《数值分析》之

函数逼近

徐岩、夏银华

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn, yhxia@ustc.edu.cn

https://bb.ustc.edu.cn/

周期函数的插值

- 多项式函数不适合插值周期函数
- 如果函数的周期是2π，那么$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$的线性组合是比较适当的插值函数
- Fourier分析：若f是周期为2π的函数，具有连续的一阶导数，那么

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

一致收敛于f，其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt$$

周期函数的插值: $f(x) = e^{\sin x} \sin x$

n	$\|f - p_n\|_\infty$	n	$\|f - p_n\|_\infty$
1	$1.16E+00$	8	$2.01E-07$
2	$2.99E-01$	9	$1.10E-08$
3	$4.62E-02$	10	$5.53E-10$
4	$5.67E-03$	11	$2.50E-11$
5	$5.57E-04$	12	$1.04E-12$
6	$4.57E-05$	13	$4.01E-14$
7	$3.24E-06$	14	$2.22E-15$

- 复Hilbert空间$L_2[-\pi,\pi]$中的内积定义为

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

$\{E_k(x)=e^{ikx}\}$构成它的一组标准正交基

- 定义

$$\langle f,g\rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(2\pi j/N)\overline{g(2\pi j/N)}$$

此时由$\langle f,f\rangle_N=0$无法得出$f=0$, 但它满足内积定义的其它性质, 如：非负性，共扼对称性，线性性，因此称为伪内积

- 伪范数

$$\|f\|_N = \sqrt{\langle f,f\rangle_N}$$

- $\|f\|_N=0$ 当且仅当$f(2\pi j/N)=0$, $j=0,\ldots,N-1$

Theorem

对任意$N \geqslant 1$,

$$\langle E_k, E_m \rangle_N = \begin{cases} 1 & N | k-m \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

证明：

$$\langle E_k, E_m \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} E_k\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \overline{E_m\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i (k-m)/N}\right)^j$$

如果$N | k-m$, 则$e^{2\pi i (k-m)/N} = 1$, 因此得证。若$N \not| k-m$, 则可以应用几何数列求和公式：

$$\langle E_k, E_m \rangle_N = \frac{e^{2\pi i (k-m)} - 1}{e^{2\pi i (k-m)/N} - 1} = 0$$

- 一个次数至多是n次的指数多项式指的是下列形式的函数

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}c_k(e^{ix})^k$$

Theorem

基函数$\{E_0,E_1,\ldots,E_{N-1}\}$关于伪内积是标准正交的

Theorem

在等距结点$x_j = 2\pi j/N$上插值给定函数f的次数不超过$N-1$的指数多项式由下式唯一确定：

$$P = \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k, \quad c_k = \langle f, E_k \rangle_N$$

证明：存在性验证

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k(x_v) &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, E_k \rangle_N E_k(x_v) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \overline{E_k(x_j)} E_k(x_v) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{E_j(x_k)} E_v(x_k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \langle E_v, E_j \rangle_N \\
&= f(x_v) \qquad (E_k(x_v) = E_v(x_k))
\end{aligned}$$

唯一性证明

设$\sum_{k=0}^{N-1} a_k E_k$是在$x_j = 2\pi j/N, j = 0, 1, \ldots, N-1$上插值$f$的指数多项式，则

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k E_k(x_j) = f(x_j), \qquad j = 0, \ldots, N-1$$

两边同乘以$\overline{E_n(x_j)}$，再对j求和，则有

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{j=0}^{N-1} E_k(x_j)\overline{E_n(x_j)} = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\overline{E_n(x_j)}$$

此即

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \langle E_k, E_n \rangle_N = \langle f, E_n \rangle_N$$

从而有$a_n = \langle f, E_n \rangle_N = c_n$ □

- 直接根据$c_k = \langle f, E_k \rangle_N$计算所有的$c_k$，需要$\mathcal{O}(N^2)$次乘法和加法
- 快速Fourier变换(FFT)把这个计算成本降到$\mathcal{O}(N \log N)$.

N	N^2	$N \log_2 N$
1 024	1 048 576	10 240
4 096	16 777 216	49 152
16 384	268 435 456	229 375

Theorem

设p和q是次数不超过$n-1$的指数多项式，使得对点$x_j=\pi j/n$有

$$p(x_{2j})=f(x_{2j}),\quad q(x_{2j})=f(x_{2j+1}),\quad j=0,1,\ldots,n-1$$

则在点$x_0,x_1,\ldots,x_{2n-1}$上插值f的次数不超过$2n-1$的指数多项式由下式给出：

$$P(x)=\frac{1}{2}(1+e^{inx})p(x)+\frac{1}{2}(1-e^{inx})q(x-\pi/n)$$

证明：由于e^{inx}是n次的，所以$P(x)$的次数不超过$2n-1$. 插值性可以直接验证。 □

Theorem

对于指数多项式定理中给出的多项式系数设为

$$p=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j E_j \quad q=\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j E_j \quad P=\sum_{j=0}^{2n-1}\gamma_j E_j$$

则对于$0\leqslant j\leqslant n-1$，有

$$\begin{aligned}\gamma_j &= \frac{1}{2}\alpha_j+\frac{1}{2}e^{-ij\pi/n}\beta_j\\ \gamma_{j+n} &= \frac{1}{2}\alpha_j-\frac{1}{2}e^{-ij\pi/n}\beta_j\end{aligned}$$

- 设$R(n)$表示计算点集$\{2\pi j/n : 0 \leqslant j \leqslant n-1\}$上插值多项式的系数所需的最小乘法运算次数
- $R(2n) \leqslant 2R(n) + 2n$
  - 分别用n次运算计算出$\frac{1}{2}\alpha_j$和$\frac{1}{2}e^{-ij\pi/n}\beta_j$
- $R(2^m) \leqslant m2^m$
  - 归纳法：$R(2^{m+1}) = R(2 \cdot 2^m) \leqslant 2R(2^m) + 2 \cdot 2^m$

指数多项式求值

- 给定指数多项式
$$p(x)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j E_j(x)$$
计算它在$t-2k\pi/n,\ k=0,1,\dots,n-1$上的值
- 令$x_k=2k\pi/n$,

$$\begin{aligned}p(t-x_k)&=\sum_{j=0}^{n-1} a_j E_j(t-x_k)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{ij(t-x_k)}\\&=\sum_{j=0}^{n-1} a_j E^{ijt}\overline{E_k(x_j)}=n\langle g,E_k\rangle_n\end{aligned}$$

其中g是一个满足$g(x_j)=a_j e^{ijt},\ j=0,1,\dots,n-1$的函数。这样对$g$进行FFT，得到系数值$\langle g,E_k\rangle_n$，乘以$n$以后就得到$p(t-x_k)$

上机作业

对函数$u(x) = \frac{1}{5-4\cos(x)}$和$v(x) = \sin\frac{x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

- 分别构造$P_N u(x)$，$P_N v(x)$, 在$N = 4, 8, 16, 32$时画出逐点误差对比图并解释你所看到的现象。
- 构造$\tilde{B}_N u(x)$，$\tilde{B}_N v(x)$，在$N = 4, 8, 16, 32$时画出逐点误差对比图并解释你所看到的现象。