《数值分析》之

数值积分

徐岩，夏银华

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn, yhxia@ustc.edu.cn

https://bb.ustc.edu.cn

Bernoulli多项式

- Bernoulli多项式是由下列等式定义

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(t) = (n+1)t^n$$

- 最初的几个Bernoulli多项式是

$$B_0(t) = 1$$

$$B_1(t) = t - \frac{1}{2}$$

$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$$B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$$

Bernoulli多项式性质

1. $B_n' = nB_{n-1}, \ (n \geqslant 1).$
2. $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}, \ (n \geqslant 2).$
3. $B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_k(0) t^{n-k}.$
4. $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t).$

Bernoulli多项式引理

Theorem

函数$G(t)=B_{2n}(t)-B_{2n}(0)$在开区间$(0,1)$中没有零点。

证明：有性质2和4，令$t=0$得到

$$B_n(0)=B_n(1)=(-1)^nB_n(0)$$

从而有$B_3(0)=B_5(0)=B_7(0)=\cdots=0$.
反证法。假设$G(t)$在开区间$(0,1)$中有一个零点。
由$G(0)=G(1)=0$,由Rolle中值定理知$G'(t)$在(0,1)中有2个零点.
$\because G'(t)=B'_{2n}(t)=2nB_{2n-1}(t), \Longrightarrow B_{2n-1}(t)$在(0,1)中有2个零点.
又$\because B_{2n-1}(0)=B_{2n-1}(1)=0$,
$\Longrightarrow B'_{2n-1}(t)=(2n-1)B_{2n-2}(t)$在(0,1)中有3个零点.
由此可知,对所有奇数指标$k<2n$, B_k在(0,1)中至少有2个零点.
因此, B_3除0,1两个零点外,在(0,1)中还有2个零点. 而B_3为三次多项式, 这显然是不可能的.

Theorem

对于$f \in C^{2m}[0,1]$,

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)] + R$$

其中

$$b_k = B_k(0)$$

$$R = -\frac{b_{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi),\ (0 < \xi < 1).$$