# ii Projektive Varietäten

Wir hatten bereits gesehen: Ein Manko an $\mathbb{A}^n(K)$ ist, dass sich Geraden nicht immer schneiden. Daher wollen wir $\mathbb{A}^n(K)$ zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n(K)$ vergrößern. Die Punkte darin sollen die Geraden in $\mathbb{A}^{n+1}(K)$ sein.

## 1 Der Projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$

Sei $k$ immer ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 1.1: Der *$n$-dimensionale projektive Raum* über $k$ besteht aus allen Ursprungsgeraden in $k^{n+1}$:

$$\mathbb{P}^n(k) := {k^{n+1}\backslash\{0\}}\Big/{\sim}\ ,$$

wobei $(x_1,\dots,x_{n+1}) \sim (y_1,\dots,y_{n+1}) :\Longleftrightarrow \exists\ \lambda \in k^\times : y_i = \lambda x_i\ \forall i$. Für die Äquivalenzklasse von $(x_0,\dots,x_n)$ schreiben wir

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

und nennen sie die *homogenen Koordinaten des Punktes*.

Beispiel 1.2: (a) Für $n = 0$ ist $\mathbb{P}^0(k) = \{(1)\} =: \{\infty\}$.

(b) Für $n = 1$ ist

$$\mathbb{P}^1(k) = {\{(x_0, x_1) \mid (x_0, x_1) \neq (0,0)\}}\Big/{\sim} = \{(1 : t) \mid t \in k\} \cup \{(0 : 1)\}.$$

Wir sehen:

$$\mu\colon \mathbb{P}^1(k) \longrightarrow k \cup \{\infty\}, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto \begin{cases} \frac{x_1}{x_0}, & x_0 \neq 0, \\ \infty, & x_0 = 0, \end{cases}$$

ist eine Bijektion und ordnet jeder Geraden ihre Steigung zu.

Spezialfall:

- Für $k = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^1/\{\pm 1\}$, entspricht also einer Kreislinie.
- Für $k = \mathbb{C}$ ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Das lässt sich (z.B. mit Hilfe der riemannschen Zahlenkugel) mit der $\mathcal{S}^2$ identifizieren.

(c) Es gilt $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^n(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}^n(\mathbb{C})/\{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$. Bezüglich der Quotiententopologie, die von $k^{n+1}$ mit der euklidischen Topologie herkommt, sind das kompakte Hausdorffräume.

Das ist nicht die Zariski-Topologie!

(d) Für $k = \mathbb{F}_p$ ist
$$|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)| = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} = 1 + \cdots + p^n.$$

Definition/Bemerkung 1.3: Für $i \in \{0,\ldots,n\}$ sei
$$\mathfrak{U}_i := \{x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}.$$

Das ist wohldefiniert(!) und es gilt:

(a) $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathfrak{U}_i$

(b) Sei
$$\varphi_i \colon \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \quad (y_1,\ldots,y_n) \longmapsto (y_1 : \cdots : y_i : 1 : y_{i+1} : \cdots : y_n).$$
Das ist eine Einbettung mit Bild $\mathfrak{U}_i$. Die Abbildung
$$\mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathbb{A}^n(k), \quad (x_0 : \cdots : x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right)$$
ist wohldefiniert und bijektiv und ihre Umkehrabbildung ist $\varphi_i$.

(c) Die Abbildung $\mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k)$,
$$\begin{aligned}(x_0 : \cdots : x_n) \longmapsto{} & (x_0 : x_1 : \cdots : x_{i-1} : x_{i+1} : \cdots : x_n) \\ =:{} & (x_0 : \cdots : \widehat{x_i} : \cdots : x_n)\end{aligned}$$
ist wohldefiniert und bijektiv.

(d) Damit erhalten wir eine Bijektion:
$$\mathbb{P}^n(k) \longleftrightarrow \mathbb{A}^n(k) \cup \mathbb{A}^{n-1}(k) \cup \cdots \mathbb{A}^1(k) \cup \{\infty\}.$$

*Beweis:* (a) ist klar nach Definition der $\mathfrak{U}_i$.

(b) Man rechnet einfach nach, dass die Abbildungen zueinander invers sind.

(c) Da $x_i = 0$ ist, gibt es ein $j \neq i$ mit $x_j \neq 0$, also ist die Abbildung wohldefiniert. Wir geben wieder eine Umkehrabbildung an:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{n-1}(k) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i, \\ (y_0 : \cdots : y_{n-1}) &\longmapsto (y_0 : \cdots : y_{i-1} : 0 : y_i : \cdots : y_{n-1}).\end{aligned}$$

(d) Das folgt induktiv aus (b) und (c). □

## 2 Projektive Varietäten

Auch in diesem Abschnitt sei $k$ immer ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$.

Ein unmittelbares Problem im Projektiven ist das Folgende: Sei $f \in k[X_0,..., X_n]$. Dann ist die dazugehörige Polynomfunktion

$$\mathbb{P}^n(k) \longrightarrow k, \quad x = (x_0 : \cdots : x_n) \longmapsto f(x_0,..., x_n)$$

nur wohldefiniert, falls $f(\lambda x_0,..., \lambda x_n) = f(x_0,..., x_n)$ für alle $\lambda \in k^\times$ ist. Das ist aber fast nie der Fall.
Um Varietäten zu definieren, genügt es aber, dass „$f(x) = 0$“ wohldefiniert ist, das heißt

$$\forall\, \lambda \in k^\times : f(x_0,..., x_n) = 0 \iff f(\lambda x_0,..., \lambda x_n) = 0.$$

Das erfüllen gerade die homogenen Polynome.

Erinnerung 2.1: (a) $f \in k[X_0,..., X_n]$ heißt *homogen vom Grad $d$*, wenn

$$f = \sum_{i=0}^{l} a_i X_0^{r_{i,0}} \cdots X_n^{r_{i,n}} \text{ mit } r_{i,0} + \cdots + r_{i,n} = d \ \ \forall i.$$

(b) Falls $k$ unendlich ist, so gilt:

$$f \text{ ist homogen vom Grad } d \iff f(\lambda x_0,..., \lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_0,..., x_n)\ \forall \lambda \in k^\times.$$

(c) Die Voraussetzung „unendlich“ kann in (b) nicht weggelassen werden: Seien $k = \mathbb{F}_3$ und $f(X) = X^3 + X$. Dann ist $f$ nicht homogen, aber es gilt

$$\forall \lambda \in k^\times : f(\lambda x) = \lambda^3 x^3 + \lambda x = \lambda(x^3 + x) = \lambda f(x),$$

da $\lambda^3 = \lambda$ im $\mathbb{F}_3$.

*Beweis:* (b) Für homogene Polynome gilt die Eigenschaft nach Definition. Sei also $f$ ein Polynom, das die rechte Seite der Äquivalenz erfülle. Wir zerlegen $f$ in seine homogenen Komponenten, schreiben also

$$f = \sum_{i=0}^{l} f_i \text{ mit } \deg f_i = i \text{ und } f_i \text{ homogen.}$$

Nun setzen wir $g_{(x_0,...,x_n)}(\lambda) := f(\lambda x_0,..., \lambda x_n)$, fassen also den Ausdruck als Polynom in $\lambda$ auf. Da die $f_i$ homogen sind und wegen der Vorraussetzung an $f$, gilt:

$$\sum_{i=0}^{l} \lambda^i f_i(x) = \sum_{i=0}^{l} f_i(\lambda x) = f(\lambda x) = \lambda^d f(x) = \lambda^d \left( \sum_{i=0}^{l} f_i(x) \right).$$

Da $k$ unendlich ist, stimmen die Ausdrücke für alle $x$ als Polynome in $\lambda$ überein, es gilt also $f_i = 0$ für $i \neq d$. Daher ist $f = f_d$ und damit homogen vom Grad $d$. □

Definition 2.2: $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt *projektive Varietät*, wenn es in $k[X_0,..., X_n]$ eine Menge $\mathcal{F}$ von homogenen Polynomen gibt, so dass

$$V = \mathfrak{V}(\mathcal{F}) := \{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(x) = 0\ \forall f \in \mathcal{F}\}.$$

Beispiel 2.3: (a) Die Menge $H_i := \mathfrak{V}(X_i) = \mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i$ ist eine projektive Varietät und nach Definition/Bemerkung 1.3 (c) bijektiv zu $\mathbb{P}^{n-1}$.

Allgemein nennen wir $H = \mathfrak{V}(f)$ mit $f \in k[X_0,..., X_n]$ eine *Hyperfläche* und wenn $f$ sogar linear ist, nennen wir $H$ eine *Hyperebene*.

(b) Es gilt $\mathfrak{V}(X_0,..., X_n) = \varnothing$.

