

# 《数值分析》之

## 函数逼近

徐岩、夏银华

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn, yhxia@ustc.edu.cn

<https://bb.ustc.edu.cn/>

# 周期函数的插值

- 多项式函数不适合插值周期函数
- 如果函数的周期是 $2\pi$ , 那么 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ 的线性组合是比较适当的插值函数
- Fourier分析: 若 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的函数, 具有连续的一阶导数, 那么

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

一致收敛于 $f$ , 其中

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt$$

# 周期函数的插值: $f(x) = e^{\sin x} \sin x$

$n$	$\ f - p_n\ _\infty$	$n$	$\ f - p_n\ _\infty$
1	$1.16E + 00$	8	$2.01E - 07$
2	$2.99E - 01$	9	$1.10E - 08$
3	$4.62E - 02$	10	$5.53E - 10$
4	$5.67E - 03$	11	$2.50E - 11$
5	$5.57E - 04$	12	$1.04E - 12$
6	$4.57E - 05$	13	$4.01E - 14$
7	$3.24E - 06$	14	$2.22E - 15$

# 内积与伪内积

- 复Hilbert空间 $L_2[-\pi, \pi]$ 中的内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$\{E_k(x) = e^{ikx}\}$ 构成它的一组标准正交基

- 定义

$$\langle f, g \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(2\pi j/N) \overline{g(2\pi j/N)}$$

此时由 $\langle f, f \rangle_N = 0$ 无法得出 $f = 0$ , 但它满足内积定义的其它性质, 如: 非负性, 共扼对称性, 线性性, 因此称为伪内积

- 伪范数

$$\|f\|_N = \sqrt{\langle f, f \rangle_N}$$

- $\|f\|_N = 0$  当且仅当  $f(2\pi j/N) = 0, j = 0, \dots, N-1$

## Theorem

对任意  $N \geq 1$ ,

$$\langle E_k, E_m \rangle_N = \begin{cases} 1 & N|k-m \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

证明：

$$\langle E_k, E_m \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} E_k\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \overline{E_m\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{2\pi i(k-m)/N})^j$$

如果  $N|k-m$ , 则  $e^{2\pi i(k-m)/N} = 1$ , 因此得证。若  $N \nmid k-m$ , 则可以应用几何数列求和公式：

$$\langle E_k, E_m \rangle_N = \frac{e^{2\pi i(k-m)} - 1}{e^{2\pi i(k-m)/N} - 1} = 0$$

- 一个次数至多是 $n$ 次的指数多项式指的是下列形式的函数

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^n c_k (e^{ix})^k$$

## Theorem

基函数 $\{E_0, E_1, \dots, E_{N-1}\}$ 关于伪内积是标准正交的

# 指数多项式插值

## Theorem

在等距结点  $x_j = 2\pi j/N$  上插值给定函数  $f$  的次数不超过  $N-1$  的指数多项式由下式唯一确定：

$$P = \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k, \quad c_k = \langle f, E_k \rangle_N$$

证明：存在性验证

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k(x_v) &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, E_k \rangle_N E_k(x_v) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \overline{E_k(x_j)} E_k(x_v) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{E_j(x_k)} E_v(x_k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \langle E_v, E_j \rangle_N \\ &= f(x_v) \quad (E_k(x_v) = E_v(x_k)) \end{aligned}$$

# 唯一性证明

设  $\sum_{k=0}^{N-1} a_k E_k$  是在  $x_j = 2\pi j/N, j = 0, 1, \dots, N-1$  上插值  $f$  的指数多项式, 则

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k E_k(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, N-1$$

两边同乘以  $\overline{E_n(x_j)}$ , 再对  $j$  求和, 则有

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{j=0}^{N-1} E_k(x_j) \overline{E_n(x_j)} = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \overline{E_n(x_j)}$$

此即

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \langle E_k, E_n \rangle_N = \langle f, E_n \rangle_N$$

从而有  $a_n = \langle f, E_n \rangle_N = c_n$





# 指数多项式的计算

- 直接根据  $c_k = \langle f, E_k \rangle_N$  计算所有的  $c_k$ , 需要  $\mathcal{O}(N^2)$  次乘法和加法
- 快速Fourier变换(FFT)把这个计算成本降到  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

$N$	$N^2$	$N \log_2 N$
1 024	1 048 576	10 240
4 096	16 777 216	49 152
16 384	268 435 456	229 375

# 指数多项式定理

## Theorem

设 $p$ 和 $q$ 是次数不超过 $n-1$ 的指数多项式, 使得对点 $x_j = \pi j/n$ 有

$$p(x_{2j}) = f(x_{2j}), \quad q(x_{2j}) = f(x_{2j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

则在点 $x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}$ 上插值 $f$ 的次数不超过 $2n-1$ 的指数多项式由下式给出:

$$P(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{inx})p(x) + \frac{1}{2}(1 - e^{inx})q(x - \pi/n)$$

证明: 由于 $e^{inx}$ 是 $n$ 次的, 所以 $P(x)$ 的次数不超过 $2n-1$ . 插值性可以直接验证。□

# 指数多项式的系数定理

## Theorem

对于指数多项式定理中给出的多项式系数设为

$$p = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j E_j \quad q = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j E_j \quad P = \sum_{j=0}^{2n-1} \gamma_j E_j$$

则对于  $0 \leq j \leq n-1$ , 有

$$\begin{aligned}\gamma_j &= \frac{1}{2}\alpha_j + \frac{1}{2}e^{-ij\pi/n}\beta_j \\ \gamma_{j+n} &= \frac{1}{2}\alpha_j - \frac{1}{2}e^{-ij\pi/n}\beta_j\end{aligned}$$

