

9. Der Umkehrsatz

Erinnerung: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$. U ist eine Umgebung von $x_0 \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$

Hilfssatz 9.1 (Offenheit des Bildes)

Sei $\delta > 0$, $f : U_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $f(0) = 0$ und V sei eine offene Umgebung von $f(0) (= 0)$.
 $U := \{x \in U_\delta(0) : f(x) \in V\}$. Dann ist U eine offene Umgebung von 0.

Beweis

Übung ■

Erinnerung: Cramersche Regel: Sei A eine reelle $(n \times n)$ -Matrix, $\det A \neq 0$, und $b \in \mathbb{R}^n$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau eine Lösung: $x = (x_1, \dots, x_n) = A^{-1}b$. Ersetze in A die j -te Spalte durch b^\top . Es entsteht eine Matrix A_j . Dann: $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$.

Satz 9.2 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. f sei auf D injektiv und es sei $f(D)$ offen. Weiter sei $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in D$ und f^{-1} sei auf $f(D)$ differenzierbar. Dann: $f^{-1} \in C^1(f(D), \mathbb{R}^n)$.

Beweis

Sei $f^{-1} = g = (g_1, \dots, g_n)$, $g = g(y)$. Zu zeigen: $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$ sind stetig auf $f(D)$. 5.6 $\implies g'(y) \cdot f'(x) = I$ ($n \times n$ -Einheitsmatrix), wobei $y = f(x) \in f(D) \implies$

$$\begin{pmatrix} g'_1(y) \\ \vdots \\ g'_n(y) \end{pmatrix} \cdot f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\implies \text{grad } g_j(y) \cdot f'(x) = e_j \implies f'(x)^\top \cdot \text{grad } g_j(y)^\top = e_j^\top$. Ersetze in $f'(x)^\top$ die k -te Spalte durch e_j^\top . Es entsteht die Matrix $A_k(x) = A_k(f^{-1}(y))$. Cramersche Regel $\implies \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(y) = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(x)} = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(f^{-1}(y))}$. $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, f^{-1} stetig \implies obige Definitionen hängen stetig von y ab $\implies \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \in C(f(D), \mathbb{R})$. ■

Satz 9.3 (Der Umkehrsatz)

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in D$ und $\det f'(x_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung U von x_0 und eine offene Umgebung V von $f(x_0)$ mit:

- (a) f ist auf U injektiv, $f(U) = V$ und $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in U$
- (b) Für $f^{-1} : V \rightarrow U$ gilt: f^{-1} ist stetig differenzierbar auf V und

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} \forall x \in U$$

Folgerung 9.4 (Satz von der offenen Abbildung)

D und f seien wie in 9.3 und es gelte: $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in D$. Dann ist $f(D)$ offen.

Beweis

O.B.d.A: $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 0$ und $f'(0) = I$ ($= (n \times n)$ -Einheitsmatrix)

Die Abbildungen $x \mapsto \det f'(x)$ und $x \mapsto \|f'(x) - I\|$ sind auf D stetig, $\det f'(0) \neq 0$, $\|f'(0) - I\| = 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$: $K := U_\delta(0) \subseteq D$, $\overline{K} = \overline{U_\delta(0)} \subseteq D$ und

(1) $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in \overline{K}$ und

(2) $\|f'(x) - I\| \leq \frac{1}{2n} \forall x \in \overline{K}$

(3) **Behauptung:** $\frac{1}{2}\|u - v\| \leq \|f(u) - f(v)\| \forall u, v \in \overline{K}$, insbesondere ist f injektiv auf \overline{K}

(4) f^{-1} ist stetig auf $f(\overline{K})$: Seien $\xi, \eta \in f(\overline{K})$, $u := f^{-1}(\xi)$, $v := f^{-1}(\eta) \implies u, v \in \overline{K}$ und
 $\|f^{-1}(\xi) - f^{-1}(\eta)\| = \|u - v\| \stackrel{(3)}{\leq} 2\|f(u) - f(v)\| = 2\|\xi - \eta\|$ ■