(c) Betrachte $V = \mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$.

- Zuerst bilden wir $V \cap \mathfrak{U}_0$ in den $\mathbb{A}^2$ durch

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

ab. Ein Punkt $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(k)$ liegt genau dann in $V$, wenn er

$$x_0x_2 - x_1^2 = 0$$

erfüllt und für einen Punkt aus $V \cap \mathfrak{U}_0$ ist diese Bedingung äquivalent zu $\frac{x_2}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 = 0$. Das heißt ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{A}^2$ liegt genau dann im Bild von $V \cap \mathfrak{U}_0$, wenn $y - x^2 = 0$. Diese Punkte liegen also alle auf einer Parabel.

- Nun bilden wir $V \cap \mathfrak{U}_1$ nach $\mathbb{A}^2$ ab. Analog betrachten wir die Abbildung

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right)$$

und sehen mit dem gleichem Argument, dass für die betroffenen Punkte

$$\frac{x_0x_2}{x_1^2} - 1 = 0$$

gilt, also im $\mathbb{A}^2$ entsprechend: $xy - 1 = 0$. Diese Punkte liegen also alle auf einer Hyperbel.

Erinnerung 2.4: (a) Der Polynomring $S := k[X_0,..., X_n]$ ist ein *graduierter Ring* mit Graduierung

$$S_d := \{f \in k[X_0,..., X_n] \mid f \text{ homogen von Grad } d\},$$

d.h.:
- $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$; die Elemente in $S_d$ bezeichnen wir als *homogene Elemente*.
- Es gilt: $S_d \cdot S_l \subseteq S_{d+l}$.

$S$ ist sogar eine *graduierte $k$-Algebra*, d.h. $k = S_0$ und die $S_d$ sind $k$-Vektorräume.

(b) Ein Ideal $I$ heißt *homogen*, wenn es von homogenen Elementen (nicht notwendigerweise von gleichem Grad) erzeugt wird.

(c) Die Summe, das Produkt, der Durchschnitt und die Radikale von homogenen Idealen sind wieder homogen.

(d) Es gilt: $I$ ist genau dann homogen, wenn

$$\forall f \in I \colon f = \sum_{i=0}^{d} f_i \text{ mit } f_i \in S_i \implies f_i \in I.$$

*Beweis:* Als Beispiel beweisen wir, dass das Radikal eines homogenen Ideals wieder homogen ist. Für die restlichen Beweise verweisen wir auf Algebra II.

Sei also $I$ ein homogenes Ideal und $f \in \sqrt{I}$. Seien $f_d \in S_d$ mit $f = \sum_{d=0}^{n} f_d$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $f^m \in I$ und wir sehen:

$$f^m = f_n^m + \text{Terme von kleinerem Grad.}$$

$f_n^m$ ist auch ein homogenes Element, also gilt nach (d): $f_n^m \in I$. Daher ist $f_n \in \sqrt{I}$ und rekursiv auch alle $f_d$. Damit ist, wieder nach (d), $\sqrt{I}$ ein homogenes Ideal.□

Definition/Bemerkung 2.5: (a) Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Dann nennen wir

$$\mathfrak{I}(V) = \langle \{ f \in k[X_0,\dots,X_n] \mid f \text{ homogen}, f(x) = 0\ \forall x \in V \} \rangle$$

das *Verschwindungsideal von $V$*.

(b) Für ein homogenes Ideal $I$ heißt

$$\mathfrak{V}(I) := \{ x \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(x) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I \}$$

*Nullstellenmenge von $I$*. Das ist eine projektive Varietät.

(c) $\mathfrak{I}(V)$ ist ein Radikalideal.

(d) Seien $I_1, I_2$ homogene Ideale, $V_1, V_2$ projektive Varietäten. Dann gilt:

- $I_1 \subseteq I_2 \implies \mathfrak{V}(I_1) \supseteq \mathfrak{V}(I_2)$,
- $V_1 \subseteq V_2 \implies \mathfrak{I}(V_1) \supseteq \mathfrak{I}(V_2)$, sowie
- $V_1 = V_2 \iff \mathfrak{I}(V_1) = \mathfrak{I}(V_2)$.

*Beweis:* (c) Sei $I := \mathfrak{I}(V)$ homogen. Dann ist nach Erinnerung 2.4 (c) auch $\sqrt{I}$ homogen. Sei $f \in \sqrt{I}$ ein homogenes Element. Dann ist $f \in I$ nach dem gleichen Argument, wie im Affinen (Bemerkung 1.3 (c)).

(d) Hier wirken die Argumente aus Kapitel I, Bemerkung 1.3 und Bemerkung 1.5.□

Proposition 2.6 (Projektiver Nullstellensatz): Seien $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I$ ein homogenes Ideal in $K[X_0,\dots,X_n]$. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$, falls $\sqrt{I} \neq (X_0,\dots,X_n)$,

(b) $\mathfrak{V}(I) = \varnothing \iff I = K[X_0,\dots,X_n]$ oder $\sqrt{I} = (X_0,\dots,X_n)$.

Der Beweis kommt später.

Definition/Bemerkung 2.7: (a) Die projektiven Varietäten im $\mathbb{P}^n(k)$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$. Diese heißt *Zariski-Topologie.*

(b) Für $M \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M)) = \overline{M}$.

(c) Sei $V$ eine projektive Varietät. Dann gilt:

$$V \text{ ist irreduzibel} \iff \mathfrak{I}(V) \text{ ist ein Primideal.}$$

(d) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten.

*Beweis:* Genau wie im Affinen. Siehe dazu Definition/Bemerkung 2.1, Bemerkung 2.3, Bemerkung 2.9 und Satz 1 aus Kapitel I. □

**Frage:** *Wie sieht das Bild einer affinen Varietät $V = \mathfrak{V}(I)$ in $\mathbb{P}^n$ aus?*

Definition/Lemma 2.8: Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\colon k[X_1,\dots,X_n] &\longrightarrow k[X_0,\dots,X_n], \\ f = \sum_{i=0}^{d} f_i &\longmapsto \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i} =: F(X_0,\dots,X_n), \end{aligned}$$

wobei die $f_i$ homogen mit $\deg f_i = i$ sind, die *Homogenisierung* und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\colon k[X_0,\dots,X_n] &\longrightarrow k[X_1,\dots,X_n], \\ F(X_0,\dots,X_n) &\longmapsto F(1,X_1,\dots,X_n) =: f(X_1,\dots,X_n) \end{aligned}$$

die *Dehomogenisierung.* Dann gilt:

(a) $\mathcal{D} \circ \mathcal{H} = \mathrm{id}$ und für homogenes $F$ gilt $X_0^e \cdot \mathcal{H} \circ \mathcal{D}(F) = F$ für ein $e \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $F = \mathcal{H}(f)$. Dann ist, nach Definition, $F$ homogen und es gilt $\deg F = d = \deg f$. Außerdem gilt:

$$\forall x_0,\dots,x_n \in k, x_0 \neq 0\colon F(x_0,\dots,x_n) = x_0^d \cdot f(\tfrac{x_1}{x_0},\dots,\tfrac{x_n}{x_0}).$$

Insbesondere ist $F(1,x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)$.

(c) $\mathcal{D}$ ist ein $k$-Algebrenhomomorphismus und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f \cdot g) &= \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g) \\ X_0^j \cdot \mathcal{H}(f+g) &= \mathcal{H}(f) + X_0^{\deg f - \deg g} \cdot \mathcal{H}(g). \end{aligned}$$

Insbesondere liegt $\mathcal{H}(f+g)$ nicht notwendigerweise im Ideal $(\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g))$.

*Beweis:* Sei $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ wie in der Definition.

(a) Es ist $\mathcal{D}(\mathcal{H}(f)) = \mathcal{D}\left(\sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}\right) = \sum_{i=0}^{d} f_i = f$.

Sei nun $F$ homogen vom Grad $d$. Schreibe $F$ als

$$F = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}.$$

Dann hat jedes $f_i$ Grad $i$ und sei $e = \deg \sum_{i=0}^{d} f_i$. Insbesondere ist $e \leq d$. Damit:

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(F)) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^{d} f_i\right) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^{e} f_i\right) = \sum_{i=0}^{e} f_i X_0^{e-i} = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{e-i}.$$

Also ist $F = X_0^{d-e} \cdot \mathcal{H}(\mathcal{D}(F))$.

