

0.5 Übung 4, 29.11.2004

Can somebody please tell where the heck I've been ? Oh, wait, now I remember, good old Bremen

0.6 Übung 5, 06.12.2004

0.6.1 Aufgabe 1

Geg: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = 0$, falls $i \geq j$

a) z.Z.: $A^n = 0$

Beweis: $A^k = ((a_{ij}^{(k)}))$ Beh.: $a_{ij}^{(k)} = 0$, falls $i \geq j - k + 1$
(Vollständige Induktion)

I.A.: $A^n = A = ((a_{ij}))$. Nach Vor.: $a_{ij} = 0$ für $i \geq j - 1 + 1$

I.V.: Für $A^k = ((a_{ij}^{(k)}))$ gilt $a_{ij}^{(k)} = 0$ für $i \geq j - k + 1$

I.S.: z.Z. $A^{k+1} = ((a_{ij}^{(k+1)}))$ erfüllt

$$a_{ij}^{(k+1)} = 0 \text{ für } i \geq (k+1) + 1 = j - k$$

Bew.: Sei $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit $i_0 \geq j_0 - k = i_0 \geq (j_0 - 1) + k + 1$

$A^{k+1} = A^k \cdot A$. Also gilt:

$$a_{i_0 j_0}^{k+1} = \sum_{l=1}^n a_{i_0 l} a_{l j_0}$$

$$\underbrace{a_{i_0 1}^{(k)} \cdot a_{1 j_0} + \dots + a_{i_0 j_0 - 1}^{(k)} \cdot a_{(j_0 - 1) j_0}}_{\substack{=0 \\ \text{0 nach I.V.}}} + \underbrace{a_{i_0 j_0}^{(k)} \cdot a_{i_0 j_0} \cdot \overbrace{a_{j_0 j_0}^{(k)}}^{=0} + \dots + a_{i_0 n}^{(k)} \cdot \underbrace{a_{n j_0}}_0}_{\text{nach Vor. aus A}} = 0$$

Damit gilt für $k = n$: $A^n = ((a_{ij}^{(n)})) a_{ij}^{(n)} = 0$, falls $i \geq \underbrace{j - n + 1}_{\text{Gilt für alle } i, j < \{1, \dots, n\}}$. Also gilt: $A^n = 0$

□

b) Wo ist Teil b ?, bzw. was war a ?

c) $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^3$. Dazu gehört dann: $\varphi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, A \mapsto A^3$

$$P \text{ ist injektiv aber } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ erfüllt: } \varphi_n(A) = A^3 = 0. \text{ Damit ist } \varphi_n \text{ nicht}$$

injektiv.

0.6.2 Aufgabe 2

Gibbet nicht

0.6.3 Aufgabe 3

a) z.Z.: $P(\pi \circ \sigma) = P(\pi) \cdot P(\sigma)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 P(\pi)P(\sigma) &= ((P_{ij})) \\
 &= P_{ij} = \delta_{i\pi(1)} \cdot \delta_1\sigma(j) + \delta_{i\pi(2)} \cdot \delta_2\sigma(j) + \dots + \delta_{i\pi(n)} \cdot \delta_n\sigma(j) \\
 &= \begin{cases} \exists k \in \{1, \dots, n\} : \delta_{i\pi(k)} = 1 \text{ und } \delta_{k\pi(j)} = 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\} : \pi(k) = i \text{ und } k = \sigma(j) \\ 1, \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\} : k = \pi^{-1}(i) \text{ und } k = \sigma(j) \\ \Leftrightarrow \pi^{-1} = \sigma(j) \\ \Leftrightarrow i = \pi(\sigma(j)) \\ 0, \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \delta_{i\pi(\sigma(j))}
 \end{aligned}$$

Also gilt: $P(\pi \circ \sigma) = P(\pi) \cdot P(\sigma)$

□

b) z.Z.: $P(\pi^{-1}) = P(\pi)^\top$

Beweis: $P(\pi^{-1}) = ((\delta_{i\pi}^{-1}(j)))$

$$\delta_{i\pi}^{-1}(j) = \begin{cases} 1, \text{ falls } i = \pi^{-1}(j) \Leftrightarrow \pi(i) = j \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

$$P(t)^\top = ((\delta_{ij})) \text{ und } P(\pi) = ((a_{ij} = ((\delta_{i\pi(j)})))$$

$$\delta_{ij} = a_{ji} = \delta_{j\pi(i)}\delta_{\pi(i)j}$$

Also gilt: $P(\pi^{-1}) = P(\pi)$

□

c)

(1) z.Z.: $P(\pi) \in GL(n, \mathbb{K})$ für alle $\pi \in S_n$:

$$E_n = P(id_{\{1, \dots, n\}}) = P(\pi^{-1} \circ \pi) = P(\pi^{-1}) \cdot P(\pi) = P(\pi) \cdot P(\pi^{-1})$$

(2) P ist Gruppenhomomorphismus wege a)

(3) P injektiv \Leftrightarrow Kern $P = \{id_{\{1, \dots, n\}}\}$

$$\text{z.Z.: } P(\pi) = E_n \Rightarrow \pi = id_{\{1, \dots, n\}}$$

Beweis: Sei $P(\pi) = E_n = ((\delta_{ij}))$

$$\Rightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \delta_{i\pi(j)} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \pi(j) = j$$

$$\Rightarrow \pi = id_{\{1, \dots, n\}}$$

□