14. Normalformen von Endomorphismen

In diesem Abschnitt sei $\dim V < \infty$.

Ziel: Für ein $\phi \in \operatorname{End}(V)$ finde man eine Basis B, so dass die Darstellungsmatrix $D_{BB}(\phi)$ eine einfache Form hat.

Erinnere: Falls eine Basis B aus Eigenvektoren existiert, so ist $D_{BB}(\phi)$ eine Diagonalmatrix – der Idealfall. Dies gilt genau dann, wenn

$$g_\phi(T) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)} (T - \lambda)^{e_\lambda} \in K[T]$$

ein Produkt von Linearfaktoren ist (in $\mathbb{C}$ immer erfüllt) und

$$e_\lambda = \dim E_\lambda$$

Strategie: Ersetze die Eigenvektoren durch Vektoren mit schwächerer Eigenschaft.

Definition: Für $\phi \in \operatorname{End}(V)$ und $\lambda \in K$ heißt

$$H(\phi, \lambda) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{Kern}\Big((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k\Big)$$

der **Hauptraum** von ϕ zu λ.

Bemerkung (1): $H(\phi, \lambda)$ ist ein ϕ-invarianter Untervektorraum von V, denn es gilt

$$\operatorname{Kern}\Big((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k\Big) \subseteq \operatorname{Kern}\Big((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^{k+1}\Big)$$

und

$$(\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k x = 0$$
$$(\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k \phi(x) = 0$$

Bemerkung (2):

$$H(\phi, \lambda) \neq 0 \iff \lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)$$

Beweis: $\Longleftarrow$: Sei $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)$. Dann:

$$0 \neq E_\lambda(\phi) \subseteq H(\phi, \lambda)$$

$\Longrightarrow$: Sei $x \neq 0$ in $H(\phi, \lambda)$. Dann existiert ein $k \geq 1$ mit $(\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k(x) = 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei k minimal. Damit:

$$\underbrace{(\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^{k-1}}_{=:y}(x) \neq 0 \quad \text{und } y \in E_\lambda(\phi)$$

■

Satz 1:
Sei das charakteristische Polynom

$$g_\phi(T) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)} (T-\lambda)^{e_\lambda}$$

Dann gilt für jedes $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)$:

(1) $H(\phi, \lambda) = \operatorname{Kern}\left((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^{e_\lambda}\right)$

(2) $\dim H(\phi, \lambda) = e_\lambda$

Beweis: Fixiere λ und $e = e_\lambda$. Schreibe $g_\phi(T) = (T-\lambda)^e \cdot h(T)$ – in $h(T)$ werden die restlichen Linearfaktoren untergebracht. Setze $H := \operatorname{Kern}\left((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^e\right)$ und $U := \operatorname{Kern}(h(\phi))$.

Wegen $\operatorname{ggT}\left((T-\lambda)^e, h(T)\right) = 1$ folgt mit der letzten Proposition

$$V = H \bigoplus U$$

mit ϕ-invarianten Teilräumen.

Für alle $k \geq 1$ gilt: $(\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k\big|_U$ ist injektiv, denn

$$1 = r \cdot (T-\lambda)^k + s \cdot h$$

mit $r, s \in K[T]$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} id_v &= r(\phi) \cdot (\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k + s(\phi) \cdot h(\phi)|_U \\ id_v &= r(\phi)|_U \cdot (\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k\Big|_U + 0 \end{aligned}$$

Damit folgt für alle $k \geq 1$:

$$\operatorname{Kern}\left((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k\right) \subseteq H$$

also gilt (1).

Ferner gilt:

$$g_\phi(T) = g_{\phi|_H} \cdot g_{\phi|_U}$$

und $(T-\lambda)^e$ annulliert $\phi|_H$ (da $(\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^e|_H = 0$). Daraus folgt: das Minimalpolynom von $\phi|_H$ teilt $(T-\lambda)^e$, also ist $g_{\phi|_H}$ eine Potenz von $T - \lambda$.

Damit gilt: $g_{\phi|_H} = (T-\lambda)^{\dim H}$ und $\dim H \leq e$ (da $(T-\lambda)^e$ höchste Potenz in g_ϕ ist).

$e > \dim H$, also $T - \lambda | g_{\phi|_H}$, steht im Widerspruch zu $\operatorname{ggT}(T-\lambda, h) = 1$.
Damit gilt: $e = \dim H$. ∎

Erinnere: Summen von Eigenräumen sind direkt. Das Analogon für Haupträume gilt auch:

Satz 2:
Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ paarweise verschieden, so gilt

$$\sum_{i=1}^{k} H(\phi, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} H(\phi, \lambda_i)$$

Beweis: Schreibe kurz: $H_i := H(\phi, \lambda_i)$.
Führe eine vollständige Induktion nach k durch.