(b) Sei $F$ homogen vom Grad $d$ und $f := \mathcal{D}(F)$. Seien $x_0,..., x_n \in k$ mit $x_0 \neq 0$. Dann gilt:

$$F(x_0,..., x_n) = x_0^d \cdot F\big(1, \tfrac{x_1}{x_0},..., \tfrac{x_n}{x_1}\big) = x_0^d \cdot f\big(\tfrac{x_1}{x_0},..., \tfrac{x_n}{x_1}\big).$$

(c) $\mathcal{D}$ ist die Auswertungsabbildung für $X_0 = 1$ und mit Skalarmultiplikation verträglich, damit also ein $k$-Algebrenhomomorphismus.

Seien $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ und $g = \sum_{i=0}^{e} g_i$, mit $f_i$ bzw. $g_i$ homogen vom Grad $i$. Dann ist:

$$\mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g) = \left(\sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{e} g_i X_0^{e-i}\right) = \sum_{k=0}^{d+e}\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k}$$

$$\mathcal{H}(f \cdot g) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{e} f_i g_j\right) = \mathcal{H}\left(\sum_{k=0}^{d+e}\sum_{j=0}^{k} f_i g_{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{d+e}\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k}$$

da $f_i g_{k-i}$ Grad $k$ hat. Also ist $\mathcal{H}(f \cdot g) = \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g)$.

Sei, ohne Einschränkung, $e \leq d$. Dann gilt für die Summe von $f$ und $g$:

$$f + g = \sum_{i=0}^{d}(f_i + g_i) = \sum_{i=0}^{d-j}(f_i + g_i),$$

für ein $j \in \mathbb{N}_0$, denn eventuell heben sich Summanden weg. Es gilt also

$$\mathcal{H}(f + g) = \sum_{i=0}^{d-j}(f_i + g_i) X_0^{d-i-j}$$

und damit

$$X_0^j \mathcal{H}(f+g) = \mathcal{H}(f) + \sum_{i=0}^{d} g_i X_0^{d-i} = \mathcal{H}(f) + \sum_{i=0}^{e} g_i X_0^{d-i} = \mathcal{H}(f) + X_0^{d-e} \cdot \mathcal{H}(g),$$

da $g_i = 0$ für $i > e = \deg g$. Das zeigt die Behauptung. □

Definition: Für ein Ideal $I \subseteq k[X_1,\dots,X_n]$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$I^* = (\mathcal{H}(I)) = (\mathcal{H}(f) \mid f \in I)$$

das von den Homogenierungen aller Polynome aus $I$ erzeugte Ideal.

Lemma 2.9: Seien $I \subseteq k[X_1,\dots,X_n]$ ein Ideal und $I^*$ wie eben, sowie $\varphi_0\colon \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ wie in Definition/Bemerkung 1.3 (b). Seien $\mathfrak{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $\mathfrak{V}(I^*) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die zugehörigen Varietäten. Dann gilt $\varphi_o(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{V}(I^*)$.

*Beweis:* Sei $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{A}^n(k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{V}(I) &\iff \forall f \in I\colon f(x) = 0 \\ &\iff \forall f \in I\colon F(1 : x_1 : \dots : x_n) = 0 \text{ für } F = \mathcal{H}(f) \\ &\iff \forall f \in I\colon F(\varphi_0(x)) = 0 \\ &\iff \varphi_0(x) \in \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{V}(I^*)$. □

Proposition 2.10: Sei $\varphi_0\colon \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ wie vorher. Dann ist $\varphi_0$ ein Homöomorphismus auf $\mathfrak{U}_0$.

*Beweis:* Wir zeigen, dass Bilder und Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{U}_0$ hat die Form $\mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$ mit einem homogenen Ideal $J$. Für eine solche sei $I = (\mathcal{D}(F) \mid F \in J, F \text{ homogen})$ und $I^* = (\mathcal{H}(I))$ wie vorher.

Dann gilt $J \subseteq I^*$, denn: Sei $F \in J$ homogen und $f = \mathcal{D}(F) \in I$ seine Dehomogenisierung. Dann gilt $F = X_0^e \mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) \in I^*$, also $\mathfrak{V}(J) \supseteq \mathfrak{V}(I^*)$.

Wir zeigen $\varphi_0^{-1}(\mathfrak{V}(J)) = \mathfrak{V}(I)$, also $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$. Lemma 2.9 sagt

$$\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0,$$

also wissen wir $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) \subseteq \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$. Seien umgekehrt

$$z = (1 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0, \quad x = (x_1,\dots,x_n)$$

und $f \in I$; sei dabei ohne Einschränkung $f$ ein Erzeuger, also $f = \mathcal{D}(F)$ für ein $F \in J$. Es gilt dann $f(x_1,\dots,x_n) = F(1 : x_1 : \dots : x_n) = 0$, also $x \in \mathfrak{V}(I)$. Damit ist $\varphi_0$ stetig. Wegen Lemma 2.9 ist

$$\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{U}_0$, also ist $\varphi_0^{-1}$ auch stetig. □

Lemma 2.11: Sei wieder $K$ algebraisch abgeschlossen, $I \subseteq K[X_1,\dots,X_n]$ ein Radikalideal, $\varphi_0$ und $I^*$ wie oben. Dann ist $\mathfrak{V}(I^*)$ die kleinste Varietät in $\mathbb{P}^n(K)$, die $\varphi_0(\mathfrak{V}(I))$ enthält.

*Beweis:* Wir zeigen: $\overline{\varphi_0(\mathfrak{V}(I))} = \mathfrak{V}(I^*)$. Aus Lemma 2.9 folgt $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) \subseteq \mathfrak{V}(I^*)$. Sei nun $J$ ein homogenes Ideal mit $\mathfrak{V}(J) \supseteq \varphi_0(\mathfrak{V}(I))$. Wir zeigen $J \subseteq I^*$. Sei dazu $F \in J$ homogen und $f = \mathcal{D}(F)$ seine Dehomogenisierung. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{V}(I)$:

$$F(\varphi_0(x)) = f(x) = 0, \text{ also } f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I} = I.$$

Damit folgt $\mathcal{H}(f) \in I^*$, also $F = X_0^e \cdot \mathcal{H}(\mathcal{D}(F)) \in I^*$. □

Korollar 2.12: Sei $K$ algebraisch abgeschlossen, $f \in K[X_1,\ldots,X_n]$ und $F = \mathcal{H}(f)$. Dann gilt $\overline{\varphi_0(\mathfrak{V}(f))} = \mathfrak{V}(F)$.

*Beweis:* Das folgt aus Lemma 2.11: sei $I = (f)$, dann ist $I^* = (F)$. □

Definition 2.13: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Die Menge

$$\widetilde{V} = \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k) \mid (x_0 : \cdots : x_n) \in V\} \cup \{(0,\ldots,0)\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$$

heißt *affiner Kegel zu $V$*.

Beispiel: Für $\mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist das wirklich ein Kegel.

Proposition 2.14: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät.

(a) Der affine Kegel $\widetilde{V}$ über $V$ ist eine affine Varietät in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.
Genauer: ist $V = \mathfrak{V}^{\text{proj}}(\mathcal{F})$ für eine Menge $\mathcal{F} \subseteq k[X_0,\ldots,X_n]$, die aus homogenen nichtkonstanten Polynomen besteht, dann gilt $\widetilde{V} = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F})$ in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.

(b) Sei $k$ unendlich und $V$ nichtleer. Dann gilt $\mathfrak{I}^{\text{aff}}(V) = \mathfrak{I}^{\text{proj}}(V)$.

*Beweis:* (a) Sei $V = \mathfrak{V}(\mathcal{F})$. Falls $\mathcal{F}$ ein vom Nullpolynom verschiedenes konstantes Polynom enthält, ist $V = \varnothing$ und damit $\widetilde{V} = \{(0,\ldots,0)\}$, was eine affine Varietät ist. Sonst sei $x = (x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(K)$. Ist $x$ der Nullpunkt, so liegt $x$ sowohl in $\widetilde{V}$ als auch in $\mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F})$, da ein nichtkonstantes homogenes Polynom immer $(0,\ldots,0)$ als Nullstelle hat. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$x \in \mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F}) \iff \forall f \in \mathcal{F}\colon f(x_0,\ldots,x_n) = 0 \iff (x_0,\ldots,x_n) \in \mathfrak{V}^{\text{proj}}(\mathcal{F}).$$

Also gilt $\mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F}) = \widetilde{V}$.

