HW08 Romberg 积分实验报告

PB22000150 刘行

2025 年 4 月 17 日

1 实验目的

本实验旨在掌握 Romberg 积分方法的基本原理和实现技巧, 并通过对带有奇异点或无穷积分上限函数的积分近似计算, 理解其在实际中的适用性与局限性.

2 实验原理

Romberg 积分是一种基于复化梯形公式和 Richardson 外推的数值积分方法, 其核心思想是:

- 首先构造一系列复化梯形积分的近似值:

$$T_k = \frac{1}{2}T_{k-1} + h_k \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + (2i-1)h_k\right) \tag{1}$$

  其中 $h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$.

- 接着对这些近似值使用 Richardson 外推, 以提高精度:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \tag{2}$$

- 最终构造出一个 Romberg 表格, 其右下角的值是最优近似.

3 算法实现

实验程序包括两个主要文件:

3.1 romberg.m

该函数实现了 Romberg 算法的核心逻辑:

1. 使用递推公式构建复化梯形积分 $R(k,1)$;
2. 对每一行, 逐步进行 Richardson 外推, 生成更高阶的近似值 $R(k,j)$;
3. 返回 Romberg 表格.

3.2 main.m

该脚本用于函数选择和积分计算流程控制, 用户可选以下函数进行积分:

1. $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$, 定义在 $[0,1]$, 并对 $x=0$ 处取极限值 1;
2. $f_2(x) = \frac{\cos x - e^x}{\sin x}$, 定义在 $[-1,1]$, $x=0$ 处定义为 -1;
3. $\widetilde{f}_3(x) = \frac{e^{-1/x}}{x}$, 在 $(0,1]$ 上有定义, 对 $x=0$ 取极限值 0. 此函数为目标积分 $\int_1^\infty (t\mathrm{e}^t)^{-1}\,\mathrm{d}x$ 经过变量替换 $t=\frac{1}{x}$ 后的形式.

4 实验结果与分析

我们以 $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ 为例, 在区间 $[0,1]$ 上进行积分, 设定最大迭代次数为 5, 实验输出如下:

```
Romberg 表格 (前 5 行):
 0.9207354924
 0.9397932848 0.9461458823
 0.9445135217 0.9460869340 0.9460830041
 0.9456908636 0.9460833109 0.9460830694 0.9460830704
 0.9459850299 0.9460830854 0.9460830704 0.9460830704 0.9460830704
```

通过表格可见, 随着迭代次数增加, 结果逐渐收敛, 说明 Romberg 方法具有高阶收敛性. 使用完善的第三方积分工具检测可以发现, 该积分的真实值为 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \approx 0.9460830704$, 与 Romberg 方法的结果非常接近.

其余两个函数 f_2 和 f_3 的积分结果也类似, 在迭代 5 次时的结果分别为:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x - e^x}{\sin x}\mathrm{d}x \approx -2.2466, \quad \int_1^\infty \left(t\mathrm{e}^t\right)^{-1}\mathrm{d}x \approx 0.2194$$

同样, 这些结果与真实值相差不大. 对于这几个函数, 即使其在 $x=0$ 处有间断性, Romberg 方法仍然能够给出一个合理的近似值, 这是因为补齐间断点后, 函数依然是光滑的. 对于 f_3 函数, Romberg 方法无法直接处理无穷积分, 在实际应用中, 可以对积分区间进行适当的变换.

5 结论与展望

Romberg 积分方法在处理一般光滑函数的数值积分中效果显著, 具有高阶收敛性. 然而, 遇到非光滑点、间断点或奇异点时, 仍需结合函数性质进行适当处理或采用其他积分方法 (如 Gauss 积分、变换积分区间等).