$k = 1$: ✓

$k-1 \to k$: Zu zeigen: für $v_i \in H_i$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = 0$$

d.h. alle $v_i = 0$.

$v_k \in H_k$, d.h. es existiert $e > 0$ mit $(\phi - \lambda_k \,\mathrm{id}_v)^e(v_k) = 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi - \lambda_k \,\mathrm{id}_v)^e(0) \\ &= (\phi - \lambda_k \,\mathrm{id}_v)^e \left(\sum_{i=1}^{k} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\phi - \lambda_k \,\mathrm{id}_v)^e(v_i)}_{=0 \text{ für } i=k} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{(\phi - \lambda_k \,\mathrm{id}_v)^e(v_i)}_{=: w_i \in H_i} \end{aligned}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $w_1 = \ldots = w_{k-1} = 0$.

Nun fixiere $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.
Analog zum Fall $i = k$:

$$\exists f > 0 : (\phi - \lambda_i \,\mathrm{id}_v)^f(v_i) = 0$$

Wegen $i \neq k$ ist $\lambda_i \neq \lambda_k$, also $\mathrm{ggT}(T - \lambda_i, T - \lambda_k) = 1$, also existieren $g,\ h \in K[T]$ mit

$$1 = g(T - \lambda_i)^f + h(T - \lambda_k)^e$$

ϕ einsetzen:

$$\begin{aligned} v_i &= \mathrm{id}_v(v_i) \\ &= g(\phi) \circ \underbrace{(\phi - \lambda_i \,\mathrm{id}_v)^f(v_i)}_{0} + h(\phi) \circ \underbrace{(\phi - \lambda_k \,\mathrm{id}_v)^e(v_i)}_{= w_i = 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit folgt: $v_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$ und somit folgt wegen $\sum_{i=1}^{k} v_i = 0$ auch $v_k = 0$. ∎

Zentrale Frage: Wann ist V die direkte Summe aller Haupträume?

Satz 3:
Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension. Weiter sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $g_\phi(T)$ und Minimalpolynom $f_\phi(T)$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} H(\phi, \lambda)$

(2) $g_\phi(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} (T - \lambda)^{\dim H(\phi,\lambda)}$

(3) $g_\phi(T)$ ist Produkt von Linearfaktoren

(4) $f_\phi(T)$ ist Produkt von Linearfaktoren

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Ringschluss:

(1) $\implies$ (2): Für $H_\lambda := H(\phi, \lambda)$ bekannt:

$$g_{\phi|_{H_\lambda}} = (T - \lambda)^{\dim H_\lambda}$$

Wegen $V = \bigoplus_\lambda H_\lambda$ folgt

$$g_\phi = \prod_\lambda g_{\phi|_{H_\lambda}} = \prod_\lambda (T - \lambda)^{\dim H_\lambda}$$

(2) $\implies$ (3): ✓

(3) $\implies$ (4): Wegen $f_\phi | g_\phi$✓

(4) $\implies$ (1): Vollständige Induktion nach $r := \#$Nullstellen von f_ϕ.

$r = 0$: f_ϕ hat keine Linearfaktoren, also $f_\phi = 1$ $\quad (\rightsquigarrow V = 0)$.

$r = 1$: $f_\phi = (T - \lambda)^e$ impliziert $V = \mathrm{Kern}(\underbrace{f_\phi(\phi)}_{=0}) = H(\phi, \lambda)$

$r \geq 2$: Sei λ eine Nullstelle von f_ϕ, dann existiert ein ϕ-invarianter Teilraum U : $V = H \bigoplus U$, wobei λ keine Nullstelle des Minimalpolynoms $f_{\phi|_U}$ ist. Wegen $f_\phi = f_{\phi|_U} \cdot f_{\phi|_{H_\lambda}}$ ist die Anzahl der Nullstellen von $f_{\phi|_U}$ $r - 1$.

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$U = \bigoplus_{\lambda' \in \mathrm{Spec}(\phi|_U)} H(\phi|_U, \lambda')$$

Da $\mathrm{Spec}(\phi) = \mathrm{Spec}(\phi|_U) \,\dot\cup\, \{\lambda\}$ und $H(\phi|_U, \lambda') = H(\phi, \lambda')$ für alle $\lambda' \neq \lambda$ folgt (1). ■

Ein wichtiger Spezialfall von Haupträumen ist der mit $\lambda = 0$.