(b) Wir zeigen $\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(\widetilde{V})$, falls $V \neq \varnothing$.
Sei zunächst $f \in k[X_0,\ldots,X_n]$ ein homogenes Polynom. Es gilt

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{I}(V) &\iff \forall (x_0 : \cdots : x_n) \in V\colon f(x_0 : \cdots : x_n) = 0 \\ &\iff \forall x \in \widetilde{V} \setminus \{0\}\colon f(x) = 0 \\ &\iff f \in \mathfrak{I}(\widetilde{V}). \end{aligned}$$

Wir benutzen hierbei, dass für ein $f \in \mathfrak{I}(V)$, das homogen und nicht konstant ist, $f(0) = 0$ gilt (falls $V \neq \varnothing$).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathfrak{I}(\widetilde{V})$ ein homogenes Ideal ist. Dazu zeigen wir: Ist $f \in \mathfrak{I}(\widetilde{V})$ mit

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i, \qquad (f_i \text{ homogen von Grad } i)$$

dann gilt $f_i \in \mathfrak{I}(\widetilde{V})$ für alle $i \in \{0,\dots,d\}$. Da mit einem $x \in \widetilde{V}$ auch $\lambda x \in \widetilde{V}$ für alle $\lambda \in k$ gilt, haben wir für alle $x \in \widetilde{V}$:

$$0 = f(x) = f(\lambda x) = \sum_{i=0}^{d} f_i(\lambda x) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i f_i(x).$$

Wenn wir das als Polynom in $\lambda$ auffassen, folgt $f_i(x) = 0$ für alle $i$, da $k$ unendlich ist. Also ist $f_i \in \mathfrak{I}(\widetilde{V})$ für alle $i$. □

Wir können nun den projektiven Nullstellensatz beweisen.

*Beweis von Proposition 2.6:* Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I$ ein homogenes Ideal in $K[X_0,\dots,X_n]$.

(b) Sei $I \neq K[X_0,\dots,X_n]$ und $V = \mathfrak{V}^{\text{proj}}(I) = \mathfrak{V}(I^{\text{homogen}}) \subseteq \mathbb{P}^n(K)$. Ist dann $V = \varnothing$, gilt, nach Proposition 2.14 (b), $\{(0,\dots,0)\} = \widetilde{V} = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(I^{\text{homogen}}) = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)$ und damit nach dem affinen Hilbertschen Nullstellensatz $\sqrt{I} = \mathfrak{I}(\mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)) = (X_0,\dots,X_n)$. Die umgekehrte Implikation ist klar.

(a) Wenn $I = K[X_0,\dots,X_n]$, stimmt die Aussage. Sei also $I \neq K[X_0,\dots,X_n]$ und $\sqrt{I} \neq (X_0,\dots,X_n)$. Nach (b) gilt dann $\mathfrak{V}^{\text{proj}}(I) \neq \varnothing$, also, nach Korollar 2.12 und dem affinen Hilbertschen Nullstellensatz,

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{I}(\widetilde{V}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)) = \sqrt{I}.$$ □

Definition 2.15: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Dann heißt

$$k[V] := k[X_0,\dots,X_n] \big/ \mathfrak{I}(V)$$

*homogener Koordinatenring.* $k[V]$ ist eine graduierte $k$-Algebra mit Graduierung

$$k[V]_d = k[X_0,\dots,X_n]_d \big/ \mathfrak{I}(V) \cap k[X_0,\dots,X_n]_d \,.$$

# 3 Quasi-projektive Varietäten

Definition 3.1: $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt *quasi-projektive Varietät*, wenn $W$ offene Teilmenge einer projektiven Varietät ist.

Bemerkung 3.2: Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät. Dann gilt:

(a) Jede offene Teilmenge $\widehat{W} \subseteq W$ ist Vereinigung affiner Varietäten, also

$$\widehat{W} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \text{ mit } U_\lambda \subseteq \mathfrak{U}_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\},$$

wobei die $U_\lambda$ offen und die $\varphi_i^{-1}(U_\lambda)$ affin als abstrakte Varietät sind.

(b) $W$ ist quasikompakt.

*Beweis:* (a) Wir identifizieren, via $\varphi_i$, die $\mathfrak{U}_i$ mit $\mathbb{A}^n(k)$ und schreiben

$$\widehat{W} = \bigcup_{i=0}^{n} \widehat{W} \cap \mathfrak{U}_i.$$

Nun gilt die Aussage für die $\widehat{W} \cap \mathfrak{U}_i \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ nach Bemerkung 5.9 (c) und Beispiel 5.15 (a) aus Kapitel I, da die $\mathfrak{D}(f)$ eine Basis der Topologie bilden und affin als abstrakte Varietäten sind.

(b) Sei $W = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ eine offene Überdeckung. Dann gilt auch

$$W = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cap \mathfrak{U}_i.$$

Nach Bemerkung 5.9 (b) aus Kapitel I genügen aber für jedes $i$ endlich viele offene Mengen, also genügen auch insgesamt endlich viele. $\square$

# 4 Reguläre Funktionen

Seien, wie bisher, $k$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{U}_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}$ und $\varphi_i \colon \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$, $(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n) \longmapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)$.

Bemerkung: Seien $F$, $G$ homogene Polynome mit $\deg F = \deg G$. Dann ist $\frac{F}{G}$ wohldefiniert auf $\mathfrak{D}(G) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$.

Definition 4.1: Seien $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät und $r \colon W \longrightarrow k$ eine Abbildung.

(a) Wir nennen $r$ *regulär in* $p \in W$, wenn es eine offene Umgebung $U_p \subseteq W$ von $p$ und homogene Polynome $G$ und $H$ mit $\deg G = \deg H$ und $G(z) \neq 0$ für alle $z \in U_p$ gibt, so dass

$$r = \frac{H}{G} \text{ auf } U_p.$$

(b) Wir nennen $r$ *regulär*, wenn $r$ regulär in jedem $p \in W$ ist.

Bemerkung 4.2: Sei $r \colon W \longrightarrow k$ eine Abbildung. Dann ist $r$ genau dann regulär, wenn $r|_{W \cap \mathfrak{U}_i}$ regulär für jedes $i$ ist, d.h. $r \circ \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(W)}$ ist reguläre Funktion der quasi-affinen Varietät $\varphi_i^{-1}(W)$, definiert wie in Kapitel I, Definition 5.3 (a).

*Beweis:* Sei zunächst $r$ regulär. Dann gibt es für jedes $p \in \varphi_i^{-1}(W)$ eine offenes $U_{\varphi_i(p)}$ mit homogenen Polynomen $G$ und $H$, so dass dort $r = \frac{G}{H}$ gilt. Dann gilt

$$r \circ \varphi_i = \frac{G \circ \varphi_i}{H \circ \varphi_i} = \frac{g}{h},$$

wobei $g$ und $h$ die Dehomogenisierungen bzgl. $X_i$ von $G$ bzw. $H$ sind, also ist $r \circ \varphi_i$ regulär im Affinen.

Sei nun $q \in W$, ohne Einschränkung sei $q$ schon in $\mathfrak{U}_0$, also gibt es $p \in \varphi_0^{-1}(W)$ mit $\varphi_0(p) = q$. Nach Voraussetzung gibt es $g$ und $h$, so dass $r \circ \varphi_0 = \frac{g}{h}$ auf einer Umgebung $U_p$ von $p$. Dann ist dort aber schon

$$r = \frac{G}{H} \cdot \frac{X_0^{D-\deg G}}{X_0^{D-\deg H}},$$

wobei $D := \max\{\deg G, \deg H\}$ und $G$ und $H$ die Homogenisierungen von $g$ bzw. $h$ sind. Damit ist $r$ regulär. □

Definition/Bemerkung 4.3: Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq W$ definieren wir

$$\mathcal{O}_W(U) := \{r \colon U \longrightarrow k \mid r \text{ ist regulär}\}.$$

(a) $\mathcal{O}_W(U)$ ist eine $k$-Algebra.

(b) $U \longmapsto \mathcal{O}_W(U)$ ist eine Garbe von $k$-Algebren (dabei: $\varnothing \longmapsto \mathcal{O}_W(\varnothing) = \{0\}$).

**Ab jetzt:** Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

**Satz 5:** *Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ eine projektive Varietät. Dann gilt:*

*(a) $V$ zusammenhängend $\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_V(V) = K$.*

*(b) Es sei $K[V] = K[X_0,\dots,X_n]/\mathfrak{I}(V)$ der homogene Koordinatenring und $F \in K[V]$ homogen mit $\deg F \geq 1$. Dann gilt:*

$$\mathcal{O}(\mathfrak{D}(F)) \cong (K[V]_F)_0 := \{\frac{G}{F^k} \mid G \in K[V] \text{ homogen}, \deg G = k \cdot \deg F\}.$$

*Wir nennen das* homogene Lokalisierung.

