_{i=1}^d a_{di}u_i =$
$(\sum_{\sigma=S_d} (-1)^{sign(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{d\sigma(d)}) \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_d = \det A \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$
(b) Sei $u_i, ..., u_d$ eine Basis von U
Zu zeigen: U ist durch $[u_1 \wedge ... \wedge u_d]$ eindeutig bestimmt.
Dies folgt aus der Behauptung:

$$U = \{v \in V : v \wedge (u_1 \wedge ... \wedge u_d) = 0\}$$

Beweis der Beh.: $v \wedge (u_1 \wedge ... \wedge u_d) = 0$
$\Leftrightarrow v, u_1, ..., u_d$ sind linear abhängig
$\Leftrightarrow v \in < u_1, ..., u_d >= U$
(c) Wir brauchen homogene Gleichungen, die in allen Punkten in Bild(ψ) erfüllt werden.
Beoobachtung:

$$\text{Bild}(\psi) = \{[\omega] : \omega \in \bigwedge^d V \text{ und } \omega = u_1 \wedge \cdots \wedge u_d \text{ für lin. unabh. Vektoren } u_1, \ldots, u_d \text{ in } V\}$$

(ω ist "total zerlegbar")

Für $\omega \in \bigwedge^d V$ sei

$$\varphi_\omega : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^{d+1} V \\ v & \longmapsto & \omega \wedge v \end{array}$$

und $L_\omega = (l_{ij}(\omega))$ ("Plücker Koordinaten") die Darstellungsmatrix von φ_ω bezüglich der Basen $e_1, \dots, e_n$ und $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{d+1}} : 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n\}$.
Die Abbildung

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \bigwedge^d V & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(V, \bigwedge^{d+1} V) \\ \omega & \longmapsto & \varphi_\omega \end{array}$$

ist linear. Dabei sind die $l_{ij}(\omega)$ linear in ω, das heißt

$$l_{ij} : \begin{array}{ccc} \bigwedge^d V & \longrightarrow & k \\ \omega & \longmapsto & l_{ij}(\omega) \end{array}$$

ist eine lineare Abbildung.

Behauptung

$[\omega] \in \mathrm{Bild}(\psi) \Leftrightarrow \det(l_{ij}(\omega))_{\substack{i\in\mathcal{I}\\ j\in\mathcal{J}}} = 0$ für alle $(n-d+1)$-Minoren $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ von L_ω

Diese Determinaten sind homogene Polynome vom Grad $n-d+1$ in den Linearformen l_{ij}. Also ist

$$\mathrm{Bild}(\psi) = V((\det(l_{ij})_{\substack{i\in\mathcal{I}\\ j\in\mathcal{J}}}) : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \text{ ist } (n-d+1)\text{-Minor })$$

das heißt $\mathrm{Bild}(\psi)$ ist abgeschlossen.

Beweis (der Behauptung)

$$\begin{aligned} &\det(l_{ij})_{\substack{i\in\mathcal{I}\\ j\in\mathcal{J}}} = 0 \text{ für alle } (n-d+1)\text{-Minoren} \\ \Leftrightarrow\, &\mathrm{Rg}(\varphi_\omega) \leq n-d \\ \Leftrightarrow\, &\dim(\mathrm{Kern}(\varphi_\omega)) \geq d \end{aligned}$$

Die Behauptung lautet also:

Behauptung (')

ω total zerlegbar $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Kern}(\varphi_\omega)) \geq d$

Behauptung (")

a) $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi_\omega)) \leq d$
b) $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi_\omega)) = d \Leftrightarrow \omega$ total zerlegbar
c) Für $v \neq 0$: $v \in \mathrm{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \bigwedge^{d-1} V$ und $\omega = v \wedge \omega'$

Beweis (c) ŒE $v = e_n$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1\leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \\ \Rightarrow 0 &= \omega \wedge v = \sum_{1\leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_n \\ \Leftrightarrow \lambda_{\underline{i}} &= 0 \text{ für alle } \underline{i} = (i_1, \dots, i_d) \text{ mit } i_d \neq n \\ \Rightarrow \omega &= \left(\sum_{1\leq i_1 < \dots < i_{d-1} \leq n} \lambda_{i_1,\dots,i_{d-1},n} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{d-1}} \right) \wedge e_n =: \omega' \wedge e_n \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" $\surd$

(a) Aus (c) folgt mit Induktion über m: Sind $v_1, \ldots, v_m \in \text{Kern}(\varphi_\omega)$ linear unabhängig, so gibt es $\omega \in \bigwedge^{d-m} V$ mit $\omega = \omega_m \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \Rightarrow m \leq d$

(b) "$\Rightarrow$" Sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von $\text{Kern}(\varphi_\omega)$
$\overset{Bew.a)}{\Rightarrow} \omega = \lambda \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ für ein $\lambda \in k^\times$
"$\Leftarrow$" Sei $\omega = u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$

$$\begin{aligned} v \in \text{Kern}(\varphi_\omega) &\Leftrightarrow v, u_1, \ldots, u_d \text{ linear abhängig} \\ &\Leftrightarrow v \in < u_1, \ldots, u_d > \\ &\Rightarrow \text{Kern}(\varphi_\omega) = < u_1, ..., u_d > \\ &\quad \text{mit } \dim \text{Kern}(\varphi_\omega) = d \end{aligned}$$

□

§13 Varietäten

Seien $V_1,\ V_2$ quasiprojektive Varietäten, $U_i \subseteq V_i$ offen $(i = 1, 2)$, $\varphi : U_1 \to U_2$ ein Isomorphismus.
Sei $V := {(V_1 \dot\cup V_2)}/_{\sim}$, wobei für $x \in V_1$ und $y \in V_2$ gelte