Definition: Ein Endomorphismus heißt **nilpotent**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\phi^n = 0$.

Bemerkung (1): Für nilpotentes ϕ ist $\mathrm{Spec}(\phi) = \{0\}$ und $V = \mathrm{Kern}(\phi^n) = H(\phi, 0)$.

Beweis: Das Minimalpolynom ist von der Form: $f_\phi = T^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. ∎

Bemerkung (2): Für beliebiges $\phi \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim(V) < \infty$ ist $(\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)|_{H(\phi,\lambda)}$ nilpotent.

Beweis: Wir haben gesehen, dass gilt

$$H(\phi, \lambda) = \mathrm{Kern}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)^{\dim H(\phi,\lambda)}\right)$$

∎

Hilfssatz 1:
Sei $\dim(V) < \infty$, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent mit Minimalpolynom $f_\phi = T^d$. Ferner sei $u \in V$ mit $\phi^{d-1}(u) \neq 0$.

Dann existiert ein ϕ-invarianter Teilraum W derart, dass gilt:

$$V = U \bigoplus W$$

für den zyklischen (ϕ-invarianten) Teilraum

$$U := \left\langle u, \phi(u), \phi^2(u), \ldots, \phi^{d-1}(u) \right\rangle$$

Beachte: Ein solches u existiert stets, da andernfalls $\phi^{d-1} = 0$. Dies wäre ein Widerspruch zu $f_\phi = T^d$.

Beweis: Es gilt $\dim U = d$, da offenbar $U \leq V$ und

$$\dim U = \mathrm{Grad}(g_{\phi|_U}) \geq \mathrm{Grad}(f_{\phi|_U}) = d$$

$f_{\phi|_U} | f_\phi = T^d$ und kein echter Teiler, da $\phi^{d-1}(u) \neq 0$.

Wähle ϕ-invarianten Teilraum W mit $U \cap W = 0$ und $\dim W$ maximal.

Behauptung: $V = U \bigoplus W$

Beweis: angenommen es gilt $U \underset{\neq}{>} V$, d.h. es existiert $\tilde{v} \in V \setminus (U \bigoplus W)$.

Wenn $\phi^d(\tilde{v}) = 0 \in U \bigoplus W$, dann existiert ein kleinstes $e \in \mathbb{N}$ mit $\phi^e(\tilde{v}) \in U \bigoplus W$.
Setze $v := \phi^{e-1}(\tilde{v})$, so dass also $v \notin U \bigoplus W$ und $\phi(v) \in U \bigoplus W$. Damit folgt:

$$\phi(v) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \phi^i(u) + w$$

mit geeignetem $a_i \in K$, $w \in W$. Wende ϕ^{d-1} an:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi^d(v) \\ &= a_0 \cdot \underbrace{\phi^{d-1}(u)}_{\neq 0} + \phi^{d-1}(w) \end{aligned}$$

Damit folgt $\phi^{d-1}(w) \in W \cap U = 0$, also $a_0 = 0$.

$$\phi(v) = \phi\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d-1} a_i \cdot \phi^{i-1}(u)\right)}_{=:\tilde{u} \in U} + w \iff \phi(v - \tilde{u}) = w$$

Nun betrachte den Teilraum $\tilde{W} := W + K \cdot (v - \tilde{u})$

- $\tilde{W}$ ist ϕ-invariant
- $\tilde{W} \underset{\neq}{>} W$ (denn $v - \tilde{u} \notin W$ wegen $v \notin U + W$)
- $\tilde{W} \cap U = 0$

Letzteres gilt, da für $u' = w' + \alpha(v - \tilde{u}) \in \tilde{W} \cap U$ folgt $(\alpha\tilde{u} + u') - w' = \alpha \cdot v \in U \bigoplus W$, also $\alpha = 0$.
Daraus folgt $u' = w' \in U \cap W = 0$. ■

Da $\dim \tilde{W} > \dim W$ folgt Widerspruch zur Maximalität von $\dim W$. ■

Folgerung: Für nilpotentes ϕ ist V direkte Summe von ϕ-zyklischen Teilräumen.

Beweis: Vollständige Induktion nach $n = \dim V$

$n = 0, 1$: Klar ✓

$n \geq 2$: $V = U \bigoplus W$ mit ϕ-zyklischem $U \neq 0$ nach Hilfssatz 1.