*Beweis:* (b) Wir definieren eine Abbildung

$$\Psi \colon (K[V]_F)_0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{D}(f)), \quad \frac{G}{F^k} \longmapsto \left(z \longmapsto \frac{G(z)}{F^k(z)}\right).$$

$\Psi$ ist wohldefiniert und injektiv, denn

$$\frac{G_1(z)}{F^n(z)} = \frac{G_2(z)}{F^m(z)} \; \forall z \in \mathfrak{D}(F) \implies G_1 \cdot F^m = G_2 \cdot F^n \text{ auf } \mathfrak{D}(F).$$

Dann ist aber schon $(G_1 \cdot F^m - G_2 \cdot F^n) \cdot F = 0$ auf ganz $V$, also $\frac{G_1}{F^n} = \frac{G_2}{F^m}$ in $(K[V]_F)_0$.

Wir zeigen nun: $\Psi$ ist auch surjektiv.

Sei dazu $r \in \mathcal{O}(\mathfrak{D}(F))$. Falls $\mathfrak{U}_i \cap V \neq \varnothing$ ist, nach Bemerkung 4.2, $r \circ \varphi_i$ auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{U}_i = \mathfrak{D}(f_i)$ regulär, wobei $f_i$ die Dehomogenisierung von $F$ bzgl. $X_i$

ist. Jetzt sind wir im Affinen und nach Kapitel I, Korollar 5.11 (a), gibt es dort ein $g_i \in K[X_0,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_n]$ und $k_i \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$r \circ \varphi_i = \frac{g_i}{f_i^{k_i}}.$$

Diesen Ausdruck können wir wieder homogenisieren und eventuell mit einer $X_i$-Potenz multiplizieren und erhalten so

$$r|_{\mathfrak{U}_i} = \frac{G_i}{F_i^{k_i} \cdot X_i^{e_i}}, \text{ mit } G_i \in K[X_0,\ldots,X_n] \text{ und } e_i \in \mathbb{N}_0.$$

Da $\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{D}(F^k)$ können wir eventuell zu einer Potenz von $F$ übergehen. Sei also ohne Einschränkung $k_i = 1$. Also ist

$$r = \frac{G_i}{X_i^{e_i} \cdot F} \text{ auf } \mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{U}_i.$$

Insbesondere gilt $\frac{G_i}{X_i^{e_i} F} = \frac{G_j}{X_j^{e_j} F}$ auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j)$ und damit bereits

$$G_i \cdot X_j^{e_j} \cdot F \cdot X_j \cdot X_i = G_j \cdot X_i^{e_i} \cdot F \cdot X_j \cdot X_i \text{ auf ganz } V, \tag{$*$}$$

denn außerhalb von $\mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j) \cap \mathfrak{D}(F)$ ist der Ausdruck konstant 0.

Da $F$ homogen mit $\deg F \geq 1$ ist, ist $F \in (X_0,\ldots,X_n)$. Wir finden sogar ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $F^m \in (X_0^{e_0+1},\ldots,X_n^{e_n+1})$, denn es gilt $\deg F^m = m \cdot \deg F$, wir können also

$$F^m = \sum_i a_{\alpha^{(i)}} X_0^{\alpha_0^{(i)}} \cdots X_n^{\alpha_n^{(i)}} \text{ mit } \alpha_0^{(i)} + \cdots + \alpha_n^{(i)} = m \cdot \deg F$$

schreiben und dabei $m$ so groß wählen, dass

$$m \cdot \deg F \geq \sum_{i=0}^{n} (e_i + 1).$$

Es gibt also ein $j$ mit $\alpha_j^{(i)} \geq e_{j+1}$ und damit wird $F^m$ von $X_j^{e_j+1}$ geteilt und liegt, wie behauptet, in dem Ideal.

Damit liegt $F^{m+1}$ in $(F \cdot X_0^{e_0+1},\ldots,F \cdot X_n^{e_n+1})$, also finden wir $h_i \in K[X_0,\ldots,X_n]$, so dass

$$F^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} h_i \cdot F \cdot X_i^{e_i+1}$$

gilt. Wir setzen $G := \sum\limits_{i=0}^{n} h_i G_i X_i$ und mit Hilfe von $(*)$ lässt sich

$$X_j \cdot F^{m+1} \cdot G_j = \sum_{i=0}^{n} X_j h_i F X_i^{e_i+1} G_j = \sum_{i=0}^{n} X_i h_i F X_j^{e_j+1} G_i = F \cdot G \cdot X_j^{e_j+1}$$

einsehen. Somit gilt, auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{U}_j$, gerade

$$\frac{G}{F^{m+1}} = \frac{G_j}{X_j^{e_j} \cdot F} = r|_{\mathfrak{U}_j}.$$

Also ist, nach Bemerkung 4.2, $\Psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right) = r$, damit ist $\Psi$ surjektiv und die Isomorphie ist gezeigt.

(a) Ohne Einschränkung genügt es die Aussage nur für irreduzible $V$ zu zeigen, denn: Sei

$$V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Wenn $f \in \mathcal{O}_V$ auf jedem $V_i$ konstant ist, so ist es, da $V$ als zusammenhängend vorausgesetzt war, schon auf ganz $V$ konstant.

Sei also $V$ irreduzibel. Dann ist $\mathfrak{I}(V)$ ein Primideal und $K[V]$ nullteilerfrei und demnach $L := \operatorname{Quot}(K[V])$ ein Körper.

Sei $r \in \mathcal{O}_V(V)$. Definiere

$$f_i := r|_{\mathfrak{U}_i} \in \mathcal{O}_V(\mathfrak{U}_i) = (K[V]_{X_i})_0.$$

Also ist $f_i = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ mit $G_i$ homogen vom Grad $d_i$. Wir können nun $f_i$ als Element von $L$ auffassen.

Zeige: $f_i$ ist ganz über $K[V]$, d.h. $f_i^m + a_{m-1}f_i^{m-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_j \in K[V]$.

Dann können wir das nämlich mit $X_i^{d_i m}$ multiplizieren und erhalten

$$G_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j G_i^j X_i^{d_i(m-j)} = 0.$$

Dabei hat $G_i^m$ Grad $d_i \cdot m$ und auch $G_i^j X_i^{d_i(m-j)}$ Grad $d_i \cdot j + d_i(m-j) = d_i \cdot m$.

Ohne Einschränkung haben also alle $a_j$ Grad 0 und sind damit in $K$. Damit ist $f_i$ ganz über $K$ und da $K$ algebraisch abgeschlossen ist, liegt es somit schon in $K$, ist also konstant.

Damit ist auch $r|_{\mathfrak{U}_i}$ konstant für jedes $i$ und somit auch $r$.

Es bleibt zu zeigen: $f_i$ ist ganz über $K[V]$.

Zunächst sieht man, dass die $\frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ alle in $L$ das selbe Element definieren, denn

$$\frac{G_i}{X_i^{d_i}} = \frac{G_j}{X_j^{d_j}} \iff X_j^{d_j} G_i - G_j X_i^{d_i} = 0$$

auf $\mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j)$ und das liegt dicht in $V$, denn $V$ ist irreduzibel. Damit sind die Ausdrücke nach Kapitel I, Bemerkung 5.13 (b), schon auf ganz $V$ gleich.

Wir setzen also $f := f_i$ in $L$ und zeigen, dass $f$ ganz über $K[V]$ ist.
Sei dazu $d := d_0 + \cdots + d_n$, wobei $d_i := \deg G_i$. Wir zeigen noch:

(i) $K[V]_d \cdot f^t \subseteq K[V]_d \; \forall t \in \mathbb{N}$, denn sind $\alpha_i \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = d$, so ist
$$X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n} \cdot f \in K[V]_d \cdot f$$
und sogar in $K[V]$, denn $f = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ und es gibt sicherlich ein $i$ mit $\alpha_i \geq d_i$. Damit sehen wir
$$X_i^{\alpha_i} \cdot f = X_i^{\alpha_i} \cdot \frac{g_i}{X_i^{d_i}} = X_i^{\alpha_i - d_i} \cdot g_i$$
und $X_i^{\alpha_i - d_i} g_i$ hat gerade Grad $\alpha_i$, insgesamt hat der Ausdruck also wieder Grad $d$, wir erhalten also
$$K[V]_d \cdot f \subseteq K[V]_d$$
und iterativ $K[V]_d f^t \subseteq K[V]_d$.

(ii) $K[V][f] \subseteq \frac{1}{X_0^d} \cdot K[V]$, denn aus (i) folgt, dass insbesondere $X_0^d f^t \in K[V]$, also für alle $t \in \mathbb{N}$
$$f^t \in \frac{1}{X_0^d} \cdot K[V].$$

(iii) Daraus folgt: $f$ ist ganz über $K[V]$, denn $\frac{1}{X_0^d} K[V]$ ist ein endlich erzeugter $K[V]$-Modul und aus Algebra II wissen wir, dass dann auch $K[V][f]$ als Untermodul endlich erzeugt ist und damit $f$ ganz über $K[V]$ ist. □

# 5 Morphismen

Definition/Bemerkung 5.1: Seien $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, $W' \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ quasi-projektive Varietäten.