- 设 $R(n)$ 表示计算点集 $\{2\pi j/n : 0 \leq j \leq n-1\}$ 上插值多项式的系数所需的最小乘法运算次数
- $R(2n) \leq 2R(n) + 2n$ 
  - 分别用 $n$ 次运算计算出 $\frac{1}{2}\alpha_j$ 和 $\frac{1}{2}e^{-ij\pi/n}\beta_j$
- $R(2^m) \leq m2^m$ 
  - 归纳法:  $R(2^{m+1}) = R(2 \cdot 2^m) \leq 2R(2^m) + 2 \cdot 2^m$

# 指数多项式求值

- 给定指数多项式

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j E_j(x)$$

计算它在  $t - 2k\pi/n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  上的值

- 令  $x_k = 2k\pi/n$ ,

$$\begin{aligned} p(t - x_k) &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j E_j(t - x_k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{ij(t-x_k)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j E^{ijt} \overline{E_k(x_j)} = n \langle g, E_k \rangle_n \end{aligned}$$

其中  $g$  是一个满足  $g(x_j) = a_j e^{ijt}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  的函数。这样对  $g$  进行FFT, 得到系数值  $\langle g, E_k \rangle_n$ , 乘以  $n$  以后就得到  $p(t - x_k)$

- Fourier级数展开( $u \in L^2[0, 2\pi]$ )

$$\mathcal{P}_{2N}u(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{u}_n e^{inx}.$$

- 当  $u(x) \in H_{per}^r[0, 2\pi]$  时, 对  $0 \leq q \leq r$ , 存在与  $N$  无关常数  $C$ , 使得

$$\|u - \mathcal{P}_{2N}u\|_{L^2[0, 2\pi]} \leq CN^{-q} \|u^{(q)}\|_{L^2[0, 2\pi]}.$$

- 当  $u(x)$  解析时, 有

$$\|u - \mathcal{P}_{2N}u\|_{L^2[0, 2\pi]} \leq Ke^{-cN} \|u\|_{L^2[0, 2\pi]}.$$

# 三角函数多项式逼近

- 当  $u(x) \in W_{per}^r[0, 2\pi]$  时, 对  $0 \leq q \leq r$ , 存在与  $N$  无关常数  $C$ , 使得

$$\|u - \mathcal{P}_{2N}u\|_{W_{per}^q[0, 2\pi]} \leq C \frac{1}{N^{r-q}} \|u\|_{W_{per}^r[0, 2\pi]}.$$

- 当  $u(x) \in C_{per}^q[0, 2\pi]$ ,  $q > 1/2$  时, 存在与  $N$  无关常数  $C$ , 使得

$$\|u - \mathcal{P}_{2N}u\|_{L^\infty} \leq C \frac{1}{N^{q-\frac{1}{2}}} \|u^{(q)}\|_{L^2[0, 2\pi]}.$$

# 三角函数多项式插值

- 插值算子 (偶数格点)

$$\mathcal{I}_{2N}u(x) = \sum_{|n| \leq N} \tilde{u}_n e^{inx} = \sum_{j=0}^{2N-1} u(x_j) g_j(x).$$

其中

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{2N\tilde{c}_n} \sum_{j=0}^{2N-1} u(x_j) e^{-inx_j}, \quad x_j = \frac{2\pi}{2N}j.$$

- 当  $u(x) \in W_{per}^q[0, 2\pi]$ ,  $q > 1/2$  时, 对  $n \leq N$  有

$$\tilde{c}_n \tilde{u}_n = \hat{u}_n + \sum_{\substack{|m| \leq \infty \\ m \neq 0}} \hat{u}_{n+2Nm}.$$



# 三角函数多项式插值

- 当  $u(x) \in W_{per}^r[0, 2\pi]$ ,  $r > 1/2$  时, 对混叠误差(aliasing error)有

$$\|\mathcal{A}_N u\|_{L^2[0, 2\pi]} = \left( \sum_{|n| \leq N} |\tilde{c}_n \tilde{u}_n - \hat{u}_n|^2 \right)^{1/2} \leq CN^{-r} \|u^{(r)}\|_{L^2[0, 2\pi]}.$$

- 当  $u(x) \in W_{per}^r[0, 2\pi]$ ,  $r > 1/2$  时, 存在与  $N$  无关常数  $C$ , 使得

$$\|u - \mathcal{I}_{2N} u\|_{L^2[0, 2\pi]} \leq CN^{-r} \|u^{(r)}\|_{L^2[0, 2\pi]}.$$

- 当  $u(x) \in W_{per}^r[0, 2\pi]$ ,  $r > 1/2$  时, 对  $0 \leq q \leq r$ , 有

$$\|\mathcal{A}_N u\|_{W_{per}^q[0, 2\pi]} \leq CN^{-(r-q)} \|u\|_{W_{per}^r[0, 2\pi]}.$$

- 当  $u(x) \in W_{per}^r[0, 2\pi]$ ,  $r > 1/2$  时, 对  $0 \leq q \leq r$ , 存在与  $N$  无关常数  $C$ , 使得

$$\|u - \mathcal{I}_{2N} u\|_{W_{per}^q[0, 2\pi]} \leq CN^{-(r-q)} \|u\|_{W_{per}^r[0, 2\pi]}.$$

## 上机作业

对函数  $u(x) = \frac{1}{5-4\cos(x)}$  和  $v(x) = \sin \frac{x}{2}$ ,  $x \in [0, 2\pi]$

- 分别构造  $P_N u(x)$ ,  $P_N v(x)$ , 在  $N = 4, 8, 16, 32, 64$  时画出逐点误差对比图并解释你所看到的现象。
- 构造  $I_N u(x)$ ,  $I_N v(x)$ , 在  $N = 4, 8, 16, 32, 64$  时画出逐点误差对比图并解释你所看到的现象。