边值问题的有限差分法求解实验报告

刘行 PB22000150

2025 年 5 月 19 日

1 实验目的

本实验旨在通过有限差分法 (Finite Difference Method, FDM) 数值求解两类二阶常微分方程边值问题 (Boundary Value Problem, BVP), 并验证方法的数值精度与收敛阶. 通过构造具有解析解的问题, 评估所实现算法的有效性和收敛性.

2 问题模型

考虑一般形式的线性二阶边值问题:

$$x''(t) = u(t) + v(t)x(t) + w(t)x'(t), \quad t \in [a, b],$$

配以边界条件:

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta.$$

3 实验方法

3.1 有限差分法求解边值问题

- 算法步骤

  1. **离散化**: 将区间 $[a, b]$ 划分为 n 个小区间, 网格步长为 $h = \frac{b-a}{n}$, 得到节点 $t_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. 然后对方程中的二阶导数进行中心差分处理, 得到离散化方程.
  2. **差分格式**: 对于每一个网格节点 t_i, 将 $x''(t)$ 和 $x'(t)$ 使用差分格式表示. 具体来说, 我们有:
  $$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = u(t_i) + v(t_i)x_i + w(t_i)\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}.$$
  这会形成一个线性方程组, 要求解 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, 其中 $x_0 = \alpha$ 和 $x_n = \beta$ 分别为边界条件.
  3. **构造系数矩阵与右侧向量**: 根据差分公式, 可以构造系数矩阵 A 和右侧向量 F, 其中系数矩阵的大小为 $(n-1) \times (n-1)$, 右侧向量的大小为 $(n-1) \times 1$.
  4. **求解线性方程组**: 通过求解线性方程组 $A \cdot x = F$ 来获得 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. 然后将边界值 α 和 β 添加到解向量的两端, 得到完整的解向量 x.

5. **结果可视化**: 通过绘图展示数值解与实际解的比较, 便于分析误差和收敛性.

- 主要思路和细节

1. **网格生成与步长计算**: 在函数中, 首先通过 `linspace(a, b, n+1)` 生成 $n+1$ 个节点, 步长 h 为区间长度除以 n. 这些节点用于离散化方程.
2. **系数矩阵的构造**: 根据中心差分格式和边值条件, 循环计算矩阵 A 的每一行, 最后通过矩阵 A 和向量 F 来求解内部节点的解.
3. **解的计算与返回**: 通过 MATLAB 内建的 `\` 运算符求解线性方程组 $A \cdot x = F$, 得到内部节点的解 `x_inner`, 并将边界值 α 和 β 组合成最终的解向量.
4. **图形显示**: 若 `show` 参数为 `true`, 则通过 `plot` 函数绘制解的图像, 帮助可视化解的行为.

3.2 数值结果分析

在本实验中, 分别对两个不同的边值问题进行了求解, 并计算了每种情况下的误差与收敛阶. 通过图形展示数值解的精度, 并比较了不同网格划分下的误差变化, 分析了算法的收敛性.

4 实验设置

4.1 问题 1: 齐次常系数问题

- 区间: $[0, \frac{\pi}{2}]$
- 边值条件: $x(0) = 3, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 7$
- 微分方程:

$$x''(t) = -x(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = 0, \quad v(t) = -1, \quad w(t) = 0$$

- 解析解: $x(t) = 3\cos t + 7\sin t$

4.2 问题 2: 非齐次问题

- 区间: $[0, 1]$
- 边值条件: $x(0) = 2, \quad x(1) = e + \cos(1)$
- 微分方程:

$$x''(t) = 2e^t - x'(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = 2e^t, \quad v(t) = 0, \quad w(t) = -1$$

- 解析解: $x(t) = e^t + \cos t$

4.3 离散参数

令 $N = [10, 20, 40, 80, 160]$ 为网格数, 对每组 N 进行误差估计与收敛阶计算:

$$\text{error} = \max_i |x_i^{\text{exact}} - x_i^{\text{num}}|, \quad \text{order} = \frac{\log(e_{k-1}/e_k)}{\log(N_k/N_{k-1})}$$

5 实验结果

5.1 $N = 160$ 时的数值解图像

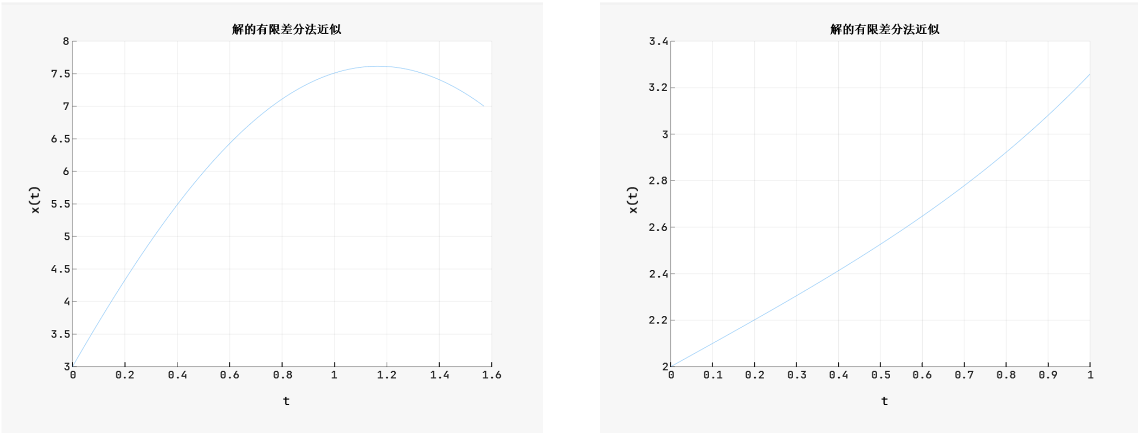

图 1: 问题 1 和问题 2 的数值解图像

5.2 误差和收敛阶

N	最大误差	收敛阶
10	5.7324e−03	–
20	1.4288e−03	2.0043
40	3.5749e−04	1.9988
80	8.9356e−05	2.0003
160	2.2341e−05	1.9999

N	最大误差	收敛阶
10	2.9584e−04	–
20	7.3917e−05	2.0008
40	1.8496e−05	1.9987
80	4.6244e−06	1.9999
160	1.1562e−06	1.9999

图 2: 问题 1 和问题 2 的误差与收敛阶对比

结果表明差分格式在这两个问题中都具有良好的二阶收敛性, 与理论分析一致.

6 结论

本实验验证了有限差分法在求解边值问题时的有效性, 数值误差与收敛阶表明算法达到了预期的二阶精度.

未来可考虑推广至变系数问题或非线性边值问题, 进一步验证算法的通用性与稳定性.