(a) Eine Abbildung $f \colon W \longrightarrow W'$ heißt *Morphismus*, wenn es zu jedem $z \in W$, eine offene Umgebung $U_z \subseteq W$ von $z$ und Polynome $F_0,\ldots, F_m \in k[X_0,\ldots, X_n]$ vom gleichen Grad gibt, so dass für alle $y \in U_z$ gilt:
$$f(y) = (F_0(y) : \cdots : F_m(y))$$

(b) Betrachte $f \colon \mathbb{P}^n(k) \supseteq W \longrightarrow W' \subseteq \mathbb{P}^m(k)$. Das liefert eine Abbildung
$$\mathbb{A}^n(k) \supseteq f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j \subseteq \mathbb{A}^m(k).$$
Jetzt gilt: $f$ ist genau dann ein Morphismus, wenn für alle $i, j$ mit
$$U_{ij} := f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \neq \varnothing$$

die Abbildung $f|_{U_{ij}}: U_{ij} \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j$ ein Morphismus von quasi-affinen Varietäten ist (siehe Definition/Bemerkung 5.14 in Kapitel I).

(c) Morphismen $W \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ entsprechen bijektiv den regulären Funktionen.

(d) Morphismen sind stetig.

(e) Die quasi-projektiven Varietäten bilden mit den Morphismen eine Kategorie. Diese heißt $\mathcal{V}ar_k$.

*Beweis:* (b) Sei zunächst $f$ ein Morphismus. Dann kann man $f$ lokal schreiben als (ohne Einschränkung: $i = 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= (F_0(1 : x_1 : \cdots : x_n) : \cdots : F_m(1 : x_1 : \cdots : x_n)) \\ &= (f_0(x) : \cdots : f_m(x)) = \left(\frac{f_0(x)}{f_j(x)},\ldots,\frac{f_{j-1}(x)}{f_j(x)},\frac{f_{j+1}(x)}{f_j(x)},\ldots,\frac{f_m(x)}{f_j(x)}\right) \end{aligned}$$

wobei $f_j$ die Dehomogenisierung von $F_j$ nach $X_0$ bezeichnet.

Für die Rückrichtung weiß man, dass, nach Definition/Bemerkung 5.14 (d), $f$ auf $U_{ij}$ gegeben ist durch

$$f(y) = (r_1(y),\ldots,r_m(y))$$

wobei $r_i = \frac{f_i}{g_i}$. Wir setzen $z = (y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_i : \cdots : y_n)$. Damit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 : \frac{f_1(y)}{g_1(y)} : \cdots : \frac{f_m(y)}{g_m(y)}\right) \\ &= (G_1(z) \cdot \cdots \cdot G_m(z) X_0^{e_0} : F_1(z) X_0^{e_1} : \cdots : F_m(z) X_0^{e_m}) \end{aligned}$$

wobei $F_i$ und $G_i$ die Homogenisierungen von $f_i$ bzw. $g_i$ bzgl. $X_0$ sind und die $e_i$ so gewählt seien, dass am Ende alle Polynome denselben Grad haben.

(c) Zu zeigen:

$$\{f\colon W \longrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^1(k) \mid f \text{ ist Morphismus}\} \longleftrightarrow \mathcal{O}(W).$$

Wir identifizieren $\mathfrak{U}_0$ mit $k$ durch die Bijektion $\Psi\colon (x_0 : x_1) \longmapsto \frac{x_1}{x_0} \in k$. Als Zuordnung findet sich dann

$$f \longmapsto r := \Psi \circ f, \quad r \longmapsto f = \Psi^{-1} \circ r$$

Außerdem sehen wir: Ist $f$ ein Morphismus, so gilt lokal: $f(z) = (F(z) : G(z))$. Also gilt lokal:

$$r(z) = \frac{G(z)}{F(z)},$$

also ist $r$ regulär.

Ist umgekehrt $r$ regulär, so gilt lokal: $r(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$. Damit haben wir

$$f(z) = \Psi^{-1}(r(z)) = (1, \frac{G(z)}{F(z)}) = (F(z) : G(z))$$

und $f$ ist ein Morphismus.

(d) Zeige: Jeder Morphismus $f\colon W \longrightarrow W'$ ist stetig.

Idee: Führe Stetigkeit zurück auf die affine Situation. Wir wissen, es gilt:

$$\bigcup_{i=0}^{n} \mathfrak{U}_i = \mathbb{P}^n, \ \bigcup_{i=0}^{m} \mathfrak{U}_j = \mathbb{P}^m \text{ und } f\colon \mathbb{P}^n \supseteq W \longrightarrow W' \subseteq \mathbb{P}^m.$$

Betrachte also

$$f_{ij} = f|_{U_{ij}}\colon U_{ij} = f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j =: W'_j \subseteq \mathfrak{U}_j \cong \mathbb{A}^m$$

Nach (b) sind die $f_{ij}$ Morphismen im affinen Sinn und damit insbesondere stetig (siehe Proposition 2.10 und Kapitel I, Bemerkung 4.4).

Wir zeigen nun, dass $U_{ij}$ offen in $W$ ist: $f$ ist lokal (auf einer offenen Umgebung $U_z$ von $z$) gegeben durch

$$f(w) = (F_0(w) : \cdots : F_m(w)).$$

Also ist

$$U_{ij} \cap U_z = \{w \in U_z \cap \mathfrak{U}_i \mid f(w) \in \mathfrak{U}_j\} = \{w \in U_z \cap \mathfrak{U}_i \mid F_j(w) \neq 0\}$$

offen. Damit ist aber auch $U_{ij}$ offen.

Insgesamt sehen wir: $f$ ist auf jedem $U_{ij}$ stetig, und deshalb auch insgesamt stetig.

(e) ist klar. □

Korollar 5.2: (a) Für eine Abbildung $f\colon W \longrightarrow W'$ zwischen quasi-projektiven Varietäten gilt:

$$f \text{ ist ein Morphismus} \iff \begin{array}{c} f \text{ ist stetig und für offenes } U \subseteq W', g \in \mathcal{O}(U) \text{ gilt:} \\ g \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U)). \end{array}$$

(b) Seien $W_1$ und $W_2$ affine Varietäten. Durch die Einbettungen

$$W_1 \subseteq \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$$
$$W_2 \subseteq \mathbb{A}^m(k) \hookrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^m(k)$$

können wir sie als quasi-projektive Varietäten auffassen. Dann ist $f\colon W_1 \longrightarrow W_2$ genau dann ein Morphismus im Sinn von Definition/Bemerkung 5.1, wenn $f$ auch ein Morphismus im Sinn von Definition 4.1 aus Kapitel I ist.

*Beweis:* (a) Die Richtung von links nach rechts folgt aus Definition/Bemerkung 5.1 (d) (Stetigkeit), Definition/Bemerkung 5.1 (c) (reguläre Abbildungen entsprechen Morphismen nach $\mathbb{A}^1$) sowie Definition/Bemerkung 5.1 (e) (Verkettung von Morphismen funktioniert).

Zur Rückrichtung: Nach den Voraussetzungen ist $f_{ij}$ stetig und zieht reguläre Funktionen zu regulären Funktionen zurück. Nach Proposition 5.12 aus Kapitel I ist $f_{ij}$ ein Morphismus und nach Definition/Bemerkung 5.1 (b) ist damit auch $f$ ein Morphismus.

(b) Aus (a) folgt: Ist $f$ ein Morphismus in der projektiven Welt, so ist $f$ stetig und respektiert die Strukturgarbe. Wieder nach Proposition 5.12 aus Kapitel I ist $f$ ein Morphismus im affinen Sinn. □

Beispiel 5.3: (a) Sei $k$ ein unendlicher Körper und der Morphismus $f$ wie folgt gegeben:

$$f\colon \mathbb{P}^2 \setminus \{(0:0:1)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0 : x_1)$$

Dann lässt sich $f$ in $(0:0:1)$ nicht stetig fortsetzen.

Denn: Wir nehmen an, es gäbe $(r:s) \neq (0:0)$ mit $f(0:0:1) = (r:s)$. Dann müsste für $(\widetilde{r} : \widetilde{s}) \neq (r:s)$ die Menge $f^{-1}(\{(\widetilde{r}:\widetilde{s})\})$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^2$ sein.