Beweis zu (3): $h(x) := f(x) - x$ ($x \in D$) $\implies h \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $h'(x) = f'(x) - I$. Sei $h = (h_1, \dots, h_n)$. Also: $h' = \begin{pmatrix} h'_1 \\ \vdots \\ h'_n \end{pmatrix}$. Seien $u, v \in \overline{K}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$|h_j(u) - h_j(v)| \stackrel{6.1}{=} |h'_j(\xi) \cdot (u - v)| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|h'_j(\xi)\| \|u - v\| \leq \|h'(\xi)\| \|u - v\|, \xi \in S[u, v] \in \overline{K}. \quad (2)$$

$$\implies \leq \frac{1}{2n} \|u - v\|$$

$$\implies \|h(u) - h(v)\| = \left(\sum_{j=1}^n (h_j(u) - h_j(v))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{4n^2} \|u - v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2n} \|u - v\| \sqrt{n} \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \implies$$

$$\|u - v\| - \|f(u) - f(v)\| \leq \|f(u) - f(v) - (u - v)\| = \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \implies$$

$$(3)$$

$V := U_{\frac{\delta}{4}}(0)$ ist eine offene Umgebung von $f(0)$ ($= 0$). $U := \{x \in K : f(x) \in V\}$ Klar: $U \subseteq K \subseteq \overline{K}$, $0 \in U$, 9.1 $\implies U$ ist eine offene Umgebung von 0. (3) $\implies f$ ist auf U injektiv. (1) $\implies \det f'(x) \neq 0 \forall x \in U$. (4) $\implies f^{-1}$ ist stetig auf $f(U)$. Klar: $f(U) \subseteq V$. Für (a) ist noch zu zeigen: $V \subseteq f(U)$.

Sei $y \in V$. $w(x) := \|f(x) - y\|^2 = (f(x) - y) \cdot (f(x) - y) \implies w \in C^1(D, \mathbb{R})$ und (nachzurechnen) $w'(x) = 2(f(x) - y) \cdot f'(x)$. \overline{K} ist beschränkt und abgeschlossen $\stackrel{3.3}{\implies} \exists x_1 \in \overline{K} : (5) w(x_1) \leq w(x) \forall x \in \overline{K}$.

Behauptung: $x_1 \in K$.

Annahme: $x_1 \notin K \implies x_1 \in \partial K \implies \|x_1\| = \delta$. $2\sqrt{w(0)} = 2\|f(0) - y\| = 2\|y\| \leq 2\frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} = \frac{\|x_1\|}{2} = \frac{1}{2}\|x_1 - 0\| \stackrel{(3)}{\leq} \|f(x_1) - f(0)\| = \|f(x_1) - y + y - f(0)\| \leq \|f(x_1) - y\| - \|f(0) - y\| = \sqrt{w(x_1)} + \sqrt{w(0)} \implies \sqrt{w(0)} < \sqrt{w(x_1)} \implies w(0) < w(x_1) \stackrel{(5)}{\leq} w(0)$, Widerspruch. Also: $x_1 \in K$

(5) $\implies w(x_1) \leq w(x) \forall x \in K$. 8.1 $\implies w'(x_1) = 0 \implies (f(x_1) - y) \cdot f'(x_1) = 0$; (1) $\implies f'(x_1)$ ist invertierbar $\implies y = f(x_1) \implies x_1 \in U \implies y = f(x_1) \in f(U)$. Also: $f(U) = V$. Damit ist (a) gezeigt.

(b): Wegen 5.5 und 9.2 ist nur zu zeigen: f^{-1} ist differenzierbar auf V . Sei $y_1 \in V$, $y \in V \setminus \{y_1\}$, $x_1 := f^{-1}(y_1)$, $x := f^{-1}(y)$; $L(y) := \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - f'(x_0)^{-1}(y - y_1)}{\|y - y_1\|}$. zu zeigen: $L(y) \rightarrow 0$ ($y \rightarrow y_1$).

$\varrho(x) := f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$. f ist differenzierbar in $x_1 \implies \frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|} \rightarrow 0 \ (x \rightarrow x_1)$.

$$\begin{aligned} f'(x_1)^{-1} \varrho(x) &= f'(x_1)^{-1}(y - y_1) - (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1)) = -\|y - y_1\| L(y) \\ \implies L(y) &= -f'(x_1)^{-1} \frac{\varrho(x)}{\|y - y_1\|} = -f'(x_1)^{-1} \underbrace{\frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|}}_{\rightarrow 0 \ (x \rightarrow x_1)} \cdot \underbrace{\frac{\|x - x_1\|}{\|f(x) - f(x_1)\|}}_{\leq 2, \text{ nach (3)}} \end{aligned}$$

Für $y \rightarrow y_1$, gilt (wegen (4)) $x \rightarrow x_1 \implies L(y) \rightarrow 0$.

Beispiel

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}, \det f'(x, y) = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x$$

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Sei $(\xi, \eta) \in D$ 9.3 $\implies \exists$ Umgebung U von (ξ, η) mit: f ist auf U injektiv (*). z.B. $(\xi, \eta) = (1, \frac{\pi}{2}) \implies f(1, \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$. $f'(1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(f^{-1})(0, 1) = f'(1, \frac{\pi}{2})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beachte: f ist auf D „lokal“ injektiv (im Sinne von (*)), aber f ist auf D *nicht* injektiv, da $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi) \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