Damit folgt: $\dim W < n$.
Induktionsvoraussetzung: W ist direkte Summe ϕ-zyklischer Teilräume. ■

Erinnere: Die Darstellungsmatrix von $\phi|_U$ bezüglich der Basis $B = \{u, \phi(u), \phi^2(u), \ldots, \phi^{d-1}(u)\}$ lautet für jedes nilpotente ϕ mit Minimalpolynom $f_\phi = T^d$

$$D_{BB}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} =: J_d(0)$$

$J_d(0)$ heißt **Jordankästchen der Länge d zum Eigenwert 0**.

Übung: Für $e = 0, 1, \ldots, d$ gilt: $\operatorname{rg}(J_d(0)^e) = d - e$ und $J_d(0)^e = 0$ für $e \geq d$.

Satz 4 (Jordannormalform für nilpotente Matrizen):
Sei $A \in K^{n \times n}$ nilpotent. Dann gibt es eine Partition (Summenzerlegung) $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$ mit eindeutig bestimmenten k, $d_i \in \mathbb{N}$ mit $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k \geq 1$, so dass A ähnlich ist zu der **Blockdiagonalmatrix**

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & & 0 \\ & J_{d_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}$$

Beweis: Bereits bekannt:

$$K^n = V = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$$

mit ϕ-zyklischem U_i zu $\phi = \phi_A$, wobei für $d_i := \dim U_i$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k$ und $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$ gilt.
Ferner ist bezüglich der Basis $B_i = \{u_i, \phi(u_i), \ldots, \phi^{d-1}(u_i)\}$

$$D_{B_i B_i}(\phi|_{U_i}) = J_{d_i}(0)$$

Dies zeigt die Existenz von $\tilde{A}$.

Eindeutigkeit: Zu zeigen: Für $d \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl m_d von Jordankästchen $J_d(0)$ der Länge d eindeutig durch A bestimmt.

Nach der Rangformel ($\longrightarrow$Übung!) gilt:

$$\begin{aligned} r_e &:= \operatorname{rg}(A^e) \\ &= \operatorname{rg}\left(\tilde{A}^e\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\operatorname{rg}(J_{d_i}(0)^e)}_{(\alpha_i - e)} \\ &= \sum_{d=e}^{n} (d-e) \cdot m_d \qquad (e = 0, 1, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:M} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

Es ist $\det(M) = 1$, insbesondere ist M invertierbar, so dass $(m_1, \ldots, m_n)$ eindeutig durch A bestimmt ist. ∎

Beachte:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt:

$$m_d = r_{d-1} - 2r_d + r_{d+1} \tag{14.1}$$

Definition: Für $\lambda \in K$ und $d \in \mathbb{N}$ heißt die Matrix

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = J_d(0) + \lambda \cdot I_d$$

ein **Jordankästchen der Länge d zum Eigenwert** λ.

Satz 5 (Jordannormalform):
Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty$ und $\phi \in \operatorname{End}(V)$, so dass das charakteristische Polynom g_ϕ in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$g_\phi(T) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)} (T - \lambda)^{\mu_a(\lambda)}$$

Dabei sei $\operatorname{Spec}(\phi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l\}$ für $l := |\operatorname{Spec}(\phi)|$.

Dann gibt es zu jedem λ_i eindeutig bestimmte natürliche Zahlen k_i und $d_{1,i} \geq d_{2,i} \geq \ldots \geq d_{k_i,i} \geq 1$, sodass bezüglich einer geeigneten Basis B von V die Darstellungsmatrix von ϕ die folgende Blockdiagonalform hat:

$$D_{BB}(\phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_l \end{pmatrix} \text{ mit } D_i := \begin{pmatrix} J_{d_{1,i}}(\lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_{k_i,i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Dabei ist $D_i = D_{B_iB_i}\left(\phi|_{H(\phi,\lambda_i)}\right)$ die Darstellungsmatrix der Einschränkung von ϕ auf den Hauptraum $H(\phi, \lambda_i)$ bezüglich einer Basis B_i dieses Raumes.
Bezeichnet $m_d(\lambda)$ die Anzahl der Jordankästchen der Länge d zum Eigenwert λ, so gilt für alle $d \in \mathbb{N}$:

$$m_d(\lambda) = \operatorname{rg}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id})^{d-1}\right) - 2\operatorname{rg}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id})^{d}\right) + \operatorname{rg}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id})^{d+1}\right)$$

Diese **Jordannormalform** $D_{BB}(\phi) =: \operatorname{JNF}(\phi)$ ist, bis auf die Reihenfolge der **Jordanblöcke** D_i, eindeutig bestimmt.