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \in U_1 \text{ und } y = \varphi(x) \in U_2$$

V ist ein topologischer Raum mit der Quotiententopologie. Für $U \subseteq V$ offen sei

$$\mathcal{O}_V(U) := \{f : U \to k \ \mid \ \forall x \in U \ \exists U_x \text{ offen mit } U_x \subseteq V_1 \text{ oder } U_x \subseteq V_2 \text{ und } f\mid_{U_x} \text{ ist regulär}\}$$

d.h. $f\mid_{U_x} \in \mathcal{O}_{V_1}(U_x)$, bzw. $\mathcal{O}_{V_2}(U_x)$.
Ist $x \in U_1$ (oder $x \in U_2$), so ist Œ $\quad U_x \subseteq U_1$ und $\varphi(U_x) \subseteq U_2$ ebenfalls offene Umgebung von x in V.
dann ist $f \in \mathcal{O}_{V_2}(\varphi(U_x)) \Leftrightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{V_1}(U_x)$

Bemerkung 2.13.1
$\mathcal{O}_V$ ist Garbe von k-Algebren auf V.

Definition 2.13.2
V wie oben heißt die aus V_1 und V_2 durch Verkleben längs U_1 und U_2 via φ entstandene ***Prävarietät***. (Begriff nicht so in der Literatur)

Beispiele 2.13.3

(a) $V_1 = V_2 = \mathbb{A}^1(k)$, $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$
$\varphi : U_1 \to U_2,\ x \mapsto \frac{1}{x}$
Dann ist die Verklebung V von V_1 und V_2 längs φ isomorph zu $\mathbb{P}^1(k)$.
Dabei heißt $\Psi : V \to \mathbb{P}^1(k)$ ***Isomorphismus***, wenn Ψ ein Homöomorphismus ist und für jedes offene $U \subset \mathbb{P}^1(k)$ gilt:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)} \to \mathcal{O}_V(\Psi^{-1}(U)), \quad f \mapsto f \circ \Psi$$

ist ein Isomophismus von k-Algebren. $\Psi : V \to \mathbb{P}^1(k)$ sei wie folgt definiert:

$$\Psi \mid V_1 = \rho_0 : \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{P}^1(k), \quad x \mapsto (1:x)$$
$$\Psi \mid V_2 = \rho_1 : \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{P}^1(k), \quad y \mapsto (y:1)$$

für $x \in U_1$ ist $(1:x) = (\varphi(x):1) = (\frac{1}{x}:1)$
Übungsaufgabe: Verklebe $n+1$ Kopien von $\mathbb{A}^n(k)$, so dass $\mathbb{P}^n(k)$ entsteht.

(b) $V_1 = V_2 = \mathbb{A}^1(k)$, $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}$
$\varphi : U_1 \to U_2, \quad \varphi = \mathrm{id}, \quad V$ Verklebung längs φ.
Für jedes offene $U \subseteq V$ mit $0_1 \in U$ und $0_2 \in U$ und jedes $f \in \mathcal{O}_V(U)$ ist $f(0_1) = f(0_2)$.
So ein V heißt ***separiert***.

Bemerkung 2.13.4
Ein topologischer Raum ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Beweis "$\Rightarrow$" Sei X hausdorffsch, $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$
$\Rightarrow x \neq y$. Dann gibt es ein $x \in U$ offen, $y \in V$ offen mit $U \cap V = \emptyset$
$\Rightarrow U \times V$ ist offene Umgebung von (x,y) mit $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$
"$\Leftarrow$" Sei $x \neq y \in X, \quad W$ eine offene Umgebung von (x,y) in $X \times X$ mit $W \cap \Delta = \emptyset$
Œ $W = U \times V$, da die $U \times V$ eine Basis der Toplogie auf $X \times X$ bilden $\Rightarrow U \cap V = \emptyset$ □

Definition 2.13.5
Eine Prävarietät X heißt ***separiert***, wenn $\Delta \subset X \times X$ abgeschlossen ist.

Beispiele 2.13.6
Sei V wie im letzten Beispiel. Dann ist $\Delta \subset V \times V$ nicht abgeschlossen:
In $V \times V$ gibt es über $(0,0)$ die folgenden Punkte:
$(0_1, 0_1), \quad (0_1, 0_2) \quad (0_2, 0_1) \quad (0_2, 0_2)$.
Davon liegen $(0_1, 0_1)$ und $(0_2, 0_2)$ in Δ, die beiden anderen nicht. Diese liegen aber in $\overline{\Delta}$.

Definition 2.13.7

(a) Eine ***Prävarietät*** über k ist ein topologischer Raum X, zusammen mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von k-Algebren, der eine endliche offene Überdeckung $X = U_1 \cup ... \cup U_n$ besitzt, so dass $(U_i, \mathcal{O}_X \mid_{U_i})$ isomorph zu einer affinen Varietät ist.

(b) Eine separierte Prävarietät heißt ***Varietät***.

Definition 2.13.8
Für eine Prävarietät X mit affiner Überdeckung $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ sei $X \times X$ die Prävarietät, die durch Verkleben der $U_i \times U_j, \quad i,j = 1,...,n$ hervorgeht.
Dabei ist $U_i \times U_j$ die affine Varietät, die durch $\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_k \mathcal{O}_X(U_j)$ bestimmt ist.
Produkt ist folgendes:

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[ld] \arrow[rd] & \\
X & & Y \\
& Z \arrow[lu] \arrow[ru] \arrow[uu, dotted, "\exists_1"'] &
\end{tikzcd}$$