Aber: $f^{-1}(\{(\widetilde{r}:\widetilde{s})\}) = \{(\lambda\widetilde{r} : \lambda\widetilde{s} : 1) \mid \lambda \in k\setminus\{0\}\} \cup \{(\widetilde{r}:\widetilde{s}:0)\}$. Also:

$$f^{-1}(\{(\widetilde{r}:\widetilde{s})\}) \cap \mathfrak{U}_2 \longleftrightarrow \{(\lambda\widetilde{r}, \lambda\widetilde{s}) \mid \lambda \in k \setminus\{0\}\} \subsetneq \{(\lambda\widetilde{r}, \lambda\widetilde{s}) \mid \lambda \in k\} \cong \mathbb{A}^1$$

Folglich enthält $\{(\lambda\widetilde{r}, \lambda\widetilde{s}) \mid \lambda \in k\setminus\{0\}\}$ unendlich viele Elemente und ist nicht isomorph zum Bild von $\mathbb{A}^1$ und damit nicht abgeschlossen in $\mathbb{A}^2$. Also kann $f$ nicht stetig auf ganz $\mathbb{P}^2$ sein.

(b) Sei $E := \mathfrak{V}(X_0X_2^2 - X_1^3 + X_1X_0^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$. Also gilt:

$$E \cap \mathfrak{U}_0 = \{(1:x_1:x_2) \in \mathfrak{U}_0 \mid x_2^2 - x_1^3 + x_1 = 0\} \longleftrightarrow \{(x,y)\in\mathbb{A}^2 \mid y^2 = x^3 - x\}$$

Weiter ist $E \setminus (E \cap \mathfrak{U}_0) = \{(0:0:1)\}$. Nun lässt sich

$$f\colon E \cap \mathfrak{U}_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0:x_1:x_2) \longmapsto (x_0:x_1)$$

auf $E$ in $(0:0:1)$ fortsetzen durch

$$f(x_0:x_1:x_2) = \begin{cases} (x_0:x_1), & \text{falls } (x_0:x_1:x_2) \neq (0:0:1), \\ (x_1^2 : x_2^2 + x_1x_0), & \text{falls } (x_0:x_1:x_2) \neq (1:0:0). \end{cases}$$

Das ist wohldefiniert, denn für $(x_0:x_1:x_2) \notin \{(0:0:1),(1:0:0)\}$ gilt:

$$(x_0:x_1) = (x_0(x_2^2+x_1x_0) : x_1(x_2^2+x_1x_0)) = (x_1^3 : x_1x_2^2 + x_0x_1^2) = (x_1^2 : x_2^2 + x_0x_1)$$

Dabei wurde benutzt, dass der Punkt auf $E$ liegt und $x_2^2 + x_1x_0 \neq 0$ sowie $x_1 \neq 0$.

Jetzt erhält man einen Morphismus $E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ „vom Grad 2“.

(c) Betrachte

$$f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow W := \mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2)$$

$f$ ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$g\colon \mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \begin{cases} (x_0 : x_1), & x_0 \neq 0, \\ (x_1 : x_2), & x_1 \neq 0, \end{cases}$$

Die Koordinatenringe dazu sind: $K[\mathbb{P}^1] = K[X_0, X_1]$ sowie

$$K[W] = K[\mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2)] = K[X_0, X_1, X_2] \big/ (X_0X_2 - X_1^2) \ .$$

Wir sehen: $K[W]$ ist nicht faktoriell, denn $\overline{X_1}^2 = \overline{X_0X_2}$.

Insbesondere sind $K[\mathbb{P}^1]$ und $K[W]$ nicht isomorph.

Folglich sind auch die affinen Kegel nicht isomorph, d.h $\mathbb{A}^2$ und

$$\mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{A}^3$$

sind nicht isomorph.

(d) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto (cx_1 + dx_0 : ax_1 + bx_0)$$

ein Automorphismus des $\mathbb{P}^1$.

Definition 5.4: Eine quasi-projektive Varietät $W \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt *affin*, wenn $W$ isomorph zu einer affinen Varietät in einem $\mathbb{A}^m \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^m$ ist.

Definition/Bemerkung 5.5: Sei $K$ algebraisch abgeschlossen und $W \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ eine quasi-projektive Varietät.

(a) Eine *rationale Funktion* auf $W$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren $(U, f)$, wobei $U$ offen und dicht in $W$ ist, $f \in \mathcal{O}(U)$ und

$$(U, f) \sim (U', f') \iff f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$$

(b) Ist $W$ irreduzibel, so ist

$$K(W) := \mathrm{Rat}(W) := \{f\colon W \dashrightarrow K \mid f \text{ ist rationale Funktion}\}$$

ein Körper. Dieser heißt *Funktionenkörper*.

(c) Ist $W$ irreduzibel, so gilt für jede dichte, offene, affine Teilmenge $U$ von $W$:

$$K(W) \cong \mathrm{Quot}(\mathcal{O}(U))$$

(d) Ist $W = V$ eine irreduzible projektive Varietät, so gilt:

$$K(V) \cong \mathrm{Quot}^{\mathrm{homogen}}(K[V]) := (K[V]_s)_0$$

mit $S := \{f \in K[V] \mid f \text{ ist homogen}, f \neq 0\}$. $K(V)$ ist der homogene Quotientenkörper, also:

$$(K[V]_s)_0 = \left\{\frac{f}{g} \in \mathrm{Quot}(K[V]) \mid f, g \text{ homogen}, \deg f = \deg g\right\}$$

*Beweis:* (c) Sei $U \subseteq W$ wie in der Behauptung gegeben. Betrachte

$$\mathrm{Rat}(W) \longrightarrow \mathrm{Rat}(U), \quad [(\widetilde{U}, f)] \longmapsto [(U \cap \widetilde{U}, f|_{U \cap \widetilde{U}})].$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da $U$ dicht in $W$ ist. Außerdem ist sie nach Definiton der Äquivalenzrelation auch injektiv. Jetzt folgt aus Definition/Bemerkung 6.1 in Kapitel I:

$$\mathrm{Rat}(W) \cong \mathrm{Rat}(U) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}(U)).$$

(b) Dass $K(W)$ ein Körper ist, folgt aus (c).

(d) Die Abbildung

$$\mathrm{Quot}^{\mathrm{homogen}}(K[V]) \longrightarrow \mathrm{Rat}(V), \quad \frac{f}{g} \longmapsto \left[\mathfrak{D}(g), x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

ist ein Isomorphismus. □

Definition/Bemerkung 5.6: Seien $W_1$, $W_2$ quasi-projektive Varietäten.

(a) Eine *rationale Abbildung* $f\colon W_1 \dashrightarrow W_2$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren $(U, f_U)$, wobei $U \subseteq W_1$ offen und dicht, $f_U\colon U \longrightarrow W_2$ ein Morphismus ist und

$$(U, f_U) \sim (\widetilde{U}, f_{\widetilde{U}}) \iff f_U|_{U\cap\widetilde{U}} = f_{\widetilde{U}}|_{U\cap\widetilde{U}}$$

(b) $f$ heißt *dominant*, wenn das Bild in $W_2$ für einen Repräsentanten $(U, f_U)$ (und damit für alle) dicht ist.

(c) Die Zuordnung $W \longmapsto K(W) = \mathrm{Rat}(W)$ definiert eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{irreduzible quasi-projektive}\\ \text{Varietäten mit dominanten}\\ \text{rationalen Abbildungen}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{endlich erzeugte}\\ \text{Körpererweiterungen } L/K\\ \text{mit } K\text{-Algebrenhomomorphismen}\end{array}\right\}$$

*Beweis:* (c) folgt aus dem Affinen (vgl. Satz 4) beziehungsweise Definition/Bemerkung 5.5.

Denn: Für ein $r\colon W_1 \dashrightarrow W_2$ erhalten wir durch die Wahl eines Repräsentanten, affines $U_2 \subseteq W_2$ und affines $U_1 \subseteq r^{-1}(U_2) \subseteq W_1$ und durch Einschränken von $r$ eine Abbildung $U_1 \longrightarrow U_2$.

Jeder Körper wird bis auf Isomorphie getroffen, denn: Aus der affinen Situation (vgl. Satz 4) wissen wir, dass es für jede endliche Körpererweiterung $L/K$ eine affine Varietät $U$ mit $K(U) \cong L$ gibt.

Fasse nun $U$ als quasi-projektive Varietät auf. Der Funktor aus Satz 4 induziert ein Isomorphismus auf den Morphismenmengen.

$$\Phi(r\colon W_1 \dashrightarrow W_2) = \begin{cases} K(W_2) \longrightarrow K(W_1) \\ g \longmapsto g \circ r \end{cases}$$

Nach der Überlegung zu Beginn des Beweises entsprechen die rationalen Abbildungen zwischen $W_1$ und $W_2$ bijektiv den rationalen Abbildungen zwischen den entsprechenden affinen Varietäten und diese entsprechen nach Satz 4 den Morphismen zwischen $K(U_2)$ und $K(U_1)$. Nach Definition/Bemerkung 5.5 ist $K(U_2)$ isomorph zu $K(W_2)$ und genauso ist $K(U_1) \cong K(W_1)$. $\square$

# 6 Graßmann-Varietäten

Sei $G(d, n) := \{U \subseteq K^n \mid U \text{ ist Untervektorraum vom } K^n \text{ von Dimension } d\}$.