Beweis: Wegen der Voraussetzung an g_ϕ ist $V = \bigoplus_\lambda H(\phi,\lambda)$ mit $H(\phi,\lambda) = \text{Kern}\left((\phi - \lambda\,\text{id})^{\mu_a(\lambda)}\right)$. Es ist bereits bekannt, dass

$$\Psi_i := (\phi - \lambda\,\text{id})|_{H(\phi,\lambda_i)}$$

nilpotent ist.

Nach Satz 4 existiert also eine Basis B_i von $H(\phi,\lambda_i)$ mit

$$D_{B_iB_i}(\Psi_i) = \begin{pmatrix} J_{d_{1,i}}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_{k_i,i}}(0) \end{pmatrix}$$

Also gilt für $\phi|_{H(\phi,\lambda_i)} = \Psi_i + \lambda_i \cdot \text{id}$

$$D_{B_iB_i}\left(\phi|_H(\phi,\lambda_i)\right) = D_{B_iB_i}(\Psi_i) + \lambda_i I_{\mu_a(\lambda_i)} = D_i$$

(wegen $J_d(\lambda) = J_d(0) + \lambda I_d$)

Nehme also Basis für V: $B := B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup \ldots \dot\cup B_l$ so dass $D_{BB}(\phi)$ die gewünschte Form hat. Die Formel für $m_d(\lambda)$ kennen wir schon (Gleichung (14.1)), ebenso die Eindeutigkeit aus dem Spezialfall nilpotenter Matrizen.

(Beachte hierbei: $(\phi - \lambda\,\text{id})^d\big|_{H(\phi,\lambda')}$ ist invertierbar für $\lambda \neq \lambda'$.) ■

Korollar:

(1) Die Länge des Jordanblockes D_i zum Eigenwert λ_i ist

$$|B_i| = \dim\left(H(\phi,\lambda_i)\right) = \mu_a(\lambda_i)$$

(2) Die Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert λ_i ist

$$k_i = \dim E_{\lambda_i} = \mu_g(\lambda_i) \qquad \text{(Dimension des Eigenraumes)}$$

(3) Die Vielfachheit e_i eines Linearfaktors $T - \lambda_i$ im Minimalpolynom

$$f_\phi(T) = \prod_{i=1}^{e} (T - \lambda_i)^{e_i}$$

ist die größte Länge der Jordankästchen zum Eigenwert λ_i, also

$$e_i = d_{1,i} = \min\left\{e \geq 0 \mid \text{rg}\left((\phi - \lambda_i\,\text{id})^e\right) = \text{rg}\left((\phi - \lambda_i\,\text{id})^{e+1}\right)\right\}$$

Beweis: (1) Bekannt!

(2) **Erinnere:** Mit $\Psi_\lambda := (\phi - \lambda\,\text{id})|_{H(\phi,\lambda)}$ gilt:

$$E_\lambda = \text{Kern}\,\Psi_\lambda \leq \text{Kern}\,\Psi_\lambda^{\mu_a(\lambda)} = H(\phi,\lambda)$$

$$\text{mit JNF}(\Psi_\lambda) = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}$$

Wegen $\operatorname{rg}(J_d(0)) = d - 1$ folgt

$$\operatorname{rg}(\Psi_\lambda) = (d_1 + \ldots + d_k) - k = \dim H(\phi - \lambda) - k$$

also

$$\dim E_\lambda = \dim \operatorname{Kern} \Psi_\lambda = \dim H(\phi, \lambda) - \operatorname{rg}(\Psi_\lambda) = k$$

(3) Wir haben

$$\text{JNF}(\phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_l \end{pmatrix}$$

Betrachte annullierende Polynome von ϕ (also von JNF(ϕ)) der Form

$$f(T) = \prod_{i=1}^{l} (T - \lambda_i)^{f_i}$$

Setze JNF(ϕ) ein:

$$0 = f\left(\text{JNF}(\phi)\right) = \begin{pmatrix} f(D_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(D_l) \end{pmatrix} \iff \forall j: \prod_{i=1}^{l} (D_j - \lambda_i I)^{f_i} = 0$$

Wegen $D_j - \lambda_i I$ invertierbar für $i \neq j$ besagt dies:

$$\iff \forall j: \underbrace{(D_j - \lambda_j I)}_{\text{JNF}(\Psi_{\lambda_j})}{}^{f_j} = 0$$

Also wegen $\left[\operatorname{rg}\left(J_d(0)^f\right) = 0 \iff f \geq d\right]$ genau dann, wenn für alle j gilt:

$$f_j \geq d_{1,j} (\geq d_{2,j} \geq \ldots)$$

also überall $\min f_j = e_j = d_{1,j}$. ∎