BEISPIEL:
- $d = 1$: $G(1, n)$ entspricht dem $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.
- $d = n$: $G(n, n)$ ist einelementig.

**Ziel:** *Wir wollen versuchen, $G(d, n)$ mit der Struktur einer projektiven Varietät zu versehen. Dafür brauchen wir eine „natürliche“ Einbettung in einen $\mathbb{P}^D(k)$.*

DEFINITION/BEMERKUNG 6.1: Sei $1 \le d \le n$, $V = K^n$, $\bigwedge^d V$ die *d-te äußere Potenz* und

$$\mathbb{P}(V) := {V \setminus \{0\}}\big/{\sim}\,, \text{ wobei } w_1 \sim w_2 \;:\Longleftrightarrow\; \exists \lambda \in K^\times \text{ mit } w_2 = \lambda w_1.$$

Dann ist die Abbildung

$$\Psi\colon G(d, n) \longrightarrow \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^d V), \quad U = \langle u_1, \ldots, u_d\rangle \longmapsto [u_1 \wedge \cdots \wedge u_d]$$

wohldefiniert und injektiv.

ERINNERUNG:
- $\bigwedge^d V$ hat die Basis $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n\}$. Insbesondere ist $\dim \bigwedge^d V = \binom{n}{d}$.
- $\wedge$ ist multilinear und alternierend, insbesondere gilt $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0$, wenn $v_i = v_j$ für $i \neq j$. Genauer:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0 \iff v_1, \ldots, v_d \text{ sind linear abhängig.}$$

*Beweis von Definition/Bemerkung 6.1:* Sei $v_1, \cdots, v_d$ eine Basis von $U$. Sei $\widetilde{v}_1, \cdots, \widetilde{v}_d$ eine andere Basis von $U$. Dann gibt es

$$\widetilde{v}_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} v_j$$

mit $A := (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_d(K)$. Damit gilt aber

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{v}_d &= \sum_{j=1}^{d} a_{1j} v_j \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1}^{d} a_{dj} v_j = \sum_{\sigma \in S_d} a_{1\sigma(1)} v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge a_{d\sigma(d)} v_{\sigma(d)} \\ &= \left( \sum_{\sigma \in S_d} (-1)^{\sigma} \cdot \prod_{j=1}^{d} a_{j\sigma(j)} \right) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \det A \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \end{aligned}$$

(wobei $(-1)^{\sigma}$ das Signum von $\sigma$ bedeutet), und da $\det A \neq 0$ ist, sind die beiden Punkte äquivalent, die Abbildung ist also wohldefiniert.

Für die Injektivität überlegen wir uns, dass $U = \{v \in V \mid v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0\}$ ist, wobei $v_1,\ldots, v_d$ eine Basis von $U$ ist. Das ist so, denn es gilt:

$$\begin{aligned} v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0 &\iff v, v_1,\ldots, v_d \text{ sind linear abhängig} \\ &\iff v \in \langle v_1,\ldots, v_d \rangle = U, \end{aligned}$$

da $v_1,\ldots, v_d$ als Basis linear unabhängig sind. □

Definition/Bemerkung 6.2: Sei $[w] \in \mathbb{P}(\bigwedge^d(V))$. Dann gilt

$$[w] \in \mathrm{Bild}\, \Psi \iff \exists\, v_1,\ldots, v_d \in V \text{ linear unabhängig mit } w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d.$$

In diesem Fall heißt $w$ *total zerlegbar*. Insbesondere gilt, wenn $w \wedge v_i = 0$ für alle $i \in \{1,\ldots, d\}$, für die lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \bigwedge\nolimits^{d+1} V, \quad \varphi_w \colon v \longmapsto w \wedge v,$$

dass $\dim(\mathrm{Kern}\, \varphi_w) \geq d$.

Lemma 6.3: Sei $d \geq 2$ und $w \in \bigwedge^d V$. Dann gilt:

(a) $v \in \mathrm{Kern}\, \varphi_w \iff \exists\, w' \in \bigwedge^{d-1} V$ mit $w = v \wedge w'$,

(b) Seien $v_1,\ldots, v_k \in V$ linear unabhängig. Dann gilt:

$$v_1,\ldots, v_k \in \mathrm{Kern}\, \varphi_w \iff \exists\, w' \in \bigwedge\nolimits^{d-k} V \text{ mit } w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w'.$$

(c) $\dim(\mathrm{Kern}\, \varphi_w) \leq d$,

(d) $\dim(\mathrm{Kern}\, \varphi_w) = d \iff w$ ist total zerlegbar.

*Beweis:* Die Aussagen (a), (c) und (d) folgen sofort aus (b). Es genügt also das zu zeigen. Die eine Implikation ist nach Definition von $\varphi_w$ sofort klar.

Seien also $v_1,\dots,v_k \in \operatorname{Kern}\varphi_w$. Diese ergänzen wir zu einer Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ von $V$ mit

$$e_1 = v_1,\dots,e_k = v_k.$$

Für $w$ finden wir also

$$w = \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_d\leq n\\ \bar{\imath}=(i_1,\dots,i_d)}} \lambda_{\bar{\imath}} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}.$$

Für $j \in \{1,\dots,k\}$ gilt dann $e_j \in \operatorname{Kern}\varphi_w$, also:

$$0 = w\wedge e_j = \sum_{\bar{\imath}} \lambda_{\bar{\imath}} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\wedge e_j = \sum_{\substack{\bar{\imath}\\ j\notin\{i_1,\dots,i_d\}}} \lambda_{\bar{\imath}} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\wedge e_j$$

und das ist eine Linearkombination von linear unabhängigen Vektoren. Also ist $\lambda_{\bar{\imath}} = 0$ für die $\bar{\imath} = (i_1,\dots,i_d)$, für die es ein solches $j$ gibt, also wenn $\{1,\dots,k\}\setminus\{i_1,\dots,i_d\}\neq\varnothing$ gilt. Damit $\lambda_{\bar{\imath}}\neq 0$ gelten kann, muss also $\{1,\dots,k\}\subseteq\{i_1,\dots,i_d\}$ gelten, also sind nur solche Summanden in unserer Darstellung von $w$ relevant. Damit haben wir

$$w = \sum_{\bar{\imath}} \lambda_{\bar{\imath}} e_1\wedge\cdots\wedge e_k\wedge e_{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e_{i_d} = (e_1\wedge\cdots\wedge e_k)\wedge\left(\sum_{\bar{\imath}} \lambda_{\bar{\imath}} e_{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\right)$$

und $\left(\sum_{\bar{\imath}} \lambda_{\bar{\imath}} e_{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\right)$ liegt in $\bigwedge^{d-k} V$, ist also eine geeignete Wahl für $w'$.□

PROPOSITION 6.4: Das Bild von $\Psi$ ist in $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ abgeschlossen, d.h. $\operatorname{Bild}\Psi$ ist eine projektive Varietät.

*Beweis:* Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} := \{e_1,\dots,e_n\}$ von $V$. Dann finden wir

$$\mathcal{S}_d := \{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d} \mid 1\leq i_1<\cdots<i_d\leq n\}$$

als zugehörige Basis von $\bigwedge^d V$. Sei wieder, für $w\in\bigwedge^d V$,

$$\varphi_w\colon V \longrightarrow \bigwedge^{d+1} V,\quad v\longmapsto w\wedge v,$$

und $\mathcal{L}_w := (l_{ij}(w))_{i,j}$ die Abbildungsmatrix von $\varphi_w$ bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{S}_{d+1}$. Außerdem sind die $l_{ij}$ linear in $w$.

Aus Definition/Bemerkung 6.2 und Lemma 6.3 folgt, dass

$$w\in\operatorname{Bild}\Psi \iff \dim(\operatorname{Kern}\varphi_w)\geq d \iff \operatorname{Rang}\varphi_w\leq n-d \iff \det(l_{ij}(w))_{I,J} = 0,$$

für alle $|I| = |J| = n-d+1$, also alle $n-d+1$-Minoren der Matrix 0 sind (d.h. wenn beliebige $n-d+1$ Zeilen bzw. Spalten linear abhängig sind).

Diese sind homogene Polynome in den Koordinaten von $w$ (bzgl. $\mathcal{S}_d$) von Grad $n-d+1$. $\operatorname{Bild}\Psi$ ist Nullstelle von diesen und damit projektive Varietät. □